ING1 – Informatique

Optimisation linéaire – Notes de cours

Romain Dujol, Jean-Paul Forest

2022 – 2023

CY TECH sciences et techniques

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

0.1 Définitions

L'optimisation linéaire, comme son nom l'indique, s'attache à résoudre des problèmes d'optimisation dont le critère et les contraintes [1] sont linéaires.

Définition 0.1 (Vecteur positif)**.** Soit n un entier naturel non nul.

Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit **positif** ou **à composantes positives**, ce que l'on note $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, si et seulement si pour tout entier naturel i de $[\![1,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ composante de x est un réel positif.

Définition 0.2 (Problème sous forme canonique)**.** Un problème (P^c) d'optimisation linéaire est sous forme **canonique** si et seulement si il existe deux entiers naturels non nuls n et m, un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$, une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$(P^c)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad (c\,|\,x) \\ \qquad Ax \leq b,\ x \geq 0\end{cases}$$

Définition 0.3 (Contrainte saturée, active en un point)**.**

Une contrainte $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geq \beta$ est dite **saturée** ou **active en $\boldsymbol{x}^*$** si et seulement si

$$\alpha_1 x_1^* + \cdots + \alpha_n x_n^* = \beta$$

IMPORTANT. Tout problème d'optimisation linéaire peut être mis sous forme canonique.

$$\begin{aligned}
\min \quad (c\,|\,x) &\iff -\max \quad (-c\,|\,x) \\
\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geq \beta &\iff -\alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_n x_n \leq -\beta \\
\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta &\iff \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leq \beta \\ -\alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_n x_n \leq -\beta \end{cases} \\
x_i \in \mathbb{R} &\iff \begin{cases} x_i^+ = \max(x_i, 0) \geq 0 \\ x_i^- = -\min(x_i, 0) \geq 0 \end{cases} \text{ et } x_i = x_i^+ - x_i^-
\end{aligned}$$

1. Il s'agit d'un abus de langage : la linéarité s'applique en réalité aux membres de gauche des contraintes.

0.2 Problème exemple (P_1)

Considérons le problème suivant.

Un magasin de kebab propose deux produits :

- *le sandwich qui contient 100g de pain, 70g de viande et 20g de crudités ;*
- *l'assiette qui contient 20g de pain, 120g de viande et 50g de crudités.*

Le bénéfice net est de deux euros sur un sandwich et d'un euro sur une assiette.

Chaque jour, le magasin reçoit une livraison de 5kg de pain, 5kg de viande et 2kg de crudités. En supposant que chaque plat produit est vendu, combien de sandwichs et d'assiettes doivent être produits pour assurer un bénéfice net maximum ?

On note x_1 le nombre de sandwichs produits et x_2 le nombre d'assiettes produits. Le bénéfice net est alors égal à $2x_1 + x_2$, de plus :

- la quantité de pain utilisée en grammes, soit $100x_1 + 20x_2$ ne peut pas dépasser 5kg, soit 5000g : donc $100x_1 + 20x_2 \leq 5000$, c'est-à-dire $5x_1 + x_2 \leq 250$;
- la quantité de viande utilisée en grammes, soit $70x_1 + 120x_2$ ne peut pas dépasser 5kg, soit 5000g : donc $70x_1 + 120x_2 \leq 5000$, c'est-à-dire $7x_1 + 12x_2 \leq 500$;
- la quantité de crudités utilisée en grammes, soit $20x_1 + 50x_2$ ne peut pas dépasser 2kg, soit 2000g : donc $20x_1 + 50x_2 \leq 2000$, c'est-à-dire $2x_1 + 5x_2 \leq 200$.

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation avec contraintes sous forme canonique :

$$\left\{\begin{array}{llll} \max & (2x_1 + & x_2) & \\ & 5x_1 + & x_2 \leq & 250 \\ & 7x_1 + & 12x_2 \leq & 500 \\ & 2x_1 + & 5x_2 \leq & 200 \\ & x_1 \,, & x_2 \geq 0 & \end{array}\right. \tag{P_1}$$

0.3 Méthode géométrique (pour $n = 2$ seulement)

Reprenons le problème (P_1) de la présente page sous sa forme initiale. Le domaine d'optimisation est représenté en figure 1

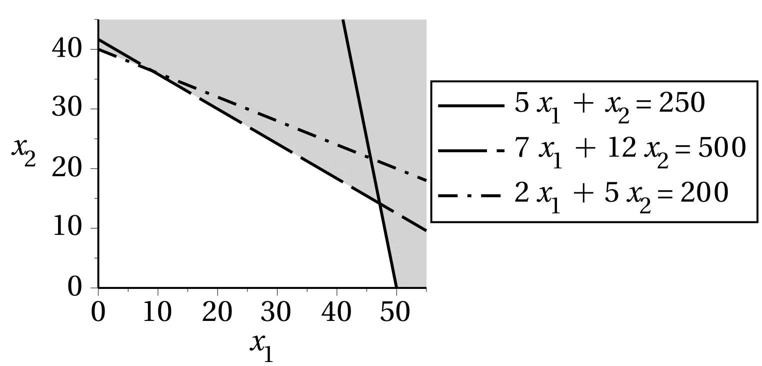


FIGURE 1 – Représentation graphique du domaine du problème (P_1) (en blanc)

Définition 0.4 (Ligne de niveau)**.** Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle **ligne de niveau de f** tout ensemble de la forme $f^{-1}(\{C\}) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = C\}$ où C est un réel fixé.

On trace en figure 2 des lignes de niveau de $(x_1, x_2) \mapsto 2x_1 + x_2$, i.e. des ensembles de la forme $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 + x_2 = C\}$.

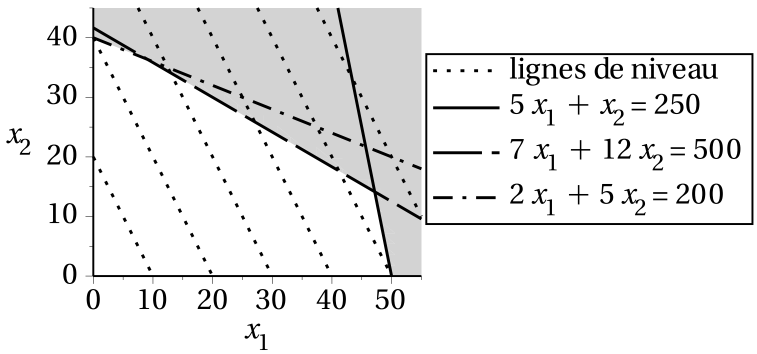


FIGURE 2 – Représentation des lignes de niveau du critère (en pointillés)

Graphiquement, on cherche la ligne de niveau de valeur C maximale qui a une intersection non vide avec le domaine du problème. La ligne de niveau à considérer est celle qui contient l'intersection des ensembles $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 5x_1 + x_2 = 250\}$ et $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 7x_1 + 12x_2 = 500\}$ (voir figure 3).

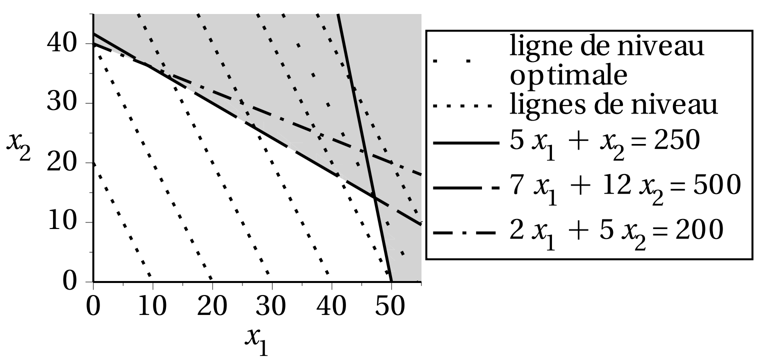


FIGURE 3 – Représentation de la ligne de niveau optimale

Ladite intersection est réduite au point $(x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{2500}{53}, \dfrac{750}{53}\right) \simeq (47{,}17; 14{,}15)$.

On en déduit $C = 2x_1^* + x_2^* = \dfrac{5750}{53} \simeq 108{,}49$.

Finalement, le bénéfice maximal est de 108,49 euros.
Il est atteint pour 47,17 sandwiches et 14,15 assiettes.

Remarque. Les valeurs non entières trouvées ici n'ont évidemment pas d'intérêt pratique. . .La recherche du bénéfice maximal pour x_1 et x_2 entiers naturels sera traitée dans le chapitre 3.

Chapitre 0. Introduction — TD

Exercice 0.1. *Représenter graphiquement les domaines suivants de* $\mathbb{R}^2$ *:*

1. $A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 + 4x_2 \leq 10, -3x_1 + 4x_2 \leq -2 \text{ et } -x_1 - x_2 \leq 0\}$;
2. $A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, 3x_1 + x_2 \leq 9, -x_1 - x_2 \leq 2, x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$;
3. $A_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, 3x_1 + x_2 \leq 9, -x_1 - x_2 \leq -2, x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$;
4. $A_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 + x_2 \leq 3, -x_1 + 3x_2 \leq -4, x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$;
5. $A_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |x_1 + 2x_2| \leq 6 \text{ et } |x_1 - 2x_2| \geq 2\}$.

Exercice 0.2. *Résoudre le problème* $\begin{cases} \max & (x_1 + 3x_2) \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ *en utilisant la méthode géométrique.*

Exercice 0.3. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & 2x_1 + 3x_2 \end{array}$ *et* $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 + x_2 \geq 0 \text{ et } -5 \leq x_1 - x_2 \leq 3\}$.

Résoudre $\begin{cases} \min & f(x_1, x_2) \\ & (x_1, x_2) \in C \end{cases}$ *et* $\begin{cases} \max & f(x_1, x_2) \\ & (x_1, x_2) \in C \end{cases}$ *en utilisant la méthode géométrique.*

Chapitre 1

Algorithme du simplexe (DANTZIG, 1947)

1.0 Introduction

1.0.1 Étude mathématique du problème

Définition 1.1 (Polytope convexe. Polyèdre convexe)**.** Soit n un entier naturel non nul.

Un **simplexe** ou **polytope convexe de $\mathbb{R}^n$** est une partie X de $\mathbb{R}^n$ telle qu'il existe un entier naturel non nul m, une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}$$

Un **polyèdre convexe** est un polytope convexe borné.

Définition 1.2 (Point extrême)**.** Soit X un simplexe de $\mathbb{R}^n$.

Un vecteur x est un **point extrême de X** si et seulement si il ne peut pas être exprimé comme une combinaison linéaire de points de X (autres que lui-même).

Remarque. Autrement dit, un point extrême de X est un sommet de X.

Théorème 1.1 (Localisation des optima)**.**

Soit X un simplexe de $\mathbb{R}^n$ et (P) un problème d'optimisation linéaire sur X :

$$(P)\begin{cases}\max & (c \mid x)\\ & x \in X\end{cases}$$

Si (P) admet des optima, alors au moins un point extrême de X est optiumum.

1.0.2 Forme standard

Définition 1.3 (Problème sous forme standard)**.** Un problème (P^s) d'optimisation linéaire est sous **forme standard** ou **forme équationnelle** si et seulement si il existe deux entiers naturels non nuls n et m, un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$, une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$(P^s) \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (c \mid x) \\ \qquad Ax = b, \ x \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 1.1 (Variable d'écart)**.**

Soit n un entier naturel non nul, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et β un nombre réel. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \left[\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leq \beta \iff \exists y \in \mathbb{R}_+, \ \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + y = \beta\right]$$

y est appelé **variable d'écart de l'inégalité $\boldsymbol{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leq \beta}$**.

Exemple. La forme standard de (P_1) est :

$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\ & 5x_1 + x_2 + y_1 = 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 + y_2 = 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 + y_3 = 200 \\ & x_1, \quad x_2, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0 \end{cases} \tag{P_1^s}$$

avec $n = 5$, $m = 3$, $c = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 250 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Les trois variables y_1, y_2, y_3 sont les variables d'écart issues des trois inégalités du problème initial.

1.0.3 Description de la méthode

Cette méthode tire parti du théorème 1.1 page précédente et cherche un optimum parmi les sommets du simplexe. Pour utiliser cette méthode, le problème doit être mis sous forme standard.

1. On part d'un sommet du simplexe (habituellement le point nul) ;
2. Si la forme de la fonction objectif permet une amélioration :
   - choisir une variable selon laquelle cette amélioration est possible ;
   - passer au sommet suivant selon cette variable et recommencer cette étape.
3. Si la forme de la fonction objectif ne permet pas d'amélioration, alors le sommet courant est optimum.

1.1 Présentation sur le problème (P_1)

1.1.1 Principe de la méthode

$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\ & 5x_1 + x_2 + y_1 = 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 + y_2 = 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 + y_3 = 200 \\ & x_1\,, \quad x_2\,, \quad y_1\,, \quad y_2\,, \quad y_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_1^s)$$

Dans la suite, on note $f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2x_1 + x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$ et X l'ensemble des contraintes du problème (P_1^s) sous forme standard.

Initialisation

On étudie initialement le cas où on ne produit rien en prenant $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (0,0) \in X$, alors :

- $\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}\right) = (250, 500, 200)$;
- $f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}\right) = 0$ (aucun bénéfice, aucune perte) ;

Première itération

Pour augmenter la valeur de f le plus rapidement possible, on a intérêt à augmenter la valeur de x_1 le plus possible car c'est elle qui possède le coefficient le plus fort dans f.

Mais cette manœuvre doit être faite tout en restant dans X et on choisit de le faire à x_2 constant, i.e. $x_2^{(1)} = x_2^{(0)} = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 \geq 0 & \iff & 250 - 5x_1 \geq 0 & \iff & x_1 \leq \dfrac{250}{5} = 50 \\ y_2 \geq 0 & \iff & 500 - 7x_1 \geq 0 & \iff & x_1 \leq \dfrac{500}{7} \simeq 71{,}4 \\ y_3 \geq 0 & \iff & 200 - 2x_1 \geq 0 & \iff & x_1 \leq \dfrac{200}{2} = 100 \end{array}$$

La valeur maximale de x_1 tel que $(x_1, 0) \in X$ est donc $x_1^{(1)} = 50$, auquel cas $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = (50, 0)$ et :

- $\left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}\right) = \left(250 - 5x_1^{(1)} - x_2^{(1)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}\right) = (0, 500, 200)$.
- $f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}\right) = 100 > f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}\right)$;

On réécrit la contrainte $5x_1 + x_2 + y_1 = 250$ en $x_1 = 50 - \dfrac{x_2}{5} - \dfrac{y_1}{5}$ que l'on réinjecte dans l'expression de f :

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 100 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{2}{5}y_1 + x_2 = 100 + \frac{3}{5}\,x_2 - \frac{2}{5}y_1$$

On exprime également y_2 et y_3 en fonction de x_2 et y_1 :

$$y_2 = 500 - 7x_1 - 12x_2 = 500 - 350 + \frac{7}{5}x_2 + \frac{7}{5}y_1 - 12x_2 = 150 - \frac{53}{5}x_2 + \frac{7}{5}y_1$$

$$y_3 = 200 - 2x_1 - 5x_2 = 200 - 100 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}y_1 - 5x_2 = 100 - \frac{23}{5}x_2 + \frac{2}{5}y_1$$

et on obtient une nouvelle formulation du problème :

$$\left\{\begin{array}{llllll} \max & 100 + \dfrac{3}{5}x_2 - \dfrac{2}{5}y_1 & & & & \\ & x_1 + \dfrac{1}{5}x_2 + \dfrac{1}{5}y_1 & & & = & 50 \\ & \dfrac{53}{5}x_2 - \dfrac{7}{5}y_1 + y_2 & & & = & 150 \\ & \dfrac{23}{5}x_2 - \dfrac{2}{5}y_1 & + y_3 & & = & 100 \\ & x_1\,, \quad x_2\,, \quad y_1\,, \quad y_2\,, \quad y_3 & & & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad (P_1^s)$$

Deuxième itération

D'après l'expression mise à jour de f, il est possible d'augmenter f en augmentant x_2.
En restant dans X et à y_1 constant, i.e. $y_1^{(2)} = y_1^{(1)} = 0$:

$$\begin{array}{lclcl} x_1 \geq 0 & \iff & 50 - \dfrac{x_2}{5} \geq 0 & \iff & x_2 \leq 250 \\ y_2 \geq 0 & \iff & 150 - \dfrac{53}{5}x_2 \geq 0 & \iff & x_2 \leq \dfrac{750}{53} \simeq 14{,}15 \\ y_3 \geq 0 & \iff & 100 - \dfrac{23}{5}x_2 \geq 0 & \iff & x_2 \leq \dfrac{500}{23} \simeq 21{,}74 \end{array}$$

La valeur maximale de x_2 pour rester dans X est donc $x_2^{(2)} = \dfrac{750}{53}$ et :

- $x_1^{(2)} = 50 - \dfrac{x_2^{(2)}}{5} - \dfrac{y_1^{(2)}}{5} = \dfrac{2500}{53}$
- $\left(y_2^{(2)}, y_3^{(2)}\right) = \left(150 - \dfrac{53}{5}x_2^{(2)} + \dfrac{7}{5}y_1^{(2)}, 100 - \dfrac{23}{5}x_2^{(2)} + \dfrac{2}{5}y_1^{(2)}\right) = \left(0, \dfrac{1850}{53}\right)$
- $f\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(2)}\right) = \dfrac{5750}{53} > f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}\right)$.

On réécrit la contrainte $\dfrac{53}{5}x_2 - \dfrac{7}{5}y_1 + y_2 = 150$ en $x_2 = \dfrac{750}{53} + \dfrac{7}{53}y_1 - \dfrac{5}{53}y_2$ que l'on réinjecte dans l'expression de f :

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \frac{5750}{53} - \frac{17}{53}y_1 - \frac{3}{53}y_2$$

Terminaison

Il est maintenant impossible d'augmenter la valeur de f : on a donc atteint le point optimal $(x_1^*, x_2^*) = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$. Finalement :

— $(x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{2500}{53}, \dfrac{750}{53}\right)$: le bénéfice optimal est atteint pour $\dfrac{2500}{53}$ sandwiches et $\dfrac{750}{53}$ assiettes ;

— $f(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \dfrac{5750}{53}$: le bénéfice optimal est de $\dfrac{5750}{53}$ euros ;

— $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(0, 0, \dfrac{1850}{53}\right)$: l'intégralité du pain et de la viande est nécessaire et il reste $\dfrac{18500}{53} \simeq 349$ grammes de salade.

1.1.2 Disposition pratique

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 5x_1 + x_2 + y_1 = 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 + y_2 = 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 + y_3 = 200 \\ & x_1, \quad x_2, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_1^s)$$

Initialisation

On dispose les éléments de (P_1^s) dans un tableau :

- la première contiendra :
  - les coefficients du critère à maximiser ;
  - en fin de ligne, l'opposé de sa valeur courante.
- les autres lignes contiendront :
  - les coefficients des contraintes ;
  - en fin de ligne, les seconds membres desdites contraintes.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
f	2	1	0	0	0	0	(L_0)
y_1	5	1	1	0	0	250	(L_1)
y_2	7	12	0	1	0	500	(L_2)
y_3	2	5	0	0	1	200	(L_3)

On définit également la **base courante** qui est initialisée avec $\mathscr{B} = (y_1, y_2, y_3)$ (visible sur les en-têtes à gauche du tableau).

Première itération

Choix de la « variable entrante »

L'augmentation du critère n'est possible que s'il existe des coefficients strictement positifs dans la partie gauche de (L_0).

Dans la section précédente, on a choisi x_1 soit la première colonne du tableau. Ce choix correspond au coefficient le plus fort dans la partie gauche de (L_0).

Choix de la « variable sortante »

On cherche la variable de $\mathscr{B}$ qui réalise le minumum de $\left\{\frac{250}{5}, \frac{500}{7}, \frac{200}{2}\right\}$, c'est-à-dire y_1.

Dans le tableau, cela correspond à faire le rapport de chaque second membre sur le coefficient de la même ligne en première colonne, et ce pour chacune des lignes (L_1) à (L_3). La variable obtenue est celle pour laquelle la ligne dont le rapport est minimal : dans notre cas, il s'agit de la première ligne.

Le coefficient à la rencontre de la colonne de la variable entrante et de la ligne de la variable sortante (ici, 5) est souvent appelé **pivot**.

Substitution / Pivotage

La nouvelle base est obtenue en échangeant les deux variables : $\mathscr{B} = (x_1, y_2, y_3)$.

On réalise alors la substitution à l'aide d'un pivotage « à la GAUSS » du tableau :

- $L_1 \leftarrow L_1/5$ (exprimer x_1 en fonction de x_2 et y_1)
- $L_0 \leftarrow L_0 - 2L_1$ (exprimer f en fonction de x_2 et y_1)
- $L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ (exprimer les contraintes restantes en fonction de x_2 et y_1)

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	3/5	−2/5	0	0	−100
x_1	1	1/5	1/5	0	0	50
y_2	0	53/5	−7/5	1	0	150
y_3	0	23/5	−2/5	0	1	100

Deuxième itération

Choix de la « variable entrante » Le seul choix possible est la seconde colonne, c'est-à-dire x_2.

Choix de la « variable sortante » On a $\min\left\{\frac{50}{1/5}, \frac{150}{53/5}, \frac{100}{23/5}\right\} = \frac{150}{53/5}$.

Donc la variable sortante est associée à la seconde ligne, c'est-à-dire y_2.

Substitution / Pivotage La nouvelle base est $\mathscr{B} = (x_1, x_2, y_3)$ et on effectue le pivotage suivant :

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{53/5} \quad , \quad L_0 \leftarrow L_0 - \frac{3}{5}L_2 \quad , \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5}L_2 \quad , \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{23}{5}L_2$$

pour obtenir le tableau :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	−17/53	−3/53	0	−5750/53
x_1	1	0	12/53	−1/53	0	2500/53
x_2	0	1	−7/53	5/53	0	750/53
y_3	0	0	11/53	−23/53	1	1850/53

Terminaison

Aucun coefficient n'est strictement positif, donc il n'y aucune augmentation possible.
On lit alors les composantes de l'optimum :

— la valeur des composantes associées aux variables de $\mathscr{B}$ est celle du second membre des lignes associées :

$$x_1^* = \frac{2500}{53} \quad , \quad x_2^* = \frac{750}{53} \quad , \quad y_3^* = \frac{1850}{53}$$

— la valeur des composantes associées aux variables hors base est nulle :

$$y_1^* = y_2^* = 0$$

Enfin, la valeur du critère final est <u>l'opposé</u> de la valeur en fin de ligne (L_0) : $f^* = \frac{5750}{53}$.

1.2 Méthode « des tableaux »

1.2.1 Formalisation

Soit la forme canonique $(P^c)\begin{cases}\max\limits_{x} & (c\,|\,x)\\ & Ax \leq b,\ x \geq 0\end{cases}$ mise sous forme standard $(P^s)\begin{cases}\max\limits_{(x,y)} & (c\,|\,x)+(0\,|\,y)\\ & Ax + \quad Iy = b\\ & x\ , \qquad y \geq 0\end{cases}$ ·

Initialisation

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_{n-m} & y_1 & \cdots & y_m & \\
f & \cdots & {}^t c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \\
\hline
y_1 & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & A & & & I_m & & b \\
y_m & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

A*, *b* et *c données de (P)

$\boldsymbol{x_1, \ldots, x_n}$ variables d'état de (P) original

$\boldsymbol{y_1, \ldots, y_m}$ variables d'écart associées aux contraintes de (P)

Base initiale : $\mathscr{B} = (y_1, \ldots, y_m)$

Itération

$$\begin{array}{c|cccc|cc}
 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n+m} & & & \\
f & c_1 & \cdots & c_{n+m} & Z & (L_0) \\
\hline
z_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,n+m} & b_1 & (L_1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
z_m & a_{m1} & \cdots & a_{m,n+m} & b_m & (L_m)
\end{array}$$

avec $\mathscr{B} = (z_1, \ldots, z_m)$ la base courante.

si $\exists \ell \in [\![1, n+m]\!]$, $c_\ell > 0$ **alors**
  j est choisi dans $\{\ell,\ c_\ell > 0\}$
  si $\exists k \in [\![1, m]\!]$, $a_{kj} > 0$ **alors**
    i est choisi dans $\operatorname*{argmin}\limits_{k \in [\![1,m]\!]} \left\{ \dfrac{b_k}{a_{kj}},\ a_{kj} > 0 \right\}$
    $\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B} \cup \{\xi_j\} \backslash \{z_i\}$ /* *z_i est remplacé par ξ_j dans la base* */
    $L_i \leftarrow L_i / a_{ij}$
    pour $k \leftarrow 0$ **à** m **faire**
      si $k \neq i$ **alors**
        $L_k \leftarrow L_k - a_{kj} L_i$
      fin si
    fin pour
  fin si
fin si

Invariant d'itération : « pour toute variable x_i dans la base $\mathscr{B}$, $a_{ki} = \delta_{ki}$ et $c_i = 0$ »

Algorithme 1: Déroulement d'une itération de la methode des tableaux

Terminaison

Si $\{\ell,\, c_\ell < 0\}$ est vide, alors l'optimum trouvé est telle que :

— pour toute variable z_i de $\mathscr{B}$, $z_i^* = b_i$;

— pour toute autre variable ξ_j, $\xi_j^* = 0$;

— la valeur optimale du problème est $f^* = -Z$.

Remarque.

1. Comme le suggère la ligne 2 de l'algorithme 1 page précédente, chercher la plus forte augmentation unitaire n'est pas obligatoire : c'est toutefois une option régulièrement utilisée.
2. Comme l'indique la ligne 4 de l'algorithme 1 page précédente, le calcul des rapports ne se fait qu'avec des coefficients de colonne strictement positifs.

1.2.2 Règles de pivotage

Définition 1.4 (Règle de pivotage)**.** Une **règle de pivotage** est le choix d'une stratégie pour le choix de la variable entrante et d'une stratégie pour le choix de la variable sortante.

Choix de la variable entrante

Reprenons la ligne 2 de l'algorithme 1 page précédente dans le cas où $\{\ell,\, c_\ell > 0\}$ contient au moins deux éléments : le choix de la variable entrante n'est pas explicité dans un tel cas.

Règle de la plus grande pente On choisit le coefficient c_ℓ le plus grand (c'est la méthode qui a été employée dans les exemples précédents) :

$$j = \operatorname{argmax}\{\ell,\, c_\ell > 0\}$$

Règle de Bland (1977) On choisit la première variable avec un coefficient positif :

$$j = \min\{\ell,\, c_\ell > 0\}$$

Règle « gloutonne » On choisit la variable assurant la plus grande diminution du critère : contrairement aux autres règles, celle-ci nécessite le calcul de la variable sortante associée et du critère obtenu pour chaque élément de $\{\ell,\, c_\ell > 0\}$.

Choix de la variable sortante

Reprenons la ligne 4 de l'algorithme 1 page précédente dans le cas où $\underset{k\in[\![1,m]\!]}{\operatorname{argmin}}\left\{\dfrac{b_k}{a_{kj}},\, a_{kj} > 0\right\}$ contient au moins deux éléments : le choix de la variable sortante n'y est pas non plus explicité.

Règle de la première ligne $j = \min \operatorname{argmin}\left\{\dfrac{b_k}{a_{kj}},\, a_{kj} > 0\right\}$

Règle de Bland (1977) On choisit la variable de plus faible indice qui réalise le minimum :

$$j = \min\left\{p \in [\![1, n+m]\!],\, \xi_p = z_\ell,\, \ell \in \underset{k\in[\![1,m]\!]}{\operatorname{argmin}}\left\{\frac{b_k}{a_{kj}},\, a_{kj} > 0\right\}\right\}$$

1.3 Cas non standards

1.3.1 Cas d'un sommet « dégénéré »

Un sommet est dit dégénéré si et seulement si il se situe à l'intersection d'au moins $n+1$ contraintes saturées [1]. Donc un tel sommet peut être associé à des bases différentes : une itération de l'algorithme peut alors passer d'un sommet dégénéré…à lui-même ! Cela signifie notamment que le critère stagne entre les deux étapes.

Dans la disposition en tableau, cela correspond à au moins une variable en base à valeur nulle.

Exemple. On considère le problème
$$\left\{\begin{array}{ll} \max & (10x_1 - 57x_2 - 9x_1 - 24x_4) \\ & x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 \leq 0 \\ & x_1 - \ 3x_2 - \ x_3 + \ 2x_4 \leq 0 \qquad (P_2) \\ & x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \leq 1 \\ & x_1\ , \quad x_2\ , \quad x_3\ , \quad x_4 \geq 0 \end{array}\right.$$

Initialisation $\mathscr{B} = (y_1, y_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
y_1	1	−11	−5	18	1	0	0	0
y_2	1	−3	−1	2	0	1	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

Itération n° 1 $\mathscr{B} = (x_1, y_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	0	53	41	−204	−10	0	0	0
x_1	1	−11	−5	9	1	0	0	0
y_2	0	8	4	−16	−1	1	0	0
y_3	0	11	5	−18	−1	0	1	1

Itération n° 2 $\mathscr{B} = (x_1, x_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	29/2	−98	−27/8	−53/8	0	0
x_1	1	0	1/2	−4	−3/8	11/8	0	0
x_2	0	1	1/2	−2	−1/8	1/8	0	0
y_3	0	0	−1/2	4	3/8	−11/8	1	1

Itération n° 3 $\mathscr{B} = (x_3, x_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	−29	0	0	18	15/2	−93/2	0	0
x_3	2	0	1	−8	−3/4	11/4	0	0
x_2	−1	1	0	2	1/4	−5/4	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

Itération n° 4 $\mathscr{B} = (x_3, x_4, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	−20	−9	0	0	21/4	−141/4	0	0
x_3	−2	4	1	0	1/4	−9/4	0	0
x_4	−1/2	1/2	0	1	1/8	−5/8	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

Itération n° 5 $\mathscr{B} = (y_1, x_4, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	22	−93	−21	0	0	12	0	0
y_1	−8	16	4	0	1	−9	0	0
x_4	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1/2	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

1. Compte tenu de la convexité du domaine, certaines de ces contraintes seront nécessairement redondantes.

Itération n° 6 $\mathscr{B} = (y_1, x_1, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	0	−27	1	−44	0	−10	0	0
y_1	0	−8	−4	16	1	−1	0	0
x_1	1	−3	−1	2	0	1	0	0
y_3	0	3	1	−2	0	−1	1	1

Itération n° 7 $\mathscr{B} = (y_1, x_1, x_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	0	−30	0	−42	0	−9	−1	−1
y_1	0	4	0	8	1	−5	4	4
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	3	1	−2	0	−1	1	1

Terminaison $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (1, 0, 1, 0)$, $f^* = 1$ et $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (4, 0, 0)$

Jusqu'à la sixième itération, le sommet courant est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, ce qui explique notamment la stagnation du critère.

Dans le pire des cas, cette stagnation peut engendrer un retour sur une base déjà visitée et provoquer la non-terminaison de l'algorithme [7, Chapitre 3, pages 26–27]. Heureusement, ce type de configuration est encore plus rare que les stagnations avec terminaison.

Exemple. On réécrit le problème (P_2) en

$$\left\{\begin{array}{l} \max \quad (10x_1 - 57x_2 - 9x_1 - 24x_4) \\ \quad \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ \quad \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \leq 0 \\ \quad x_1 \leq 1 \\ \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}\right. \qquad (P_2')$$

Initialisation $\mathscr{B} = (y_1, y_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
y_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
y_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

Itération n° 1 $\mathscr{B} = (x_1, y_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	0	53	41	−204	−20	0	0	0
x_1	1	−11	−5	18	2	0	0	0
y_2	0	4	2	−8	−1	1	0	0
y_3	0	11	5	−18	−2	0	1	1

Itération n° 2 $\mathscr{B} = (x_1, x_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	29/2	−98	−27/4	−53/4	0	0
x_1	1	0	1/2	−4	−3/4	11/4	0	0
x_2	0	1	1/2	−2	−1/4	1/4	0	0
y_3	0	0	−1/2	4	3/4	−11/4	1	1

Itération n° 3 $\mathscr{B} = (x_3, x_2, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	−29	0	0	18	15	−93	0	0
x_3	2	0	1	−8	−3/2	11/2	0	0
x_2	−1	1	0	2	1/2	−5/2	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

Itération nº 4 $\mathscr{B} = (x_3, x_4, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	-20	-9	0	0	$21/2$	$-141/2$	0	0
x_3	-2	4	1	0	$1/2$	$-9/2$	0	0
x_4	$-1/2$	$1/2$	0	1	$1/4$	$-5/4$	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

Itération nº 5 $\mathscr{B} = (y_1, x_4, y_3)$ et

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
f	22	-93	-21	0	0	24	0	0
y_1	-4	8	2	0	1	-9	0	0
x_4	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	0
y_3	1	0	0	0	0	0	1	1

Itération nº 6 $\mathscr{B} = (y_1, y_2, y_3)$

Comme pour le problème (P_5), le sommet courant est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ pour chaque itération. Remarquons ici que la base obtenue à la sixième itération est la base de départ : l'algorithme ne va donc pas terminer.

Remarque. De tels cycles ne peuvent pas se produire entre plusieurs sommets distincts.

1.3.2 Cas d'un problème sans optimum

Le critère n'est alors pas majoré sur l'ensemble des contraintes. Une telle configuration est détectée lorsque, une fois la variable de progression choisie, il est impossible de trouver une borne valable.

Dans la disposition en tableau, cela correspond à l'échec du test de la ligne 3 de l'algorithme 1 page 14 : autrement dit, lorsqu'on ne peut pas trouver de variable sortante.

Exemple. On considère le problème
$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_3)$$

Initialisation $\mathscr{B} = (y_1, y_2)$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	2	1	0	0	0
y_1	-1	1	1	0	1
y_2	2	-3	0	1	1

Itération nº 1 $\mathscr{B} = (y_1, x_1)$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	4	0	-1	-1
y_1	0	$-1/2$	1	$1/2$	$3/2$
x_1	1	$-3/2$	0	$1/2$	$1/2$

Itération nº 2 La seule variable entrante possible est x_2.
Mais aucune variable sortante ne peut être déterminée.

Il s'agit typiquement d'un problème sans optimum, comme le montre la représentation du problème original avec ses lignes de niveaux (cf. figure 1.1 page suivante).

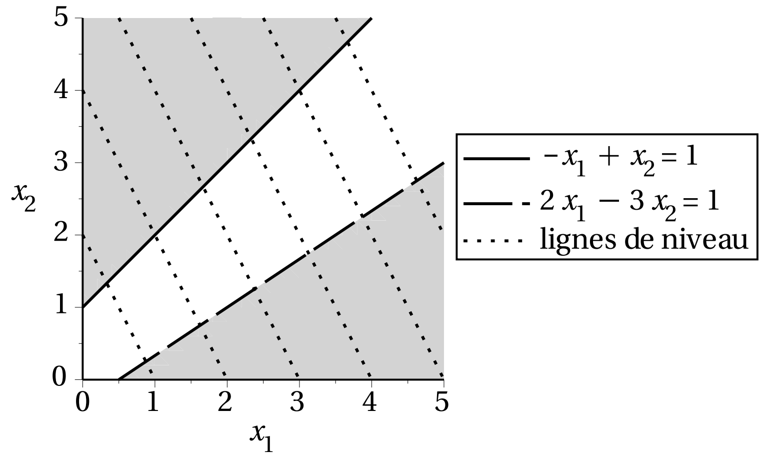


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du domaine et des lignes de niveau de (P_3)

1.3.3 Cas d'un problème avec plusieurs sommets optimaux

Une telle configuration est détectée lors d'une terminaison standard : le critère ne dépend plus d'une variable de progression possible (ou plus).

Dans la disposition en tableau, cela correspond à un coefficient nul dans la partie gauche de (L_0) pour une variable hors-base.

Exemple. On considère le problème
$$\begin{cases} \max \quad (3x_1 + 6x_2) \\ \qquad x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ \qquad x_1\,, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_4)$$

Initialisation $\mathscr{B} = (y_1, y_2)$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	3	6	0	0	0
y_1	1	2	1	0	2
y_2	2	1	0	1	2

Itération n° 1 $\mathscr{B} = (x_2, y_2)$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	0	−3	0	−6
x_2	1/2	1	1/2	0	1
y_2	3/2	0	−1/2	1	1

Terminaison Aucune diminution stricte n'est possible.

Donc $(x_1^*, x_2^*) = (0, 1)$ est optimum avec $(y_1^*, y_2^*) = (0, 1)$.

En réalisant une itération supplémentaire avec x_1 comme variable entrante, on obtient :

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	0	−3	0	−6
x_2	0	1	1/3	−1/3	2/3
x_1	1	0	−1/3	2/3	2/3

Donc $(x_1^*, x_2^*) = (2/3, 2/3)$ est également optimum avec $(y_1^*, y_2^*) = (0, 0)$.

En réalité, tout point du segment d'extrémités sont $(0,1)$ et $(2/3,2/3)$ sont des optimas, comme le montre la représentation du problème original avec ses lignes de niveaux (cf. figure 1.2)

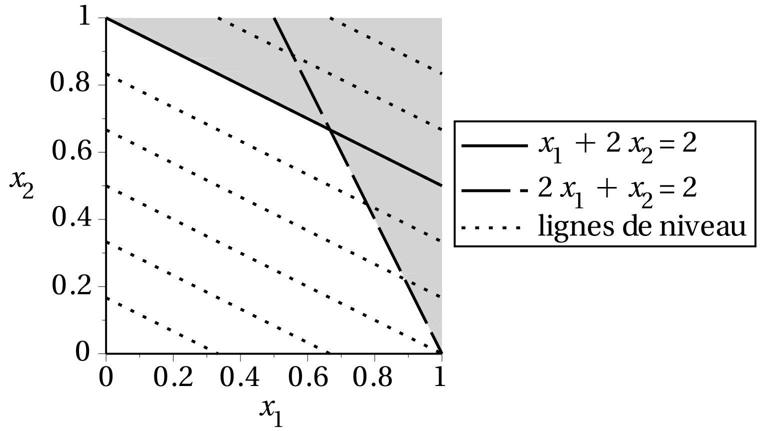


FIGURE 1.2 – Représentation graphique du domaine et des lignes de niveau de (P_4)

1.4 Cas d'une origine non admissible : méthode des deux phases

1.4.1 Contexte

L'algorithme présenté choisit l'ensemble des variables d'écart comme base initiale, ce qui correspond à initialiser toutes les variables du problème originel à zéro, *ce qui présuppose que cette configuration est admissible*, c'est-à-dire qu'elle vérifie les contraintes du problème.

Proposition 1.2 (Condition d'admissibilité de l'origine)**.**

Soit $\begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x) \\ & Ax \le b,\ x \ge 0 \end{cases}$ un problème d'optimisation linéaire sous forme canonique.

Alors $0_{\mathbb{R}^n} \in \{Ax \le b,\ x \ge 0\} \iff A\cdot 0 \le b \iff b \ge 0$.

Remarque. Autrement dit, l'origine n'est pas admissible si au moins l'un des seconds membres est strictement négatif.

Lorsque l'origine n'est pas admissible, on décompose la résolution en deux phases :

Phase I on cherche une configuration admissible du problème à l'aide d'un problème auxiliaire ;

Phase II on applique la méthode des tableaux à partir de la configuration admissible trouvée en **Phase I**.

1.4.2 Introduction de la méthode

Définition 1.5 (Problème auxilaire de la phase I)**.**

Soit $(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ x\geq 0\end{cases}$ un problème d'optimisation linéaire sous forme canonique.

On note $e=(1)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^n$ et on définit le **le problème auxiliaire de la phase I** de (P) comme le problème d'optimisation linéaire $(P^a)\begin{cases}\max\limits_{(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} & (0\,|\,x)-\delta\\ & Ax-\delta e\leq b\\ & x\,,\quad \delta\geq 0\end{cases}$

Théorème 1.2 (Propriétés de (P^a))**.**

Soit $(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ x\geq 0\end{cases}$ un problème d'optimisation linéaire sous forme canonique et (P^a) son problème auxiliaire de la phase I. Alors (P^a) admet un optimum (x^a,δ^a) et :

- si $\delta^a=0$, alors $x^a\in\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\leq b,\ x\geq 0\}$;
- si $\delta^a>0$, alors $\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\leq b,\ x\geq 0\}=\varnothing$.

Remarque. Autrement dit :

- si $\delta^a=0$, alors x^a est une configuration admissible de (P);
- si $\delta^a>0$, alors (P) n'admet aucune configuration admissible !

Démonstration. On peut reformuler (P^a) en $(P^a)\begin{cases}\min\limits_{(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} & \delta\\ & Ax\leq b+\delta e\\ & x\,,\quad \delta\geq 0\end{cases}$

Résoudre (P^a), c'est donc chercher le décalage δ^a minimal pour lequel il existe $x^a\in\mathbb{R}^n$ tel $Ax^a\leq b+\delta^a e$:

- si $\delta^a=0$, alors $Ax^a\leq b+0\cdot e=b$;
- si $\delta^a>0$, le cas précédent est donc impossible. □

La méthode est donc la suivante :

Phase I On résout (P^a) et on obtient un optimum (x^a,δ^a) :

- si $\delta^a=0$, on passe à la phase II;
- si $\delta^a>0$, (P) n'admet pas d'optimum : on s'arrête.

Phase II On applique l'algorithme du chapitre 1 à partir de x^a.

1.4.3 Application sur un exemple

On considère le problème d'optimisation $\begin{cases} \max \quad (x_1 - x_2) \\ \quad -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ \quad x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

Phase I

Le problème auxiliaire est $\begin{cases} \max \quad (0x_1 + 0x_2 - \delta) \\ -2x_1 + x_2 - \delta \leq -2 \\ x_1 - 2x_2 - \delta \leq 2 \\ x_1 + x_2 - \delta \leq 5 \\ x_1,\ x_2,\ \delta \geq 0 \end{cases}$ dont la forme standard est :

$$\begin{cases} \max \quad (0x_1 + 0x_2 - \delta + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\ -2x_1 + x_2 - \delta + y_1 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - \delta + y_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - \delta + y_3 = 5 \\ x_1,\ x_2,\ \delta,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit alors le tableau initial :

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	−1	0	0	0	0
y_1	−2	1	−1	1	0	0	−2
y_2	1	−2	−1	0	1	0	2
y_3	1	1	−1	0	0	1	5

.

Afin d'obtenir un tableau admissible pour le problème (P^a), on réalise un pivotage « forcé » selon les règles suivantes :

— la variable entrante est δ ;

— la variable sortante est z_i telle que $i = \text{argmin}\{b_i, 1 \in [\![1, m]\!]\}$: ici $i = 1$ et il s'agit donc de y_1.

On obtient alors le tableau suivant :

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	2	−1	0	−1	0	0	2
δ	2	−1	1	−1	0	0	2
y_2	3	−3	0	−1	1	0	4
y_3	3	0	0	−1	0	1	7

On applique la méthode des tableaux à partir de ce tableau pour obtenir le tableau final de (P^a) :

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	−1	0	0	0	0
x_1	1	−1/2	1/2	−1/2	0	0	1
y_2	0	−3/2	−3/2	1/2	1	0	1
y_3	0	3/2	−3/2	1/2	0	1	4

L'optimum de (P^a) est donc $x^a = (1,0)$ et $\delta^a = 0$.
Comme $\delta^a = 0$, x^a est donc une configuration admissible de (P) et l'on peut passer à la phase II.

Phase II

On construit le tableau du problème initial associé à la configuration trouvée en phase I :

— la ligne « f » est obtenue en exprimant le critère du problème initial en fonction des variables hors-base (à l'exception de δ) :

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1\right) + x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1$$

— les autres lignes sont directement extraites du tableau en supprimant la colonne selon δ.

On obtient alors le tableau suivant :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	-1
x_1	1	$-1/2$	$-1/2$	0	0	1
y_2	0	$-3/2$	$1/2$	1	0	1
y_3	0	$3/2$	$1/2$	0	1	4

On applique la méthode des tableaux à partir de ce tableau pour obtenir le tableau final de (P) :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	0	$-2/3$	$-1/3$	-3
x_1	1	0	0	$1/3$	$2/3$	4
y_1	0	0	1	1	1	5
x_2	0	1	0	$-1/3$	$1/3$	1

On en déduit qu'un optimum de (P) est $x = (4,1)$.

1.4.4 Formalisation de la méthode

On écrit le problème initial sous forme canonique :

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x) \\ & Ax \leq b,\ x \geq 0\end{cases}$$

Phase I 1. On ajoute la variable δ pour créer le problème auxiliaire (P^a) :

$$(P^a)\begin{cases}\max\limits_{(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} & (0\,|\,x) - \delta \\ & Ax - \delta e \leq b \\ & x\ ,\quad \delta \geq 0\end{cases}$$

2. On met (P^a) sous forme standard en ajoutant les variables d'écart y :

$$\begin{cases}\max\limits_{(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} & (0\,|\,x) - \delta + (0\,|\,y) \\ & Ax - \delta e + Iy = b \\ & x\ ,\quad \delta\ ,\quad y \geq 0\end{cases}$$

3. On force un échange de variable en base dont :
   — la variable entrante est δ ;
   — la variable sortante est celle dont le second membre est le plus faible.
4. On résout le problème (P^a) à partir de cette nouvelle configuration :
   — si la valeur de δ est nulle, on peut passer en phase II ;
   — sinon, le problème original n'a pas d'optimum *(ensemble des contraintes vide)*.

Phase II 1. On extrait la configuration obtenue en phase I en retirant la colonne associée à δ.
2. On exprime le critère en fonction des variables hors-base (δ excepté).
3. On résout le problème (P) à partir de cette nouvelle configuration.

IMPORTANT. Lors de la résolution de (P^a) (étape 4 de la phase I), **on favorisera systématiquement $\boldsymbol{\delta}$ lorsqu'elle est un candidat pour le choix de la variable sortante**.

Démonstration. Dès que δ devient une variable hors-base, on obtient $\delta = 0$.
Alors la fonction objectif de (P^a), i.e. $(x, \delta) \mapsto -\delta$ a atteint son maximum et l'optimum est atteint. □

1.5 Performance de l'algorithme

1.5.1 Terminaison

Théorème 1.3 (Terminaison de l'algorithme)**.**
Soit X un simplexe de $\mathbb{R}^n$ et (P) un problème d'optimisation linéaire sur X :

$$(P)\begin{cases}\min & (c \mid x)\\ & x \in X\end{cases}$$

Si X n'admet aucun sommet dégénéré, alors l'algorithme du simplexe termine.

Si X admet un sommet dégénéré, alors l'application de la règle de BLAND pour le choix de la variable et de la variable sortante assure la terminaison de l'algorithme du simplexe.

1.5.2 Complexité

Théorème 1.4 (Complexité de l'algorithme du simplexe)**.**
L'algorithme du simplexe est de complexité polynomiale en moyenne.

Toutefois, avec les règles de pivotage actuelles, il existe des problèmes dont l'application de l'algorithme du simplexe est de complexité exponentielle.

Théorème 1.5 (KLEE et MINTY, 1972 [3])**.** Soit n un entier naturel non nul.

Alors l'algorithme du simplexe avec une règle de pivotage standard sur le problème suivant :

$$\begin{cases} \max \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \\ \qquad 2\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1}, \ \forall i \in [\![1, n]\!] \\ \qquad x_i \geq 0, \ \forall i \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

nécessite $2^n - 1$ itérations.

Remarque. L'existence de règles de pivotage assurant une complexité au plus polynomiale pour n'importe quel problème est un problème ouvert.

Chapitre 1. Algorithme du simplexe (Dantzig, 1947) — TD

Méthode des tableaux

Exercice 1.1. *En utilisant la méthode des tableaux, résoudre les problèmes suivants :*

$$(a)\begin{cases}\max & x_1 + \dfrac{x_2}{2}\\ & x_1 + x_2 \leq 4\\ & -3x_1 + x_2 \leq 3\\ & x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \leq 1\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}\qquad (b)\begin{cases}\max & 10x + 20x_2\\ & 2x_1 + x_2 \leq 30\\ & x_1 + 4x_2 \leq 64\\ & 5x_1 + 6x_2 \leq 110\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}\qquad (c)\begin{cases}\max & x_1 + 2x_2\\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 2\\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4\\ & x_1 + x_2 \leq 5\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}$$

Exercice 1.2. *Un fleuriste dispose de cinquante lys, quatre-vingts roses et quatre-vingts jonquilles. Il réalise deux types de bouquets :*

— *un bouquet de dix lys, dix roses et vingt jonquilles qu'il vend quarante euros ;*

— *un bouquet de dix lys, vingt roses et dix jonquilles qu'il vend cinquante euros ;*

Combien de ces deux types de bouquets le fleuriste doit-il composer pour réaliser une recette maximale ?

Cas non standards

Exercice 1.3. *Résoudre le problème* $\begin{cases}\max & 10x_1 + 30x_2\\ & x_1 + 3x_2 \leq 18\\ & x_1 + x_2 \leq 8\\ & 2x_1 + x_2 \leq 14\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}$ *en utilisant la méthode des tableaux.*

Exercice 1.4. *En utilisant la méthode des tableaux, résoudre les problèmes suivants :*

$$(a)\begin{cases}\max & 2x_1 + 3x_2\\ & x_1 - x_2 \leq 3\\ & -x_1 + x_2 \leq 5\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}\qquad (b)\begin{cases}\max & -x_1 + x_2\\ & x_1 - x_2 \leq 3\\ & -x_1 + x_2 \leq 5\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}\qquad (c)\begin{cases}\max & -6x_1 + 5x_2\\ & x_1 - x_2 \leq 3\\ & -x_1 + x_2 \leq 5\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}$$

Exercice 1.5. *Résoudre le problème* $\begin{cases}\max & 2x_1 + x_2\\ & x_1 - x_2 \leq 1\\ & x_1 + x_2 \leq 1\\ & x_1\,,\quad x_2 \geq 0\end{cases}$ *en utilisant la méthode des tableaux.*

Cas d'une origine non-admissible

Exercice 1.6. *Résoudre le problème*

$$\begin{cases} \max \quad (x_1 + 2x_2) \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ \qquad 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ \qquad x_1 + x_2 \geq 2 \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

en utilisant la méthode des tableaux.

Exercice 1.7. *Résoudre le problème*

$$\begin{cases} \max \quad (x_1 - 2x_2) \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 3 \\ \qquad -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

en utilisant la méthode des tableaux.

Que constatez-vous ? Comment l'expliquer ?

Chapitre 2

Dualité

2.1 Problème exemple (D_1)

Considérons le problème faisant suite au problème posé page 5.

Le gérant du magasin souhaite revendre son activité.

Quelle est l'offre minimale qu'un repreneur potentiel peut faire pour que le gérant ne soit pas perdant par rapport au bénéfice qu'il ferait si il utilisait ses stocks pour confectionner ses produits et les vendre ?

L'offre d'un repreneur potentiel se décompose en trois éléments :

— le prix d'achat u_1 par gramme de pain ;

— le prix d'achat u_2 par gramme de viande ;

— le prix d'achat u_3 par gramme de viande.

Le coût de l'offre pour le repreneur est de $5000u_1 + 5000u_2 + 2000u_3$. Selon cette offre :

— l'équivalent d'un sandwich revient à $100u_1 + 70u_2 + 20u_3$ et doit vérifier $100u_1 + 70u_2 + 20u_3 \geq 2$;

— l'équivalent d'une assiette revient à $20u_1 + 120u_2 + 50u_3$ et doit vérifier $20u_1 + 120u_2 + 50u_3 \geq 1$.

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation avec contraintes :

$$\left\{\begin{array}{lrrrl} \min & (5000u_1 & + 5000u_2 & + 2000u_3) & \\ & 100u_1 + & 70u_2 + & 20u_3 & \geq 2 \\ & 20u_1 + & 120u_2 + & 50u_3 & \geq 1 \\ & u_1\ , & u_2\ , & u_3 & \geq 0 \end{array}\right. \qquad (D_1)$$

(D_1) est le **problème dual de** (***P*₁**). Ce dernier peut se réécrire

$$\left\{\begin{array}{lrrl} \max & (2x_1 + & x_2) & \\ & 100x_1 + & 20x_2 & \leq 5000 \\ & 70x_1 + & 120x_2 & \leq 5000 \\ & 20x_1 + & 50x_2 & \leq 2000 \\ & x_1\ , & x_2 & \geq 0 \end{array}\right. \qquad (P_1)$$

2.2 Définition

Définition 2.1 (Problème dual)**.**

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$, une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$.

On considère le problème d'optimisation linéaire $(P) \begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c \mid x) \\ & Ax \leq b,\ x \geq 0 \end{cases}$.

On appelle **problème dual de (P)** le problème d'optimisation linéaire (D) défini par :

$$(D) \begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbb{R}^m} & (b \mid u) \\ & {}^t\!Au \geq c,\ u \geq 0 \end{cases}$$

Le problème (P) est alors appelé le **problème primal de (D)**.

Proposition 2.1. Soit (P) un problème d'optimisation linéaire et (D) son problème dual.

Alors le problème dual de (D) est (P).

Démonstration. Mettons (D) sous forme canonique : $(D^c) \begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^m} & (-b \mid x) \\ & -{}^t\!Ax \leq -c,\ x \geq 0 \end{cases}$ avec $-{}^t\!A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Le problème dual de (D^c) est alors $\begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbb{R}^n} & (-c \mid u) \\ & {}^t\!\left(-{}^t\!A\right)u \geq -b,\ u \geq 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbb{R}^n} & (-c \mid u) \\ & -Au \geq -b,\ u \geq 0 \end{cases}$.

La forme canonique de ce dernier problème est alors $\begin{cases} \max\limits_{u\in\mathbb{R}^n} & (c \mid u) \\ & Au \leq b,\ u \geq 0 \end{cases}$, autrement dit (P). □

2.3 Certificats d'optimalité

Dans toute cette section, on pose un problème d'optimisation linéaire $(P) \begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c \mid x) \\ & Ax \leq b,\ x \geq 0 \end{cases}$ et $(D) \begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbb{R}^m} & (b \mid u) \\ & {}^t\!Au \geq c,\ u \geq 0 \end{cases}$ son problème dual.

2.3.1 Dualité faible

Théorème 2.1 (Dualité faible)**.**

Soit x un point de l'ensemble des contraintes de (P).

Soit u un point de l'ensemble des contraintes de (D). Alors $(c \mid x) \leq (b \mid u)$.

De plus, si $(c \mid x) = (b \mid u)$, alors x est un optimum de (P) et u est un optimum de (D).

Remarque. Donc toute valeur du critère de (P) est inférieur à toute valeur du critère de (D).

Démonstration. Alors $Ax \leq b$ et ${}^t\!Au \geq c$. D'où $(c \mid x) = {}^t\!x\,c \leq {}^t\!x({}^t\!Au) = {}^t(Ax)u \leq {}^t\!b\,u = (b \mid u)$. □

Corollaire. On suppose que l'ensemble des contraintes de (P) est non vide.
Si (P) n'admet pas d'optimum, alors l'ensemble des contraintes de (D) est vide.

Démonstration. Comme $X = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}$ n'est pas vide, $x \mapsto (c \mid x)$ n'est pas majoré sur X.
Supposons par l'absurde que $U = \{u \in \mathbb{R}^m,\ {}^tAu \geq c\}$ est non vide.
Soit donc $u \in U$. D'après le théorème 2.1 page précédente, $\forall x \in X,\ (c \mid x) \leq (b \mid u)$.
Donc $x \mapsto (c \mid x)$ est majoré sur X par $(b \mid u)$, ce qui est impossible. □

Corollaire. On suppose que l'ensemble des contraintes de (D) est non vide.
Si (D) n'admet pas d'optimum, alors l'ensemble des contraintes de (P) est vide.

Démonstration. On applique la propriété 2.1 page précédente au corollaire précédent. □

2.3.2 Dualité forte

Théorème 2.2 (Dualité forte)**.** Si (P) admet un optimum, alors (D) aussi.

Corollaire. Si (D) admet un optimum, alors (P) aussi.

Démonstration. On applique la propriété 2.1 page précédente au théorème précédent. □

IMPORTANT. Un problème d'optimisation linéaire se classe dans l'un des trois cas suivants.

(A) Son ensemble de contraintes est non vide et il admet un optimum.

(B) Son ensemble de contraintes est non vide et il n'admet pas d'optimum.

(C) Son ensemble de contraintes est vide.

Les théorèmes de dualité 2.1 page précédente et 2.2 permettent de déterminer que seules quatre configurations sur neuf sont possibles pour le couple primal-dual :

— les deux problèmes sont dans le cas (A) ;

— l'un des deux problèmes est dans le cas (B) et l'autre dans le cas (C) ;

— les deux problèmes sont dans le cas (C).

Exemple. $\left\{\begin{array}{lrrl} \max & & x_2 & \\ & x_1 & & \leq -1 \\ & & -\,x_2 & \leq -1 \\ & x_1\,, & x_2 & \geq \ \ 0 \end{array}\right.$ et son dual $\left\{\begin{array}{lrrl} \min & -u_1 & -\,u_2 & \\ & u_1 & & \geq 0 \\ & & -\,u_2 & \geq 1 \\ & u_1\,, & u_2 & \geq 0 \end{array}\right.$ sont dans le cas (C).

2.3.3 Complémentarité

Théorème 2.3 (Complémentarité)**.**
Soit x^* un point de l'ensemble des contraintes de (P).
Soit u^* un point de l'ensemble des contraintes de (D).
Alors x^* est un optimum de (P) et u^* est un optimum de (D) si et seulement si :

$$\left(x^* \,\middle|\, {}^tAu^* - c\right) = 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i^* \cdot \left({}^tAu^* - c\right)_i = 0$$

Corollaire (Détermination de l'optimum dual à partir de l'optimum primal)**.**
Soit x^* un optimum de (P) et u^* un optimum de (D). Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

— Si $x_i^* \neq 0$, alors $\left({}^tAu^* - c\right)_i = 0$, i.e. la i^{e} contrainte de (D) est saturée en u^*.

— Si $(Ax^* - b)_i \neq 0$, i.e. la i^{e} contrainte de (P) n'est pas saturée en x^*, alors $u_i^* = 0$.

Corollaire (Détermination de l'optimum primal à partir de l'optimum dual)**.**
Soit x^* un optimum de (P) et u^* un optimum de (D). Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

— Si $u_i^* \neq 0$, alors $(Ax^* - b)_i = 0$, i.e. la i^{e} contrainte de (P) est saturée en x^*.

— Si $\left({}^tAu^* - c\right)_i \neq 0$, i.e. la i^{e} contrainte de (D) n'est pas saturée en u^*, alors $x_i^* = 0$.

Démonstration. On applique la propriété 2.1 page 29 au corollaire précédent. □

Exemple. On reprend le problème (P_1) dans la version de la présente page et son problème dual (D_1).

$$(P_1)\begin{cases} \max \quad (2x_1 + x_2) \\ \quad 100x_1 + \ \ 20x_2 \leq 5000 \\ \quad \ \ 70x_1 + 120x_2 \leq 5000 \\ \quad \ \ 20x_1 + \ \ 50x_2 \leq 2000 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (D_1)\begin{cases} \max \quad (5000u_1 + 5000u_2 + 2000u_3) \\ \quad 100u_1 + \ \ 70u_2 + 20u_3 \geq 2 \\ \quad \ \ 20u_1 + 120u_2 + 50u_3 \geq 1 \\ \quad u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0 \end{cases} \quad (D_1)$$

L'optimum de ce problème est $(x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{2500}{53}, \dfrac{750}{53}\right)$ avec $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(0, 0, \dfrac{18500}{53}\right)$.

D'après le théorème de complémentarité :

— $x_1^* = \dfrac{2500}{53} \neq 0$: donc la première contrainte de (D_1) est saturée en u^* : $100u_1^* + 70u_2^* + 20u_3^* = 2$.

— $x_2^* = \dfrac{750}{53} \neq 0$: donc la deuxième contrainte de (D_1) est saturée en u^* : $20u_1^* + 120u_2^* + 50u_3^* = 1$.

— La troisième contrainte de (P) n'est pas saturée en x^* : donc $u_3^* = 0$.

Donc $\begin{cases} 100u_1^* + \ \ 70u_2^* = 2 \\ \ \ 20u_1^* + 120u_2^* = 1 \end{cases}$ et $u_3^* = 0$. D'où $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \left(\dfrac{17}{1060}, \dfrac{6}{1060}, 0\right)$.

2.3.4 Interprétation de l'optimum dual

Proposition 2.2 (Dualité comme mesure de sensibilité)**.**

Soit (P) un problème d'optimisation linéaire et (D) son problème dual.

Alors l'optimum u^* de (D) — lorsqu'il existe — est le vecteur des coefficients de variation du critère de (P) selon son second membre.

Remarque. Autrement dit, avec les notations habituelles, $u_i^* = \dfrac{\partial f}{\partial b_i}$.

Remarque. Rappelons qu'un optimum x^* est usuellement un sommet et sature donc certaines contraintes (pas forcément toutes).

Alors le théorème 2.3 page précédente indique que u_i^* donne une information sur l'effet obtenu par modification de la contrainte n° i. En effet :

— si la contrainte n° i n'est pas saturée en x^*, alors l'optimum est inchangé et $u_i^* = 0$;

— si la contrainte n° i est saturée en x^*, alors l'optimum est modifié et $u_i^* \neq 0$.

La proposition 2.2 page précédente permet de préciser la valeur de u_i^* dans ce dernier cas.

Proposition 2.3 (Lecture de l'optimum dual dans le tableau primal)**.**
Les composantes de l'optimum de (D) sont les opposés des coefficients du critère selon les variables d'écarts $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$ du dernier tableau obtenu lors de la résolution de (P).

Exemple. En appliquant la méthode des tableaux au problème $(P_1) \begin{cases} \max \quad (2x_1 + \quad x_2) \\ 100x_1 + \ 20x_2 \leq 5000 \\ 70x_1 + 120x_2 \leq 5000 \\ 20x_1 + \ 50x_2 \leq 2000 \\ x_1 \, , \quad x_2 \geq \quad 0 \end{cases}$,

on obtient le dernier tableau suivant :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	**−17/1060**	**−6/1060**	**0**	−5750/53
x_1	1	0	12/1060	−2/1060	0	2500/53
x_2	0	1	−7/1060	10/1060	0	750/53
y_3	0	0	110/1060	−460/1060	1	18500/53

On reconnaît bien l'optimum de (D_1) — au signe près — dans la première ligne du tableau (valeurs en gras et grisées).

2.4 Méthode « primale-duale »

2.4.1 Motivation

Soit un problème d'optimisation $(P) \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (c \,|\, x) \\ \quad Ax \leq b, \ x \geq 0 \end{cases}$ dont une résolution a été effectuée.

On souhaite ajouter une contrainte $(\alpha \,|\, x) \leq \beta$ et résoudre le nouveau problème obtenu (P') :

— si l'optimum de (P) vérifie la nouvelle contrainte, alors c'est un optimum de (P') : il n'y a donc rien à faire de plus ;

— sinon, est-il possible de ne pas à avoir à reprendre la résolution de (P') depuis le début en s'appuyant sur la résolution de (P) ?

2.4.2 Description sommaire de la méthode « primale-duale »

Soit (P) un problème d'optimisation linéaire et (P') le nouveau problème d'optimisation linéaire obtenu par ajout d'une contrainte dans (P).

1. On part de l'optimum de (P) : si cet optimum est admissible dans (P'), c'est l'optimum cherché.
2. Sinon, on part du dernier tableau obtenu lors de la résolution de (P) et on insère la nouvelle contrainte en fonction des variables hors-base (la nouvelle variable d'écart est ajoutée à la base).
3. On passe par la formulation de (D'), dual de (P') pour obtenir le nouveau tableau.

IMPORTANT. Dans le cas de l'étape 2, l'optimum de (P') sature nécessairement la nouvelle contrainte. En effet, dans le cas contraire, la nouvelle contrainte serait alors inutile et l'optimum de (P) serait l'optimum cherché, ce qui est impossible par ce non admissible. Donc la nouvelle variable d'écart doit être nulle, c'est-à-dire hors-base : elle doit être la variable sortante de l'étape 3 de la méthode.

ATTENTION. L'absence de variable entrante correspond à un problème dual (D') non borné et donc à un ensemble des contraintes de (P') vide d'après le corrolaire 2.3.1 page 30. Dans un tel cas, la nouvelle contrainte est donc incompatible avec l'ensemble des contraintes de (P).

2.4.3 Disposition pratique de la méthode

Initialisation Le tableau initial de cette méthode est le tableau final de l'algorithme des tableaux appliqué au problème (P).

Déroulement

$$\begin{array}{c|ccc|c|c}
 & \xi_1 & \cdots & \xi_n & & \\
f & c_1 & \cdots & c_n & Z & (L_0) \\
\hline
\vdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 & (L_1) \\
\mathscr{B} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m & (L_m)
\end{array}$$

où $\mathscr{B}$ désigne la **base de variables** courante.

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \leq \beta$: nouvelle contrainte **exprimée selon les variables hors-base**

pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  $a_{m+1,k} \leftarrow \alpha_k$
fin pour
$b_{m+1} \leftarrow \beta$
pour $k \leftarrow 0$ **à** m **faire**
  $a_{k,n+1} \leftarrow 0$
fin pour
$a_{m+1,n+1} \leftarrow 1$
$\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B} \cup \{y_{m+1}\}$ /* y_{m+1} *est la variable d'écart de la nouvelle contrainte* */
si $\exists k \in [\![1, n]\!]$, $a_{m+1,k} < 0$ **alors**
  $j \leftarrow \text{argmin}\left\{\frac{c_k}{a_{m+1,k}},\ a_{m+1,k} < 0\right\}$
  $\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B} \cup \{\xi_j\} \setminus \{y_{m+1}\}$ /* y_{m+1} *est nécessairement la variable sortante (cf. plus haut)* */
  pour $k \leftarrow 0$ **à** $m+1$ **faire**
    si $k = m+1$ **alors**
      $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{ij}} L_i$
    sinon
      $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} L_i$
    fin si
  fin pour
sinon
  /* *Nouvelle contrainte incompatible* $\Rightarrow$ *nouveau domaine vide* */
fin si

Terminaison Le tableau obtenu donne l'optimum du problème (P').

2.4.4 Application pratique sur le problème (P_1)

On souhaite ajouter l'énoncé suivant à l'énoncé initial.

Le magasin manque actuellement de main d'œuvre et ne peut pas produire plus de cinquante plats (sandwiches et/ou assiettes) par jour.

Dans ces conditions, quel bénéfice le gérant peut-il espérer ?

Initialisation

Le tableau final de l'algorithme des tableaux appliqué au problème (P_1) est

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	$-17/53$	$-3/53$	0	$-5750/53$
x_1	1	0	$12/53$	$-1/53$	0	$2500/53$
x_2	0	1	$-7/53$	$5/53$	0	$750/53$
y_3	0	0	$11/53$	$-23/53$	1	$1850/53$

avec la base de variable $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, y_3\}$.

Il s'agit donc d'ajouter la contrainte $x_1 + x_2 \leq 50$.

Remarquons que (x_1^*, x_2^*) n'est plus valide puisque $x_1^* + x_2^* = \dfrac{2500}{53} + \dfrac{750}{53} = \dfrac{3250}{53} \simeq 61,3 > 50$.

Insertion de la nouvelle contrainte

On note y_4 la variable d'écart de la nouvelle contrainte : $x_1 + x_2 + y_4 = 50$ avec $y_4 \geq 0$.

On exprime cette dernière à l'aide des variables y_1 et y_2 (et y_4). Or :

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{12}{53} y_1 - \dfrac{1}{53} y_2 = \dfrac{2500}{53} \\ x_2 - \dfrac{7}{53} y_1 + \dfrac{5}{53} y_2 = \dfrac{750}{53} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{12}{53} y_1 + \dfrac{1}{53} y_2 + \dfrac{2500}{53} \\ x_2 = \dfrac{7}{53} y_1 - \dfrac{5}{53} y_2 + \dfrac{750}{53} \end{cases}$$

Donc $x_1 + x_2 = -\dfrac{5}{53} y_1 - \dfrac{4}{53} y_2 + \dfrac{3250}{53}$, puis $x_1 + x_2 + y_4 = 50 \iff -\dfrac{5}{53} y_1 - \dfrac{4}{53} y_2 + y_4 = 50 - \dfrac{3250}{53} = -\dfrac{600}{53}$.

On obtient alors le tableau suivant :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	$-17/53$	$-3/53$	0	0	$-5750/53$
x_1	1	0	$12/53$	$-1/53$	0	0	$2500/53$
x_2	0	1	$-7/53$	$5/53$	0	0	$750/53$
y_3	0	0	$11/53$	$-23/53$	1	0	$1850/53$
y_4	0	0	$-5/53$	$-4/53$	0	1	$-600/53$

Choix de j

On a $\min\left\{\dfrac{-17/53}{-5/53}, \dfrac{-3/53}{-4/53}\right\} = \dfrac{-3/53}{-4/53}$.

Donc $j = 4$ et y_2 devient une variable de la base à la place de y_4.

D'où $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, y_3, y_2\}$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	$-1/4$	0	0	$-3/4$	-100
x_1	1	0	$1/4$	0	0	$-1/4$	50
x_2	0	1	$-1/4$	0	0	$5/4$	0
y_3	0	0	$3/4$	0	1	$-23/4$	100
y_2	0	0	$5/4$	1	0	$-53/4$	150

Terminaison

L'optimum du nouveau problème est donc $(50, 0)$: il est conseillé au gérant de concentrer sa production sur les sandwiches pour un bénéfice de cent euros.

Remarque. L'introduction de la nouvelle contrainte a rendu le sommet $(50, 0)$ dégénéré, ce que montre le fait que x_2 soit en base bien qu'elle ait une valeur nulle.

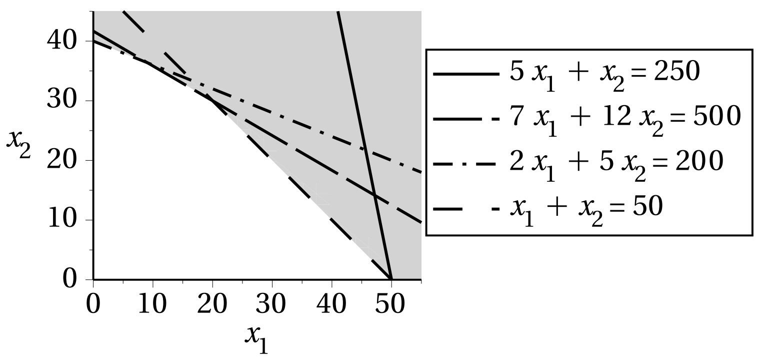


FIGURE 2.1 – Représentation graphique du domaine de (P_1) avec la nouvelle contrainte $x_1 + x_2 \leq 50$

Chapitre 2. Dualité — TD

Exercice 2.1. *On considére le problème d'optimisation linéaire*

$$\begin{cases} \max \quad (x_1 + 2x_2) \\ \qquad -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ \qquad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \qquad x_1\,, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. *Résoudre le problème primal en utilisant la méthode des tableaux.*
2. *Appliquer les théorèmes de dualité et de complémentarité pour en déduire l'optimum du problème dual.*
3. *Utiliser la méthode « primale-duale » pour résoudre le problème*

$$\begin{cases} \max \quad (x_1 + 2x_2) \\ \qquad -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ \qquad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \qquad x_2 \leq 2 \\ \qquad x_1\,, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2.2. *Reprendre le premier problème de l'exercice 1.4 page 26 et vérifier le corollaire page 30 du théorème de dualité faible dans sa version primale.*

Exercice 2.3. *Une compagnie américaine possède deux mines d'or A et B qui produisent de l'or de trois qualités possibles : haute, moyenne et basse. On donne les productions journalières de chaque mine :*

— *la mine A produit une tonne d'or de haute qualité, trois tonnes d'or de qualité moyenne et cinq tonnes d'or de basse qualité ;*

— *la mine B produit deux tonnes d'or de haute qualité, deux tonnes d'or de qualité moyenne et deux tonnes d'or de basse qualité.*

La compagnie a besoin de quatre-vingts tonnes d'or de haute qualité, cent-soixante tonnes d'or de qualité moyenne et deux cents tonnes d'or de basse qualité.

Sachant que le coût journalier de fonctionnement est de deux cents dollars pour chacune des mines, quel est le nombre de jours nécessaires pour atteindre la production souhaitée à un coût minimal ?

1. *Formuler l'énoncé sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire.*
2. (a) *Résoudre le problème dual du problème obtenu dans la question précédente.*
   (b) *De deux manières différentes, en déduire l'optimum du problème primal.*
3. *Montrer que la résolution du problème primal nécessite l'utilisation de la méthode des deux phases puis écrire le problème auxiliaire de la phase I. (On ne demande pas de le résoudre.)*

Exercice 2.4. *Un jardinier californien a besoin de dix unités d'éléments chimiques A, douze unités d'éléments chimiques B et douze unités d'éléments chimiques C pour son jardin. Il a la possibilité d'utiliser deux produits :*

- *un produit liquide à trois dollars le litre qui contient cinq unités de A, deux unités de B et une unité de C par litre ;*
- *un produit solide à deux dollars la boîte qui contient une unité de A, deux unités de B et quatre unités de C par boîte.*

Quelle est la commande la moins onéreuse qui permet au jardinier de pourvoir au besoin du jardin ?

1. *Formuler l'énoncé sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire.*
2. (a) *Résoudre le problème dual du problème obtenu dans la question précédente.*
   (b) *De deux manières différentes, en déduire l'optimum du problème primal.*
3. *Montrer que la résolution du problème primal nécessite l'utilisation de la méthode des deux phases puis écrire le problème auxiliaire de la phase I. (On ne demande pas de le résoudre.)*

Chapitre 3

Optimisation linéaire en nombres entiers

3.1 Définitions

3.1.1 Motivation et définition

Reprenons le cas du problème (P_1). Dans le chapitre 1, nous avons établi que le bénéfice maximal était atteint pour des valeurs non entières du nombre de sandwiches et d'assiettes... ce qui n'a pas le moindre intérêt pour le commerçant !

Le problème mathématique (P_1) est donc mal posé et il faut le modifier en :

$$\begin{cases} \max \quad (2x_1 + x_2) \\ \quad 5x_1 + x_2 \leq 250 \\ \quad 7x_1 + 12x_2 \leq 500 \\ \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ \quad x_1 \,,\ x_2 \boxed{\in \mathbb{N}} \end{cases} \tag{P_1'}$$

Cela amène donc à poser la définition suivante.

Définition 3.1 (Problème linéaire en nombres entiers)**.**

Un problème d'optimisation linéaire (P) est dit **en nombres entiers** si et seulement si il existe deux entiers naturels non nuls m et n, un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$, une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tel que sa forme canonique soit

$$(P) \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (c \mid x) \\ \quad Ax \leq b,\ x \in \mathbb{N}^n \end{cases}$$

3.1.2 Problème relaxé

Définition 3.2 (Problème relaxé)**.** Soit (P) le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}$$

On appelle **problème relaxé de (P)** le problème d'optimisation linéaire $(\overline{P})$ défini par :

$$(\overline{P})\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ x\geq 0\end{cases}$$

Remarque. Le problème est dit « relaxé » car on autorise plus de valeurs pour x.

Sous certaines conditions très spécifiques, la résolution de $(\overline{P})$ suffit pour résoudre (P).

Définition 3.3 (Matrice totalement unimodulaire)**.**

Soit m et n deux entiers naturels non nuls et $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

A est dite **totalement unimodulaire** si et seulement si le déterminant de toute sous-matrice carrée de A est un élément de $\{-1,0,1\}$.

Corollaire (Nature des coefficients)**.**

Soit m et n deux entiers naturels non nuls et $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ une matrice totalement unimodulaire.

Alors $\forall(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!],\ a_{ij}\in\{-1,0,1\}$.

Démonstration. On applique la définition au déterminant de chaque sous-matrice d'ordre un. □

ATTENTION. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ a pour déterminant 2.

Proposition 3.1 (Contraintes totalement unimodulaires)**.**

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, un vecteur $c\in\mathbb{R}^n$, une matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b\in\mathbb{R}^m$.

Si A est totalement unimodulaire et b est à composantes entières, alors tous les sommets de $X=\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\leq b\}$ sont à coordonnées entières.

Corollaire. On considère le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}$$

Si A est totalement unimodulaire et b est à composantes entières, alors tout sommet optimum de $(\overline{P})$ est un optimum de (P).

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition précédente. □

Remarque. Autrement dit, tout optimum issu de la résolution de $(\overline{P})$ par la méthode des tableaux est un optimum de (P).

3.1.3 Partie entière. Partie fractionnaire

Définition 3.4 (Partie entière. Partie fractionnaire)**.**
On définit la **partie entière d'un réel $\boldsymbol{x}$**, notée $\lfloor x \rfloor$, comme le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\} = \max(]-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$$

On définit la **partie fractionnaire d'un réel $\boldsymbol{x}$**, notée $\{x\}$, par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

ATTENTION. $\lfloor 2{,}4 \rfloor = 2$, mais $\lfloor -2{,}4 \rfloor = -3$. Donc $\{2{,}4\} = 0{,}4$ et $\{-2{,}4\} = 0,6$.

Proposition 3.2 (Propriétés de la partie entière)**.** Soit x un nombre réel, alors $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Corollaire (Propriétés de la partie fractionnaire)**.** Soit x un nombre réel, alors $0 \leq \{x\} < 1$.

3.2 Méthode des coupes (GOMORY, 1958 [2])

3.2.1 Description sommaire de la méthode

Soit (P) un problème d'optimisation linéaire mixte.

1. On part d'un optimum du problème relaxé $(\overline{P})$: si celui-ci est admissible dans (P), alors c'est l'optimum cherché.
2. Si il existe une variable de base dont la valeur n'est pas entière :
   — rajouter une contrainte (une « coupe ») construite à partir de ladite variable de base ;
   — résoudre le nouveau problème obtenu et recommencer cette étape.
3. Si toutes les variables sont entières, alors on obtient l'optimum de (P).

3.2.2 Présentation sur le problème (P_1')

Initialisation

À l'issue de la dernière étape de l'algorithme du simplexe appliqué sur le problème relaxé (P_1), on obtenait que :

— $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2500}{53}, \frac{750}{53}\right)$;

— $f(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \frac{5750}{53}$;

— $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(0, 0, \frac{1850}{53}\right)$.

Première coupe

On a $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2500}{53}, \frac{750}{53}\right) \notin \mathbb{N}^2$, donc une coupe est nécessaire. Comme $y_3 = 200 - 2x_1 - 5x_2$, y_3 doit être entier. Considérons la relation exprimant la variable de base y_3 par rapport aux variables hors-base :

$$y_3 + \frac{11}{53} y_1 - \frac{23}{53} y_2 = \frac{1850}{53} \tag{3.1}$$

Alors

$$y_3 + \left\lfloor \frac{11}{53} \right\rfloor \cdot y_1 + \left\lfloor -\frac{23}{53} \right\rfloor \cdot y_2 \leq y_3 + \frac{11}{53} y_1 - \frac{23}{53} y_2 = \frac{1850}{53} \tag{3.2}$$

La condition $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ impose que $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{N}^3$: donc $y_3 + \left\lfloor \frac{11}{53} \right\rfloor \cdot y_1 + \left\lfloor -\frac{23}{53} \right\rfloor \cdot y_2 \in \mathbb{N}$ et l'inégalité (3.2) se ramène dans ce cas à :

$$y_3 + \left\lfloor \frac{11}{53} \right\rfloor \cdot y_1 + \left\lfloor -\frac{23}{53} \right\rfloor \cdot y_2 \leq \left\lfloor \frac{1850}{53} \right\rfloor \tag{3.3}$$

Les deux équations (3.1) et (3.3) sont alors équivalentes aux équations (3.1) et (3.4) :

$$-\left\{ \frac{11}{53} \right\} \cdot y_1 - \left\{ -\frac{23}{53} \right\} \cdot y_2 \leq -\left\{ \frac{1850}{53} \right\} \tag{3.4}$$

cette dernière étant obtenue en soustrayant (3.1) à (3.3) que l'on réécrit $-\frac{11}{53} y_1 - \frac{30}{53} y_2 \leq -\frac{48}{53}$ qui est la nouvelle coupe.

Remarque. On a $-\frac{11}{53} y_1 - \frac{30}{53} y_2 = -\frac{11}{53}(250 - 5x_1 - x_2) - \frac{30}{53}(500 - 7x_1 - 12x_2) = -\frac{17750}{53} + 5x_1 + 7x_2$, donc la nouvelle coupe est la contrainte $5x_1 + 7x_2 \leq \frac{17702}{53} = 334$ et le nouveau simplexe est représenté dans la figure 3.1

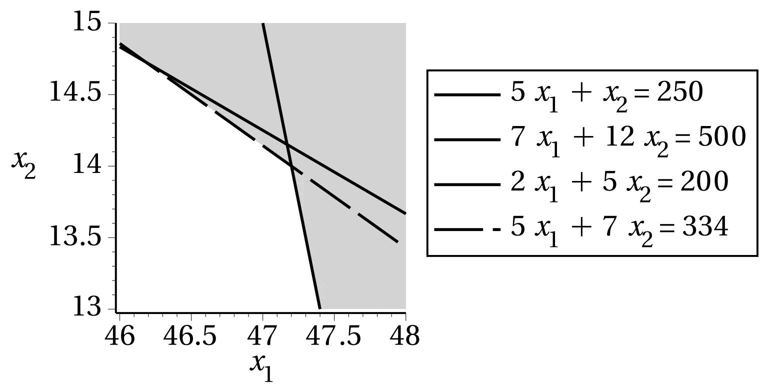


FIGURE 3.1 – Représentation du simplexe après la première coupe (détail)

On résout le problème avec la nouvelle contrainte (3.3) dont on note γ_1 la variable d'écart. Le nouvel optimum est alors :

— $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{236}{5}, 14\right)$;

— $f(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \frac{542}{5}$;

— $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(0, \frac{8}{5}, \frac{178}{5}\right)$.

Les variables hors-base sont y_1 et γ_1.

Deuxième coupe

Une coupe est encore nécessaire et on considère la relation exprimant la variable de base y_3 par rapport aux variables hors-base :

$$y_3+\frac{3}{13}y_1-\frac{1}{52}\gamma_1=\frac{2453}{52}$$

On rajoute donc la contrainte $-\left\{\frac{11}{30}\right\}\cdot y_1-\left\{-\frac{23}{30}\right\}\cdot\gamma_1\leq-\left\{\frac{178}{5}\right\}$, i.e. $-\frac{11}{30}y_1-\frac{7}{30}\gamma_1\leq-\frac{3}{5}$.

Remarque. On a $-\frac{11}{30}y_1-\frac{7}{30}\gamma_1=-\frac{11}{30}(250-5x_1-x_2)-\frac{7}{30}\left(-\frac{48}{53}+\frac{11}{53}y_1+\frac{30}{53}y_2\right)$

$$=-\frac{11}{30}(250-5x_1-x_2)-\frac{7}{30}\left(-\frac{48}{53}+\frac{17750}{53}-5x_1-7x_2\right)$$

$$=-\frac{11}{30}(250-5x_1-x_2)-\frac{7}{30}(334-5x_1-7x_2)=-\frac{5088}{30}+3x_1+2x_2$$

donc la nouvelle coupe est la contrainte $3x_1+2x_2\leq\frac{5070}{30}=169$ et le nouveau simplexe est représenté dans la figure 3.2

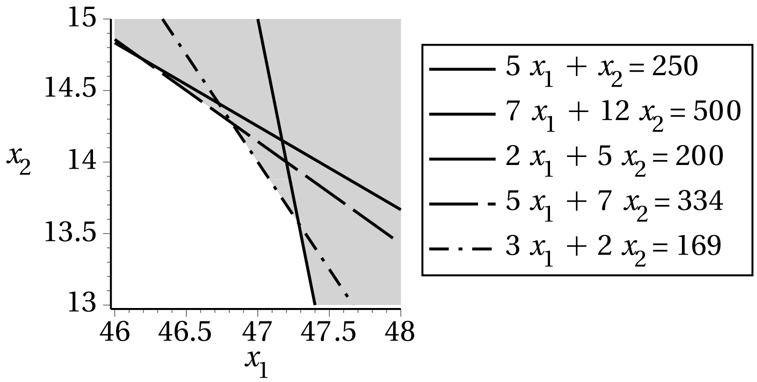


FIGURE 3.2 – Représentation du simplexe après la deuxième coupe (détail)

On résout le problème avec la nouvelle contrainte dont on note γ_2 la variable d'écart. Le nouvel optimum est alors :

— $(x_1^*,x_2^*)=\left(\frac{331}{7},\frac{95}{7}\right)$;

— $f(x_1^*,x_2^*,y_1^*,y_2^*,y_3^*)=\frac{757}{7}$;

— $(y_1^*,y_2^*,y_3^*)=\left(0,\frac{43}{7},\frac{263}{7}\right)$ et $\gamma_1^*=\frac{18}{7}$.

Les variables hors-base sont y_1 et γ_2.

Troisième coupe

Une coupe est encore nécessaire et on considère la relation exprimant la variable de base x_2 par rapport aux variables hors-base :

$$x_2-\frac{3}{7}y_1+\frac{5}{7}\gamma_2=\frac{95}{7}$$

On rajoute alors la contrainte $-\left\{-\frac{3}{7}\right\}\cdot y_1-\left\{\frac{5}{7}\right\}\cdot \gamma_2 \leq -\left\{\frac{95}{7}\right\}$, c'est-à-dire $-\frac{4}{7}y_1-\frac{5}{7}\gamma_2\leq -\frac{4}{7}$.

Remarque. On a $-\frac{4}{7}y_1-\frac{5}{7}\gamma_2=-\frac{4}{7}(250-5x_1-x_2)-\frac{5}{7}(169-3x_1-2x_2)=-\frac{1845}{7}+5x_1+2x_2$, donc la nouvelle coupe est la contrainte $5x_1+2x_2\leq \frac{1841}{7}=263$ et le nouveau simplexe est représenté dans la figure 3.3

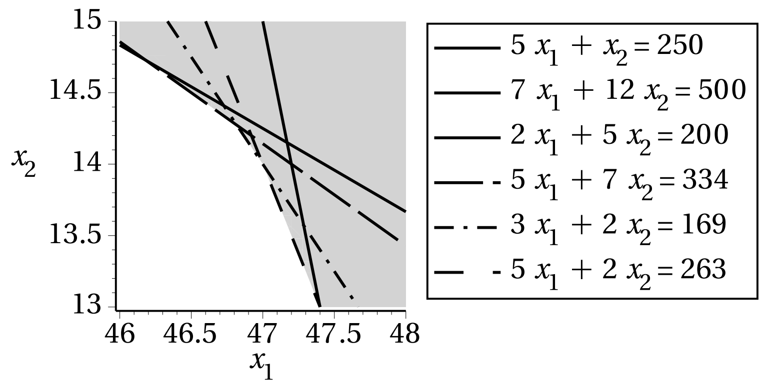


FIGURE 3.3 – Représentation du simplexe après la troisième coupe (détail)

On résout le problème avec la nouvelle contrainte dont on note γ_3 la variable d'écart. Le nouvel optimum est alors :

— $(x_1^*, x_2^*)=(47,14)$;

— $f(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*)=108$;

— $(y_1^*, y_2^*, y_3^*)=(1,3,36)$ et $\gamma_1^*=1$.

Les variables hors-base sont γ_2 et γ_3.

Finalement, le bénéfice maximal est de 108 euros.
Il est atteint pour 47 sandwiches et 14 assiettes.

On sait également qu'il restera 20 grammes de pain, 30 grammes de viande et 360 grammes de crudités.

3.2.3 Disposition pratique de la méthode

Initialisation Le tableau initial de cette méthode est le tableau final de l'algorithme des tableaux appliqué au problème relaxé $(\overline{P})$.

Itération

$$\begin{array}{c|ccc|c|c} & \xi_1 & \cdots & \xi_n & & \\ f & c_1 & \cdots & c_n & Z & (L_0) \\ \hline \vdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 & (L_1) \\ \mathscr{B} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m & (L_m) \end{array}$$

où $\mathscr{B}$ désigne la **base de variables** courante.

si $\exists \ell \in [\![1, m]\!],\ b_\ell \notin \mathbb{N}$ **alors**
  i est choisi dans $\{\ell \in I_0,\ b_\ell \notin \mathbb{N}\}$
  pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $a_{m+1,k} \leftarrow -\{a_{ik}\}$
  fin pour
  $b_{m+1} \leftarrow -\{b_i\}$
  /* *Méthode « primale-duale » : cf. section 2.4 page 32* */
  pour $k \leftarrow 0$ **à** m **faire**
    $a_{k,n+1} \leftarrow 0$
  fin pour
  $a_{m+1,n+1} \leftarrow 1$
  $\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B} \cup \{\gamma\}$
  si $\exists k \in [\![1, n]\!],\ a_{m+1,k} < 0$ **alors**
    $j \leftarrow \operatorname{argmin}\left\{\frac{c_k}{a_{m+1,k}},\ a_{m+1,k} < 0\right\}$
    $\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B} \cup \{\xi_j\} \backslash \{\gamma\}$
    pour $k \leftarrow 0$ **à** $m+1$ **faire**
      si $k = m+1$ **alors**
        $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{ij}} L_i$
      sinon
        $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} L_i$
      fin si
    fin pour
  fin si
fin si

Terminaison Si tous les seconds membres qui devaient être entiers le sont, alors l'optimum trouvé est lu dans le dernier tableau.

IMPORTANT. Si une contrainte a tous ses coefficients entiers et un second membre entier, alors la variable d'écart associée doit également être entière et *constitue ainsi un choix valide de variable de coupe.*

Remarque. Par construction, une coupe ne sera jamais incompatible avec le domaine des contraintes (d'où l'absence du **sinon** correspondant dans l'algorithme).

3.2.4 Application pratique sur le problème (P_1')

Remarque. Tous les coefficients et les seconds membres des contraintes sont entiers, donc toutes les variables d'écart sont des variables de coupe potentielles.

Initialisation

Le tableau final de l'algorithme des tableaux appliqué au problème relaxé (P_1) est

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	$-17/53$	$-3/53$	0	$-5750/53$
x_1	1	0	$12/53$	$-1/53$	0	$2500/53$
x_2	0	1	$-7/53$	$5/53$	0	$750/53$
y_3	0	0	$11/53$	$-23/53$	1	$1850/53$

avec la base de variable $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, y_3\}$.

Première coupe

Choix de i Comme dans la section précédente, on choisit $i = 3$ et le tableau augmenté avec la coupe selon y_3 est

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	γ_1	
f	0	0	$-17/53$	$-3/53$	0	0	$-5750/53$
x_1	1	0	$12/53$	$-1/53$	0	0	$2500/53$
x_2	0	1	$-7/53$	$5/53$	0	0	$750/53$
y_3	0	0	$11/53$	$-23/53$	1	0	$1850/53$
γ_1	0	0	$-11/53$	$-30/53$	0	1	$-48/53$

La base inclut alors la nouvelle variable d'écart γ_1.

Choix de j On a $\min\left\{\dfrac{-17/53}{-11/53}, -\dfrac{-3/53}{-30/53}\right\} = \dfrac{-3/53}{-30/53}$. Donc $j = 4$ et y_2 devient une variable de la base à la place de γ_1.

D'où $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, y_3, y_2\}$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	γ_1	
f	0	0	$-3/10$	0	0	$-1/10$	$-542/5$
x_1	1	0	$7/30$	0	0	$-1/30$	$236/5$
x_2	0	1	$-5/30$	0	0	$5/30$	$70/5$
y_3	0	0	$11/30$	0	1	$-23/30$	$178/5$
y_2	0	0	$11/30$	1	0	$-53/30$	$8/5$

Deuxième coupe

Choix de i Comme dans la section précédente, on choisit $i=3$ et le tableau augmenté avec la coupe selon y_3 est

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-3/10$	0	0	$-1/10$	0	$-542/5$
x_1	1	0	$7/30$	0	0	$-1/30$	0	$236/5$
x_2	0	1	$-5/30$	0	0	$5/30$	0	$70/5$
y_3	0	0	$11/30$	0	1	$-23/30$	0	$178/5$
y_2	0	0	$11/30$	1	0	$-53/30$	0	$8/5$
γ_2	0	0	$-11/30$	0	0	$-7/30$	1	$-3/5$

La base inclut alors la nouvelle variable d'écart γ_2.

Choix de j On a $\min\left\{\dfrac{-3/10}{-11/30}, \dfrac{-1/10}{-7/30}\right\} = \dfrac{-1/10}{-7/30}$. Donc $j=6$ et γ_1 devient une variable de la base à la place de γ_2.

D'où $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, y_3, y_2, \gamma_1\}$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/7$	0	0	0	$-3/7$	$-757/7$
x_1	1	0	$2/7$	0	0	0	$-1/7$	$331/7$
x_2	0	1	$-3/7$	0	0	0	$5/7$	$95/7$
y_3	0	0	$11/7$	0	1	0	$-23/7$	$263/7$
y_2	0	0	$22/7$	1	0	0	$-53/7$	$43/7$
γ_1	0	0	$11/7$	0	0	1	$-30/7$	$18/7$

Troisième coupe

Choix de i Comme dans la section précédente, on choisit $i=2$ et le tableau augmenté avec la coupe selon x_2 est

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	γ_1	γ_2	γ_3	
f	0	0	$-1/7$	0	0	0	$-3/7$	0	$-757/7$
x_1	1	0	$2/7$	0	0	0	$-1/7$	0	$331/7$
x_2	0	1	$-3/7$	0	0	0	$5/7$	0	$95/7$
y_3	0	0	$11/7$	0	1	0	$-23/7$	0	$263/7$
y_2	0	0	$22/7$	1	0	0	$-53/7$	0	$43/7$
γ_1	0	0	$11/7$	0	0	1	$-30/7$	0	$18/7$
γ_3	0	0	$-4/7$	0	0	0	$-5/7$	1	$-4/7$

La base inclut alors la nouvelle variable d'écart γ_3.

Choix de j On a $\min\left\{\frac{-1/7}{-4/7}, \frac{-3/7}{-5/7}\right\} = \frac{-1/7}{-4/7}$. Donc $j=3$ et y_1 devient une variable de la base à la place de γ_3.

D'où $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, y_3, y_2, \gamma_1, y_1\}$ et

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	γ_1	γ_2	γ_3	
f	0	0	0	0	0	0	−1/4	−1/4	−108
x_1	1	0	0	0	0	0	−1/2	1/2	47
x_2	0	1	0	0	0	0	5/4	−3/4	14
y_3	0	0	0	0	1	0	−21/4	11/4	36
y_2	0	0	0	1	0	0	−23/2	11/2	3
γ_1	0	0	0	0	0	1	−25/4	11/4	1
y_1	0	0	1	0	0	0	5/4	−7/4	1

Terminaison

Tous les seconds membres sont entiers, donc l'algorithme s'arrête. On en déduit alors que :

— $x_1^* = b_1 = 47$, $y_2^* = b_2 = 14$;

— $y_1^* = b_6 = 1$, $y_2^* = b_4 = 3$ et $y_3^* = b_3 = 36$;

— $f^* = -Z = 108$

3.2.5 Autre exemple d'application

On considère le problème

$$\begin{cases} \max & (10x_1 + 11x_2) \\ & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1\,, \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Initialisation $\mathscr{B} = \{x_1\}$ et

	x_1	x_2	y_1	
f	0	−1	−1	−59
x_1	1	12/10	1/10	59/10

Itération n° 1 $\mathscr{B} = \{x_1, x_2\}$ et

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	0	−1/2	−5	−109/2
x_1	1	0	−1/2	6	1/2
x_2	0	1	1/2	−5	9/2

Itération n° 2 $\mathscr{B} = \{x_1, x_2, y_1\}$ et

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	−5	−1	−54
x_1	1	0	0	6	−1	1
x_2	0	1	0	−5	1	4
y_1	0	0	1	0	−2	1

Terminaison $(x_1^*, x_2^*) = (1, 4)$, $f^* = 54$ et $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (0, 0, 4)$

IMPORTANT. L'optimum du problème relaxé est $(59/10, 0)$.

Donc *il n'y a aucun lien de proximité entre les deux optima.*

3.2.6 Performance de la méthode

Terminaison

Théorème 3.1 (Terminaison de la méthode des coupes)**.**
La terminaison de la méthode des coupes est assurée à condition de choisir à chaque itération la variable de coupe de plus grande partie fractionnaire.

Remarque. C'est le choix qui a été systématiquement fait dans l'exemple précédent.

Complexité

Même si une itération de la méthode de coupes est de complexité relativement réduite, cette méthode est de complexité exponentielle en terme d'itérations.
Il s'agit donc d'une méthode peu performante en général.

3.3 Séparation et évaluation (« branch-and-bound »)

On rappelle quelques principes déjà vus lors de la méthode des coupes :

— *si un problème relaxé a un optimum entier, alors c'est un optimum du problème en nombres entiers associé ;*

— *un problème relaxé est plus facile à résoudre qu'un problème en nombres entiers (cf. théorie de la complexité) ;*

— *tout sous-problème d'un problème de maximisation a une valeur plus petite que le problème initial.*

Soit $(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\le b,\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}$ un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers et $\overline{x}$ l'optimum du problème relaxé $(\overline{P})$ de (P).

3.3.1 Séparation

Principe général

Il s'agit de séparer le problème (P) en plusieurs sous-problèmes $(P_1),\dots,(P_q)$:

$$(P_1)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & A_1x\le b_1,\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}\quad,\quad(P_2)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & A_2x\le b_2,\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}\quad,\quad\cdots\quad,\quad(P_q)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & A_qx\le b_q,\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}$$

de manière à ce que :

1. la réunion des ensembles des contraintes des problèmes relaxés de (P_1), …, (P_q) soit strictement contenu dans l'ensemble des contraintes du problème relaxé de (P) :
$$\bigcup_{i=1}^{q}\{x\in\mathbb{R}^n,\ A_ix\le b_i,\ x\ge 0\}\subsetneq\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\le b,\ x\ge 0\}$$
2. la réunion des ensembles des contraintes des problèmes (P_1), …, (P_q) soit strictement contenu dans l'ensemble des contraintes de (P) :
$$\bigcup_{i=1}^{q}\{x\in\mathbb{R}^n,\ A_ix\le b_i,\ x\in\mathbb{N}^n\}=\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\le b,\ x\in\mathbb{N}^n\}$$

Ainsi :

— la condition 1 assure que le domaine de recherche se réduit strictement à chaque séparation ;

— la condition 2 assure qu'aucun point à coordonnées entières n'est exclu lors d'une séparation.

En réappliquant la séparation sur chaque sous-problème, on construit alors une arborescence de sous-problèmes issus de (P).

IMPORTANT. Il est inutile d'effectuer une séparation lorsque :

— l'ensemble des contraintes de $(\overline{P})$ est vide : en effet, $(\overline{P})$ — et donc (P) — n'a pas d'optimum ;

— l'optimum $\overline{x}$ de $(\overline{P})$ est à coordonnées entières : en effet, $\overline{x}$ est alors un optimum de (P).

Séparation usuelle

On choisit une coordonnée non entière $\overline{x_i}$ de $\overline{x}$, optimum du problème relaxé de (P), puis on construit les sous-problèmes (P^-) et (P^+) définis par :

$$(P^-)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ \boxed{x\leq\lfloor\overline{x_i}\rfloor},\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}\qquad \text{et} \qquad (P^+)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ \boxed{x\geq\lfloor\overline{x_i}\rfloor+1},\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}$$

Cette séparation vérifie bien les conditions énoncées plus haut.

Remarque. (P^-) et (P^+) sont obtenus par simple ajout d'une contrainte à (P).

Il est donc possible (et conseillé) de résoudre leurs versions relaxées grâce à la méthode « primale-duale » présentée dans la section 2.4 page 32.

Si $\overline{x}$ admet au moins deux coordonnées non entières, la séparation n'est pas explicitée dans un tel cas :

Règle du plus grand éloignement d'un entier On choisit l'indice i tel que $|\{\overline{x_i}\}-0{,}5|$ soit minimal.

Règle aléatoire On choisit aléatoirement l'indice i parmi les les indices de coordonnées non entières.

3.3.2 Évaluation

Exemple introductif

Considérons le problème $(P)\begin{cases}\max & (3x_1+5x_2)\\ & x_1+2x_2\leq 3\\ & 6x_1+8x_2\leq 15\\ & x_1\ ,\quad x_2\in\mathbb{N}\end{cases}$ et $f:(x_1,x_2)\mapsto 3x_1+5x_2$.

L'optimum de son problème relaxé est $\overline{x}=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4}\right)$ et $f(\overline{x})=\dfrac{33}{4}=8{,}25$.

Effectuons une séparation basée sur la première coordonnée. On obtient alors les deux sous-problèmes :

$$(P^-)\begin{cases}\max & (3x_1+5x_2)\\ & x_1+2x_2\leq 3\\ & 6x_1+8x_2\leq 15\\ & x_1\leq 1\\ & x_1\ ,\quad x_2\in\mathbb{N}\end{cases}\qquad \text{et} \qquad (P^+)\begin{cases}\max & (3x_1+5x_2)\\ & x_1+2x_2\leq 3\\ & 6x_1+8x_2\leq 15\\ & x_1\geq 2\\ & x_1\ ,\quad x_2\in\mathbb{N}\end{cases}$$

On résout les problèmes relaxés de ces deux sous-problèmes :

- l'optimum du problème relaxé de (P^-) est $\overline{x^-}=(1,1)$ et $f\left(\overline{x^-}\right)=8$;
- l'optimum du problème relaxé de (P^+) est $\overline{x^+}=\left(2,\dfrac{3}{8}\right)$ et $f\left(\overline{x^+}\right)=\dfrac{63}{8}=7{,}875$.

Donc tout sous-problème issu d'une ou plusieurs séparations successives de (P^+) aura un optimum x telle que $f(x)<f\left(\overline{x^+}\right)=7{,}875$ et donc $f(x)<f\left(\overline{x^-}\right)=8$. On en déduit qu'il est inutile de considérer ces optima car $\overline{x^-}$ est à coordonnées entières et constitue un meilleur candidat.

Remarque. Comme il n'y a pas d'autre possibilités, il vient que $\overline{x^-}=(1,1)$ est un optimum de (P).

Formulation

Il s'agit ici d'ajouter une condition d'arrêt à la séparation d'un problème[1] :

> *Il est inutile de séparer (P) si l'optimum $\overline{x}$ de son problème relaxé a une valeur moindre que celle du meilleur candidat entier déjà trouvé.*

3.3.3 Algorithme

Soit $(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b,\ x\in\mathbb{N}^n\end{cases}$ un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.

1 **Entrées :** (P)
2 **Sortie :** x^* (vecteur de $\mathbb{R}^n$)
3 $f^* \leftarrow -\infty$
4 $\mathscr{P} \leftarrow \{(P)\}$
5 **tant que** $\mathscr{P} \neq \varnothing$ **faire**
6   (P^c) est choisi dans $\mathscr{P}$
7   **si** l'ensemble des contraintes du problème relaxé de (P^c) n'est pas vide **alors**
8     $x^c \leftarrow$ optimum de (P^c)
9     $f^c \leftarrow f(x^c)$
10   /* *Évaluation : si $f^c \leq f^*$, on n'effectue pas de séparation* */
11   **si** $f^c > f^*$ **alors**
12   **si** $x^c \in \mathbb{N}^n$ **alors**
13         $x^* \leftarrow x^c$
14         $f^* \leftarrow f^c$
15   **sinon**
16         $\mathscr{P} \leftarrow \mathscr{P} \cup \{(P^{c,-}),(P^{c,+})\}$ /* *Séparation de (P^c)* */
17   **fin si** /* $x^c \in \mathbb{N}^n$ */
18   **fin si** /* $f^c > f^*$ */
19   **fin si** /* $A \neq \varnothing$ */
20   $\mathscr{P} \leftarrow \mathscr{P} \setminus \{(P^c)\}$
21 **fin tant que**

Algorithme 2: Méthode de séparation et évaluation

Reprenons la ligne 6 de l'algorithme 2 dans le cas où $\mathscr{P}$ contient au moins deux éléments : le choix de (P^c) n'est pas explicité dans un tel cas.

Règle en profondeur d'abord On choisit le problème ayant la profondeur la plus élevée dans l'arborescence de séparation.

Règle en valeur d'abord On choisit le problème dont l'optimum du problème relaxé a la valeur la plus élevée.

ATTENTION. Que ce soit pour le choix de la variable de séparation ou du problème à traiter, *il n'y pas de règle universelle*. Tout dépend du type de problème considéré...

1. On rappelle celles citées page 49 : ensemble de contraintes relaxées vide ou optimum relaxé entier.

3.3.4 Exemple complet

On reprend le problème $(P)\begin{cases}\max & (2x_1 + x_2) \\ & 5x_1 + x_2 \leq 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ & x_1\ , x_2 \in \mathbb{N}\end{cases}$ et on note $f : (x_1, x_2) \mapsto 2x_1 + x_2$.

On utilise les règles suivantes :

— *choix de la variable de séparation* : règle du plus grand éloignement d'un entier;

— *choix du problème à traiter* : règle en valeur d'abord

Initialisation

Initialement, on n'a pas de meilleur candidat entier : donc la meilleure valeur obtenue est $-\infty$.
L'optimum du problème relaxé de (P) est $\overline{x^0} \simeq (47{,}17; 14{,}15)$ avec $f(\overline{x}) \simeq 108{,}49$.

$\mathscr{P} = \{(P)\}$: traitement de (P)

Comme $\overline{x} \notin \mathbb{N}^2$, on effectue une séparation selon la première composante :

$$(P^1)\begin{cases}\max & (2x_1 + x_2) \\ & 5x_1 + x_2 \leq 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ & x_1 \leq 47 \\ & x_1\ , x_2 \in \mathbb{N}\end{cases} \quad , \quad (P^2)\begin{cases}\max & (2x_1 + x_2) \\ & 5x_1 + x_2 \leq 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ & x_1 \geq 48 \\ & x_1\ , x_2 \in \mathbb{N}\end{cases}$$

L'optimum du problème relaxé de (P^1) est $\overline{x^1} = (47; 14{,}25)$ avec $f\left(\overline{x^1}\right) = 108{,}25$.
L'optimum du problème relaxé de (P^2) est $\overline{x^2} = (48; 10)$ avec $f\left(\overline{x^2}\right) = 106$.

$\mathscr{P} = \{(P^1), (P^2)\}$: traitement de (P^1)

Comme $\overline{x^1} \notin \mathbb{N}^2$, on effectue une séparation selon la seconde composante :

$$(P^{11})\begin{cases}\max & (2x_1 + x_2) \\ & 5x_1 + x_2 \leq 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ & x_1 \leq 47 \\ & x_2 \leq 14 \\ & x_1\ , x_2 \in \mathbb{N}\end{cases} \quad , \quad (P^{12})\begin{cases}\max & (2x_1 + x_2) \\ & 5x_1 + x_2 \leq 250 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 500 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ & x_1 \leq 47 \\ & x_2 \geq 15 \\ & x_1\ , x_2 \in \mathbb{N}\end{cases}$$

L'optimum du problème relaxé de (P^{11}) est $\overline{x^{11}} = (47; 14)$ avec $f\left(\overline{x^{11}}\right) = 108$.
L'optimum du problème relaxé de (P^{12}) est $\overline{x^{12}} \simeq (45{,}71; 15)$ avec $f\left(\overline{x^{12}}\right) \simeq 106{,}43$.

$\mathscr{P} = \{(P^{11}), (P^{12}), (P^2)\}$: traitement de (P^{11})

Comme $\overline{x^{11}} \in \mathbb{N}^2$, c'est le meilleur candidat entier et on n'effectue pas de séparation.

$\mathscr{P} = \{(P^{12}), (P^2)\}$: traitement de (P_{12})

Comme $f\left(\overline{x^{12}}\right) < f\left(\overline{x^{11}}\right)$, on n'effectue pas de séparation.

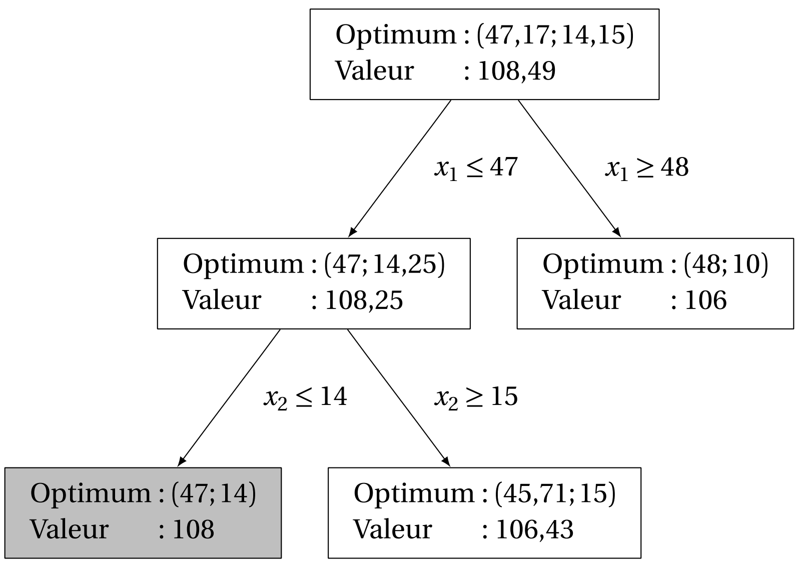
$\mathscr{P} = \{(P^2)\}$: traitement de (P_2)

Comme $f\left(\overline{x^{2}}\right) < f\left(\overline{x^{11}}\right)$, on n'effectue pas de séparation.

$\mathscr{P} = \varnothing$: terminaison

L'optimum de (P) est donc $\overline{x^{11}} = (47; 14)$.

Le déroulement de l'algorithme peut être représenté par l'arborescence suivante :



3.4 « Branch-and-Cut »

3.4.1 Retour sur la méthode des coupes

En reprenant le formalisme utilisé auparavant, une itération de la méthode des coupes (cf. section 3.2 page 40) peut être vue comme une séparation en un seul sous-problème.

L'avantage d'une telle stratégie est de laisser constant le nombre de problèmes à traiter, ce qui n'est pas le cas lors d'une séparation usuelle.

L'utilisation exclusive de cette stratégie de séparation est équivalente à la méthode des coupes. On a pu constater sur des exemples même simple que l'application de cette méthode peut engendrer un si grand nombre de coupes qu'il est préférable d'utiliser exclusivement la séparation usuelle.

3.4.2 Principe

La méthode « branch-and-cut » est un algorithme de « branch-and-bound » où l'étape de séparation (cf. ligne 16 de l'algorithme 2 page 51) est soit une séparation usuelle, soit une itération de la méthode des coupes.

Cela permet éventuellement de faire diminuer la valeur de l'optimum relaxé au point de finalement ne pas avoir à effectuer une séparation usuelle.

3.4.3 Exemple d'application

On considère $(P)\left\{\begin{array}{lrcl} \max & (6x_1+5x_2) & & \\ & 3x_1+\ \ x_2 & \leq & 11 \\ & -x_1+2x_2 & \leq & 5 \\ & x_1\ ,\quad x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$ et on note $f:(x_1,x_2)\mapsto 6x_1+5x_2$.

On utilise les règles suivantes :

— *choix de la variable de séparation* : règle du plus grand éloignement d'un entier ;

— *choix du problème à traiter* : règle en valeur d'abord

Initialisation

L'optimum du problème relaxé de (P) est $\overline{x}\simeq(2{,}43;3{,}71)$ avec $f(\overline{x})\simeq 33{,}14$.

$\mathscr{P}=\{(P)\}$: traitement de (P)

Comme $\overline{x}\notin\mathbb{N}^2$, on effectue alors une séparation usuelle selon la première composante :

$$(P^1)\left\{\begin{array}{lrcl} \max & (6x_1+5x_2) & & \\ & 3x_1+\ \ x_2 & \leq & 11 \\ & -x_1+2x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 \quad\quad & \leq & 2 \\ & x_1\ ,\quad x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right. \quad , \quad (P^2)\left\{\begin{array}{lrcl} \max & (6x_1+5x_2) & & \\ & 3x_1+\ \ x_2 & \leq & 11 \\ & -x_1+2x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 \quad\quad & \geq & 3 \\ & x_1\ ,\quad x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

L'optimum du problème relaxé de (P^1) est $\overline{x^1}=(2;3{,}5)$ avec $f\left(\overline{x^1}\right)=29{,}5$.
L'optimum du problème relaxé de (P^2) est $\overline{x^2}=(3;2)$ avec $f\left(\overline{x^2}\right)=28$.

$\mathscr{P}=\{(P^1),(P^2)\}$: traitement de (P^1)

On effectue une itération de la méthode des coupes.

Le tableau final de la résolution du probleme relaxé de (P^1) est

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	0	$-5/2$	$-17/2$	$-59/2$
x_1	1	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	$1/2$	$1/2$	$7/2$
y_3	0	0	1	$-1/2$	$-7/2$	$3/2$

.

La coupe obtenue est $\frac{-1}{2}y_2+\frac{-1}{2}y_3\leq\frac{-1}{2}$, soit $x_2\leq 3$.

L'optimum du nouveau problème (P^1_{cut}) est $\overline{x^1_{\text{cut}}}=(2,3)$ avec $f\left(\overline{x^1_{\text{cut}}}\right)=27$.

$\mathscr{P} = \{(P^1_{\text{cut}}), (P^2)\}$ **: traitement de** (P^2)

Comme $\overline{x^2} \in \mathbb{N}^2$, c'est le meilleur candidat entier et on n'effectue pas de séparation.

$\mathscr{P} = \{(P^1_{\text{cut}})\}$ **: traitement de** (P^1_{cut})

Comme $f\left(\overline{x^1_{\text{cut}}}\right) < f\left(\overline{x^2}\right)$, on n'effectue pas de séparation.

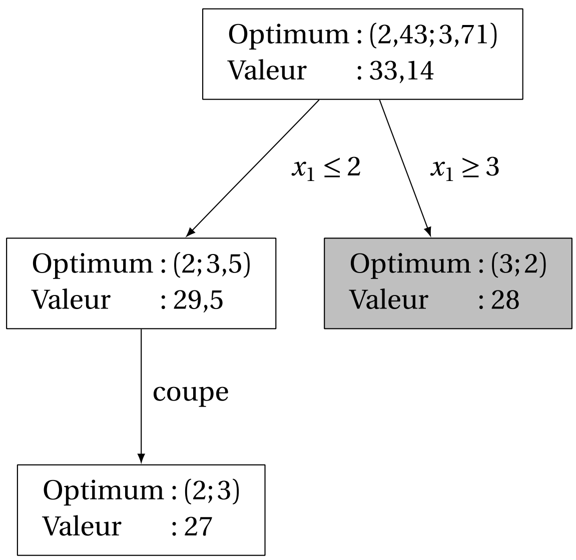
$\mathscr{P} = \varnothing$ **: terminaison**

L'optimum de (P) est donc $\overline{x^2} = (3;2)$.

Remarque. Si l'on applique la méthode de séparation et évaluation, on doit appliquer une séparation usuelle lors du traitement de (P^1) et donc traiter ultérieurement un problème de plus.

Comme $f\left(\overline{x^1_{\text{cut}}}\right) < f(\overline{x_2})$, l'ajout de la nouvelle coupe a permis d'éviter la séparation usuelle.

Le déroulement de l'algorithme peut être représenté par l'arborescence suivante :



Chapitre 3. Optimisation linéaire en nombres entiers — TD

Exercice 3.1. *Résoudre les problèmes d'optimisation linéaire en nombres entiers suivants en utilisant la méthode des coupes :*

$$
(a)\left\{\begin{array}{rl}
\max & (x_1 + 2x_2) \\
& -3x_1 + 2x_2 \leq \ \ 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq \ \ 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& x_1\,, \quad x_2 \in \ \mathbb{N}
\end{array}\right.
\qquad
(b)\left\{\begin{array}{rl}
\max & (17x_1 + 12x_2) \\
& 10x_1 + \ 7x_2 \leq 40 \\
& x_1 + \quad x_2 \leq \ \ 5 \\
& x_1\,, \quad x_2 \in \ \mathbb{N}
\end{array}\right.
$$

Exercice 3.2. *Reprendre l'exercice précédent en utilisant la méthode de séparation et évaluation.*

Chapitre 4

Applications usuelles de l'optimisation linéaire

4.1 Couverture minimale de sommets

« Comment couvrir les arêtes d'un graphe avec le moins de sommets possibles ? »

Exemple. Couverture de caméras

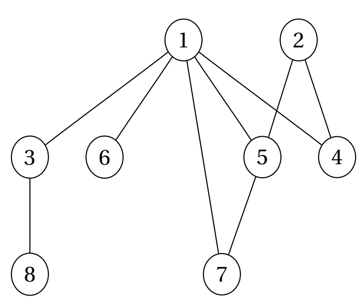
Définition 4.1 (Couverture de sommets)**.**
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté et C une partie de S.
On dit que C est une **couverture de sommets de *G*** si et seulement si toute arête de A est incident à un sommet de C.
On dit que C est une **couverture minimale de sommets de *G*** si et seulement si elle est une couverture de sommets de G de cardinal minimal.

Proposition 4.1 (Couverture triviale)**.** Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.
Alors S est une couverture de sommets de G.

Démonstration. Toute arête est par construction incidente à un élément de S. □

Remarque. Il peut exister plusieurs couvertures minimales pour un même graphe.

Exemple. Considérons le graphe $G = (\llbracket 1, 8 \rrbracket, A)$ suivant :



— $C = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ est une couverture de sommets de G, d'après la proposition 4.1.

— $C = \{1,3,4,5,7\}$ est également une couverture de sommets de G, mais elle n'est pas minimale.
— $C = \{1,3,4,5\}$ et $C = \{1,2,7,8\}$ sont deux couvertures minimales de sommets.

4.1.1 Modélisation

Données

On note $\boldsymbol{n} = \operatorname{card} S$ le nombre de sommets du graphe G et $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Variables

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\boldsymbol{x_i}$ la variable indiquant si le sommet s_i appartient à la couverture :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } s_i \text{ appartient à la couverture} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction objectif

Il s'agit de minimiser le nombre de sommets appartenant à la couverture, autrement dit $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i}$.

Contraintes

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si l'arête entre les sommets s_i et s_j existe, au moins un des deux sommets doit appartenir à la couverture, i.e. $x_i = 1$ ou $x_j = 1$.

Comme x_i et x_j sont des éléments de $\{0,1\}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on peut reformuler cette condition en $\boldsymbol{x_i + x_j \geq 1}$.

4.1.2 Formulation du problème

On obtient donc le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \min \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } s_i s_j \in A,\ x_i + x_j \geq 1 \\ \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \in \{0,1\} \end{cases} \iff (\mathrm{CS}) \begin{cases} \min \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } s_i s_j \in A,\ x_i + x_j \geq 1 \\ \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \leq 1 \\ \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.1.3 Analyse du problème

Théorème 4.1 (KARP, 1972)**.**
Le problème de couverture minimale de sommets est un problème NP-complet.

Proposition 4.2. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

La couverture obtenue en arrondissant l'optimum du problème relaxé $(\overline{\text{CS}})$ a au plus le double de sommets d'une couverture minimale de G.

Cette proposition fournit donc un algorithme approché de complexité polynomial :

1. résoudre le problème relaxé $(\overline{\text{CS}})$;
2. arrondir l'optimum obtenu.

4.2 Problème d'affectation

« Comment affecter des tâches à des agents (une tâche par agent et un agent par tâche) en minimisation les coûts d'affectations ? »

4.2.1 Modélisation

Données

On note $\boldsymbol{n}$ le nombre de tâches (et donc d'agents).
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\boldsymbol{c_{ij}}$ le coût d'affectation de la tâche j à l'agent i.

Variables

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\boldsymbol{x_{ij}}$ la variable indiquant si la tâche j est affectée à l'agent i, i.e. :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tâche } j \text{ est affectée à l'agent } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction objectif

Le coût final d'affectation de la tâche j à l'agent i est :

- c_{ij} si la tâche j est effectivement affectée à l'agent i ;
- 0 dans le cas contraire.

Autrement dit, ce coût final d'affectation vaut $c_{ij} x_{ij}$.

Le coût total est alors la somme de tous les coûts d'affectation possibles, i.e. $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}}$.

Contraintes

- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la tâche j n'est affectée qu'à un seul agent : $\exists! i \in [\![1, n]\!],\ x_{ij} = 1$.
  Comme $x_{ij} \in \{0, 1\}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on peut reformuler cette condition en $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1}$.
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'agent i n'est affecté qu'à une seule tâche : $\exists! j \in [\![1, n]\!],\ x_{ij} = 1$.
  Comme $x_{ij} \in \{0, 1\}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on peut reformuler cette condition en $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1}$.

4.2.2 Formulation du problème

On obtient donc le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ & \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \forall j \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases} \iff (\text{Aff}) \begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ & \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \forall j \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ x_{ij} \leq 1 \\ & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ x_{ij} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.2.3 Analyse du problème

Proposition 4.3. La matrice des contraintes du problème (Aff) est totalement unimodulaire.

Corollaire (MUNKRES, 1957)**.** Le problème d'affectation est polynomial.

Démonstration. D'après la proposition précédente, la résolution du problème relaxé ($\overline{\text{Aff}}$) (de complexité polynomiale) fournit un optimum du problème (Aff). □

Donc on peut résoudre un tel problème en appliquant la méthode des tableaux couplée avec la méthode des deux phases (car l'affectation nulle, i.e. l'absence d'affectation, n'est pas admissible).

L'optimum obtenu est l'optimum cherché.

Remarque. On rappelle l'existence de la méthode « hongroise » (KUHN, 1955) qui s'appuie notamment sur la notion de dualité.

4.3 Recherche de flot maximal

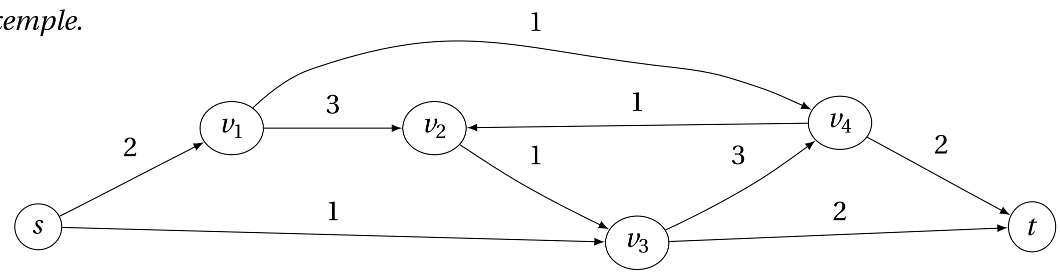
« Quel débit maximal peut-on faire circuler dans un réseau de transport ? »

Définition 4.2 (Réseau de transport)**.** Soit $G = (S, A, c)$ un graphe orienté valué

On dit que G est un **réseau de transport** si et seulement si

- — G admet un unique sommet source s ;
- — G admet un unique sommet puits t ;
- — il existe un chemin entre s et t ;
- — pour tout arc de A, son opposé n'existe pas.

Exemple.



Définition 4.3 (Flot)**.** Soit $G = (S, A, c)$ un réseau de transport de source s et puits t.

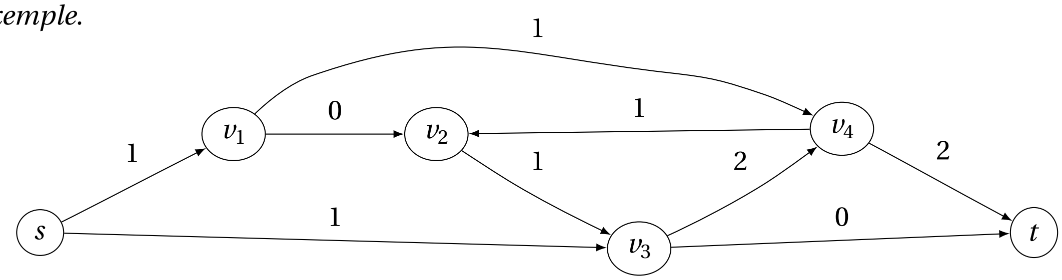
Une valuation $w : A \mapsto \mathbb{R}$ sur les arcs est un **flot sur G** si et seulement si :

- pour tout arc a de A, $0 \leq w(a) \leq c(a)$;
- la « loi des nœuds » est respectée pour tout sommet autre que s et t.

La **valeur de w** est la somme des valuations des arcs sortant de la source s.

w est **un flot maximal** si et seulement si il est un flot de valeur maximale.

Exemple.



La valeur de ce flot est 2.

4.3.1 Modélisation

Données

On note $\boldsymbol{n} = \operatorname{card} S$ le nombre de sommets du réseau de transport G et $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ de sorte que s_1 soit la source et s_n le puits.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\boldsymbol{c_{ij}}$ la capacité de l'arc du sommet s_i vers le sommet s_j : si l'arc n'existe pas, on note $c_{ij} = 0$.

Variables

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\boldsymbol{w_{ij}}$ la valeur du flot sur l'arc du sommet s_i vers le sommet s_j.

Fonction objectif

La valeur du flot est la somme des valeurs des arcs partant du sommet s_1, c'est-à-dire des quantités w_{ij} lorsque $i = 1$.

Il s'agit donc de maximiser $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{j=2}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w_{1j}}$.

Contraintes

- Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la valeur w_{ij} est positive et ne dépasse pas la capacité correspondante :

$$\mathbf{0 \leq w_{ij} \leq c_{ij}}$$

- Pour tout $k \in [\![2,n-1]\!]$, la somme des valeurs pour les arcs arrivant au sommet s_k est égale à la somme des valeurs pour les arcs partant du sommet s_k : $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} w_{ik} = \sum_{j=1}^{n} w_{kj}}$

4.3.2 Formulation du problème

On obtient donc le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$(\text{FM}) \begin{cases} \max \quad \displaystyle\sum_{j=2}^{n} w_{1j} \\ \qquad \forall k \in [\![2,n-1]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_{ik} - \sum_{j=1}^{n} w_{kj} = 0 \\ \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \, 0 \leq w_{ij} \leq c_{ij} \end{cases}$$

4.3.3 Analyse du problème

Proposition 4.4. La matrice des contraintes du problème (FM) est totalement unimodulaire.

Corollaire (Réseau de transport à capacités entières)**.** Si toutes les capacités c_{ij} sont entières, alors il existe un flot maximal à valeurs entières.

De plus, la recherche de flot maximal à valeurs entières est un problème polynomial.

Démonstration. D'après la proposition précédente, la résolution du problème (FM) (de complexité polynomiale) fournit un optimum entier. □

Chapitre 4. Applications usuelles de l'optimisation linéaire — TD

Exercice 4.1 (Problèmes de séparabilité)**.**

1. *« Étant donné deux nuages de points dans le plan, existe-t-il une droite séparant ces deux ensembles de points ? Le cas échéant, quelle droite assure la meilleure séparabilité ? »*
   Exprimer ce problème sous forme d'un problème d'optimisation linéaire.
2. *Reprendre la question précédente :*
   (a) *si on considère deux nuages de points dans l'espace et la séparation par un plan.*
   Peut-on généraliser aux dimensions supérieures ?
   (b) *si on considère la séparation avec une parabole.*

Exercice 4.2. *On cherche à montrer la proposition* *4.2 page 59**.*

On considère le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers (CS) *pour la couverture minimale de sommets.*

1. *Montrer qu'il existe des graphes pour lesquels l'optimum du problème relaxé* $(\overline{\text{CS}})$ *n'est pas entier.*
   (On pourra considérer le graphe complet à trois sommets K_3 *et vérifier l'optimum par dualité.)*
2. *On note* $\overline{x}$ *l'optimum du problème relaxé* $(\overline{\text{CS}})$.
   (a) *Montrer que la configuration obtenue en arrondissant* $\overline{x}$ *est admissible pour le problème* (CS) *: on notera* x^{arr} *cette nouvelle configuration.*
   (b) *Montrer que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{arr} \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i$.
   (c) *Conclure.*

Bibliographie

[1] Stefan BALEV. L'algorithme du simplexe appliqué à un exemple. `http://litis.univ-lehavre.fr/~balev/Teaching/OR/simplex.pdf`.

[2] Ralph E. GOMORY. Outline of an algorithm for integer solutions to linear problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(5) :275–278, Septembre 1958.

[3] George J. KLEE, Victor MINTY. How good is the simplex algorithm? In Oved SHISHA, editor, *Proceedings of the Third Symposium on Inequalities (Sept. 1-9, 1969)*, pages 159–175, New York, 1972. University of California, Los Angeles, Academic Press.

[4] Marietta MANOLESSOU. Optimisation linéaire. Technical report, EISTI, 2012-2013. Notes de cours ING1.

[5] Jean-François SCHEID. Dualité en programmation linéaire. `http://iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/Enseignement/PL4.pdf`.

[6] Jacques TEGHEM. *Recherche opérationnelle – Tome 1 : Méthodes d'optimisation*. Références Sciences. Ellipses, Paris, Septembre 2012.

[7] Robert J. VANDERBEI. *Linear Programming – Foundations and extensions*, volume 196 of *International Series in Operations Research and Management Science*. Springer, New York, fourth edition, 2014.