

Recherche Opérationnelle

OPTIMISATION LINEAIRE

Année universitaire : 2023 - 2024



Plan du cours

Optimisation linéaire (Programmation Linéaire)

- ▀ Chapitre 1 : Introduction à la programmation linéaire
- ▀ Chapitre 2 : Méthode de simplexe
- ▀ Chapitre 3 : Dualité
- ▀ Chapitre 4 : Optimisation linéaire en nombres entiers
- ▀ Chapitre 5 : Applications usuelles de l'optimisation linéaire



Introduction à la Recherche Opérationnelle



Introduction

► Origines

- Quand : 2^{ème} guerre,
- Responsable : armée britannique puis l'armée américaine
- Objectifs : implantation optimale de radars de surveillance , le management des bombardements, anti sous-marins, opérations de miniers, etc...

La recherche opérationnelle RO est une application des mathématiques et des méthodes scientifiques aux opérations militaires

► C'est une Approche scientifique à la prise des décisions, qui cherche à déterminer comment concevoir et faire fonctionner un système d'une façon optimale

Ces techniques, dans leur mise en pratique, furent soutenues par l'essor des outils informatiques

Introduction à la RO

► Techniques de la RO

- La programmation mathématique
 - programmation linéaire (ING1)
 - programmation quadratique (ING2)
 - programmation en nombres entiers (ING1)
- Analyses de réseaux et graphes (ING1)
- Théories des files d'attente
- Simulation (ING2)
- Analyse statistique (ING1-ING2)

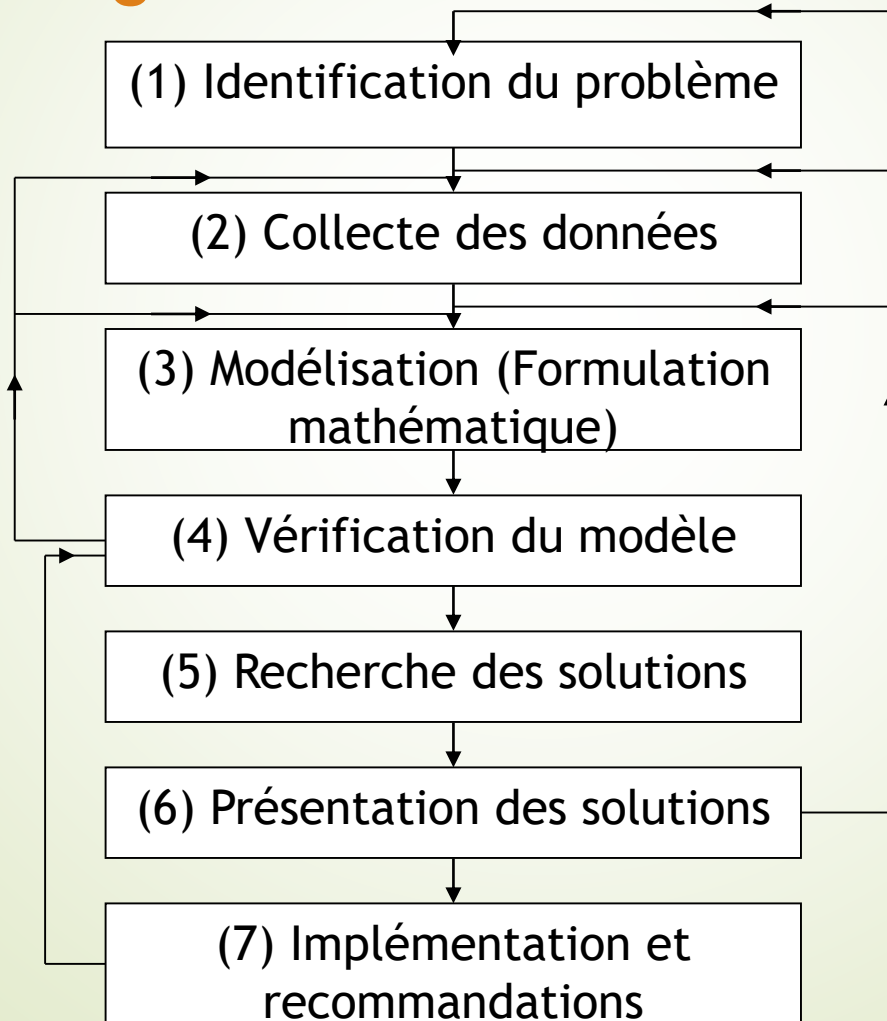
► Champs d'application de la RO

Aujourd'hui présente dans la plupart des domaines civils

- Transport
- Industries
- Gouvernement
- Agences
- Hôpitaux
- Institutions d'éducation...

Introduction à la RO

➤ Méthodologie de la RO





Programmation Linéaire (PL)

Introduction à la programmation linéaire

Chapitre 1

Chapitre 1

Introduction à la PL

Définitions

❖ la programmation linéaire(PL):

En mathématiques, les problèmes de programmation linéaire (PL) est la recherche de l'optimum (minimum ou maximum) d'une fonction objectif linéaire liées par des équations ou inéquations linéaires appelées contraintes

❖ La fonction objectif:

on appelle fonction objectif d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles.

❖ Les contraintes :

On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables.

Remarque :

- Les exemples habituels d'optimisation sont la recherche d'un bénéfice maximal ou d'un coût minimal.
- C'est grâce à cette méthode que les problèmes de ravitaillement étaient résolus pendant la seconde guerre mondiale.

Chapitre 1

Introduction à la PL

❖ Forme générale d'un problème linéaire:

$$\text{MAX (ou MIN): } c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$
[illegible]

Notation: s.c = sous les contraintes

➡ **Sous la forme Matricielle, le problème peut s'écrire comme**

$$\text{Max(ou Min)} (z) = c^T \cdot x = \langle c, x \rangle,$$
$$\begin{aligned} \text{S.C} \quad & Ax \preceq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Avec : A est une matrice $(m \times n)$, b est un vecteur $(m \times 1)$

c est un vecteur ($n \times 1$) , x est un vecteur ($n \times 1$).

➔ Cette forme est appelée **Forme canonique du problème PL.**

Chapitre 1

Introduction à la PL

Problème d'optimisation linéaire

Réduction à la forme canonique

- Minimisation

$$\min (c|x) \iff -\max (-c|x)$$

- Inégalité

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \geq \beta \iff -\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n \leq -\beta$$

- Égalité

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta \iff \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \leq \beta \\ -\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n \leq -\beta \end{cases}$$

- Variable sans contrainte de signe

$$x_i \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x_i^+ = \max(x_i, 0) \geq 0 \\ x_i^- = -\min(x_i, 0) \geq 0 \end{cases} \text{ et } x_i = x_i^+ - x_i^-$$

Chapitre 1

Introduction à la PL

► Exemple

Une compagnie est spécialisée dans la production de deux types de produits : des climatiseurs et des ventilateurs. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures de main d'œuvre. Le tableau suivant donne les informations nécessaires sur les deux produits, c'est-à-dire les nombres d'heures machine et d'heures main d'œuvre nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun de ces produits, ainsi que le profit généré par la production d'une unité de ce produit. Le tableau nous donne aussi le nombre total d'heures machines et d'heures main d'œuvre disponibles.

	Heures machine	Main d'œuvre	Profit
Climatiseur	2 h/unité	3 h/unité	25 £/unité
Ventilateur	2 h/unité	1 h/unité	15 £/unité
Total disponible	240 h	140 h	

Chapitre 1

Introduction à la PL

I. Formulation du programme linéaire

a) **Variables de décision** : doivent complètement décrire les décisions à prendre.

→ La compagnie veut décider du nombre de climatiseurs et du nombre de ventilateurs à produire pour maximiser le profit. Ceci nous amène à choisir les deux variables de décision suivantes :

x_1 = nombre de climatiseurs

x_2 = nombre de ventilateurs

Chapitre 1

Introduction à la PL

b) Fonction objectif : dans n'importe quel programme linéaire, le responsable de décision veut maximiser (en général, le revenu ou profit) ou minimiser (en général le coût) une fonction des variables de décisions. Cette fonction est appelée " fonction objectif ".



L'objectif de l'entreprise est de déterminer le programme de production qui maximisera son profit (Z =profit). La fonction objectif s'écrit alors:

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2$$

Chapitre 1

Introduction à la PL

c) Contraintes du modèle : La limitation des ressources contraint l'entreprise de la manière suivante :

1) Contraintes heure machine $2x_1 + 2x_2 \leq 240$

2) Contrainte main d'œuvre $3x_1 + x_2 \leq 140$

3) Contraintes de non-négativité (exprimant que les niveaux d'activité ne peuvent être négatifs) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Modèle complet : x_1 = nbre de climatiseurs, x_2 = nbre de ventilateurs

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2$$

$$\text{s.c. } 2x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$3x_1 + x_2 \leq 140$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Notation: s.c = sous contraintes

Chapitre 1

Introduction à la PL

- **Domaine réalisable et solutions optimales :** Ce sont deux concepts fondamentaux associés avec un PL. Pour les définir, on va utiliser le terme point (x_1, x_2) , qui désigne une spécification de la valeur de chaque variable de décision.
- **Le domaine réalisable (DR)** est l'ensemble de tous les points satisfaisant toutes les contraintes du PL. Dans notre exemple, le point $(20, 40)$ ($Z = 280$) appartient au DR. Ce point est dit réalisable.
- Pour un problème de maximisation (min), une **solution optimale** est un point du DR qui donne la valeur la plus large (faible) de la fonction objective.

$(20, 40) \neq$ solution optimale car $(10, 110)$ est réalisable et donne
 $Z = 1900$
meilleur profit que $Z = 280$

Chapitre 1

Introduction à la PL

II. **Résolution graphique**

- C'est une méthode de résolution d'un PL ne comportant que 2 variables de décision

- **Étapes à suivre**
 - Représenter les lignes des contraintes et l'ensemble du domaine réalisable
 - Localiser la solution optimale (Domaine réalisable)
 - Calculer la solution optimale

Chapitre 1

Introduction à la PL

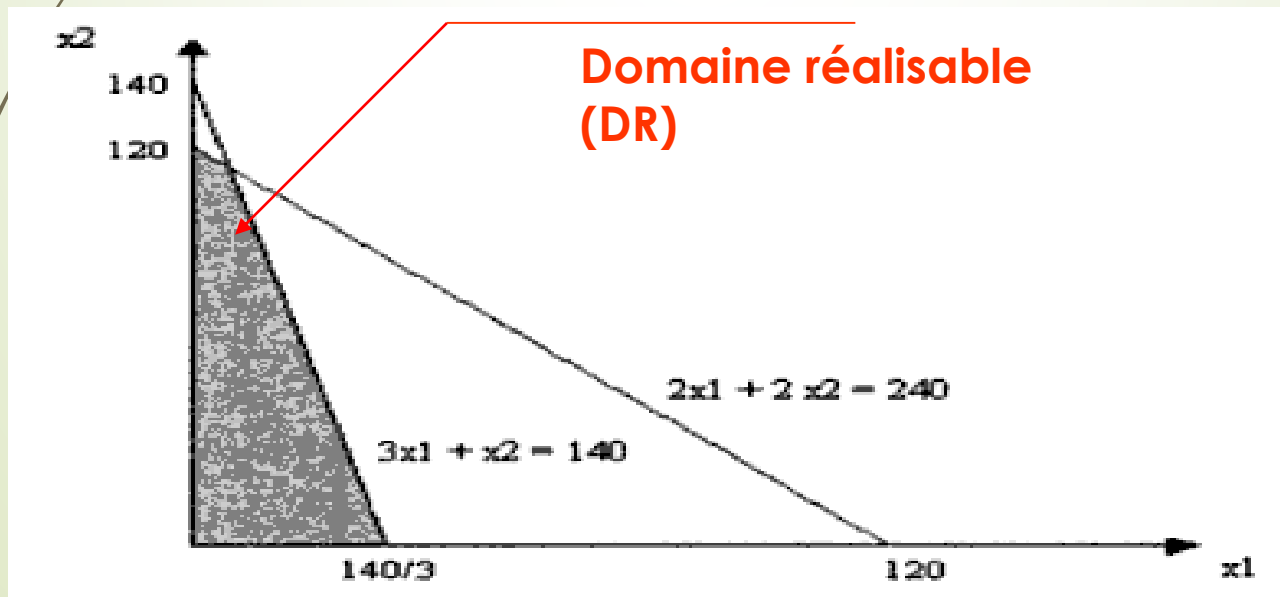
1^{ère} étape : Déterminer le domaine réalisable

(PL) $\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2$

s.c. $2x_1 + 2x_2 \leq 240$

$3x_1 + x_2 \leq 140$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



Chapitre 1

Introduction à la PL

2^{ème} étape : Recherche de la solution optimale

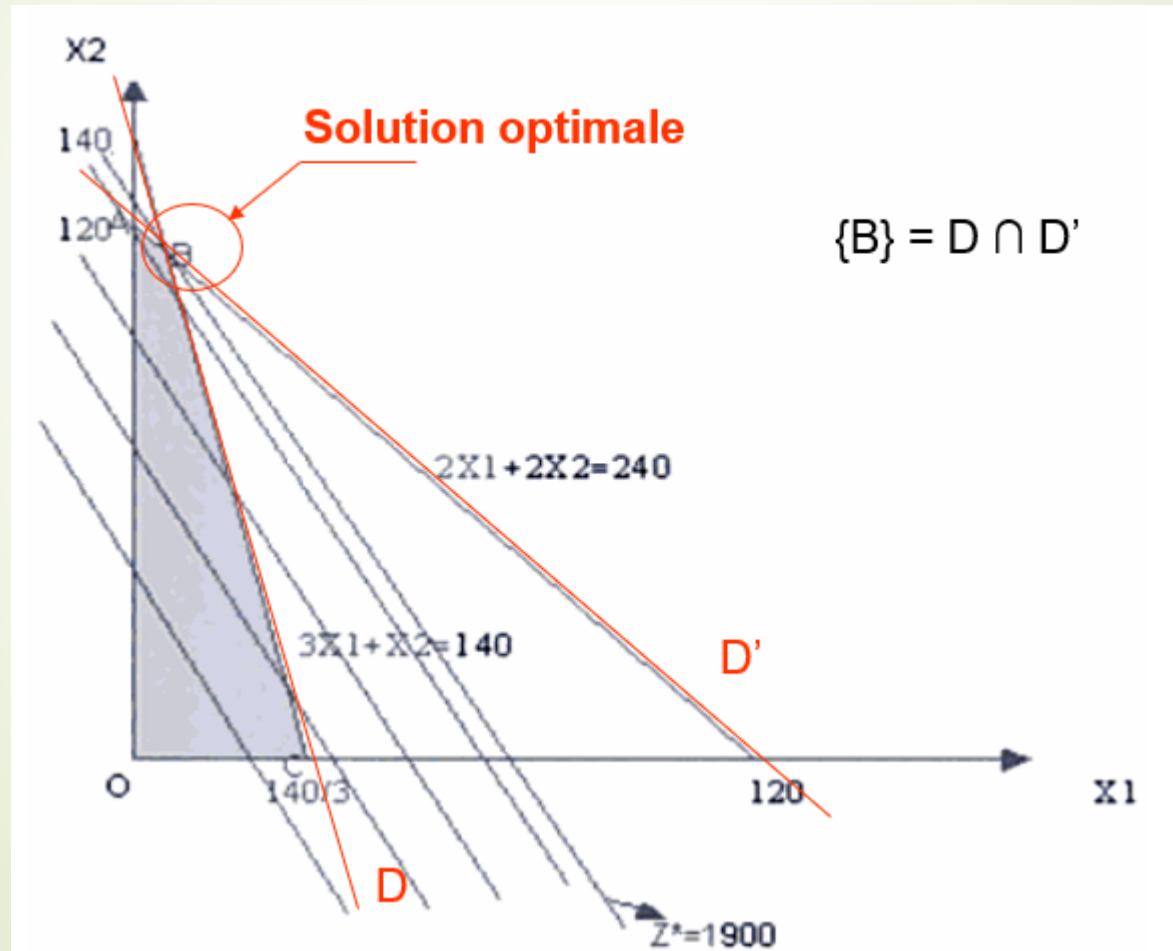
(PL) $\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2$

- La fonction objectif $Z = 25x_1 + 15x_2$ représente pour Z fixé ($25x_1 + 15x_2 = c$) l'équation des **courbes de niveau** (des droites de pente $-5/3$) qu'on appelle aussi **ligne d'isoprofit ou isocoût**.
- Maximiser Z revient à déplacer la ligne d'isoprofit dans la direction qui augmente la valeur de Z (pour un pb de maximisation). La dernière ligne qui touche le DR définit la plus large valeur de toutes les solutions réalisables, et contient la solution optimale

Chapitre 1

Introduction à la PL

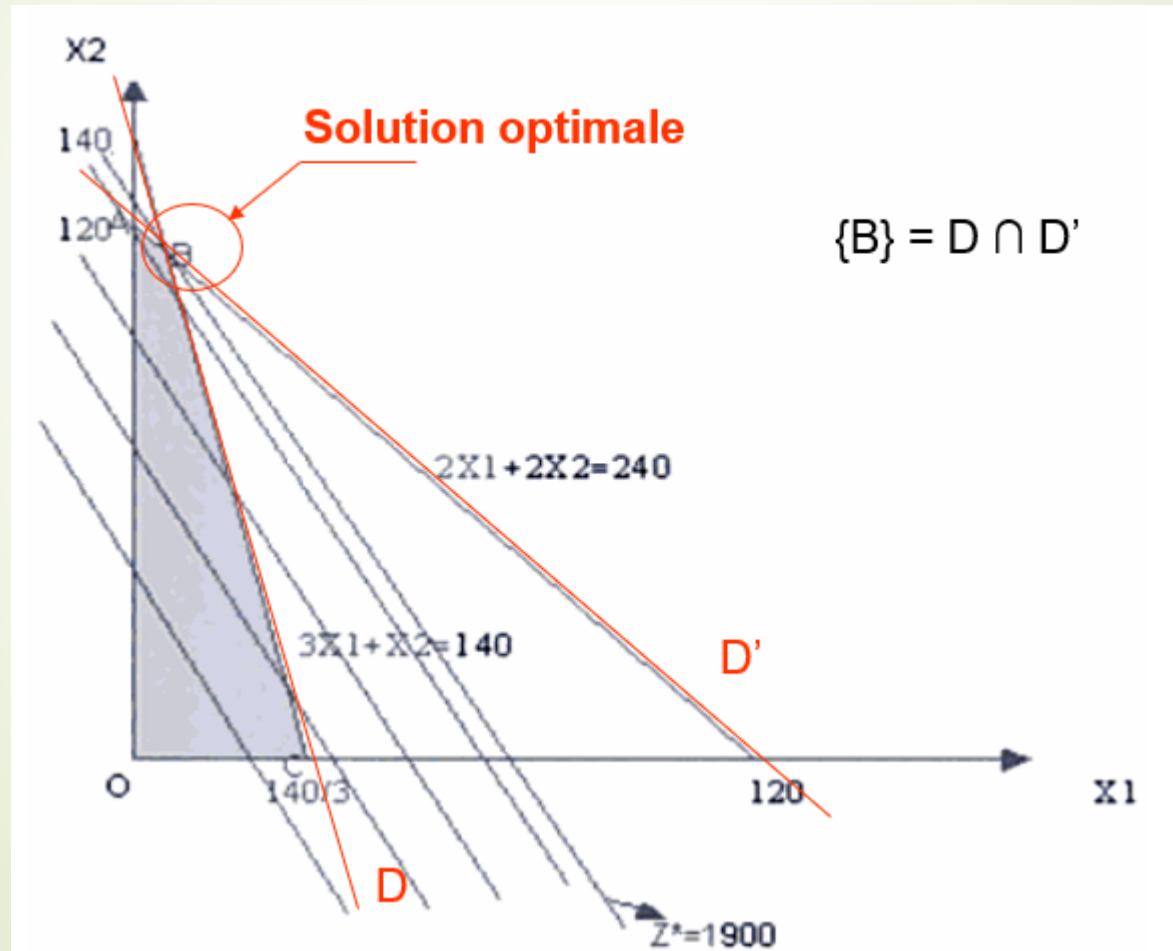
2^{ème} étape : Recherche de la solution optimale (suite)



Chapitre 1

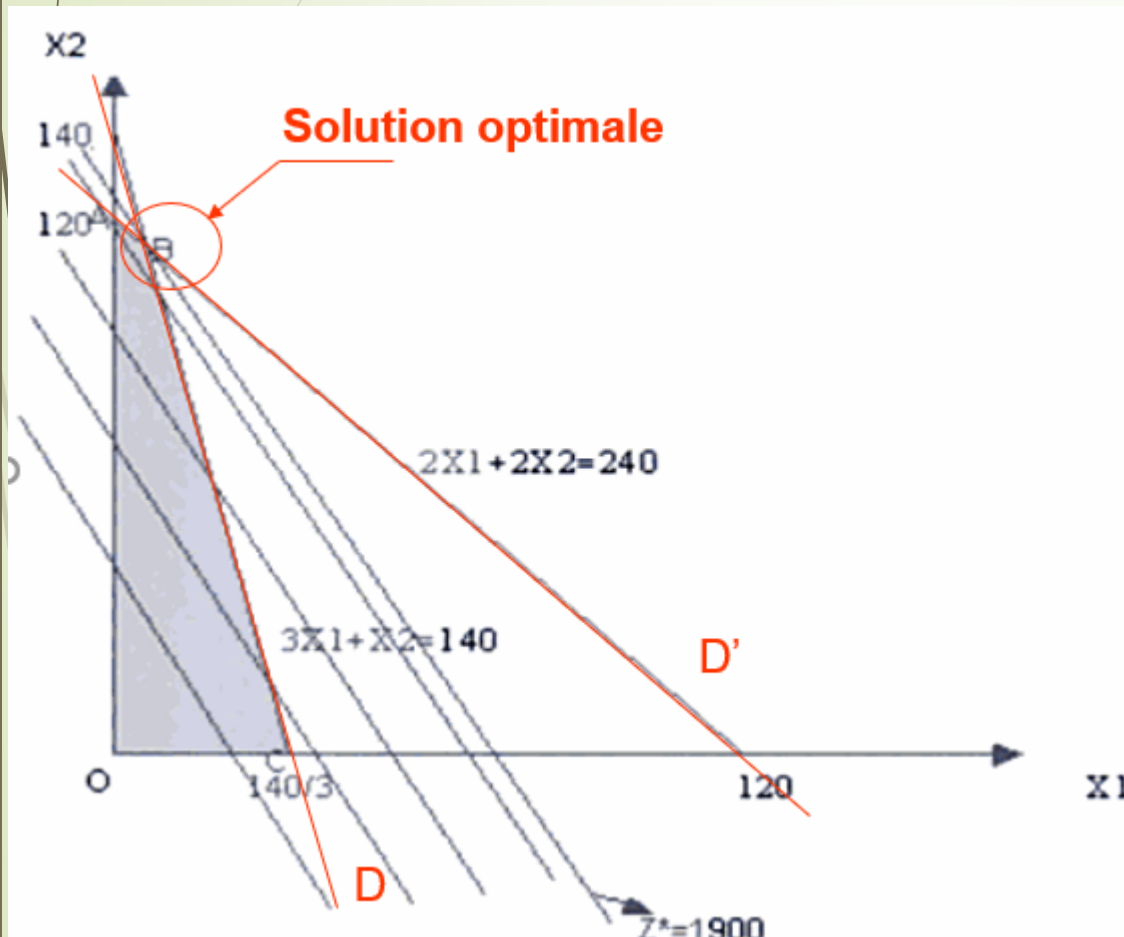
Introduction à la PL

2^{ème} étape : Recherche de la solution optimale (suite)



Chapitre 1

Introduction à la PL



$\{B\} = D \cap D'$ d'équations respectives:

$$2x_1 + 2x_2 = 240$$

$$3x_1 + x_2 = 140$$

Donc $x_1 = 10$, $x_2 = 110$ et $Z^* = 1900$

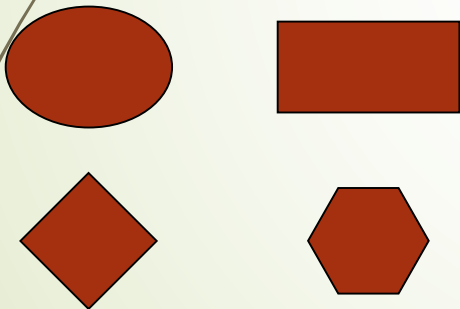
Chapitre 1

Introduction à la PL

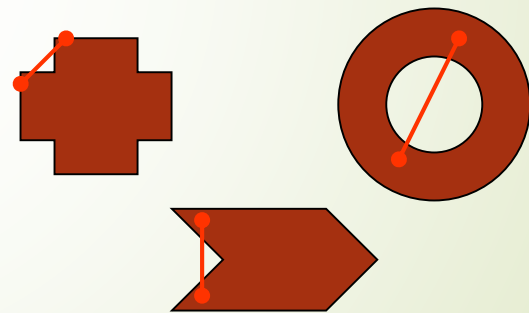
III. Notions de convexité et points extrêmes

Définition : Un ensemble E non vide est dit convexe si et seulement si pour tout élément x et y de E et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in E$.

Pour toute paire de points $M1$ et $M2$, l'ensemble des points qui forment le segment $[M1, M2]$ appartient au demi-plan.



Convexes



Non convexes

Caractéristique d'un PL: le DR d'un PL est ou bien vide convexe.

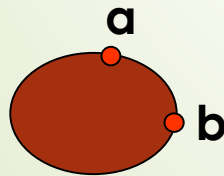
Chapitre 1

Introduction à la PL

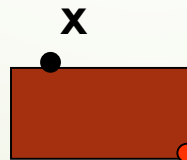
Définition: $\forall E$, un ensemble convexe, un point P dans E est appelé **point extrême** si chaque segment de droite entièrement contenu dans S et contenant le point P , a P comme extrémité.

Mathématiquement :

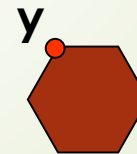
Soit $x \in E$, x est un point extrême \leftrightarrow S'il $\exists y \in E, z \in E$ et $0 < \lambda < 1$ tels que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ alors $x = y = z$



a, b Points extrêmes



x n'est pas un point extrême



y Point extrême

Chapitre 1

Introduction à la PL

Théorème: Pour un PL donné, si un optimum existe, au moins un point extrême est optimal.

Corollaire: Si PL admet un optimum unique, alors cet optimum doit être un point extrême.

IV. Cas particuliers de PL

PL non borné

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

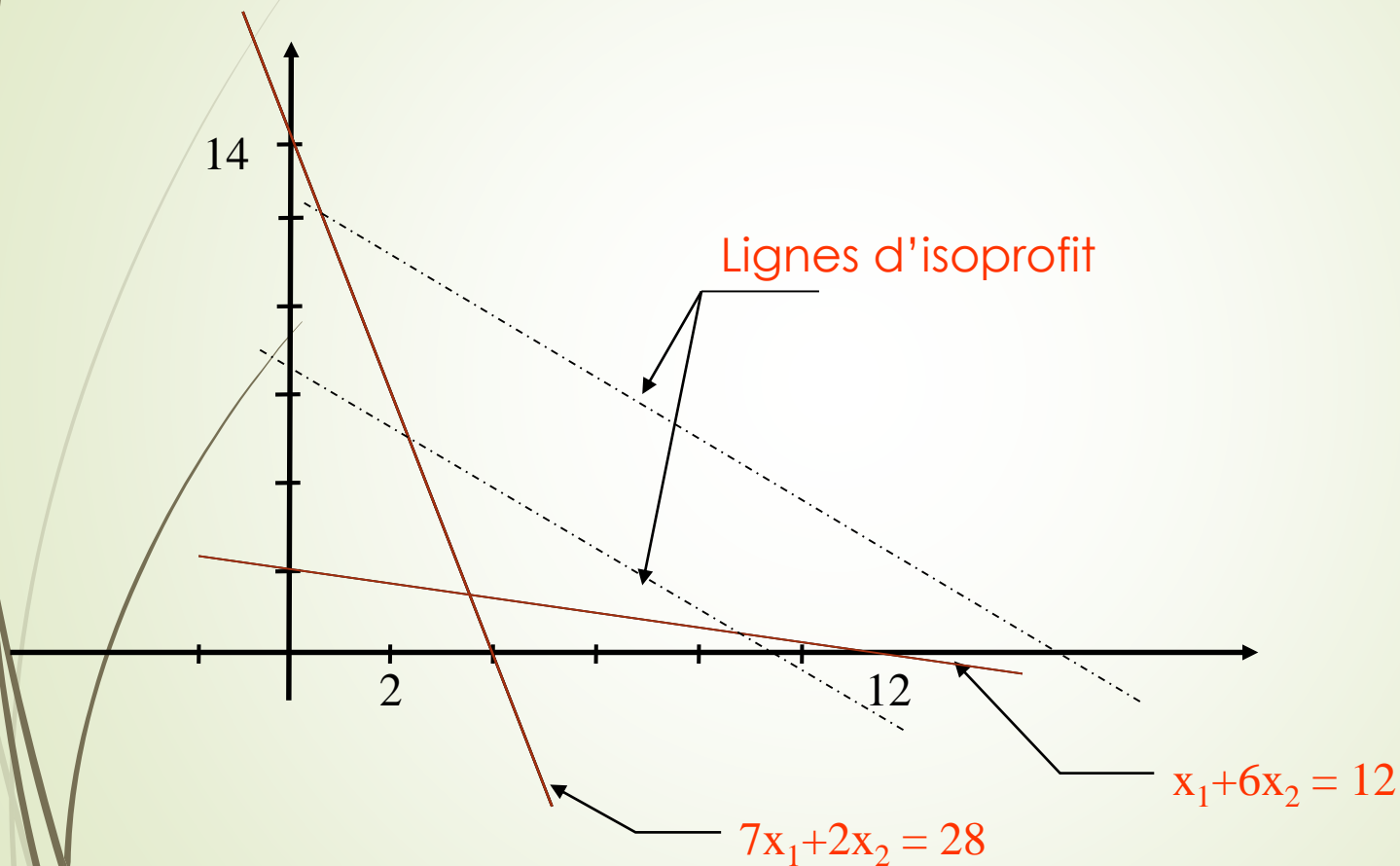
$$\text{s.c. } 7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Chapitre 1

Introduction à la PL



Si la fonction objectif est $\min z = x_1 + 2x_2$ $(18/5, 7/5)$ est optimal.

Chapitre 1

Introduction à la PL

PL a une infinité de solutions optimales

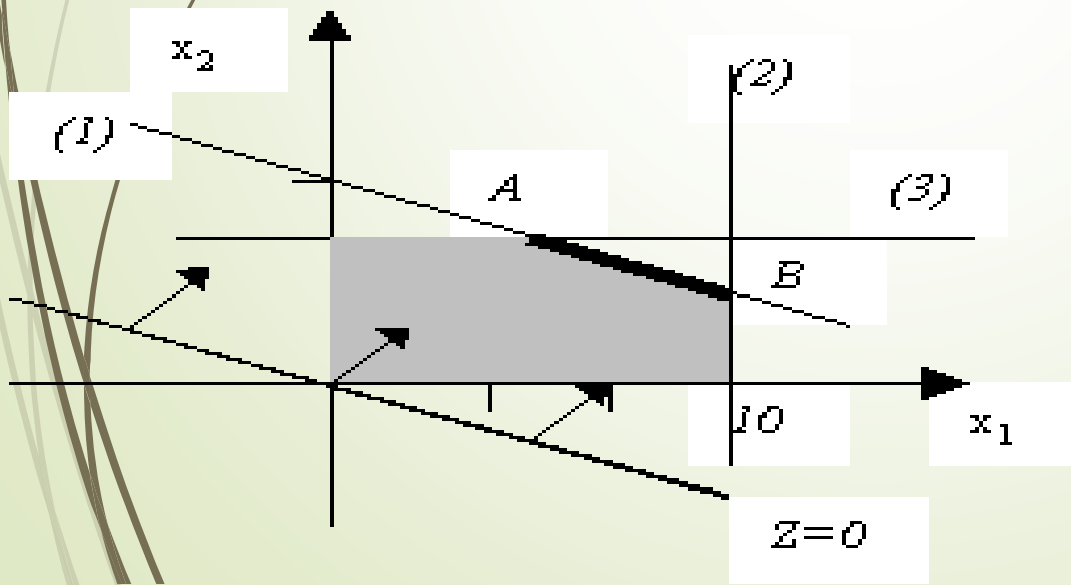
$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.c. } 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \quad (1)$$

$$x_1 \leq 10 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Tous les points appartenant à $[AB]$ sont optimaux

Chapitre 1

Introduction à la PL

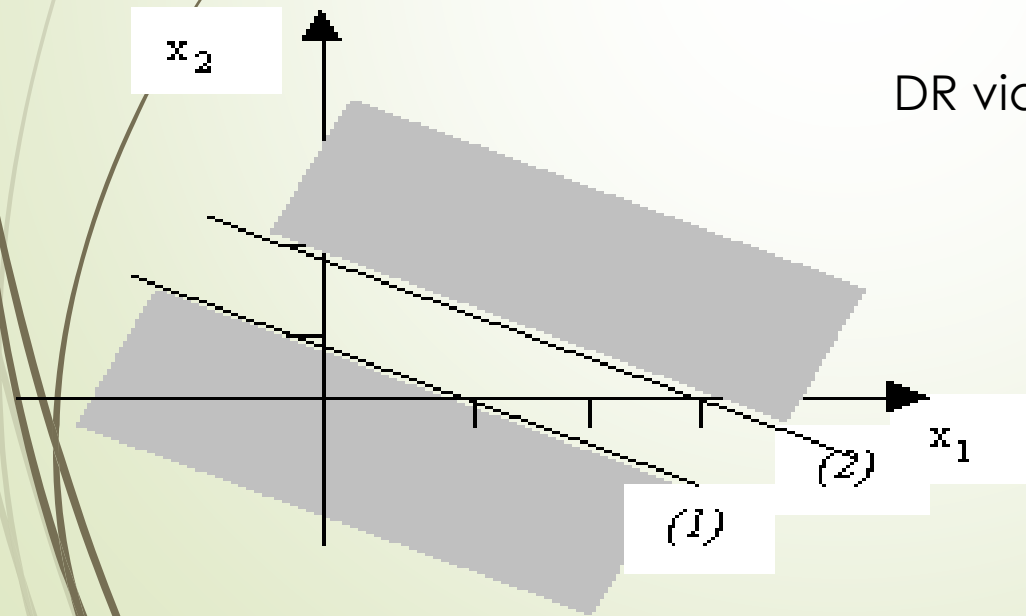
PL non réalisable

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.c.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 8 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



DR vide \Rightarrow PL non réalisable



Résolution d'un programme linéaire : méthode de simplexe

Chapitre 2

