Algorithme avancé

MIME

2024

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.
Le barème est indicatif.
Aucune question ne pourra être posée durant l'examen.
En cas de doute concernant le sujet,
vous poursuivrez votre réponse en expliquant vos hypothèses.

Exercice 1 (4.5 pts)

Soit G un graphe orienté 2-régulier comportant 1000 sommets tel que :

- Pour toute paire d'arcs $(x1, y1)$ et $(x2, y2)$ de G, $x1 \neq x2$ ou $y1 \neq y2$.
- Chaque nœud de G est de degré 2.

1. Donner l'espace mémoire nécessaire pour représenter le graphe G (1 pt) :
   a. Avec une matrice d'adjacence.
   Taille de la matrice : 1000 × 1000 cases

   b. Avec un dictionnaire Python.
   Taille du dictionnaire : 1000 clés avec 2 enfants
   1000 × 2 = 2000

2. Pour chacune des deux structures ci-dessus, compléter le tableau suivant (2.5 pts) :

	Complexité	Justifier
Les Successeurs directs d'un nœud v donné.	a. $\Theta(n)$ b. $\Theta(1)$	car il faut parcourir la ligne associée au noeud v cst on fait dict de la clé et on a les enfants
Les prédécesseurs directs d'un nœud v donné.	a. $\Theta(n)$ b. $\Theta(n) = \Theta(2n)$ $\Theta(n^2)$	on regarde la colonne correspondante pour le 2 régulier (on parcourt la liste et on regarde les valeurs et compare avec v) cas général
~~Le successeur d'un nœud.~~ Vérifier si le noeud v est successeur d'un noeud v'	a. $\Theta(1)$ b. $\Theta(1)$ $\Theta(n)$	on regarde la colonne ligne associée si dans 2 réguliers clé : v' si dans cas général
Vérifier s'il existe un circuit eulérien. degré pair, m̂ nb d'arcs qui entrent et qui sortent et orienté	a.	

	b.	
Vérifier s’il existe un circuit hamiltonien.	a. $\Theta(e^n)$ b. $\Theta(e^n)$	voyageur est np-complet (exp ou factoriel)

3. On ajoute des poids aux arcs. Proposer trois structures de données pour représenter des graphes orientés pondérés (1pt).
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
..

Exercice 2 (3.5 pts)

Soit $G = < X, U >$ un graphe orienté, où X est un ensemble de sommets et U un ensemble d'arcs. Dans cet exercice, on s'intéresse aux graphes réduits.

Définition d'un graphe réduit :

A tout graphe orienté $G = (X, U)$ on associe le graphe simple $G_R = (X_R, U_R)$ appelé graphe réduit de G défini comme suit :

$X_R = \{\text{A chaque c.f.c. } C_i \text{ de } G \text{ correspond un sommet } C_i\}$

$U_R = \{(Ci, Cj)/i \neq j \text{ et } \exists x \in C_i \text{ et } \exists y \in C_j \text{ et } (x, y) \in U\}$

1. Donner un pseudo pour vérifier si G est un graphe réduit. Vous pouvez utiliser, sans les coder, des algorithmes vus en cours (0.5 pt).

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

2. Calculer la complexité de votre algorithme (0.5 pt).

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

3. Appliquer votre algorithme pour le graphe suivant (0.5 pt) :

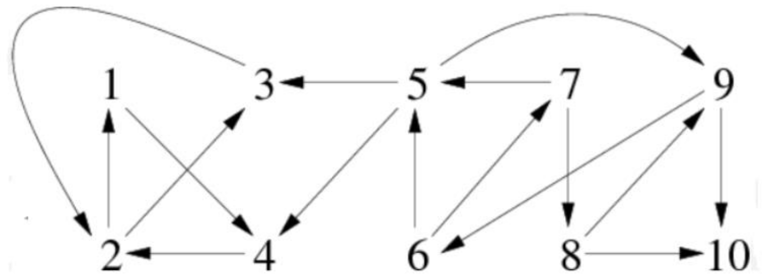

Figure 1.

4. Donner une application pratique des graphes réduits (0.5 pt).

………
………
………
………
………
………
……………………………………………………………………………………………

5. Appliquer votre algorithme à une arborescence A ? Comparer A et son graphe réduit. Justifier votre réponse (0.5 pt).

………
………
………
………
………
………
……………………………………………………………………………………

6. Existe-t-il de circuit(s) dans un graphe réduit d'un graphe orienté ? Même question pour l'existence de cycle(s) (0.5 pt) ?
   ……
   ……
   ……
   ……
   ……
   ……
   ……

7. Caractériser le graphe réduit d'un graphe fortement connexe (0.5 pt).
   ……
   ……
   ……
   ……
   ……
   ……
   ……

Exercice 3 (4 pts)

La Figure 2 illustre une représentation cartographique d'un ensemble de villages. Chaque village est représenté par un sommet, et les distances entre les villages sont indiquées par les poids sur les arêtes. Il est envisagé de construire des routes reliant ces villages, avec un budget nécessaire proportionnel à la distance pour chaque construction de route.

1. Quel est le tracé optimal permettant de relier tous les villages (directement ou indirectement) ? (1pt)

2. Peut-on trouver une meilleure tournée pour un voyageur de commerce passant par tous les villages ? Dans le cas affirmatif, trouver cette tournée en appliquant l'algorithme, présenté en cours, sinon dites pourquoi on ne peut trouver une telle tournée. (1pt)

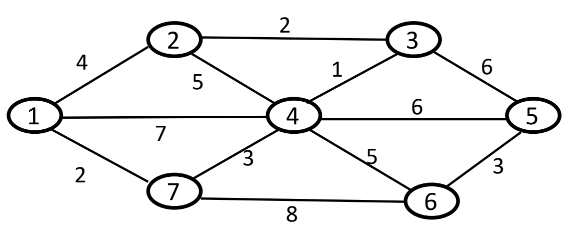

Figure 2.

3. Déterminer, s'il existe, un cycle eulérien du graphe illustré à la Figure 3 (1 pt).

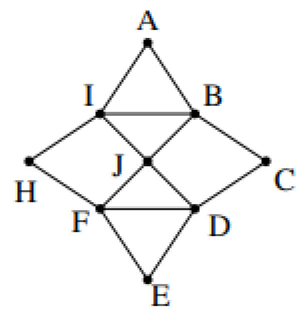

Figure 3.

4. Déterminer, s'il existe, un cycle hamiltonien du graphe illustré à la Figure 4 (1pt).

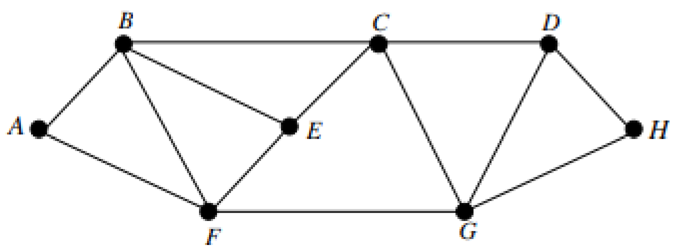

Figure 4.

Exercice 5 (3 pts)

La suite de Fibonacci est définie de manière récursive par la relation de récurrence suivante :

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

avec les conditions initiales :

$$F(0) = 0$$
$$F(1) = 1$$

Et on considère le programme python suivant :

```
def fibonacci_recursive(n):
    if n <= 1:
        return n
    else:
        return fibonacci_recursive(n-1) + fibonacci_recursive(n-2)
```

1. Schématiser la cascade des appels pour n=12, puis donner la valeur de $fibonacci\_recursive(12)$ (1pt).

2. Expliquez comment calculer la complexité de la méthode $fibonacci\_recursive$ (1pt).

3. Proposer une amélioration de $fibonacci\_recursive$ (1 pt).

Exercice 5 (4pts)

Soit $K_{n,m}$ un graphe non orienté biparti complet (simple) de $n+m$ sommets.

1. Combien y a-t-il d'arêtes dans $K_{n,m}$? (0.5 pts.)

2. Donner les conditions pour que $K_{n,m}$ *soit hamiltonien. (1pt)*

3. Donner les conditions pour que $K_{n,m}$ soit Eulérien. (1 pts)

4. Dans cette question, on suppose que $1 \leq n < m$, donner les couples (n, m) pour que $K_{n, m}$ soit Eulérien. (1.5 pts)

Remarque : Justifiez vos réponses.