# Probabilités & Simulation

*Examen - janvier 2024*

◁ Consignes ▷

<u>Durée : 120 mn</u>

▶ Autorisé : Trois feuilles A4 recto-verso manuscrites. Calculatrices.
▶ Non autorisé : Tout autre document et tous les supports électroniques (smart-phone, tablette, ordinateur,...).

- L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants.
- La table de la loi normale standard y est jointe.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

▶ On notera :

- v.a.r. pour variable aléatoire réelle.
- v.a.r.d. pour variable aléatoire réelle discrète.
- v.a.r.a.c. pour variable aléatoire réelle absolument continue.
- f.m.p. pour fonction de masse de probabilité.
- f.d.p. pour fonction de densité de probabilité.

**Exercice 1.** *(xx pts)*

Soit $X$ une v.a.r.a.c. de f.d.p. $f$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On dit que $X$ suit la loi de Rayleigh de paramètre 1.

1) a) Vérifier que $f$ est bien une f.d.p..
   b) Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.
2) a) Déterminer $F$, la fonction de répartition de $X$.
   b) Tracer l'allure de la courbe représentative de $F$.
3) En faisant usage de $F$, calculer les probabilités suivantes :

$$a)\ P(\{X \leq 1\}) \qquad b)\ P(\{1 \leq X \leq 3\}) \qquad c)\ P(\{X \leq 4\} \,|\, \{X > 3\})$$

4) Déterminer la médiane de $X$, c'est-à-dire le réel $m$ telle que $P(X > m) = 1/2$.

5) Rappeler la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

6) Monter que $E[X] = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

7) Soit $U$ une v.a.r. distribuée suivant une loi uniforme sur $]0,1]$.

   a) Rappeler ce que vaut la fonction de répartition $F_U$ de $U$.

   b) On considère maintenant la v.a.r. $Y = \sqrt{-2\ln U}$. Dans quel intervalle $Y$ prend-elle ses valeurs ?

   c) Déterminer $F_Y$, la fonction de répartition de $Y$. Montrer que $Y$ suit la loi de Rayleigh de paramètre 1.

**Exercice 2.** (*xx pts*)

Une entreprise, monopolistique sur le marché d'un certain produit, a une production constante de 90 tonnes par jour. On sait que la demande quotidienne sur ce produit est une v.a.r. $X$ qui suit une distribution normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de paramètres $\mu = 80$ tonnes et $\sigma = 10$ tonnes,

1) Que valent l'espérance et la variance de $X$.

2) Calculer la probabilité que la demande quotidienne soit inférieure à 78 tonnes.

3) Calculer la probabilité que la demande quotidienne soit supérieure à 90 tonnes.

4) Calculer $P(77 \leq X \leq 82)$. Interpréter le résultat obtenu.

5) Quelle doit être la production quotidienne minimale pour que la probabilité d'une demande excédentaire soit de 0.025.

6) On admet le résultat suivant :

   **Théorème.** *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.rs indépendantes suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ldots, \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$,*
   *alors la v.a.r. $X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \ldots + \mu_n, \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)$.*

   a) Quelle est la probabilité que sur 9 jours choisis au hasard, la demande totale soit supérieure à 780 tonnes ?

   b) En sélectionnant 4 jours au hasard, déterminer la probabilité qu'en moyenne (sur ces 4 jours) la demande soit d'au plus 75 tonnes par jour.

**Exercice 3.** (*xx pts*)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.rs discrètes telle que pour tout $n \geq 1$

$$X_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{n}, n\right\}$$

et f.m.p.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n^2} & \text{si } x = \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } x = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition $F_{X_n}$ de $X_n$.

b) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. $X$ dont on précisera la loi.

2) En utilisant la définition, étudier la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la v.a.r. $X$.

3) En utilisant la définition, étudier la convergence en moyenne et en moyenne quadratique de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la v.a.r. $X$.

**Exercice 4.** *(xx pts)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{U}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right)$.

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner la f.d.p. $f_{X_n}$ et la fonction de répartition $F_{X_n}$ de $X_n$.

   b) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. $X$ dont on précisera la loi.

2) En utilisant la définition, étudier la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la v.a.r. $X$.

3) En utilisant la définition, étudier la convergence en moyenne et en moyenne quadratique de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la v.a.r. $X$.

## Fonction de répartition de $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.00** | 0.500000 | 0.503989 | 0.507978 | 0.511966 | 0.515953 | 0.519939 | 0.523922 | 0.527903 | 0.531881 | 0.535856 |
| **0.10** | 0.539828 | 0.543795 | 0.547758 | 0.551717 | 0.555670 | 0.559618 | 0.563559 | 0.567495 | 0.571424 | 0.575345 |
| **0.20** | 0.579260 | 0.583166 | 0.587064 | 0.590954 | 0.594835 | 0.598706 | 0.602568 | 0.606420 | 0.610261 | 0.614092 |
| **0.30** | 0.617911 | 0.621720 | 0.625516 | 0.629300 | 0.633072 | 0.636831 | 0.640576 | 0.644309 | 0.648027 | 0.651732 |
| **0.40** | 0.655422 | 0.659097 | 0.662757 | 0.666402 | 0.670031 | 0.673645 | 0.677242 | 0.680822 | 0.684386 | 0.687933 |
| **0.50** | 0.691462 | 0.694974 | 0.698468 | 0.701944 | 0.705401 | 0.708840 | 0.712260 | 0.715661 | 0.719043 | 0.722405 |
| **0.60** | 0.725747 | 0.729069 | 0.732371 | 0.735653 | 0.738914 | 0.742154 | 0.745373 | 0.748571 | 0.751748 | 0.754903 |
| **0.70** | 0.758036 | 0.761148 | 0.764238 | 0.767305 | 0.770350 | 0.773373 | 0.776373 | 0.779350 | 0.782305 | 0.785236 |
| **0.80** | 0.788145 | 0.791030 | 0.793892 | 0.796731 | 0.799546 | 0.802337 | 0.805105 | 0.807850 | 0.810570 | 0.813267 |
| **0.90** | 0.815940 | 0.818589 | 0.821214 | 0.823814 | 0.826391 | 0.828944 | 0.831472 | 0.833977 | 0.836457 | 0.838913 |
| **1.00** | 0.841345 | 0.843752 | 0.846136 | 0.848495 | 0.850830 | 0.853141 | 0.855428 | 0.857690 | 0.859929 | 0.862143 |
| **1.10** | 0.864334 | 0.866500 | 0.868643 | 0.870762 | 0.872857 | 0.874928 | 0.876976 | 0.879000 | 0.881000 | 0.882977 |
| **1.20** | 0.884930 | 0.886861 | 0.888768 | 0.890651 | 0.892512 | 0.894350 | 0.896165 | 0.897958 | 0.899727 | 0.901475 |
| **1.30** | 0.903200 | 0.904902 | 0.906582 | 0.908241 | 0.909877 | 0.911492 | 0.913085 | 0.914657 | 0.916207 | 0.917736 |
| **1.40** | 0.919243 | 0.920730 | 0.922196 | 0.923641 | 0.925066 | 0.926471 | 0.927855 | 0.929219 | 0.930563 | 0.931888 |
| **1.50** | 0.933193 | 0.934478 | 0.935745 | 0.936992 | 0.938220 | 0.939429 | 0.940620 | 0.941792 | 0.942947 | 0.944083 |
| **1.60** | 0.945201 | 0.946301 | 0.947384 | 0.948449 | 0.949497 | 0.950529 | 0.951543 | 0.952540 | 0.953521 | 0.954486 |
| **1.70** | 0.955435 | 0.956367 | 0.957284 | 0.958185 | 0.959070 | 0.959941 | 0.960796 | 0.961636 | 0.962462 | 0.963273 |
| **1.80** | 0.964070 | 0.964852 | 0.965620 | 0.966375 | 0.967116 | 0.967843 | 0.968557 | 0.969258 | 0.969946 | 0.970621 |
| **1.90** | 0.971283 | 0.971933 | 0.972571 | 0.973197 | 0.973810 | 0.974412 | 0.975002 | 0.975581 | 0.976148 | 0.976705 |
| **2.00** | 0.977250 | 0.977784 | 0.978308 | 0.978822 | 0.979325 | 0.979818 | 0.980301 | 0.980774 | 0.981237 | 0.981691 |
| **2.10** | 0.982136 | 0.982571 | 0.982997 | 0.983414 | 0.983823 | 0.984222 | 0.984614 | 0.984997 | 0.985371 | 0.985738 |
| **2.20** | 0.986097 | 0.986447 | 0.986791 | 0.987126 | 0.987455 | 0.987776 | 0.988089 | 0.988396 | 0.988696 | 0.988989 |
| **2.30** | 0.989276 | 0.989556 | 0.989830 | 0.990097 | 0.990358 | 0.990613 | 0.990863 | 0.991106 | 0.991344 | 0.991576 |
| **2.40** | 0.991802 | 0.992024 | 0.992240 | 0.992451 | 0.992656 | 0.992857 | 0.993053 | 0.993244 | 0.993431 | 0.993613 |
| **2.50** | 0.993790 | 0.993963 | 0.994132 | 0.994297 | 0.994457 | 0.994614 | 0.994766 | 0.994915 | 0.995060 | 0.995201 |
| **2.60** | 0.995339 | 0.995473 | 0.995604 | 0.995731 | 0.995855 | 0.995975 | 0.996093 | 0.996207 | 0.996319 | 0.996427 |
| **2.70** | 0.996533 | 0.996636 | 0.996736 | 0.996833 | 0.996928 | 0.997020 | 0.997110 | 0.997197 | 0.997282 | 0.997365 |
| **2.80** | 0.997445 | 0.997523 | 0.997599 | 0.997673 | 0.997744 | 0.997814 | 0.997882 | 0.997948 | 0.998012 | 0.998074 |
| **2.90** | 0.998134 | 0.998193 | 0.998250 | 0.998305 | 0.998359 | 0.998411 | 0.998462 | 0.998511 | 0.998559 | 0.998605 |
| **3.00** | 0.998650 | 0.998694 | 0.998736 | 0.998777 | 0.998817 | 0.998856 | 0.998893 | 0.998930 | 0.998965 | 0.998999 |
| **3.10** | 0.999032 | 0.999065 | 0.999096 | 0.999126 | 0.999155 | 0.999184 | 0.999211 | 0.999238 | 0.999264 | 0.999289 |
| **3.20** | 0.999313 | 0.999336 | 0.999359 | 0.999381 | 0.999402 | 0.999423 | 0.999443 | 0.999462 | 0.999481 | 0.999499 |
| **3.30** | 0.999517 | 0.999534 | 0.999550 | 0.999566 | 0.999581 | 0.999596 | 0.999610 | 0.999624 | 0.999638 | 0.999651 |
| **3.40** | 0.999663 | 0.999675 | 0.999687 | 0.999698 | 0.999709 | 0.999720 | 0.999730 | 0.999740 | 0.999749 | 0.999758 |
| **3.50** | 0.999767 | 0.999776 | 0.999784 | 0.999792 | 0.999800 | 0.999807 | 0.999815 | 0.999822 | 0.999828 | 0.999835 |
| **3.60** | 0.999841 | 0.999847 | 0.999853 | 0.999858 | 0.999864 | 0.999869 | 0.999874 | 0.999879 | 0.999883 | 0.999888 |
| **3.70** | 0.999892 | 0.999896 | 0.999900 | 0.999904 | 0.999908 | 0.999912 | 0.999915 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 |
| **3.80** | 0.999928 | 0.999931 | 0.999933 | 0.999936 | 0.999938 | 0.999941 | 0.999943 | 0.999946 | 0.999948 | 0.999950 |
| **3.90** | 0.999952 | 0.999954 | 0.999956 | 0.999958 | 0.999959 | 0.999961 | 0.999963 | 0.999964 | 0.999966 | 0.999967 |
| **4.00** | 0.999968 | 0.999970 | 0.999971 | 0.999972 | 0.999973 | 0.999974 | 0.999975 | 0.999976 | 0.999977 | 0.999978 |

## Quantile $z_\alpha$ défini par $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ avec $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

| *α* | 0.25 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *z_α* | 0.674490 | 1.281552 | 1.644854 | 1.959964 | 2.326348 | 2.575829 | 3.090232 | 3.290527 |
| *z_α/2* | 1.150349 | 1.644854 | 1.959964 | 2.241403 | 2.575829 | 2.807034 | 3.290527 | 3.480756 |