
PROBABILITÉS & SIMULATION

Rattrapage - février 2024

◁ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- ▶ Autorisé : Trois feuilles A4 recto-verso manuscrites. Calculatrices.
- ▶ Non autorisé : Tout autre document et tous les supports électroniques (smart-phone, tablette, ordinateur,...).

- L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants.
- La table de la loi normale standard y est jointe.

Important

- ▶ Veuillez écrire lisiblement votre NOM et votre PRÉNOM et en lettres majuscules.
- ▶ Veuillez également noter le NOM de votre groupe sur votre copie, i.e. : GMA, GIA1 ou GIA2.

Tout manquement à ces consignes entraînera des sanctions.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

▶ On notera :

- v.a.r. pour variable aléatoire réelle.
- v.a.r.d. pour variable aléatoire réelle discrète.
- v.a.r.a.c. pour variable aléatoire réelle absolument continue.
- f.m.p. pour fonction de masse de probabilité.
- f.d.p. pour fonction de densité de probabilité.

Exercice 1. (*xx pts*)

La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T , mesuré en minutes, qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dans un certain aéroport, on estime que T est une v.a.r.a.c. dont la f.d.p. est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & \text{si } 0 < t \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que la fonction f est bien une f.d.p..
- 2) Calculer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$, de T .
- 3) Déterminer F , la fonction de répartition de T .
- 4) Quelle est la probabilité que

- a) T dépasse 2 minutes.
 - b) T soit compris entre 45 secondes et 3 minutes.
 - c) T soit inférieur à 4 minutes sachant qu'il dépasse 2 minutes.
- 5) On pose $X = T + 1$ et on admet que X est une v.a.r..
- a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$, de X .
 - b) Déterminer F_X , la fonction de répartition de X .
 - c) Montrer alors que X est une v.a.r.a.c. et déterminer une fonction de densité de probabilité f_X de X .

Exercice 2. (*xx points*)

Soit X une v.a.r.a.c. de f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Si $E[X] = \frac{3}{5}$, calculer a et b .

Exercice 3. (*xx points*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r.a.c. de fonctions de densité de probabilité définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad f_{X_n}(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1 + e^{-nx})^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- 1) Convergence de suites de fonctions.
 - a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_{X_n})_{n \geq 1}$.
 - b) Déterminer F_{X_n} , la fonction de répartition de X_n pour tout $n \geq 1$.
 - c) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(F_{X_n})_{n \geq 1}$.
- 2) Convergence de suites de v.a.r.s.
 - a) En utilisant la définition, montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $X = 0$.
 - b) En utilisant la définition, montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $X = 0$.

Exercice 4. (*xx points*)

Un jeu consiste à tirer (au hasard), indépendamment et avec remise, des tickets d'une boîte. Il y a en tout 4 tickets, numérotés respectivement -2, -1, 0, 3. Votre "gain" X lors d'une partie correspond à la somme indiquée sur le ticket. Par exemple, si vous tirez le ticket numéroté -2, alors X prend la valeur -2 et vous devez donner 2 euros, tandis que si vous tirez le ticket 3, alors X prend la valeur 3 et vous gagnez 3 euros.

- 1) Donner la f.m.p de X dans un tableau. Calculer son espérance et sa variance.
- 2) Vous jouez 100 fois de suite à ce jeu et on note S votre gain après 100 parties. En notant X_1 le gain à la première partie, X_2 le gain à la deuxième partie, ..., X_{100} le gain à la centième partie, exprimer S en fonction des X_i .
- 3) En déduire l'espérance de S et sa variance.
- 4) Par quelle loi normale peut-on approcher S ? En déduire la probabilité que votre gain sur 100 parties dépasse 25 euros.

Fonction de répartition de $Z \sim N(0, 1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.10	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.20	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.30	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.40	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.50	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.60	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.70	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.80	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.90	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.00	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.10	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.20	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.30	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.40	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.50	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.60	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.70	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.80	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.90	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.00	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.10	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.20	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.30	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.40	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.50	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.60	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.70	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.80	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.90	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.00	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.10	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.20	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.30	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.40	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.50	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.60	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.70	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.80	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.90	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.00	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

Quantile z_α défini par $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ avec $Z \sim N(0, 1)$

α	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
z_α	0.674490	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348	2.575829	3.090232	3.290527
$z_{\alpha/2}$	1.150349	1.644854	1.959964	2.241403	2.575829	2.807034	3.290527	3.480756