

Algorithmique procédurale avancée

Examen - ING1 GI

9 mai 2023

Modalités

- Durée : 2 heures
- Vous devez rédiger votre copie à l'aide d'un **stylo à encre** exclusivement.
- Toutes vos affaires (sacs, vestes, trousse, etc.) doivent être placées à l'avant de la salle.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine électronique ne doit se trouver sur vous ou à proximité, même éteinte.
- Aucun déplacement n'est autorisé.
- **Aucune question au professeur n'est autorisée.** Si vous pensez avoir détecté une erreur, continuez en expliquant les hypothèses que vous faites.
- Aucun échange, de quelque nature que ce soit, n'est possible.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- **Merci d'écrire très lisiblement votre numéro de groupe (GIn).**

Exercice 1 : Cours et Application de cours (6 pts)

1. Qu'est-ce qu'un algorithme glouton ? Donner un exemple d'algorithme glouton vu en cours. (1 pt)
2. Soit un graphe simple et connexe G avec des poids distincts deux à deux. Montrer que l'arbre couvrant de poids minimal de G est unique. (1 pt)
3. Soit un graphe simple et connexe G avec des poids distincts deux à deux. Montrer que l'arête adjacente de poids minimal de chaque sommet appartient à l'arbre couvrant de poids minimal de G . (1 pt)
4. Qu'est-ce qu'un graphe planaire ? Tous les graphes simples à 4 sommets sont-ils planaires ? Justifier. (1 pt)
5. Donner la définition du nombre chromatique d'un graphe non orienté. Quel algorithme vu en cours permet de trouver une approximation du nombre chromatique ? Trouver un exemple de graphe où l'exécution de cet algorithme ne donne pas le résultat exact. (1,5 pts)
6. Donner la définition d'une composante fortement connexe d'un graphe. (0,5 pt)

Exercice 2 : Détection de circuit (4,5 pts)

Soit G un graphe orienté.

7. Quel(s) algorithme(s) peut-on modifier pour détecter un éventuel circuit (cycle orienté) ? (0,5 pt)
8. Détails la modification de l'algorithme. (1 pt)
9. Écrire un algorithme qui prend en entrée un graphe orienté et retourne un circuit (éventuellement vide si jamais le graphe n'en a pas). (3 pts)

Exercice 3 : Digicode (9,5 pts)

On considère un digicode avec les 10 lettres de A à J. On suppose que le code est de n lettres.

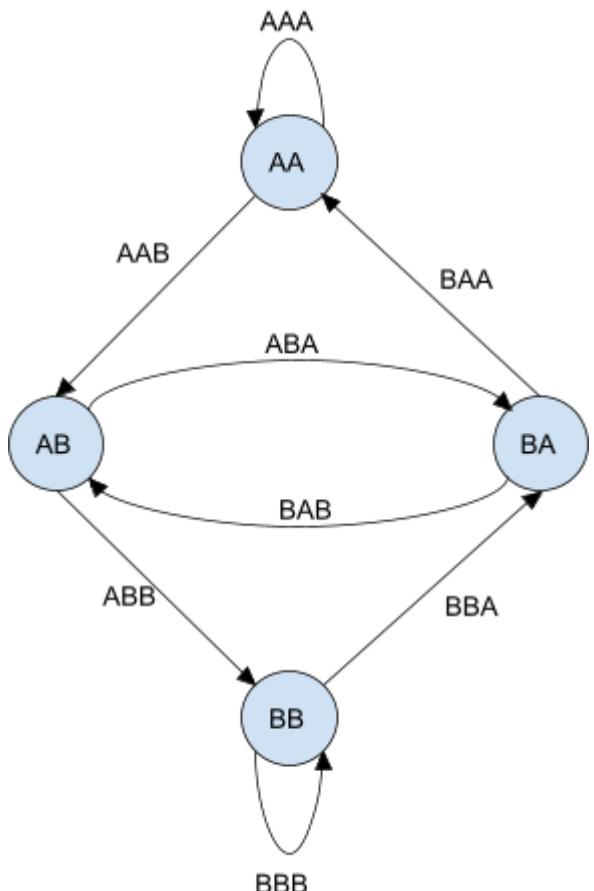
10. Combien de combinaisons y a-t-il si le digicode est réinitialisé après chaque tentative de n lettres ? (0,5 pt)

On suppose pour toute la suite que le digicode dispose d'une mémoire de n lettres et qu'on a trouvé le code si on tape une suite qui le contient. Par exemple, si on a un code de longueur 4 et que l'on tape ABCDEF, on aura essayé ABCD, BCDE et CDEF.

L'objectif de ce problème est de déterminer la plus courte suite de lettres qui garantit que l'on a essayé toutes les combinaisons de n lettres et qu'on a donc trouvé le code.

On modélise ce problème par un graphe orienté et valué. Les sommets sont les suites de $n-1$ lettres. Chaque arc relie deux sommets (éventuellement identiques) S1 et S2 tels que les $n-2$ dernières lettres de S1 sont identiques aux $n-2$ premières lettres de S2. L'arc est valué par les $n-1$ lettres de S1 suivies de la dernière de S2.

Si on restreint l'alphabet à {A,B} et le code à une longueur de 3, on obtient le graphe ci-contre.



11. Dans le cas général d'un alphabet à x lettres et d'un code à n lettres, justifier très précisément le nombre de sommets et le nombre d'arcs. (1 pt)
12. Expliquer pourquoi il existe toujours un circuit qui passe exactement une fois par tous les arcs. (1 pt)
13. Par analogie avec une notion vue en cours, comment appelle-t-on ce circuit ? (0,5 pts)
14. Écrire un algorithme qui détermine un tel circuit. (3,5 pts)
15. Écrire un algorithme qui calcule la séquence de lettres à taper pour garantir de trouver le code en fonction du résultat de la question précédente. (3 pts)