

## Corrige Exam Optim Lin GI mai 2022

**Exercice 1.** On considère le problème d'optimisation linéaire  $(P_1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 4x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- a. Résoudre  $(P_1)$  par la méthode des tableaux.
- b. Résoudre le problème dual  $(D_1)$  de  $(P_1)$  de deux manières différentes.
  - (i) Tracer le domaine des contraintes de  $(P_1)$ . Que constatez-vous?
  - (ii) Expliquer alors les composantes nulles de l'optimum de  $(D_1)$ .

**(a)**

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	S.M
$f$	1	2	0	0	0	0	0
$y_1$	2	1	1	0	0	0	4
$y_2$	2	3	0	1	0	0	3
$y_3$	4	1	0	0	1	0	5
$y_4$	1	-5	0	0	0	1	1

Var. entrante =  $x_2$ , Var. sortante =  $y_2$

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	S.M
$f$	-1/3	0	0	-2/3	0	0	-2
$y_1$	4/3	0	1	-1/3	0	0	3
$y_2$	2/3	1	0	1/3	0	0	1
$y_3$	14/3	0	0	1/3	1	0	6
$y_4$	13/3	0	0	5/3	0	1	6

Solution finale :  $\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$  et  $f^* = 2$

(b) Le dual de  $(P_1)$  est donné par :

$$(D_1) \begin{cases} \min(4u_1 + 3u_2 + 5u_3 + u_4) \\ 2u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_4 \geq 1 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 - 5u_4 \geq 2 \\ u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{cases}$$

- La lecture du dernier tableau du simplexe pour  $(P_1)$  nous donne la solution de  $(D_1)$

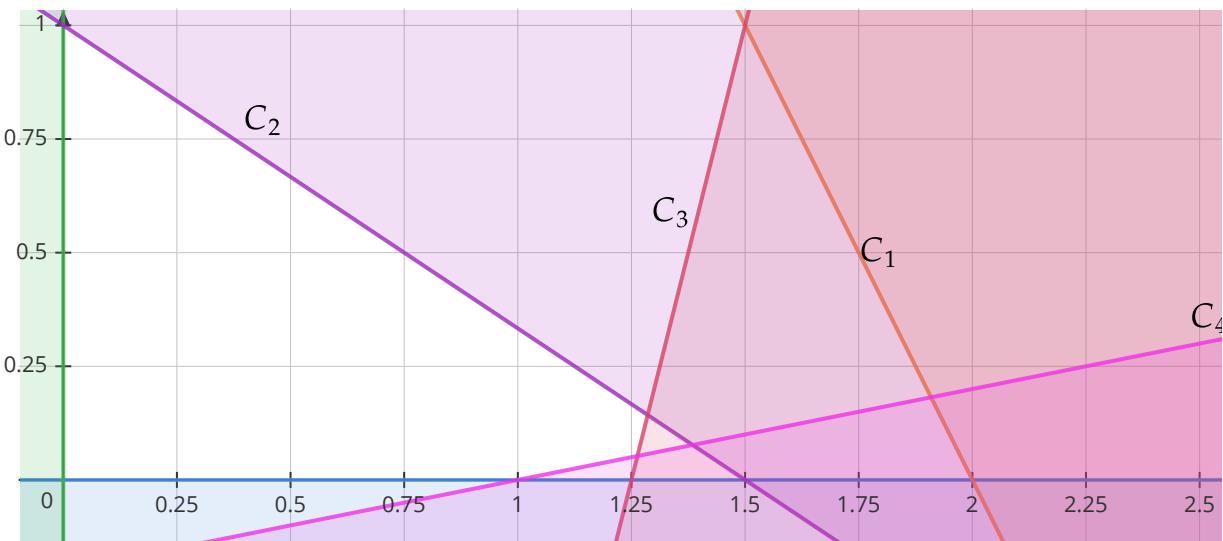
qui est donnée par : 
$$\begin{cases} u_1^* = 0 \\ u_2^* = 2/3 \\ u_3^* = 0 \\ u_4^* = 0 \end{cases}$$

- Le théorème de complémentarité permet de dire :

$$\begin{aligned} x_2^* = 1 \neq 0 &\implies u_1^* + 3u_2^* - u_3^* - 5u_4^* = 2 \\ 2x_1^* + x_2^* - 4 &= -3 \neq 0 \implies u_1^* = 0 \\ 4x_1^* - x_2^* - 5 &= -6 \neq 0 \implies u_3^* = 0 \\ x_1^* - 5x_2^* - 1 &= -6 \neq 0 \implies u_4^* = 0 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la même solution : 
$$\begin{cases} u_1^* = 0 \\ u_2^* = 2/3 \\ u_3^* = 0 \\ u_4^* = 0 \end{cases}$$

- (i) Représentation graphique du domaine des contraintes de  $(P_1)$

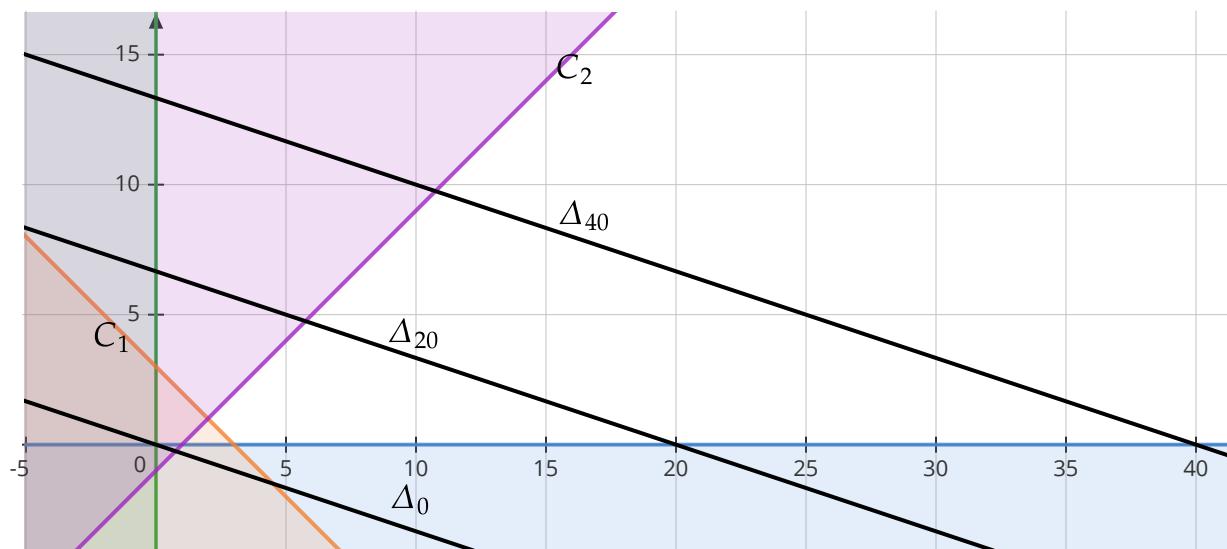


- (ii) On voit sur le graphique que le sommet optimal  $(0, 1)$  se trouve en dehors des contraintes 1, 3 et 4. Ces 3 contraintes étant non saturées, les composantes correspondantes dans le dual sont nulles.

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq -3 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Exercice 2.** On considère le problème d'optimisation linéaire  $(P_2)$
- Résoudre  $(P_2)$  par méthode géométrique.
  - Résoudre  $(P_2)$  en utilisant la méthode des tableaux et la méthode des deux phases si nécessaire.

**(a) Résolution graphique de  $(P_2)$  :**



La représentation des lignes de niveau 0, 20 et 40 montre que le problème est non borné.

$$\max = +\infty.$$

**b) Résolution de  $(P_2)$  par la méthode des 2 phases :**

### Phase 1 :

Problème auxiliaire :

$$(P_2^a) \begin{cases} \max(-\delta) \\ -x_1 - x_2 - \delta \leq -3 \\ -x_1 + x_2 - \delta \leq -1 \\ x_1, x_2, \delta \geq 0 \end{cases}$$

	$x_1$	$x_2$	$\delta$	$y_1$	$y_2$	S.M
$f$	0	0	-1	0	0	0
$y_1$	-1	-1	-1	1	0	-3
$y_2$	-1	1	-1	0	1	-1

On force l'entrée de  $\delta$  et la sortie de  $y_1$  (le plus petit second membre).

	$x_1$	$x_2$	$\delta$	$y_1$	$y_2$	S.M
$f$	1	1	0	-1	0	3
$\delta$	1	1	1	-1	0	3
$y_2$	0	2	0	-1	1	2

Var. entrante =  $x_1$ , Var. sortante =  $\delta$

	$x_1$	$x_2$	$\delta$	$y_1$	$y_2$	S.M
$f$	0	0	-1	0	0	0
$x_1$	1	1	1	-1	0	3
$y_2$	0	2	0	-1	1	2

Optimum atteint pour la phase 1 avec  $\delta^* = 0$ . On peut donc passer à la phase 2.

### Phase 2 :

On reprend le dernier tableau sans la colonne  $\delta$ .

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	S.M
$f$	?	?	?	?	?
$x_1$	1	1	-1	0	3
$y_2$	0	2	-1	1	2

La fonction objectif doit être exprimé en fonction de vars hors base :

$$x_1 + 3x_2 = (3 - x_2 + y_1) + 3x_2 = 3 + 2x_2 + y_1$$

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	S.M
$f$	0	2	1	0	-3
$x_1$	1	1	-1	0	3
$y_2$	0	2	-1	1	2

Var. entrante =  $x_2$ .

$$\text{Var sortante : } \min\left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1 \implies y_2$$

Après pivotage, on obtient :

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	S.M
$f$	0	0	2	-1	-5
$x_1$	1	0	-1/2	-1/2	2
$x_2$	0	1	-1/2	1/2	1

Var. entrante =  $y_1$ .

Pas de var. sortante !!!

On retrouve bien le fait que le problème est donc non borné :  $\max = +\infty$ .

**Exercice 3.** On considère le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers suivant :

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{l} \max 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

- Résoudre le problème relaxé ( $\bar{P}_3$ ) de  $(P_3)$ .
- (i) Appliquer la méthode des coupes pour résoudre  $(P_3)$ .  
(ii) Appliquer la méthode de séparation-évaluation pour résoudre  $(P_3)$ .

**a. Résolution du pb. relaxé :**

$$\left( \overline{P_3} \right) \begin{cases} \max(4x_1 + 5x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	SM
$f$	4	5	0	0	0
$y_1$	1	1	1	0	4
$y_2$	3	5	0	1	15

Var. IN =  $x_2$ , Var. OUT =  $y_2$

Pivotage :

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	SM
$f$	1	0	0	-1	-15
$y_1$	2/5	0	1	-1/5	1
$x_2$	3/5	1	0	1/5	3

Var. IN =  $x_1$ , Var. OUT =  $y_1$

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	SM
$f$	0	0	-5/2	-1/2	-35/2
$x_1$	1	0	5/2	-1/2	5/2
$x_2$	0	1	-3/2	1/2	3/2

La solution du pb. relaxé est donc :  $\begin{cases} x_1^* = 5/2 \\ x_2^* = 3/2 \end{cases}$  et  $f^* = 35/2$

**b.** Cette solution n'étant pas entière, nous allons appliquer dans un 1er temps la méthode des coupes :

**(i)** On va rajouter une nouvelle contrainte (coupe) construite à partir de la composante non entière qui a la plus grande partie fractionnaire. Ici les 2 ont la même partie fractionnaire 1/2.

On va donc choisir la 1ère  $x_1$ . On part de la contrainte liée à  $x_1$  :

$$x_1 + \frac{5}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 = \frac{5}{2}$$

qui nous donne la nouvelle contrainte (1ère coupe) :

$$-\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \leq -\frac{1}{2}$$

On va lui adjoindre une var. d'écart avant de l'intégrer dans le dernier tableau du pb. relaxé.

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	SM
$f$	0	0	-5/2	-1/2	0	-35/2
$x_1$	1	0	5/2	-1/2	0	5/2
$x_2$	0	1	-3/2	1/2	0	3/2
$y_3$	0	0	-1/2	-1/2	1	-1/2

On applique maintenant la méthode primale-duale.

La 1ère étape consiste à sortir  $y_3$ , et à faire entrer la var. qui réalise le min. de

$$\min\left(\frac{-5/2}{-1/2}, \frac{-1/2}{-1/2}\right) = \frac{-1/2}{-1/2} = 1 \implies y_2 \text{ sera la var. entrante.}$$

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	SM
$f$	0	0	-2	0	-1	-17
$x_1$	1	0	3	0	-1	3
$x_2$	0	1	-2	0	1	1
$y_3$	0	0	1	1	-2	1

Nous avons obtenu une solution entière et donc résolu le problème en nbres entiers ( $P_3$ ).

Cette solution est :

$$\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases} \text{ et } f^* = 17$$

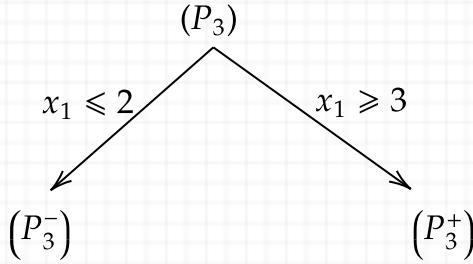
**(ii) Dans un 2ème temps, on va appliquer la méthode séparation évaluation.**

A partir de la solution non entière du pb. relaxé  $\begin{cases} x_1^* = 5/2 \\ x_2^* = 3/2 \end{cases}$  et  $f^* = 35/2$ , on va choisir

une variable pour rajouter 2 contraintes qui vont définir les 2 branches de l'arbre de séparation.

On choisit la composante non entière qui est la plus éloignée des 2 entiers qui l'encadrent, celle dont la partie fractionnaire est la plus proche de 0.5

Ici, on a le choix et on va donc partir de  $x_1$ .



On va donc devoir résoudre 2 pb.

Commençons par :

$$\left( \overline{P_3^-} \right) \begin{cases} \max(4x_1 + 5x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	SM
$f$	0	0	-5/2	-1/2	-35/2
$x_1$	1	0	5/2	-1/2	5/2
$x_2$	0	1	-3/2	1/2	3/2

On va évidemment appliquer la méthode primale-duale, mais on doit au préalable réécrire la nouvelle contrainte en fonction de vars. hors base.

La nouvelle contrainte peut donc s'écrire :

$$x_1 \leq 2 \iff -\frac{5}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2} \leq 2 \iff -\frac{5}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq -\frac{1}{2}$$

C'est cette forme-ci qui va être intégrée dans le tableau :

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	SM
$f$	0	0	-5/2	-1/2	0	-35/2
$x_1$	1	0	5/2	-1/2	0	5/2
$x_2$	0	1	-3/2	1/2	0	3/2
$y_3$	0	0	-5/2	1/2	1	-1/2

La méthode primale-duale commence par décider la sortie de  $y_3$  et l'entrée de la var. qui

réalise le min :  $\min\left(\frac{-5/2}{-5/2}, \frac{-1/2}{1/2}\right)$ . On ne doit pas tenir compte du 2ème rapport car il est négatif.

Par conséquent la var. entrante sera  $y_1$ .

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	SM
$f$	0	0	0	-1	-1	-17
$x_1$	1	0	0	0	1	2
$x_2$	0	1	0	1/5	3/5	9/5
$y_3$	0	0	1	-1/5	-2/5	1/5

La solution de  $\left(\overline{P_3^-}\right)$  est donc :  $\begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 9/5 \end{cases}$  et  $f^* = 17$

On procède de la même manière avec  $\left(\overline{P_3^+}\right)$  et on obtient comme solution :  $\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$

La méthode s'arrête ici, avec comme solution  $\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$  et  $f^* = 17$ .

Il est en effet inutile de faire des séparations à partir de  $\left(\overline{P_3^+}\right)$  car il a donné une solution entière.

Il est aussi inutile de faire des séparations à partir de  $\left(\overline{P_3^-}\right)$  car l'optimum qu'il a donné est égal à 17, soit la même valeur que la solution entière déjà obtenue.

Les séparations éventuelles que l'on rajouteraient donneront des optima inférieurs à 17.