TD1 - variables aléatoires réelles à densité

Exercice 1. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{8}x\mathbb{1}_{[0;4]}(x)$.*

1. *Vérifier que f est bien une fonction de densité de probabilité.*
2. *Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la probabilité*

$$\mathrm{P}_{\{X\geq 2\}}(\{1 \leq X \leq 3\}).$$

3. *Les événements $(\{X \geq 2\})$ et $(\{1 \leq X \leq 3\})$ sont-ils indépendants ?*

Corrigé:

1. f est une fonction positive. Elle est également continue sur $[0,4]$, donc elle est intégrable. De plus, on a $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Donc, f est bien une fonction de densité.
2. probabilité conditionnelle: on a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\{X\geq 2\}}(\{1 \leq X \leq 3\}) &= \frac{\mathrm{P}(\{X \geq 2\} \cap \{1 \leq X \leq 3\})}{\mathrm{P}(\{X \geq 2\})} = \frac{\mathrm{P}(\{2 \leq X \leq 3\})}{\mathrm{P}(\{2 \leq X \leq 4\})} \\ &= \frac{\int_2^3 \frac{x}{8}\mathrm{d}x}{\int_2^4 \frac{x}{8}\mathrm{d}x} = \frac{5/16}{12/16} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

3. Comme $\mathrm{P}(\{1 \leq X \leq 3\} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{12}$. Donc, les deux événements ne sont pas indépendants.

Exercice 2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{k}{x^2}\mathbb{1}_{[1;5]}(x)$, où $k \in \mathbb{R}$.*

1. *Déterminer le réel k tel que f soit une fonction de densité de probabilité.*
2. *Détermine le réel a tel que $\mathrm{P}(\{X \leq a\}) = \mathrm{P}(\{X \geq a\})$.*

Corrigé:

1. Pour que f soit une fonction positive, il faut que k soit positif. De plus, f est continue sur $[1,5]$, donc intégrable. Il faut que $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Ce qui implique que $k = \frac{5}{4}$.
2. Il suffit de résoudre

$$\frac{5}{4}\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{5}{4}\int_a^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{5}{3}.$$

Exercice 3. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{[0;\pi/2]}(x)$.*

1. *Vérifier que f est bien une fonction densité de probabilité.*
2. *Soit g et G définies sur $[0;\pi/2]$ respectivement par $g(x) = x\cos(x)$ et $G(x) = ax\sin(x) + b\cos(x)$, où a et b sont des réels. Déterminer a et b tels que G soit une primitive de g.*

3. *Soit X une VAR de densité f. Déterminer l'espérance de X.*

Corrigé:

1. Tout d'abord, la fonction f est positive sur $[0;\pi/2]$ et elle est continue sur $[0,\pi/2]$, donc intégrable. De plus, $\int_0^{\pi/2}\cos(x)\mathrm{d}x = 1$. Donc, f est bien une fonction densité.

2. Il faut que pour tout $x \in [0;\pi/2]$, $g(x) = x\cos(x) = G'(x) = a\sin(x) + ax\cos(x) - b\sin(x) = (a-b)\sin(x) + ax\cos(x)$. Ce qui implique que $a = b = 1$. Finalement, $G(x) = x\sin(x) + \cos(x)$.

3. On a
$$\mathrm{E}[X] = \int_0^{\pi/2} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} g(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_0^{\pi/2} = G(\pi/2) - G(0) = \pi/2 - 1.$$

Exercice 4. *Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont la densité d'une VAR à densité. Calculer le cas échéant leur fonction de répartition et préciser si elles admettent une espérance.*

1. $f_1(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

2. $f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1;0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3. $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4. $f_4(x) = \sin(x) + 1$.

Corrigé:

1. Changement de variable $u = e^x + 1$. C'est une fonction de densité car
$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 1 \quad (\text{intégrable car } \alpha = 2 > 1).$$
La fonction de répartition associée est égale à
$$F_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{e^t+1}.$$
On a de plus,
$$\frac{|x|e^x}{(e^x+1)^2} \underset{-\infty}{\sim} |x|e^x.$$
Donc, l'intégrale converge en $-\infty$ (en effet, $\lim_{-\infty} x^2|x|e^x = 0$) et
$$\frac{|x|e^x}{(e^x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} |x|e^{-x}.$$
Donc l'intégrale converge en $+\infty$ (en effet, $\lim_{+\infty} x^2|x|e^{-x} = 0$). Par conséquence, X_1 admet une espérance. La densité étant paire (i.e., $f(-x) = f(x)$). On en déduit que, $\mathrm{E}[X_1] = 0$.

2. f_2 est bien une fonction densité d'une VAR X_2. En effet, $f_2(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. De plus,
$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(1+x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = 1.$$

La fonction de répartition est égale à

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1+t)^2 & \text{si } t \in [-1;0] \\ \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2} & \text{si } t \in [0;1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Puisque f_2 est nulle en dehors $[-1;1]$, il n'y a pas de problème de convergence d'intégrale. Donc, X_2 admet une espérance. Et comme f_2 est paire, l'espérance est nulle.

3. On a

$$\int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x.$$

Donc f_3 est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X_3. La fonction de répartition est

$$F_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t^2} & \text{si } t \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \in [-1;1] \\ 1 - \frac{1}{2t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

De plus, $|xf_3(x)| = \frac{1}{|x|^2}$ si $|x| > 1$ qui est intégrable en $\pm\infty$. Donc X_3 admet une espérance et comme f_3 est paire, on en déduit que l'espérance est nulle.

4. Une primitive de f_4 est $x - \cos(x)$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc f_4 n'est pas une densité de probabilité (f_4 non intégrable sur $\mathbb{R}$).

Exercice 5. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Déterminer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. Déterminer la fonction de répartition de X. La VAR X admet-elle une espérance ?*

Corrigé: Il faut tout d'abord que a soit positif. Il faut aussi que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Soit $A < 0$ et $B > 0$. On a

$$\int_A^B f(x)\mathrm{d}x = a(\arctan(B) - \arctan(A)).$$

On fait tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$. On obtient:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = a\pi = 1.$$

On en déduit que $a = \frac{1}{\pi}$.
Fonction de répartition de X: Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

Soit $A < 0$, $\int_A^t \frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(\arctan(t) - \arctan(A))$. Lorsque A tend vers $-\infty$, on obtient

$$F_X(t) = \frac{1}{\pi}(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\arctan(t) + \frac{1}{2}.$$

La VAR X n'admet par d'espérance car la fonction $xf(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, au voisinage de $+\infty$, on a

$$xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}, \quad \text{(intégrale de Riemann avec } \alpha = 1 \text{ qui diverge).}$$

Exercice 6. *Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une VAR de densité f définie par $f(x) = c(1-x)^4 \mathbb{1}_{[0;1]}(x)$.*

1. *Déterminer c.*
2. *La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité minimale du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieur à 10^{-5} ?*

Corrigé:

1. Il faut que $\int_0^1 c(1-x)^4 \mathrm{d}x = 1$. Ce qui implique que $\frac{c}{5} = 1$. Donc, $c = 5$.
2. La VAR étant à valeurs dans $[0;1]$, les usager utilisent entre 0 et 1000 litres. L'approvisionnement étant hebdomadaire, tout comme notre VAR, on cherche $x_0 \in [0;1]$ tel que la probabilité que la demande soit supérieur à x_0, soit inférieur à 10^{-5}: $\mathrm{P}(X > x_0) \leq 10^{-5}$. En utilisant la fonction de répartition, cela donne $1 - F_X(x_0) \leq 10^{-5}$. Soit $F_X(x_0) \geq 1 - 10^{-5}$. Or

$$F_X(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x 5(1-t)^4 \mathrm{d}t = 1 - (1-x)^5.$$

   Donc, $F_X(x_0) \geq 1 - 10^{-5} \Leftrightarrow 1 - (1-x_0)^5 \geq 1 - 10^{-5} \Leftrightarrow (1-x_0)^5 \leq 10^{-5} \Leftrightarrow 5\log(1-x_0) \leq 5\log(10^{-1}) \Leftrightarrow 1 - x_0 \leq 0.1 \Leftrightarrow x_0 \geq 0.9$. Ainsi le réservoir doit contenir au minimum 900 litres.

Exercice 7. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$f(x) = \begin{cases} a3^{-x} & si\ x \geq 0 \\ a3^{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

1. *Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.*
2. *Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X . Montrer que X admet une espérance et la calculer.*
3. *On pose $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de Y . La VAR Y admet-elle une espérance ?*

Corrigé:

1. En utilisant le fait que $a3^{-x} = ae^{-x\ln(3)}$ et $a3^{x} = ae^{x\ln(3)}$, on en déduit que $a = \frac{\ln(3)}{2}$.
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{3^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{3^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   La fonction $xf(x)$ est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant la fonction $\frac{1}{x^2}$ (i.e., $xf(x) = o(\frac{1}{x^2})$), et il en est de même au voisinage de $-\infty$ car cette fonction est impaire. Elle est donc intégrable et X admet bien une espérance. En outre, toujours par imparité de $x \mapsto xf(x)$, l'espérance est nulle.

3. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(3^X \leq y) = \mathrm{P}\left(X \leq \frac{\ln(y)}{\ln(3)}\right).$$

On en déduit:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}3^{\frac{\ln(y)}{\ln(3)}} = \frac{y}{2} & \text{si } y \in]0;1] \\ 1 - \frac{1}{2}3^{-\frac{\ln(y)}{\ln(3)}} = 1 - \frac{1}{2y} & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

En particulier, pour $y > 1$, la densité de Y est

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2y^2}.$$

Au voisinage de $+\infty$ on a

$$y f_Y(y) \sim \frac{1}{2y}.$$

Cette dernière fonction n'étant pas intégrable, Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 8. *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

1. *Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.*

2. *Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Étudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

On définit une variable aléatoire Y par

$$Y = \varphi(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}.$$

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Corrigé:

1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et positive. Pour tous réels $a < b$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{1+e^{-b}} + \frac{1}{1+e^{-a}}.$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$. Nous avons, $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = 1$. Donc f est bien une densité de probabilité. La fonction de répartition est alors donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

2. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable et $\varphi'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. Elle est donc strictement croissante, donc bijective. Or, $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$, φ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. Après calcul, on trouve

$$\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

3. Tous les calculs suivants se justifient par la bijectivité et croissance de φ. La VAR Y prend ses valeurs dans $]-1;1[$ et pour tout $y \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \le y) &= \mathrm{P}(\varphi(X) \le y) = \mathrm{P}(X \le \varphi^{-1}(y)) = \mathrm{P}\left(X \le \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+e^{-\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}} = \frac{1+y}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on constate que $Y \sim \mathcal{U}(]-1;1[)$.

Exercice 9. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < 5$ avec f la fonction définie par:*

$$f(x) = \frac{x}{8}\mathbb{1}_{[\alpha,5]}(x).$$

1. *Déterminer le paramètre α afin que la fonction f soit une densité de probabilité. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.*
2. *Soit X la v.a.r. de densité f. Déterminer F, la fonction de répartition de X. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.*
3. *Calculer l'espérance* $\mathrm{E}(X)$ *et la variance* $\mathrm{Var}(X)$ *de X.*
4. *En faisant usage de la fonction de répartition, calculer les probabilités suivantes :*

   a) $\mathrm{P}(X \le 4)$
   b) $\mathrm{P}(X > 3)$
   c) $\mathrm{P}(4 < X < 5)$
   d) $\mathrm{P}(\{X \le 3\} \cup \{X > 4\})$
   e) $\mathrm{P}(\{X \le 4\} \mid \{X > 3\})$

Corrigé:

1. La fonction f est positive si $x \ge 0$ ce qui implique que $\alpha \in [0,5[$. Il suffit de calculer α pour que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$. On en déduit que $\alpha = 3$.
2. La fonction de répartition F_X de X: on sait que $f(x) = \frac{x}{8}\mathbb{1}_{[\alpha,5]}(x)$. Donc

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 3 \\ \int_3^x \frac{t}{8}\mathrm{d}t = \frac{x^2-9}{16} & \text{si } x \in]3;5[\\ 1 & \text{si } x \ge 5. \end{cases}$$

3.
   - $\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_3^5 \frac{x^2}{8}\mathrm{d}x = \frac{49}{12}$.
   - $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$. Or, $\mathrm{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_3^5 \frac{x^3}{8}\mathrm{d}x = 17$. Par suite,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = 17 - \left(\frac{49}{12}\right)^2 = \frac{47}{144}.$$

4. (a) $\mathrm{P}(X \leq 4) = F_X(4) = \frac{7}{16}$.
   (b) $\mathrm{P}(X > 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1$.
   (c) $\mathrm{P}(4 < X < 5) = \mathrm{P}(X < 5) - \mathrm{P}(X < 4) = F_X(5) - F_X(4) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$.
   (d) $\mathrm{P}(\{X \leq 3\} \cup \{X > 4\}) = \mathrm{P}(X \leq 3) + \mathrm{P}(X > 4) = F_X(3) + 1 - F_X(4) = 0 + 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$.
   (e) $\mathrm{P}(\{X \leq 4\} \mid \{X > 3\}) = \frac{\mathrm{P}(\{X \leq 4\} \cap \{X > 3\})}{\mathrm{P}(X > 3)} = \frac{\mathrm{P}(3 < X \leq 4}{1 - F_X(3)} = \frac{F_X(4) - F_X(3)}{1 - 0} = F_X(4) = \frac{7}{16}$.

Exercice 10 (Loi exponentielle)**.** *Le temps d'attente (en minutes) pour un avion, avant d'obtenir l'autorisation d'atterrir, est modélisé par une v.a.r. Y vérifiant la relation $Y = 3X - 2$ où X est une v.a.r. dont la densité est:*

$$f_X(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. *Vérifier que la fonction f est bien une densité de probabilité.*
2. *Déterminer la fonction de répartition F_X associée à la v.a.r. X.*
3. *En déduire la fonction de répartition F_Y associée à la v.a.r. Y.*
4. *Calculer l'espérance* $\mathrm{E}(X)$ *et la variance* $\mathrm{Var}(X)$ *de X.*
5. *En déduire l'espérance et la variance de Y. Comment peut-on interpréter, selon le contexte, la valeur de l'espérance ?*
6. *Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 5 et 10 minutes ?*
7. *Quelle est la probabilité que le temps d'attente dépasse 10 minutes ?*

Corrigé:

1. • f_X est une fonction positive (évident).
   • Il reste à vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$. On a
   $$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-x/4}\mathrm{d}x.$$
   Soit $A > 0$. On a
   $$\int_0^A \frac{1}{4} e^{-x/4}\mathrm{d}x = [-e^{-x/4}]_0^A = 1 - e^{-A/4}.$$
   On sait que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} (1 - e^{-A/4}) = 1$.

2. Fonction de répartition de X: pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{4} e^{-t/4}\mathrm{d}t = 1 - e^{-x/4} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$
   Remarque: La variable aléatoire X suit une loi exponentiel de paramètre $\lambda = 1/4$ (i.e., $X \sim \mathcal{E}(1/4)$).

3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a
$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(3X - 2 \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \frac{y+2}{3}) = F_X(\frac{y+2}{3}).$$

- Si $\frac{y+2}{3} < 0$ ce qui est équivalent à $y < -2$, alors $F_Y(y) = 0$.
- Si $\frac{y+2}{3} \geq 0$ ce qui est équivalent à $y \geq -2$, alors $F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{y+2}{12}}$.

Ainsi,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -2 \\ 1 - e^{-\frac{y+2}{12}} & \text{si } y \geq -2. \end{cases}$$

4. On sait que $X \sim \mathcal{E}(1/4)$. D'après le cours, $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1/4} = 4$. De plus, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 16$.

5. - $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[3X - 2] = 3\mathrm{E}[X] - 2 = 10$ (par linéarité de l'espérance).
   - $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(3X - 2) = 9\mathrm{Var}(X) = 9 \times 16 = 144$.

   Un avion attend en moyen 10 minutes avant d'obtenir l'autorisation d'atterrir.

6. $\mathrm{P}(5 \leq Y \leq 10) = F_Y(10) - F_Y(5) = 1 - e^{-\frac{10+2}{12}} - (1 - e^{-\frac{5+2}{12}}) = e^{-7/12} - e^{-1} = 0.19$.

7. $\mathrm{P}(Y > 10) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 10) = 1 - F_Y(10) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Exercice 11 (Loi normale centrée réduite)**.** *Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale centrée réduite, i.e. : $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Notons ϕ sa densité et Φ sa fonction de répartition.*

1. *Montrer que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.*

2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. En déduire $\Phi(0)$.*
   Remarque : ce résultat explique pourquoi les tables de Φ ne donnent $\Phi(x)$ que pour $x \geq 0$.

3. *En utilisant la table de Φ, déterminer $a > 0$ tel que $\mathrm{P}(|X| \leq a) \geq 0.95$.*

Corrigé:

1. - Première méthode: $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t$. Soit x_1, x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. On a

     $$\phi(x_2) - \phi(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\mathrm{d}t > 0.$$

     En effet, $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x_1 < x_2$.
   - Deuxième méthode: On sait que φ est une fonction continue et strictement positif. Alors ϕ est une fonction dérivable et on a

     $$\phi'(x) = \varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

     Donc, ϕ est une fonction strictement croissante.

   Comme la fonction ϕ est strictement croissante. Alors ϕ est injective (i.e., $\forall x_1 \neq x_2$, $\Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$).
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\phi(x) \in [0, 1]$. De plus, $\inf \phi(x) = \lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ et $\max \phi(x) = \lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 1$. On en déduit que $\phi(x) \in]0, 1[$. Par conséquence, ϕ est surjective, i.e., pour tout $y \in]0, 1[$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) = y$.
   Comme ϕ est à la fois injective et surjective. Donc, ϕ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\phi(x) + \phi(-x) = \mathrm{P}(X \leq x) + \mathrm{P}(X \leq -x) = \mathrm{P}(X \leq x) + \mathrm{P}(X \geq x) = 1.$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\phi(x) + \phi(-x) = 1.$$

On sait que $\phi(0) + \phi(-0) = 1$. Donc, $2\phi(0) = 1$ ce qui implique que $\phi(0) = \frac{1}{2}$.

3. Soit $a > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|X| \leq a) &= \mathrm{P}(-a \leq X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq a) - \mathrm{P}(X \leq -a) \\ &= \mathrm{P}(X \leq a) - \mathrm{P}(X \geq a) = \mathrm{P}(X \leq a) - 1 + \mathrm{P}(X \leq a) = 2\phi(a) - 1. \end{aligned}$$

Par conséquence, $2\phi(a) - 1 \geq 0.95$. Ce qui est équivalent à $\phi(a) \geq 0.975$. D'après la table de la loi normale centrée réduite, on sait que $\phi(1,96) \simeq 0.975$. Comme ϕ est croissante, alors $a \geq 1.96$.

Exercice 12 (Lois normales)**.**

1. *Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale centrée réduite, i.e. : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. A l'aide de la table de la loi normale, calculer :* $\mathrm{P}(X > 2)$, $\mathrm{P}(-1 < X < 1.5)$ *et* $\mathrm{P}(X < 0.5)$.
2. *Soit Y une v.a.r. qui suit une loi normale, i.e. : $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) = \mathcal{N}(4, 16)$. Calculer :* $\mathrm{P}(Y > 2)$, $\mathrm{P}(-1 < Y < 1.5)$ *et* $\mathrm{P}(Y < 0.5)$.
3. *Soit U une v.a.r. qui suit une loi normale, i.e. : $U \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Sachant que $m = 6$ et $\sigma^2 = 4$, calculer :* $\mathrm{P}(|U - 4| < 3)$ *et* $\mathrm{P}(\{U > 6\} \mid \{U > 3\})$.
4. *Déterminer l'écart-type σ et l'espérance m d'une v.a.r. V qui suit une loi normale telle que*

$$\mathrm{P}(V < 5) = 0.1587 \quad \textit{et} \quad \mathrm{P}(V < 20) = 0.9772.$$

Corrigé:

1. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   - $\mathrm{P}(X > 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$.
   - $$\begin{aligned} \mathrm{P}(-1 < X < 1.5) &= \phi(1.5) - \phi(-1) = \phi(1.5) - (1 - \phi(1)) \\ &= 0.933 - 1 + 0.841 = 0.774. \end{aligned}$$
   - $\mathrm{P}(X < 0.5) = \phi(0.5) = 0.691$.
2. $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 4$ et $\sigma^2 = 16$. Soit la variable aléatoire $Z = \frac{Y-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$.
   - $\mathrm{P}(Y > 2) = \mathrm{P}(Z > -0.5) = \mathrm{P}(Z < 0.5) = 0.691$.
   - $\mathrm{P}(-1 < Y < 1.5) = \mathrm{P}(-\frac{5}{4} < Z < -\frac{2.5}{4}) = \mathrm{P}(\frac{2.5}{4} < Z < \frac{5}{4}) = \phi(1.25) - \phi(0.625) = 0.16035$.
   - $\mathrm{P}(Y < 0.5) = \mathrm{P}(Z < -\frac{3.5}{4}) = 1 - \phi(0.875) = 0.1908$.

3. $U \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 6$ et $\sigma^2 = 4$. Soit la variable aléatoire $Z = \frac{U-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$.

   - $\mathrm{P}(|U-4| < 3) = \mathrm{P}(-2.5 < Z < 0.5) = \phi(2.5) + \phi(0.5) - 1 = 0.6853$.
   - $\mathrm{P}(\{U > 6\} \mid \{U > 3\}) = \frac{\mathrm{P}(\{U>6\} \cap \{U>3\})}{\mathrm{P}(\{U>3\})} = \frac{\mathrm{P}(\{U>6\})}{\mathrm{P}(\{U>3\})} = \frac{0.5}{\mathrm{P}(Z>-1.5)} = \frac{0.5}{\mathrm{P}(Z\leq 1.5)} = \frac{0.5}{0.9332} =$ 0.536.

4. $V \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Soit $Z = \frac{V-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(V < 5) = 0.1587 \\ \mathrm{P}(V < 20) = 0.9772. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \mathrm{P}(Z < \dfrac{5-m}{\sigma}) = 0.1587 & (1a) \\ \mathrm{P}(Z < \dfrac{20-m}{\sigma}) = 0.9772. & (1b) \end{cases}$$

D'après l'équation (1a), on sait que $\frac{5-m}{\sigma} < 0$.

$$\mathrm{P}(Z < \frac{5-m}{\sigma}) = \mathrm{P}(Z > \frac{m-5}{\sigma}) = 1 - \mathrm{P}(Z < \frac{m-5}{\sigma}).$$

Donc, on obtient $\mathrm{P}(Z < \frac{m-5}{\sigma}) = 1 - \mathrm{P}(Z < \frac{5-m}{\sigma}) = 1 - 0.1587 = 0.8413$. Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} \mathrm{P}(Z < \frac{m-5}{\sigma}) = 0.8413 \\ \mathrm{P}(Z < \frac{20-m}{\sigma}) = 0.9772. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(\frac{m-5}{\sigma}) = 0.8413 \\ \phi(\frac{20-m}{\sigma}) = 0.9772. \end{cases}$$

D'après la table de la loi normale centrée réduite, on en déduit que

$$\begin{cases} \frac{m-5}{\sigma} = 1 \\ \frac{20-m}{\sigma} = 2. \end{cases}$$

Ceci implique que $m = 10$ et $\sigma = 5$.

Exercice 13 (Test de Wechsler). *Le test de Wechsler est destiné à mesurer le "Quotient Intellectuel" (QI), à l'aide de tests mesurant les facultés cognitives des personnes testées. On compare le score global de la personne testée avec la distribution des scores obtenus par un échantillon représentatif de la population d'un âge donné. On suppose que le résultat à ce test, noté R, est une variable aléatoire qui suit une loi Normale, de moyenne 100 points et d'écart-type 15 points, i.e. $R \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$.*

***Note** : On donnera les solutions arrondies à 10^{-2} près en utilisant la table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.*

1. *Quelle est la probabilité d'avoir un QI inférieur à 80 ?*
2. *Quelle est la probabilité d'avoir un QI compris entre 105 et 110 ?*
3. *Un individu obtenant un score de 69 points fait-il partie des 5% inférieur de la distribution ?*
4. *En dessous de quel QI se trouve le tiers des individus ?*

5. *Quel QI minimum faut-il obtenir pour faire partie des 5% d'individus les plus performants ?*

Corrigé: On a $R \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$. Soit $Z = \frac{R-100}{15} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. On a
$$\mathrm{P}(R < 80) = \mathrm{P}(Z < -\frac{4}{3}) = 1 - \mathrm{P}(Z < 4/3) = 1 - 0.9 = 0.1.$$
Environ 10% de la population ont un QI inférieur à 80 points.

2. On a
$$\mathrm{P}(105 < R < 110) = \mathrm{P}(1/3 < Z < 2/3) = \phi(2/3) - \phi(1/3) = 0.12.$$
Environ 12% de la population ont un QI compris entre 105 points et 110 points.

3. On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(R < a) = 0.05$.
$$\mathrm{P}(Z < \frac{a-100}{15}) = 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(Z < \frac{100-a}{15}) = 0.95.$$
D'après la table de la loi normale centrée réduite, on en déduit que $\frac{100-a}{15} = 1.64$. Ce qui implique que $a = 75.4$.
Comme $69 < 75.4$ l'individu fait bien partie des 5% les moins doués de la population.

4. On cherche à trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(R < a) = 0.33$.
$$\mathrm{P}(Z < \frac{a-100}{15}) = 0.33 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(Z < \frac{100-a}{15}) = 0.67.$$
D'après la table de la loi normale, on trouve $\frac{100-a}{15} = 0.41$. Ainsi, $a = 93$.
Donc, le tiers de la population a un QI inférieur à 93 points.

5. On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(R > a) = 0.05$. De même comme précédent, on trouve $a = 124.6$. Donc, le QI minimum pour faire partie des 5% d'individus les plus performants est 125 points.

Exercice 14 (Lois normales)**.** *Un pépiniériste vends des graines par sachets. Le poids total des graines par sachet est une v.a.r. X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.*

1. *Pour $m = 500g$ et $\sigma = 50g$, calculer la probabilité que le poids des graines d'un sachet donné soit compris entre 400g et 600g.*

2. *Sachant que $m = 500g$ et que la probabilité que le poids des graines d'un sachet donné soit supérieur à 550g vaut 0.1788. Calculer σ.*

3. *Sachant que $\sigma = 50g$ et que la probabilité que le poids des graines d'un sachet donné soit inférieur à 500g vaut 0.488. Calculer m.*

Corrigé:
On a $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Soit $Z = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. On a $m = 500$g et $\sigma = 50$g.
$$\mathrm{P}(400 \leq X \leq 600) = \mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 2) \simeq 0.95.$$

2. On cherche à trouver σ tel que $m = 500$ et $\mathrm{P}(X \geq 550) = 0.1788$. Ceci est équivalent à $\mathrm{P}(Z \leq \frac{50}{\sigma}) = 0.8212$. D'après la table de la loi normale centrée réduite, on obtient $\frac{50}{\sigma} = 0.92$. Ceci implique que $\sigma = 54.35$.

3. On cherche à trouver m sachant que $\sigma = 50$ et $\mathrm{P}(X < 500) = 0.488$. Ceci est équivalent à $\mathrm{P}(Z < \frac{m-500}{50}) = 0.512$. D'après la table de la loi normale centrée réduite, on en déduit que $\frac{m-500}{50} = 0.03$. Ceci implique que $m = 501.5$.