Optimisation linéaire

Romain Dujol, Jean-Paul Forest

CY Tech – ING1-IN

2022 – 2023

Dualité

Introduction

Exemple introductif
Définition

Certificats d'optimalité

Dualité faible
Dualité forte
Complémentarité
Interprétation d'un optimum dual

Méthode « primale-duale »

Motivation
Principe
Disposition pratique

Introduction

Introduction

Exemple introductif

Retour au problème du brasseur

Formulation du problème

Le brasseur souhaite arrêter son activité et vendre ses stocks :

- 240 kg de maïs ;
- 5 kg de houblon ;
- 595 kg de malt.

Un repreneur est intéressé et fait une offre :

- le brasseur n'acceptera cette offre que si elle lui rapporte plus que de produire à partir de ses stocks ;
- le repreneur souhaite minimiser ses coûts.

Retour au problème du brasseur

Choix des variables

- u_1 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de maïs ;
- u_2 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de houblon ;
- u_3 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de malt.

Retour au problème du brasseur

Choix des variables

- u_1 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de maïs ;
- u_2 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de houblon ;
- u_3 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de malt.

On obtient alors les quantités suivantes (en euros) :

Retour au problème du brasseur

Choix des variables

- u_1 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de maïs ;
- u_2 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de houblon ;
- u_3 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de malt.

On obtient alors les quantités suivantes (en euros) :

- prix d'achat total : $240u_1 + 5u_2 + 595u_3$

Retour au problème du brasseur

Choix des variables

- u_1 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de maïs ;
- u_2 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de houblon ;
- u_3 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de malt.

On obtient alors les quantités suivantes (en euros) :

- prix d'achat total : $240u_1 + 5u_2 + 595u_3$
- les bénéfices unitaires équivalents par type de produit :

Retour au problème du brasseur

Choix des variables

- u_1 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de maïs ;
- u_2 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de houblon ;
- u_3 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de malt.

On obtient alors les quantités suivantes (en euros) :

- prix d'achat total : $240u_1 + 5u_2 + 595u_3$
- les bénéfices unitaires équivalents par type de produit :
  - tonneau de bière blonde : $2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3$;

Retour au problème du brasseur

Choix des variables

- u_1 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de maïs ;
- u_2 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de houblon ;
- u_3 : prix (en euros) de rachat d'un kilo de malt.

On obtient alors les quantités suivantes (en euros) :

- prix d'achat total : $240u_1 + 5u_2 + 595u_3$
- les bénéfices unitaires équivalents par type de produit :
  - tonneau de bière blonde : $2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3$;
  - tonneau de bière brune : $7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3$.

Retour au problème du brasseur

Contraintes

Retour au problème du brasseur

Contraintes

- le prix des quantités nécessaires à la production d'un tonneau de bière blonde est supérieur au prix de vente du produit fini :

$$2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39$$

Retour au problème du brasseur

Contraintes

- le prix des quantités nécessaires à la production d'un tonneau de bière blonde est supérieur au prix de vente du produit fini :

$$2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39$$

- le prix des quantités nécessaires à la production d'un tonneau de bière brune est supérieur au prix de vente du produit fini :

$$7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69$$

Retour au problème du brasseur

Contraintes

- le prix des quantités nécessaires à la production d'un tonneau de bière blonde est supérieur au prix de vente du produit fini :

$$2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39$$

- le prix des quantités nécessaires à la production d'un tonneau de bière brune est supérieur au prix de vente du produit fini :

$$7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69$$

- les prix unitaires sont positifs : $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$.

Retour au problème du brasseur

Contraintes

- le prix des quantités nécessaires à la production d'un tonneau de bière blonde est supérieur au prix de vente du produit fini :

$$2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39$$

- le prix des quantités nécessaires à la production d'un tonneau de bière brune est supérieur au prix de vente du produit fini :

$$7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69$$

- les prix unitaires sont positifs : $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$.

Critère

Minimiser le prix d'achat total, i.e. la quantité $240u_1 + 5u_2 + 595u_3$.

Retour au problème du brasseur

Formulation complète

$$(D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Retour au problème du brasseur

Formulation complète

$$
(D)\begin{cases}
\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\
& 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\
& 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\
& u_1\ ,\quad u_2\ ,\quad u_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Solution : $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (6, 192, 0)$

Formulation complète

$$(D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1\ ,\quad u_2\ ,\quad u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution : $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (6, 192, 0)$

Rappel

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1\ ,\quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Retour au problème du brasseur

Formulation complète

$$(D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1 , \; u_2 , \; u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution : $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (6, 192, 0)$

Rappel

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1 , \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 28)$

Retour au problème du brasseur

Formulation complète

$$(D)\begin{cases}\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3)\\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39\\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69\\ & u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3 \geq 0\end{cases}$$

Solution : $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (6, 192, 0)$

Rappel

$$(P)\begin{cases}\max & (39x_1 + 69x_2)\\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240\\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5\\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595\\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0\end{cases}$$

Solution : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 28)$

(D) est le problème **dual** de (P)

Introduction

Définition

Problème dual

Définition (Problème dual)

Le **problème dual** de (P) $\begin{cases} \max\limits_x & (c|x) \\ & Ax \leq b, x \geq 0 \end{cases}$ est

$$(D) \begin{cases} \min\limits_u & (b|u) \\ & {}^tAu \geq c, u \geq 0 \end{cases} \text{ de forme canonique } \begin{cases} \max\limits_u & (-b|u) \\ & -{}^tAu \leq -c, u \geq 0 \end{cases}$$

(P) est le **problème primal** de (D).

Propriété (Involutivité)

Le problème dual du problème dual de (P) *est* (P) *lui-même.*

Problème dual

Exemple

$$(P)\begin{cases}\max & (39x_1 + 69x_2)\\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240\\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5\\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595\\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0\end{cases}$$

$$(D)\begin{cases}\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3)\\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39\\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69\\ & u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3 \geq 0\end{cases}$$

Problème dual

Exemple

$$
(P)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2) \\
& 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\
& 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\
& 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\
& x_1\ , \quad x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

$$
(D)\begin{cases}
\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\
& 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\
& 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\
& u_1\ , \quad u_2\ , \quad u_3 \geq 0
\end{cases}
$$

- (P) : maximisation $\Rightarrow$ (D) : minimisation

Problème dual

Exemple

$$(P)\begin{cases}\max & (39x_1 + 69x_2)\\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240\\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5\\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595\\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0\end{cases}$$

$$(D)\begin{cases}\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3)\\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39\\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69\\ & u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3 \geq 0\end{cases}$$

- (P) : maximisation $\Rightarrow$ (D) : minimisation
- coefficients de critère de (D) = seconds membres de (P) ;

Problème dual

Exemple

$$(P)\begin{cases}\max & (39x_1 + 69x_2)\\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240\\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5\\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595\\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0\end{cases}$$

$$(D)\begin{cases}\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3)\\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39\\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69\\ & u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3 \geq 0\end{cases}$$

- (P) : maximisation $\Rightarrow$ (D) : minimisation
- coefficients de critère de (D) = seconds membres de (P) ;
- seconds membres de (D) = coefficients de critère de (P) ;

Problème dual

Exemple

$$
(P)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2) \\
 & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\
 & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\
 & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\
 & x_1\,, \quad x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

$$
(D)\begin{cases}
\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\
 & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\
 & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\
 & u_1\,, \quad u_2\,, \quad u_3 \geq 0
\end{cases}
$$

- (P) : maximisation $\Rightarrow$ (D) : minimisation
- coefficients de critère de (D) = seconds membres de (P) ;
- seconds membres de (D) = coefficients de critère de (P) ;
- matrice des contraintes de (D) = transposée de celle de (P).

Certificats d'optimalité

Certificats d’optimalité

Dualité faible

Théorème de dualité faible

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\le b, x\ge 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\min\limits_{u\in\mathbb{R}^p} & (b\,|\,u)\\ & {}^tAu\ge c, u\ge 0\end{cases}$$

Théorème (Dualité faible)

Soit $x_0\in\mathscr{C}_{(P)}=\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\le b, x\ge 0\}$ *et* $u_0\in\mathscr{C}_{(D)}=\{u\in\mathbb{R}^p,\ {}^tAu\ge c, u\ge 0\}$.

- $(c\,|\,x_0)\le(b\,|\,u_0)$
- $(c\,|\,x_0)=(b\,|\,u_0)\Rightarrow x_0$ *optimum de* (P) *et* u_0 *optimum de* (D)

Corollaire

On suppose que $\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\le b, x\ge 0\}\ne\varnothing$.
Si (P) *n'admet pas d'optimum, alors* $\{u\in\mathbb{R}^p,\ {}^tAu\ge c, u\ge 0\}=\varnothing$.

Corollaire (Version duale)

On suppose que $\{u\in\mathbb{R}^p,\ {}^tAu\ge c, u\ge 0\}\ne\varnothing$.
Si (D) *n'admet pas d'optimum, alors* $\{x\in\mathbb{R}^n,\ Ax\le b, x\ge 0\}=\varnothing$.

Certificats d'optimalité

Dualité forte

Théorème de dualité forte

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c|x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\min\limits_{u\in\mathbb{R}^p} & (b|u)\\ & {}^tAu\geq c, u\geq 0\end{cases}$$

Théorème (Dualité forte)

Si (P) admet un optimum, alors (D) aussi.

Corollaire (Version duale)

Si (D) admet un optimum, alors (P) aussi.

Théorème de dualité forte

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c|x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\min\limits_{u\in\mathbb{R}^p} & (b|u)\\ & {}^tAu\geq c, u\geq 0\end{cases}$$

Théorème (Dualité forte)

Si (P) admet un optimum, alors (D) aussi.

Corollaire (Version duale)

Si (D) admet un optimum, alors (P) aussi.

(P) \ (D)	Domaine vide	Optimum	Non borné
Domaine vide	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
Optimum	$\times$	$\checkmark$	$\times$
Non borné	$\checkmark$	$\times$	$\times$

Théorème de dualité

Cas domaine primal vide / domaine dual vide

Le problème dual de $\begin{cases} \max & x_2 \\ & x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ est

Théorème de dualité

Cas domaine primal vide / domaine dual vide

Le problème dual de $\begin{cases} \max & x_2 \\ & x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$ est

$$\begin{cases} \min & -u_1 - u_2 \\ & u_1 \geq 0 \\ & -u_2 \geq 1 \\ & u_1, \; u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Cas domaine primal vide / domaine dual vide

Le problème dual de $\begin{cases} \max & x_2 \\ & x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ est

$$\begin{cases} \min & -u_1 - u_2 \\ & u_1 \geq 0 \\ & -u_2 \geq 1 \\ & u_1,\ u_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Le domaine primal est vide car $x_1 \leq -1$ est impossible.

Théorème de dualité

Cas domaine primal vide / domaine dual vide

Le problème dual de $\begin{cases} \max & x_2 \\ & x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ est

$$\begin{cases} \min & -u_1 - u_2 \\ & u_1 \geq 0 \\ & \color{red}{-u_2 \geq 1} \\ & u_1\,,\ u_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Le domaine primal est vide car $x_1 \leq -1$ est impossible.
- Le domaine dual est vide car $-u_2 \geq 1$ est impossible.

Certificats d'optimalité

Complémentarité

Théorème de complémentarité

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\min\limits_{u\in\mathbb{R}^p} & (b\,|\,u)\\ & {}^tAu\geq c, u\geq 0\end{cases}$$

Théorème (Complémentarité)

x^* est un optimum de (P) et u^* est un optimum de (D)

$$\iff \left(x^*\,\middle|\,{}^tAu^*-c\right)=0$$

$$\iff \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i^*\cdot\left({}^tAu^*-c\right)_i=0$$

Corollaire (Version duale)

x^* est un optimum de (P) et u^* est un optimum de (D)

$$\iff (Ax^*-b\,|\,u^*)=0$$

$$\iff \forall j\in[\![1,p]\!],\ (Ax^*-b)_j\cdot u_j^*=0$$

Théorème de complémentarité

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c|x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\min\limits_{u\in\mathbb{R}^p} & (b|u)\\ & {}^tAu\geq c, u\geq 0\end{cases}$$

Corollaire

Soit x^* un optimum de (P), u^* un optimum de (D) et $i\in[\![1,n]\!]$.

- $x_i^*\neq 0\Rightarrow$ *la i^e contrainte de (D) est saturée en u^**
- *la i^e contrainte de (P) n'est pas saturée en x^** $\Rightarrow u_i^*=0$

Corollaire (Version duale)

Soit x^* un optimum de (P), u^* un optimum de (D) et $j\in[\![1,p]\!]$.

- $u_j^*\neq 0\Rightarrow$ *la j^e contrainte de (P) est saturée en x^**
- *la j^e contrainte de (D) n'est pas saturée en u^** $\Rightarrow x_j^*=0$

Théorème de complémentarité

Exemple

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Théorème de complémentarité

Exemple

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 28)$

Théorème de complémentarité

Exemple

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1\,,\ u_2\,,\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 28)$

- $x_1^* = 12 \neq 0 \Rightarrow 2{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* + 17{,}5u_3^* = 39$

Théorème de complémentarité

Exemple

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1\,,\; x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1\,,\; u_2\,,\; u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 28)$

- $x_1^* = 12 \neq 0 \Rightarrow 2{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* + 17{,}5u_3^* = 39$
- $x_2^* = 28 \neq 0 \Rightarrow 7{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* + 10u_3^* = 69$

Théorème de complémentarité

Exemple

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1\,, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (D)\begin{cases} \min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3) \\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39 \\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69 \\ & u_1\,, \quad u_2\,, \quad u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 28)$

- $x_1^* = 12 \neq 0 \Rightarrow 2{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* + 17{,}5u_3^* = 39$
- $x_2^* = 28 \neq 0 \Rightarrow 7{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* + 10u_3^* = 69$
- $17{,}5x_1^* + 10x_2^* = 490 < 595 \Rightarrow u_3^* = 0$

Théorème de complémentarité

Exemple

$$(P)\begin{cases}\max & (39x_1 + 69x_2)\\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240\\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5\\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595\\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0\end{cases} \Longrightarrow (D)\begin{cases}\min & (240u_1 + 5u_2 + 595u_3)\\ & 2{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 17{,}5u_3 \geq 39\\ & 7{,}5u_1 + 0{,}125u_2 + 10u_3 \geq 69\\ & u_1\,,\ u_2\,,\ u_3 \geq 0\end{cases}$$

Solution : $(x_1^*, x_2^*) = (12, 28)$

- $x_1^* = 12 \neq 0 \Rightarrow 2{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* + 17{,}5u_3^* = 39$
- $x_2^* = 28 \neq 0 \Rightarrow 7{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* + 10u_3^* = 69$
- $17{,}5x_1^* + 10x_2^* = 490 < 595 \Rightarrow u_3^* = 0$

D'où $\begin{cases}2{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* = 39\\ 7{,}5u_1^* + 0{,}125u_2^* = 69\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}u_1^* = 6\\ u_2^* = 192\end{cases}$ et :

$$(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (6, 192, 0)$$

Certificats d’optimalité

Interprétation d’un optimum dual

Méthode des tableaux et optimum dual

Exemple

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1 ,\quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dernier tableau obtenu lors de la résolution de (P) :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Méthode des tableaux et optimum dual

Exemple

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dernier tableau obtenu lors de la résolution de (P) :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Rappel : Solution duale $u^* = (6, 192, 0)$

Méthode des tableaux et optimum dual

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\min\limits_{u\in\mathbb{R}^p} & (b\,|\,u)\\ & {}^tAu\geq c, u\geq 0\end{cases}$$

Propriété (Lecture de l'optimum dual)

Les composantes de l'optimum de (D) sont les opposés des coefficients de critère (ligne « f ») pour les variables d'écart du dernier tableau de la résolution de (P).

Interprétation du théorème de complémentarité

De manière générale, l'optimum est un sommet.

Donc il sature certaines contraintes.

u_i informe sur l'effet de la modification de la contrainte n° i

- Contrainte n° i non saturée $\Rightarrow$ optimum inchangé $\Rightarrow u_i = 0$
- Contrainte n° i saturée $\Rightarrow$ optimum changé $\Rightarrow u_i \neq 0$

Propriété (Mesure de sensibilité)

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ u_i^* = \frac{\partial}{\partial b_i}(c \mid x^*)$$

Méthode « primale-duale »

Méthode « primale-duale »

Motivation

Motivation

Contexte

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}$$

- Résolution de (P) [méthode des tableaux] $\Rightarrow$ optimum x^*

Motivation

Contexte

$$(P')\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x)\\ & Ax\leq b, (\alpha\,|\,x)\leq\beta, x\geq 0\end{cases}$$

- Résolution de (P) [méthode des tableaux] $\Rightarrow$ optimum x^*
- Ajout d'une contrainte dans (P) $\rightarrow$ nouveau problème (P')

Motivation

Contexte

$$(P') \begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & (c\,|\,x) \\ & Ax \leq b, (\alpha\,|\,x) \leq \beta, x \geq 0 \end{cases}$$

- Résolution de (P) [méthode des tableaux] $\Rightarrow$ optimum x^*
- Ajout d'une contrainte dans $(P) \rightarrow$ nouveau problème (P')
- Peut-on utiliser la résolution de (P) pour résoudre (P') ?
  (*plutôt que de refaire les calculs « from scratch » ...!*)

Contexte

$$(P') \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & (c|x) \\ & Ax \leq b, (\alpha|x) \leq \beta, x \geq 0 \end{cases}$$

- Résolution de (P) [méthode des tableaux] $\Rightarrow$ optimum x^*
- Ajout d'une contrainte dans $(P) \rightarrow$ nouveau problème (P')
- Peut-on utiliser la résolution de (P) pour résoudre (P') ? (*plutôt que de refaire les calculs « from scratch » ...!*)

$\Rightarrow$ Méthode « primale-duale »

Méthode « primale-duale »

Principe

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème
   $\Rightarrow$ STOP.

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème $\Rightarrow$ STOP.
3. Sinon, on ajoute la nouvelle contrainte :

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème $\Rightarrow$ STOP.
3. Sinon, on ajoute la nouvelle contrainte :
   - sa variable d'écart est ajoutée à la base ;

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème $\Rightarrow$ STOP.
3. Sinon, on ajoute la nouvelle contrainte :
   - sa variable d'écart est ajoutée à la base ;
   - la contrainte est exprimée en fonction des variables hors-base.

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème
$\Rightarrow$ STOP.
3. Sinon, on ajoute la nouvelle contrainte :
   - sa variable d'écart est ajoutée à la base ;
   - la contrainte est exprimée en fonction des variables hors-base.
4. On effectue la résolution à partir de ce nouveau tableau (qui est une configuration non valide) :

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème $\Rightarrow$ STOP.
3. Sinon, on ajoute la nouvelle contrainte :
   - sa variable d'écart est ajoutée à la base ;
   - la contrainte est exprimée en fonction des variables hors-base.
4. On effectue la résolution à partir de ce nouveau tableau (qui est une configuration non valide) :
   - on passe au problème dual, où la configuration est valide ;

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème $\Rightarrow$ STOP.
3. Sinon, on ajoute la nouvelle contrainte :
   - sa variable d'écart est ajoutée à la base ;
   - la contrainte est exprimée en fonction des variables hors-base.
4. On effectue la résolution à partir de ce nouveau tableau (qui est une configuration non valide) :
   - on passe au problème dual, où la configuration est valide ;
   - on résout le problème dual ;

Méthode « primale-duale »

Idée fondamentale

Utiliser le problème dual comme un problème intermédiaire.

Principe de l'algoritme

1. On part du tableau de l'optimum du problème initial.
2. Si l'optimum du problème initial vérifie la nouvelle contrainte, c'est l'optimum du nouveau problème $\Rightarrow$ STOP.
3. Sinon, on ajoute la nouvelle contrainte :
   - sa variable d'écart est ajoutée à la base ;
   - la contrainte est exprimée en fonction des variables hors-base.
4. On effectue la résolution à partir de ce nouveau tableau (qui est une configuration non valide) :
   - on passe au problème dual, où la configuration est valide ;
   - on résout le problème dual ;
   - on repasse au problème primal.

Méthode « primale-duale »

Disposition pratique

Application sur le problème du brasseur

Tableau final

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Nouvelle contrainte : $x_1 + 2x_2 \leq 60$

Application sur le problème du brasseur

Tableau final

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4						1	

Nouvelle contrainte : $x_1 + 2x_2 \leq 60$

1. Ajout de la nouvelle variable y_4 en base

Application sur le problème du brasseur

Tableau final

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4						1	

Nouvelle contrainte : $x_1 + 2x_2 \leq 60$

1. Ajout de la nouvelle variable y_4 en base
2. Exprimer la contrainte en fonction des variables hors-base
   i.e. exprimer $x_1 + 2x_2 + y_4 = 60$ selon y_1, y_2 et y_4 :

Application sur le problème du brasseur

Tableau final

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4						1	

Nouvelle contrainte : $x_1 + 2x_2 \leq 60$

1. Ajout de la nouvelle variable y_4 en base
2. Exprimer la contrainte en fonction des variables hors-base
   i.e. exprimer $x_1 + 2x_2 + y_4 = 60$ selon y_1, y_2 et y_4 :
   - $x_1 = 12 + \frac{1}{5}y_1 - 12y_2$

Application sur le problème du brasseur

Tableau final

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4						1	

Nouvelle contrainte : $x_1 + 2x_2 \leq 60$

1. Ajout de la nouvelle variable y_4 en base
2. Exprimer la contrainte en fonction des variables hors-base
   i.e. exprimer $x_1 + 2x_2 + y_4 = 60$ selon y_1, y_2 et y_4 :
   - $x_1 = 12 + \frac{1}{5}y_1 - 12y_2$
   - $x_2 = 28 - \frac{1}{5}y_1 + 4y_2$

Tableau final

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

Nouvelle contrainte : $x_1 + 2x_2 \leq 60$

1. Ajout de la nouvelle variable y_4 en base
2. Exprimer la contrainte en fonction des variables hors-base
   i.e. exprimer $x_1 + 2x_2 + y_4 = 60$ selon y_1, y_2 et y_4 :

- $x_1 = 12 + \frac{1}{5}y_1 - 12y_2$
- $x_2 = 28 - \frac{1}{5}y_1 + 4y_2$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}y_1 - 4y_2 + y_4 = -8$$

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante :

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30$

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_4	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30$, $y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_1	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30$, $y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_1	0	0	$-1/5$	-4	0	1	-8

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30\,,\, y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1
5. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	-6	-192	0	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_1	0	0	1	20	0	-5	40

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30\,, y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1
5. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_4 \leftarrow L_4/(-1/5)$

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	0	-72	0	-30	-2160
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_1	0	0	1	20	0	-5	40

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30$, $y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1
5. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_4 \leftarrow L_4/(-1/5)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-6)L_4$

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	0	-72	0	-30	-2160
x_2	0	1	0	-8	0	1	20
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_1	0	0	1	20	0	-5	40

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30\,, y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1
5. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_4 \leftarrow L_4/(-1/5)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-6)L_4$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (1/5)L_4$

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	0	-72	0	-30	-2160
x_2	0	1	0	-8	0	1	20
x_1	1	0	0	16	0	-1	20
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	0	105
y_1	0	0	1	20	0	-5	40

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30\,,\, y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1
5. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_4 \leftarrow L_4/(-1/5)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-6)L_4$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (1/5)L_4$
   - $L_2 \leftarrow L_2 + (1/5)L_4$

Application sur le problème du brasseur

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	0	-72	0	-30	-2160
x_2	0	1	0	-8	0	1	20
x_1	1	0	0	16	0	-1	20
y_3	0	0	0	-200	1	$15/2$	45
y_1	0	0	1	20	0	-5	40

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30\,, y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1
5. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_4 \leftarrow L_4/(-1/5)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-6)L_4$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (1/5)L_4$
   - $L_2 \leftarrow L_2 + (1/5)L_4$
   - $L_3 \leftarrow L_3 - (3/2)L_4$

Application sur le problème du brasseur

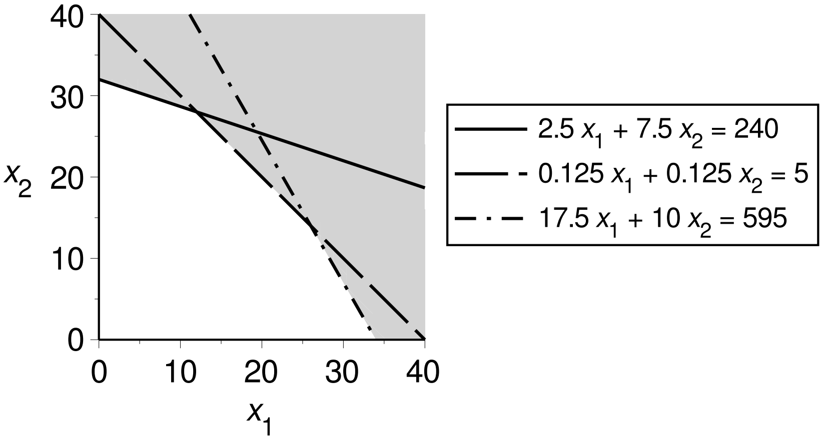
	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
f	0	0	0	-72	0	-30	-2160
x_2	0	1	0	-8	0	1	20
x_1	1	0	0	16	0	-1	20
y_3	0	0	0	-200	1	$15/2$	45
y_1	0	0	1	20	0	-5	40

3. Variable sortante : y_4 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : $y_1 : \dfrac{-6}{-1/5} = 30\,,\, y_2 : \dfrac{-192}{-4} = 48$

   Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1
5. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_4 \leftarrow L_4/(-1/5)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-6)L_4$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (1/5)L_4$
   - $L_2 \leftarrow L_2 + (1/5)L_4$
   - $L_3 \leftarrow L_3 - (3/2)L_4$
6. Nouvel optimum : $(x_1, x_2) = (20, 20)$

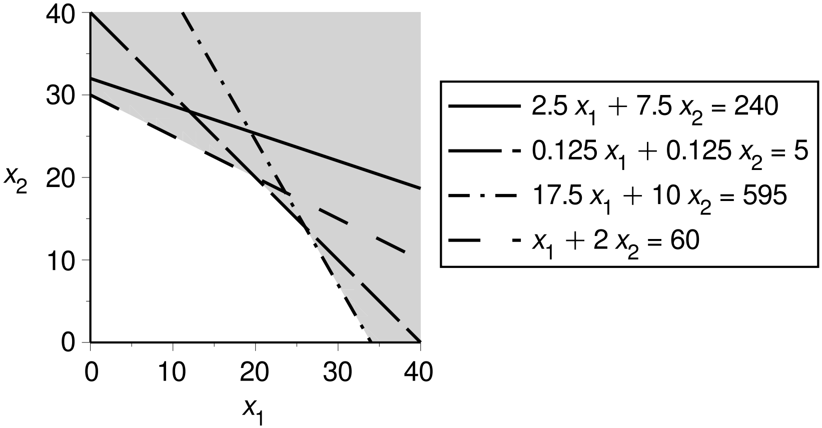
Application sur le problème du brasseur

Vérification par méthode géométrique



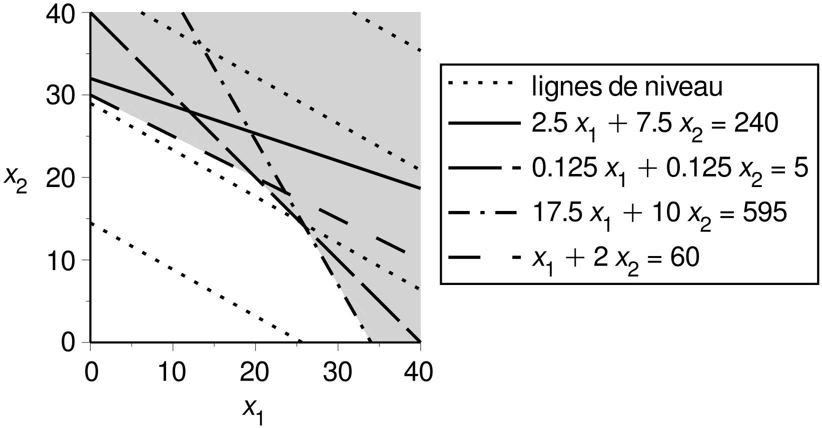
Application sur le problème du brasseur

Vérification par méthode géométrique



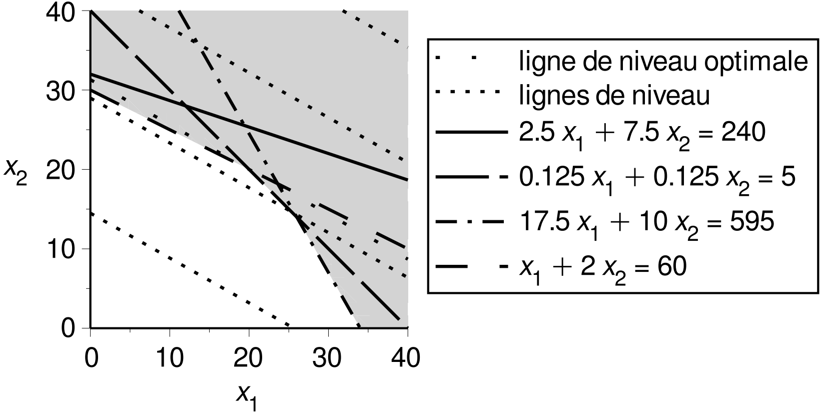
Application sur le problème du brasseur

Vérification par méthode géométrique



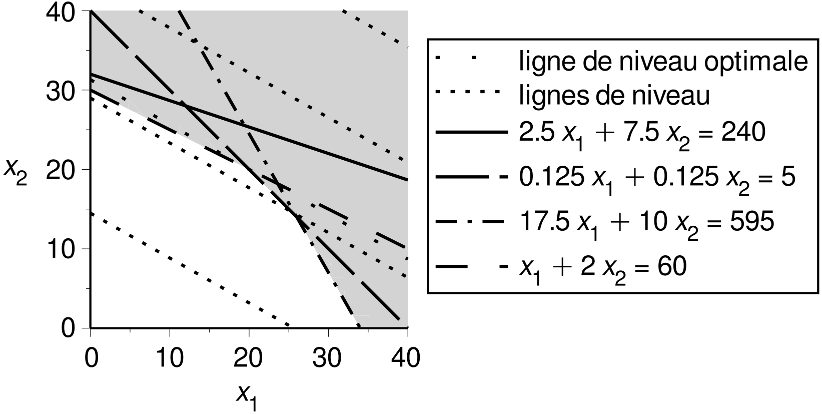
Application sur le problème du brasseur

Vérification par méthode géométrique



Application sur le problème du brasseur

Vérification par méthode géométrique



$$\begin{cases} 0{,}125x_1^* + 0{,}125x_2^* = 5 \\ x_1^* + 2x_2^* = 60 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^* + x_2^* = 40 \\ x_1^* + 2x_2^* = 60 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^* = 20 \\ x_2^* = 20 \end{cases}$$