

TD04 – Théorie des Langages

Exercice 1.

Question 3.

Solution.

Solution. 1. Les grammaires $G = \langle T, N, S, P \rangle$ suivantes conviennent

$$T = \{a, b\}$$

$$N = \{S, X, Y\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow XY \\ X \rightarrow a \mid aX \\ Y \rightarrow \varepsilon \mid aYb \end{array} \right\}$$

$$T = \{a, b\}$$

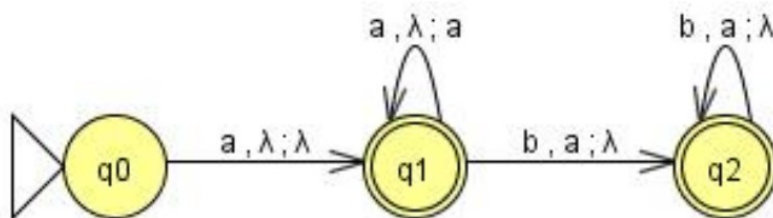
$$N = \{S, X\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid aX \\ X \rightarrow \varepsilon \mid aXb \end{array} \right\}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peut pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.



Question 4.

Solution. 1. On remarque que L_4 peut se décomposer selon :

$$\begin{aligned} L_4 &= \{a^n b^p / (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } n > p\} \cup \{a^n b^p / (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } n < p\} \\ &= \{a^p a^{n-p} b^p / (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } n > p\} \cup \{a^n b^{p-n} b^n / (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } n < p\} \\ &= \{a^n a^p b^n / (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\} \cup \{a^n b^p b^n / (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\} \end{aligned}$$

La grammaire $G = \langle T, N, S, P \rangle$ convient avec

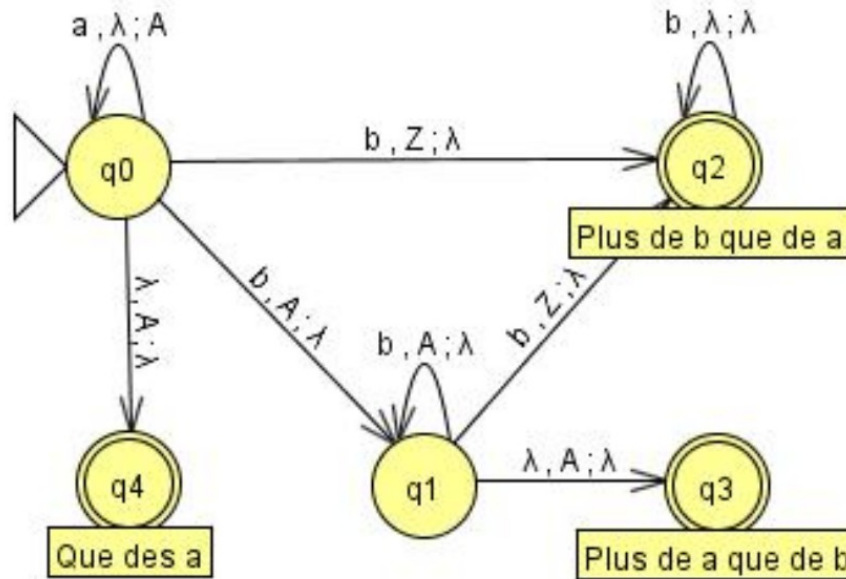
$$T = \{a, b\}$$

$$N = \{S, X, Y\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid aX \mid bY \\ X \rightarrow aX \mid \varepsilon \\ Y \rightarrow bY \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peut pas conclure qu'il est rationnel.
3. L'automate à pile suivant convient.



On empile autant de A que l'on lit de a en tête et on les dépile ensuite en lisant les b . Il suffit alors de s'assurer soit qu'il reste des A (état $q3$), soit qu'on continue à lire des b après avoir atteint le fond de la pile (état $q2$).

Question 5.

Solution. 1. La grammaire $G = \langle T, N, S, P \rangle$ convient avec

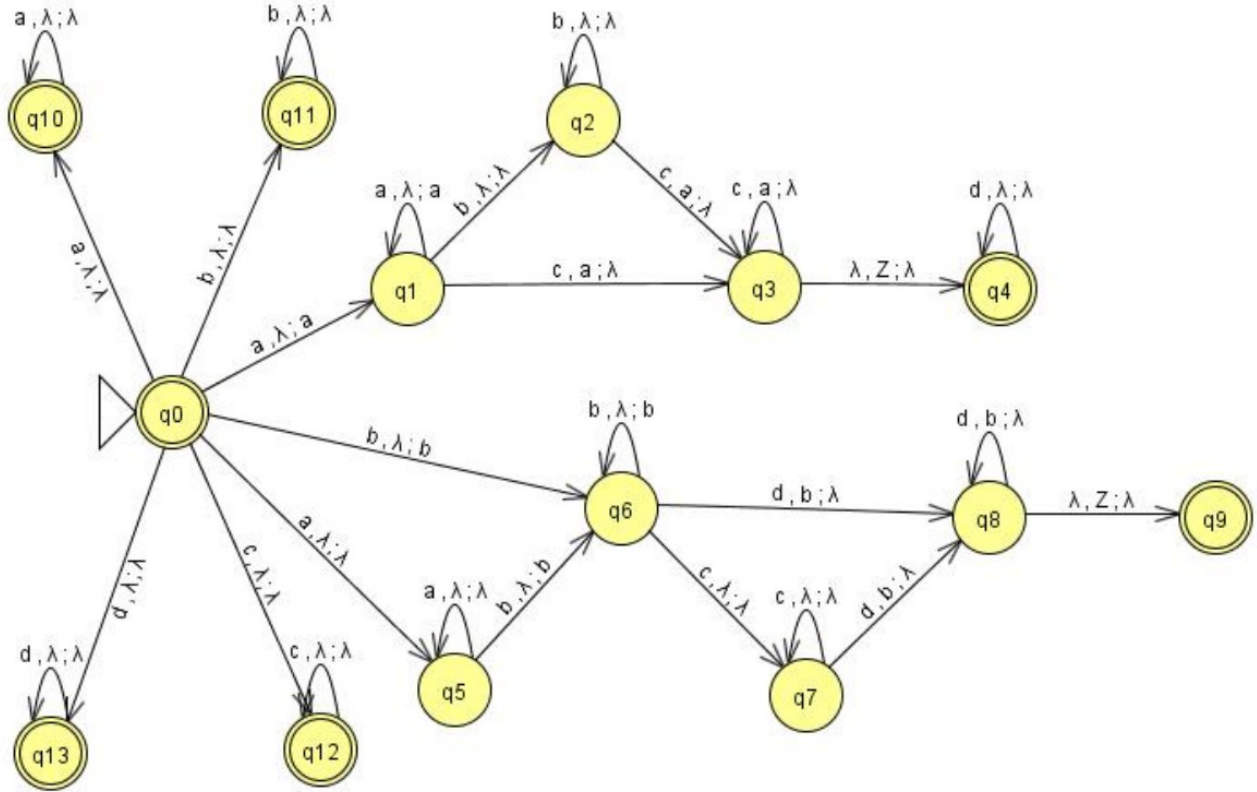
$$T = \{a, b, c, d\}$$

$$N = \{S, X, Y, Z, V, U, T\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow XY \mid VU \\ X \rightarrow aXc \mid Z \\ Z \rightarrow bZ \mid \varepsilon \\ Y \rightarrow dY \mid \varepsilon \\ U \rightarrow bUd \mid T \\ T \rightarrow cT \mid \varepsilon \\ V \rightarrow aV \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peut pas conclure qu'il est rationnel.
3. L'automate à pile suivant convient.



Question 6.

Solution. 1. Comme à la question 4, on décompose L_6 selon

$$L_6 = \{(a^n b^n) b^p (b^q c^q) / n, p, q \in \mathbb{N}\} = \{a^n b^n / n \in \mathbb{N}\} b^* \{b^q c^q / q \in \mathbb{N}\}$$

La grammaire $G = \langle T, N, S, P \rangle$ convient avec

$$T = \{a, b, c\}$$

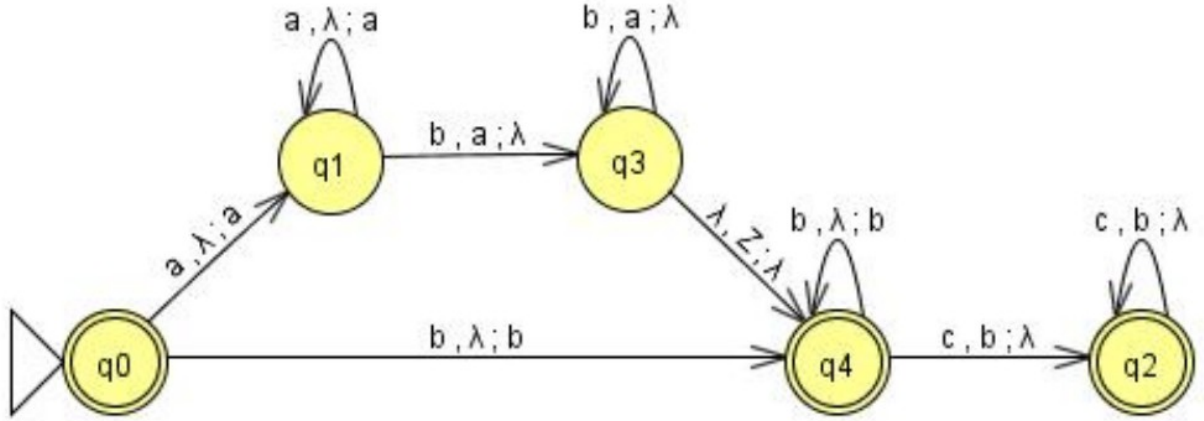
$$N = \{S, X, Y, Z\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow XYZ \\ X \rightarrow aXb \mid \varepsilon \\ Y \rightarrow bY \mid \varepsilon \\ Z \rightarrow bZc \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peut pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.



Question 7.

Solution. 1. On décompose L_7 selon

$$L_7 = \{a^n b^p / n \neq p + 2 \text{ et } n + p < 3\} \cup \{a^n b^p / n \neq p + 2 \text{ et } n + p \geq 3\}$$

$$L_7 = \{\varepsilon, a, b, ab, bb\} \cup \{a^n b^p / n > p + 2 \text{ et } n + p \geq 3\} \cup \{a^n b^p / n < p + 2 \text{ et } n + p \geq 3\}$$

$$L_7 = \{\varepsilon, a, b, ab, bb\} \cup \{a^p (a^{n+2} b^n) / p > 0\} \cup \{(a^{n+2} b^n) b^p / p > 0\}$$

La grammaire $G = \langle T, N, S, P \rangle$ convient avec

$$T = \{a, b\}$$

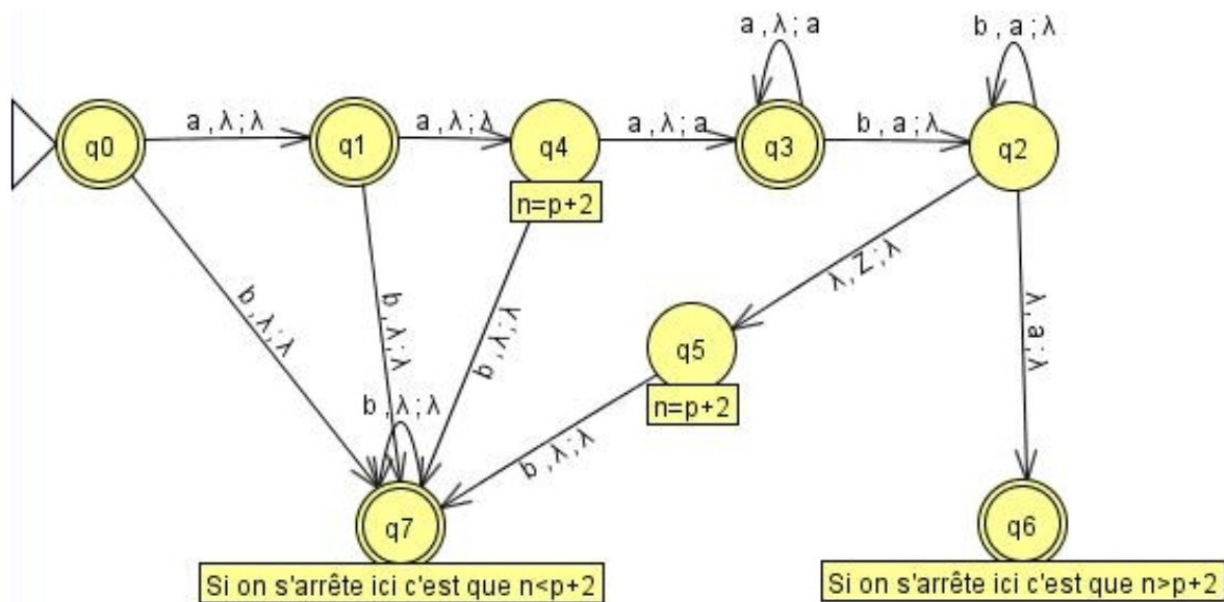
$$N = \{S, X, Y, Z\}$$

$$S = S$$

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow XY \mid YZ & \\ X \rightarrow a \mid aX & // a^+ \\ Y \rightarrow aa \mid aYb & // a^{n+2} b^n \\ Z \rightarrow b \mid bZ & // b^+ \\ S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid ab \mid bb & \end{array} \right\}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peut pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.



Question 8.

Solution. 1. La grammaire $G = \langle T, N, S, P \rangle$ convient avec

$$T = \{a, b\}$$

$$N = \{S\}$$

$$S = S$$

$$P = \{S \rightarrow aSb \mid aSbb \mid \varepsilon\}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peut pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.

