Universidad Nacional de Rio Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales
Departamento de Matemática

DOCUMENTO COMPLEMENTARIO
LÍNEAS CURRICULARES para MODELOS MATEMÁTICOS (2265)

AUTORES: *Comisión Curricular Permanente Lic. en Matemática. Agustina Gonzalez, Graciela Giubergia, Stefanía Demaria, Albina Priori, Marcelo Ruiz, Fernando Mazzone.*

CAMBIOS CURRICULARES PROPUESTOS

1. **UBICACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS:** *1° cuatrimestre de 5° año*
2. **CORRELATIVIDADES PARA CURSAR:**

Aprobada	Regular
Álgebra Lineal Aplicada (2261)	Ecuaciones Diferenciales (1913)
Cálculo Numérico computacional (2030)	Espacio Probabilidad- Estadistica

3. **CORRELATIVIDADES PARA RENDIR:** *Aprobadas: Álgebra Lineal Aplicada (2261), Ecuaciones Diferenciales (1913), Cálculo Numérico computacional (2230), Espacio Probabilidad y/o Estadística*
4. **HORAS SEMANALES** *8 o 10*
5. **OBJETIVOS PROPUESTOS** *Se aspira que el alumno alcance los siguientes objetivos.*

   a) *Que integre los conocimientos adquiridos durante el curso de su carrera en un marco conceptual ligado a las aplicaciones y al modelado matemático.*

   b) *Se apropie de lenguajes, métodos y conocimientos de otras disciplinas científicas.*

   c) *Mejore su capacidad para comunicarse con otros profesionales no matemáticos y brindarles asesoría en la aplicación de la matemática en sus respectivas áreas de trabajo.*

   d) *Se capacite en la habilidad de extraer información cualitava de datos cuantitativos.*

   e) *Desarrolle la capacidad de utilizar las herramientas computacionales de cálculo numérico y simbólico para plantear y resolver problemas.*

   f) *Logre la capacidad de construir modelos matemáticos a partir de situaciones reales.*

   g) *Se adiestre en la utilización de métodos analíticos para el análisis de modelos matemáticos y de allí establecer conclusiones sobre la realidad que ellos representan.*

6. **CARACTERÍSTICAS DE LA MATERIA**

Curricula Flexible. *Hay una gran variedad de técnicas, métodos y teorías matemáticas que son utilizadas para desarrollar modelos matemáticos: Teoría de Optimización, Teoría de Control, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Ecuaciones con retardo, Ecuaciones en diferencias, Procesos Estocásticos, Autómatas, Teoría de Juegos, etc. A su vez la modelación matemática se aplica a una gran variedad de contextos: economía, biología, sociología, medicina, dinámica de los lenguajes, física, deporte, etc.*

Una característica propia de los modelos matemáticos es que sucesos del devenir natural y humano hacen que algunos temas relacionados con la modelación adquieran repentina e impactante relevancia. Un ejemplo superlativo de ello es la pandemia del COVID-19.

Debido a la diversidad mencionada de temáticas y a las dinámicas cambiantes de las mismas se piensa que la mejor alternativa es proponer que la materia sea un espacio abierto, donde los docentes responsables del dictado, guiados por las consideraciones expuestas en este documento, elaboren un programa para la asignatura. La CCP de la Lic. en Matemática se encargará de efectuar una revisión periódica a fin de evaluar que las actividades propuestas se ajusten en cantidad, calidad y orientación con las exigencias del plan. Esta tarea se llevará adelante cada vez que haya un cambio del plantel docente y con una periodicidad no inferior a dos años.

Situaciones problemáticas reales. *Es aconsejable que el alumno se enfrente durante el cursado con situaciones problemáticas de una complejidad comparable a la que se le presentaría en la realidad y no sólo exponerlo a modelos simplicados. Se debe tender a que el estudiante desarrolle la capacidad de determinar qué técnicas y teorías matemáticas son las más adecuadas para modelizar esa realidad. Por consiguiente la materia debe formar al alumno en el manejo de una variedad representativa de estas técnicas.*

Computación científica. *Esto contempla la solución por medio de recursos computacionales de problemas matemáticos, la simulación de sistemas determinísticos evolutivos o la estimación de probabilidades de escenarios posibles en modelos estocásticos. Es aconsejable tanto el uso de la computadora para resolver problemas numéricamente, como valerse de sistemas de algebra computacional (SymPy, Mupad, Mathematica, Maple, etc) para la solución de problemas analíticos.*

Eficiencia *Un objetivo de la materia es desarrollar la capacidad de resolver problemas. La evaluación de la consecución de este objetivo debe ser ponderada tanto en la complejidad de los problemas abordados, como en el tiempo empleado en ello. En ese sentido es recomendable que el alumno aprende de valerse de recursos que ya están disponibles para resolver estos problemas. Por ejemplo, en la actualidad muchos lenguajes de computación ofrecen multitud de librerías, desarrolladas por usuarios de todo el mundo, especializadas en resolver problemas de distintas áreas de la matemática. La materia debe capacitar en buscar estos recursos, aprender a utilizarlos de manera autónoma.*

Interdisciplinaridad *Es aconsejable que durante el cursado invite a especialistas de otras áreas del saber a ofrecer charlas en el marco de la materia sobre problemáticas relacionadas con la modelización matemática. Deberían proponerse mecanismos de certificación y reconocimiento de estas actividades para los especialistas intervinientes.*

Intradisciplinaridad. *Propender a la consedireción de diversidad de teorías matemáticas, analizar los supuestos a los que mejor se ajustan cada una de ellas. Favorecer la participación de docentes con inserción en las diferenctes líneas de investigación del departamento.*

7. *Unidades temáticas y contenidos*

La siguiente enumeración pretende ser amplia pero no exhaustiva. Fue elaborada con el criterio de que queden representados una variedad grande de técnicas matemáticas. Recopila las temáticas históricas abordadas en la asignatura. Es presentada a modo de guía para los docentes responsables del espacio curricular. **Los mismos pueden confeccionar el programa eligiendo algunos temas de esta guía o proponer otros**.

Generalidades *Ingredientes de un modelo matemático. Variables, pará- metros, ecuaciones de estado. Teorías, Leyes Generales y relaciones constitutivas. Va- lidación de un modelo. Clasificación de los modelos: estáticos, dinámicos, determi- nistas, estocásticos, discretos y continuos. [9, 11, 32].*

Análisis Dimensional *Cantidades y dimensiones. Unidades primitivas y derivadas. El sistema internacional de unidades SI. Homogeneidad dimensional. Proceso de adimensionalización. El Teorema π-Buckingham. Aplicaciones [13, 23, 32, 33, 37, 45]*

Sistemas mecánicos *Sistemas de coordenadas inerciales. Mecánica Newtoniana. Ecuaciones de Newton. Leyes de balance. Vínculos. Principio del trabajo virtual. Sistemas conservativos. Ecuaciones de Lagrange. Multiplicadores de Lagrange y cálculo fuerzas de vínculo. Fricción seca y soluciones débiles de Fillippov. Elasticidad. Estudio cualitativo de sistemas. El péndulo y las integrales elípticas y las funciones elípticas de Jacobi. El problema de los dos cuerpos. Estudio cualitativo de sistemas. Equilibrios. Soluciones homoclínicas y heteroclínicas. Cuerpo rígido. El grupo de Lie SO*$(3,\mathbb{R})$ *y el álgebra de Lie* $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$. *Velocidad angular. Matriz de inercia. Ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido. Estudio cualitativo del cuerpo aislado. [6, 7, 12, 14, 23, 28, 36]*

Procesos de ramificación (branching) *Funciones generatrices de probabilidad: introducción y propiedades generales. Caracterización de las sucesiones de los tamaños* Z_n *de la* $n-$*ésima generación. Probabilidades de extinción del proceso* $\{Z_n\}$. *Modelos de crecimiento poblacional a edades dependiente (age-dependent branching processes). Bibliografía: [2, 9, 22, 30].*

Procesos de Markov. *Propiedades generales, funciones generatrices y clasificación de estados. Modelos de dinámicas poblacionales y evolución temporal del proceso de ramificación. Introducción a los procesos de nacimiento y al proceso de Poisson. Bibliografía: [2, 9, 22, 30].*

Dinámica de poblaciones *Ecuaciones en diferencias. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Independencia lineal. Casoratiano de funciones. Ecuación no homogénea. Método de coeficientes indeterminados. Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. Algorítmo de Putzer. Matrices diagonalizables. Autovalores y autovectores. autovectores generalizados. Formas de Jordan. Aplicaciones de ecuaciones escalares, modelos discretos de poblaciones de una especie. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones. Modelos estructurados. Modelos de Leslie de estructuras por edad. Modelos de Usher. Otros tipos de modelos más generales. Teorema de Perron-Frobenius, digrafos asociados a matrices. Tests de positividad. Comportamiento en grandes escala de tiempo del modelo de Leslie. Ecuaciones en diferencias no-lineales. Puntos fijos y soluciones periódicas. Estabilidad, estabilidad local y asintótica. Método de la telaraña. Estabilidad global. Teoría de bifurcaciones. Caos. Exponentes de Lyapunov. Modelos: Nicholson-Bailey, huesped parásito, predador-presa. Modelos continuos. Especies que interactúan. Competencia. Ecuaciones de Lotka-Volterra. Ecuaciones con retardo. Control óptimo. [1, 4, 5, 18, 25, 31, 31, 35, 39]*

Modelos Epidemiológicos *Modelos compartimentados. Influencia de la demografía. Modelos SIS, SIR y SEIR. El parámetro* $\mathscr{R}_0$. *La relación final. Equilibrios y extinsión. Modelos SIR y SIS estocásticos. Cadenas de Markov Discretas y continuas. Ecuaciones diferenciales estocásticas. Problemas de control óptimo. [3, 5, 15–17, 21, 38–40].*

Dinámica medios continuos *Hipótesis de continuidad de la materia. Densidad. Cantidades intensivas y extensivas. Coordenadas Lagrangianas y Eulerianas. Derivadas magnitudes intensivas y extensivas. Teorema del Transporte de Reynolds. Balance de masa. Fuerzas superficiales y extendidas. Teorema de Cauchy. Balance del momento lineal. Dinámica del Calor. Calor específico. Energía. Unidades de medida. Balance de energía. Fluidos incompresibles no viscosos. Ecuaciones de Euler. Fluidos incompresibles viscosos. Tensor de deformaciones. Ecuaciones de Navier-Stokes. Ley de conducción de fourier. Ecuación del Calor. Ecuación de ondas. Modelos de tráfico vehicular. [8, 11, 18, 20, 26, 29, 31, 33, 34, 37, 43]*

Modelos en medicina *Génesis tumoral. Modelos determinísticos. Modelos estocásticos. [10, 24, 39, 42, 46]*

Optimización, ajuste paramétrico *[13, 19, 21, 27] El problema del estimación de parámetros de modelos. Mínimos cuadrados. Método de Newton. Método de Levenberg—Marquardt. Estimación de máxima verosimilitud. Aplicaciones a modelos poblacionales, epidemiológicos, etc.*

Modelos en el deporte *Coordenadas geográficas y proyecciones cartográficas. Topografía: imágenes geotiff. Matlab: lectura de archivos, interpolación de funciones, desarrollo de interfaces de usuario. Lenguajes XML y GPX: breve descripción. Repaso de los conceptos de trabajo y potencia. Fuerzas que se oponen al movimiento de un ciclista. La ecuación del ciclista. [44]*

Economía Matemática *El equilibrio en los modelos económicos lineales. Un amplio esbozo de un flujo circular. Representaciones mediante ecuaciones lineales. La condicion de Hawkins-Simon. outputs y precios. El teorema* *de Frobenius. Restricciones de no negatividad. El problema del valor propio no negativo. La raiz de Frobenius. Significado económico de la raiz de Frobenius. Series de Neumann. Matrices no descomponibles. Estabilidad relativa de la trayectoria de crecimiento equilibrado. [41].*

Referencias

[1] *Linda J. S. Allen.* **An Introduction to Mathematical Biology**. *Pearson/Prentice Hall, nov 2007.*

[2] *Linda J. S. Allen.* **An Introduction to Stochastic Processes With Applications to Biology**. *CRC Press, dic 2010.*

[3] *Linda S. Allen.* **Stochastic Population and Epidemic Models: Persistence and Extinction**. *Springer International Publishing, sep 2015.*

[4] *Elizabeth S. Allman and John A. Rhodes.* **Mathematical Models in Biology: An Introduction**. *Cambridge University Press, jul 2004.*

[5] *S. Aniţa, V. Arnăutu, and V. Capasso.* **An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics: From Mathematical Models to Numerical Simulation with MATLAB®**. *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Boston, 2011.*

[6] *V.I. Arnold, E. Khukhro, V.V. Kozlov, and A.I. Neishtadt.* **Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics**. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2007.*

[7] *V.I. Arnold, K. Vogtmann, and A. Weinstein.* **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. *Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.*

[8] *Jacek Banasiak.* **Mathematical Modelling in One Dimension: An Introduction via Difference and Differential Equations**. *Cambridge University Press, feb 2013.*

[9] *Sandip Banerjee.* **Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications**. *CRC Press, feb 2014.*

[10] *Emmanuel Barillot, Laurence Calzone, Philippe Hupe, Jean-Philippe Vert, and Andrei Zinovyev.* **Computational Systems Biology of Cancer**. *CRC Press, ago 2012.*

[11] *N. Bellomo and L. Preziosi.* **Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation**. *Mathematical Modeling. Taylor & Francis, 1994.*

[12] *Nicola Bellomo, Luigi Preziosi, and Antonio Romano.* **Mechanics and Dynamical Systems With Mathematica®**. *Springer Science & Business Media, dic 2012.*

[13] *Edward A. Bender.* **An Introduction to Mathematical Modeling**. *Courier Corporation, mar 2000.*

[14] *David Betounes.* **Differential Equations: Theory and Applications**. *Springer Science & Business Media, oct 2009.*

[15] *Bernd Blasius, J□rgen Kurths, and Lewi Stone.* **Complex Population Dynamics: Nonlinear Modeling in Ecology, Epidemiology, and Genetics**. *World Scientific, nov 2007.*

[16] *Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez.* **Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology**. *Springer Science & Business Media, mar 2013.*

[17] *Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez, and Zhilan Feng.* **Mathematical Models in Epidemiology**. *Springer Nature, oct 2019.*

[18] *Martin Braun, Courtney S. Coleman, and Donald A. Drew.* **Differential Equation Models**. *Springer Science & Business Media, dic 2012.*

[19] *Lyle D. Broemeling.* **Bayesian Inference for Stochastic Processes**. *CRC Press, dic 2017.*

[20] *Alexandre J. Chorin and Jerrold E. Marsden.* **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics**. *Springer New York, jun 2000.*

[21] *Odo Diekmann, Hans Heesterbeek, and Tom Britton.* **Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics**. *Princeton University Press, nov 2012.*

[22] *R. Durrett.* **Probability: Theory and Examples**. *Cambridge University Press, 2010.*

[23] *Clive Dym.* **Principles of Mathematical Modeling**. *Academic Press, jul 2004.*

[24] *M. Eisen.* **Mathematical Models in Cell Biology and Cancer Chemotherapy**. *Springer Science & Business Media, mar 2013.*

[25] *Saber N. Elaydi.* **An Introduction to Difference Equations**. *Springer Science & Business Media, mar 2013.*

[26] *Giovanni P. Galdi.* **An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems**. *Springer New York, jul 2011.*

[27] *Neil A. Gershenfeld and Neil Gershenfeld.* **The Nature of Mathematical Modeling**. *Cambridge University Press, nov 1999.*

[28] *H. Goldstein.* **Mecánica clásica**. *Reverté, 1987.*

[29] *Michael Griebel, Thomas Dornsheifer, and Tilman Neunhoeffer.* **Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction**. *SIAM, ene 1998.*

[30] *D. Grimmett, G.; Stirzaker.* **Probability and random processes**. *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Oxford University Press, 2004.*

[31] *Richard Haberman.* **Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow**. *SIAM, dic 1998.*

[32] *Matti Heiliö, Timo Lähivaara, Erkki Laitinen, Timo Mantere, Jorma Merikoski, Kimmo Raivio, Risto Silvennoinen, Antti Suutala, Tanja Tarvainen, Timo Tiihonen, Jukka Tuomela, Esko Turunen, and Marko Vauhkonen.* **Mathematical Modelling**. *Springer, jul 2016.*

[33] *Mark H. Holmes.* **Introduction to the Foundations of Applied Mathematics**. *Springer Science & Business Media, jun 2009.*

[34] *Fridtjov Irgens.* **Continuum Mechanics**. *Springer Berlin Heidelberg, ene 2008.*

[35] *Yang Kuang.* **Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics**. *Academic Press, nov 1993.*

[36] *N.A. Lemos.* **Mecânica Analítica**. *LIVRARIA DA FISICA, 2007.*

[37] *C. C. Lin and L. A. Segel.* **Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences**. *SIAM, dic 100.*

[38] *Maia Martcheva.* **An Introduction to Mathematical Epidemiology**. *Springer, oct 2015.*

[39] *James D. Murray.* **Mathematical Biology: I. An Introduction**. *Springer Science & Business Media, feb 2011.*

[40] *James D. Murray.* **Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications**. *Springer Science & Business Media, feb 2011.*

[41] *H. Nikaido.* **Metodos matemáticos del Analisis Económico Moderno**. *Vincens Vives, 1978.*

[42] *W. Y. Tan and Leonid G. Hanin.* **Handbook of Cancer Models With Applications**. *World Scientific, nov 2008.*

[43] *Pieter Wesseling.* **Principles of Computational Fluid Dynamics**. *Springer Science & Business Media, nov 2001.*

[44] *D.G. Wilson, J. Papadopoulos, and F.R. Whitt.* **Bicycling Science**. *The MIT Press. MIT Press, 2004.*

[45] *Thomas Witelski and Mark Bowen.* **Methods of Mathematical Modelling: Continuous Systems and Differential Equations**. *Springer International Publishing, sep 2015.*

[46] *Dominik Wodarz and Natalia L. Komarova.* **Dynamics of Cancer: Mathematical Foundations of Oncology**. *World Scientific, nov 2014.*