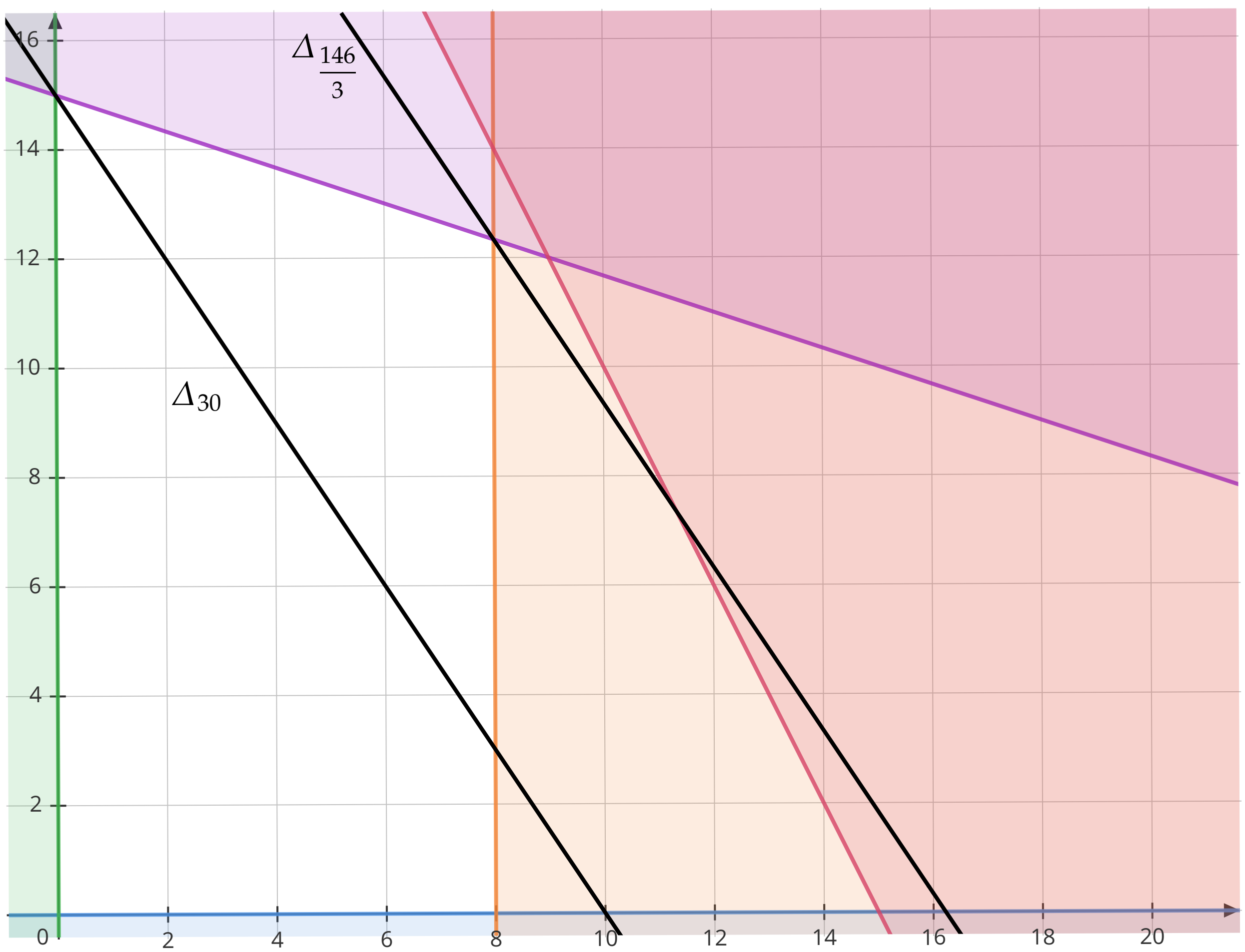
Corrigé rattrapage Optim Lin juin 23

Exercice. On considère le problème d'optimisation linéaire $(P)\begin{cases} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$.

On note également $(\overline{P})$ le problème relaxé de (P).

a. Résoudre $(\overline{P})$ par méthode géométrique sur la feuille de papier millimétré jointe.

(a) Résolution par méthode géométrique du problème relaxé $(\overline{P})$:



Point optimal = intersection des 2 premières contraintes : $\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 45 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = \dfrac{37}{3} \end{cases}$

Solution du problème relaxé : $\begin{cases} x_1^* = 8 \\ x_2^* = \dfrac{37}{3} \end{cases}$ et $f^* = \dfrac{146}{3}$.

b. Résoudre $(\overline{P})$ en utilisant la méthode des tableaux.

$$(\overline{P})\begin{cases} \max(3x_1 + 2x_2) \\ x_1 \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 45 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	3	2	0	0	0	0
y_1	1	0	1	0	0	8
y_2	1	3	0	1	0	45
y_3	2	1	0	0	1	30

Var. IN : x_1 Var. OUT : y_1

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	0	2	-3	0	0	-24
x_1	1	0	1	0	0	8
y_2	0	3	-1	1	0	37
y_3	0	1	-2	0	1	14

Var. IN : x_2 Var. OUT : y_2

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	0	0	-7/3	-2/3	0	-146/3
x_1	1	0	1	0	0	8
x_2	0	1	-1/3	1/3	0	37/3
y_3	0	0	-5/3	-1/3	1	5/3

La solution de $(\overline{P})$ est donc $\begin{cases} x_1^* = 8 \\ x_2^* = \frac{37}{3} \end{cases}$ et $f^* = \frac{146}{3}$.

c. Résoudre (P) par la méthode des coupes.

La 1ère coupe sera construite à partir de la variable x_2 (seule composante non entière de la solution relaxée).

D'après le dernier tableau, la contrainte correspondante à x_2 est :

$$x_2 - \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 = \frac{37}{3}$$

<u>L'équation de la 1ère coupe</u> sera donc :

$$-\frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \leqslant -\frac{1}{3}$$

On rajoute cette nouvelle contrainte et on applique la méthode primale-duale.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	-7/3	-2/3	0	0	-146/3
x_1	1	0	1	0	0	0	8
y_2	0	1	-1/3	1/3	0	0	37/3
y_3	0	0	-5/3	-1/3	1	0	5/3
y_4	0	0	-2/3	-1/3	0	1	-1/3

On fait sortir y_4 et on fait entrer la var. qui réalise le minimum : $\min\left(\frac{-7/3}{-2/3}\ ;\ \frac{-2/3}{-1/3}\right) = 2.$

Donc on fait entrer y_2.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	-1	0	0	-2	-144/3**=-48**
x_1	1	0	1	0	0	0	8
y_2	0	1	-1	0	0	1	12
y_3	0	0	-1	0	1	-1	2
y_4	0	0	2	1	0	-3	1

La solution finale du pb. en nombres entiers (P) est donc : $\begin{cases} x_1^* = & 8 \\ x_2^* = & 12 \end{cases}$ et $f^* = 48$.

d. **[ING1 Mathématiques Appliquées uniquement]**
Résoudre le problème dual $(\overline{D})$ de $(\overline{P})$ directement, c'est-à-dire *sans utiliser la dualité et/ou la complémentarité* et en utilisant la méthode des tableaux avec la méthode des deux phases si nécessaire.

Le dual de : $(\overline{P})\begin{cases} \max(3x_1 + 2x_2) \\ x_1 \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 45 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$ est donné par : $(\overline{D})\begin{cases} \min(8u_1 + 45u_2 + 30u_3) \\ u_1 + u_2 + 2u_3 \geqslant 3 \\ 3u_2 + u_3 \geqslant 2 \\ u_1, u_2, u_3 \geqslant 0 \end{cases}$

Mis sous forme canonique, cela donne :

$$(\overline{D})\begin{cases} \max(-8u_1 - 45u_2 - 30u_3) \\ -u_1 - u_2 - 2u_3 \leqslant -3 \\ -3u_2 - u_3 \leqslant -2 \\ u_1, u_2, u_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

L'origine n'étant pas admissible, nous devons passer par la méthode des 2 phases.

Phase 1 : $\left(\overline{D^a}\right)\begin{cases} \max(-\delta) \\ -u_1 - u_2 - 2u_3 - \delta \leqslant -3 \\ -3u_2 - u_3 - \delta \leqslant -2 \\ u_1, u_2, u_3, \delta \geqslant 0 \end{cases}$

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	S.M.
f	0	0	0	-1	0	0	0
v_1	-1	-1	-2	-1	1	0	-3
v_2	0	-3	-1	-1	0	1	-2

On force l'entrée de δ et la sortie de v_1(le plus petit second membre).

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	S.M.
f	1	1	2	0	-1	0	3
δ	1	1	2	1	-1	0	3
v_2	1	-2	1	0	-1	1	1

Var. IN : u_3 Var. OUT : v_2

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	S.M.
f	-1	5	0	0	1	-2	1
δ	-1	5	0	1	1	-2	1
u_3	1	-2	1	0	-1	1	1

Var. IN : u_2 Var. OUT : δ

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	S.M.
f	0	0	0	-1	0	0	0
u_2	-1/5	1	0	1/5	1/5	-2/5	1/5
u_3	3/5	0	1	2/5	-3/5	1/5	7/5

Fin de la phase 1 avec $\delta^* = 0$. On peut donc passer à la phase 2.

Phase 2 :

Fonction objectif :

$$-8u_1 - 45u_2 - 30u_3 = -8u_1 - 45\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}u_1 - \frac{1}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2\right) - 30\left(\frac{7}{5} - \frac{3}{5}u_1 + \frac{3}{5}v_1 - \frac{1}{5}v_2\right)$$
$$= -51 + u_1 - 9v_1 - 12v_2$$

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	S.M.
f	1	0	0	-9	-12	51
u_2	-1/5	1	0	1	-2/5	1/5
u_3	3/5	0	1	-3/5	1/5	7/5

Var. IN : u_1 Var. OUT : u_3

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	S.M.
f	0	0	-5/3	-8	-37/3	146/3
u_2	0	1	1/3	4/5	-1/3	2/3
u_3	1	0	5/3	-1	1/3	7/3

On obtient la solution du dual : $\begin{cases} u_1^* = \dfrac{7}{3} \\ u_2^* = \dfrac{2}{3} \\ u_3^* = 0 \end{cases}$ et donc : $f^* = -\dfrac{146}{3}$

Le signe $-$ devant f^* est du à la mise sous forme canonique.

e. **[ING1 Informatique uniquement]**
Résoudre (P) par la méthode de séparation et évaluation.

Rappelons que la solution de $(\overline{P})$ est : $\begin{cases} x_1^* = 8 \\ x_2^* = \dfrac{37}{3} \end{cases}$ et $f^* = \dfrac{146}{3}$, avec comme tableau final :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	0	0	-7/3	-2/3	0	-146/3
x_1	1	0	1	0	0	8
x_2	0	1	-1/3	1/3	0	37/3
y_3	0	0	-5/3	-1/3	1	5/3

La séparation se fera donc à partir de x_2 en ajoutant la contrainte $x_2 \leqslant 12$ du côté $\left(\overline{P^-}\right)$et $x_2 \geqslant 13$ du côté $\left(\overline{P^+}\right)$.

<u>Commençons par :</u> $\left(\overline{P^-}\right)$

La nouvelle contrainte doit être réécrite :

$$x_2 \leqslant 12 \iff \frac{37}{3} + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \leqslant 12 \iff \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \leqslant -\frac{1}{3}$$

Elle est standardisée puis intégrée dans le tableau pour appliquer la méthode primale-duale.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	-7/3	-2/3	0	0	-146/3
x_1	1	0	1	0	0	0	8
x_2	0	1	-1/3	1/3	0	0	37/3
y_3	0	0	-5/3	-1/3	1	0	5/3
y_4	0	0	1/3	-1/3	0	1	-1/3

On fait sortir y_4 et on fait entrer y_2 seule variable avec un rapport positif.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	-3	0	0	-2	-48
x_1	1	0	1	0	0	0	8
x_2	0	1	0	0	0	1	12
y_3	0	0	-2	0	1	-1	2
y_4	0	0	-1	1	0	-3	1

On obtient donc une solution entière : $\begin{cases} x_1^* = 8 \\ x_2^* = 12 \end{cases}$ et $f^* = 48$.

On s'attaque ensuite à : $\left(\overline{P^+}\right)$

La nouvelle contrainte doit être réécrite :

$$x_2 \geqslant 13 \iff \frac{37}{3} + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \geqslant 13 \iff -\frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \leqslant -\frac{2}{3}$$

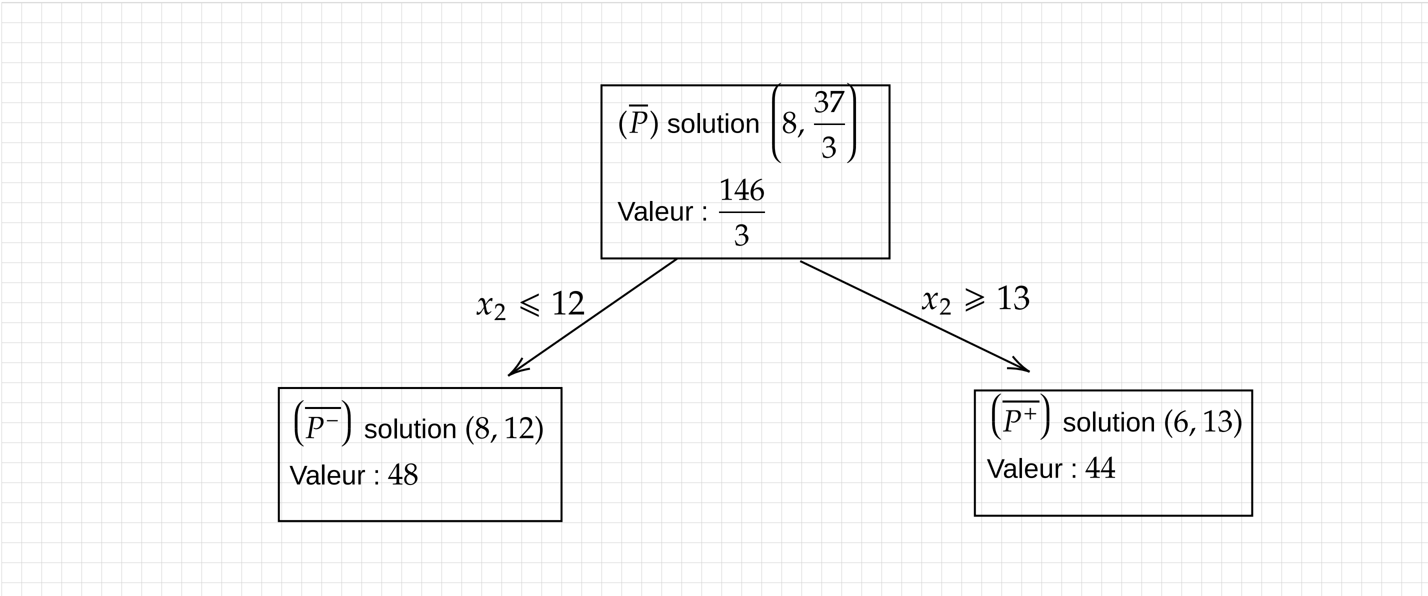
Elle est standardisée puis intégrée dans le tableau pour appliquer la méthode primale-duale.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	-7/3	-2/3	0	0	-146/3
x_1	1	0	1	0	0	0	6
x_2	0	1	-1/3	1/3	0	0	37/3
y_3	0	0	-5/3	-1/3	1	0	5/3
y_4	0	0	-1/3	1/3	0	1	-2/3

On fait sortir y_4 et on fait entrer y_1 seule variable avec un rapport positif.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	0	-3	0	-7	-44
x_1	1	0	0	1	0	3	8
x_2	0	1	0	0	0	-1	13
y_3	0	0	0	-2	1	-5	5
y_4	0	0	1	-1	0	-3	2

On obtient donc une solution entière : $\begin{cases} x_1^* = & 6 \\ x_2^* = & 13 \end{cases}$ et $f^* = 44$.



La solution finale est donc bien : $\begin{cases} x_1^* = & 8 \\ x_2^* = & 12 \end{cases}$ et $f^* = 48$.