Corrigé

Dans la suite, *n* désigne le nombre de sommets d'un graphe et *m* son nombre de d'arêtes/arcs.

En théorie des graphes, le mot "arête" prend un seul 'r'. Le mot algorithme n'a pas de 'y' et est masculin.

Exercice 1 : Cours et application de cours (5 pts)

1. Combien d'arêtes y a-t-il au maximum dans un graphe simple ? (0,5 pt)

Un graphe (non orienté) simple n'a ni boucle ni arête multiple. Une arête est donc donnée par une paire (un ensemble à 2 éléments) de sommets. Il y en a donc au plus n*(n-1)/2.

(Pour *n* fixé, le graphe qui atteint ce maximum est appelé graphe complet à *n* sommets et il est noté K_n.)

2. Donner la définition d'un graphe connexe. (0,5 pt)

Un graphe connexe est un graphe dans lequel pour toute paire de sommets s_1 et s_2, il existe une chaîne entre s_1 et s_2.

3. Donner la définition (selon la théorie des graphes) d'un arbre. (0,5 pt)

Un arbre est un graphe à la fois connexe **et** acyclique.

4. Expliquer pourquoi l'algorithme de plus court chemin étudié en cours ne marche pas avec des poids négatifs. (1 pt)

L'algorithme en question est l'algorithme de Dijkstra (cf. exercice 2). Il est inadapté dans le cas de poids négatifs parce que c'est un algorithme glouton (on ne diminue jamais le coût d'un sommet qui a été choisi comme le minimum à une itération, même si on découvre ensuite un chemin plus court).

https://youtu.be/EgFC0dZuumc?t=249

5. Qu’est-ce qu’un graphe eulérien ? Qu’est ce qu’un graphe hamiltonien ? (1 pt)

Un graphe eulérien est un graphe qui contient un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête. (On connaît des algorithmes efficaces pour construire un tel cycle s’il existe.)
Un graphe hamiltonien est un graphe qui contient un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet. (On ne connaît pas d’algorithmes efficaces pour construire un tel cycle s’il existe.)

a. Dessiner un graphe d’au moins 5 sommets qui est eulérien mais pas hamiltonien. (0,5 pt)
b. Dessiner un graphe d’au moins 5 sommets qui est hamiltonien mais pas eulérien. (0,5 pt)
c. Dessiner un graphe d’au moins 5 sommets qui est hamiltonien et eulérien. (0,5 pt)

C_5 est le cycle à 5 sommets. Il est à la fois eulérien et hamiltonien.

```
o---o
|   |
o   o
 \ /
  o
```

Pour qu’un graphe ne soit pas hamiltonien, il suffit de “forcer” les cycles qui contiennent tous les sommets à passer 2 fois par le même.

```
o   o
|\ /|
| o |
|/ \|
o   o
```

On rappelle qu’un graphe eulérien a tous ses sommets de degré pair. Pour obtenir un graphe hamiltonien mais non eulérien, il suffit de partir de C_5 et de rajouter une diagonale (une arête qui relie deux sommets non adjacents). La condition sur les degrés n’est plus vraie donc le graphe n’est plus eulérien alors qu’il est toujours hamiltonien (puisqu’ ajouter une arête à un graphe hamiltonien conserve la propriété).

```
o---o
|   |
o---o
 \ /
  o
```

Exercice 2 : Plus courts chemins (5 pts)

1. Donner le tableau des longueurs des plus courts chemins à partir de A. (0,5 pt)

A	B	C	D	E	F	G	H
0	13	43	27	30	27	4	20

2. Quel algorithme permet de calculer les plus courts chemins à partir d'un sommet donné ? (0,5 pt)

   C'est l'algorithme de Dijkstra.

3. Dérouler l'algorithme de la question précédente et donner toutes les étapes de l'application de cet algorithme à partir du sommet A. (1 pt)

	A	B	C	D	E	F	G	H
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
							4A	
		13G		33G				20G
						27B		**20G**
				27H				
			43D		30D	**27B**		
					30D			
			43D					

4. Quel type de graphe particulier est obtenu par cet algorithme ? (0,5 pt)

On obtient l'arbre des plus courts chemins à partir du sommet de départ. (Aucun des autres sommets ne joue de rôle particulier. On parle de recherche aveugle ou non informée.)

Expliquer comment simplifier l'algorithme si tous les coûts sont maintenant à 1. (0,5 pt)

Si on traite les sommets dans une logique "premier arrivé, premier servi" (FIFO: First In, First Out) alors on obtient le plus court chemin (en nombre d'arêtes) la première fois que l'on atteint un sommet. Ceci s'implémente avec une file. (Ceci est faux pour Dijkstra pour lequel il faut une file de priorité.)

Écrire l'algorithme correspondant. (1,5 pts)

https://youtu.be/xlVX7dXLS64?t=159

Quel est son nom ? (0,5 pt)

Cet algorithme s'appelle le parcours en largeur (BFS: Breadth-first search).

Exercice 3 : Composantes fortement connexes (3,5 pts)

1. Donner la définition d'une composante fortement connexe d'un graphe G. (0,5 pt)

Cette notion concerne les graphes orientés. Une composante fortement connexe est un sous-ensemble maximal de sommets qui vérifie la propriété suivante : pour tout couple de sommets s_1 et s_2, il existe un chemin de s_1 à s_2 **et** un chemin de s_2 à s_1.
https://www.youtube.com/watch?v=ohObUJ9Q6wQ

2. Quel algorithme permet de trouver les composantes fortement connexes ? (0,5 pt)

On les calcule grâce à l'algorithme de Kosaraju-Sharir (ou celui de Tarjan).

3. Ecrire cet algorithme. (2 pts)

L'algorithme de Kosaraju repose sur un parcours en profondeur du graphe et du graphe miroir. (Les composantes fortement connexes du graphe et du graphe miroir sont les mêmes.) Le premier parcours sert à déterminer un "bon ordre" des sommets dans lequel effectuer le deuxième parcours.
https://en.wikipedia.org/wiki/Kosaraju%27s_algorithm#The_algorithm
https://youtu.be/m2mdGfxs_5E?t=310

4. Quelle est sa complexité ? (0,5 pt)

Chaque sommet et chaque arête est considéré 2 fois. La complexité est donc en $\Theta(n+m)$.

Exercice 4 : Renard et lapin (6,5 pts)

1. Donner la définition d'un graphe biparti. (0,5 pt)

Un graphe biparti est un graphe dont on peut partitionner l'ensemble des sommets S en deux ensembles S_1 et S_2 ($S_1 \cap S_2 = \varnothing$ et $S_1 \cup S_2 = S$) tels que chaque arête relie un sommet de S_1 à un sommet de S_2 (autrement dit, il n'existe aucune arête entre deux sommets de S_1, ni entre deux sommets de S_2).

2. Expliquer pourquoi cette grille représente un graphe biparti. (0,5 pt)

La grille peut être partitionnée en deux ensembles de sommets en colorant les sommets comme un damier/échiquier (https://en.wikipedia.org/wiki/Check_(pattern)). (Par ailleurs, être biparti ou 2-colorable sont deux propriétés équivalentes.)

3. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le lapin, c'est-à-dire qu'il pourra toujours s'échapper. (1,5 pts)

Lors de chaque coup, les deux animaux passent soit d'une case noire à une case blanche, soit le contraire. Comme ils commencent tous les deux sur une case de même couleur et que le renard joue en premier, il ne peut jamais atteindre le lapin après un de ses coups, puisqu'il termine toujours sur une case de la "mauvaise" couleur.

Lorsque c'est au lapin de jouer, il suffit donc au lapin de ne pas venir sur la case du renard pour s'échapper indéfiniment. Or tous les sommets sont de degré au moins 2, donc le lapin n'est jamais forcé de jouer un coup perdant.

4. Montrer que ce graphe n'est pas biparti. (0,5 pt)

Le graphe contient un triangle C_3. Il n'est donc pas 2-colorable et donc pas biparti.

5. Pourquoi l'ajout du nouveau sommet remet-il en question la stratégie du lapin de la première partie ? (1 pts)

Grâce au nouveau sommet, le renard peut interrompre l'alternance case noire/case blanche. Le lapin n'a donc plus de garantie que le renard ne puisse pas jouer un coup qui l'amène sur la même couleur que lui. Dans la première partie, les coups du renard étaient sans danger immédiat.

6. Montrer qu’il existe maintenant une stratégie gagnante pour le renard ? (1,5 pts)

Il suffit au renard de commencer par rejoindre le nouveau sommet en ignorant le lapin puis de revenir sur la grille initiale sur la même couleur que le lapin. Le choix de la case sur laquelle revenir sur la grille, puis celui des autres coups se fait en minimisant systématiquement la norme infini entre le renard et le lapin, i.e. la quantité $\max(|\Delta x|,|\Delta y|)$.

7. Quel est le plus petit nombre de déplacements que peut faire le renard pour garantir le gain de la partie ? (1 pt)

La première phase prend 5 coups pour “changer de couleur”. Pour la deuxième phase, 4 coups supplémentaires suffisent toujours.

Le renard a donc une stratégie gagnante en 9 coups.