# Corrigé exam Proba-Simu 19-20

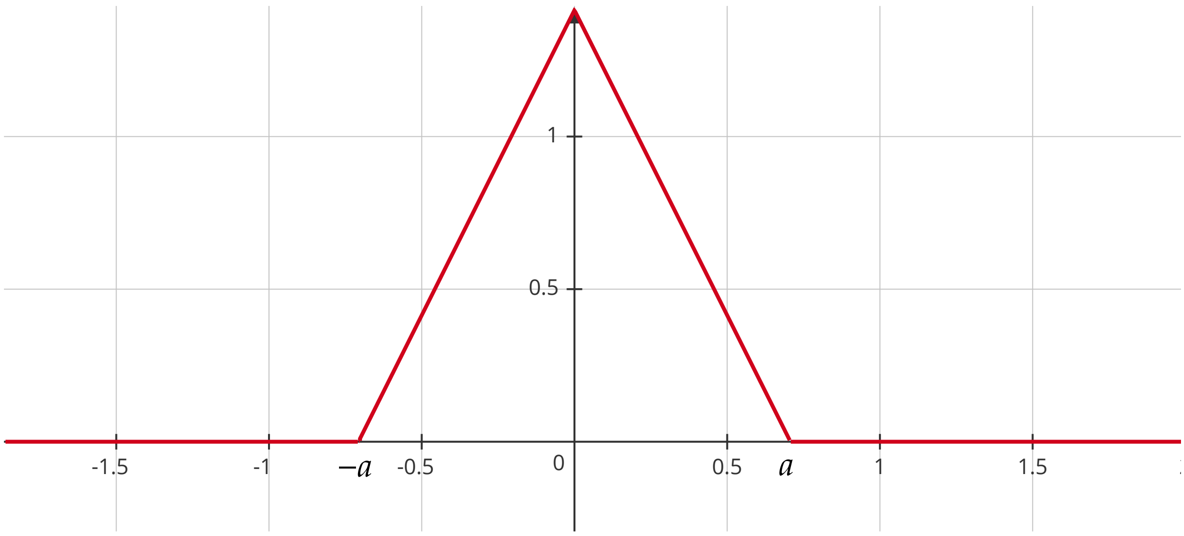
## 1. Exercice 1 :

$$X \sim \mathcal{T}(a) \quad \Longleftrightarrow \quad a>0 \text{ et } f_X(x)=\frac{1}{a^2}(a-|x|)\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$$

**1.** $f_X$ est positive continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left(a^2-\frac{a^2}{2}\right) = 1.$$

Donc $f_X$ est bien une densité de probabilité.




**2.** $\mathbb{E}(X)=0$ puisque la densité est paire ($x\mapsto xf_X(x)$ impaire $\Longrightarrow \int_{-a}^{a} xf_X(x)\,dx = 0$).

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-a}^{a} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2(a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^2}{6}.$$

Donc $Var(X)=\dfrac{a^2}{6}$.

**3.** $P(2|X|\geqslant a) = P\left(|X|\geqslant \frac{a}{2}\right) = P\left(X\leqslant \frac{-a}{2}\right) + P\left(X\geqslant \frac{a}{2}\right) = 2\,P\left(X\geqslant \frac{a}{2}\right) = 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} f_X(x)\,dx$

$$P(2|X|\geqslant a) = \frac{2}{a^2}\int_{\frac{a}{2}}^{a}(a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left(a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{8}\right) = \frac{1}{4}.$$

**4.** $a=1$ et $Y=\sqrt{|X|}$. La densité devient : $f_X(x)=(1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

**(a)** $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(\sqrt{|X|} \leqslant x\right)$

- Si $x < 0$, alors : $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(\sqrt{|X|} \leqslant x\right) = 0$
- Si $x^2 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x \leqslant 1$, alors :

$$F_Y(x) = P\left(|X| \leqslant x^2\right) = P\left(-x^2 \leqslant X \leqslant x^2\right) = 2\int_0^{x^2} f_X(t)\,dt$$

$$F_Y(x) = 2\int_0^{x^2}(1-t)\,dt = 2\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) = 2x^2 - x^4$$

- Si $x > 1$, alors : $F_Y(x) = 1$.

Finalement : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 - x^4 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**(b)** $f_Y(x) = F_Y{}'(x) = 4x\left(1 - x^2\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

## 2. Exercice 2 :

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \text{avec} \quad \mu = 2 \text{ et } \sigma = 2.$$

$$\text{Notons : } \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

**1.** $P(X \geqslant 4.5) = P\left(\frac{X-2}{2} \geqslant \frac{4.5-2}{2}\right) = P(Z \geqslant 1.25) = 1 - F_Z(1.25)$.

La table de la fonction de répartition de la loi normale donne :

$$P(X \geqslant 4.5) = 1 - 0.89435 = 0.10565$$

**2.** $P(1 \leqslant X \leqslant 4.5) = P(-0.5 \leqslant Z \leqslant 1.25) = F_Z(1.25) - F_Z(-0.5)$

$$P(1 \leqslant X \leqslant 4.5) = F_Z(1.25) + F_Z(0.5) - 1 = 0.89435 + 0.69146 - 1$$

$$P(1 \leqslant X \leqslant 4.5) = 0.58581$$

**3.** $P(X \geqslant t) = 0.33 \iff 0.33 = P\left(Z \geqslant \frac{t-2}{2}\right) = 1 - F_Z\left(\frac{t-2}{2}\right)$.

Autrement dit : $F_Z\left(\frac{t-2}{2}\right) = 0.67$.

La table des fractiles de $\mathcal{N}(0,1)$ donne :

$$\frac{t-2}{2} = 0.4399 \implies t = 2 + 2 \times 0.4399$$

$$t = 2.8798$$

## 3. Exercice 3 :

$c > 0$ et $(X, Y)$ couple de v.a. de densité :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{c}{\sqrt{xy}} \mathbb{1}_{]0,1]\times]0,1]}(x,y)$$

**1.** $f_{(X,Y)}$ est bien positive, continue sauf sur les droites $x = 0$ et $y = 0$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = c \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}}\, dx\, dy = c\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy\right)$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = c\left(\left[2\sqrt{x}\right]_0^1\right)\left(\left[2\sqrt{y}\right]_0^1\right) = 4c.$$

Il faut donc prendre $c = \frac{1}{4}$.

**2.** Calculons les densités marginales :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy.$$

- Si $x \notin [0,1]$, $f_{(X,Y)}(x,y) = 0 \implies f_X(x) = 0$
- Si $x \in [0,1]$, $f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{xy}}\ dy = \frac{1}{4\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\ dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

  De la même manière on obtiendra :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{]0,1]}(y)$$

**3.** $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = \mathbb{E}(y)$

**4.** $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

$$\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{4\sqrt{xy}}\, dx\, dy = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\, dx\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\, dy\right)$$

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{9} = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \implies Cov(X,Y) = 0.$$

**5.** $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y) \implies X$ et $Y$ sont indépendantes.

Cette indépendance peut être établie dès le calcul des densités marginales, ce qui permet de faciliter la rédaction des questions 3-4-5.

Par conséquent :

$$f_{X|\{Y=y\}} = f_X$$

En effet :

$$f_{X|\{Y=y\}}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{4\sqrt{xy}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f_X(x).$$

## 4. Exercice 4 :

$$X \text{ v.a. discrète avec } \begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P(X=0) = \dfrac{2}{3} = 1 - P(X=1) \end{cases}$$

Montrons que la suite $(X_n)_n$ de v.a définie par : $X_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) X$ converge en probabilité vers $X$.

Soit $\epsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| < \epsilon) = P\left(|\frac{1}{n}X| < \epsilon\right) = P(|X| < n\epsilon)$$

Soit $N$ un entier tel que : $N > \dfrac{1}{\epsilon} \implies N\epsilon > 1$. On a alors :

$$\forall n \geqslant N, \ \ P(|X_n - X| < \epsilon) = P\left(|\frac{1}{n}X| < \epsilon\right) = P(|X| < n\epsilon) = 1 = cste$$

Donc la suite $P(|X_n - X| < \epsilon)$ converge bien vers 1, et $X_n$ converge en probabilité vers $X$.

## 5. Exercice 5 :

$$X_n \sim \mathcal{U}\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right)$$

Densité : $f_{X_n}(x) = \dfrac{n}{2} \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(x).$

Fonction de répartition : $F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\dfrac{1}{n} \\ \dfrac{nx+1}{2} & \text{si } -\dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$

Montrons que $F_n(x)$ converge vers $F_0(x) =$ fonction de répartition de la v.a. certaine $X = 0$, donnée par : $F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ partout où celle-ci est continue, c à d sur $\mathbb{R}^*$.

- Si $x < 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \ \ x < -\frac{1}{N_1}$. On a alors :
  $\forall n \geqslant N_1, \ F_{X_n}(x) = 0 \ = cste \implies \lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = 0 = F_0(x).$
- Si $x > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \ \ x > \frac{1}{N_2}$. On a alors :

$$\forall n \geqslant N_2,\ F_{X_n}(x) = 1 = cste \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = 1 = F_0(x).$$

On a donc bien : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

## 6. Exercice 6 :

Les $X_i$ indépendants et $X_i = 1$ si test positif et $0$ si négatif. $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, avec $p = 0.04$.

$$X = \sum_{i=1}^{600} X_i.$$

**1.** $X =$ somme de v.a. de Bernouilli indépendantes $\Longrightarrow$ $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ loi binômiale avec

$$n = 600,\ p = \frac{1}{25} = 0.04$$

**2.** $E(X) = np = 24$ et écart-type $= \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{23.04} = 4.8$

**3.** On considère que $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \implies Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

**(a)** On a évidemment : $\mu = E(X) = 24$ et $\sigma^2 = Var(X) = 23.04$

**(b)** $P(24.5 < X < 25.5) = P\left(\dfrac{24.5-24}{4.8} < \dfrac{X-24}{4.8} < \dfrac{25.5-24}{4.8}\right)$

$$= P(0.104 < Z < 0.3125) = F_Z(0.3125) - F_Z(0.104) = 0.999 - 0.851$$

$$P(24.5 < X < 25.5) = 0.148$$