Ex. 1 (1/2)

$a > 0$. $X \sim T(a)$

$$f_X(x) = \frac{1}{a^2}(a - |x|)\, \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a-x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{a^2}(a+x) & \text{si } -a \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x \notin [-a,a] \end{cases}$$

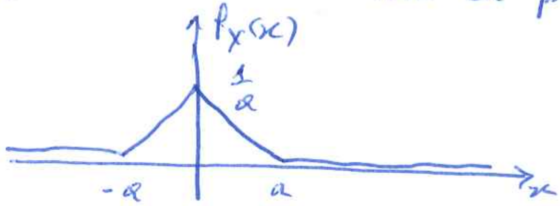
1) (1) $f_X \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (car $f_X(x) \geq 0$ si $x \in [-a,a]$ et $f_X(x) = 0$ sinon)

(2) $f_X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f_X(x)\,dx = 2\int_0^a f_X(x)\,dx$ car f_X est paire sur $[-a,a]$

$= 2\int_0^a \frac{1}{a^2}(a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow f_X$ est bien une fonction de densité de proba.



2) f_X est paire sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow x \longmapsto x f_X(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-a,a]$

• $\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-a}^{a} x f_X(x)\,dx = 0$ $\boxed{E(X) = 0}$

• $x \longmapsto x^2 f_X(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-a,a]$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-a}^{a} x^2 f_X(x)\,dx = 2\int_0^a \frac{x^2}{a^2}(a-x)\,dx$

$= \frac{2}{a^2}\int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right)$

$\boxed{E(X^2) = \frac{a^2}{6}}$

Ex. 1 (2/2)

X admet un moment d'ordre 2, donc une variance

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{a^2}{6}}$$

3) $P(2|X| \geq a) = P(|X| > \frac{a}{2}) = 1 - P(|X| \leq \frac{a}{2})$

$P(|X| \leq \frac{a}{2}) = P(-\frac{a}{2} \leq X \leq \frac{a}{2}) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f_X(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f_X(x)\,dx$ (f_X paire sur $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$)

$= 2\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a^2}(a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8}\right) = 1 - \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{P(2|X| \geq a) = \frac{1}{4}}$$

4) $a = 1 \Rightarrow X \sim T(1) \Rightarrow f_X(x) = (1 - |x|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

$Y = \sqrt{|X|} \Rightarrow Y \hookrightarrow [0, +\infty[$ $\quad (Y(\Omega) \subset [0, +\infty[)$

a) Fonction de répartition de Y. Soit $y \in \mathbb{R}$:

- si $y < 0$ alors ~~P(Y<~~ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\emptyset) = 0$
- si $0 \leq y$ alors $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{|X|} \leq y) = P(|X| \leq y^2)$

$= P(-y^2 \leq X \leq y^2) = \int_{-y^2}^{y^2} f_X(x)\,dx$

- si $0 \leq y \leq 1$ alors $F_Y(y) = 2\int_0^{y^2} (1-x)\,dx = \ldots = 2y^2 - y^4$
- si $1 < y$ alors $F_Y(y) = \int_{-1}^{1} f_X(x) = 1$

Résumé
$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2y^2 - y^4 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < y \end{cases}}$$

b) $F_Y \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow Y$ est une v.a.r. continue. comme F_Y est $\mathcal{C}^1$ ici sur $\mathbb{R}$ ~~(presque partout)~~ p.p.

Y est une v.a.r.a.c.. f_Y est obtenue en dérivant F_Y.

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 4(y - y^3) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < y \end{cases}}$$

Ex. 2 (1/1)

$X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(2, 2^2)$

Notons F_X la f.r. de X

Φ la f.r. associée à $N(0,1)$

1) $P(X \geq 4.5) = 1 - P(X \leq 4.5) = 1 - F_X(4.5) = 1 - \Phi\left(\frac{4.5-2}{2}\right)$

$= 1 - \Phi(1.25) \simeq 1 - 0.8944$

$$\boxed{P(X \geq 4.5) \simeq 0.1056}$$

2) $P(1 \leq X \leq 4.5) = F_X(4.5) - F_X(1) = \Phi\left(\frac{4.5-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{2}\right)$

$= \Phi(1.25) - \Phi(-0.5) = \Phi(1.25) - 1 + \Phi(0.5)$

$\simeq \cancel{0.8944} - 0.1056 + 0.6915 = 0.5859$

$$\boxed{P(1 \leq X \leq 4.5) \simeq 0.5859}$$

3) $t = ?$ tq $P(X \geq t) = 0.33$

$P(X \geq t) = 1 - F_X(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-2}{2}\right)$

donc $P(X \geq t) = 0.33 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{t-2}{2}\right) = 0.33 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{t-2}{2}\right) = 0.67 \Leftrightarrow$

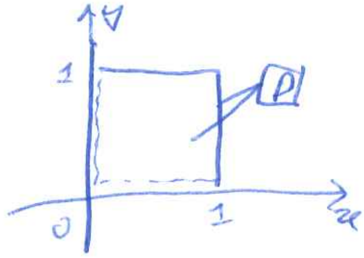
$\frac{t-2}{2} = \Phi^{-1}(0.67) \simeq 0.44 \Leftrightarrow t \simeq 2 \times 0.44 + 2$

$$\boxed{t \simeq 2.88}$$

(1/2)

$\boxed{\text{Ex. 3}}$ (X,Y) est un c.a.v. de f.d.p.

$$f(x,y) = \frac{1}{a\sqrt{xy}} \mathbb{1}_D(x,y) \quad \text{avec } D =]0,1] \times]0,1]$$



1) f est une f.d.p. $\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{]0,1]\times]0,1]} \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \frac{1}{a}\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \left[2y^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{a} \times 2 \times 2 = \frac{4}{a} \quad \text{d'où } \boxed{a = 4}$$

Inversement : si $a = 4$ alors $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

2) • Densité de X : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

•• si $x \notin]0,1]$ alors $f(x,y) = 0 \Rightarrow f_X(x) = 0$

•• si $x \in]0,1]$ alors $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{\cancel{4}\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{1}{\cancel{2}} y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{\cancel{4}\sqrt{x}}\left[y^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x)}$$

• Densité de Y : par symétrie $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{]0,1]}(y)}$

3) • $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3} = E(X)}$

• par symétrie $\boxed{E(Y) = \frac{1}{3}}$

Ex.3 (2/2)

4) $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

• $E(XY) = \iint_{\mathbb{R}} xy\, f(x,y)\,dx\,dy$ Th. de transfert $E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\, \frac{1}{4\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \int_0^1 \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$\boxed{E(XY) = \frac{1}{9}}$$

$\rightarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \boxed{0 = \mathrm{cov}(X,Y)}$

5) • $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = \frac{1}{4\sqrt{xy}}\, \mathbb{1}_{]0,1]\times]0,1]}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathbb{1}_{]0,1]}(x)\, \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathbb{1}_{]0,1]}(y)$

$= f_X(x)\, f_Y(y)$

X et Y sont donc indép.

• X et Y sont indép $\Rightarrow$

$f_{X|\{Y=y\}}(x) = f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathbb{1}_{]0,1]}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ex. 4 (1/1)

X une v.a.r. discrète

$$\begin{cases} \cdot\ X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \cdot\ P(X=0) = \frac{2}{3} \text{ et } P(X=1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{3}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |X_n - X| = |(1+\frac{1}{n})X - X| = |\frac{1}{n}X| = \frac{1}{n}X$ car $X \geq 0$.

$\Rightarrow E(|X_n - X|) = E(\frac{1}{n}X) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{3n}$

Inégalité de Markov

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|)}{\varepsilon} = \frac{1}{3\varepsilon n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{P} X}$

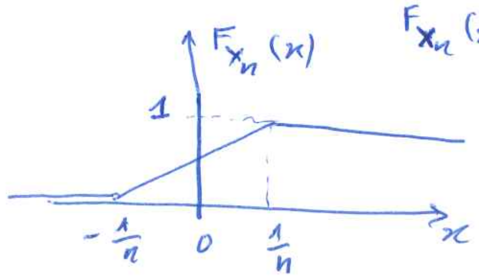
Ex. 5 (1/1)

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r.n.a.-c sptq :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad X_n \sim \mathcal{U}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$

<u>Rappel :</u> $X \sim \mathcal{U}([a,b]) \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$



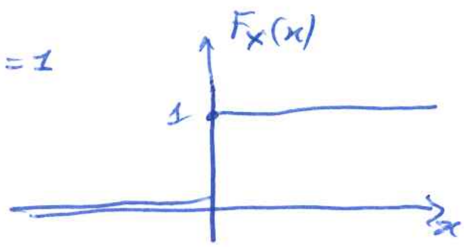
$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ \dfrac{x+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{n}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \end{cases}$

□ Fonction de répartition de $X = 0$ $\quad (X = \mathbb{1}_\emptyset)$ $\quad X(\Omega) = \{0\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x < 0$ alors $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$
- Si $0 \leq x$ alors $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = 1$

$F_X = \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$



$\boxed{F_X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})}$

□ Convergence simple de $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^*$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

- Si $x < 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $x < -\frac{1}{n_0} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x < -\frac{1}{n_0} \leq -\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad F_{X_n}(x) = 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

- Si $0 < x$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{n_0} < x \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad F_{X_n}(x) = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

D'où $F_{X_n} \xrightarrow[\text{sur } \mathbb{R}^*]{\text{CVS}} F_X \Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$.

Ex. 6 (1/1)

1) Il s'agit d'un schéma de Bernoulli

$\mathcal{E} =$ " succession de $n = 600$ épreuves de Bernoulli (test positif (= succès) ou pas (= échec)), indépendantes et identiques de paramètre $p = \frac{1}{25}$ "

$X =$ " nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves "

$$\Rightarrow X \sim \mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}\left(600, \frac{1}{25}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ X(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ \cdot\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \forall k \in [\![0, n]\!] \end{cases}$$

2) $\cdot$ $\boxed{E(X) = np = 24}$

$\cdot$ $V(X) = np(1-p) = 23.04 \Rightarrow \boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 4.8}$

3) On admet que $X \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

a) D'après le cours $\boxed{\mu = E(X) = 24}$ et $\boxed{\sigma = \sigma(X) = 4.8}$

i.e. $X \approx \mathcal{N}(24, 4.8)$

b) $\cdot$ $P(24.5 < X < 25.5) = F_X(25.5) - F_X(24.5) \simeq \Phi\left(\frac{25.5 - 24}{4.8}\right) - \Phi\left(\frac{24.5 - 24}{4.8}\right)$

$\simeq \Phi(0.31) - \Phi(0.10) \simeq 0.6217 - 0.5398$

$$\boxed{P(24.5 < X < 25.5) \simeq 0.0815}$$

$\cdot$ $P(X > 30) = 1 - F_X(30) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{30 - 24}{4.8}\right) = 1 - \Phi(1.25)$

$$\boxed{P(X > 30) \simeq 0.1056}$$