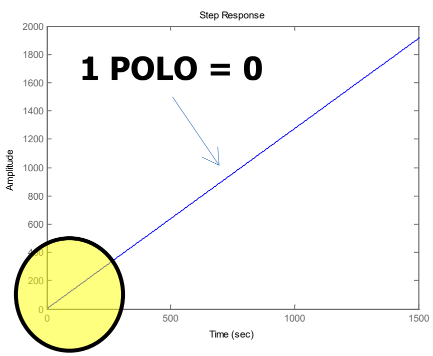
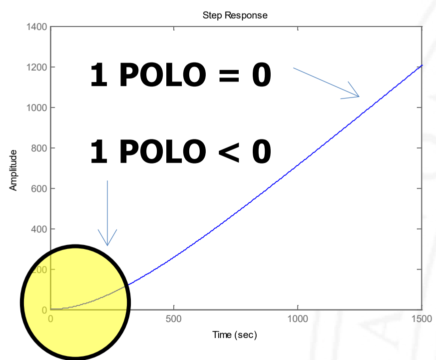
# Osservazioni introduttive

Finora abbiamo visto esempi di risposte a gradino di sistemi caratterizzati da un polo dominante nullo (instabile) o a parte reale negativa (stabile) con la presenza o meno di un polo reale a parte reale negativa (stabile) afferente alla dinamica secondaria. Potremmo chiederci cosa accade in presenza di due poli complessi coniugati e quale spiegazione fisica è ad essi associata.

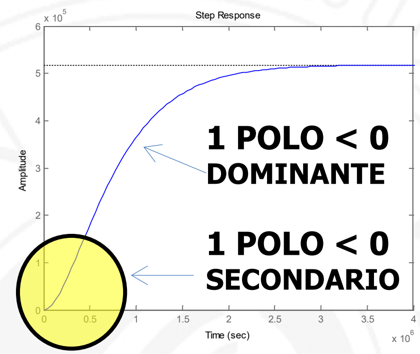



**ACCUMULO SENZA DISSIPAZIONE**
- SISTEMA INSTABILE
- NESSUNA DINAMICA SECONDARIA




**ACCUMULO SENZA DISSIPAZIONE**
- SISTEMA INSTABILE
- PRESENZA DI UNA DINAMICA SECONDARIA

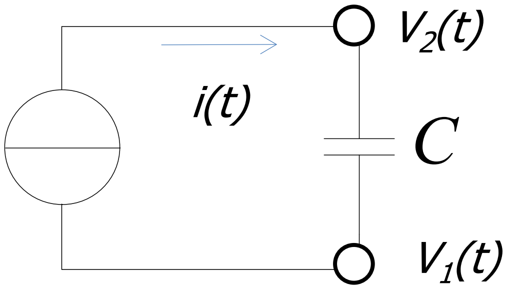

**ACCUMULO CON DISSIPAZIONE**
- SISTEMA STABILE
- NESSUNA DINAMICA SECONDARIA




**ACCUMULO CON DISSIPAZIONE**
- SISTEMA STABILE
- PRESENZA DI UNA DINAMICA SECONDARIA

# Significato fisico dei poli – Esempio 1

Prendiamo in esame un sistema elettrico molto semplice, caratterizzato da un condensatore ai cui capi possiamo disporre un generatore ideale di corrente continua i(t). L'obiettivo è quello di poter controllare la tensione v(t) ai capi del condensatore:




$$\boxed{v(t) = v_2(t) - v_1(t)}$$

L'unico elemento che può influire sulla dinamica del sistema è il condensatore. La variabile di ingresso che possiamo controllare e che immette energia in termini di cariche elettriche nel circuito elettrico è la corrente i(t). La variabile di uscita di cui siamo interessati a conoscere la dinamica è la tensione v(t) ai capi del condensatore.

Il diagramma a blocchi del sistema pertanto è:

# Significato fisico dei poli – Esempio 1

L'equazione differenziale che lega la variabile di ingresso alla variabile di uscita è:

$$\boxed{i(t)=\frac{d}{dt}q(t)=C\frac{d}{dt}v(t)}$$

Non essendo presente una relazione istantanea tra ingresso e uscita, è evidente che il sistema non dissipa energia, il sistema pertanto sarà instabile e presenterà un polo nell'origine ed infatti, passando al dominio di Laplace:

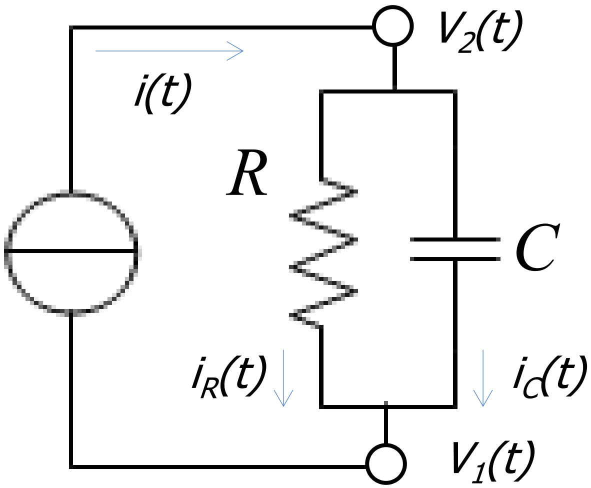
$$\boxed{I(s)=CsV(s)}$$

Da cui otteniamo la funzione di trasferimento:

$$\boxed{\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{1}{C}\frac{1}{s}}$$

# Significato fisico dei poli – Esempio 2

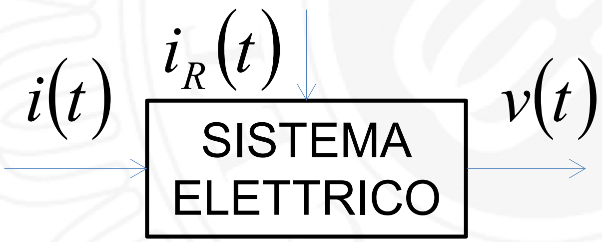
Aggiungiamo quindi un elemento in grado di dissipare energia che stabilizzi il sistema, ovvero un componente che lega istantaneamente corrente e tensione: ovvero una resistenza. Il circuito elettrico diviene:




$$v(t) = v_2(t) - v_1(t)$$

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R}$$

L'unico elemento che può influire sulla dinamica del sistema è il condensatore, mentre la corrente $i_R(t)$ dissipata sulla resistenza è un disturbo prevedibile, in quanto se ne conosce il valore e l'intensità.



# Significato fisico dei poli – Esempio 2

L'equazione differenziale che lega la variabile di ingresso alla variabile di uscita si può ricavare applicando la legge di kirchhoff:

$$\boxed{i(t)=i_R(t)+i_C(t)=\frac{v(t)}{R}+C\frac{d}{dt}v(t)}$$

Come atteso, essendo presente una relazione istantanea tra ingresso e uscita, il sistema dissipa energia, ci attendiamo pertanto che il sistema sia stabile ed infatti, passando al dominio di Laplace:

$$I(s)=\frac{1}{R}V(s)+CsV(s)=\left(\frac{1}{R}+Cs\right)V(s)=\frac{1+RCs}{R}V(s)$$

Da cui otteniamo la funzione di trasferimento:

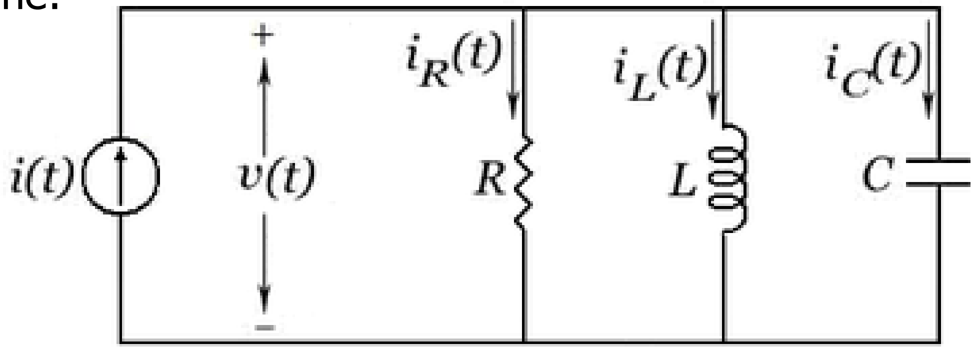
$$\boxed{\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{R}{1+RCs}=\frac{K}{1+\tau s}}$$

$K=R$ GUADAGNO STATICO

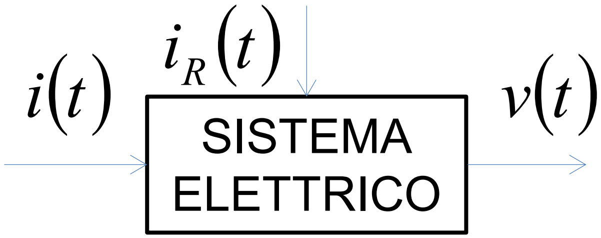
$\tau=RC$ COSTANTE DI TEMPO

# Significato fisico dei poli – Esempio 3

Aggiungiamo un elemento in grado di accumulare energia di tipo induttivo, differente quindi dall'energia capacitiva che può accumulare il condensatore. Il circuito elettrico diviene:




Due elementi possono influire sulla dinamica del sistema: il condensatore e il solenoide, mentre la corrente $i_R(t)$ dissipata sulla resistenza è un disturbo prevedibile, in quanto se ne conosce il valore e l'intensità. Il sistema a blocchi rimane, pertanto:



# Significato fisico dei poli – Esempio 3

L'equazione integro-differenziale che lega la variabile di ingresso alla variabile di uscita si può ricavare applicando la legge di kirchhoff, ipotizzando nulle tutte le condizioni iniziali:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int v(t)dt + C\frac{d}{dt}v(t)$$

Volendo ottenere una equazione puramente differenziale è sufficiente derivare ambo i membri:

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}v(t) + \frac{1}{L}v(t) + C\frac{d^2}{dt^2}v(t)$$

Passando al dominio di Laplace:

$$sI(s) = \frac{1}{R}sV(s) + \frac{1}{L}V(s) + Cs^2V(s) = \frac{Ls + R + RLCs^2}{RL}V(s)$$

# Significato fisico dei poli – Esempio 3

La funzione di trasferimento pertanto è:

$$\boxed{F(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{RLs}{R+Ls+RLCs^2}}$$

Notiamo immediatamente la comparsa di uno zero nell'origine causato dall'azione integrale dell'induttanza. Notiamo inoltre la presenza di una dissipazione e due poli dovuti alle due forme di energia accumulabile nel sistema: capacitiva e induttiva.

$$\frac{RLs}{R+Ls+RLCs^2}$$

FORZAMENTO TRANSITORIO INDUTTIVO

ACCUMULO CAPACITIVO

ACCUMULO INDUTTIVO

DISSIPAZIONE

# Significato fisico dei poli – Esempio 3

Per comprendere ancora meglio il ruolo dello zero e dei poli, osserviamo innanzitutto l'equazione integro-differenziale:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int v(t)dt + C\frac{d}{dt}v(t)$$

La presenza di una relazione istantanea tra corrente (variabile di ingresso) e tensione (variabile di uscita) sappiamo che determina una dissipazione e quindi garantisce l'assenza di poli nell'origine della funzione di trasferimento. Per capire la genesi dello zero e dei due poli, analizziamo l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}v(t) + \frac{1}{L}v(t) + C\frac{d^2}{dt^2}v(t)$$

Lo zero nell'origine è determinato dalla mancanza nel primo membro del valore istantaneo della variabile di ingresso i(t). Ciò significa che il valore istantaneo della variabile di uscita v(t) dipende solo da un forzamento transitorio della variabile di ingresso i(t), ovvero dalla sua derivata (in questo caso solo dalla derivata prima).

# Significato fisico dei poli – Esempio 3

Nel bilanciamento differenziale, moltiplicando ambo i membri per L, tra ingresso e uscita compaiono a secondo membro la derivata prima e la derivata seconda della variabile di uscita v(t). Esse sono indice delle due forme di energia accumulabili nel sistema (capacitiva ed induttiva):

$$L\frac{d}{dt}i(t)=\frac{L}{R}\frac{d}{dt}v(t)+v(t)+LC\frac{d^2}{dt^2}v(t)$$

Notiamo che se la capacità C del condensatore fosse nulla, il sistema perderebbe un polo, in quanto la derivata seconda si cancellerebbe. Viceversa se il solenoide avesse induttanza L infinita, rimarrebbe il circuito RC visto nell'esempio 2.

$$L\frac{d}{dt}i(t)=\frac{L}{R}\frac{d}{dt}v(t)+v(t)+\cancel{LC\frac{d^2}{dt^2}v(t)}$$

ANNULLAMENTO DELLA AZIONE DEL CONDENSATORE

$$i(t)=\frac{v(t)}{R}+\cancel{\frac{1}{L}\int v(t)dt}+C\frac{d}{dt}v(t)$$

ANNULLAMENTO DELLA AZIONE DEL SOLENOIDE

# Sessione di studio

# Verifica

Quale è il significato fisico di avere uno zero nella funzione di trasferimento?

# Sessione di studio

# Verifica

In un circuito RLC quante forme di accumulo energetico partecipano all'evoluzione del sistema e quanti poli ha la funzione di trasferimento?

# Sessione di studio

# Verifica

Dato un circuito RLC:

- La resistenza accumula energia?
- Quale importantissimo effetto garantisce la presenza della resistenza nel circuito?
- Cosa succederebbe alla risposta al gradino se non ci fosse la resistenza nel circuito?