Ensemble de notes

Malik Mezzadri[*]

14 décembre 2016

Résumé

Un objet est un ensemble de notes parmi les 12 notes de la gamme chromatique à tempérament égal. En considérant les propriétés de périodicité des objets par transposition, on distingue trois ensembles d'objets notés II, V, I et on présente les relations d'inclusion entre ces ensembles.

1 Définitions et propriétés

1.1 Objets et périodes

On note

$$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/\left(12\mathbb{Z}\right) = \{0, 1, 2, \dots 11\}$$

l'ensemble des douze notes de la gamme chromatique modulo l'octave. Pour signifier leur utilisation à la gamme chromatique, on associe à chaque élément un symbole de la suite :

$$\{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B\}.$$

Si $U = (u_1, u_2, \dots u_n) \subset \mathbb{Z}_{12}$ est un sous ensemble de n notes, $U \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_{12}}$. On note $\mathcal{T}_k U := U + k := \{u_1 + k, \dots u_n + k\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ la **transposition** de U par $k \in \mathbb{Z}_{12}$. On introduit la relation d'équivalence entre deux sous ensembles :

$$U' \sim U \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}_{12}, U' = \mathcal{T}_k U.$$

Exemple 1.1. Par exemple $U = \{C, D, E\}$ est équivalent à $U' = \{E, F\#, G\#\}$ car U' est une transposition de U par $k = 4$ demi-tons.

Un **objet** o est une classe d'équivalence c'est à dire un ensemble de notes modulo transposition :

$$o \in \mathcal{O} := \{0,1\}^{\mathbb{Z}_{12}} / \sim$$

[*]Malik Mezzadri musicien flûtiste de Jazz, compositeur. Nom d'artiste *: "Magic Malik"*.

La **période** $T(U) \in \mathbb{Z}_{12}$ de U est[1]

$$T(U) := \{k \in \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathcal{T}_k U = U\}.$$

La période est constante dans une classe d'équivalence, on note $T(o) := T(U)$ la période d'un objet o de représentant U.

Exemple 1.2. Par exemple

— La période de $U = \{C, D, E, F\#, G\#, A\#\}$ (la « gamme par ton ») est $T(U) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
— La période de $U = \{D, G\#\}$ est $T(U) = \{0, 6\}$.
— La période de $U = \{C, D, E, F, G, A, B\}$ (la gamme majeur) est $T(U) = \{0\}$.

Dans la proposition suivante on identifie la période $T(o)$ avec son générateur. Par exemple 1 est le générateur de $\mathbb{Z}_{12}$, 2 est le générateur de $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ etc.

Proposition 1.3. *L'ensemble $\mathcal{O}$ contient 352 objets dont*

Période T :	1	2	3	4	6	12
Nombre d'objets	2	1	2	3	9	335

Démonstration. Ce résultat s'obtient par énumération des objets. On l'obtient avec un programme disponible sur GitHub « kanular/Generalisation-Fonction-Musique ». Le programme génère un fichier de sortie qui liste tous les objets et leur propriétés. □

1.2 Objets symétriques et non symétriques

On dit que o est un **objet non symétrique** si $T(o) = \{0\}$. On note

$$A := \{o \in \mathcal{O}, \, T(o) = \{0\}\} \subset \mathcal{O}$$

l'ensemble des objets non symétriques. D'après la Proposition 1.3 il y a 335 objets dans A. Les autres objets sont appelés **symétriques** et on note

$$B := \mathcal{O} \backslash A.$$

l'ensemble des objets symétriques.

Si $o, o' \in \mathcal{O}$ sont deux objets, on note

$$o \subset o' \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall U \in o, \forall U' \in o', \exists k \in \mathbb{Z}_{12}, U + k \subset U',$$

i.e. si « l'objet o est **inclus** dans l'objet o' ».

On note

$$I := \{o \in A, \forall o' \in B, o \subsetneq o' \Rightarrow o' = \mathbb{Z}_{12}\}$$

1. noter que $T(U)$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}_{12}$ parmi $\{0\}, \{0, 6\}, \{0, 4, 8\}, \{0, 3, 6, 9\}, \{0, 2, 4, 6, 8\}, \mathbb{Z}_{12}$.

i.e. c'est l'ensemble des objets non symétriques qui ne sont inclus dans aucun objet symétrique hormis la gamme chromatique.

On note

$$II := A \backslash I$$

l'ensemble complémentaire c'est à dire les objets non symétriques qui sont inclus dans un objet symétrique (autre que la gamme chromatique).

Le **nombre de notes** d'un objet est noté $\sharp o \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.4. *L'ensemble I contient 52 objets dont*

Nombre de notes :	6	7	8	9	10	11
Nombre d'objets dans I	3	12	18	13	5	1

Voici les trois objets « minimaux » de I c'est à dire ayant 6 notes :

(1) C C# D D# E F

(2) C D D# E F G

(3) C D E F G A

Démonstration. Ce résultat s'obtient par énumération des objets. On l'obtient avec un programme disponible sur GitHub « kanular/Generalisation-Fonction-Musique ». Le programme génère un fichier de sortie qui liste tous les objets et leur propriétés. □

Remarquer que au contraire, pour tout objet symétrique $o \in B$ il existe un objet $o' \in A$ qui le contient $o \subset o'$.

Si $o, o' \in \mathcal{O}$ sont deux objets, on introduit la relation :

$$o \to o' \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} o \subset o' \text{ et } \sharp o' = \sharp o + 1,$$

i.e. si o' s'obtient à partir de o par l'**ajout d'une note**.

2 Interprétation en musique

Si on note $V := B$ l'ensemble des objets symétriques, le **dynamisme orienté** considère le mouvement

$$II \to V \to I.$$

Ce dynamisme est économe, il choisit les solutions ou l'ajout de note est minimum en fonction des opérateurs choisis.