Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Ci si potrebbe chiedere quale forma assumano tali poli. Proviamo, algebricamente, a risolvere l'equazione:

$$ke^{-sT} + \tau s + 1 = 0$$

Ricordiamo che s è una variabile complessa del tipo:

$$s = \sigma + j\omega \qquad \sigma, \omega \in \mathbb{R}$$

Pertanto l'equazione diventa:

$$ke^{-(\sigma + j\omega)T} + \tau(\sigma + j\omega) + 1 = 0 + j0$$

Separiamo la parte reale da quella immaginaria a primo membro:

$$ke^{-\sigma T}[\cos(\omega T) - j\sin(\omega T)] + \tau(\sigma + j\omega) + 1 = 0 + j0$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Otteniamo che:

$$ke^{-\sigma T}\cos(\omega T) - jke^{-\sigma T}\sin(\omega T) + \tau\sigma + j\tau\omega + 1 = 0 + j0$$

$$[ke^{-\sigma T}\cos(\omega T) + \tau\sigma + 1] + j[-ke^{-\sigma T}\sin(\omega T) + \tau\omega] = 0 + j0$$

Uguagliando quindi parte reale e parte immaginaria otteniamo:

$$\begin{cases} ke^{-\sigma T}\cos(\omega T) + \tau\sigma + 1 = 0 \\ -ke^{-\sigma T}\sin(\omega T) + \tau\omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ke^{-\sigma T}\cos(\omega T) + \tau\sigma + 1 = 0 \\ ke^{-\sigma T}\sin(\omega T) = \tau\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} ke^{-\sigma T}\cos(\omega T) + \tau\sigma + 1 = 0 \\ ke^{-\sigma T} = \dfrac{\tau\omega}{\sin(\omega T)} \end{cases}$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Da cui si ottiene che:

$$\begin{cases} \dfrac{\tau\omega}{\sin(\omega T)}\cos(\omega T) + \tau\sigma + 1 = 0 \\ ke^{-\sigma T} = \dfrac{\tau\omega}{\sin(\omega T)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\tau\omega}{\tan(\omega T)} + \tau\sigma + 1 = 0 \\ ke^{-\sigma T} = \dfrac{\tau\omega}{\sin(\omega T)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{\omega}{\tan(\omega T)} \\ ke^{-\sigma T} = \dfrac{\tau\omega}{\sin(\omega T)} \end{cases}$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Da cui si ottiene che:

$$\begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{\omega}{\tan(\omega T)} \\ e^{-\sigma T} = \dfrac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{\omega}{\tan(\omega T)} \\ -\sigma T = \ln\dfrac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{\omega}{\tan(\omega T)} \\ \sigma = -\dfrac{1}{T}\ln\left(\dfrac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)}\right) \end{cases}$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Da cui si ottiene che:

$$\begin{cases} \frac{1}{T}\ln\left(\frac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)}\right) = \frac{1}{\tau} + \frac{\omega}{\tan(\omega T)} \\ \sigma = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)}\right) \end{cases}$$

Essendo $\tau < 0\,, T > 0$ e $k < -1$, per avere un argomento positivo nel logaritmo naturale, dovremo imporre che:

$$\frac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)} > 0 \leftrightarrow \begin{cases} \sin(\omega T) > 0\,, \omega > 0 \\ \sin(\omega T) < 0\,, \omega < 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}(n) < \omega < \frac{2\pi}{T}(1/2+n)\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \frac{2\pi}{T}(1/2-n) < \omega < \frac{2\pi}{T}(1-n)\,, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Focalizziamo la nostra attenzione sulla parte reale di poli:

$$\sigma = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)}\right)$$

Quello che potremmo chiederci è se esiste una pulsazione w tale per cui $\sigma > 0$, ovvero tale per cui esista almeno un polo a parte reale positiva, ad indicare che il sistema è instabile.

Consideriamo il caso:

$$\sin(\omega T) > 0 \ , \omega > 0 \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}(n) < \omega < \frac{2\pi}{T}(1/2 + n) \ , n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Ci chiediamo quando l'argomento del logaritmo naturale sia minore di 1:

$$\frac{\tau\omega}{k\sin(\omega T)} < 1 \leftrightarrow \frac{\tau\omega T}{k\sin(\omega T)} < T \leftrightarrow \frac{\omega T}{\sin(\omega T)} < \frac{k}{\tau T}$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Da cui ricaviamo che:

$$1 < \frac{\omega T}{\sin(\omega T)} < \frac{k}{\tau T} \qquad \frac{2\pi}{T}(n) < \omega < \frac{2\pi}{T}(1/2 + n)\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Approcciamo il problema nel dominio della pulsazione ω, usando il criterio di Nyquist. Notiamo che la funzione di anello L(s) presenta un polo reale positivo.

$$L(s) = \frac{ke^{-sT}}{1 + \tau s}$$

Per tracciare Nyquist, passiamo al dominio della pulsazione:

$$L(j\omega) = \frac{ke^{-j\omega T}}{1 + j\omega\tau}$$

Analizziamo la funzione d'anello considerandone modulo e fase:

$$|L(j\omega)| = \left|\frac{ke^{-j\omega T}}{1 + j\omega\tau}\right| = \frac{|k|\left|e^{-j\omega T}\right|}{|1 + j\omega\tau|} = \frac{|k|}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi[L(j\omega)] = \varphi\left[\frac{ke^{-j\omega T}}{1 + j\omega\tau}\right] = \varphi[k] + \varphi\left[e^{-j\omega T}\right] - \varphi[1 + j\omega\tau] = -\pi - \omega T - arctan(\omega\tau)$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Stabilita la relazione tra modulo e fase della funzione d'anello con la pulsazione:

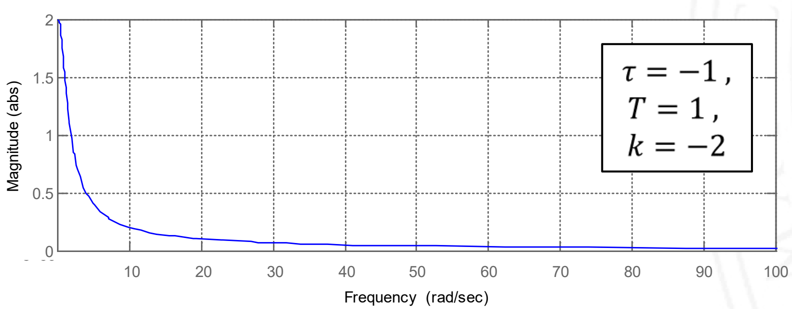
$$|L(j\omega)| = \frac{|k|}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \qquad \tau < 0\,,\quad T > 0\,,\quad k < -1$$

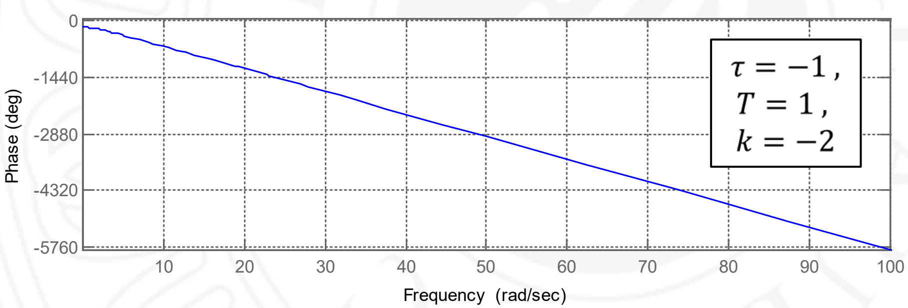
$$\varphi[L(j\omega)] = -\pi - \omega T - arctan(\omega\tau)$$

Quando la pulsazione tende a zero, il modulo e la fase tendono a:

$$|L(j0^+)| = |k| \qquad \varphi[L(j0^+)] = -\pi$$

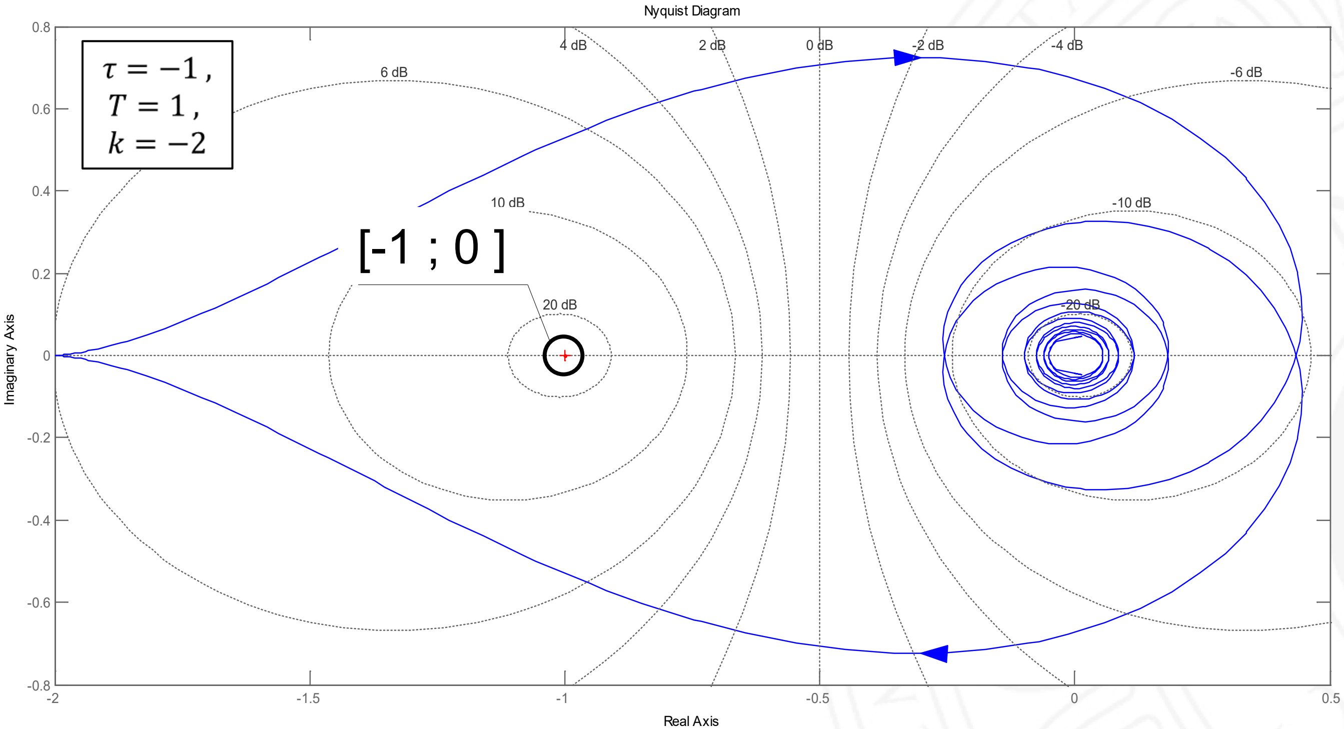
All'aumentare della pulsazione, il modulo diminuisce in maniera iperbolica a zero, mentre la fase continua a diminuire in maniera lineare, come si evince dai grafici in calce:





Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Sulla base delle considerazioni finora fatte, ci aspettiamo di avere un diagramma di Nyquist che svolga delle rotazioni in senso orario attorno all'origine con una velocità di rotazione pari a circa ω rad/sec e con un modulo che decresce in maniera iperbolica a partire dal punto $[-|k|,0]$.

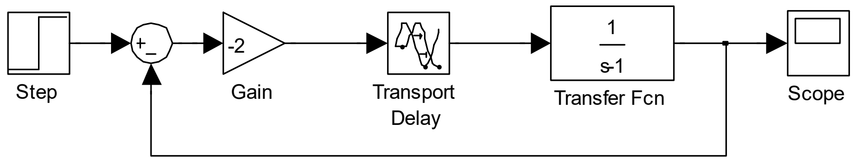


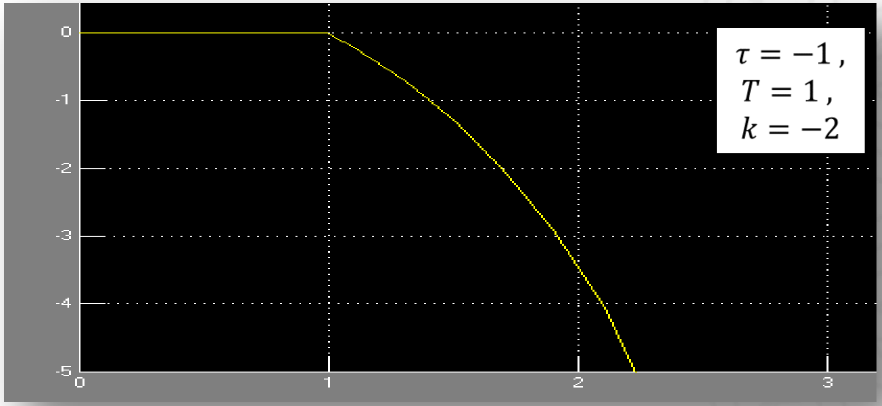

```
%parametri
tau = -1;
epsilon = 1;
k = -1-epsilon;
T = 1;

% variabile complessa s
s=tf('s');

% ritardo
delay=exp(-s*T);

% funzione d'anello
L=(k*delay)/(1+tau*s);

nyquist(L,{0.01,3.14*15});
```

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

È facile notare che il numero di giri in senso antiorario attorno al punto [-1,0] è pari a -1 ed è quindi diverso dal numero di poli a parte reale positiva della $L(j\omega)$, che è pari a +1.

Usando simulink si ottiene una risposta a gradino unitario instabile:





Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

OSSERVAZIONE

Notiamo che con questa configurazione dei parametri:

$$\tau < 0\,,$$
$$T > 0\,,$$
$$k < -1$$

Non è possibile garantire stabilità al sistema controreazionato, in quanto il criterio di Nyquist non sarà mai soddisfatto, essendo il numero di giri del diagramma di Nyquist della funzione d'anello compiuto sempre in senso orario.

Sessione di studio

Verifica

Spiegare l'impatto del blocco ritardo in un sistema controreazionato con processo instabile del primo ordine.

Sessione di studio

Verifica

Spiegare come stabilizzare un sistema controreazionato con processo instabile del primo ordine (senza ritardo).

Sessione di studio

Verifica

Calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita di un sistema controreazionato con processo instabile del primo ordine con ritardo.