Optimisation linéaire

Romain DUJOL, Jean-Paul FOREST

CY TECH – ING1-IN

2022 – 2023

Méthode des tableaux – Cas non standards

Configurations non standard

- Configurations terminales
- Configuration non terminale : dégénerescence

Cas de l'origine non admissible

- Contexte
- Méthode des deux phases

Analyse algorithmique

Configurations non standard

Configurations non standard

Configurations terminales

Problème non borné

Exemple

Problème non borné

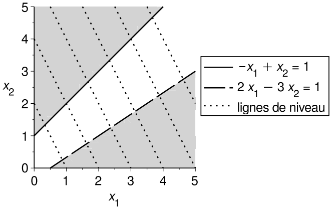
Exemple

$$\begin{cases} \max \quad (2x_1 + x_2) \\ \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ \quad 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ \quad x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problème non borné

Exemple

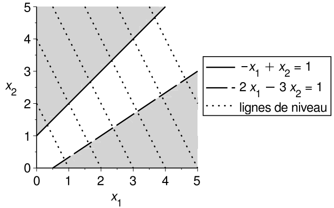
$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Problème non borné

Exemple

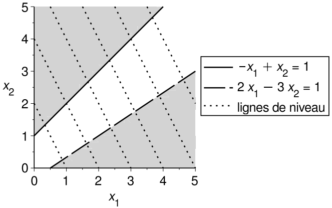
$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Application de l'algorithme

Exemple

$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



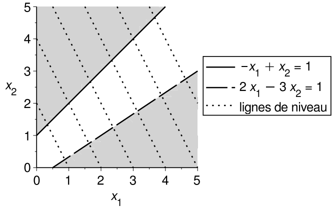
Application de l'algorithme

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	2	1	0	0	0
y_1	−1	1	1	0	1
y_2	2	−3	0	1	1

Problème non borné

Exemple

$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Application de l'algorithme

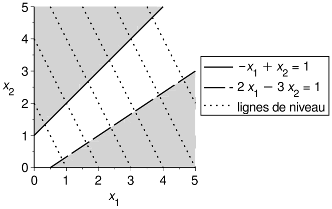
	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	2	1	0	0	0
y_1	-1	1	1	0	1
y_2	2	-3	0	1	1

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	4	0	-1	-1
y_1	0	$-1/2$	1	$1/2$	$3/2$
x_1	1	$-3/2$	0	$1/2$	$1/2$

Problème non borné

Exemple

$$\begin{cases} \max & (2x_1 + x_2) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Application de l'algorithme

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	2	1	0	0	0
y_1	-1	1	1	0	1
y_2	2	-3	0	1	1

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	4	0	-1	-1
y_1	0	$-1/2$	1	$1/2$	$3/2$
x_1	1	$-3/2$	0	$1/2$	$1/2$

Aucune variable de sortie possible

Problème avec une infinité d'optima

Exemple

Problème avec une infinité d'optima

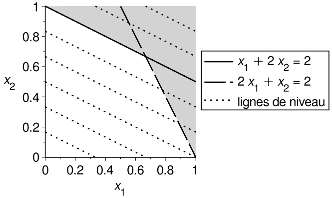
Exemple

$$\begin{cases} \max & (3x_1 + 6x_2) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problème avec une infinité d'optima

Exemple

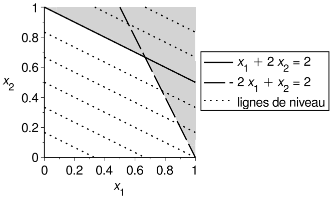
$$\begin{cases} \max & (3x_1 + 6x_2) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Problème avec une infinité d'optima

Exemple

$$\begin{cases} \max & (3x_1 + 6x_2) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

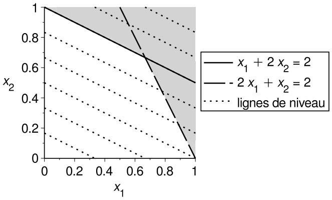


Application de l'algorithme

Problème avec une infinité d'optima

Exemple

$$\begin{cases} \max & (3x_1 + 6x_2) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



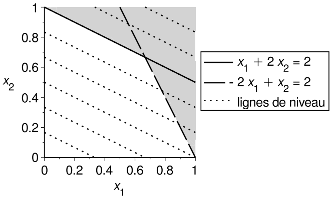
Application de l'algorithme

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	3	6	0	0	0
y_1	1	2	1	0	2
y_2	2	1	0	1	2

Problème avec une infinité d'optima

Exemple

$$\begin{cases} \max & (3x_1 + 6x_2) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



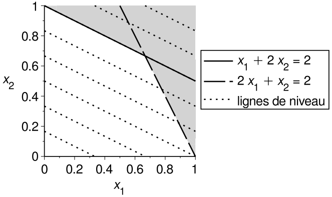
Application de l'algorithme

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	3	6	0	0	0
y_1	1	2	1	0	2
y_2	2	1	0	1	2

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	0	-3	0	-6
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	1
y_2	$3/2$	0	$-1/2$	1	1

Exemple

$$\begin{cases} \max & (3x_1 + 6x_2) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Application de l'algorithme

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	3	6	0	0	0
y_1	1	2	1	0	2
y_2	2	1	0	1	2

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	0	-3	0	-6
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	1
y_2	$3/2$	0	$-1/2$	1	1

Coefficient nul pour une variable hors-base

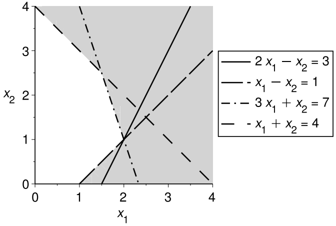
Configurations non standard

Configuration non terminale : dégénerescence

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



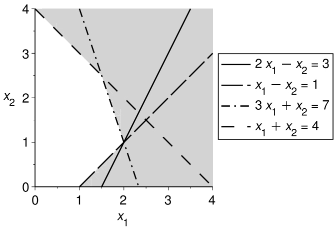
$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$
- $x_1 - x_2 = 1$
- $3x_1 + x_2 = 7$

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



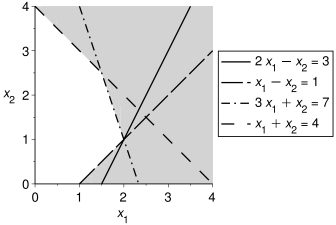
$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$
- $3x_1 + x_2 = 7$

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



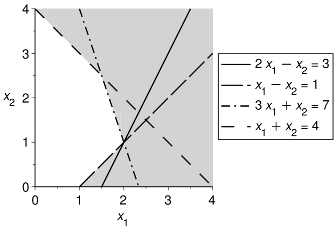
$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



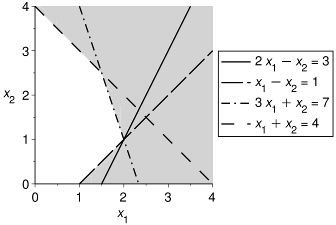
$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$

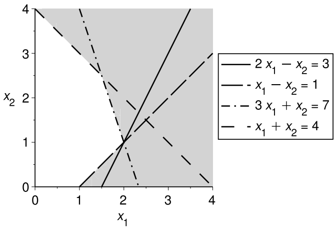


$(x_1, x_2) = (2, 1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

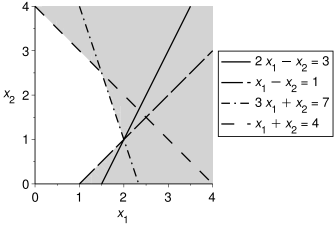
- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

$(x_1,x_2) \notin \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 + x_2 = 4\}$, donc $y_4 \neq 0$

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

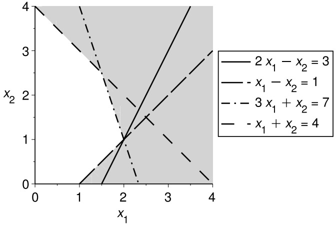
$(x_1,x_2) \notin \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 + x_2 = 4\}$, donc $y_4 \neq 0$

Il y a toujours QUATRE variables dans une base

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

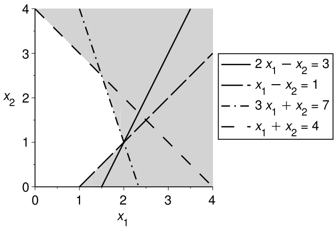
$(x_1,x_2) \notin \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 + x_2 = 4\}$, donc $y_4 \neq 0$

Il y a toujours QUATRE variables dans une base

- $y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_3,y_4)$ avec $y_3 = 0$

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

$(x_1,x_2) \notin \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 + x_2 = 4\}$, donc $y_4 \neq 0$

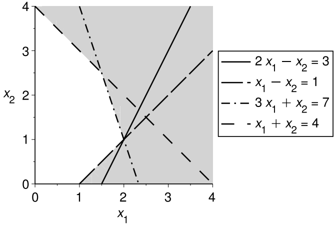
Il y a toujours QUATRE variables dans une base

- $y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_3,y_4)$ avec $y_3 = 0$
- $y_1 = y_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_2,y_4)$ avec $y_2 = 0$

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \le 3, x_1 - x_2 \le 1, 3x_1 + x_2 \le 7, x_1 + x_2 \le 4\}$



$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

$(x_1,x_2) \notin \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 + x_2 = 4\}$, donc $y_4 \neq 0$

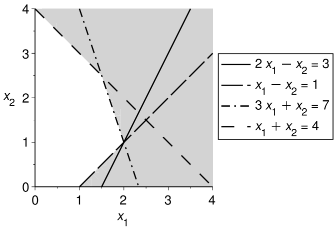
Il y a toujours QUATRE variables dans une base

- $y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_3,y_4)$ avec $y_3 = 0$
- $y_1 = y_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_2,y_4)$ avec $y_2 = 0$
- $y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_1,y_4)$ avec $y_1 = 0$

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

$(x_1,x_2) \notin \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 + x_2 = 4\}$, donc $y_4 \neq 0$

Il y a toujours QUATRE variables dans une base

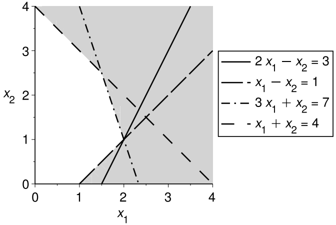
- $y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_3,y_4)$ avec $y_3 = 0$
- $y_1 = y_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_2,y_4)$ avec $y_2 = 0$
- $y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_1,y_4)$ avec $y_1 = 0$

Ces bases sont associées au sommet $(x_1,x_2) = (2,1)$.

Dégénérescence : par l'exemple

Exemple

$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 - x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 1, 3x_1 + x_2 \leq 7, x_1 + x_2 \leq 4\}$



$(x_1,x_2) = (2,1)$ est à l'intersection de :

- $2x_1 - x_2 = 3$, donc $y_1 = 0$
- $x_1 - x_2 = 1$, donc $y_2 = 0$
- $3x_1 + x_2 = 7$, donc $y_3 = 0$

$(x_1,x_2) \notin \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 + x_2 = 4\}$, donc $y_4 \neq 0$

Il y a toujours QUATRE variables dans une base

- $y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_3,y_4)$ avec $y_3 = 0$
- $y_1 = y_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_2,y_4)$ avec $y_2 = 0$
- $y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B} = (x_1,x_2,y_1,y_4)$ avec $y_1 = 0$

Ces bases sont associées au sommet $(x_1,x_2) = (2,1)$.

Remarque : La contrainte $2x_1 - x_2 \leq 3$ est inutile pour décrire X.

Dégénérescence

Définition (Contrainte saturée)

Une contrainte est **saturée** (ou **active**) en x si x est un cas d'égalité de la contrainte.

Dégénérescence

Définition (Contrainte saturée)

Une contrainte est **saturée** (ou **active**) en x si x est un cas d'égalité de la contrainte.

Définition (Sommet dégéneré)

Un sommet d'un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ est dit **dégénéré** si il est associé à au moins $n+1$ contraintes saturées.

Dégénérescence

Définition (Contrainte saturée)

Une contrainte est **saturée** (ou **active**) en x si x est un cas d'égalité de la contrainte.

Définition (Sommet dégéneré)

Un sommet d'un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ est dit **dégénéré** si il est associé à au moins $n+1$ contraintes saturées.

Corollaire

Un sommet dégénéré admet plusieurs bases distinctes. Pour chacune de ces bases, au moins une variable a une valeur nulle.

Dégénérescence

Définition (Contrainte saturée)

Une contrainte est **saturée** (ou **active**) en x si x est un cas d'égalité de la contrainte.

Définition (Sommet dégéneré)

Un sommet d'un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ est dit **dégénéré** si il est associé à au moins $n+1$ contraintes saturées.

Corollaire

Un sommet dégénéré admet plusieurs bases distinctes. Pour chacune de ces bases, au moins une variable a une valeur nulle.

Conséquences

Dégénérescence

Définition (Contrainte saturée)

Une contrainte est **saturée** (ou **active**) en x si x est un cas d'égalité de la contrainte.

Définition (Sommet dégéneré)

Un sommet d'un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ est dit **dégénéré** si il est associé à au moins $n+1$ contraintes saturées.

Corollaire

Un sommet dégénéré admet plusieurs bases distinctes. Pour chacune de ces bases, au moins une variable a une valeur nulle.

Conséquences

- Dans un tableau, un sommet dégénéré donne un « 0 » dans la colonne de droite (zone des seconds membres).

Dégénérescence

Définition (Contrainte saturée)

Une contrainte est **saturée** (ou **active**) en x si x est un cas d'égalité de la contrainte.

Définition (Sommet dégéneré)

Un sommet d'un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ est dit **dégénéré** si il est associé à au moins $n+1$ contraintes saturées.

Corollaire

Un sommet dégénéré admet plusieurs bases distinctes. Pour chacune de ces bases, au moins une variable a une valeur nulle.

Conséquences

- Dans un tableau, un sommet dégénéré donne un « 0 » dans la colonne de droite (zone des seconds membres).
- En changeant de base, on peut ne pas changer de sommet !
  $\Rightarrow$ *Stagnation voire cyclage sur un sommet* (pas plus)

Cas de l’origine non admissible

Cas de l’origine non admissible

Contexte

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part du sommet initial.
2. Si il est possible d'améliorer le critère :
   - choisir une variable selon laquelle cette amélioration est possible ;
   - passer au sommet suivant selon cette variable et recommencer cette étape.
3. Si il n'est pas possible d'améliorer le critère, alors le sommet courant est un optimum.

L'algorithme ne s'applique qu'à un problème sous forme standard.

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part du sommet initial.
2. Si il est possible d'améliorer le critère :
   - choisir une variable selon laquelle cette amélioration est possible ;
   - passer au sommet suivant selon cette variable et recommencer cette étape.
3. Si il n'est pas possible d'améliorer le critère, alors le sommet courant est un optimum.

L'algorithme ne s'applique qu'à un problème sous forme standard.

Limites de la méthode des tableaux

Remarque importante

L'origine est admissible si et seulement si c'est un sommet.

Limites de la méthode des tableaux

Remarque importante

L'origine est admissible si et seulement si c'est un sommet.

Que se passe-t-il si l'origine n'est pas un sommet ?

$\Rightarrow$ *Méthode des tableaux non applicable directement*

Limites de la méthode des tableaux

Remarque importante

L'origine est admissible si et seulement si c'est un sommet.

Que se passe-t-il si l'origine n'est pas un sommet ?

$\Rightarrow$ *Méthode des tableaux non applicable directement*

Idée : Construction d'un problème auxiliaire

Limites de la méthode des tableaux

Remarque importante

L'origine est admissible si et seulement si c'est un sommet.

Que se passe-t-il si l'origine n'est pas un sommet ?

$\Rightarrow$ *Méthode des tableaux non applicable directement*

Idée : Construction d'un problème auxiliaire

- l'origine est un sommet de ce problème auxiliaire
  $\Rightarrow$ *Méthode des tableaux applicable*

Limites de la méthode des tableaux

Remarque importante

L'origine est admissible si et seulement si c'est un sommet.

Que se passe-t-il si l'origine n'est pas un sommet ?

$\Rightarrow$ *Méthode des tableaux non applicable directement*

Idée : Construction d'un problème auxiliaire

- l'origine est un sommet de ce problème auxiliaire
  $\Rightarrow$ *Méthode des tableaux applicable*
- on calcule un sommet initial admissible du problème originial $\Rightarrow$ **Méthode des deux phases**

Cas de l’origine non admissible

Méthode des deux phases

Phase I

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax \leq b, x \geq 0\end{cases}$$

Phase I

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c|x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}$$

Définition (Problème auxiliaire de phase I)

Le **problème auxiliaire de phase I de** (P) est :

$$(P^a)\begin{cases}\max\limits_{(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} & (0|x)-\delta\\ & Ax-\delta e\leq b\\ & x\,,\quad \delta\geq 0\end{cases}$$

Phase I

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c|x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}$$

Définition (Problème auxiliaire de phase I)

Le **problème auxiliaire de phase I de** (P) est :

$$(P^a)\begin{cases}\max\limits_{(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} & (0|x)-\delta\\ & Ax-\delta e\leq b\\ & x\,,\quad \delta\geq 0\end{cases}$$

Théorème (Propriétés de (P^a))

(P^a) admet toujours un optimum (x^a,δ^a).

- $\delta^a=0\implies x^a$ *admissible dans* (P)
- $\delta^a>0\implies$ *ensemble des contraintes de* (P) *vide*

Méthode en deux phases

Idée fondamentale

Utiliser le problème auxiliaire pour générer un sommet admissible et appliquer la méthode des tableaux depuis ledit sommet.

Phase I

Construire (P^a) et le résoudre $\Rightarrow$ optimum (x^a, δ^a)

- $\delta^a = 0 \Longrightarrow$ phase II
- $\delta^a > 0 \Longrightarrow$ STOP : (P) n'admet d'optimum

Phase II

Résoudre (P) à partir de la configuration x^a.

Application sur un exemple

$$\begin{cases} \max & (x_1 - x_2) \\ & -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Application sur un exemple

$$\begin{cases} \max & (x_1 - x_2) \\ & -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \,,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problème auxiliaire de phase I

$$\begin{cases} \max & (0x_1 + 0x_2 \;) \\ & -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \,,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Application sur un exemple

$$\begin{cases} \max & (x_1 - x_2) \\ & -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problème auxiliaire de phase I

$$\begin{cases} \max & (0x_1 + 0x_2 - \delta) \\ & -2x_1 + x_2 - \delta \leq -2 \\ & x_1 - 2x_2 - \delta \leq 2 \\ & x_1 + x_2 - \delta \leq 5 \\ & x_1 , \quad x_2 , \quad \delta \geq 0 \end{cases}$$

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-1	0	0	0	0
y_1	-2	1	-1	1	0	0	-2
y_2	1	-2	-1	0	1	0	2
y_3	1	1	-1	0	0	1	5

Phase I : résolution du problème auxiliaire

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-1	0	0	0	0
y_1	-2	1	-1	1	0	0	-2
y_2	1	-2	-1	0	1	0	2
y_3	1	1	-1	0	0	1	5

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-1	0	0	0	0
δ	-2	1	-1	1	0	0	-2
y_2	1	-2	-1	0	1	0	2
y_3	1	1	-1	0	0	1	5

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible : on force l'entrée de δ.
  Critère de choix : plus petit second membre $\Rightarrow y_1$

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-1	0	0	0	0
δ	2	-1	1	-1	0	0	2
y_2	1	-2	-1	0	1	0	2
y_3	1	1	-1	0	0	1	5

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible : on force l'entrée de δ.
  Critère de choix : plus petit second membre $\Rightarrow y_1$
  - $L_1 \leftarrow L_1/(-1)$

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	2	-1	0	-1	0	0	2
δ	2	-1	1	-1	0	0	2
y_2	1	-2	-1	0	1	0	2
y_3	1	1	-1	0	0	1	5

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible : on force l'entrée de δ.
  Critère de choix : plus petit second membre $\Rightarrow y_1$
  - $L_1 \leftarrow L_1/(-1)$
  - $L_f \leftarrow L_f - (-1)L_1$

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	2	-1	0	-1	0	0	2
δ	2	-1	1	-1	0	0	2
y_2	3	-3	0	-1	1	0	4
y_3	1	1	-1	0	0	1	5

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible : on force l'entrée de δ.
  Critère de choix : plus petit second membre $\Rightarrow y_1$
  - $L_1 \leftarrow L_1/(-1)$
  - $L_f \leftarrow L_f - (-1)L_1$
  - $L_2 \leftarrow L_2 - (-1)L_1$

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	2	−1	0	−1	0	0	2
δ	2	−1	1	−1	0	0	2
y_2	3	−3	0	−1	1	0	4
y_3	3	0	0	−1	0	1	7

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible : on force l'entrée de δ.
  Critère de choix : plus petit second membre $\Rightarrow y_1$
  - $L_1 \leftarrow L_1/(-1)$
  - $L_f \leftarrow L_f - (-1)L_1$
  - $L_2 \leftarrow L_2 - (-1)L_1$
  - $L_3 \leftarrow L_3 - (-1)L_1$

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-1	0	0	0	0
x_1	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	0	1
y_2	0	$-3/2$	$-3/2$	$1/2$	1	0	1
y_3	0	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	0	1	4

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible : on force l'entrée de δ.
  Critère de choix : plus petit second membre $\Rightarrow y_1$
  - $L_1 \leftarrow L_1/(-1)$
  - $L_f \leftarrow L_f - (-1)L_1$
  - $L_2 \leftarrow L_2 - (-1)L_1$
  - $L_3 \leftarrow L_3 - (-1)L_1$
- On applique la méthode des tableaux pour finir la résolution.
  Règle de choix de la variable sortante : favoriser δ.

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-1	0	0	0	0
x_1	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	0	1
y_2	0	$-3/2$	$-3/2$	$1/2$	1	0	1
y_3	0	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	0	1	4

Phase I : résolution du problème auxiliaire

- Configuration non admissible : on force l'entrée de δ.
  Critère de choix : plus petit second membre $\Rightarrow y_1$
  - $L_1 \leftarrow L_1/(-1)$
  - $L_f \leftarrow L_f - (-1)L_1$
  - $L_2 \leftarrow L_2 - (-1)L_1$
  - $L_3 \leftarrow L_3 - (-1)L_1$
- On applique la méthode des tableaux pour finir la résolution.
  Règle de choix de la variable sortante : favoriser δ.

Optimum : $x^a = (1,0)$ et $\delta^a = 0 \Longrightarrow$ Phase II

Application sur un exemple

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-1	0	0	0	0
x_1	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	0	1
y_2	0	$-3/2$	$-3/2$	$1/2$	1	0	1
y_3	0	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	0	1	4

Phase II : résolution du problème original

Application sur un exemple

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	0	0	0	0
x_1	1	$-1/2$	$-1/2$	0	0	1
y_2	0	$-3/2$	$1/2$	1	0	1
y_3	0	$3/2$	$1/2$	0	1	4

Phase II : résolution du problème original

- Suppression de la colonne associé à δ

Application sur un exemple

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	-1
x_1	1	$-1/2$	$-1/2$	0	0	1
y_2	0	$-3/2$	$1/2$	1	0	1
y_3	0	$3/2$	$1/2$	0	1	4

Phase II : résolution du problème original

- Suppression de la colonne associé à δ
- Expression du critère initial en fonction des variables hors-base (ici, x_2 et y_1) :

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1\right) - x_2 = 1 + \frac{-1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1$$

Application sur un exemple

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	0	$-2/3$	$-1/3$	-3
x_1	1	0	0	$1/3$	$2/3$	4
y_1	0	0	1	1	1	5
x_2	0	1	0	$-1/3$	$1/3$	1

Phase II : résolution du problème original

- Suppression de la colonne associé à δ
- Expression du critère initial en fonction des variables hors-base (ici, x_2 et y_1) :

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1\right) - x_2 = 1 + \frac{-1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1$$

- On applique la méthode des tableaux pour finir la résolution.

Application sur un exemple

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	0	$-2/3$	$-1/3$	-3
x_1	1	0	0	$1/3$	$2/3$	4
y_1	0	0	1	1	1	5
x_2	0	1	0	$-1/3$	$1/3$	1

Phase II : résolution du problème original

- Suppression de la colonne associé à δ
- Expression du critère initial en fonction des variables hors-base (ici, x_2 et y_1) :

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1\right) - x_2 = 1 + \frac{-1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1$$

- On applique la méthode des tableaux pour finir la résolution.

Optimum : (4,1)

Analyse algorithmique

Terminaison

La méthode des tableaux est une méthode de descente

- Choix de la variable entrante
  $\iff$ *choix de la direction de descente*
- Choix de la variable sortante
  $\iff$ *choix du pas de descente*

Théorème

Soit X un simplexe de $\mathbb{R}^n$ et (P) $\begin{cases} \max & (c|x) \\ & x \in X \end{cases}$

- *Aucun sommet X n'est dégénéré*
  $\Rightarrow$ *l'algorithme termine*

Terminaison

La méthode des tableaux est une méthode de descente

- Choix de la variable entrante
  $\iff$ *choix de la direction de descente*
- Choix de la variable sortante
  $\iff$ *choix du pas de descente*

Théorème

Soit X un simplexe de $\mathbb{R}^n$ et (P) $\begin{cases} \max & (c|x) \\ & x \in X \end{cases}$

- *Aucun sommet X n'est dégénéré*
  $\Rightarrow$ *l'algorithme termine*
- *Au moins un sommet de X est dégénéré*
  $+$ *Bland pour la variable entrante ET sortante*
  $\Rightarrow$ *l'algorithme termine*

Complexité de l'algorithme

Complexité

Complexité de l'algorithme

- *polynomiale* en cas moyen

Complexité

Complexité de l'algorithme

- *polynomiale* en cas moyen
- *exponentielle* en pire cas avec les règles de pivotage actuelles (KLEE et MINTY, 1972)

Complexité

Complexité de l'algorithme

- *polynomiale* en cas moyen
- *exponentielle* en pire cas avec les règles de pivotage actuelles (KLEE et MINTY, 1972)

Question ouverte

Existe-il une règle de pivotage assurant une complexité polynomiale (et donc en pire cas) ?

Complexité

Complexité de l'algorithme

- *polynomiale* en cas moyen
- *exponentielle* en pire cas avec les règles de pivotage actuelles (KLEE et MINTY, 1972)

Question ouverte

Existe-il une règle de pivotage assurant une complexité polynomiale (et donc en pire cas) ?

vs méthode des points intérieurs ?

Complexité

Complexité de l'algorithme

- *polynomiale* en cas moyen
- *exponentielle* en pire cas avec les règles de pivotage actuelles (Klee et Minty, 1972)

Question ouverte

Existe-il une règle de pivotage assurant une complexité polynomiale (et donc en pire cas) ?

vs méthode des points intérieurs ?

- Performances comparables dans la pratique

Complexité

Complexité de l'algorithme

- *polynomiale* en cas moyen
- *exponentielle* en pire cas avec les règles de pivotage actuelles (KLEE et MINTY, 1972)

Question ouverte

Existe-il une règle de pivotage assurant une complexité polynomiale (et donc en pire cas) ?

vs méthode des points intérieurs ?

- Performances comparables dans la pratique
- Méthode des points intérieurs plus adaptée aux très grands problèmes creux

Complexité

Complexité de l'algorithme

- *polynomiale* en cas moyen
- *exponentielle* en pire cas avec les règles de pivotage actuelles (KLEE et MINTY, 1972)

Question ouverte

Existe-il une règle de pivotage assurant une complexité polynomiale (et donc en pire cas) ?

vs méthode des points intérieurs ?

- Performances comparables dans la pratique
- Méthode des points intérieurs plus adaptée aux très grands problèmes creux
- Ce sont les deux algorithmes utilisés dans les logiciels dédiés.