

Exercice Supplémentaire (Quantitatif & Qualitatif)

X: type de forêt	Y : hauteurs des arbres				Total
	de 21 ²² à 23 m	de 23 ²⁴ à 25 m	25 à ²⁶ 27 m	27 à ²⁸ 29 m	
Type 1	0	3	7	3	13
Type 2	1	6	6	1	14
Type 3	5	5	0	0	10
Total	6	14	13	4	37

- Calculer les variances inter-classes, intra classe et la variance totale.
- Donner le rapport de corrélation entre X et Y.

Corrigé :

On a 2 variables.

X : type de forêt (de Type qualitatif)

Y : hauteurs des arbres (quantitatif continu).

On représente chaque classe de Y par leur centre.

$$\text{Centre classe} = \frac{a+b}{2}$$

[a, b]

①

① Variance inter-classes :

$$Var^{(inter)}(y) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\text{③}} n_l \cdot (\bar{y}_l - \bar{y})^2$$

→ on a 3 modalités

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{\text{⑬}} [(6 \times 22) + (3 \times 24) + (7 \times 26) + (3 \times 28)]$$

= 26 m

→ eff type 1

[$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ sont les moyennes de Type 1, Type 2 et Type 3]

$$\bar{y}_2 = 25 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 = 23 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{③⑦}} [(6 \times 22) + (14 \times 24) + (13 \times 26) + (4 \times 28)]$$

total = 24,8 m

$$Var^{(inter)}(y) = \frac{1}{37} [13 (26 - 24,8)^2 + 14 (25 - 24,8)^2 + 10 (23 - 24,8)^2]$$

$$Var^{(inter)}(y) = 1,497$$

②

② Variance intra-classes.

$$\text{Var}^{\text{intra}}(y) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^3 n_l \cdot S_l^2$$

$$S_1^2 = \frac{1}{13} \left[0(22 - 26)^2 + 3(24 - 26)^2 + 7(26 - 26)^2 + 3(28 - 26)^2 \right] = 1,85$$

Variance
fait type 1

\bar{y}_1 : Moyenne de type 1

$$S_2^2 = \frac{1}{14} \left[1(22 - 25)^2 + 6(24 - 25)^2 + 6(26 - 25)^2 + 1(28 - 25)^2 \right] = 2,14$$

$$S_3^2 = \frac{1}{10} \left[5(22 - 23)^2 + 5(24 - 23)^2 + 0(26 - 23)^2 + 0(28 - 23)^2 \right] = 0,5$$

$$\text{Var}^{\text{intra}}(y) = \frac{1}{37} \left[(13 \times 1,85) + (14 \times 2,14) + (10 \times 0,5) \right]$$

Moyenne des
variances

$$= 1,69$$

③

③ Variance totale: $V(y)$

$$V(y) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^3 n_l (y_l - \bar{y})^2$$

Moyenne générale

$$= \frac{1}{37} \left[6(22 - 24,8)^2 + 14(24 - 24,8)^2 + 13(26 - 24,8)^2 + 4(28 - 24,8)^2 \right]$$

$$= 3,126 \text{ m}^2.$$

ou

$$V(y) = \text{Var}^{\text{inter}}(y) + \text{Var}^{\text{intra}}(y)$$

$$= 1,427 + 1,6$$

$$= 3 \text{ m}^2$$

(Légère différence due au arrondissement des valeurs).

• Rapport de Corrélation :

$$\frac{\text{Var}^{\text{inter}}(y)}{\text{Var}^{\text{total}}(y)}$$

$$= \frac{1,4}{3,126} \approx 0,45 = 45\%$$

On constate que le type de forêt explique à 45% la variabilité (ou variation) des hauteurs d'arbres.

④