

Corrige Exam Optim Lin GI mai 2022

Exercice 1. On considère le problème d'optimisation linéaire (P_1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 4x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- a. Résoudre (P_1) par la méthode des tableaux.
- b. Résoudre le problème dual (D_1) de (P_1) de deux manières différentes.
 - (i) Tracer le domaine des contraintes de (P_1) . Que constatez-vous?
 - (ii) Expliquer alors les composantes nulles de l'optimum de (D_1) .

(a)

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M
f	1	2	0	0	0	0	0
y_1	2	1	1	0	0	0	4
y_2	2	3	0	1	0	0	3
y_3	4	1	0	0	1	0	5
y_4	1	5	0	0	0	1	1

Var. entrante = x_2 , Var. sortante = y_2

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M
f	-1/3	0	0	-2/3	0	0	-2
y_1	4/3	0	1	-1/3	0	0	3
y_2	2/3	1	0	1/3	0	0	1
y_3	14/3	0	0	1/3	1	0	6
y_4	13/3	0	0	5/3	0	1	6

Solution finale : $\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$ et $f^* = 2$

(b) Le dual de (P_1) est donné par :

$$(D_1) \begin{cases} \min(4u_1 + 3u_2 + 5u_3 + u_4) \\ 2u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_4 \geq 1 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 - 5u_4 \geq 2 \\ u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{cases}$$

- **La lecture du dernier tableau du simplexe** pour (P_1) nous donne la solution de (D_1)

qui est donnée par :

$$\begin{cases} u_1^* = 0 \\ u_2^* = 2/3 \\ u_3^* = 0 \\ u_4^* = 0 \end{cases}$$

- **Le théorème de complémentarité** permet de dire :

$$x_2^* = 1 \neq 0 \implies u_1^* + 3u_2^* - u_3^* - 5u_4^* = 2$$

$$2x_1^* + x_2^* - 4 = -3 \neq 0 \implies u_1^* = 0$$

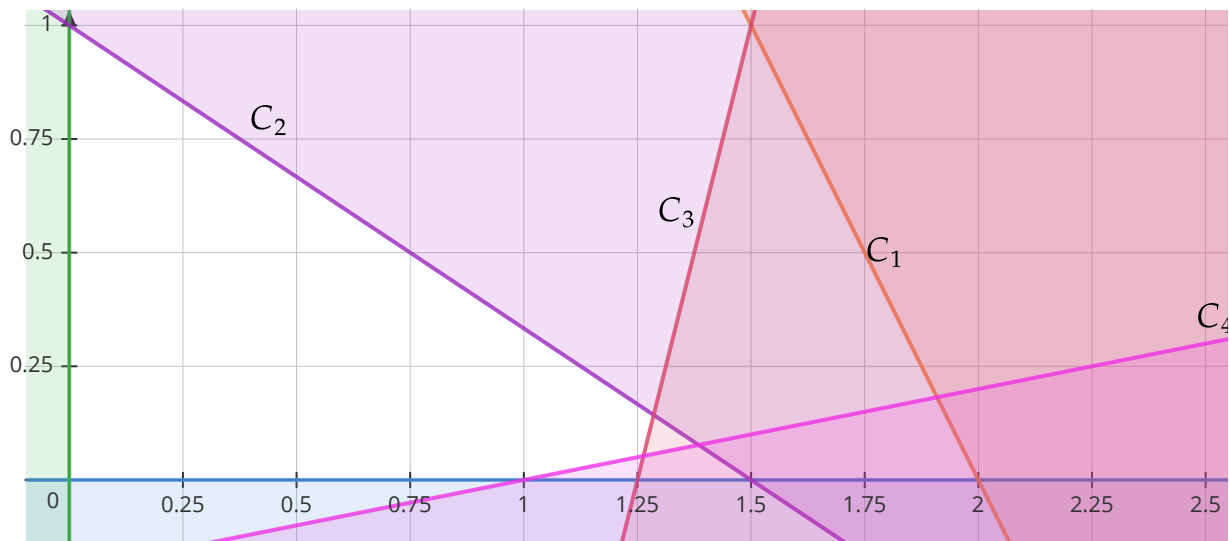
$$4x_1^* - x_2^* - 5 = -6 \neq 0 \implies u_3^* = 0$$

$$x_1^* - 5x_2^* - 1 = -6 \neq 0 \implies u_4^* = 0$$

On retrouve ainsi la même solution :

$$\begin{cases} u_1^* = 0 \\ u_2^* = 2/3 \\ u_3^* = 0 \\ u_4^* = 0 \end{cases}$$

(i) Représentation graphique du domaine des contraintes de (P_1)



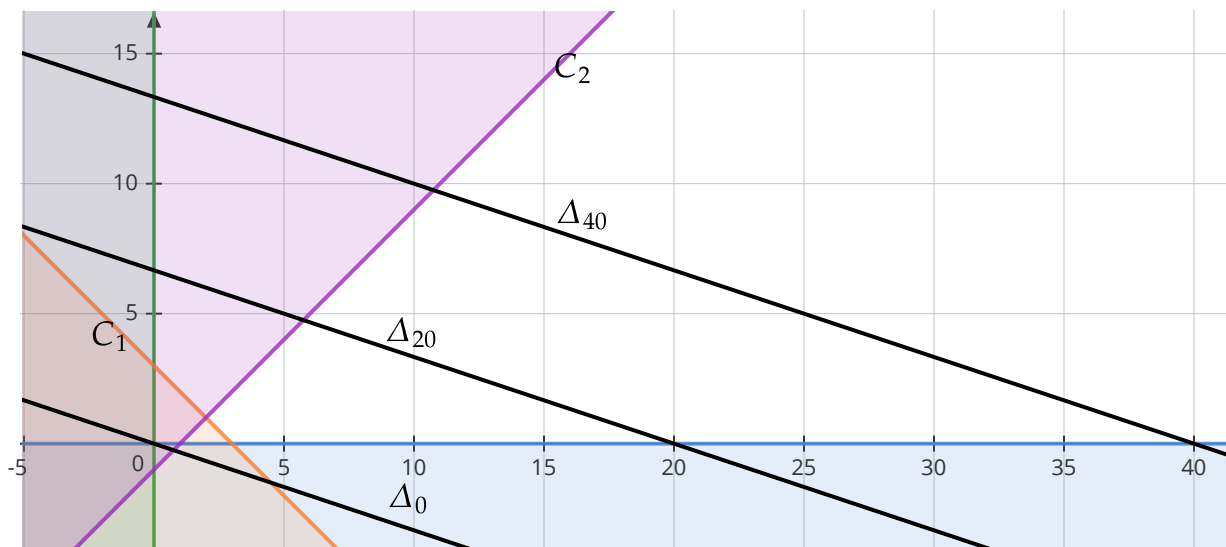
(ii) On voit sur le graphique que le sommet optimal $(0, 1)$ se trouve en dehors des contraintes 1, 3 et 4. Ces 3 contraintes étant non saturées, les composantes correspondantes dans le dual sont nulles.

Exercice 2. On considère le problème d'optimisation linéaire (P_2)

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq & -3 \\ -x_1 + x_2 \leq & -1 \\ x_1, x_2 \geq & 0 \end{cases}$$

- Résoudre (P_2) par méthode géométrique.
- Résoudre (P_2) en utilisant la méthode des tableaux et la méthode des deux phases si nécessaire.

(a) Résolution graphique de (P_2) :



La représentation des lignes de niveau 0, 20 et 40 montre que le problème est non borné.

$$\max = +\infty.$$

b) Résolution de (P_2) par la méthode des 2 phases :

Phase 1 :

Problème auxiliaire :

$$(P_2^a) \begin{cases} \max(-\delta) \\ -x_1 - x_2 - \delta \leq -3 \\ -x_1 + x_2 - \delta \leq -1 \\ x_1, x_2, \delta \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	S.M
f	0	0	-1	0	0	0
y_1	-1	-1	-1	1	0	-3
y_2	-1	1	-1	0	1	-1

On force l'entrée de δ et la sortie de y_1 (le plus petit second membre).

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	S.M
f	1	1	0	-1	0	3
δ	1	1	1	-1	0	3
y_2	0	2	0	-1	1	2

Var. entrante = x_1 , Var. sortante = δ

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	S.M
f	0	0	-1	0	0	0
x_1	1	1	1	-1	0	3
y_2	0	2	0	-1	1	2

Optimum atteint pour la phase 1 avec $\delta^* = 0$. On peut donc passer à la phase 2.

Phase 2 :

On reprend le dernier tableau sans la colonne δ .

	x_1	x_2	y_1	y_2	S.M
f	?	?	?	?	?
x_1	1	1	-1	0	3
y_2	0	2	-1	1	2

La fonction objectif doit être exprimé en fonction de vars hors base :

$$x_1 + 3x_2 = (3 - x_2 + y_1) + 3x_2 = 3 + 2x_2 + y_1$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	S.M
f	0	2	1	0	-3
x_1	1	1	-1	0	3
y_2	0	2	-1	1	2

Var. entrante = x_2 .

Var sortante : $\min\left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_2$

Après pivotage, on obtient :

	x_1	x_2	y_1	y_2	S.M
f	0	0	2	-1	-5
x_1	1	0	-1/2	-1/2	2
x_2	0	1	-1/2	1/2	1

Var. entrante = y_1 .

Pas de var. sortante !!!

On retrouve bien le fait que le problème est donc non borné : $\max = +\infty$.

Exercice 3. On considère le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers suivant :

$$(P_3) \begin{cases} \max & 4x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Résoudre le problème relaxé $(\overline{P_3})$ de (P_3) .

b. (i) Appliquer la méthode des coupes pour résoudre (P_3) .

(ii) Appliquer la méthode de séparation-évaluation pour résoudre (P_3) .

a. Résolution du pb. relaxé :

$$\left(\overline{P_3}\right) \begin{cases} \max(4x_1 + 5x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	SM
f	4	5	0	0	0
y_1	1	1	1	0	4
y_2	3	5	0	1	15

Var. IN = x_2 , Var. OUT = y_2

Pivotage :

	x_1	x_2	y_1	y_2	SM
f	1	0	0	-1	-15
y_1	2/5	0	1	-1/5	1
x_2	3/5	1	0	1/5	3

Var. IN = x_1 , Var. OUT = y_1

	x_1	x_2	y_1	y_2	SM
f	0	0	-5/2	-1/2	-35/2
x_1	1	0	5/2	-1/2	5/2
x_2	0	1	-3/2	1/2	3/2

La solution du pb. relaxé est donc : $\begin{cases} x_1^* = 5/2 \\ x_2^* = 3/2 \end{cases}$ et $f^* = 35/2$

b. Cette solution n'étant pas entière, **nous allons appliquer dans un 1er temps la méthode des coupes :**

(i) On va rajouter une nouvelle contrainte (coupe) construite à partir de la composantes non entières qui a la plus grande partie fractionnaire. Ici les 2 ont la même partie fractionnaire 1/2.

On va donc choisir la 1ère x_1 . On part de la contrainte liée à x_1 :

$$x_1 + \frac{5}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 = \frac{5}{2}$$

qui nous donne la nouvelle contrainte (1ère coupe) :

$$-\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \leq -\frac{1}{2}$$

On va lui adjoindre une var. d'écart avant de l'intégrer dans le dernier tableau du pb. relaxé.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	SM
f	0	0	-5/2	-1/2	0	-35/2
x_1	1	0	5/2	-1/2	0	5/2
x_2	0	1	-3/2	1/2	0	3/2
y_3	0	0	-1/2	-1/2	1	-1/2

On applique maintenant la méthode primale-duale.

La 1ère étape consiste à sortir y_3 , et à faire entrer la var. qui réalise le min. de

$$\min \left(\frac{-5/2}{-1/2}, \frac{-1/2}{-1/2} \right) = \frac{-1/2}{-1/2} = 1 \implies y_2 \text{ sera la var. entrante.}$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	SM
f	0	0	-2	0	-1	-17
x_1	1	0	3	0	-1	3
x_2	0	1	-2	0	1	1
y_3	0	0	1	1	-2	1

Nous avons obtenu une solution entière et donc résolu le problème en nbres entiers (P_3).

Cette solution est :

$$\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases} \text{ et } f^* = 17$$

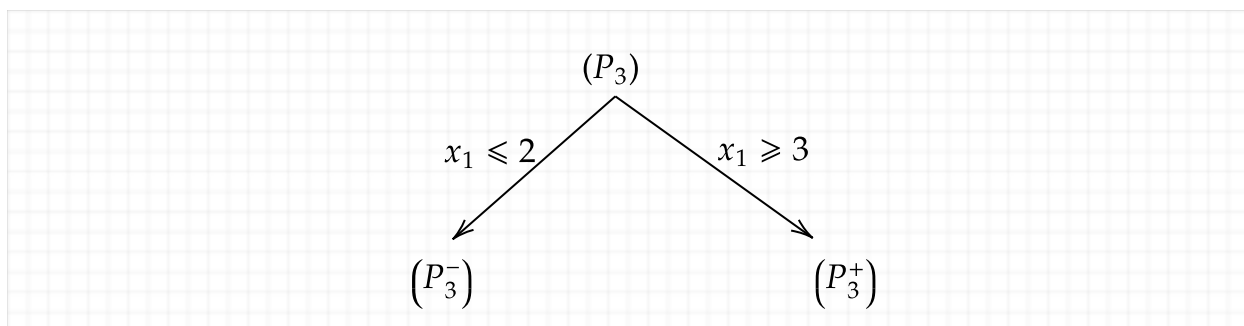
(ii) Dans un 2ème temps, on va appliquer la méthode séparation évaluation.

A partir de la solution non entière du pb. relaxé $\begin{cases} x_1^* = 5/2 \\ x_2^* = 3/2 \end{cases}$ et $f^* = 35/2$, on va choisir

une variable pour rajouter 2 contraintes qui vont définir les 2 branches de l'arbre de séparation.

On choisit la composante non entière qui est la plus éloignée des 2 entiers qui l'encadrent, celle dont la partie fractionnaire est la plus proche de 0.5

Ici, on a le choix et on va donc partir de x_1 .



On va donc devoir résoudre 2 pb.

Commençons par :

$$\left(\overline{P_3^-} \right) \left\{ \begin{array}{l} \max(4x_1 + 5x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	SM
f	0	0	-5/2	-1/2	-35/2
x_1	1	0	5/2	-1/2	5/2
x_2	0	1	-3/2	1/2	3/2

On va évidemment appliquer la méthode primale-duale, mais on doit au préalable réécrire la nouvelle contrainte en fonction de vars. hors base.

La nouvelle contrainte peut donc s'écrire :

$$x_1 \leq 2 \iff -\frac{5}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2} \leq 2 \iff -\frac{5}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq \frac{-1}{2}$$

C'est cette forme-ci qui va être intégrée dans le tableau :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	SM
f	0	0	-5/2	-1/2	0	-35/2
x_1	1	0	5/2	-1/2	0	5/2
x_2	0	1	-3/2	1/2	0	3/2
y_3	0	0	-5/2	1/2	1	-1/2

La méthode primale-duale commence par décider la sortie de y_3 et l'entrée de la var. qui

réalise le min : $\min \left(\frac{-5/2}{-5/2}, \frac{-1/2}{1/2} \right)$. On ne doit pas tenir compte du 2ème rapport car il est négatif.

Par conséquent la var. entrante sera y_1 .

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	SM
f	0	0	0	-1	-1	-17
x_1	1	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	1/5	3/5	9/5
y_3	0	0	1	-1/5	-2/5	1/5

La solution de $(\overline{P_3^-})$ est donc : $\begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 9/5 \end{cases}$ et $f^* = 17$

On procède de la même manière avec $(\overline{P_3^+})$ et on obtient comme solution : $\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$

La méthode s'arrête ici, avec comme solution $\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$ et $f^* = 17$.

Il est en effet inutile de faire des séparations à partir de $(\overline{P_3^+})$ car il a donné une solution entière.

Il est aussi inutile de faire des séparations à partir de $(\overline{P_3^-})$ car l'optimum qu'il a donné est égal à 17, soit la même valeur que la solution entière déjà obtenue.

Les séparations éventuelles que l'on rajouterait donneront des optima inférieurs à 17.