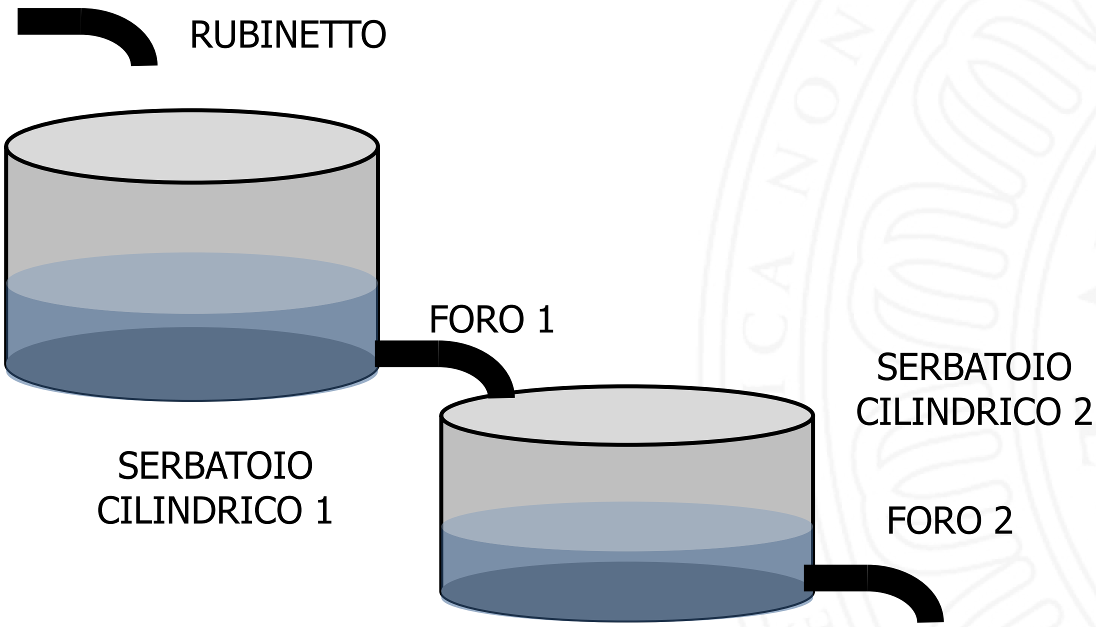
Significato fisico dei poli – Esempio 3

Il sistema dell'esempio 2 ha un unico elemento in grado di immagazzinare energia, pertanto il suo comportamento dinamico può essere caratterizzato da un solo polo. Se non ci sono dispersioni di energia significative, il sistema è necessariamente instabile e il polo è centrato nell'origine. Se invece è presente una dissipazione di energia determinante per l'evoluzione del sistema (ad es. la presenza di un foro) allora il polo sarà reale e negativo, determinando quindi un sistema intrinsecamente stabile.



Consideriamo un sistema composto da due serbatoi interagenti.

L'obiettivo è quello di controllare il livello del serbatoio cilindrico 2.

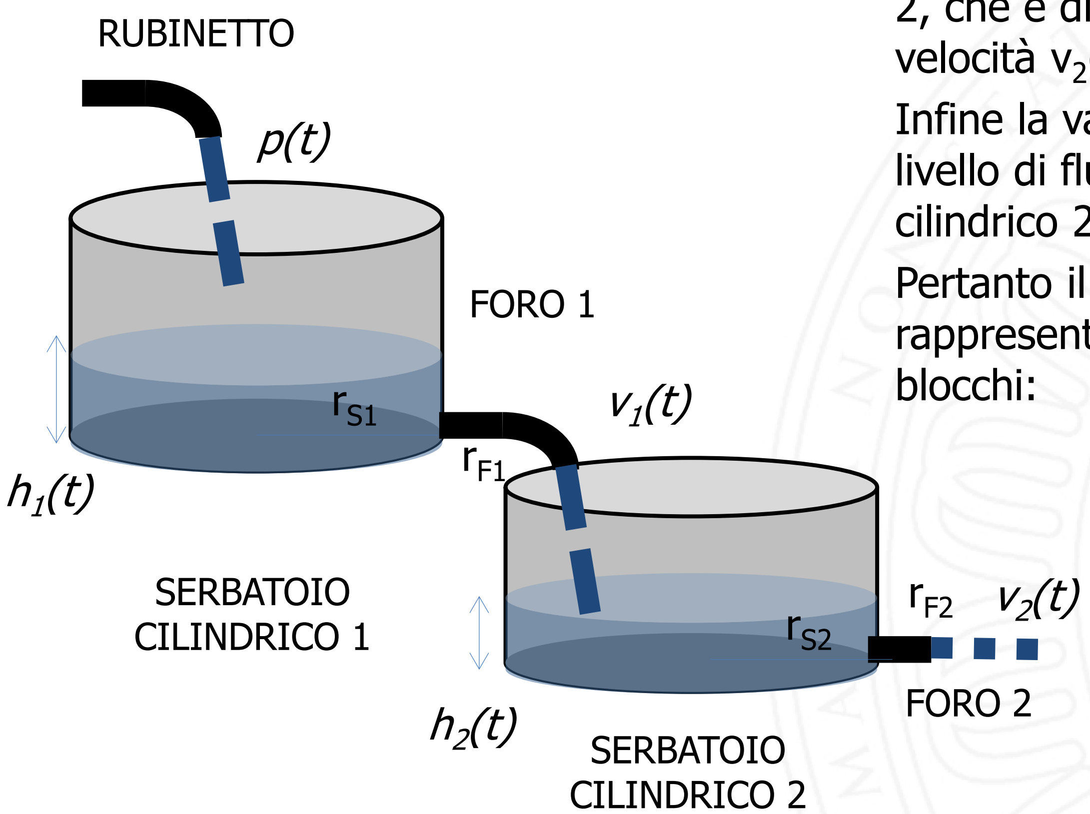
Per prima cosa, quindi, è necessario analizzare il sistema da controllare e identificare un modello astratto in grado di descriverne la dinamica.

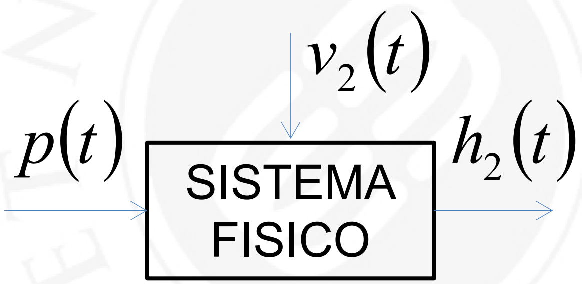
Significato fisico dei poli – Esempio 3

La variabile di ingresso è la portante p(t) del rubinetto. Le variabili di stato sono i livelli $h_1(t)$ e $h_2(t)$ di riempimento dei serbatoi. Il disturbo è rappresentato dalla portata del foro 2, che è direttamente proporzionale alla velocità $v_2(t)$.

Infine la variabile di uscita è la misura del livello di fluido presente nel serbatoio cilindrico 2, ovvero $h_2(t)$.

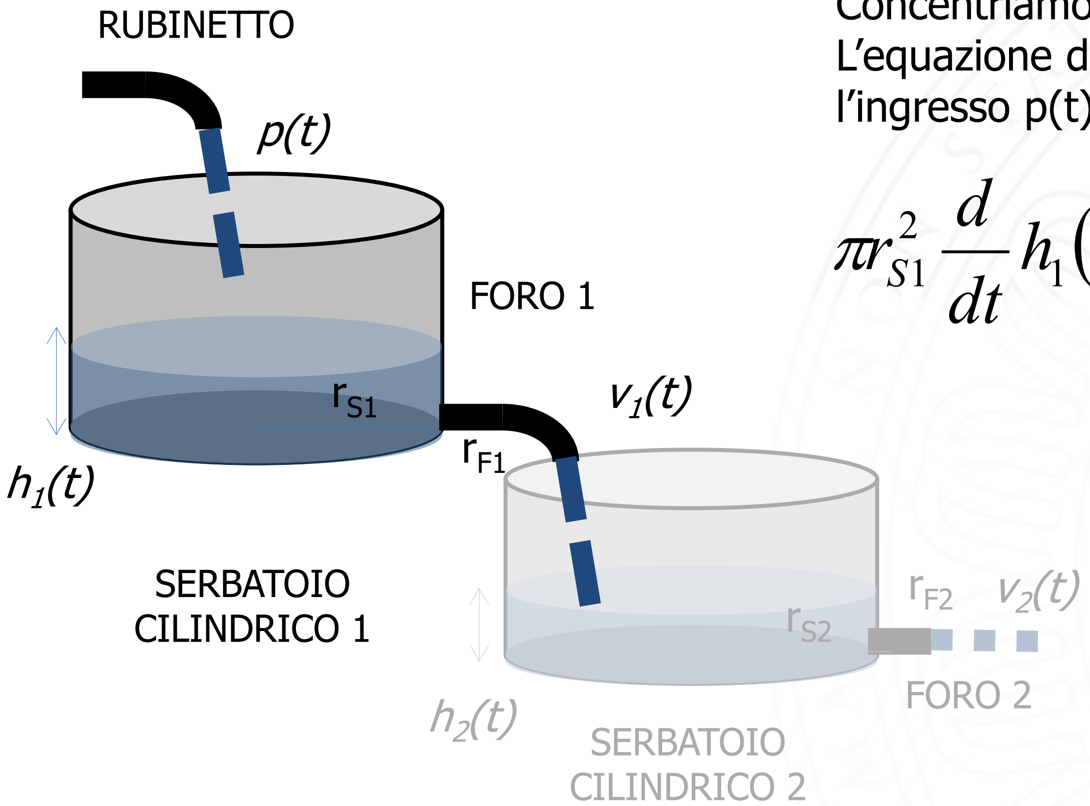
Pertanto il modello astratto può essere rappresentato con il seguente modello a blocchi:





Significato fisico dei poli – Esempio 3

Dall'esempio 2 possiamo determinare il modello matematico descrivente in maniera approssimata il funzionamento del sistema in esame.

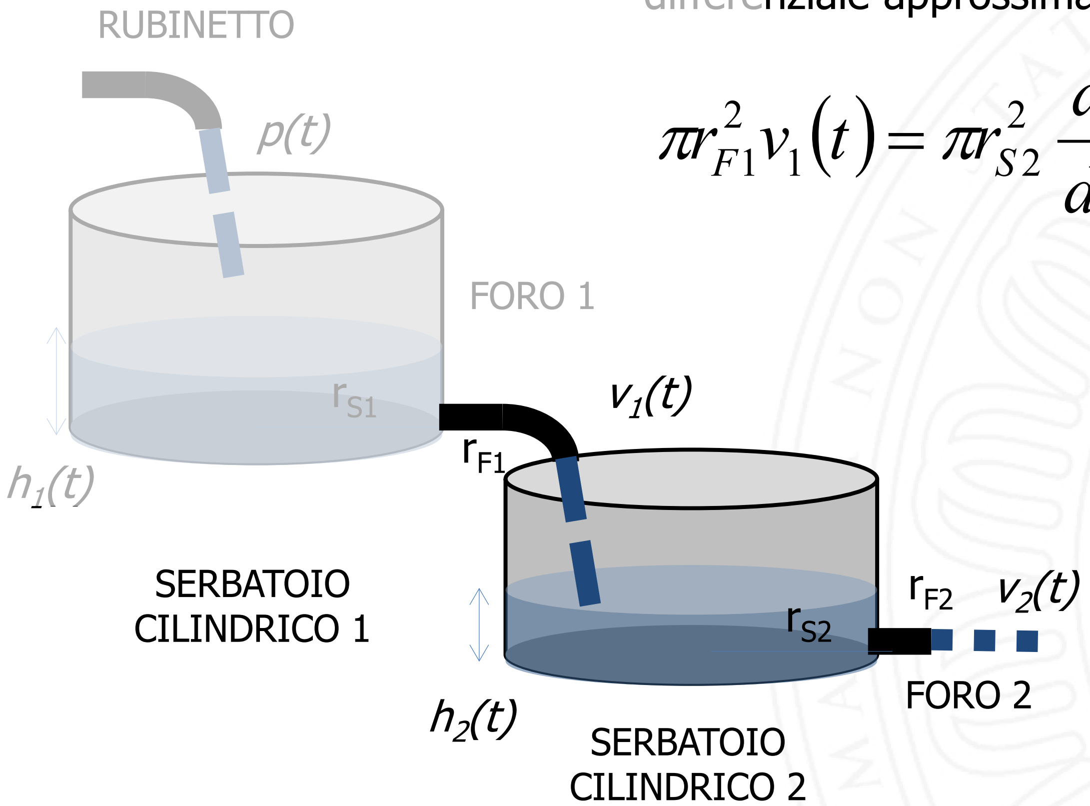


Concentriamoci sul primo elemento del sistema. L'equazione differenziale approssimata che lega l'ingresso p(t) con il livello $h_1(t)$ è:

$$\pi r_{S1}^2 \frac{d}{dt} h_1(t) + \frac{2g\pi^2 r_{F1}^4}{\sqrt{A}} h_1(t) = p(t)$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Quando il primo elemento è a regime, sappiamo che la velocità di uscita del fluido dal foro 1 è pari alla portata del rubinetto. Si può pertanto individuare l'equazione differenziale approssimata del secondo serbatoio.



$$\pi r_{F1}^2 v_1(t) = \pi r_{S2}^2 \frac{d}{dt} h_2(t) + \frac{2g\pi^2 r_{F2}^4}{\sqrt{A}} h_2(t)$$

Ricordiamo inoltre che:

$$\pi r_{F1}^2 v_1(t) = \frac{2g\pi^2 r_{F1}^4}{\sqrt{A}} h_1(t)$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Pertanto:

$$\begin{cases} \dfrac{2g\pi^2 r_{F1}^4}{\sqrt{A}} h_1(t) = \pi r_{S2}^2 \dfrac{d}{dt} h_2(t) + \dfrac{2g\pi^2 r_{F2}^4}{\sqrt{A}} h_2(t) \\ \pi r_{S1}^2 \dfrac{d}{dt} h_1(t) + \dfrac{2g\pi^2 r_{F1}^4}{\sqrt{A}} h_1(t) = p(t) \end{cases}$$

Mettendo in evidenza l'espressione di $h_1(t)$ nella prima equazione differenziale:

$$\begin{cases} h_1(t) = \dfrac{r_{S2}^2 \sqrt{A}}{2g\pi r_{F1}^4} \dfrac{d}{dt} h_2(t) + \dfrac{r_{F2}^4}{r_{F1}^4} h_2(t) \\ \pi r_{S1}^2 \dfrac{d}{dt} h_1(t) + \dfrac{2g\pi^2 r_{F1}^4}{\sqrt{A}} h_1(t) = p(t) \end{cases}$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Sostituendo l'espressione di $h_1(t)$ nella seconda equazione differenziale:

$$p(t) = \pi r_{S1}^2 \frac{r_{S2}^2\sqrt{A}}{2g\pi r_{F1}^4}\frac{d^2}{dt^2}h_2(t) + \pi r_{S1}^2\frac{r_{F2}^4}{r_{F1}^4}\frac{d}{dt}h_2(t) +$$

$$+\frac{2g\pi^2 r_{F1}^4}{\sqrt{A}}\left[\frac{r_{S2}^2\sqrt{A}}{2g\pi r_{F1}^4}\frac{d}{dt}h_2(t) + \frac{r_{F2}^4}{r_{F1}^4}h_2(t)\right]$$

Da cui si ottiene:

$$p(t) = \frac{r_{S2}^2 r_{S1}^2\sqrt{A}}{2g r_{F1}^4}\frac{d^2}{dt^2}h_2(t) + \left[\pi r_{S1}^2\frac{r_{F2}^4}{r_{F1}^4} + \pi r_{S2}^2\right]\frac{d}{dt}h_2(t) + \frac{2g\pi^2 r_{F2}^4}{\sqrt{A}}h_2(t)$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Che si può riscrivere:

$$p(t) = a_2 h_2''(t) + a_1 h_2'(t) + a_0 h_2(t)$$

Dove:

$$a_2 = \frac{r_{S2}^2 r_{S1}^2 \sqrt{A}}{2 g r_{F1}^4} \qquad a_1 = \pi r_{S1}^2 \frac{r_{F2}^4}{r_{F1}^4} + \pi r_{S2}^2 \qquad a_0 = \frac{2 g \pi^2 r_{F2}^4}{\sqrt{A}}$$

Passando quindi al dominio di Laplace:

$$F(s) = \frac{H(s)}{P(s)} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

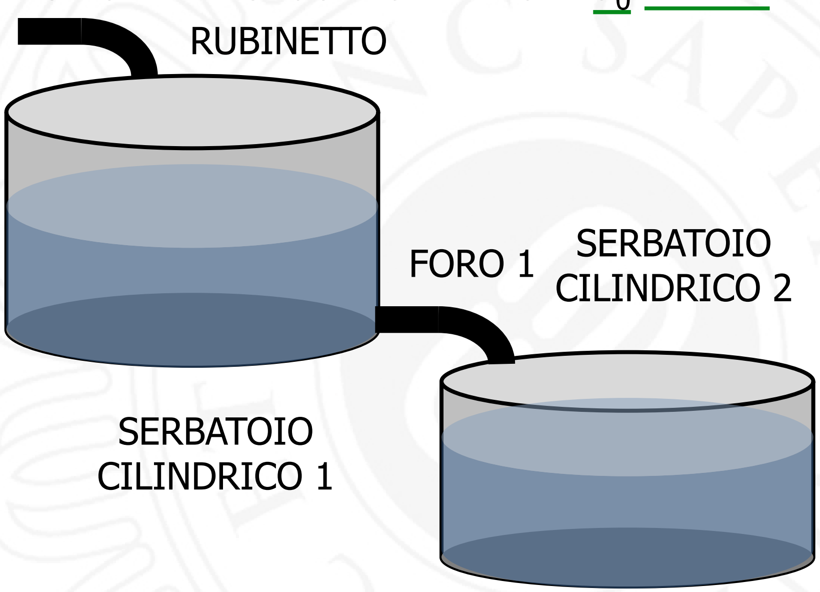
Notiamo che quando a_0 è nullo, avremo un integratore:

$$F(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s}\frac{1}{a_2 s + a_1}$$

Ma ciò è ovvio se pensiamo al significato che esso ha nel mondo reale. Infatti a_0 è nullo se e solo se il foro 2 è nullo.

$$\boxed{0 = a_0 = \frac{2g\pi^2 r_{F2}^4}{\sqrt{A}} \leftrightarrow r_{F2} = 0}$$

Il serbatoio 1, dotato di foro, ha una dinamica che tende a stabilizzarsi, ma il serbatoio 2, privo di un foro per la fuoriuscita del fluido, si comporta da integratore e quindi, nel suo complesso, determina un sistema instabile.



Significato fisico dei poli – Esempio 3

Quello che possiamo dedurre è che il sistema ha due elementi in grado di accumulare energia, connessi tra di loro attraverso un primo foro che permette ai due elementi di scambiarsi energia in un unico verso. La presenza di un secondo foro determina la dissipazione dell'energia utile all'evoluzione del sistema e ne garantisce la stabilità intrinseca. Tutto ciò si può dedurre sia dalla equazione differenziale che dalla funzione di trasferimento:

DISSIPAZIONE

ACCUMULO

$$p(t) = \underbrace{a_2 h_2''(t) + a_1 h_2'(t)}_{\text{ACCUMULO}} + \underbrace{a_0 h_2(t)}_{\text{DISSIPAZIONE}}$$

DOMINIO DEL TEMPO (t)

DOMINIO DI LAPLACE (s)

$$F(s) = \frac{H(s)}{P(s)} = \frac{1}{\underbrace{a_2 s^2 + a_1 s}_{\text{ACCUMULO}} + \underbrace{a_0}_{\text{DISSIPAZIONE}}}$$

ACCUMULO

DISSIPAZIONE

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Identifichiamo in maniera ancora più chiara i due poli della funzione di trasferimento:

$$\frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{K}{(1+\tau s)(1+\mu s)} = \frac{K}{1+(\tau+\mu)s+\tau\mu s^2}$$

Per cui ricaviamo che:

$$\frac{1}{a_0\left(1+\frac{a_1}{a_0}s+\frac{a_2}{a_0}s^2\right)} = \frac{1/a_0}{1+\frac{a_1}{a_0}s+\frac{a_2}{a_0}s^2} = \frac{K}{1+(\tau+\mu)s+\tau\mu s^2}$$

$$K=\frac{1}{a_0} \qquad \frac{a_1}{a_0}=\tau+\mu \qquad \frac{a_2}{a_0}=\tau\mu$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Esplicitando τ e μ otteniamo:

$$K = \frac{1}{a_0} \qquad \mu = \frac{a_1}{a_0} - \tau \qquad \frac{a_2}{a_0} = \tau\left(\frac{a_1}{a_0} - \tau\right)$$

Dalla risoluzione della terza equazione:

$$\tau^2 - \frac{a_1}{a_0}\tau + \frac{a_2}{a_0} = 0$$

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1}{a_0} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 4\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2}\right] = \frac{1}{2a_0}\left[a_1 \pm \sqrt{a_1^{\,2} - 4a_2^{\,2}}\right]$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Da cui si ricava che:

$$\tau_{1,2} = \frac{a_1}{2a_0}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right]$$

Notiamo che abbiamo due possibili soluzioni per τ, ma qualsiasi scegliamo, l'altro valore è assunto da μ. Infatti se definiamo:

$$\tau_1 = \frac{a_1}{2a_0}\left[1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right] \qquad \tau_2 = \frac{a_1}{2a_0}\left[1 - \sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right]$$

Andiamo a sostituire per trovare i valori di μ_1 e μ_2 otteniamo:

Significato fisico dei poli – Esempio 3

$$\mu_1 = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1}{2a_0}\left[1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right] = \frac{a_1}{2a_0} - \frac{a_1}{2a_0}\sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2} = \tau_2$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1}{2a_0}\left[1 - \sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right] = \frac{a_1}{2a_0} + \frac{a_1}{2a_0}\sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2} = \tau_1$$

Pertanto, senza perdita di generalità poniamo:

$$\tau = \frac{a_1}{2a_0}\left[1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right] \qquad \mu = \frac{a_1}{2a_0}\left[1 - \sqrt{1 - 4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right]$$

Significato fisico dei poli – Esempio 3

Siamo riusciti a definire la funzione di trasferimento nella forma:

$$F(s) = \frac{K}{(1+\tau s)(1+\mu s)}$$

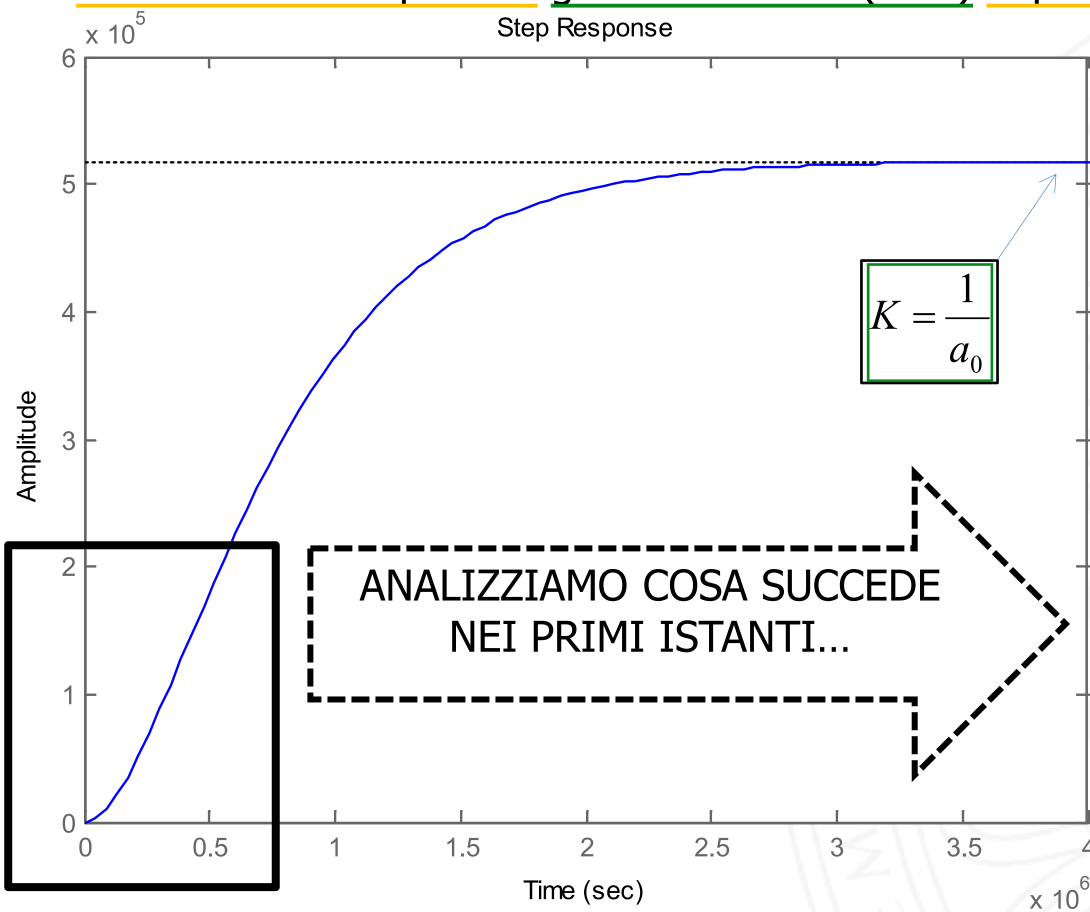
Dove:

$$K = \frac{1}{a_0} \qquad \tau = \frac{a_1}{2a_0}\left[1 + \sqrt{1-4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right] \qquad \mu = \frac{a_1}{2a_0}\left[1 - \sqrt{1-4\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right]$$

$$\boxed{a_2 = \frac{r_{S2}^2 r_{S1}^2 \sqrt{A}}{2g r_{F1}^4} \qquad a_1 = \pi r_{S1}^2 \frac{r_{F2}^4}{r_{F1}^4} + \pi r_{S2}^2 \qquad a_0 = \frac{2g\pi^2 r_{F2}^4}{\sqrt{A}}}$$

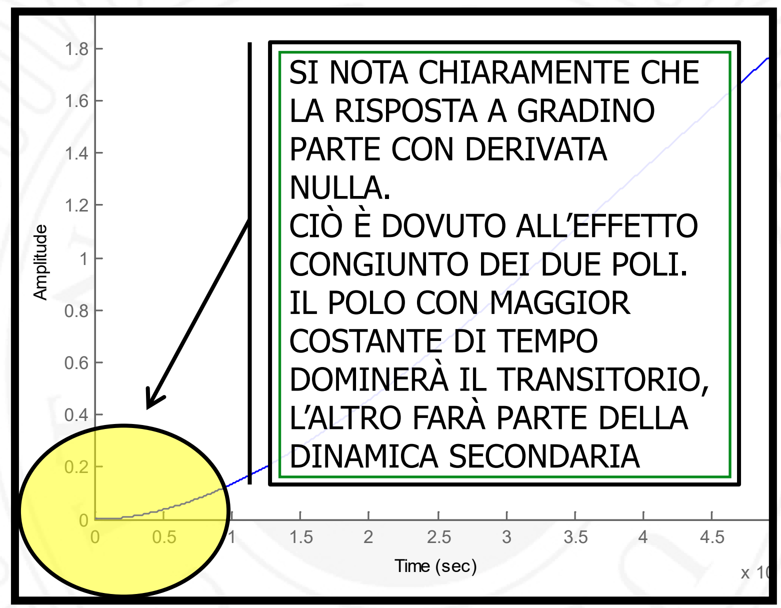
Significato fisico dei poli – Esempio 3

Analizziamo la risposta a gradino unitario (A=1) impostando i seguenti valori:



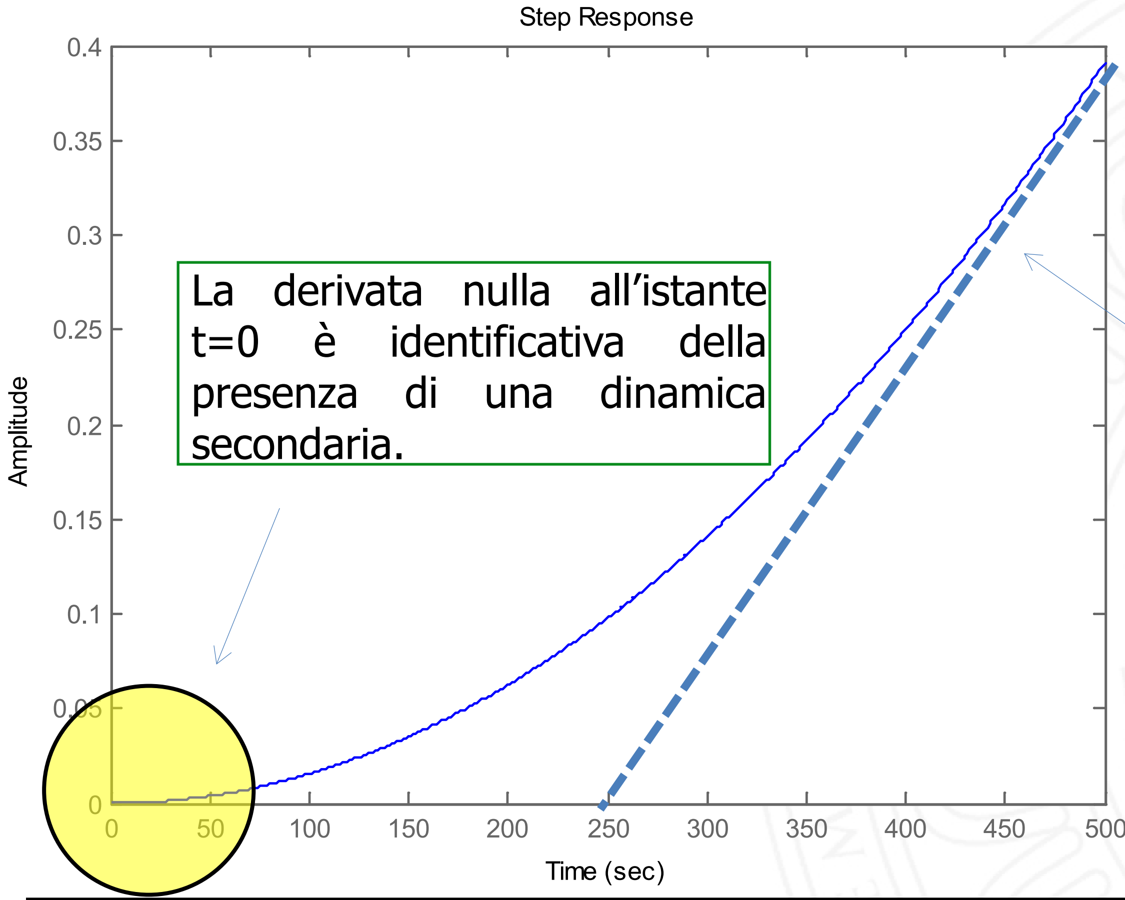
$$r_{S1} = 0.5 \qquad r_{F1} = 0.01$$

$$r_{S2} = 0.5 \qquad r_{F2} = 0.01$$



Significato fisico dei poli – Esempio 3

Analizziamo la risposta a gradino unitario (A=1) impostando i seguenti valori:



La derivata nulla all'istante t=0 è identificativa della presenza di una dinamica secondaria.

$$r_{S1} = 0.5 \quad r_{F1} = 0.01$$

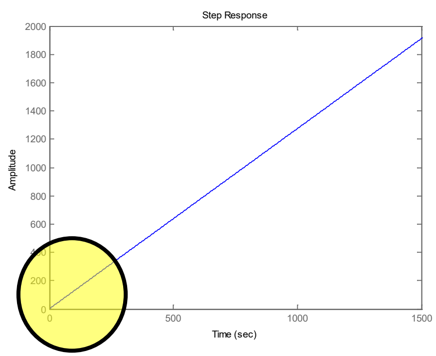
$$r_{S2} = 0.5 \quad r_{F2} = 0$$

Si evince chiaramente che il sistema è instabile e presenta una dinamica dominante con solo accumulo di energia (crescita lineare).

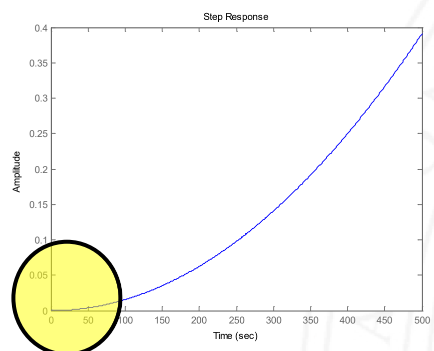
Osservazioni conclusive

Abbiamo visto, attraverso 3 esempi, quale sia il significato fisico dei poli. Un polo è rappresentativo della capacità del sistema di immagazzinare energia. Uno o più poli nell'origine sono significativi di elementi del sistema che accumulano senza dissipazione di energia e sono quindi causa di instabilità. Uno o più poli reali negativi sono significativi di accumuli con dissipazione di energia.

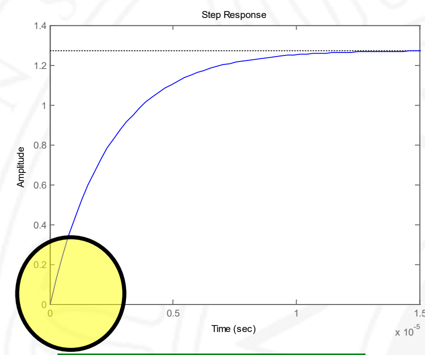
I diagrammi sono spiegati bene nella lezione 87



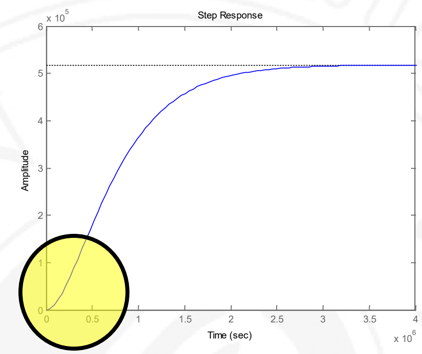
ACCUMULO SENZA DISSIPAZIONE
- SISTEMA INSTABILE
- NESSUNA DINAMICA SECONDARIA



ACCUMULO SENZA DISSIPAZIONE
- SISTEMA INSTABILE
- PRESENZA DI UNA DINAMICA SECONDARIA



ACCUMULO CON DISSIPAZIONE
- SISTEMA STABILE
- NESSUNA DINAMICA SECONDARIA



ACCUMULO CON DISSIPAZIONE
- SISTEMA STABILE
- PRESENZA DI UNA DINAMICA SECONDARIA

Sessione di studio

Verifica

Quale è il significato fisico di avere un polo reale nella funzione di trasferimento?

Sessione di studio

Verifica

Prendendo spunto dall'esempio visto a lezione, come si relaziona il numero di poli di una funzione di trasferimento con le forme di accumulo di energia?

Sessione di studio

Verifica

Prendendo spunto dall'esempio mostrato a lezione, guardando l'andamento della risposta al gradino:

- come si può verificare sperimentalmente se il sistema è stabile?
- come si può verificare sperimentalmente se il sistema ha 2 o più poli?