Exercices sur les graphes orientés

Exercice 1

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, On définit pour chaque sommet $x \in X$ deux ensembles :

- L'ensemble des descendants de x : $D(x)$
- L'ensemble des ascendants de x : $A(x)$

Principe : A partir d'un sommet r, on calcule la c.f.c. à laquelle appartient r.

- On calcule l'ensemble des descendants de r (noté D).
- On calcule l'ensemble des ascendants de r (noté A).
- c.f.c. est $\{r\} \cup A \cap D$.

1. Définir formellement les ensembles $D(x)$ et $A(x)$, pour un sommet x du graphe.
2. Justifier la correction de la proposition donnée ci-dessus.
3. Donner un pseudo code, ensuite un code python pour calculer $D(x)$.
4. Refaire la question 3 pour calculer $A(x)$.
5. Donner un pseudo code, ensuite un code python pour calculer la composante fortement connexe à laquelle appartient un sommet x. Calculer la complexité de votre code.
6. Trouver toutes les composantes fortement connexes du graphe donné ci-dessous :

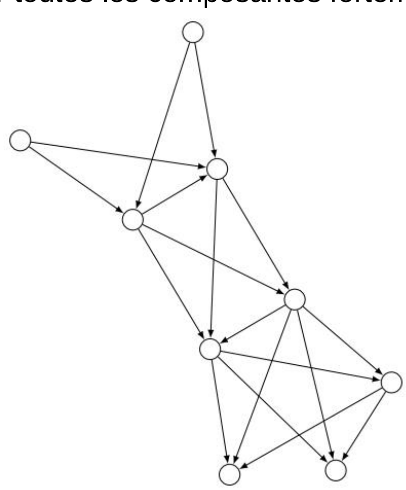

Figure 1.

7. Peut-on trouver des sommets sources ou puits dans une composante fortement connexe ? Justifier votre réponse.
8. Donner une application pratique des composantes fortement connexes d'un graphe.
9. Étudier l'algorithme Tarjan [1]. Trouver les composantes fortement connexes du graphe de la Figure 1.

Exercice 2

A tout graphe orienté $G = (X, U)$ on associe le graphe simple $G_R = (X_R, U_R)$ appelé graphe réduit de G défini comme suit :

$X_R = \{$A chaque c.f.c. C_i de G correspond un sommet $C_i\}$

$U_R = \{(Ci, Cj)/i \neq j \text{ et } \exists x \in C_i \text{ et } \exists y \in C_j \text{ et } (x, y) \in U\}$

1. Donner le graphe réduit du graphe suivant :

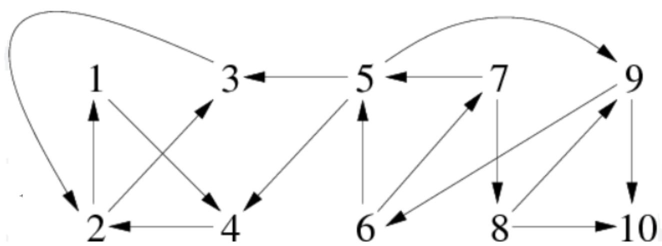

Figure 2.

2. Est-ce qu'un graphe réduit d'un graphe peut comporter des circuits ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

1. Donner un ordre topologique du graphe donné dans la Figure 3. DFS(G,A) → DFS(G,B)
2. Montrer qu'il n'existe pas de tri pour le graphe donné dans la Figure 4.

Ordonner les noeuds par ordre décroissant de leur dates postérité (ordre topologique)

⇒ B A C D E F H I G

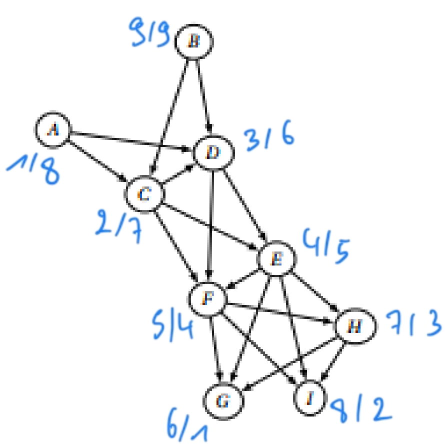

Figure 3.

⇒ ∅ tri car cycle $v_2 v_5 v_6$

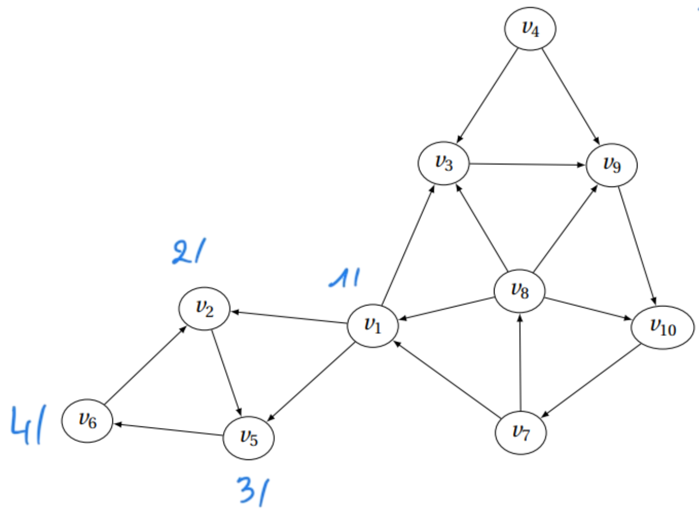

Figure 4.

↳ détect° du cycle ⇒ ∅ tri topologique

Exercice 4

Le graphe ci-dessous donne le temps(très) indicatif en minutes de parcours en métro/RER/OrlyBus entre deux stations.

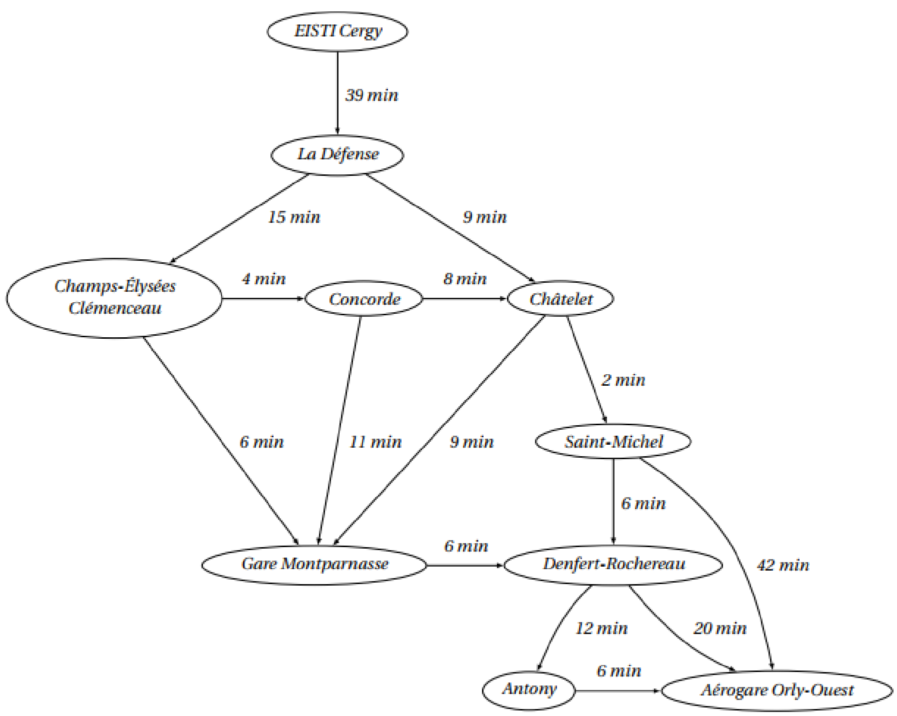

Figure 5.

Quel est le chemin le plus court de l’école jusqu’à la gare ? jusqu’à l’aéroport ?

Exercice 5

Etant donné un graphe $G = (X; U)$ orienté sans circuits d’ordre n, on souhaite dans cette partie partitionner les sommets du graphe G en niveaux. Un sommet x appartient au niveau l si le plus long chemin aboutissant en x
est de longueur l.

1. Donner deux algorithmes pour réaliser une partition en niveaux d’un graphe.
2. Calculer la complexité de vos algorithmes et les tester.

Référence bibliographique

https://www.baeldung.com/cs/scc-tarjans-algorithm