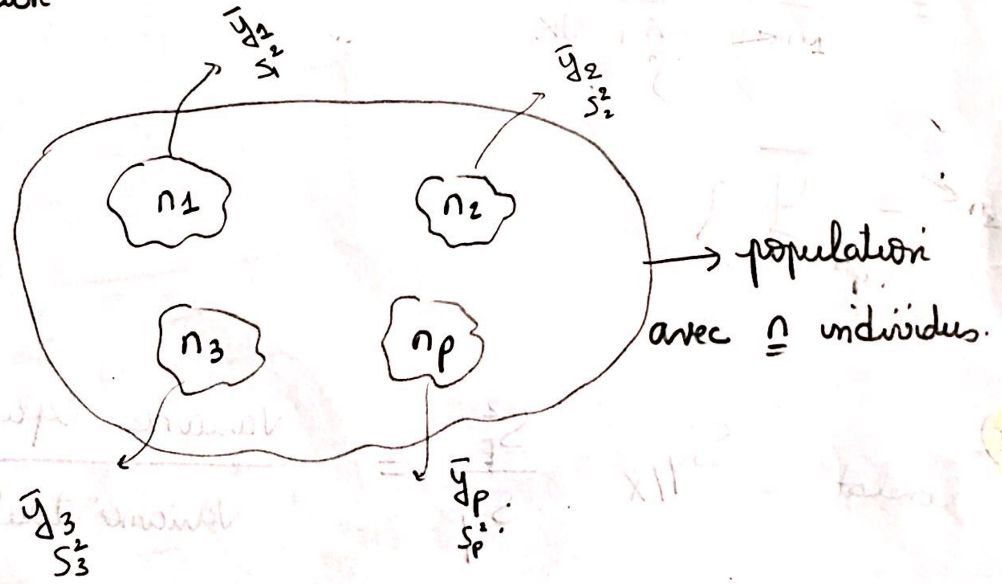
Analyse Bivariée : quanti × quali

Exercice 1 :

- On a une population de taille « n ».

$$\begin{cases} X : \text{qualitative avec } \underline{p} \text{ modalités } 1, \dots, p \ (X_1, X_2, \dots, X_p) \\ Y : \text{quantitative continue de moyenne } \bar{Y} \text{ et variance } S_Y^2 \end{cases}$$

- La population est divisé en $\underline{p}$ groupes, car on a $\underline{p}$ modalités.



1°- Montrez que :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i . \bar{Y}_i \quad ??$$

On sait que : $\bar{Y}_1$ = Moyenne groupe 1 qui contient n_1 observations

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{K=1}^{n_1} y_{K,1}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} y_{k,2}$$ (les n_2 observations qui ont la modalité 2)

$\vdots$

$$\bar{y}_p = \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} y_{k,p}$$ (les n_p observations qui ont la modalité p).

en générale ; $\forall i = 1, \dots, p$

$$\boxed{\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} y_{k,i}}$$

on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i . \bar{y}_i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \cancel{n_i} \left(\frac{1}{\cancel{n_i}} \sum_{k=1}^{n_i} y_{k,i} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} y_{k,i} = \bar{y}$$

→ c'est La somme de toute les observations.

donc $$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i . \bar{y}_i}$$

2°) Corrélat° $= S_{Y/X} = \dfrac{S_E^2}{S_Y^2} = \dfrac{\text{Variance expliquée}}{\text{Variance totale}} = \dfrac{\text{Variat inter}}{\text{Var totale}}$

3°) Encadrement ??

On sait que : $S_Y^2 = S_E^2 + S_R^2$

alors sûrement : $S_E^2 \leq S_Y^2$ et de plus ils sont posi

alors : $0 \leq S_E^2 \leq S_Y^2$

$$\div S_Y^2 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{\frac{S_E^2}{S_Y^2}}_{S_{Y/X}} \leq \underbrace{\frac{S_Y^2}{S_Y^2}}_{1} \Rightarrow \boxed{0 \leq S_{Y/X} \leq 1}$$

Scanned with CamScanner

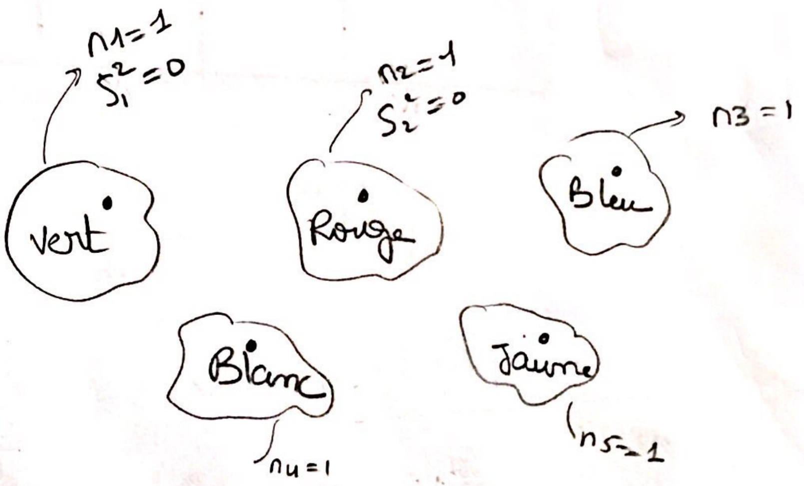
la corrélation $S_{Y/X}=0$, alors : il n'y a aucun lien entre X et Y.

Si : $S_{Y/X}=1$, donc Y est entièrement expliqué par X.

5) 4) Si $n=p$

c-à-d on a : n individus et la variable qualitative a p modalités.

Exp : $\begin{cases} n=5 \\ p=5 \end{cases}$



on a 1 seul individu dans chaque groupe.

alors : La variance de chaque groupe égale à 0 :

car on sait que : $S_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}(x_i-\bar{x}_1)^2$, donc si on a seule observation x_i donc La moyenne $\bar{x}=x_i$

ce qui donne que $\boxed{S_1^2=0}$; pareil pour les autres.

alors : $S_R^2 =$ Var intra $\left(= \frac{1}{n}\sum n_i S_i^2\right)$ $=$ Moyenne des variances $=0$

et : $S_Y^2 = \cancel{S_R^2} + S_E^2 = S_E^2$, donc $S_{Y/X} = \frac{S_E^2}{S_Y^2} = \frac{S_E^2}{S_E^2} = 1$.