1 Exercice 1 :

$$(P_1)\begin{cases} max(x_1+2x_2) \\ -3x_1+2x_2 \leq 2 \\ -x_1+2x_2 \leq 4 \\ x_1+x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) (P_1) a pour dual $(D_1)\begin{cases} min(2u_1+4u_2+5u_3) \\ -3u_1-u_2+u_3 \geq 1 \\ 2u_1+2u_2+u_3 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$

Mis sous forme standard, cela donne : $(D)\begin{cases} max(-2u_1-4u_2-5u_3) \\ 3u_1+u_2-u_3 \leq -1 \\ -2u_1-2u_2-u_3 \leq -2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$

(b)

La deux contraintes indiquent que l'origine n'est pas admissible. Il faut appliquer la méthode des deux phases :

Phase I

$\begin{cases} max(-\delta) \\ 3u_1+u_2-u_3-\delta \leq -1 \\ -2u_1-2u_2-u_3-\delta \leq -2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, \delta \geq 0 \end{cases}$ donne le tableau n° 1 :

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	$S.M.$
f	0	0	0	-1	0	0	0
v_1	3	1	-1	-1	1	0	-1
v_2	-2	-2	-1	-1	0	1	-2

On fair rentrer, de force, δ dans la base.
La variable sortante est : v_2 (le second membre "le plus négatif").
Après pivotage, on obtient le tableau n° 2 :

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	$S.M.$
f	2	2	1	0	0	-1	2
v_1	5	3	0	0	1	-1	1
δ	2	2	1	1	0	-1	2

On applique maintenant l'algorithme du simplexe de manière classique.
On fair rentrer, u_1 dans la base.
La variable sortante est : v_1 $\quad (min(1/5\ ,\ 2/2) = 1/5)$
Après pivotage, on obtient le tableau n° 3 :

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	$S.M.$
f	0	$4/5$	1	0	$-2/5$	$-3/5$	$8/5$
u_1	1	$3/5$	0	0	$1/5$	$-1/5$	$1/5$
δ	0	$4/5$	1	1	$-2/5$	$-3/5$	$8/5$

On fair rentrer, u_3 dans la base.
La variable sortante est : δ
Après pivotage, on obtient le tableau n° 3 :

	u_1	u_2	u_3	δ	v_1	v_2	$S.M.$
f	0	0	0	-1	0	0	0
u_1	1	$3/5$	0	0	$1/5$	$-1/5$	$1/5$
u_3	0	$4/5$	1	1	$-2/5$	$-3/5$	$8/5$

Fin de la phase I avec $\delta^* = 0$.
Nous pouvons passer à la phase suivante :

Phase II

On oublie la colonne δ, et on utilise les contraintes pour exprimer u_1 et u_3 en fonction des variables hors base.

$$u_1 + \frac{3}{5}u_2 + \frac{1}{5}v_1 - \frac{1}{5}v_2 = \frac{1}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}u_2 - \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2$$

$$u_3 + \frac{4}{5}u_2 - \frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2 = \frac{8}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}u_2 + \frac{2}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2$$

$$f = -2\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}u_2 - \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2\right) - 4u_2 - 5\left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5}u_2 + \frac{2}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2\right)$$

$$f = -\frac{42}{5} + \frac{6}{5}u_2 - \frac{8}{5}v_1 - \frac{17}{5}v_2$$

Tableau n°1 :

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	S.M.
f	0	6/5	0	-8/5	-17/5	42/5
u_1	1	3/5	0	1/5	-1/5	1/5
u_3	0	4/5	1	-2/5	-3/5	8/5

On fait entrer u_2 et on sort u_1.
Après pivotage, on obtient :
Tableau n°2 :

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	S.M.
f	0	0	0	-2	-3	8
u_1	5/3	1	0	1/3	-1/3	1/3
u_3	-4/3	0	1	-2/3	-1/3	4/3

Fin de la phase II et obtention de l'optimum : $\begin{cases} u_1^* & = 0 \\ u_2^* & = 1/3 \\ u_3^* & = 4/3 \end{cases}$

et $Z^* = -8$ pour la forme standard (maximisation) de (D_1).

(c) Rappel : $(P_1) \begin{cases} max(x_1 + 2x_2) \\ -3x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ et $(D_1) \begin{cases} min(2u_1 + 4u_2 + 5u_3) \\ -3u_1 - u_2 + u_3 \geq 1 \\ 2u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$

A partir de la solution de (D_1), on observe :
$u_2^* > 0,\ u_3^* > 0 \quad \Rightarrow$deuxième et troisième contraintes de (P_1) saturées.
Donc : $\begin{cases} -x_1^* + 2x_1^* & = 4 \\ x_1^* + x_2^* & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* & = 2 \\ x_2^* & = 3 \end{cases}$
et évidemment $Z^* = 8$.

2 Exercice 2 :

$$(P) \begin{cases} max(x_1 - x_2) \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.
On va commencer par résoudre le problème relaxé :

$$(P) \begin{cases} max(x_1 - x_2) \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau n° 1 :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$S.M.$
f	1	-1	0	0	0	0
y_1	-2	1	1	0	0	0
y_2	4	-1	0	1	0	10
y_3	1	6	0	0	1	12

On fair rentrer, x_1 dans la base.
La variable sortante est : y_2
Après pivotage, on obtient le tableau n° 2 :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$S.M.$
f	0	$-3/4$	0	$-1/4$	0	$-10/4$
y_1	0	$1/2$	1	$1/2$	0	5
x_1	1	$-1/4$	0	$1/4$	0	$10/4$
y_3	0	$25/4$	0	$-1/4$	1	$38/4$

La solution du problème relaxé est : $\begin{cases} x_1^* & = 10/4 \\ x_2^* & = 0 \end{cases}$ et $Z^* = 10/4$

x_1^* n'est pas entier, on doit donc appliquer soit la méthode des coupes de Gomory, soit celle de séparation et évaluation.

Méthode des coupes :

On part de la ligne donnant la valeur non entière de x_1 :

$x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}y_2 = \frac{10}{4}$

En supposant les coordonnées entières et en passant à la partie fractionnaire, on obtient :

$-\left\{-\frac{1}{4}\right\}x_2 - \left\{\frac{1}{4}\right\}y_2 \leq -\left\{\frac{10}{4}\right\} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}y_2 \leq -\frac{2}{4}$

On obtient ainsi une nouvelle contrainte que l'on va ajouter au tableau précédent, en lui associant sa variable d'écart y_4.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	$S.M.$
f	0	$-3/4$	0	$-1/4$	0	0	$-10/4$
y_1	0	$1/2$	1	$1/2$	0	0	5
x_1	1	$-1/4$	0	$1/4$	0	0	$10/4$
y_3	0	$25/4$	0	$-1/4$	1	0	$38/4$
y_4	0	$-3/4$	0	$-1/4$	0	1	$-2/4$

On applique la méthode primale-duale, en commençant par sortir y_4 de la base.

La variable entrante correspond au $Min\left(\frac{-1/4}{-1/4}; \frac{-3/4}{-3/4}\right) = 1$. On a le choix entre x_2 et y_2.

Si on choisit de faire entrer x_2, on obtient encore une solution non entière. Il faut alors une deuxième coupe qui ne sera pas suffisante non plus.

Le bon choix est de faire entrer y_2,

Après pivolage, on obtient :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	$S.M.$
f	0	0	0	0	0	-1	-2
y_1	0	-1	1	0	0	2	$3/2$
x_1	1	-1	0	0	0	1	2
y_3	0	7	0	0	1	-1	10
y_2	0	3	0	1	0	-4	2

On a immédiatement la solution entière : $\begin{cases} x_1^* & = 2 \\ x_2^* & = 0 \end{cases}$ et $Z^* = 2$

Méthode de séparation et évaluation :

La solution du problème relaxé est : $\begin{cases} x_1^* & = 2,5 \\ x_2^* & = 0 \end{cases}$. On va donc séparer en deux cas :
(P_-) en ajoutant la contrainte $x_1 \leq 2$ et (P_+) en ajoutant la contrainte $x_1 \geq 3$.
Plus précisément :

$$(P_-) \begin{cases} max(x_1 - x_2) \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{d'une part et} \quad (P_+) \begin{cases} max(x_1 - x_2) \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{de l'autre.}$$

(P_+) n'a pas de solution car le domaine des contraintes est vide. On peut s'en rendre compte à partir des inéquations , ou graphiquement ou bien en appliquant la méthode des 2 phases, dont la première se termine par une solution avec $\delta^* > 0$.
Résolvons (P_-) :
Tableau n^o 1 :

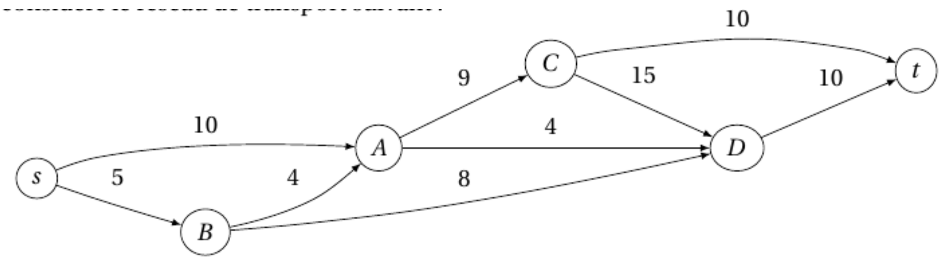
	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	$S.M.$
f	1	-1	0	0	0	0	0
y_1	-2	1	1	0	0	0	0
y_2	4	-1	0	1	0	0	10
y_3	1	6	0	0	1	0	12
y_4	1	0	0	0	0	1	2

On fair rentrer, x_1 dans la base.
La variable sortante est : y_4
Après pivotage, on obtient le tableau n^o 2 :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	$S.M.$
f	0	-1	0	0	0	-1	-2
y_1	0	1	1	0	0	2	4
y_2	0	-1	0	1	0	-4	2
y_3	0	6	0	0	1	-1	10
x_1	1	0	0	0	0	1	2

On retrouve immédiatement la solution entière : $\begin{cases} x_1^* & = 2 \\ x_2^* & = 0 \end{cases}$ et $Z^* = 2$

3 Exercice 3 :



Notons les sommets 1-2-3-4-5-6 au lieu de s-A-B-C-D-t.
Notons également x_{ij} le flux entre le sommet i et le sommet j.
Nous avons donc 9 inconnues : x_{12}, x_{13}, x_{32}, x_{35}, x_{24}, x_{25}, x_{45}, x_{46} et x_{56}.
Le problème peut alors se traduire par :

$$(P)\begin{cases}
max(x_{12}+x_{13}) & \text{maximiser le flux sortant de la source}\\
x_{12}\leq 10 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } sA\\
x_{13}\leq 5 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } sB\\
x_{32}\leq 4 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } BA\\
x_{35}\leq 8 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } BD\\
x_{24}\leq 9 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } AC\\
x_{25}\leq 4 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } AD\\
x_{45}\leq 15 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } CD\\
x_{46}\leq 10 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } Ct\\
x_{56}\leq 10 & \text{respect de la capacité maximale } \textit{sur } Dt\\
x_{13}-x_{32}-x_{35}=0 & \text{loi des noeuds } \textit{en } B\\
x_{12}+x_{32}-x_{24}-x_{25}=0 & \text{loi des noeuds } \textit{en } A\\
x_{24}-x_{45}-x_{46}=0 & \text{loi des noeuds } \textit{en } C\\
x_{35}+x_{25}+x_{45}-x_{56}=0 & \text{loi des noeuds } \textit{en } D\\
x_{ij}\geq 0, &
\end{cases}$$