
PROBABILITÉS & SIMULATION

Examen - janvier 2023

◁ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- Autorisé : Trois feuilles A4 recto-verso manuscrites. Calculatrices.
- Non autorisé : Tout autre document et tous les supports électroniques (smart-phone, tablette, ordinateur,...).

- L'épreuve est composée de 5 exercices indépendants.
- La table de la loi normale standard y est jointe.
- Une réponse numérique donnée sous forme algébrique simplifiée est acceptée (sous forme d'une fraction réduite par exemple).

◁ Sujet de l'épreuve ▷

► On notera :

- v.a.r. pour variable aléatoire réelle.
- v.a.r.d. pour variable aléatoire réelle discrète.
- v.a.r.a.c. pour variable aléatoire réelle absolument continue.
- f.m.p. pour fonction de masse de probabilité.

Exercice 1. (*xx pts*)

Soit X une v.a.r.a.c. de fonction de densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- 1) Vérifier que la fonction f_X est bien une fonction de densité de probabilité.
- 2) Déterminer F_X , la fonction de répartition de X .
- 3) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$, de X .
- 4) On pose $Y = 2X + 1$ et on admet que Y est bien une v.a.r..
 - a) Déterminer F_Y , la fonction de répartition de Y .
 - b) Montrer alors que Y est une v.a.r.a.c. et déterminer une fonction de densité de probabilité f_Y de Y .
 - c) Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$, de Y .

Exercice 2. (*xx points*)

Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec une moyenne $\mu = 20$ litres et un écart-type $\sigma = 5$ litres. Dans le cadre d'une campagne publicitaire, on souhaite répondre aux questions suivantes :

- 1) Quel est le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois) ?
- 2) Quel est le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois) ?
- 3) Quelle est la consommation maximale de 50% des consommateurs ?
- 4) Au dessus de quelle consommation se trouvent 33% des consommateurs ?

Annexe. On donne les valeurs : $\Phi(2) = 0.9772$ et $\Phi(0.44) = 0.67$

Exercice 3. (*xx points*)

Notation. Pour une v.a.r.d. X , on note : $p_X(x) = P(X = x)$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r.s discrètes telle que pour tout $n \geq 1$

$$X_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$$

et f.m.p.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } x = -1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2n} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chaque cas, utiliser la définition.

- 1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers 0.
- 2) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
- 3) Montrer que, pour tout $r > 1$, $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne d'ordre r vers 0.

Exercice 4. (*xx points*)

D'un jeu de 32 cartes, on tire une carte, on note le résultat puis on la remet dans le paquet, on mélange le tout et on recommence cette opération n fois. On note S_n le nombre de rois obtenus parmi ces n cartes et $M_n = S_n/n$.

- 1) Quelle est la loi de la v.a.r. S_n ?
- 2) En utilisant l'inégalité de MARKOV, majorer $P\left(M_n > \frac{1}{4}\right)$.
- 3) En utilisant l'inégalité de TCHEBYCHEV, donner une minoration de $P\left(M_n \in \left[\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right]\right)$ en fonction de n . Comment choisir n pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?
- 4) Reprendre la question précédente en utilisant le Central Limit Theorem (CLT).

Annexe. On donne : $P(|Z| \leq 1.64) = 0.9$ si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Exercice 5. (*xx points*)

Soit X une v.a.r.a.c., uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.a.c.s, uniformément distribuées sur $[0, 1 + 1/n]$.

Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Fonction de répartition de $Z \sim N(0, 1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.10	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.20	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.30	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.40	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.50	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.60	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.70	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.80	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.90	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.00	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.10	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.20	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.30	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.40	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.50	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.60	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.70	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.80	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.90	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.00	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.10	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.20	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.30	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.40	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.50	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.60	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.70	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.80	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.90	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.00	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.10	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.20	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.30	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.40	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.50	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.60	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.70	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.80	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.90	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.00	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

Quantile z_α défini par $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ avec $Z \sim N(0, 1)$

α	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
z_α	0.674490	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348	2.575829	3.090232	3.290527
$z_{\alpha/2}$	1.150349	1.644854	1.959964	2.241403	2.575829	2.807034	3.290527	3.480756