

---

# PROBABILITÉS & SIMULATION

Examen - 8 janvier 2020

---

▷ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- Autorisé : Trois feuilles A4 recto-verso manuscrites. Calculatrices fournies par l'école.
  - Non autorisé : Tout autre document et tous les supports électroniques.
- L'épreuve est composée de 6 exercices indépendants.  
- La table de la loi normale standard y est jointe.  
- Une réponse numérique donnée sous forme algébrique simplifiée est acceptée (sous forme d'une fraction réduite par exemple).

▷ Sujet de l'épreuve ▷

- On notera : v.a.r.a.c. pour variable aléatoire réelle absolument continue.

**Exercice 1.** (5.5 points)

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On dit qu'une v.a.r.a.c.  $X$  suit une loi triangulaire de paramètre  $a$  et on note

$$X \sim \mathcal{T}(a)$$

si  $X$  admet pour fonction de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{a^2}(a - |x|)\mathbf{1}_{[-a, a]}(x)$$

Soit  $X$  une v.a.r.a.c. telle que  $X \sim \mathcal{T}(a)$ .

- 1) Vérifier que  $f_X$  est bien une fonction de densité de probabilité.  
Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f_X$ .
- 2) Calculer l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  de  $X$ .
- 3) Calculer  $P(2|X| \geq a)$ .
- 4) On considère ici  $a = 1$ . Soit  $Y = \sqrt{|X|}$  une nouvelle variable aléatoire réelle.
  - a) Déterminer  $F_Y$ , la fonction de répartition de  $Y$ .
  - b) Déterminer  $f_Y$ , la fonction de densité de probabilité de  $Y$ .

**Exercice 2.** (3 points)

Soit  $X$  une v.a.r.a.c. qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , avec  $\mu = 2$  et  $\sigma = 2$ .

- 1) Calculer la probabilité que  $X$  soit supérieure ou égale à 4.5.
- 2) Calculer la probabilité que  $X$  soit dans l'intervalle  $[1, 4.5]$ .
- 3) Déterminer la valeur de  $t \in \mathbb{R}$  telle que  $P(X \geq t) = 0.33$ .

**Exercice 3.** (5 points)

Soit  $c \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire réel absolument continu dont la fonction de densité de probabilité est donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{c\sqrt{xy}} \mathbf{1}_{]0,1] \times ]0,1]}(x, y)$$

- 1) Calculer la valeur de la constante  $c$ .
- 2) Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$  (appelées lois marginales du couple  $(X, Y)$ ).
- 3) Calculer  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
- 4) Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .
- 5)  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?  
Donner la fonction de densité de probabilité de  $X$  conditionnelle à  $\{Y = y\}$ .

**Exercice 4.** (1.5 points)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète de loi :

$$\begin{cases} \bullet X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \bullet P(X = 0) = \frac{2}{3} \text{ et } P(X = 1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles discrètes de terme général :

$$X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) X$$

Montrer que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $X$ .

**Exercice 5.** (2 points)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles absolument continues telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  suit la loi continue uniforme sur  $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ .

Montrer que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la variable certaine  $X = 0$ .

**Exercice 6.** (3 points)

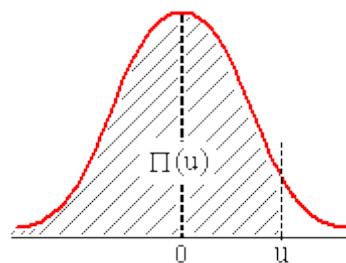
Au cours de tests d'alcoolémie effectués auprès d'automobilistes, on a relevé qu'une personne sur 25 avait un test positif. Le dimanche 15 décembre 2019, la gendarmerie de Paris a contrôlé 600 personnes ; les résultats des tests sont indépendants et on note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes ayant un test positif.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?
- 2) Donner l'espérance et l'écart-type de  $X$ .
- 3) On admet que la loi de  $X$  peut être approchée par une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
  - a) Donner les paramètres de cette loi normale.
  - b) Calculer  $P(24.5 < X < 25.5)$  et  $P(X > 30)$ .

## Table de Loi Normale

Fonction de répartition  $\Pi$  de la loi normale  
centrée réduite :  $U \sim N(0, 1)$ .

Probabilité de trouver une valeur inférieure à  $u$  :  
 $\Pi(u) = P(U \leq u)$  ;  $\Pi(-u) = P(U \leq -u) = 1 - \Pi(u)$



<b>u</b>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
<b>0.0</b>	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
<b>0.1</b>	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
<b>0.2</b>	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
<b>0.3</b>	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
<b>0.4</b>	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
<b>0.5</b>	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
<b>0.6</b>	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
<b>0.7</b>	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
<b>0.8</b>	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
<b>0.9</b>	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
<b>1.0</b>	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
<b>1.1</b>	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
<b>1.2</b>	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	<b>0.89617</b>	0.89796	0.89973	0.90147
<b>1.3</b>	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
<b>1.4</b>	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
<b>1.5</b>	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
<b>1.6</b>	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
<b>1.7</b>	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
<b>1.8</b>	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
<b>1.9</b>	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
<b>2.0</b>	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
<b>2.1</b>	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
<b>2.2</b>	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
<b>2.3</b>	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
<b>2.4</b>	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
<b>2.5</b>	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
<b>2.6</b>	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
<b>2.7</b>	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
<b>2.8</b>	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
<b>2.9</b>	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
<b>3.0</b>	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
<b>3.1</b>	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
<b>3.2</b>	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
<b>3.3</b>	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
<b>3.4</b>	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
<b>3.5</b>	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
<b>3.6</b>	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
<b>3.7</b>	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992

Exemple :  $\Pi(1.26) = P(U \leq 1.26) = 0.89617 = 89.62\%$

# Fractiles de la Loi Normale

$U \rightarrow N(0 . 1)$ .

Pour  $P < 0.5$  (colonne de gauche et ligne supérieure). les fractiles sont négatifs.

Pour  $P > 0.5$  (colonne de droite et ligne inférieure). les fractiles sont positifs.

P	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01	
<b>0</b>	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	<b>0.99</b>
<b>0.01</b>	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	<b>0.98</b>
<b>0.02</b>	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	<b>0.97</b>
<b>0.03</b>	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	<b>0.96</b>
<b>0.04</b>	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	<b>0.95</b>
<b>0.05</b>	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	<b>0.94</b>
<b>0.06</b>	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	<b>0.93</b>
<b>0.07</b>	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	<b>0.92</b>
<b>0.08</b>	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	<b>0.91</b>
<b>0.09</b>	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	<b>0.90</b>
<b>0.10</b>	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	<b>0.89</b>
<b>0.11</b>	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	<b>0.88</b>
<b>0.12</b>	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	<b>0.87</b>
<b>0.13</b>	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	<b>0.86</b>
<b>0.14</b>	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	<b>0.85</b>
<b>0.15</b>	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	<b>0.84</b>
<b>0.16</b>	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	<b>0.83</b>
<b>0.17</b>	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	<b>0.82</b>
<b>0.18</b>	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	<b>0.81</b>
<b>0.19</b>	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	<b>0.80</b>
<b>0.20</b>	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	<b>0.79</b>
<b>0.21</b>	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	<b>0.78</b>
<b>0.22</b>	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	<b>0.77</b>
<b>0.23</b>	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	<b>0.76</b>
<b>0.24</b>	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	<b>0.75</b>
<b>0.25</b>	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	<b>0.74</b>
<b>0.26</b>	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	<b>0.73</b>
<b>0.27</b>	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	<b>0.72</b>
<b>0.28</b>	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	<b>0.71</b>
<b>0.29</b>	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	<b>0.70</b>
<b>0.30</b>	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	<b>0.69</b>
<b>0.31</b>	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	<b>0.68</b>
<b>0.32</b>	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	<b>0.67</b>
<b>0.33</b>	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	<b>0.66</b>
<b>0.34</b>	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	<b>0.65</b>
<b>0.35</b>	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	<b>0.64</b>
<b>0.36</b>	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	<b>0.3425</b>	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	<b>0.63</b>
<b>0.37</b>	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	<b>0.62</b>
<b>0.38</b>	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	<b>0.61</b>
<b>0.39</b>	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	<b>0.60</b>
<b>0.40</b>	0.2533	0.2508	<b>0.2482</b>	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	<b>0.59</b>
<b>0.41</b>	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	<b>0.58</b>
<b>0.42</b>	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	<b>0.57</b>
<b>0.43</b>	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	<b>0.56</b>
<b>0.44</b>	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	<b>0.55</b>
<b>0.45</b>	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	<b>0.54</b>
<b>0.46</b>	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	<b>0.53</b>
<b>0.47</b>	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	<b>0.52</b>
<b>0.48</b>	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	<b>0.51</b>
<b>0.49</b>	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	<b>0.50</b>
	<b>0.01</b>	<b>0.009</b>	<b>0.008</b>	<b>0.007</b>	<b>0.006</b>	<b>0.005</b>	<b>0.004</b>	<b>0.003</b>	<b>0.002</b>	<b>0.001</b>	<b>0</b>	<b>P</b>

Exemples :  $\Pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.6340 \Rightarrow u = 0.3425$  ;  $\Pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.4020 \Rightarrow u = -0.2482$