

TD3 - Quotients gauches et systèmes d'équations

Objectifs

Ce travail dirigé a pour but d'étudier la bijection entre les langages réguliers et les automates à états finis.

- Génération d'un automate minimal à partir de l'expression régulière d'un langage
- Génération de l'expression régulière d'un langage à partir d'un automate à états finis

Rappels et notations

Lemme d'Arden

Soient A un alphabet et X, B, C trois langages définis sur A^* .

Une solution de l'équation $X = BX + C$ est

$$X = B^*C$$

Quelques propriétés utiles pour l'algorithme des quotients gauches :

- $X^* = X^+ \cup \varepsilon = X^+ + \varepsilon$ l'union \cup est équivalente au signe $+$ (pas celui en exposant)
- $X^+ = XX^*$ on en déduit : $X^* = XX^* + \varepsilon$
- $x^{-1}x = \varepsilon$
- $x^{-1}Y = \emptyset$ si le langage Y ne contient aucun mot commençant par x
- On en déduit par exemple : $x^{-1}y = \emptyset$ $x^{-1}\varepsilon = \emptyset$
- Note : $\emptyset + X = X$ $\emptyset.X = \emptyset$ $x^{-1}\emptyset = \emptyset$
- $x^{-1}(X + Y) = x^{-1}X + x^{-1}Y$

Exercice 1. Un premier langage simple

Question 1. Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ et le langage $L = a^*b^*$. Trouver un automate qui reconnaît L .

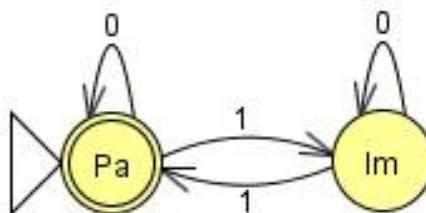
Question 2. Vérifier cette réponse en utilisant l'algorithme des quotients gauches à partir de l'expression régulière : $L = a^*b^*$.

Question 3. On cherche maintenant à vérifier que l'automate est bien équivalent à l'expression régulière initiale.

Pour cela, résoudre le système d'équation issu de l'automate en utilisant le lemme d'Arden.

Exercice 2. Un deuxième langage moins simple

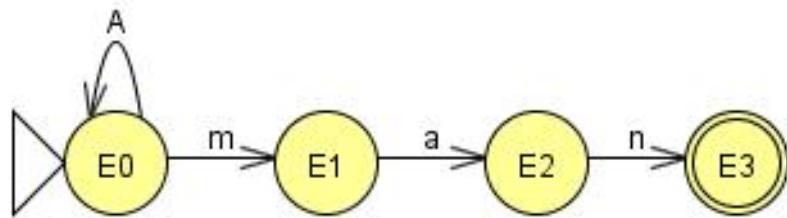
Question 1. Trouver le langage engendré par l'automate suivant par la résolution du système d'équation associé.



Question 2. Vérifier ce résultat en appliquant l'algorithme des quotients gauches sur l'expression régulière que vous venez de trouver.

Exercice 3. Un troisième langage difficile

Soit l'alphabet $A = \{a, \dots, z\}$. On reprend l'automate non déterministe représentant le langage des mots se terminant par man :



Question 1. Plutôt que de tenter de résoudre le système d'équations de l'automate déterministe (très difficile), résolvez le système d'équation de cet automate non déterministe pour trouver une expression régulière du langage qu'il reconnaît.

Question 2. Vérifier ce résultat en appliquant l'algorithme des quotients gauches sur le langage que vous venez de trouver.