Fiche d'exercices

Suites de Variables Aléatoires Réelles

Convergence

LGN and CLT

Note. Toutes las v.a.rs sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Convergence des suites de v.a.rs

Exercice 1 - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues ayant pour fonctions de répartition

$$F_{X_n}(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^n I_{]0,+\infty[}(x)$$

Trouver la limite en loi (si elle existe) de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues ayant pour fonctions de répartition

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Trouver la limite en loi (si elle existe) de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues ayant pour fonctions de répartition

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ nx & \text{si } 0 < x < 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq x \end{cases}$$

Trouver la limite en loi (si elle existe) de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4 - Soit X une v.a.r. absolument continue, uniformément distribuée sur $[0,1]$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues, uniformément distribuées sur $[0, 1+1/n]$.
Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exercice 5 - Soit X une v.a.r. absolument continue, uniformément distribuée sur $[0,2]$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues, uniformément distribuées sur $[1/n, 2]$.
Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exercice 6 - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues, indépendantes, chacune uniformément distribuée sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

1) Montrer que la suite de v.a.rs $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers 0.

2) Montrer que la suite de v.a.rs $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité, en utilisant deux méthodes.

Exercice 7 - Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2$.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.rs, indépendantes, de lois (respectivement) exponentielles $\mathcal{E}(a_n)$.
On pose pour tout $n \geq 1$

$$Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

Montrer que la suite de v.a.rs $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. Y de loi $\mathcal{E}(2)$.

Exercice 8 - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs discrètes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n(\Omega) = \{0, n^2\}$$

et f.m.p.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } x = n^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en moyenne (dans L^1) vers 0.
   $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-elle dans L^2 vers 0 ?

Exercice 9 - Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \quad E(|X_n|^2) < +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} E(X_n) = a \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$$

1) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique (dans L^2) vers a.
2) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers a.

Exercice 10 - Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.rs discrètes telle que pour tout $n \geq 1$

$$X_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$$

et f.m.p.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{si } x = -1 \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2n} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chaque cas, utiliser la définition.

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.
2) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
3) Montrer que, pour tout $r > 1$, $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne d'ordre r vers 0.

Exercice 11 - On travaille dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne et P est la probabilité uniforme sur le segment $[0,1]$, i.e :

$$P(D) = \int_D dx, \quad \forall D \in \mathcal{B}(\Omega) \quad (P \text{ mesure la longueur du domaine } D)$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit :

$$\begin{array}{rccl} X_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & X_n(\omega) = \min(n\omega, 1) \end{array}$$

Montrer que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la variable certaine $X = 1$.

***

Exercice 12 - Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour obtenir strictement plus de 100 faces avec une probabilité de 90% ?

Exercice 13 - Lancez une pièce équilibrée deux fois. Vous gagnez \$1 si au moins un des deux lancers sort face, sinon, vous gagnez \$0.

1) Supposons que vous jouiez à ce jeu 300 fois. Quelle est, approximativement, la probabilité que vous gagniez au moins \$250 ?
2) Combien de fois avez-vous besoin de jouer pour gagner au moins \$250 avec une probabilité d'au moins 0.99 ?

Exercice 14 - Lancez un dé équilibré n fois. Soit X le nombre de fois que vous obtenez un 6. Supposons que n est grand.

1) Calculez l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2) Trouver une approximation, en termes de n et Φ, de la probabilité suivante
$$P\left(|X - E(X)| \leq 0.1 * E(X)\right)$$
3) Quelle grandeur n devrait-il avoir pour que la probabilité en 2) soit supérieure à 0.99 ?

Exercice 15 - Soit X une v.a.r.. Supposons que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $\alpha = 0.4$ (i.e. $X \sim \mathcal{B}(150, 0.4)$).

1) Calculez l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2) Utiliser le Central Limit Theorem avec la correction de continuité, afin de trouver une approximation pour $P(X = 60)$.

Exercice 16 - Supposons qu'un échantillon aléatoire de $n = 1600$ pneus du même type soit obtenu à partir d'un processus de production en cours dans lequel 8% de tous ces pneus produits sont défectueux. En utilisant le Central Limit Theorem avec la correction de continuité, quelle est la probabilité que, dans un tel échantillon, pas plus de 150 (inclus) des pneus soient défectueux ?

Exercice 17 - D'après l'expérience passée, 7% de tous les Ticket-Resto sont en erreur. Nous sélectionnons un échantillon aléatoire de 400 Tickets. En utilisant le Central Limit Theorem avec la correction de continuité, quelle est la probabilité approximative que :

1) exactement 25 sont ~~une~~ en erreur ?
2) moins de 25 (exclusif) sont en erreur ?
3) entre 20 et 25 (les deux inclus) sont une erreur ?

Exercice 18 - Loi de POISSON

Le nombre moyen d'accidents de vols commerciaux, par an, dans le monde est de 25. En supposant que le nombre d'accidents par an suit une loi de Poisson :

1) Calculer la probabilité qu'il y ait sur une année : 20 accidents ; 25 accidents.
2) En utilisant une approximation, calculer la probabilité qu'il y en ait sur une année : strictement moins que 25 accidents ; au moins 28 accidents.