Graphes, Chaînes et Cycles eulériens

Ce cours est extrait de :

ING1 – Génie Mathématique
Théorie des graphes – Notes de cours
Maria Malek, Romain Dujol
2019 – 2020

Graphes, Chaînes et Cycles eulériens

Définition Chaîne eulérienne. Cycle eulérien). Soit $G = (V, E, \gamma)$ un graphe non orienté.

Une chaîne ou un cycle C de G est dit **eulérien(ne)** si et seulement toute arête e de E est contenue dans C sans répétition.

Définition (Graphe eulérien).

Un graphe non orienté G est dit **eulérien** si et seulement si il existe un cycle de G eulérien.

Graphes, Chaînes et Cycles eulériens

Exemple (Problème des sept ponts de Königsberg, 1736).

Ce problème est considéré le problème fondateur de la théorie des graphes.

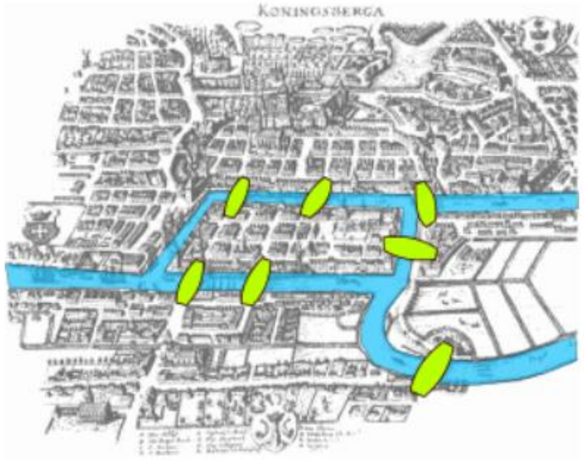
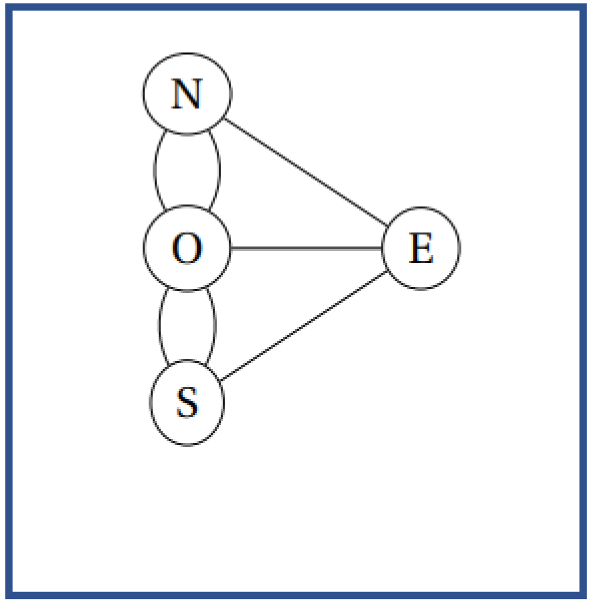


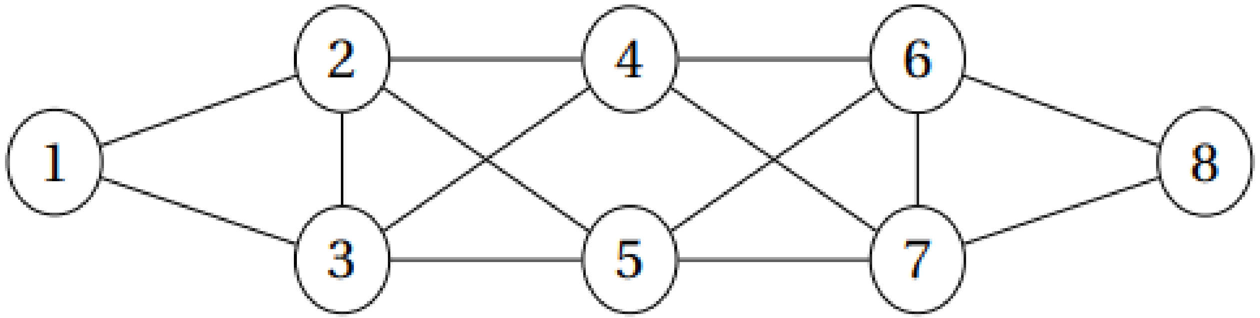
FIGURE 4.1 – Königsberg (actuellement Kaliningrad) au XVIII^{e} siècle



Le problème est le suivant :

« *Peut-on passer une fois et une seule par tous les ponts et revenir à son point de départ ?* »

Graphes, Chaînes et Cycles eulériens

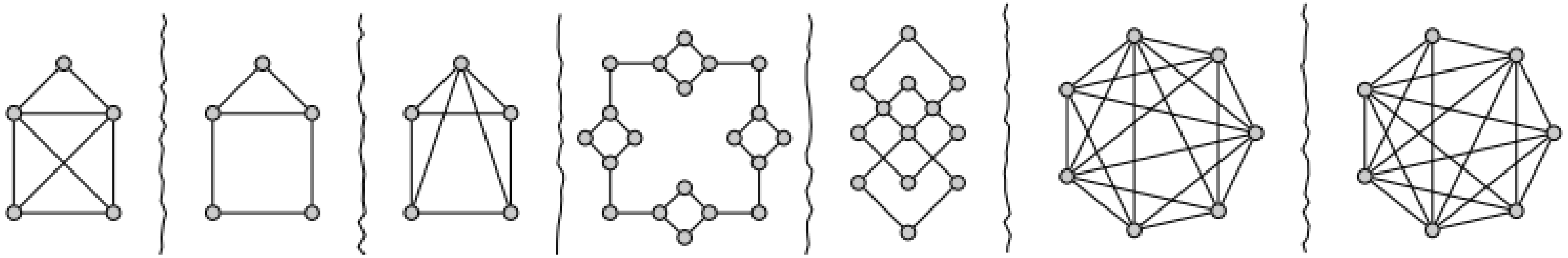
Exemple. $G =$ 

est eulérien.

En effet, $(1, 2, 4, 6, 8, 7, 5, 3, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 1)$ est un cycle eulérien.

Graphes, Chaînes et Cycles eulériens

- Parmi les graphes suivants, lesquels admettent un cycle eulérien.
- Pour les graphes non euréliens, combien d'arêtes faut il rajouter au minimum pour obtenir un cycle eulérien ?



Graphes, Chaînes et Cycles eulériens

Conditions d'existence

Théorème . (Théorème d'EULER).
Soit $G = (V, E, \gamma)$ un graphe non orienté connexe tel que card $E \geq 1$.
Alors G est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Propriété utilisée pour notre preuve

Rappel d'une propriété sur les arbres

Proposition : (Existence de sommets de degré un). Soit $T = (V, E, \gamma)$ un arbre tel que card $V \geq 2$. Alors il existe au moins deux sommets de degré un.

Démonstration. Soit $C = (v_0, v_1, \dots, v_p)$ une chaîne élémentaire de T maximale (au sens de la longueur). Supposons par l'absurde que $d(v_0) \geq 2$. Alors il existe un somme v distinct de v tel que $v_0 v \in E$.
Soit $C' = (v, C) = (v, v_0, v_1, \dots, v_p)$:

- Si $v \in \{v_i\}_{2 \leq i \leq n}$, alors C' contient un cycle de T, ce qui est impossible car T est acyclique.
- Si $v \notin \{v_i\}_{2 \leq i \leq n}$, alors C' est une chaîne élémentaire strictement plus long que C, ce qui est impossible par maximalité de C.

Donc $d(v_0) = 1$. On montre de manière identique que $d(v_p) = 1$. $\square$

Preuve du théorème ($\Rightarrow$)

Conditions d'existence

Théorème (Théorème d'EULER).
Soit $G = (V, E, \gamma)$ un graphe non orienté connexe tel que card $E \geq 1$.
Alors G est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

($\Rightarrow$) Soit C un cycle eulérien de G.
Tout passage de $v \in V$ utilise une arête entrante et une arête sortante (distincte de l'entrante).
Comme un jeu d'arêtes différent est utilisé à chaque passage, $d(v)$ est nécessairement pair.

Condition suffisante
$(\Leftarrow)$

$(\Leftarrow)$ On raisonne par récurrence forte sur $m = \operatorname{card} E$.

— Si $m = 1$, alors l'unique arête ne peut relier deux sommets distincts (sinon ceux-ci seraient de degré un) : donc il s'agit d'une boucle sur un sommet de degré deux.

— Soit $m \geq 1$ tel que tout graphe non orienté connexe d'au plus $m-1$ arêtes dont tous les sommets sont de degré pair soit eulérien.

Soit $G = (V, E, \gamma)$ un graphe non orienté connexe tel que $\operatorname{card} E = m$ dont tous les sommets sont de degré pair. Comme G n'admet aucun sommet de degré un, G n'est pas un arbre et n'est donc pas acyclique.

Soit donc C un cycle de G, E_C l'ensemble de ses arêtes et $\{H_i = (V_i, E_i)\}_{1 \leq i \leq p}$ les composantes connexes de $G - E_c$. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, le degré de chaque sommet est diminué d'un nombre pair. Donc tous les sommets de H_i sont de degré pair et H_i est eulérien par hypothèse de récurrence. Soit C_i un cycle eulérien de H_i. Comme G est connexe, il existe $x_i \in V$ commun à C et C_i.

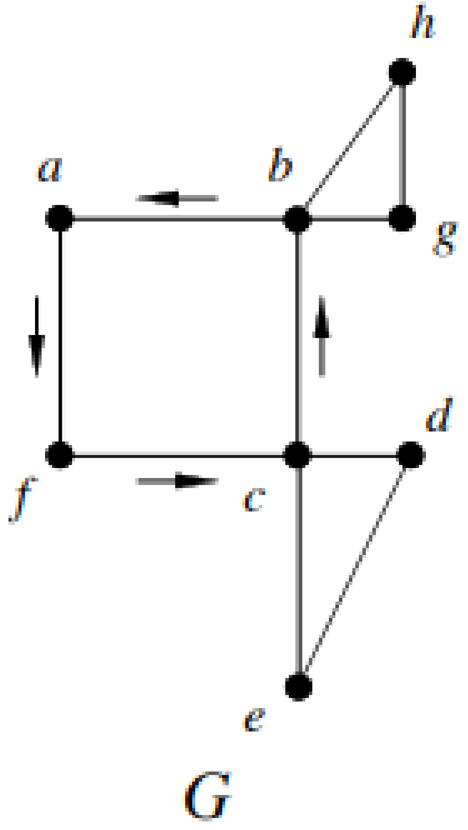
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on insère C_i dans C à la place de x_i : le cycle ainsi obtenu est eulérien. $\square$

Calcul de cycle eulérien

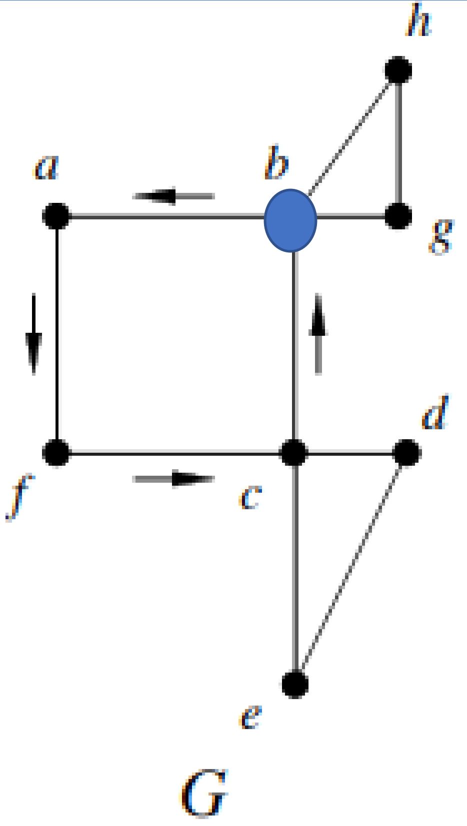
fonction euler(G) : C
préconditions : $G = (V, E)$ connexe dont les sommets sont de degré pair
postconditions : C est un cycle eulérien de G
  $C \leftarrow$ cycle de G
  si $E \neq E_C$ **alors**
    $(H_1, \ldots, H_p) \leftarrow$ composantes connexes de $G - E_C$
    pour $i \leftarrow 1$ **à** p **faire**
      $C_i \leftarrow$ euler(H_i)
      $x_i \leftarrow$ point de contact entre C et C_i
      Insérer C_i en x_i dans C
    fin pour
  fin si
  retourner C
fin fonction

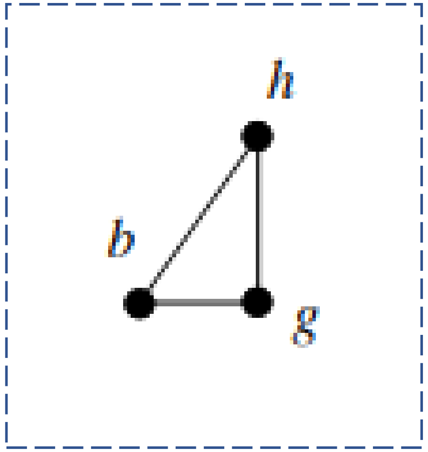
Algorithme de HIERHOLZER

Calcul de cycle eulérien



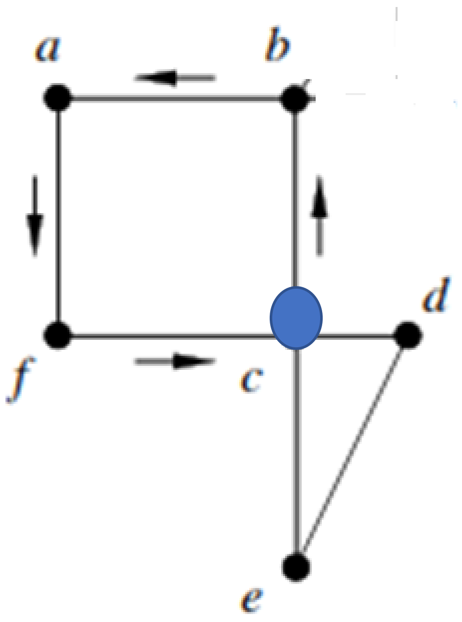
Première iteration
Choix du sommet b

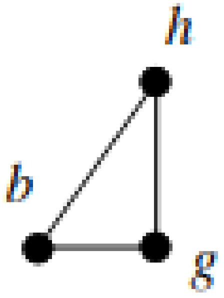


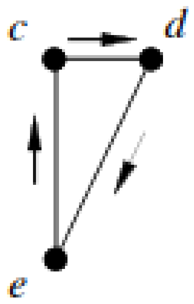


Première iteration

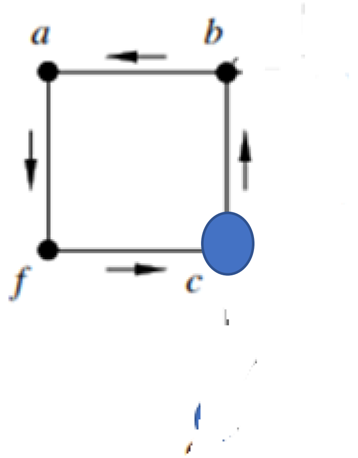
Choix du sommet c

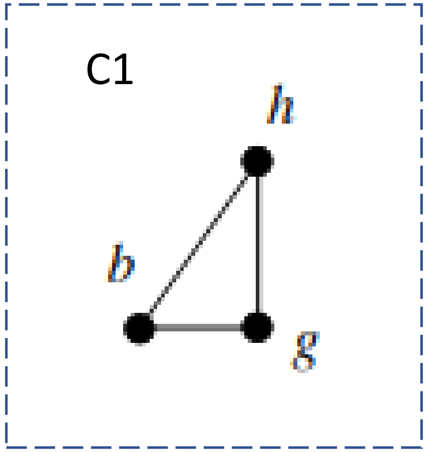


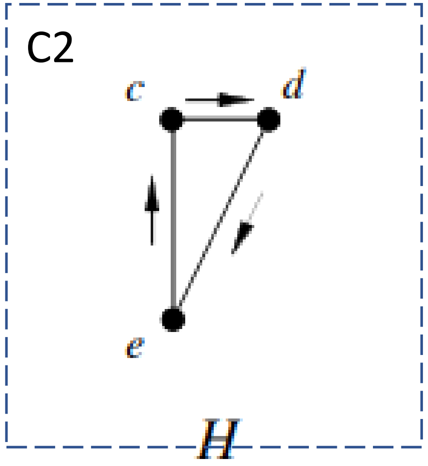


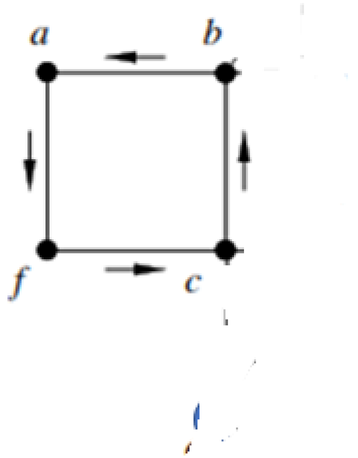


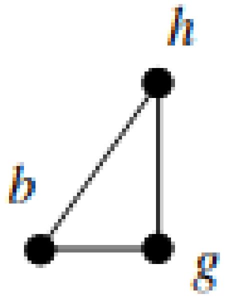
Première itération
Choix du sommet c

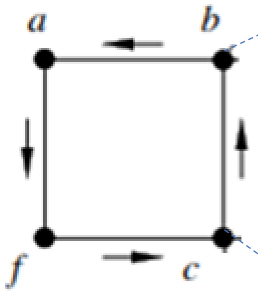




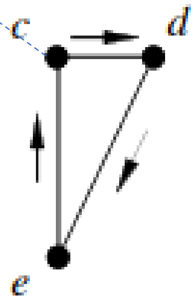








h-b-a-f-c-e-d-c-b-g-h



Exercice

C1

Exercice *Résoudre le problème des sept ponts de Königsberg.*

Exercice *Trouver une chaîne ou cycle eulérien dans les graphes suivants :*