Correction examen d'optimisation linéaire mai 23

Exercice. On considère le problème d'optimisation linéaire (P) $\begin{cases} \min & 4x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1\,, \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$.

On note également $(\overline{P})$ le problème relaxé de (P).

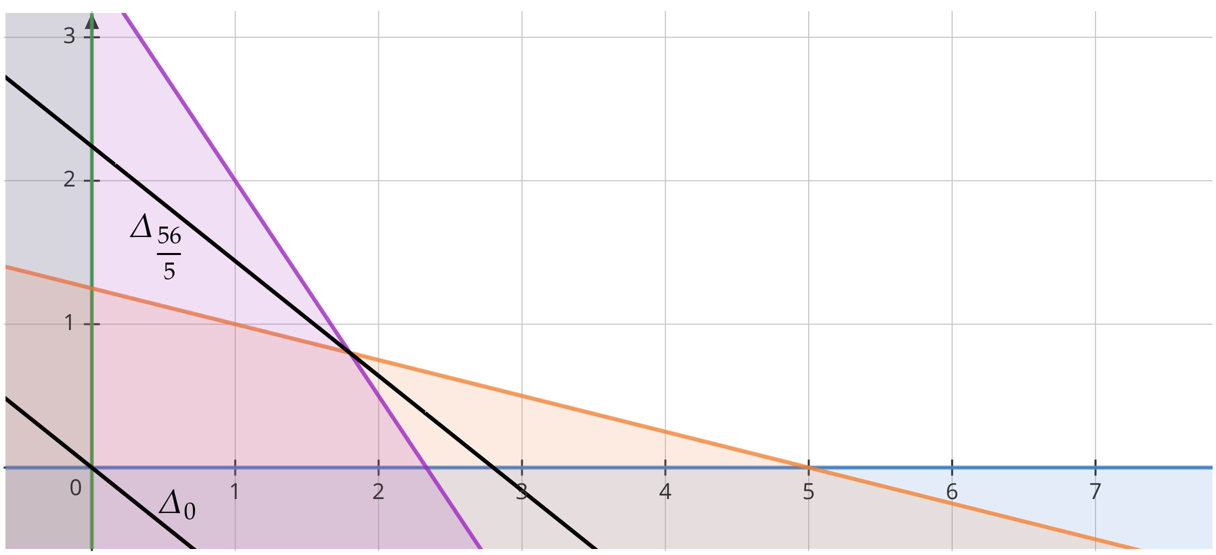
a. Mettre (P) sous forme canonique.

b. Résoudre $(\overline{P})$ par méthode géométrique sur la feuille de papier millimétré jointe.

(a) Mise sous forme canonique :

$$(P)\begin{cases} \max(-4x_1 - 5x_2) \\ -x_1 - 4x_2 \leqslant -5 \\ -3x_1 - 2x_2 \leqslant -7 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(b) Résolution par méthode géométrique du problème relaxé $(\overline{P})$:



Point optimal $=$ intersection des 2 contraintes : $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{5} \\ x_2 = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Solution du problème relaxé : $\begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{5} \\ x_2^* = \dfrac{4}{5} \end{cases}$ et $f^* = \dfrac{56}{5}$.

c. *(i)* Résoudre le problème dual $(\overline{D})$ de $(\overline{P})$.

(ii) En déduire par dualité et complémentarité un optimum de $(\overline{P})$.

c. (i) Le dual $(\overline{D})$ de $(\overline{P})$ est donné par :

$$(\overline{D})\begin{cases} \max(5u_1 + 7u_2) \\ u_1 + 3u_2 \leqslant 4 \\ 4u_1 + 2u_2 \leqslant 5 \\ u_1, u_2 = 0 \end{cases}$$

	u_1	u_2	v_1	v_2	S.M.
f	5	7	0	0	0
y_1	1	3	1	0	4
y_2	4	2	0	1	5

Var. IN : u_2 Var. OUT : v_1

	u_1	u_2	v_1	v_2	S.M.
f	8/3	0	-7/3	0	-28/3
u_2	1/3	1	1/3	0	4/3
y_2	10/3	0	-2/3	1	7/3

Var. IN : u_1 Var. OUT : y_2

	u_1	u_2	v_1	v_2	S.M.
f	0	0	-9/5	-4/5	-56/5
u_2	0	1	2/5	-1/10	11/10
u_1	1	0	-1/5	3/10	7/10

La solution de $(\overline{D})$ est donc $\begin{cases} u_1^* &= \dfrac{7}{10} \\ u_2^* &= \dfrac{11}{10} \end{cases}$ et $f^* = \dfrac{56}{5}$

c. (i) A partir de la solution de $(\overline{D})$, on peut déterminer la solution de $(\overline{P})$ par 2 méthodes :

- **Lecture directe du dernier tableau** :
  Les coordonnées de l'optimum sont les opposés des coefs des variables d'écart dans la ligne L_f.

Ceci nous donne bien : $\begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{5} \\ x_2^* = \dfrac{4}{5} \end{cases}$ et donc : $f^* = \dfrac{56}{5}$

- **Le théorème de complémentarité** nous permet d'écrire :

$u_1^* = \dfrac{7}{10} \neq 0 \implies x_1^* + 4x_2^* = 5$ (1ère composante non nulle implique 1ère contrainte saturée).

$u_2^* = \dfrac{11}{10} \neq 0 \implies 3x_1^* + 2x_2^* = 7$ (2ème composante non nulle implique 2ème contrainte saturée).

Et finalement : $\begin{cases} x_1^* + 4x_2^* = 5 \\ 3x_1^* + 2x_2^* = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{5} \\ x_2^* = \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

d. *Sans passer par le problème dual,* résoudre $(\overline{P})$ en utilisant la méthode des tableaux, avec la méthode des deux phases si nécessaire.

(d) La forme canonique de $(\overline{P})$ est la suivante :

$$(\overline{P}) \begin{cases} \max(-4x_1 - 5x_2) \\ -x_1 - 4x_2 \leqslant -5 \\ -3x_1 - 2x_2 \leqslant -7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

L'origine n'étant pas admissible, nous devons passer par la méthode des 2 phases.

<u>Phase 1 :</u> $\left(\overline{P^a}\right) \begin{cases} \max(-\delta) \\ -x_1 - 4x_2 - \delta \leqslant -5 \\ -3x_1 - 2x_2 - \delta \leqslant -7 \\ x_1, x_2, \delta \geqslant 0 \end{cases}$

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	S.M.
f	0	0	-1	0	0	0
y_1	-1	-4	-1	1	0	-5
y_2	-3	-2	-1	0	1	-7

On force l'entrée de δ et la sortie de y_2(le plus petit second membre)

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	S.M.
f	3	2	0	0	-1	7
y_1	2	-2	0	1	-1	2
δ	3	2	1	0	-1	7

Var. IN : x_1 Var. OUT : y_1

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	S.M.
f	0	5	0	-3/2	1/2	4
x_1	1	-1	0	1/2	-1/2	1
δ	0	5	1	-3/2	1/2	4

Var. IN : x_2 Var. OUT : δ

	x_1	x_2	δ	y_1	y_2	S.M.
f	0	0	-1	0	0	0
x_1	1	0	1/5	1/5	-2/5	9/5
x_2	0	1	1/5	-3/10	1/10	4/5

Fin de la phase 1 avec $\delta^* = 0$. On peut donc passer à la phase 2.

Phase 2 :

Fonction objectif : $-4x_1 - 5x_2 = -4\left(\frac{9}{5} - \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2\right) - 5\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{10}y_1 - \frac{1}{10}y_2\right)$

$$= \frac{-56}{5} - \frac{7}{10}y_1 - \frac{11}{10}y_2$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	S.M.
f	0	0	-7/10	-11/10	56/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	9/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	4/5

On retrouve encore la solution : $\begin{cases} x_1^* = \frac{9}{5} \\ x_2^* = \frac{4}{5} \end{cases}$ et donc : $f^* = \frac{-56}{5}$

Le signe $-$ devant f^* est du à la mise sous form canonique.

e. Résoudre (P) par la méthode des coupes.

(e) Les 2 composantes de la solution du problème relaxé ont la même partie fractionnaire.
On va donc partir de la 1ère pour construire la 1ère coupe.
D'après le dernier tableau, la contrainte correspondante à x_1 est :

$$x_1 + \frac{1}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2 = \frac{9}{5}$$

L'équation de la 1ère coupe sera donc :

$$-\frac{1}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2 \leqslant -\frac{4}{5}$$

On rajoute cette nouvelle contrainte et on applique la méthode primale-duale.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	0	0	-7/10	-11/10	0	56/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	0	4/5
y_3	0	0	-1/5	-3/5	1	-4/5

On fait sortir y_3 et on fait entrer la var. qui réalise le minimum :

$$\min\left(\frac{-7/10}{-1/5} ; \frac{-11/10}{-3/5}\right) = \frac{11}{3}.$$

Donc on fait entrer y_2.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	0	0	-1/3	0	-11/6	38/3
x_1	1	0	1/3	0	-2/3	7/3
x_2	0	1	-1/3	0	1/6	2/3
y_2	0	0	1/3	1	-5/3	4/3

La solution obtenue après la 1ère coupe n'est toujours pas entière : $\begin{cases} x_1^* = \dfrac{7}{3} \\ x_2^* = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

C'est x_2 qui a la plus grande partie fractionnaire. C'est donc à partir de x_2 que l'on va construire la 2ème coupe.

Contrainte correspondante : $x_2 - \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_3 = \frac{2}{3}$ donne comme **2ème coupe** :

$$-\frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{6}y_3 \leqslant -\frac{2}{3}$$

On rajoute cette nouvelle contrainte et on applique la méthode primale-duale.

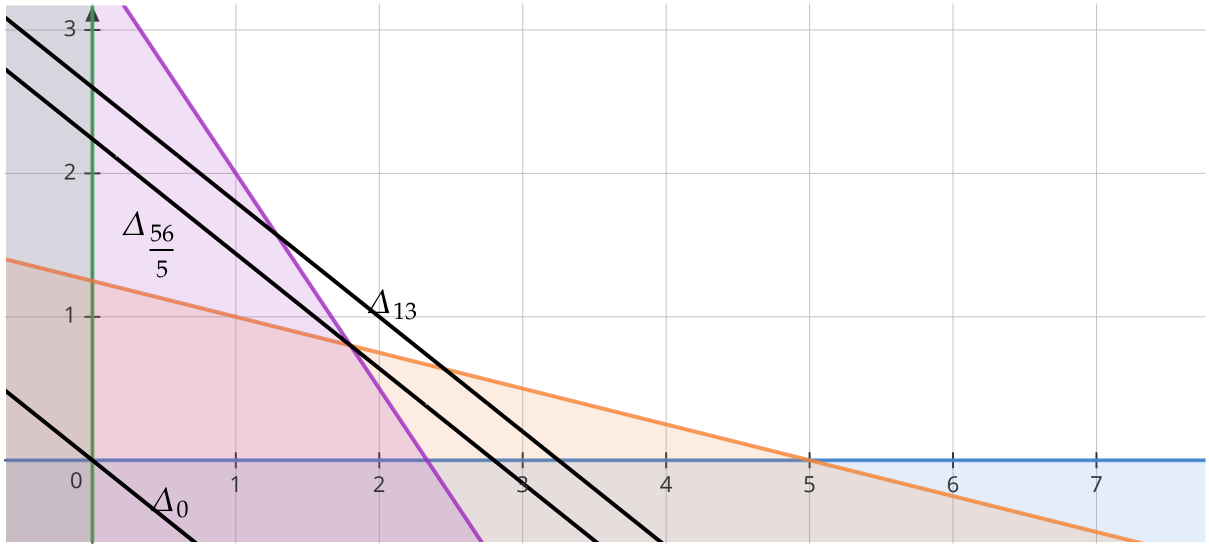
	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	-1/3	0	-11/6	0	38/3
x_1	1	0	1/3	0	-2/3	0	7/3
x_2	0	1	-1/3	0	1/6	0	2/3
y_2	0	0	1/3	1	-5/3	0	4/3
y_4	0	0	-2/3	0	-1/6	1	-2/3

On fait sortir y_4 et on fait entrer la var. qui réalise le minimum : $\min\left(\frac{-1/3}{-2/3} ; \frac{-11/6}{-1/6}\right) = \frac{1}{2}$.

Donc on fait entrer y_1.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	S.M.
f	0	0	0	0	-7/4	-1/2	13
x_1	1	0	0	0	-3/4	1/2	2
x_2	0	1	0	0	1/4	-1/2	1
y_2	0	0	0	1	-7/4	1/2	1
y_1	0	0	1	0	1/4	-3/2	1

On obtient enfin la solution entière espérée : $\begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$ et $f^* = -13$.



f. **[ING1 Mathématiques Appliquées uniquement]**

À l'aide de la méthode « primale-duale », résoudre le problème (P') $\begin{cases} \min & 4x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq -1 \\ & x_1\,, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$.

(f) Il s'agit du problème $(\overline{P})$ auquel on a ajouté une nouvelle contrainte.

On repart du dernier tableau de résolution de $(\overline{P})$:

	x_1	x_2	y_1	y_2	S.M.
f	0	0	-7/10	-11/10	56/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	9/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	4/5

Il faut réécrire la nouvelle contrainte en fonction de variables hors base :

$$-2x_1 + 4x_2 \leqslant -1 \iff -2\left(\frac{9}{5} - \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2\right) + 4\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{10}y_1 - \frac{1}{10}y_2\right) \leqslant -1$$

$$\iff \frac{8}{5}y_1 - \frac{6}{5}y_2 \leqslant -\frac{3}{5}$$

On injecte la version standadrisée de cette contrainte dans le tableau et on applique la méthode primale-duale.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	0	0	-7/10	-11/10	0	56/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	0	4/5
y_3	0	0	8/5	-6/5	1	-3/5

On fait sortir y_3 et on fait entrer y_2. L'autre rapport est négatif et doit être oublié.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	S.M.
f	0	0	-13/6	0	-11/12	47/4
x_1	1	0	-1/3	0	-1/3	2
x_2	0	1	-1/6	0	1/12	3/4
y_2	0	0	-4/3	1	-5/6	1/2

La solution finale est donc : $\begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ et $f^* = -\dfrac{47}{4}$

g. **[ING1 Informatique uniquement]**
La figure 1 page suivante donne l'arborescence obtenue par séparation et évaluation (*branch and bound*) de la forme canonique de (P) avec les règles :
— *choix du problème à traiter* : règle de la plus grande valeur ;
— *choix de la variable de séparation* : règle de la plus grande distance à un entier.

(i) Sous ces hypothèses, rajouter les contraintes manquantes dans l'arborescence.

(ii) Proposer un ordre de traitement correct des nœuds de l'arborescence par la méthode de séparation et évaluation avec ces règles et trouver un optimum de $(\overline{P})$.

(i) La séparation se fait selon la composante, non entière, qui a la partie fractionnaire la plus proche de 0.5, ce qui nous donne :

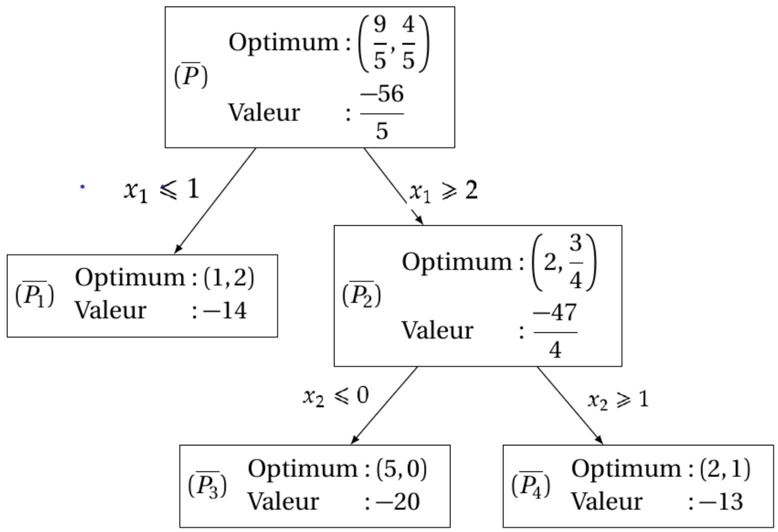


FIGURE 1 – Arbre obtenu par séparation et évaluation

(ii) L'ordre de traitement est le suivant :

Après $(\overline{P})$, on traite $\left(\overline{P_2}\right)$ qui donne le meilleur optimum $f = \dfrac{-47}{4} > -14$ entre les 2 branches.

Ensuite on traite $\left(\overline{P_4}\right)$ qui donne une solution entière $f = -13 > -20$. Qui devient la meilleure solution entière.

On passe ensuite à $\left(\overline{P_1}\right)$ qui donne encore une solution entière, moins intéressante, donc inutile.

On finit avec $\left(\overline{P_3}\right)$ qui donne une solution entière avec $f = -14$ moins intéressante, donc inutile également.

Il n'y a plus de problème à traiter.

La solution est donc bien celle donnée par $\left(\overline{P_4}\right)$: $\begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$ et $f^* = -13$.