Significato fisico dei poli – Esempio 3

Proseguiamo l'analisi della funzione di trasferimento:

$$F(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{RLs}{R+Ls+RLCs^2}=\frac{Ls}{1+\frac{L}{R}s+LCs^2}$$

Individuiamo in forma esplicita i poli della funzione di trasferimento:

$$F(s)=\frac{Ls}{1+\frac{L}{R}s+LCs^2}=\frac{Ks}{(1+\tau s)(1+\mu s)}=\boxed{\frac{Ks}{1+(\mu+\tau)s+\mu\tau s^2}}$$

Pertanto si ottengono:

$$\boxed{K=L \qquad \mu+\tau=\frac{L}{R} \qquad \mu\tau=LC}$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Sostituendo l'espressione di μ nella terza equazione:

$$K = L \qquad \mu = \frac{L}{R} - \tau \qquad \tau\left(\frac{L}{R} - \tau\right) = LC$$

Risolvendo si ottiene:

$$\tau\frac{L}{R} - \tau^2 - LC = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\tau^2 - \frac{L}{R}\tau + LC = 0}$$

Calcolo dei poli della funzione

Da cui si ottengono τ e μ in forma esplicita:

$$\boxed{\tau, \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC}\right)}$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Quello che si nota immediatamente è che non sempre τ e μ sono reali, tutto dipende dai parametri R, L e C. Esistono in effetti tre possibili situazioni, analizziamole in dettaglio.

$$\frac{L^2}{R^2} - 4LC > 0 \leftrightarrow L^2 - 4R^2LC > 0 \leftrightarrow L - 4R^2C > 0$$

CASO 1

$$L > 4R^2C$$

CASO 2

$$L = 4R^2C$$

CASO 3

$$L < 4R^2C$$

1. Nel primo caso abbiamo due soluzioni reali e distinte, quindi due poli reali negativi, quindi un sistema stabile.
2. Nel secondo caso abbiamo due poli reali negativi coincidenti, quindi un sistema stabile.
3. Nel terzo caso abbiamo due poli complessi coniugati a parte reale negativa, quindi un sistema stabile che presenta però delle oscillazioni.

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Per comprendere l’impatto sulla risposta a gradino dei differenti casi, separiamo l’analisi dell’effetto dei poli con quella dell’effetto degli zeri.

Per ora ignoriamo lo zero nell’origine e focalizziamo la nostra attenzione sulla seguente funzione di trasferimento: si sposta lo zero al denominatore della F(s)

$$W(s)=\frac{F(s)}{s}=\frac{L}{1+\frac{L}{R}s+LCs^2}=\frac{K}{(1+\tau s)(1+\mu s)}$$

Dove:

$$K=L$$

$$\tau,\mu=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{R}\pm\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2-4LC}\right)$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Notiamo come varia la risposta a gradino normalizzata a seconda dei casi.

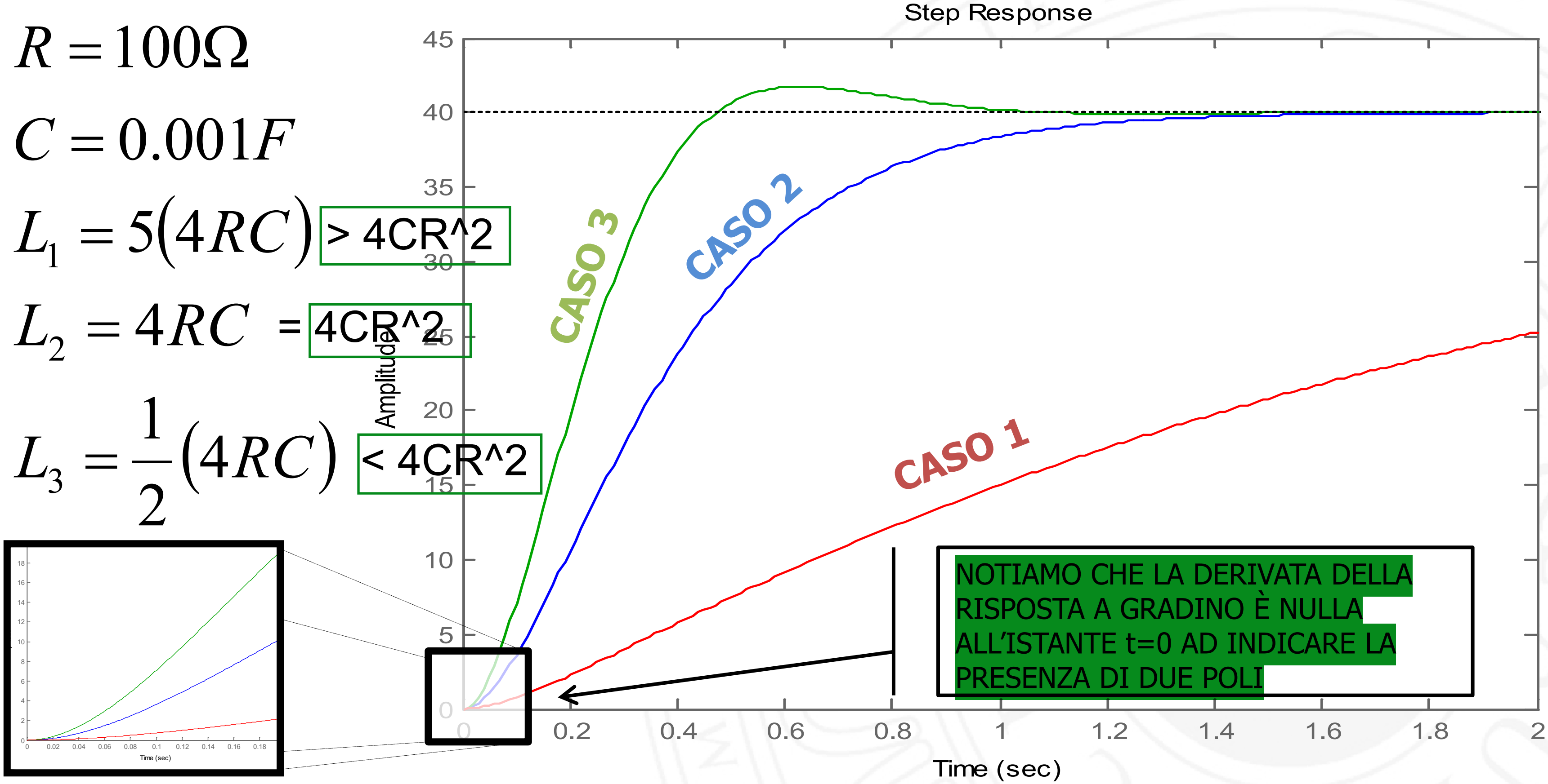
$$R = 100\Omega$$

$$C = 0.001F$$

$$L_1 = 5(4RC)$$ > 4CR^2

$$L_2 = 4RC$$ = 4CR^2

$$L_3 = \frac{1}{2}(4RC)$$ < 4CR^2



Significato fisico dei poli – Esempio 3

Ovviamente non è un caso che il transitorio nel primo caso duri molto di più del transitorio nei casi 2 e 3. Tutto è legato alla posizione dei poli nel piano s.

Nel caso 1 i due poli sono reali, negativi e diversi, pertanto uno sarà dominante rispetto all’altro determinando un transitorio molto lungo.

$$-\frac{1}{\tau} = -\left(\frac{1}{2}\left(\frac{L}{R}+\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC}\right)\right)^{-1}$$

POLO DOMINANTE

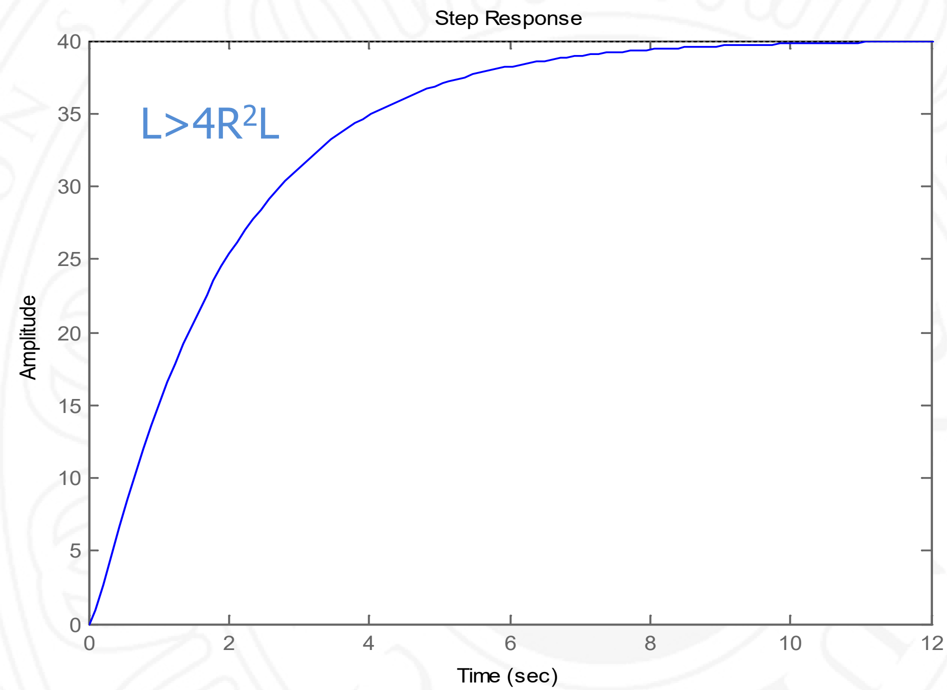
Im(s)

X X

Re(s)

POLO SECONDARIO

$$-\frac{1}{\mu} = -\left(\frac{1}{2}\left(\frac{L}{R}-\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC}\right)\right)^{-1}$$

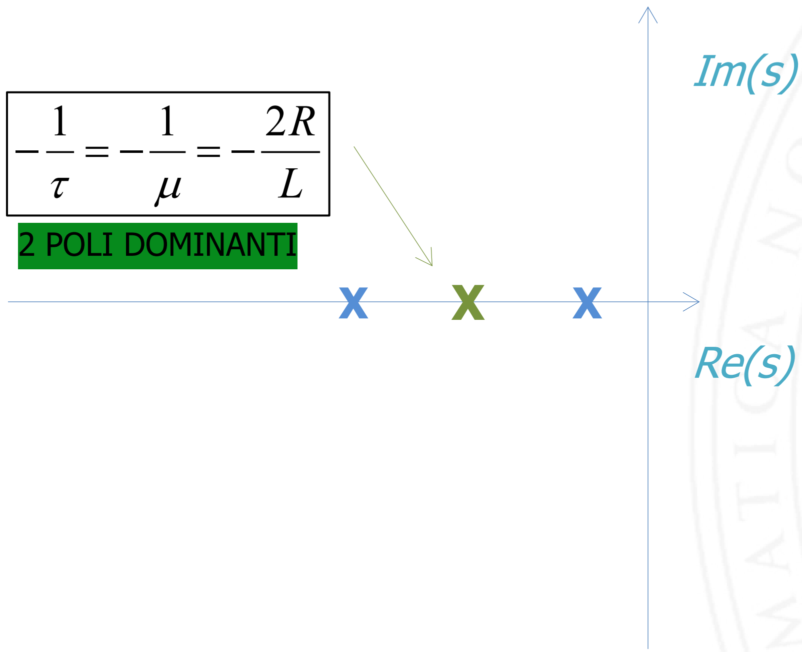


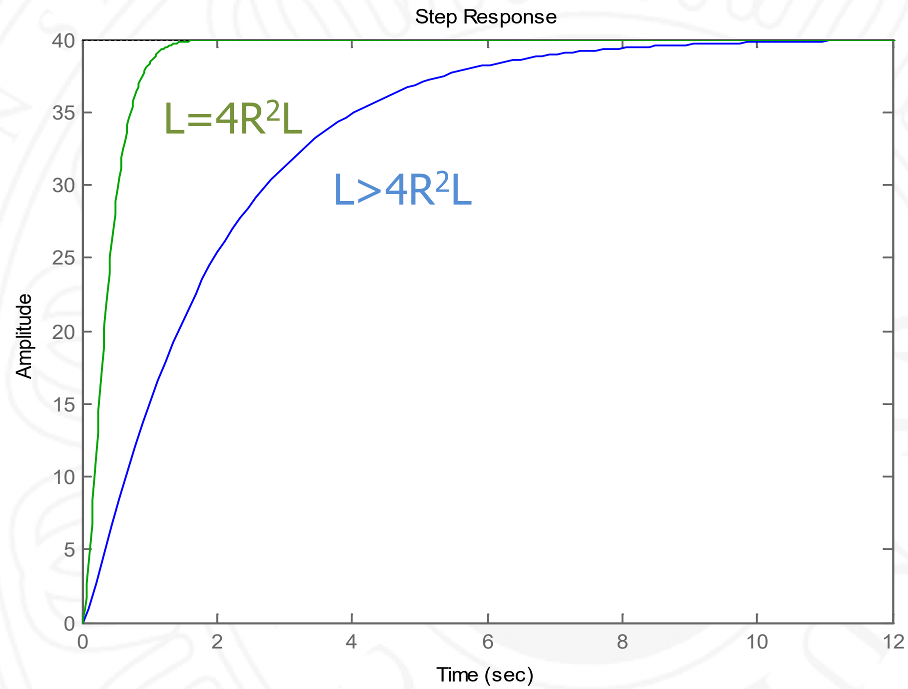
Significato fisico dei poli – Esempio 3

Nel caso 2 i due poli sono reali, negativi e coincidenti. Essendo allineati, i due poli sono massimamente distanti dall'asse delle ordinate, pertanto garantiscono la minore durata possibile del transitorio.

$$-\frac{1}{\tau}=-\frac{1}{\mu}=-\frac{2R}{L}$$

2 POLI DOMINANTI



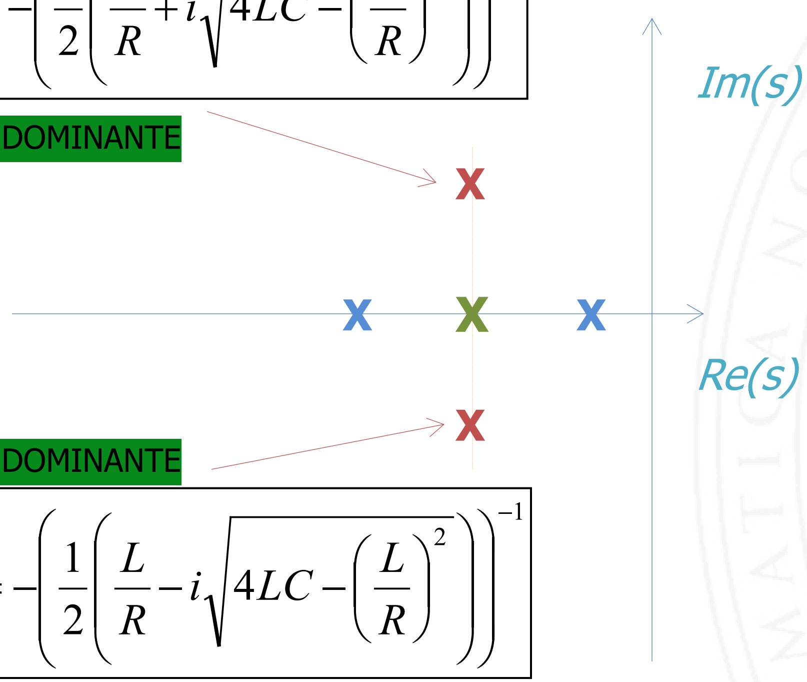


Significato fisico dei poli – Esempio 3

Nel caso 3 i due poli sono complessi coniugati, a parte reale negativa. Essendo allineati, i due poli sono massimamente distanti dall'asse delle ordinate, pertanto garantiscono la minore durata possibile del transitorio (comunque non migliore del caso 2).

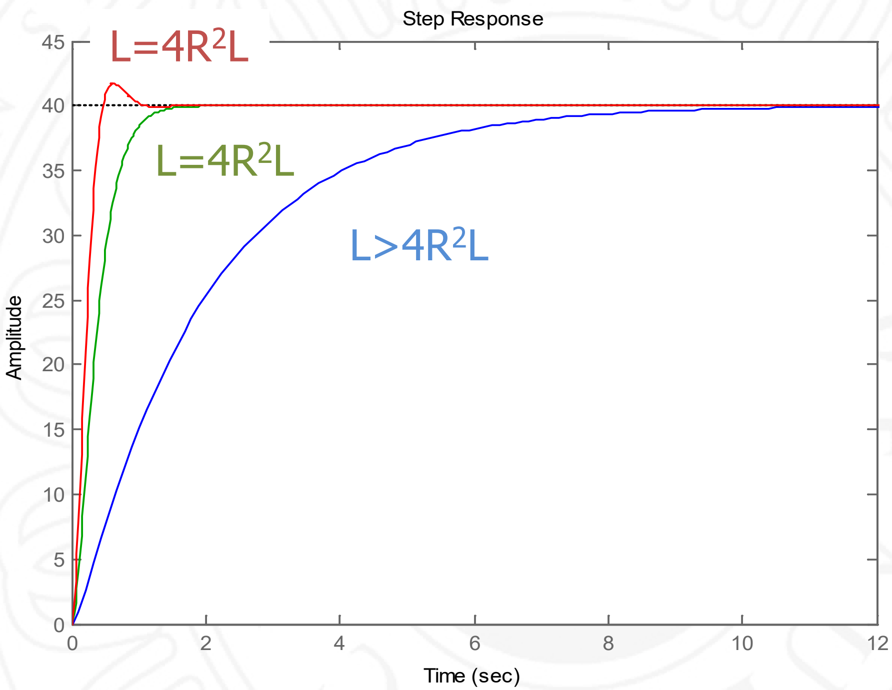
$$-\frac{1}{\tau}=-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{L}{R}+i\sqrt{4LC-\left(\frac{L}{R}\right)^2}\right)\right)^{-1}$$

POLO DOMINANTE



POLO DOMINANTE

$$-\frac{1}{\mu}=-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{L}{R}-i\sqrt{4LC-\left(\frac{L}{R}\right)^2}\right)\right)^{-1}$$

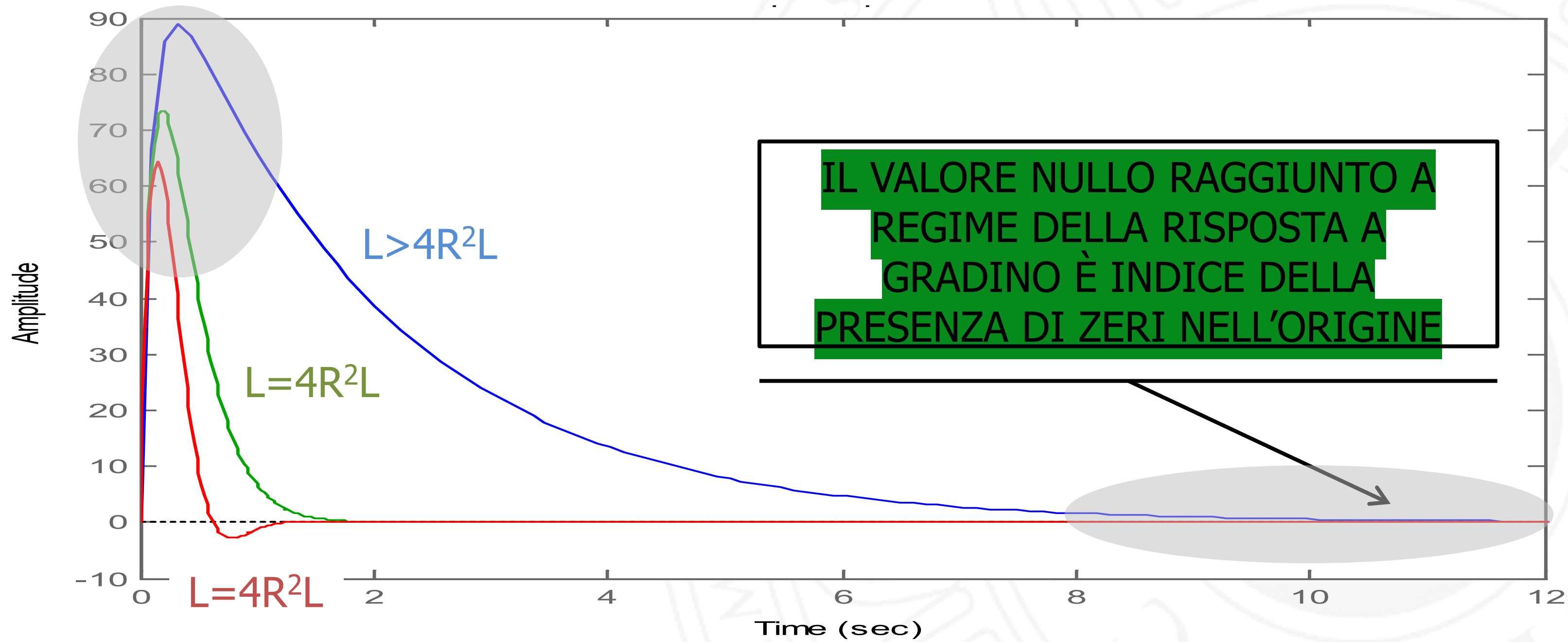


Significato fisico dei poli – Esempio 3

Notiamo ora che la funzione di trasferimento originaria era:

$$F(s) = sW(s)$$

Pertanto le risposte a gradino che abbiamo studiato, relative alla F(s), opportunamente derivate nel tempo, forniscono la risposta a gradino del sistema W(s) in esame:



Osservazioni conclusive

Abbiamo visto nell'esempio 3 che la presenza di uno o più zeri è spiegabile dal punto di vista fisico come un forzamento transitorio, per cui il valore istantaneo della variabile di uscita dipende anche dalle derivate della variabile di ingresso e non solo dal suo valore istantaneo.

La presenza di zeri al numeratore della funzione di trasferimento si traduce, nel dominio del tempo ed in particolare nella risposta a gradino, come un effetto addizionale, derivativo, della risposta a gradino dovuta alla funzione di trasferimento con numeratore unitario (cioè priva di zeri). Infatti data una funzione di trasferimento del tipo:

$$F(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{p_m s^m+p_{m-1}s^{m-1}+\ldots+p_0}{q_n s^n+q_{n-1}s^{n-1}+\ldots+q_0}=\frac{p(s)}{q(s)} \qquad m<n$$

La risposta a gradino sarà:

$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{p_m s^m}{q(s)}+\frac{1}{s}\frac{p_{m-1}s^{m-1}}{q(s)}+\ldots+\frac{1}{s}\frac{p_1 s}{q(s)}+\frac{1}{s}\frac{p_0}{q(s)}$$

Osservazioni conclusive

Supposto di conoscere la risposta a gradino $y_W(t)$ della funzione di trasferimento W(s) con numeratore unitario:

$$\boxed{W(s)=\frac{1}{q(s)} \Rightarrow Y_W(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{q(s)} \Rightarrow y_W(t)}$$

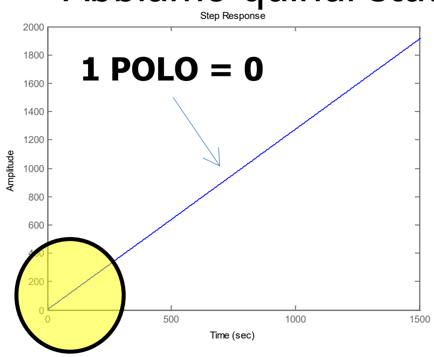
La risposta a gradino della funzione di trasferimento F(s) sarà data dalla sommatoria delle derivate della risposta a gradino $y_W(t)$:

$$\boxed{y(t)=\sum_{k=0}^{m} p_k \frac{d^k}{dt^k} y_W(t)}$$

Quindi, come era lecito aspettarsi, la dinamica del sistema è comunque interamente determinata dai poli della funzione di trasferimento, mentre gli zeri influenzano la risposta a gradino come contributi derivativi addizionali rispetto alla risposta a gradino priva di zeri.

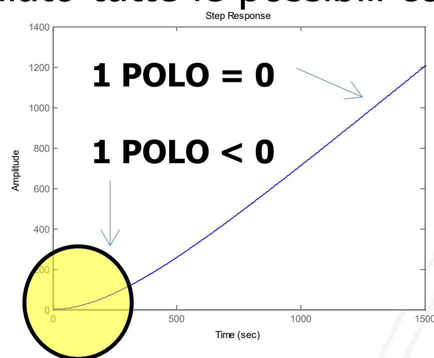
Osservazioni conclusive

Abbiamo quindi studiato tutte le possibili combinazioni che qui riassumiamo:



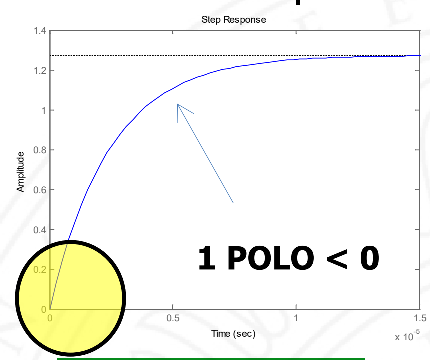
ACCUMULO SENZA DISSIPAZIONE

- SISTEMA INSTABILE
- NESSUNA DINAMICA SECONDARIA



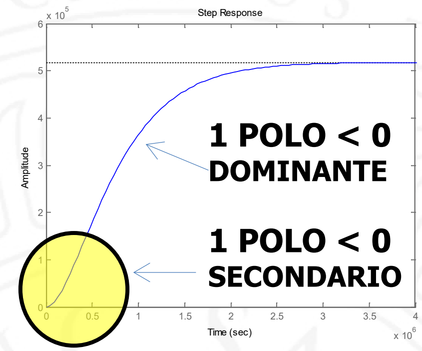
ACCUMULO SENZA DISSIPAZIONE

- SISTEMA INSTABILE
- PRESENZA DI UNA DINAMICA SECONDARIA



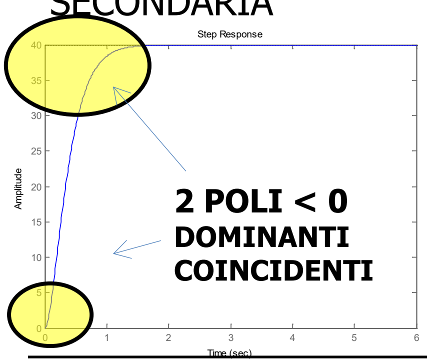
ACCUMULO CON DISSIPAZIONE

- SISTEMA STABILE
- NESSUNA DINAMICA SECONDARIA



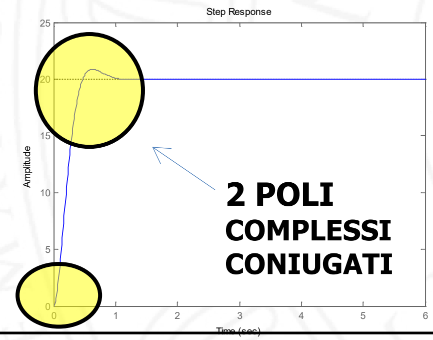
ACCUMULO CON DISSIPAZIONE

- SISTEMA STABILE
- PRESENZA DI UNA DINAMICA SECONDARIA



ACCUMULO CON DISSIPAZIONE

- SISTEMA STABILE
- TRANSITORIO RAPIDO



ACCUMULO CON DISSIPAZIONE OSCILLANTE

- SISTEMA STABILE
- TRAMSITORIO RAPIDO

Sessione di studio

Verifica

Dato un circuito RLC in quiete, la derivata della risposta a gradino al tempo $t = 0$, che valore avrà? Giustificare la risposta.

Sessione di studio

Verifica

In un circuito RLC come varia l'andamento della risposta al gradino al variare dei parametri R, L e C?

Sessione di studio

Verifica

Che impatto ha la presenza di due poli complessi e coniugati (a parte reale negativa) sulla risposta al gradino? Quale fenomeno si può presentare che li differenzia dalla risposta al gradino di un sistema caratterizzato da due poli reali (negativi)?