Optimisation linéaire

Romain Dujol, Jean-Paul Forest

CY Tech – ING1-IN

2022 – 2023

Méthode des tableaux

Mise sous forme standard

Méthode « des tableaux »

- Principe
- Disposition pratique
- Règles de pivotage

Problème d'optimisation linéaire

Définition (Polyèdre convexe. Polytope convexe)

- *Simplexe ou polyèdre convexe* : $\{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$
- *Polytope convexe* $\equiv$ polyèdre convexe borné

Théorème (Localisation des optima)

Soit X un simplexe et $(P) \begin{cases} \max & (c|x) \\ & x \in X \end{cases}$.

L'ensemble des optima de (P), si il est non vide, contient au moins un sommet de X.

Problème d'optimisation linéaire

Recherche exhaustive

- Recenser tous les sommets
- Calculer la valeur de leur critère et trouver celui de critère maximal

$\Longrightarrow$ Complexité (au moins) exponentielle
$\Longrightarrow$ Beaucoup trop coûteux, donc inutilisable

Autres algorithmes

- Méthode des ellipsoïdes (Khachiyan, 1979)
  Complexité polynomiale, *intérêt principalement théorique*
- Méthode des points intérieurs (Karmarkar, 1984) : complexité polynomiale
- Méthode du simplexe (Dantzig, 1947) :
  Complexité polynomiale... en moyenne
  Facilité de mise en place

Mise sous forme standard

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Définition (Problème sous forme standard)

Un problème (P^s) d'optimisation linéaire est sous **forme standard** ou **forme équationnelle** si il est de la forme

$$(P^s)\begin{cases}\max\limits_{x} & (c|x) \\ & Ax = b, x \geq 0\end{cases}$$

avec $x \geq 0 \iff \forall i, x_i \geq 0$.

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Définition (Problème sous forme standard)

Un problème (P^s) d'optimisation linéaire est sous **forme standard** ou **forme équationnelle** si il est de la forme

$$(P^s)\begin{cases}\max\limits_{x} & (c|x)\\ & Ax=b, x\geq 0\end{cases}$$

avec $x \geq 0 \iff \forall i, x_i \geq 0.$

Rappel de la forme vue précédemment

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x} & (c|x)\\ & Ax\leq b, x\geq 0\end{cases}$$

Forme standard : transformer les inégalités en égalités

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 \leq 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 \leq 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 \leq 595 \\ & x_1, x_2, y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$
(P)\left\{\begin{array}{lrrrrl}
\max & (39x_1 + & 69x_2 & & &) \\
 & 2{,}5x_1 + & 7{,}5x_2 & + y_1 & & = 240 \\
 & 0{,}125x_1 + & 0{,}125x_2 & & {\color{red}+ y_2} & {\color{red}=} 5 \\
 & 17{,}5x_1 + & 10x_2 & & & \leq 595 \\
 & x_1\,, & x_2\,, & y_1{\color{red}\,,} & {\color{red}y_2} & \geq 0
\end{array}\right.
$$

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$(P)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 {\color{red}{} + y_3 =} 595 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 {\color{red}, y_3} \geq 0 \end{cases}$$

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrrrrl} \max & (39x_1 + & 69x_2 & & & &) \\ & 2{,}5x_1 + & 7{,}5x_2 & + y_1 & & & = 240 \\ & 0{,}125x_1 + & 0{,}125x_2 & & + y_2 & & = 5 \\ & 17{,}5x_1 + & 10x_2 & & & + y_3 & = 595 \\ & x_1\,, & x_2\,, & y_1\,, & y_2\,, & y_3 & \geq 0 \end{array}\right.$$

Ce problème est sous forme standard

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\
& 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 240 \\
& 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 5 \\
& 17{,}5x_1 + 10x_2 + 0y_1 + 0y_2 + y_3 = 595 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Ce problème est sous forme standard

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 7{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}125 & 0{,}125 & 0 & 1 & 0 \\ 17{,}5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 240 \\ 5 \\ 595 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 39 \\ 69 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\
& 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 240 \\
& 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 5 \\
& 17{,}5x_1 + 10x_2 + 0y_1 + 0y_2 + y_3 = 595 \\
& x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Ce problème est sous forme standard

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 7{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}125 & 0{,}125 & 0 & 1 & 0 \\ 17{,}5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 240 \\ 5 \\ 595 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 39 \\ 69 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Problème du brasseur

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\
& 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 240 \\
& 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 5 \\
& 17{,}5x_1 + 10x_2 + 0y_1 + 0y_2 + y_3 = 595 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Ce problème est sous forme standard

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 7{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}125 & 0{,}125 & 0 & 1 & 0 \\ 17{,}5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 240 \\ 5 \\ 595 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 39 \\ 69 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Problème d'optimisation linéaire : forme standard

Principe de la transformation

Pour toute inégalité de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq \beta_j \tag{1}$$

on introduit une nouvelle variable y telle que $y \geq 0$ et

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + y = \beta_j$$

Définition (Variable d'écart (*slack variable*))

y est la variable d'écart de l'inégalité (1).

Méthode « des tableaux »

Méthode « des tableaux »

Principe

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Méthode « des tableaux » (Dantzig, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part d'un sommet initial.

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part d'un sommet initial.
2. Si il est possible d'améliorer le critère :

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part d'un sommet initial.
2. Si il est possible d'améliorer le critère :
   - choisir une variable selon laquelle cette amélioration est possible ;

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part d'un sommet initial.
2. Si il est possible d'améliorer le critère :
   - choisir une variable selon laquelle cette amélioration est possible ;
   - passer au sommet suivant selon cette variable et recommencer cette étape.

Méthode « des tableaux » (DANTZIG, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part d'un sommet initial.
2. Si il est possible d'améliorer le critère :
   - choisir une variable selon laquelle cette amélioration est possible ;
   - passer au sommet suivant selon cette variable et recommencer cette étape.
3. Si il n'est pas possible d'améliorer le critère, alors le sommet courant est un optimum.

Méthode « des tableaux » (Dantzig, 1947)

Idée fondamentale

Itérer d'un sommet à un autre jusqu'à un sommet optimum

Principe de l'algorithme

1. On part d'un sommet initial.
2. Si il est possible d'améliorer le critère :
   - choisir une variable selon laquelle cette amélioration est possible ;
   - passer au sommet suivant selon cette variable et recommencer cette étape.
3. Si il n'est pas possible d'améliorer le critère, alors le sommet courant est un optimum.

L'algorithme ne s'applique qu'à un problème sous forme standard.

Application sur le problème du brasseur

$$(P^s)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Point initial $(x_1, x_2) = (0; 0) \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (240; 5; 595)$

Application sur le problème du brasseur

$$(P^s)\begin{cases}\max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3)\\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240\\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5\\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595\\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0\end{cases}$$

Point initial $(x_1,x_2) = (0;0) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (240;5;595)$

- On peut augmenter le critère en augmentant x_1 ou x_2.

Application sur le problème du brasseur

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\
 & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\
 & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\
 & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\
 & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Point initial $(x_1,x_2) = (0;0) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (240;5;595)$

- On peut augmenter le critère en augmentant x_1 ou x_2. *Critère de choix usuel* : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$

Application sur le problème du brasseur

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\
& 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\
& 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\
& 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\
& x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Point initial $(x_1,x_2) = (0;0) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (240;5;595)$

- On peut augmenter le critère en augmentant x_1 ou x_2. *Critère de choix usuel* : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
- On augmente x_2 à x_1 constant ($= 0$) tout en restant dans les contraintes, i.e. en gardant toutes les variables positives :

Application sur le problème du brasseur

$$(P^s) \begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Point initial $(x_1, x_2) = (0; 0) \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (240; 5; 595)$

- On peut augmenter le critère en augmentant x_1 ou x_2. *Critère de choix usuel* : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
- On augmente x_2 à x_1 constant $(= 0)$ tout en restant dans les contraintes, i.e. en gardant toutes les variables positives :
  - $y_1 \geq 0 \iff 240 - 7{,}5x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{240}{7{,}5} = 32$

Application sur le problème du brasseur

$$(P^s)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, \quad x_2, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Point initial $(x_1,x_2) = (0;0) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (240;5;595)$

- On peut augmenter le critère en augmentant x_1 ou x_2.
  Critère de choix usuel : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
- On augmente x_2 à x_1 constant $(= 0)$ tout en restant dans les contraintes, i.e. en gardant toutes les variables positives :
  - $y_1 \geq 0 \iff 240 - 7{,}5x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{240}{7{,}5} = 32$
  - $y_2 \geq 0 \iff 5 - 0{,}125x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{5}{0{,}125} = 40$

Application sur le problème du brasseur

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\
 & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\
 & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\
 & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\
 & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Point initial $(x_1,x_2) = (0;0) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (240;5;595)$

- On peut augmenter le critère en augmentant x_1 ou x_2. *Critère de choix usuel* : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
- On augmente x_2 à x_1 constant ($= 0$) tout en restant dans les contraintes, i.e. en gardant toutes les variables positives :
  - $y_1 \geq 0 \iff 240 - 7{,}5x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{240}{7{,}5} = 32$
  - $y_2 \geq 0 \iff 5 - 0{,}125x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{5}{0{,}125} = 40$
  - $y_3 \geq 0 \iff 595 - 10x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{595}{10} = 59{,}5$

Application sur le problème du brasseur

$$(P^s)\begin{cases} \max & (39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3) \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, \; x_2, \; y_1, \; y_2, \; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Point initial $(x_1,x_2) = (0;0) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (240;5;595)$

- On peut augmenter le critère en augmentant x_1 ou x_2.
  Critère de choix usuel : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
- On augmente x_2 à x_1 constant $(= 0)$ tout en restant dans les contraintes, i.e. en gardant toutes les variables positives :
  - $y_1 \geq 0 \iff 240 - 7{,}5x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{240}{7{,}5} = 32$
  - $y_2 \geq 0 \iff 5 - 0{,}125x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{5}{0{,}125} = 40$
  - $y_3 \geq 0 \iff 595 - 10x_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \dfrac{595}{10} = 59{,}5$

  $\Rightarrow$ Valeur maximale possible : $x_2 = 32$ i.e. $y_1 = 0$

Application sur le problème du brasseur

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Point $(x_1,x_2) = (0;32) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (0;1;275)$

x_2 devient la nouvelle variable d'écart à la place de y_1 :

Application sur le problème du brasseur

$$\begin{cases} \max & 39x_1 + & 69x_2 + & 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 & \\ & \frac{1}{3}x_1 + & x_2 + \frac{2}{15}y_1 & & = 32 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 & & + \ y_2 & = 5 \\ & 17{,}5x_1 + & 10x_2 & \qquad + \ y_3 & = 595 \\ & x_1, & x_2, & y_1, \quad y_2, \quad y_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Point $(x_1,x_2) = (0;32) \Rightarrow (y_1,y_2,y_3) = (0;1;275)$

x_2 devient la nouvelle variable d'écart à la place de y_1 :

- on normalise la contrainte liée à y_1 selon x_2 ;

Application sur le problème du brasseur

$$\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{15}y_1 = 32 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, \quad x_2, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Point $(x_1, x_2) = (0;32) \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (0;1;275)$

x_2 devient la nouvelle variable d'écart à la place de y_1 :

- on normalise la contrainte liée à y_1 selon x_2 ;
- on fait disparaître x_2 dans le critère et les autres contraintes en injection l'expression de x_2 en fonction de x_1 et y_1 :

$$x_2 = 32 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{15}y_1$$

Application sur le problème du brasseur

$$\begin{cases} \max & 2208 + 16x_1 - \frac{46}{5}y_1 \\ & \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{15}y_1 = 32 \\ & \frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{60}y_1 + y_2 = 1 \\ & \frac{85}{6}x_1 - \frac{4}{3}y_1 + y_3 = 275 \\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Point $(x_1, x_2) = (0; 32) \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (0; 1; 275)$

x_2 devient la nouvelle variable d'écart à la place de y_1 :

- on normalise la contrainte liée à y_1 selon x_2 ;
- on fait disparaître x_2 dans le critère et les autres contraintes en injection l'expression de x_2 en fonction de x_1 et y_1 :

$$x_2 = 32 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{15}y_1$$

Application sur le problème du brasseur

$$
\begin{cases}
\max & 2208 + 16x_1 - \frac{46}{5}y_1 \\
& \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{15}y_1 = 32 \\
& \frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{60}y_1 + y_2 = 1 \\
& \frac{85}{6}x_1 - \frac{4}{3}y_1 + y_3 = 275 \\
& x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Application sur le problème du brasseur

$$
\begin{cases}
\max & 2208 + {\color{red}16x_1} \qquad - \frac{46}{5}y_1 \\
& \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{15}y_1 = 32 \\
& \frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{60}y_1 + y_2 = 1 \\
& \frac{85}{6}x_1 - \frac{4}{3}y_1 + y_3 = 275 \\
& x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

- Augmentation du critère possible selon x_1

Application sur le problème du brasseur

$$\begin{cases} \max & 2208 + 16x_1 & & -\dfrac{46}{5}y_1 & & \\ & \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + & & \dfrac{2}{15}y_1 & & = 32 \\ & \dfrac{1}{12}x_1 & & -\dfrac{1}{60}y_1 + y_2 & & = 1 \\ & \dfrac{85}{6}x_1 & & -\dfrac{4}{3}y_1 & + y_3 & = 275 \\ & x_1\,, \quad x_2\,, & & y_1\,, \quad y_2\,, & y_3 & \geq 0 \end{cases}$$

- Augmentation du critère possible selon x_1
- $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \dfrac{32}{1/3} = 96$, $y_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \dfrac{1}{1/12} = 12$, $y_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \dfrac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$
  $\Rightarrow x_1 = 12$ remplace $y_2 = 0$ comme variable d'écart

Application sur le problème du brasseur

$$
\begin{cases}
\max \quad 2208 + 16x_1 - \frac{46}{5}y_1 \\
\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{15}y_1 = 32 \\
\color{red}{x_1 - \frac{1}{5}y_1 + 12y_2 = 12} \\
\frac{85}{6}x_1 - \frac{4}{3}y_1 + y_3 = 275 \\
x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

- Augmentation du critère possible selon x_1
- $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{32}{1/3} = 96$, $y_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{1}{1/12} = 12$, $y_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$
  $\Rightarrow x_1 = 12$ remplace $y_2 = 0$ comme variable d'écart
- Normalisation

Application sur le problème du brasseur

$$
\begin{cases}
\max \quad 2400 \quad - 6y_1 - 192y_2 \\
\qquad x_2 + \frac{1}{5}y_1 - 4y_2 = 28 \\
x_1 \quad - \frac{1}{5}y_1 + 12y_2 = 12 \\
\qquad \frac{3}{2}y_1 - 170y_2 + y_3 = 105 \\
x_1, x_2, \quad y_1, \quad y_2, \; y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

- Augmentation du critère possible selon x_1
- $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{32}{1/3} = 96, y_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{1}{1/12} = 12, y_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$
  $\Rightarrow x_1 = 12$ remplace $y_2 = 0$ comme variable d'écart
- Normalisation
- Injection de $x_1 = 12 + \frac{1}{5}y_1 - 12y_2$ dans les éléments restants

Application sur le problème du brasseur

$$\begin{cases} \max \quad 2400 \quad - 6y_1 - 192y_2 \\ \qquad x_2 + \frac{1}{5}y_1 - 4y_2 = 28 \\ x_1 \quad - \frac{1}{5}y_1 + 12y_2 = 12 \\ \qquad \frac{3}{2}y_1 - 170y_2 + y_3 = 105 \\ x_1, x_2, \quad y_1, \quad y_2, \; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Augmentation du critère possible selon x_1
- $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{32}{1/3} = 96, y_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{1}{1/12} = 12, y_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$
  $\Rightarrow x_1 = 12$ remplace $y_2 = 0$ comme variable d'écart
- Normalisation
- Injection de $x_1 = 12 + \frac{1}{5}y_1 - 12y_2$ dans les éléments restants

Augmentation du critère impossible : STOP

Application sur le problème du brasseur

$$\begin{cases} \max & 2400 - 6y_1 - 192y_2 \\ & x_2 + \frac{1}{5}y_1 - 4y_2 = 28 \\ & x_1 - \frac{1}{5}y_1 + 12y_2 = 12 \\ & \frac{3}{2}y_1 - 170y_2 + y_3 = 105 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Augmentation du critère possible selon x_1
- $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{32}{1/3} = 96, y_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{1}{1/12} = 12, y_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$
  $\Rightarrow x_1 = 12$ remplace $y_2 = 0$ comme variable d'écart
- Normalisation
- Injection de $x_1 = 12 + \frac{1}{5}y_1 - 12y_2$ dans les éléments restants

Augmentation du critère impossible : STOP

Point final $(x_1, x_2) = (12, 28) \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 105)$

Méthode « des tableaux »

Disposition pratique

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0,0)$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f						
y_1						
y_2						
y_3						

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0, 0)$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	
y_1						
y_2						
y_3						

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\
 & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\
 & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\
 & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\
 & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1						
y_2						
y_3						

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5				
y_2	0,125	0,125				
y_3	17,5	10				

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0,0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	
y_2	0,125	0,125				
y_3	17,5	10				

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & 39x_1 + & 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\
& 2{,}5x_1 + & 7{,}5x_2 + \; y_1 & = 240 \\
& 0{,}125x_1 + & 0{,}125x_2 \quad + \; y_2 & = 5 \\
& 17{,}5x_1 + & 10x_2 \quad + \; y_3 & = 595 \\
& x_1, & x_2, \; y_1, \; y_2, \; y_3 & \geq 0
\end{cases}
$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	
y_2	0,125	0,125	0	1	0	
y_3	17,5	10				

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	
y_2	0,125	0,125	0	1	0	
y_3	17,5	10	0	0	1	

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\
& 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\
& 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\
& 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Tableau initial en $(x_1, x_2) = (0,0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial en $(x_1,x_2) = (0,0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

Base initiale : (y_1,y_2,y_3)

Application sur le problème du brasseur

On part donc de la forme standard :

$$(P^s)\begin{cases} \max & 39x_1 + 69x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \\ & 2{,}5x_1 + 7{,}5x_2 + y_1 = 240 \\ & 0{,}125x_1 + 0{,}125x_2 + y_2 = 5 \\ & 17{,}5x_1 + 10x_2 + y_3 = 595 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial en $(x_1,x_2) = (0,0)$ et donc $f = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

Base initiale : (y_1,y_2,y_3)

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients strictement positifs $\Rightarrow$ Amélioration possible

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients strictements positifs $\Rightarrow$ Amélioration possible
   Critère de choix usuel : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients strictement positifs $\Rightarrow$ Amélioration possible
   Critère de choix usuel : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
2. Choix de la variable sortante

$$y_1 : \frac{240}{7{,}5} = 32 \quad , \qquad\qquad ,$$

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients strictement positifs $\Rightarrow$ Amélioration possible
   Critère de choix usuel : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
2. Choix de la variable sortante

$$y_1 : \frac{240}{7{,}5} = 32 \quad , \quad y_2 : \frac{5}{0{,}125} = 40 \quad ,$$

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients strictement positifs $\Rightarrow$ Amélioration possible
   Critère de choix usuel : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
2. Choix de la variable sortante

$$y_1 : \frac{240}{7,5} = 32 \quad , \quad y_2 : \frac{5}{0,125} = 40 \quad , \quad y_3 : \frac{595}{10} = 59,5$$

Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) :

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients strictement positifs $\Rightarrow$ Amélioration possible
   Critère de choix usuel : plus forte montée relative $\Rightarrow x_2$
2. Choix de la variable sortante

$$y_1 : \frac{240}{7{,}5} = 32 \quad , \quad y_2 : \frac{5}{0{,}125} = 40 \quad , \quad y_3 : \frac{595}{10} = 59{,}5$$

Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : y_1

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
y_1	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
x_2	2,5	7,5	1	0	0	240
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
x_2	1/3	1	2/15	0	0	32
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   Ramener le coefficient principal à 1 : $L_1 \leftarrow L_1/7{,}5$

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	39	69	0	0	0	0
x_2	1/3	1	2/15	0	0	32
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   Ramener le coefficient principal à 1 : $L_1 \leftarrow L_1/7{,}5$
   Ramener les coefficients secondaires à 0 :

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	0,125	0,125	0	1	0	5
y_3	17,5	10	0	0	1	595

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   Ramener le coefficient principal à 1 : $L_1 \leftarrow L_1/7{,}5$
   Ramener les coefficients secondaires à 0 :
   - $L_f \leftarrow L_f - 69L_1$

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	17,5	10	0	0	1	595

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   Ramener le coefficient principal à 1 : $L_1 \leftarrow L_1/7{,}5$
   Ramener les coefficients secondaires à 0 :
   - $L_f \leftarrow L_f - 69L_1$
   - $L_2 \leftarrow L_2 - 0{,}125L_1$

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   Ramener le coefficient principal à 1 : $L_1 \leftarrow L_1/7{,}5$
   Ramener les coefficients secondaires à 0 :
   - $L_f \leftarrow L_f - 69L_1$
   - $L_2 \leftarrow L_2 - 0{,}125L_1$
   - $L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$

Application sur le problème du brasseur

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   Ramener le coefficient principal à 1 : $L_1 \leftarrow L_1/7{,}5$
   Ramener les coefficients secondaires à 0 :
   - $L_f \leftarrow L_f - 69L_1$
   - $L_2 \leftarrow L_2 - 0{,}125L_1$
   - $L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1$

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante :

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante :

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
y_2	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
x_1	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
x_1	$1/12$	0	$-1/60$	1	0	1
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	16	0	$-46/5$	0	0	-2208
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(1/12)$

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	$1/3$	1	$2/15$	0	0	32
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(1/12)$
   - $L_f \leftarrow L_f - 16L_2$

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	$85/6$	0	$-4/3$	0	1	275

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(1/12)$
   - $L_f \leftarrow L_f - 16L_2$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (1/3)L_2$

Application sur le problème du brasseur

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(1/12)$
   - $L_f \leftarrow L_f - 16L_2$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (1/3)L_2$
   - $L_3 \leftarrow L_3 - (85/6)L_2$

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

1. Choix de la variable entrante : x_1
2. Choix de la variable sortante : y_2

$$x_2 : \frac{32}{1/3} = 69 \quad , \quad y_2 : \frac{1}{1/12} = 12 \quad , \quad y_3 : \frac{275}{85/6} \simeq 19{,}4$$

3. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
4. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(1/12)$
   - $L_f \leftarrow L_f - 16L_2$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (1/3)L_2$
   - $L_3 \leftarrow L_3 - (85/6)L_2$

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Base finale : (x_2, x_1, y_3)

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Base finale : (x_2, x_1, y_3)

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients négatifs $\Rightarrow$ Aucune amélioration possible : STOP

Application sur le problème du brasseur

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Base finale : (x_2, x_1, y_3)

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients négatifs $\Rightarrow$ Aucune amélioration possible : STOP
2. Lecture de l'optimum

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Base finale : (x_2, x_1, y_3)

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients négatifs $\Rightarrow$ Aucune amélioration possible : STOP
2. Lecture de l'optimum
   - $x_2 = 28$

Application sur le problème du brasseur

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Base finale : (x_2, x_1, y_3)

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients négatifs $\Rightarrow$ Aucune amélioration possible : STOP
2. Lecture de l'optimum
   - $x_2 = 28$
   - $x_1 = 12$

Application sur le problème du brasseur

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Base finale : (x_2, x_1, y_3)

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients négatifs $\Rightarrow$ Aucune amélioration possible : STOP
2. Lecture de l'optimum
   - $x_2 = 28$
   - $x_1 = 12$
   - $y_3 = 105$

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
f	0	0	-6	-192	0	-2400
x_2	0	1	$1/5$	-4	0	28
x_1	1	0	$-1/5$	12	0	12
y_3	0	0	$3/2$	-170	1	105

Base finale : (x_2, x_1, y_3)

1. Choix de la variable entrante
   Coefficients négatifs $\Rightarrow$ Aucune amélioration possible : STOP
2. Lecture de l'optimum
   - $x_2 = 28$
   - $x_1 = 12$
   - $y_3 = 105$
   - $y_1 = y_2 = 0$ (variables hors-base)

Méthode « des tableaux »

Règles de pivotage

Choix de la variable entrante

Lorsque plusieurs variables entrantes sont possibles…

Choix de la variable entrante

Lorsque plusieurs variables entrantes sont possibles...

Règle de la plus grande pente

On choisit la variable de plus grand coefficient.

Choix de la variable entrante

Lorsque plusieurs variables entrantes sont possibles...

Règle de la plus grande pente

On choisit la variable de plus grand coefficient.

Règle de Bland (1977)

On choisit la variable de plus faible indice dont le coefficient est strictement positif.

Choix de la variable entrante

Lorsque plusieurs variables entrantes sont possibles. . .

Règle de la plus grande pente

On choisit la variable de plus grand coefficient.

Règle de BLAND (1977)

On choisit la variable de plus faible indice dont le coefficient est strictement positif.

Règle « gloutonne »

On choisit la variable assurant l'augmentation maximale du critère en une itération.

Choix de la variable sortante

Lorsque plusieurs variables sortantes sont possibles…

« ce qui vient » (…!)

On choisit la variable associée à la première ligne où est atteint le minimum des rapports.

Règle de BLAND (1977)

On choisit la variable de plus faible indice dont la ligne atteint le minimum des rapports.

Définition (Règle de pivotage)

Stratégie de choix de la variable entrante
$+$ Stratégie de choix de la variable sortante