

## Corrigé Exam Proba-Simu 21-22

### 1. Exercice 1 :

La durée de vie en mois d'une denrée alimentaire est une variable aléatoire  $X$  continue de

densité de probabilité :  $f_X(x) = \begin{cases} Kx^{-4} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer la constante  $K$  pour que  $f$  soit réellement une fonction de densité.

$$\int_2^{+\infty} Kx^{-4} dx = \left[ K \frac{x^{-3}}{-3} \right]_2^{+\infty} = \frac{K}{24} = 1 \implies K = 24.$$

2) Calculer la fonction de répartition de  $X$ .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 24x^{-4} dx = \left( 1 - \frac{24}{3x^3} \right) \mathbb{1}_{[2, +\infty]}(x)$$

3) Calculer la probabilité pour que la denrée alimentaire se conserve entre 6 et 8 mois

$$F_X(8) - F_X(6) = \frac{24}{3(6)^3} - \frac{24}{3(8)^3} \simeq 0.021$$

4) Calculer l'espérance et la variance de  $X$  si elles existent.

$$E(X) = \int_2^{+\infty} 24x^{-3} dx = \left[ 24 \frac{x^{-2}}{-2} \right]_2^{+\infty} = \frac{24}{8} = 3$$

$$E(X^2) = \int_2^{+\infty} 24x^{-2} dx = \left[ 24 \frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^{+\infty} = \frac{24}{2} = 12 \implies Var(X) = 12 - 3^2 = 3$$

Supposons maintenant que la durée de vie de cette denrée alimentaire soit modélisée par

une variable aléatoire  $Y$  de densité  $f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-2)} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

5) Déterminer le paramètre  $\lambda$  de cette loi de façon à ce que  $X$  et  $Y$  aient la même espérance.

$$E(Y) = \int_2^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda(x-2)} dx = \left[ -xe^{-\lambda(x-2)} \right]_2^{+\infty} - \int_2^{+\infty} -e^{-\lambda(x-2)} dx = 2 + \frac{1}{\lambda} \left[ -e^{-\lambda(x-2)} \right]_2^{+\infty}$$

$$2 + \frac{1}{\lambda} = 3 \iff \lambda = 1$$

6) Donner la fonction de répartition de  $Y$ .

$$F_Y(x) = (1 - e^{-\lambda(x-2)}) \mathbb{1}_{[2, +\infty]}(x)$$

7) Avec cette nouvelle modélisation, recalculer la probabilité de la question 3).

$$F_Y(8) - F_Y(6) = e^{-(6-2)} - e^{-(8-2)} \simeq 0.016$$

## 2. Exercice 2 :

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu = \sigma = 2$ .

1. Calculer la probabilité que  $X$  soit supérieure ou égale à 4.5.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P(X \geq 4.5) = P\left(\frac{X - 2}{2} \geq \frac{4.5 - 2}{2}\right) = P(Z \geq 1.25) = 1 - F_Z(1.25) = 1 - 0.89435 \approx 0.11$$

2. Calculer la probabilité que  $X$  soit dans l'intervalle  $[1; 4.5]$ .

$$P(1 \leq X \leq 4.5) = F_Z(1.25) - F_Z(-0.5) = F_Z(1.25) + F_Z(0.5) - 1 = 0.5858$$

3. Déterminer la valeur de  $t \in \mathbb{R}$  telle que  $P(X \geq t) = 0.33$ .

$$P(X \geq t) = 0.33 \iff P\left(\frac{X - 2}{2} \geq \frac{t - 2}{2}\right) = 0.33 \iff F_Z\left(\frac{t - 2}{2}\right) = 0.67$$

$$\frac{t - 2}{2} = 0.4399 \implies t = 2.8798$$

## 3. Exercice 3 :

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles absolument continues telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_n$  suit la loi uniforme sur  $\left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ .

Montrer que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la variable certaine  $X = 0$ .

La fonction de répartition de  $X_n$  est donnée par :

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{nx + 1}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Converge, sur  $\mathbb{R}^*$ , vers :  $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  fonction de répartition de  $X = 0 = \text{cste.}$

## 2. Exercice 4 :

Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés,  $X$  la variable aléatoire donnant le plus petit résultat et  $Y$  le plus grand.

1. En décomptant les issues possibles d'un lancer de 2 dés et en distinguant le cas  $p = q$  du cas  $p \neq q$ , calculer  $P(X = p, Y = q)$ .

- ★ Si  $p = q$ , il y a une seule issue pour  $(X = p, Y = q) \implies P(X = p, Y = q) = \frac{1}{36}$ .
- ★ Si  $p \neq q$ , il y a deux issues possibles pour  $(X = p, Y = q)$ , l'issue  $(p, q)$  et l'issue  $(q, p)$ .

Donc :  $P(X = p, Y = q) = \frac{2}{36}$

Recopier et compléter le tableau suivant :

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

2. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$  ainsi que leur espérance.

On fait la somme par lignes pour  $X$  :

$p$	1	2	3	4	5	6
$P(X = p)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = \frac{11 + 2 \times 9 + \dots}{36} = \frac{91}{36} \simeq 2.53$$

On fait la somme par colonne pour  $Y$ :

$q$	1	2	3	4	5	6

$P(Y = q)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	-----------------

$$E(Y) = \frac{1 + 2 \times 3 + \dots}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4.47$$

3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{36} \neq P(X = 1) \times P(Y = 1).$$

Donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.