Optimisation linéaire

Romain Dujol, Jean-Paul Forest

CY Tech – ING1-IN

2022 – 2023

Optimisation linéaire en nombres entiers

Problème d’optimisation linéaire en nombres entiers

Problème d’optimisation linéaire en nombres entiers

Introduction sur un exemple

Formulation du problème

Un grossiste propose deux types de bière blonde par fût de douze litres à destination des débits de boisson, une version « light » et une version normale :

- la version « light » nécessite 10 litres de bière blonde ;
- la version normale nécessite 12 litres de bière blonde ;

L'approvisionnement du grossiste est limité : 59 litres de bière blonde.

Le grossiste cherche à répartir sa production de manière à obtenir un bénéfice maximal sachant qu'il réalise 10 € de bénéfice par fût de bière blonde « light » et 11 € de bénéfice par fût de bière blonde normale.

(On fait l'hypothèse que tout fût produit est vendu.)

(On fait l'hypothèse que la conception des fûts imposent que ceux-ci doivent être vendus pleins.)

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

- x_1 : nombre de fûts de bière blonde « light » produits ;

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

- x_1 : nombre de fûts de bière blonde « light » produits ;
- x_2 : nombre de fûts de bière blonde normale produits.

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

- x_1 : nombre de fûts de bière blonde « light » produits ;
- x_2 : nombre de fûts de bière blonde normale produits.

$$(\overline{P}) \begin{cases} \max & (10x_1 + 11x_2) \\ & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

- x_1 : nombre de fûts de bière blonde « light » produits ;
- x_2 : nombre de fûts de bière blonde normale produits.

$$
(P)\begin{cases}
\max \quad (10x_1 + 11x_2) \\
10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\
x_1 , \quad x_2 \in \mathbb{N}
\end{cases}
$$

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

- x_1 : nombre de fûts de bière blonde « light » produits ;
- x_2 : nombre de fûts de bière blonde normale produits.

$$(P)\begin{cases} \max & (10x_1 + 11x_2) \\ & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1, \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Résolution par méthode des tableaux

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

- x_1 : nombre de fûts de bière blonde « light » produits ;
- x_2 : nombre de fûts de bière blonde normale produits.

$$(P)\begin{cases} \max & (10x_1 + 11x_2) \\ & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1, \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Résolution par méthode des tableaux

Tableau final :

	x_1	x_2	y_1	
f	0	-1	-1	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	$59/10$

Le problème du grossiste du brasseur

Formulation complète

- x_1 : nombre de fûts de bière blonde « light » produits ;
- x_2 : nombre de fûts de bière blonde normale produits.

$$(P)\begin{cases} \max & (10x_1 + 11x_2) \\ & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1\,, \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Résolution par méthode des tableaux

Tableau final :

	x_1	x_2	y_1	
f	0	-1	-1	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	$59/10$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{59}{10} \notin \mathbb{N} \text{ et } x_2^* = 0$$

Problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

Définition

Problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

Définition (Problème en nombres entiers)

Un problème d'optimisation linéaire est dit **en nombres entiers** si et seulement si toutes les variables sont entières.

$$(P) \begin{cases} \max\limits_{x} \quad (c|x) \\ \qquad Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n \end{cases}$$

Problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

Définition (Problème en nombres entiers)

Un problème d'optimisation linéaire est dit **en nombres entiers** si et seulement si toutes les variables sont entières.

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x} & (c\,|\,x)\\ & Ax \leq b,\ x \in \mathbb{N}^n\end{cases}$$

Problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

Définition (Problème en nombres entiers)

Un problème d'optimisation linéaire est dit **en nombres entiers** si et seulement si toutes les variables sont entières.

$$(P)\begin{cases}\max\limits_{x} & (c|x)\\ & Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\end{cases}$$

Définition (Problème relaxé)

Le **problème relaxé** de $(P)\begin{cases}\max\limits_{x} & (c|x)\\ & Ax \leq b, x \in \mathbb{N}^n\end{cases}$ est le problème d'optimisation linéaire $(\overline{P})\begin{cases}\max\limits_{x} & (c|x)\\ & Ax \leq b, x \geq 0\end{cases}$

Méthode des coupes

Méthode des coupes

Principe

Méthode des coupes (Gomory, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Méthode des coupes (GOMORY, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Principe de l'algorithme

Méthode des coupes (Gomory, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Principe de l'algorithme

1. On part de l'optimum du problème relaxé.

Méthode des coupes (Gomory, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Principe de l'algorithme

1. On part de l'optimum du problème relaxé.
2. Si l'optimum courant n'est pas entier :

Méthode des coupes (Gomory, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Principe de l'algorithme

1. On part de l'optimum du problème relaxé.
2. Si l'optimum courant n'est pas entier :
   - choisir une variable non entière ;

Méthode des coupes (GOMORY, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Principe de l'algorithme

1. On part de l'optimum du problème relaxé.
2. Si l'optimum courant n'est pas entier :
   - choisir une variable non entière ;
   - construire une nouvelle contrainte à partir de cette variable ;

Méthode des coupes (GOMORY, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Principe de l'algorithme

1. On part de l'optimum du problème relaxé.
2. Si l'optimum courant n'est pas entier :
   - choisir une variable non entière ;
   - construire une nouvelle contrainte à partir de cette variable ;
   - calculer l'optimum du nouveau problème
     ($\rightsquigarrow$ *méthode « primale-duale »*).

Méthode des coupes (GOMORY, 1958)

Idée fondamentale

Rajouter des contraintes (« coupes ») de manière à ce que l'optimum du problème relaxé soit entier.

Principe de l'algorithme

1. On part de l'optimum du problème relaxé.
2. Si l'optimum courant n'est pas entier :
   - choisir une variable non entière ;
   - construire une nouvelle contrainte à partir de cette variable ;
   - calculer l'optimum du nouveau problème ($\rightsquigarrow$ *méthode « primale-duale »*).
3. Si l'optimum courant est entier, on s'arrête.
   Sinon, on revient en 2.

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor =$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}, \ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor =$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} =$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} = 0,4$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} = 0,4$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R}, \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} = 0,4 \qquad \{-2,4\} =$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R}, \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} = 0,4 \qquad \{-2,4\} = 0,6$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} = 0,4 \qquad \{-2,4\} = 0,6$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} = 0,4 \qquad \{-2,4\} = 0,6$

Propriété $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

Partie entière. Partie fractionnaire

Définition (Partie entière)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$

Exemples

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$

Définition (Partie fractionnaire)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Exemples

$\{2,4\} = 0,4 \qquad \{-2,4\} = 0,6$

Propriété $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

Corollaire $\forall x \in \mathbb{R},\ \{x\} \in [0,1[$

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (59 - x_2 - y_1) \\
& x_1 + \frac{12}{10}x_2 + \frac{1}{10}y_1 = \frac{59}{10} \\
& \\
& x_1, \quad x_2, \quad y_1 \geq 0
\end{cases}
$$

Point initial $(x_1, x_2) = \left(\frac{59}{10}, 0\right) \Rightarrow y_1 = 0$

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (59 - x_2 - y_1) \\
 & x_1 + \dfrac{12}{10}x_2 + \dfrac{1}{10}y_1 = \dfrac{59}{10} \\
 & \\
 & x_1,\quad x_2,\quad y_1 \geq 0
\end{cases}
$$

Point initial $(x_1,x_2) = \left(\dfrac{59}{10},0\right) \Rightarrow y_1 = 0$

- $(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2$ et $y_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x_1 + \left\lfloor \dfrac{12}{10} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \dfrac{1}{10} \right\rfloor y_1 \leq \left\lfloor \dfrac{59}{10} \right\rfloor$

Application sur le problème du grossiste

$$(P^s)\begin{cases} \max \quad (59 \quad - \quad x_2 - \quad y_1) \\ \quad x_1 + \frac{12}{10}x_2 + \frac{1}{10}y_1 = \frac{59}{10} \\ \\ \quad x_1, \quad x_2, \quad y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Point initial $(x_1, x_2) = \left(\frac{59}{10}, 0\right) \Rightarrow y_1 = 0$

- $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ et $y_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x_1 + \left\lfloor \frac{12}{10} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor y_1 \leq \left\lfloor \frac{59}{10} \right\rfloor$

$$\Rightarrow -\left\{\frac{12}{10}\right\}x_2 - \left\{\frac{1}{10}\right\}y_1 \leq -\left\{\frac{59}{10}\right\}$$

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (59 - x_2 - y_1) \\
& x_1 + \frac{12}{10}x_2 + \frac{1}{10}y_1 = \frac{59}{10} \\
& x_1,\ x_2,\ y_1 \geq 0
\end{cases}
$$

Point initial $(x_1, x_2) = \left(\frac{59}{10}, 0\right) \Rightarrow y_1 = 0$

- $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ et $y_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x_1 + \left\lfloor \frac{12}{10} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor y_1 \leq \left\lfloor \frac{59}{10} \right\rfloor$

$$\Rightarrow -\left\{\frac{12}{10}\right\}x_2 - \left\{\frac{1}{10}\right\}y_1 \leq -\left\{\frac{59}{10}\right\}$$

- Nouvelle coupe : $-\frac{2}{10}x_2 - \frac{1}{10}y_1 \leq -\frac{9}{10}$

Application sur le problème du grossiste

$$(P^s)\begin{cases} \max & (59 - x_2 - y_1) \\ & x_1 + \frac{12}{10}x_2 + \frac{1}{10}y_1 = \frac{59}{10} \\ & \\ & x_1, \quad x_2, \quad y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Point initial $(x_1, x_2) = \left(\frac{59}{10}, 0\right) \Rightarrow y_1 = 0$

- $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ et $y_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x_1 + \left\lfloor \frac{12}{10} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor y_1 \leq \left\lfloor \frac{59}{10} \right\rfloor$

$$\Rightarrow -\left\{\frac{12}{10}\right\} x_2 - \left\{\frac{1}{10}\right\} y_1 \leq -\left\{\frac{59}{10}\right\}$$

- Nouvelle coupe : $-\frac{2}{10}x_2 - \frac{1}{10}y_1 \leq -\frac{9}{10}$ (i.e. $x_1 + x_2 \leq 5$)

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max \quad (59 \quad - \quad x_2 - \quad y_1) \\
x_1 + \dfrac{12}{10}x_2 + \dfrac{1}{10}y_1 = \dfrac{59}{10} \\
\color{red}{-\dfrac{2}{10}x_2 - \dfrac{1}{10}y_1 + \gamma_1 = -\dfrac{9}{10}} \\
x_1,\quad x_2,\quad y_1,\ \color{red}{\gamma_1} \geq 0
\end{cases}
$$

Point initial $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{59}{10}, 0\right) \Rightarrow y_1 = 0$

- $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ et $y_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x_1 + \left\lfloor \dfrac{12}{10} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \dfrac{1}{10} \right\rfloor y_1 \leq \left\lfloor \dfrac{59}{10} \right\rfloor$

  $$\Rightarrow -\left\{\dfrac{12}{10}\right\} x_2 - \left\{\dfrac{1}{10}\right\} y_1 \leq -\left\{\dfrac{59}{10}\right\}$$

- Nouvelle coupe : $-\dfrac{2}{10}x_2 - \dfrac{1}{10}y_1 \leq -\dfrac{9}{10}$ (i.e. $x_1 + x_2 \leq 5$)

  $\Rightarrow$ nouvelle variable d'écart γ_1

Application sur le problème du grossiste

$$(P^s)\begin{cases}\max & (59 - x_2 - y_1)\\ & x_1 + \frac{12}{10}x_2 + \frac{1}{10}y_1 = \frac{59}{10}\\ & -\frac{2}{10}x_2 - \frac{1}{10}y_1 + \gamma_1 = -\frac{9}{10}\\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ \gamma_1 \geq 0\end{cases}$$

Point initial $(x_1,x_2) = \left(\frac{59}{10}, 0\right) \Rightarrow y_1 = 0$

- $(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2$ et $y_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x_1 + \left\lfloor \frac{12}{10} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor y_1 \leq \left\lfloor \frac{59}{10} \right\rfloor$

$$\Rightarrow -\left\{\frac{12}{10}\right\}x_2 - \left\{\frac{1}{10}\right\}y_1 \leq -\left\{\frac{59}{10}\right\}$$

- Nouvelle coupe : $-\frac{2}{10}x_2 - \frac{1}{10}y_1 \leq -\frac{9}{10}$ (i.e. $x_1 + x_2 \leq 5$)

  $\Rightarrow$ nouvelle variable d'écart γ_1
- Résolution du nouveau problème

Application sur le problème du grossiste

$$(P^s)\begin{cases} \max \quad \dfrac{109}{2} - \dfrac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 \\ x_1 - \dfrac{1}{2}y_1 + 6\gamma_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 + \dfrac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 = \dfrac{9}{2} \\ \\ x_1, x_2, \quad y_1, \quad \gamma_1 \geq 0 \end{cases}$$

Point $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow y_1 = 0$ et $\gamma_1 = 0$

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & \frac{109}{2} - \frac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 \\
& x_1 - \frac{1}{2}y_1 + 6\gamma_1 = \frac{1}{2} \\
& x_2 + \frac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 = \frac{9}{2} \\
& x_1, x_2, \quad y_1, \quad \gamma_1 \geq 0
\end{cases}
$$

Point $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow y_1 = 0$ et $\gamma_1 = 0$

- Nouvelle coupe (selon la première équation) :

$$
-\left\{-\frac{1}{2}\right\}y_1 = -\left\{\frac{1}{2}\right\} \iff -\frac{1}{2}y_1 \leq -\frac{1}{2}
$$

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & \frac{109}{2} & & -\frac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 & \\
& & x_1 & -\frac{1}{2}y_1 + 6\gamma_1 & = \frac{1}{2} \\
& & & x_2 + \frac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 & = \frac{9}{2} \\
& & & & \\
& & x_1, x_2, & y_1, \quad \gamma_1 & \geq 0
\end{cases}
$$

Point $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow y_1 = 0$ et $\gamma_1 = 0$

- Nouvelle coupe (selon la première équation) :

$$-\left\{-\frac{1}{2}\right\}y_1 = -\left\{\frac{1}{2}\right\} \iff -\frac{1}{2}y_1 \leq -\frac{1}{2}$$

(i.e. $5x_1 + 6x_2 \leq 29$)

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & \frac{109}{2} & & -\frac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 & & \\
& & x_1 & -\frac{1}{2}y_1 + 6\gamma_1 & & = \frac{1}{2} \\
& & x_2 & +\frac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 & & = \frac{9}{2} \\
& & & \color{red}{-\frac{1}{2}y_1} & \color{red}{+\ \gamma_2} & \color{red}{= -\frac{1}{2}} \\
& & x_1, x_2, & y_1, & \gamma_1, \color{red}{\gamma_2} & \geq 0
\end{cases}
$$

Point $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow y_1 = 0$ et $\gamma_1 = 0$

- Nouvelle coupe (selon la première équation) :

$$-\left\{-\frac{1}{2}\right\}y_1 = -\left\{\frac{1}{2}\right\} \iff -\frac{1}{2}y_1 \leq -\frac{1}{2}$$

(i.e. $5x_1 + 6x_2 \leq 29$) $\Rightarrow$ nouvelle variable d'écart γ_2

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & \dfrac{109}{2} & & -\dfrac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 & & \\
& & x_1 & -\dfrac{1}{2}y_1 + 6\gamma_1 & & = \dfrac{1}{2} \\
& & & x_2 + \dfrac{1}{2}y_1 - 5\gamma_1 & & = \dfrac{9}{2} \\
& & & -\dfrac{1}{2}y_1 & + \ \gamma_2 & = -\dfrac{1}{2} \\
& & x_1, x_2, & y_1, & \gamma_1, \gamma_2 & \geq 0
\end{cases}
$$

Point $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{2}\right) \Rightarrow y_1 = 0$ et $\gamma_1 = 0$

- Nouvelle coupe (selon la première équation) :

$$-\left\{-\frac{1}{2}\right\}y_1 = -\left\{\frac{1}{2}\right\} \iff -\frac{1}{2}y_1 \leq -\frac{1}{2}$$

(i.e. $5x_1 + 6x_2 \leq 29$) $\Rightarrow$ nouvelle variable d'écart γ_2

- Résolution du nouveau problème

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (54 \quad -5\gamma_1 - \gamma_2) \\
x_1 + 6\gamma_1 - \gamma_2 = 1 \\
x_2 - 5\gamma_1 + \gamma_2 = 4 \\
y_1 - 2\gamma_2 = 1 \\
x_1, x_2, y_1, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0
\end{cases}
$$

Point final $(x_1, x_2) = (1,4) \Rightarrow y_1 = 1$ et $(\gamma_1, \gamma_2) = (0,0)$

$$(P^s)\begin{cases} \max & (54 - 5\gamma_1 - \gamma_2) \\ & x_1 + 6\gamma_1 - \gamma_2 = 1 \\ & x_2 - 5\gamma_1 + \gamma_2 = 4 \\ & y_1 - 2\gamma_2 = 1 \\ & x_1, x_2, y_1, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0 \end{cases}$$

Point final $(x_1, x_2) = (1,4) \Rightarrow y_1 = 1$ et $(\gamma_1, \gamma_2) = (0,0)$

Remarque

Application sur le problème du grossiste

$$
(P^s)\begin{cases}
\max & (54 & & & -5\gamma_1 - & \gamma_2) & \\
 & x_1 & & & +6\gamma_1 - & \gamma_2 & = 1 \\
 & & x_2 & & -5\gamma_1 + & \gamma_2 & = 4 \\
 & & & y_1 & & -2\gamma_2 & = 1 \\
 & x_1, & x_2, & y_1, & \gamma_1, & \gamma_2 & \geq 0
\end{cases}
$$

Point final $(x_1, x_2) = (1, 4) \Rightarrow y_1 = 1$ et $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 0)$

Remarque

- Solution du problème non relaxé : $(1, 4)$

Application sur le problème du grossiste

$$(P^s)\begin{cases}\max & (54 \quad -5\gamma_1 - \gamma_2) \\ & x_1 \quad +6\gamma_1 - \gamma_2 = 1 \\ & x_2 \quad -5\gamma_1 + \gamma_2 = 4 \\ & y_1 \quad -2\gamma_2 = 1 \\ & x_1, x_2, y_1, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0\end{cases}$$

Point final $(x_1, x_2) = (1,4) \Rightarrow y_1 = 1$ et $(\gamma_1, \gamma_2) = (0,0)$

Remarque

- Solution du problème non relaxé : $(1,4)$
- Solution du problème relaxé : $(5{,}9;0)$

Application sur le problème du grossiste

$$(P^s)\begin{cases} \max & (54 \qquad\qquad\qquad -5\gamma_1 - \gamma_2) \\ & x_1 \qquad\qquad +6\gamma_1 - \gamma_2 = 1 \\ & \quad x_2 \qquad -5\gamma_1 + \gamma_2 = 4 \\ & \qquad y_1 \qquad\quad -2\gamma_2 = 1 \\ & x_1, x_2, y_1, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0 \end{cases}$$

Point final $(x_1, x_2) = (1, 4) \Rightarrow y_1 = 1$ et $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 0)$

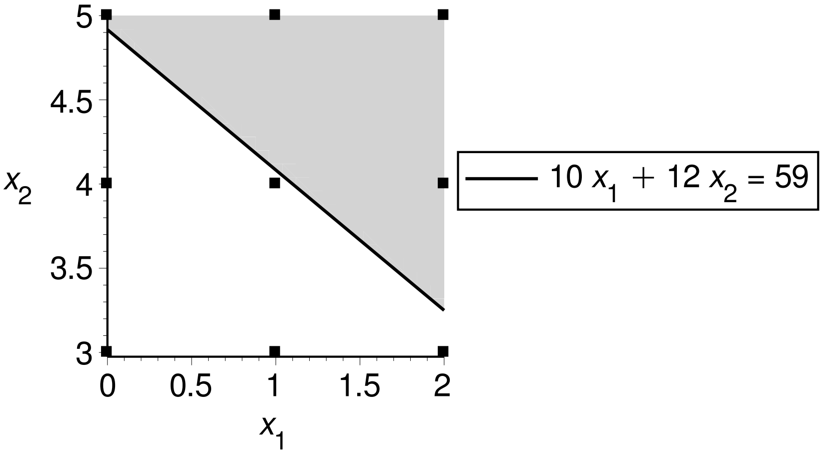
Remarque

- Solution du problème non relaxé : $(1, 4)$
- Solution du problème relaxé : $(5{,}9; 0)$

Les optima ne sont pas forcément proches l'une de l'autre.

Application sur le problème du grossiste

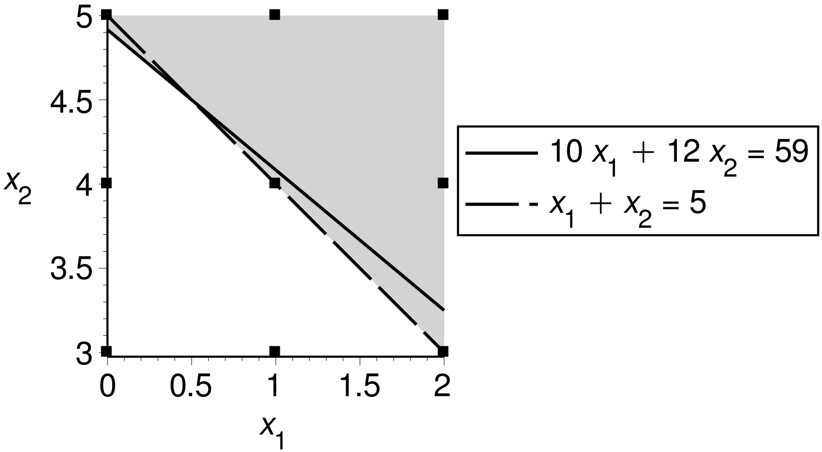
Évolution du domaine des contraintes



Optimum : $\left(\frac{59}{10}, 0\right)$

Application sur le problème du grossiste

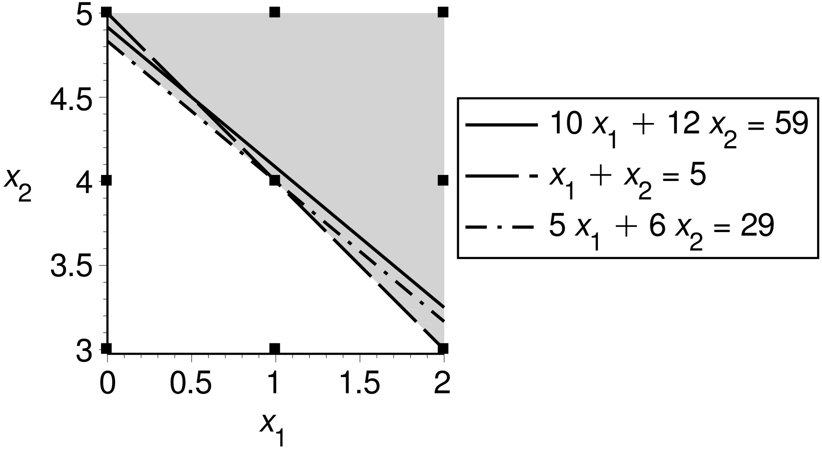
Évolution du domaine des contraintes



Optimum : $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Application sur le problème du grossiste

Évolution du domaine des contraintes



Optimum : $(1, 4)$

Méthode des coupes

Disposition pratique

Application sur le problème du grossiste

Initialisation

On part donc du tableau final de la résolution du problème relaxé

$$(P)\begin{cases} \max & (10x_1 + 11x_2) \\ & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	y_1	
f	0	-1	-1	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	$59/10$

Application sur le problème du grosssiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	
f	0	-1	-1	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	$59/10$

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	
f	0	-1	-1	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	$59/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_1

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_1
3. Variable sortante : γ_1 (nécessairement)

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_1
3. Variable sortante : γ_1 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : méthode « primale-duale »

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_1
3. Variable sortante : γ_1 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : méthode « primale-duale »

$$x_2 : \frac{-1}{-2/10} = 5$$

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_1
3. Variable sortante : γ_1 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : méthode « primale-duale »

$$x_2 : \frac{-1}{-2/10} = 5$$

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_1
3. Variable sortante : γ_1 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : méthode « primale-duale »

$$x_2 : \frac{-1}{-2/10} = 5 \quad , \quad y_1 : \frac{-1}{-1/10} = 10$$

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

1. Choix de la variable de coupe
   Variables non entières $\Rightarrow$ coupe possible
   Critère de choix usuel : plus grande partie fractionnaire
   $\Rightarrow x_1$
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_1
3. Variable sortante : γ_1 (nécessairement)
4. Choix de la variable entrante : méthode « primale-duale »

$$x_2 : \frac{-1}{-2/10} = 5 \qquad , \qquad y_1 : \frac{-1}{-1/10} = 10$$

Rapport le plus faible (afin de rester dans les contraintes) : x_2

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
γ_1	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
x_2	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
x_2	0	$-2/10$	$-1/10$	1	$-9/10$

5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	y_2	
f	0	-1	-1	0	-59
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
x_2	0	1	$1/2$	-5	$9/2$

5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(-2/10)$

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	0	$-1/2$	-5	$-109/2$
x_1	1	$12/10$	$1/10$	0	$59/10$
x_2	0	1	$1/2$	-5	$9/2$

5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(-2/10)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-1)L_2$

Application sur le problème du grossiste

Première itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	0	$-1/2$	-5	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	$9/2$

5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_2 \leftarrow L_2/(-2/10)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-1)L_2$
   - $L_1 \leftarrow L_1 - (12/10)L_2$

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	0	$-1/2$	-5	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	$9/2$

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	0	$-1/2$	-5	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	$9/2$

1. Choix de la variable de coupe :

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	
f	0	0	$-1/2$	-5	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	$9/2$

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/2$	-5	0	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
γ_2	0	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/2$	-5	0	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
γ_2	0	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/2$	-5	0	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
γ_2	0	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante :

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/2$	-5	0	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
γ_2	0	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/2$	-5	0	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
y_1	0	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1
5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/2$	-5	0	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
y_1	0	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1
5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	$-1/2$	-5	0	$-109/2$
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1
5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_3 \leftarrow L_3/(-1/2)$

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	$-1/2$	6	0	$1/2$
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1
5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_3 \leftarrow L_3/(-1/2)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-1/2)L_3$

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	$1/2$	-5	0	$9/2$
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1
5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_3 \leftarrow L_3/(-1/2)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-1/2)L_3$
   - $L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_3$

Application sur le problème du grossiste

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	0	-5	1	4
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1
5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_3 \leftarrow L_3/(-1/2)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-1/2)L_3$
   - $L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_3$
   - $L_2 \leftarrow L_2 - (1/2)L_3$

Deuxième itération

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	0	-5	1	4
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe : x_1 (ou x_2)
2. Ajout de la coupe et de sa variable d'écart γ_2
3. Variable sortante : γ_2
4. Choix de la variable entrante : y_1
5. Placement de la nouvelle variable
   Échanger les variables dans la base
6. Pivoter le tableau pour réaliser la substitution
   - $L_3 \leftarrow L_3/(-1/2)$
   - $L_f \leftarrow L_f - (-1/2)L_3$
   - $L_1 \leftarrow L_1 + (1/2)L_3$
   - $L_2 \leftarrow L_2 - (1/2)L_3$

Application sur le problème du grossiste

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	0	-5	1	4
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe
   Toutes les variables sont entières $\Rightarrow$ STOP

Application sur le problème du grossiste

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	0	-5	1	4
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe
   Toutes les variables sont entières $\Rightarrow$ STOP
2. Lecture de l'optimum

Application sur le problème du grossiste

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	0	-5	1	4
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe
   Toutes les variables sont entières $\Rightarrow$ STOP
2. Lecture de l'optimum
   - $(x_1, x_2) = (1, 4) \in \mathbb{N}^2$

Application sur le problème du grossiste

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	0	-5	1	4
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe
   Toutes les variables sont entières $\Rightarrow$ STOP
2. Lecture de l'optimum
   - $(x_1, x_2) = (1, 4) \in \mathbb{N}^2$
   - $y_1 = 1$

Application sur le problème du grossiste

Terminaison

	x_1	x_2	y_1	γ_1	γ_2	
f	0	0	0	-5	-1	-54
x_1	1	0	0	6	-1	1
x_2	0	1	0	-5	1	4
y_1	0	0	1	0	-2	1

1. Choix de la variable de coupe
   Toutes les variables sont entières $\Rightarrow$ STOP
2. Lecture de l'optimum
   - $(x_1, x_2) = (1, 4) \in \mathbb{N}^2$
   - $y_1 = 1$
   - $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$

Terminaison

Terminaison assurée si l'on choisit toujours la variable de coupe selon la plus grande partie fractionnaire.

Complexité de la méthode

Complexité exponentielle en nombre de coupes.
$\Rightarrow$ *Peu efficace*