Impatto del ritardo

Sistemi a controreazione con processo instabile del primo ordine

Stabilità di un sistema del primo ordine

Consideriamo un sistema lineare tempo invariante (LTI) del primo ordine instabile:

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{1+\tau s}} \qquad \boxed{\tau < 0}$$

È facile verificare che il sistema a catena aperta è instabile in quanto il polo è a parte reale positiva:

Il polo è > 0 in quanto Tau è < 0

$$1+\tau s = 0 \;\leftrightarrow\; \tau s = -1 \;\leftrightarrow\; \boxed{s = -1/\tau}\,\boxed{> 0}$$

Stabilità di un sistema del primo ordine

Per tracciare il diagramma di Nyquist, passiamo al dominio della frequenza:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \qquad \tau < 0$$

Separiamo la parte reale dalla parte immaginaria:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} = \frac{1 - j\tau\omega}{(1 + j\tau\omega)(1 - j\tau\omega)} = \frac{1 - j\tau\omega}{1 - (j\tau\omega)^2} = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$Re[F(j\omega)] = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$Im[F(j\omega)] = \frac{-\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2}$$

Stabilità di un sistema del primo ordine

Esplicitiamo la parte reale rispetto alla pulsazione:

$$Re[F(j\omega)] = \frac{1}{1+(\tau\omega)^2} \leftrightarrow$$

$$1+(\tau\omega)^2 = \frac{1}{Re[F(j\omega)]} \leftrightarrow$$

$$(\tau\omega)^2 = \frac{1}{Re[F(j\omega)]} - 1 \leftrightarrow$$

$$(\tau\omega)^2 = \frac{1-Re[F(j\omega)]}{Re[F(j\omega)]} \leftrightarrow$$

$$\tau\omega = \pm\sqrt{\frac{1-Re[F(j\omega)]}{Re[F(j\omega)]}} \leftrightarrow$$

$$\omega = \pm\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{1-Re[F(j\omega)]}{Re[F(j\omega)]}}$$

Stabilità di un sistema del primo ordine

Sostituiamo quanto ottenuto nella parte immaginaria:

$$Im[F(j\omega)] = \frac{-\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} \leftrightarrow$$

$$Im[F(j\omega)] = -\tau\left(\frac{1}{1+(\tau\omega)^2}\right)(\omega) \leftrightarrow$$

$$Im[F(j\omega)] = -\tau(Re[F(j\omega)])\left(\pm\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{1-Re[F(j\omega)]}{Re[F(j\omega)]}}\right) \leftrightarrow$$

$$Im[F(j\omega)] = \pm Re[F(j\omega)]\sqrt{\frac{1-Re[F(j\omega)]}{Re[F(j\omega)]}}$$

Stabilità di un sistema del primo ordine

Ponendo:

$$Im[F(j\omega)] = y(\omega)$$

$$Re[F(j\omega)] = x(\omega)$$

Si ottiene:

$$y(\omega) = \pm x(\omega)\sqrt{\frac{1 - x(\omega)}{x(\omega)}}$$

Elevando al quadrato i termini dell'equazione e omettendo ω:

$$y^2 = x^2 \frac{1 - x}{x} = x(1 - x)$$

Stabilità di un sistema del primo ordine

Attuando la sostituzione:

$$\bar{x} = x - \frac{1}{2} \leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \bar{x}$$

Si ottiene:

$$y^2 = \left(\frac{1}{2} + \bar{x}\right)\left(1 - \frac{1}{2} - \bar{x}\right) = \left(\frac{1}{2} + \bar{x}\right)\left(\frac{1}{2} - \bar{x}\right) = \frac{1}{4} - \bar{x}^2$$

Ovvero:

$$y^2 + -\bar{x}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Che rappresenta una circonferenza di raggio ½ centrata in:

$y = 0\,; \bar{x} = 0$ Ovvero in $y = 0\,;\; x = \frac{1}{2}$

Stabilità di un sistema del primo ordine

Notiamo infine che la parte reale varia al variare della pulsazione:

$$\boxed{Re[F(j\omega)] = x(\omega) = \frac{1}{1+(\tau\omega)^2}}$$

In particolare quando la pulsazione tende a $\pm\infty$ la parte reale tende a 0^+, quando la pulsazione tende a 0 la parte reale tende a 1.

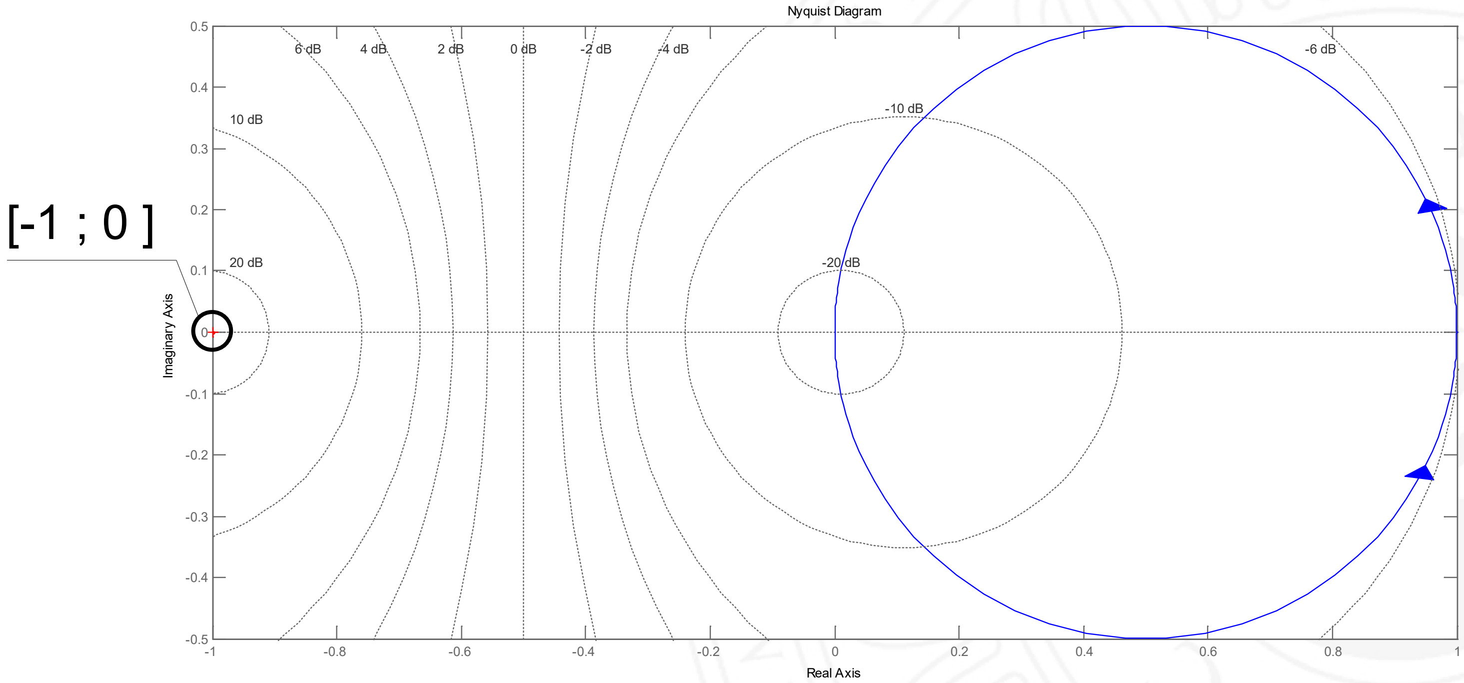
Pertanto il diagramma di Nyquist è semplicemente una circonferenza di raggio pari a ½ che compie un unico giro in senso anti-orario attorno al punto [1/2 ; 0].

OSSERVAZIONE

Il diagramma di Nyquist del sistema del primo ordine è indipendente dal valore della costante di tempo τ, sia esso positivo o negativo (ma ovviamente non nullo altrimenti avremmo un polo nell'origine).

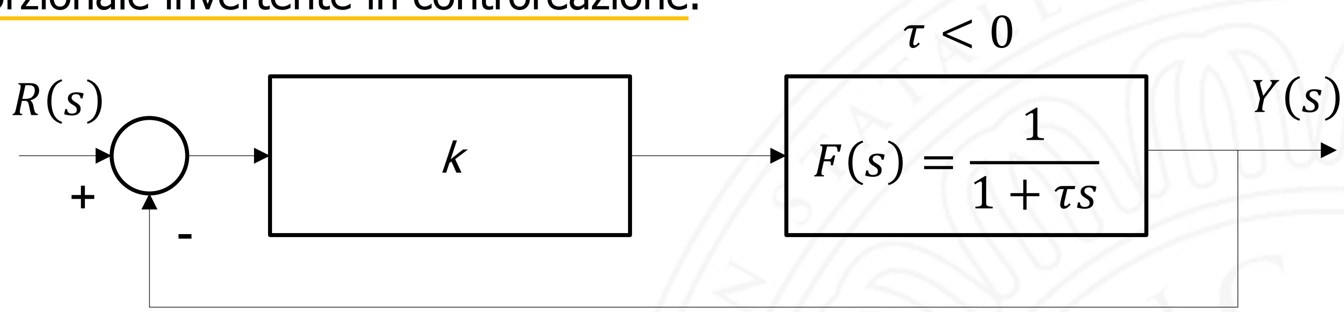
Stabilità di un sistema del primo ordine

Tracciando il diagramma di Nyquist ci si rende conto che chiudere in controreazione unitaria tale sistema sarebbe un grave errore, in quanto si avrebbe nuovamente un sistema instabile. Infatti il diagramma di Nyquist della F(s) compie zero giri in senso antiorario attorno al punto (-1,0) e tale numero non coincide con il numero di poli a parte reale positiva (uno) della funzione d'anello F(s).



Stabilità di un sistema del primo ordine

È semplice dimostrare che la funzione F(s) è stabilizzabile con un controllore proporzionale invertente in controreazione.



La funzione di trasferimento del sistema in controreazione è:

$$W(s) = \frac{kF(s)}{1+kF(s)} = \frac{k\frac{1}{1+\tau s}}{1+k\frac{1}{1+\tau s}} = \frac{k}{1+\tau s+k}$$

Avente un polo reale:

$$1+\tau s+k=0 \leftrightarrow \tau s = -1-k \leftrightarrow \boxed{s = \frac{-1-k}{\tau}}$$

Stabilità di un sistema del primo ordine

Imponendo la condizione necessaria (e sufficiente) di stabilità dei sistemi LTI:

$$\boxed{\frac{-1-k}{\tau} < 0 \leftrightarrow \frac{1+k}{-\tau} < 0}$$

Ricordando che $\tau < 0$ ne consegue che il numeratore debba essere negativo:

$$1 + k < 0 \leftrightarrow \boxed{k < -1}$$

Pertanto è sufficiente porre:

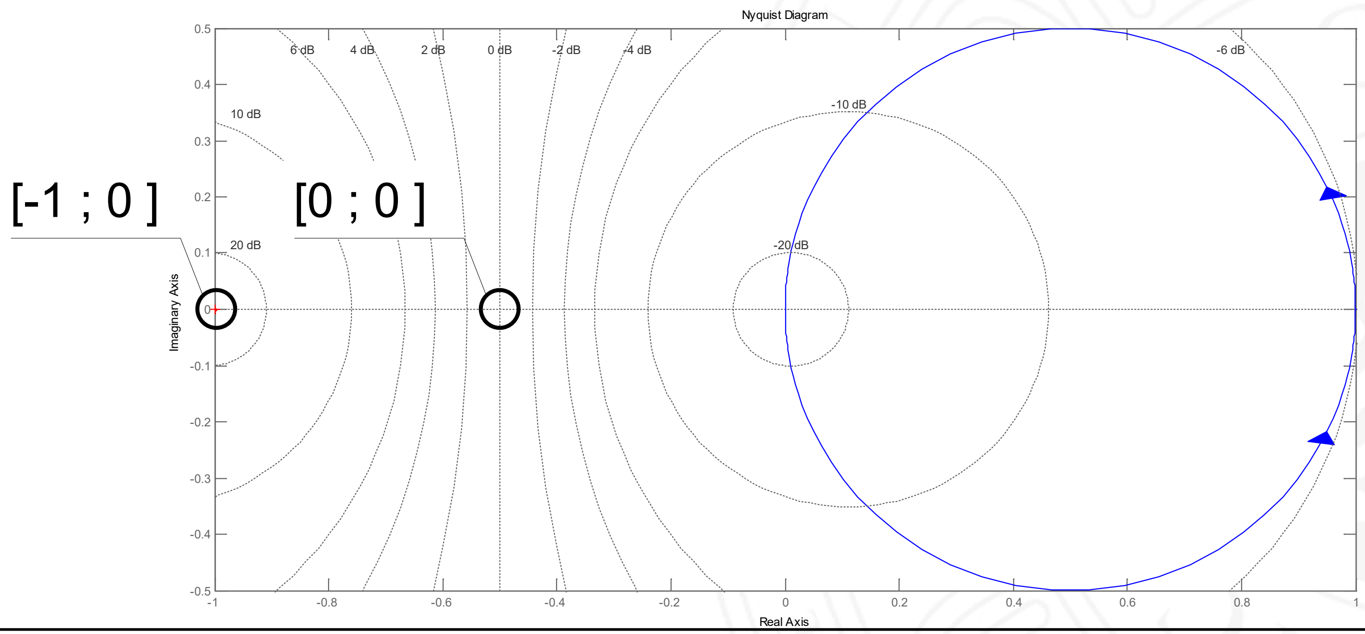
$$\boxed{k = -1 - \varepsilon}$$

Con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere.

Stabilità di un sistema del primo ordine

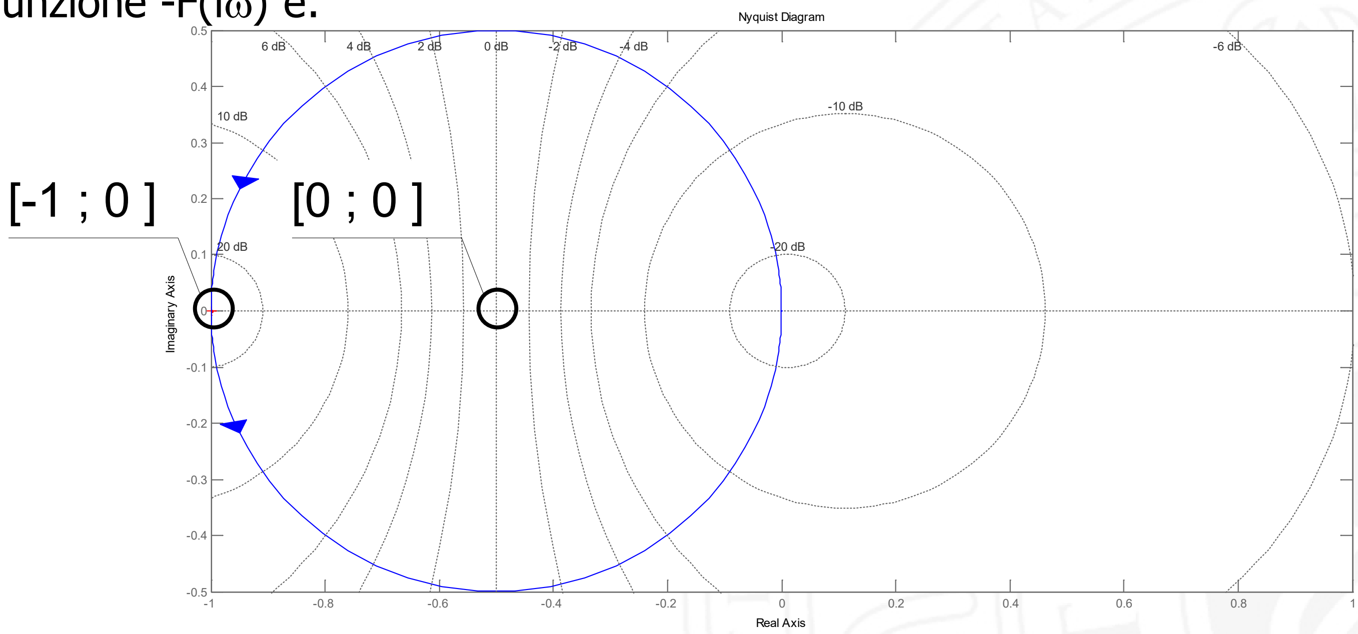
La soluzione ricavata nel dominio della variabile complessa s poteva essere ottenuta anche facendo semplici considerazioni grafiche nel dominio della pulsazione ω.

Infatti amplificare di una costante reale k non nulla un sistema dinamico con funzione di trasferimento $F(i\omega)$, in termini di diagramma di Nyquist, non significa altro che «zoomare» rispetto all'origine (il punto [0,0]) di un fattore k il diagramma di Nyquist della $F(i\omega)$. Tornando al nostro esempio, il diagramma di Nyquist della $F(i\omega)$ è:



Stabilità di un sistema del primo ordine

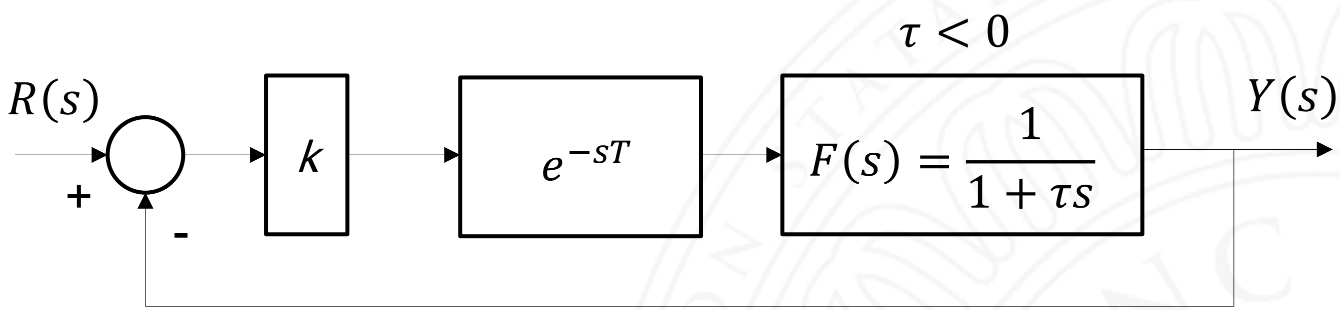
Se moltiplichiamo la F(iω) per un valore di k pari a -1, otteniamo il ribaltamento rispetto all'asse immaginario del diagramma di Nyquist della F(iω). Il diagramma di Nyquist della funzione -F(iω) è:



Notiamo quindi che per permettere al diagramma di Nyquist di compiere un giro in senso antiorario attorno al punto [-1,0] è necessario moltiplicare la F(iω) per un qualsiasi valore k < -1, ad esempio k = -1-ε con ε > 0.

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Supponiamo che tra il controllore proporzionale k e il sistema dinamico da controllare F(s) ci sia un ritardo di T (>0) secondi. Da modello avremo:



La funzione d'anello ha la forma:

$$\boxed{L(s) = \frac{ke^{-sT}}{1+\tau s}}$$

Mentre la funzione di trasferimento ha la forma:

$$\boxed{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{ke^{-sT}}{1+\tau s}}{1+\frac{ke^{-sT}}{1+\tau s}} = \boxed{\frac{ke^{-sT}}{ke^{-sT}+\tau s+1}}$$

Effetto del ritardo sulla stabilità di un sistema del primo ordine

Notiamo che la funzione d'anello è instabile, infatti l'effetto del blocco ritardo è semplicemente quello di ritardare l'effetto del segnale di ingresso pertanto non introduce alcuna conseguenza sulla stabilità del sistema in catena aperta.

Volendo eseguire l'analisi di stabilità del sistema controreazionato, ci si rende subito conto che la funzione di trasferimento W(s) non è un rapporto tra polinomi nella variabile s. Pertanto non ha senso trovare i poli della funzione di trasferimento. E quindi non si può in questo caso applicare la CNS di stabilità nel dominio della variabile complessa s.

Ricordando però che l'esponenziale complesso è esprimibile come una serie:

$$\boxed{e^{-sT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-sT)^n}{n!}}$$

Si può in realtà esprimere la funzione di trasferimento W(s) come il rapporto di due polinomi di grado infinito.

Sessione di studio

Verifica

Spiegare l’impatto del blocco ritardo in un sistema controreazionato con processo instabile del primo ordine.

Sessione di studio

Verifica

Spiegare come stabilizzare un sistema controreazionato con processo instabile del primo ordine (senza ritardo).

Sessione di studio

Verifica

Calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita di un sistema controreazionato con processo instabile del primo ordine con ritardo.