TD05 – Théorie des Langages

Exercice 1.

Question 1. Est-ce que cette grammaire est algébrique ? rationnelle ?

Solution. Cette grammaire est algébrique car le membre gauche de chacune de ses règles de production est formé d'un unique symbole non terminal. En revanche elle n'est pas rationnelle à cause (entre autre) de la règle $A \to bAA$.

Question 2. Mettre cette grammaire sous forme normalisée de Chomsky.

Solution. Etape 1

Pour chaque terminal, on crée une règle avec un nouveau terminal comme membre gauche et le terminal comme membre droit. On substitue ces nouveaux symboles à la place des symboles terminaux à droite des règles de production.

$$P = \begin{cases} C \to a \\ D \to b \\ S \to DA \\ S \to CB \\ A \to C \\ A \to CS \\ A \to DAA \\ B \to D \\ B \to DS \\ B \to CBB \end{cases}$$

Etape 2

Pour chaque règle comportant plus de deux membres à droite, on scinde la partie droite en créant de nouveaux non terminaux et de nouvelles règles.

$$P = \begin{cases} C \to a \\ D \to b \\ S \to DA \\ S \to CB \\ A \to C \\ A \to CS \\ A \to DV \\ V \to AA \\ B \to D \\ B \to DS \\ B \to CW \\ W \to BB \end{cases}$$

Etape 3

On substitue les règles dont le membre droit et formé d'un unique symbole et on obtient la grammaire sous forme normalisée de Chomsky suivante :

$$P = \begin{cases} C \to a \\ D \to b \\ S \to DA \\ S \to CB \\ A \to a \\ A \to CS \\ A \to DV \\ V \to AA \\ B \to b \\ B \to DS \\ B \to CW \\ W \to BB \end{cases}$$

Question 3. En utilisant l'algorithme CKY, montrer que le mot *aabbab* appartient au langage engendré par la grammaire.

Solution. On construit la matrice de l'algorithme CKY :

6	S					
5	A	B				
4	S	S	W			
3	A	B	B	B		
2	V	S	W	S	S	
1	C, A	C, A	D, B	D, B	C, A	D, B
input	a	a	b	b	a	b

Nous constatons que $S \in M[1, 6]$, donc le mot *aabbab* est un élément du langage.

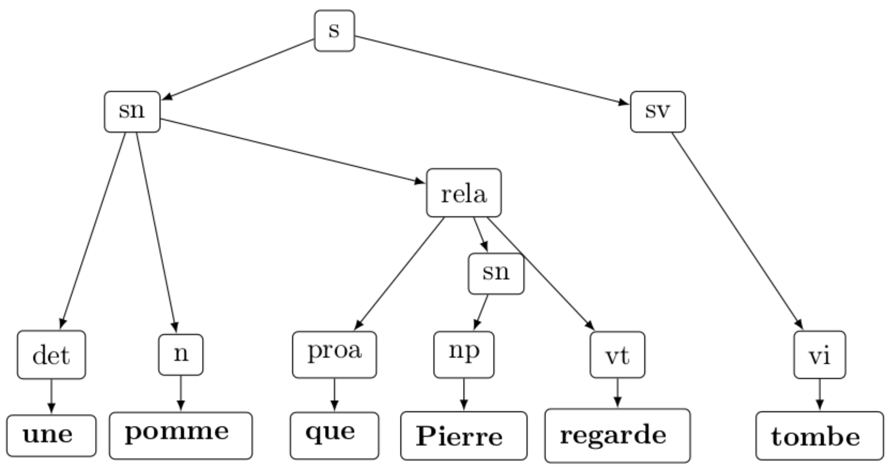
Exercice 2.

Question 1. Est-ce que cette grammaire est algébrique ? rationnelle ?

Solution. Cette grammaire est algébrique car le membre gauche de chacune de ses règles de production est formé d'un unique symbole non terminal. En revanche elle n'est pas rationnelle à cause (entre autres) de la règle "s $\rightarrow$ sn sv" dont le membre droit contient deux symboles non terminaux.

Question 2. Vérifier l'appartenance de la phrase **une pomme que Pierre regarde tombe** au langage reconnu par la grammaire en utilisant un arbre syntaxique.

Solution. On construit l'arbre suivant :



Question 3. Appliquer l'algorithme CKY pour vérifier :

- l'appartenance de la phrase **une pomme que Pierre regarde tombe** au langage engendré par la grammaire
- le rejet de la phrase **une pomme qui Pierre regarde tombe** du langage engendré par la grammaire

Solution. Pour pouvoir appliquer l'algorithme CKY, il nous faut tout d'abord normaliser la grammaire. Les règles de production ne respectant pas la FNC sont les suivantes :

$$
\begin{cases}
\text{rela} \rightarrow \text{proa sn vt} \\
\text{sn} \rightarrow \text{det n reln} \\
\text{sn} \rightarrow \text{det n rela} \\
\text{sn} \rightarrow \text{np} \\
\text{sv} \rightarrow \text{vi}
\end{cases}
$$

On commence par séparer la partie droite des règles contenant plus de 3 non terminaux.

$$
\begin{cases}
\text{rela} \rightarrow \text{proa SNV} \\
\text{SNV} \rightarrow \text{sn vt} \\
\text{sn} \rightarrow \text{DN reln} \\
\text{sn} \rightarrow \text{DN rela} \\
\text{DN} \rightarrow \text{det n}
\end{cases}
$$

Les deux dernières règles contiennent un unique non terminal en partie droite de leur règle, on le remplace par toutes ses décompositions.

$$
\begin{cases}
\text{sn} \rightarrow \textbf{Pierre} \mid \textbf{Marie} \\
\text{sv} \rightarrow \textbf{dort} \mid \textbf{dorment} \mid \textbf{tombe} \mid \textbf{tombent}
\end{cases}
$$

On remarque que les symboles non terminaux "vi" et "np" ne sont plus utilisés (ne sont dans les membres gauche d'aucune règle). On peut donc les supprimer (ainsi que les règle de production associées).

On obtient la grammaire $G =< T, N, S, P >$ suivante :

$$
\begin{aligned}
T = \{&\textbf{que}, \textbf{qui}, \textbf{regarde}, \textbf{regardent}, \textbf{mange}, \textbf{mangent}, \textbf{dort}, \textbf{dorment}, \textbf{tombe}, \textbf{tombent}, \\
&\textbf{une}, \textbf{un}, \textbf{la}, \textbf{le}, \textbf{des}, \textbf{les}, \textbf{pommes}, \textbf{pomme}, \textbf{femme}, \textbf{femmes}, \textbf{Pierre}, \textbf{Marie}\} \\
N = \{&\text{s}, \text{sn}, \text{reln}, \text{rela}, \text{sv}, \text{proa}, \text{pron}, \text{vt}, \text{det}, \text{n}, \text{DN}, \text{SNV}\} \\
S = {} & \text{s}
\end{aligned}
$$

$$
P = \left\{
\begin{array}{rl}
\text{s} & \rightarrow \text{sn sv} \\
\text{sn} & \rightarrow \text{DN reln} \mid \text{DN rela} \mid \text{np reln} \mid \text{np rela} \mid \text{det n} \mid \textbf{Pierre} \mid \textbf{Marie} \\
\text{DN} & \rightarrow \text{det n} \\
\text{reln} & \rightarrow \text{pron sv} \\
\text{rela} & \rightarrow \text{proa SNV} \\
\text{SNV} & \rightarrow \text{sn vt} \\
\text{sv} & \rightarrow \text{vt sn} \mid \textbf{dort} \mid \textbf{dorment} \mid \textbf{tombe} \mid \textbf{tombent} \\
\text{proa} & \rightarrow \textbf{que} \\
\text{pron} & \rightarrow \textbf{qui} \\
\text{vt} & \rightarrow \textbf{regarde} \mid \textbf{regardent} \mid \textbf{mange} \mid \textbf{mangent} \\
\text{det} & \rightarrow \textbf{une} \mid \textbf{un} \mid \textbf{la} \mid \textbf{le} \mid \textbf{des} \mid \textbf{les} \\
\text{n} & \rightarrow \textbf{pommes} \mid \textbf{pomme} \mid \textbf{femme} \mid \textbf{femmes}
\end{array}
\right\}
$$

On a maintenant la grammaire sous forme normale de Chomsky, on peut appliquer CKY à nos 2 phrases.

Le tableau V avec le mot **une pomme que Pierre regarde tombe** est le suivant :

6	s					
5	sn	$\emptyset$				
4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
3	$\emptyset$	$\emptyset$	rela	$\emptyset$		
2	DN, sn	$\emptyset$	$\emptyset$	SNV	$\emptyset$	
1	det	n	proa	sn	vt	sv
input	**une**	**pomme**	**que**	**Pierre**	**regarde**	**tombe**

Nous constatons que s $\in V[1,6]$, donc une **pomme que Pierre regarde tombe** est un élément du langage.

Le tableau V avec le mot **une pomme qui Pierre regarde tombe** est le suivant :

6	$\emptyset$					
5	$\emptyset$	$\emptyset$				
4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
2	DN, sn	$\emptyset$	$\emptyset$	SNV	$\emptyset$	
1	det	n	pron	sn	vt	sv
input	**une**	**pomme**	**qui**	**Pierre**	**regarde**	**tombe**

Nous constatons que s $\notin V[1,6]$, donc une **pomme qui Pierre regarde tombe** n'est pas un élément du langage.