Modellizzazione del ritardo

Dominio della variabile complessa s

Tel: 031/7942500-7942505 Fax: 031/7942501 - info@uniecampus.it - Materiale Didattico realizzato dal Prof. Vincenzo Suraci

Modellizzazione del ritardo

La causa del ritardo e il suo effetto sono facilmente spiegabili ed analizzabili nel dominio del tempo. Potremmo però chiederci quale sia l'effetto del ritardo nel dominio di Laplace e nel dominio della frequenza.

Come ben sappiamo, per studiare i sistemi dinamici nel dominio di Laplace si applica la trasformata di Laplace.

Prendiamo in considerazione un generico segnale *u(t)*, sappiamo che la sua trasformata di Laplace è definita come:

$$U(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-st}dt$$

Ma se consideriamo un segnale *u(t)* reale, ovvero nullo per valori non positivi di t, si ha:

$$U(s) = \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-st}dt \qquad u(t) = 0 \; \forall \, t \leq 0$$

Modellizzazione del ritardo

Calcoliamo quindi la trasformata di Laplace del segnale di uscita *y(t) = x(t-T)* dal blocco di ritardo T:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-T)e^{-st}dt = \int_{T^-}^{+\infty} u(t-T)e^{-st}dt$$

Facciamo una sostituzione di variabile di integrazione:

$$\tau = t - T \;\rightarrow t = \tau + T \;\rightarrow dt/d\tau = 1 \;\rightarrow dt = d\tau$$

Da cui si ricava che:

$$Y(s) = \int_{0^-}^{+\infty} u(\tau)e^{-s(\tau+T)}d\tau = e^{-sT}\int_{0^-}^{+\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-sT}U(s)$$

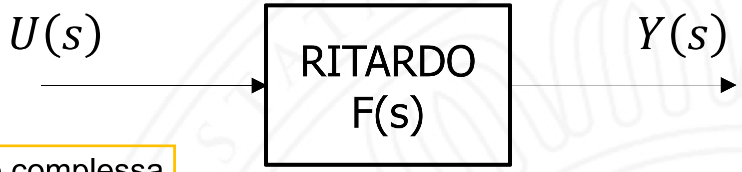
$$\boxed{Y(s) = e^{-sT}U(s)}$$

Funzione di trasferimento del blocco ritardo

Ne consegue che la funzione di trasferimento ingresso-uscita di un blocco ritardo è data dalla seguente funzione complessa non lineare:

$$\boxed{F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-sT}}$$

Funzione complessa non lineare



CONSIDERAZIONE

È bene ricordare che l'esponenziale complesso è esprimibile come una serie:

$$\boxed{e^{-sT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-sT)^n}{n!}}$$

Pertanto esso è rappresentabile come un polinomio della variabile complessa s di grado infinito.

Funzione di trasferimento del blocco ritardo

La funzione e^{-sT} è una funzione complessa di variabile complessa s:

$$s = Re(s) + jIm(s) = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$$
$$\sigma \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}$$

$$e^{-sT} = e^{-(\sigma+j\omega)T} = e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} = e^{-\sigma T}[cos(-\omega T) + jsin(-\omega T)]$$

$$\boxed{e^{-sT} = e^{-\sigma T}[cos(\omega T) - jsin(\omega T)]}$$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$$\boxed{Re(e^{-sT}) = e^{-\sigma T}cos(\omega T)}$$ PARTE REALE

$$\boxed{Im(e^{-sT}) = -e^{-\sigma T}sin(\omega T)}$$ PARTE IMMAGINARIA

RAPPRESENTAZIONE POLARE

$$\boxed{|e^{-sT}| = e^{-\sigma T}}$$ MODULO

$$\boxed{\angle e^{-sT} = \omega T}$$ FASE

Modellizzazione del ritardo

Dominio della frequenza

Funzione di trasferimento del blocco ritardo

Per passare al dominio della frequenza (o meglio, della pulsazione ω) imponiamo:

$s = j\omega \in \mathbb{C}$

$\omega \in \mathbb{R}$

$$e^{-sT} = e^{-j\omega T} = cos(-\omega T) + jsin(-\omega T)$$

Il modulo vale in quanto cosx^2 + senx^2 = 1

RAPPRESENTAZIONE POLARE

$$\boxed{\left|e^{-j\omega T}\right| = 1}$$ MODULO

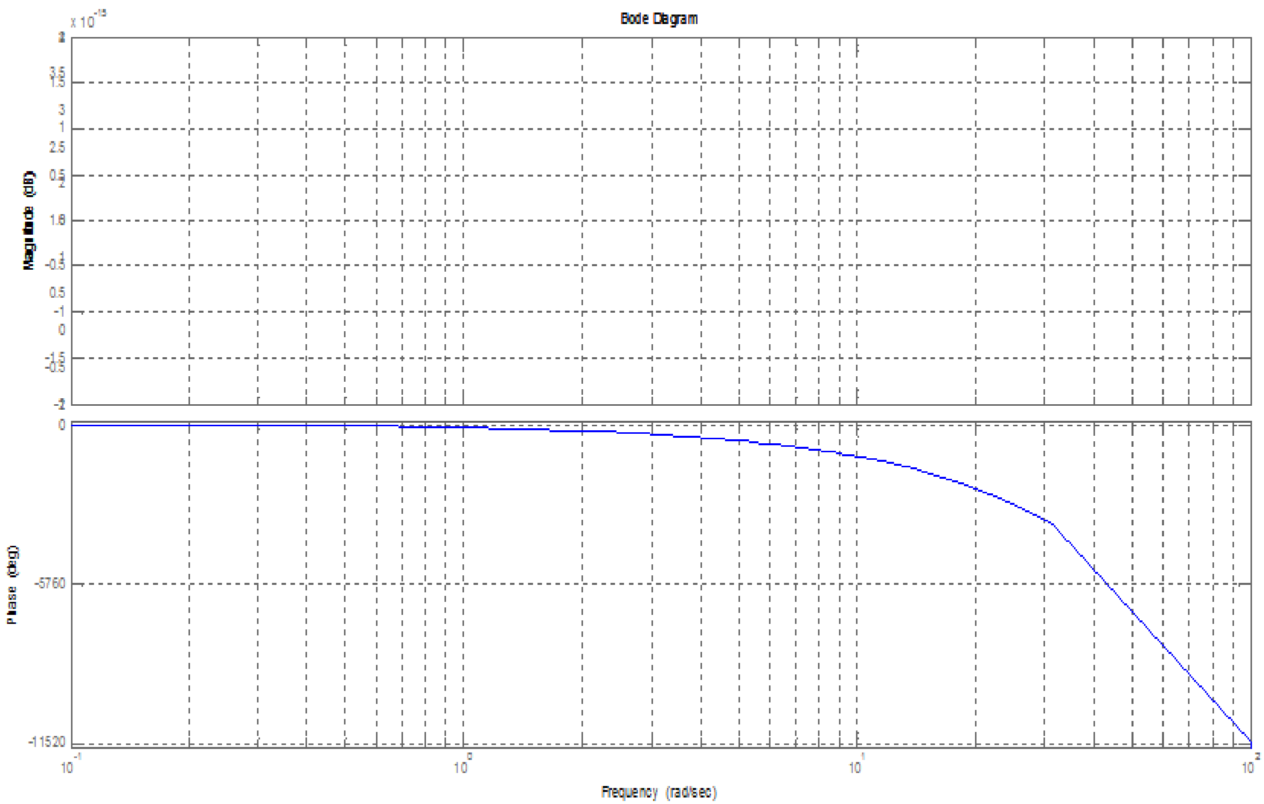
$$\boxed{\angle e^{-j\omega T} = -\omega T}$$ FASE (in radianti)

Ricordando che i diagrammi di Bode tracciano modulo (in decibel) e fase (in gradi) della funzione complessa al variare della ω , in scala logaritmica ($x=\log_{10}\omega$) abbiamo:

$$\boxed{\left|e^{-j\omega T}\right|_{dB} = 20\log_{10} 1 = 0}$$ MODULO (in decibel)

$$\boxed{\angle e^{-j\omega T} = -\frac{180}{\pi} 10^{\log_{10}\omega} T}$$ FASE (in gradi)

Funzione di trasferimento del blocco ritardo



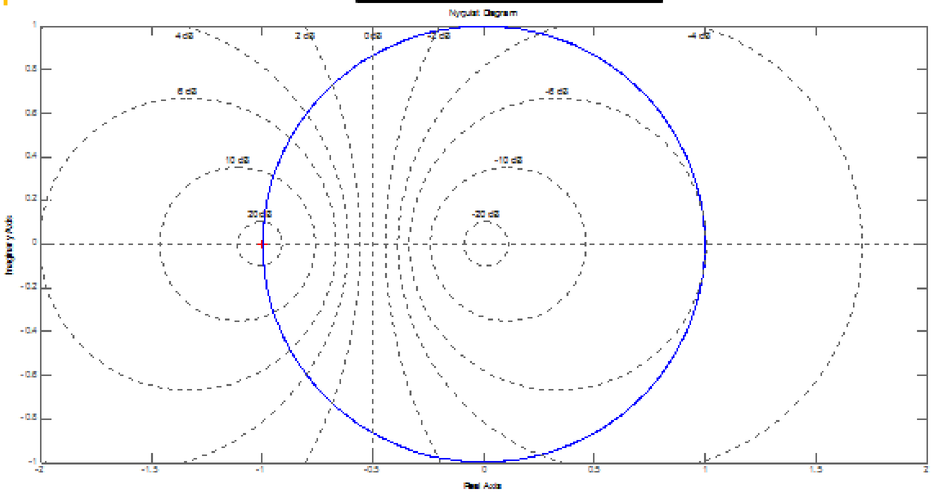
Funzione di trasferimento del blocco ritardo

Il diagramma di Nyquist è intuitivo, in quanto si tratta di una circonferenza di raggio unitario che viene percorsa infinite volte in senso antiorario all'aumentare di ω.

RAPPRESENTAZIONE POLARE

$$\boxed{\left|e^{-j\omega T}\right| = 1}$$ MODULO

$$\boxed{\angle e^{-j\omega T} = -\omega T}$$ FASE (in radianti)



Sessione di studio

Verifica

La funzione di trasferimento del blocco ritardo è rappresentativa di una relazione lineare tra ingresso e uscita?

La funzione di trasferimento di un blocco di ritardo non rappresenta una relazione lineare tra ingresso e uscita.
Il blocco di ritardo introduce un ritardo temporale nel segnale di uscita, il che viola il principio di omogeneità della linearità:

H(s) = e^(-s*tau)

dove s è la variabile complessa di Laplace e tau è il tempo di ritardo.
Il blocco di ritardo non soddisfa il principio di omogeneità. Consideriamo un ingresso x(t) e un fattore di scala a.
L'uscita del blocco di ritardo con ingresso x(t) è y(t) = x(t - T), dove T è il ritardo. Se scaliamo l'ingresso per un fattore a, l'uscita diventa y'(t) = ax(t - T). Tuttavia, se il sistema fosse lineare, l'uscita dovrebbe essere ay(t) = a*x(t - T).
Pertanto, il blocco di ritardo non soddisfa il principio di omogeneità e quindi non è un sistema lineare.

Sessione di studio

Verifica

Quale è la funzione di trasferimento del blocco ritardo?

Sessione di studio

Verifica

Tracciare i diagrammi di Bode e Nyquist della funzione di trasferimento del blocco ritardo, usando un tool di simulazione.