Feuille d'exercices

Variables aléatoires réelles continues

Note. Toutes les v.a.r. sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 1 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < 5$ et f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{8} I_{[\alpha,5]}(x)$$

1) a) Déterminer la constante α afin que la fonction f soit une fonction de densité de probabilité.
   b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2) Soit X une v.a.r. absolument continue de fonction de densité de probabilité f.
   a) Déterminer F, la fonction de répartition de X.
   b) Tracer l'allure de la courbe représentative de F.
3) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.
4) En faisant usage de la fonction de répartition de X, calculer les probabilités suivantes :

   a) $P(\{X \leq 4\})$ *b)* $P(\{X > 3\})$ *c)* $P(\{4 < X < 5\})$

   d) $P(\{X \leq 3\} \cup \{X > 4\})$ *e)* $P(\{X \leq 4\} \,|\, \{X > 3\})$

Exercice 2 - Loi exponentielle

Le temps d'attente (en minutes) pour un avion, avant d'obtenir l'autorisation d'atterrir, est modélisé par une v.a.r. Y vérifiant la relation $Y = 3X - 2$ où X est une v.a.r.a.c. dont la densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} I_{[0,+\infty[}(x)$$

1) Vérifier que la fonction f_X est bien une fonction de densité de probabilité.
2) Déterminer la fonction de répartition F_X associée à la v.a.r. X.
3) En déduire la fonction de répartition F_Y associée à la v.a.r. Y.
4) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.
5) En déduire l'espérance et la variance de Y.
   Comment peut-on interpréter, selon le contexte, la valeur de l'espérance de Y ?
6) Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 5 et 10 minutes ?
7) Quelle est la probabilité que le temps d'attente dépasse 10 minutes ?

Exercice 3 - Loi normale centrée réduite

Soit X une v.a.r.a.c. qui suit une loi normale standard, i.e., $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Notons φ sa *f.d.p.* et Φ sa *f.r.*.

1) Montrer que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. En déduire $\Phi(0)$.
   [Remarque : ce résultat explique pourquoi les tables de Φ ne donnent $\Phi(x)$ que pour $x \geq 0$]
3) En utilisant la table de Φ, déterminer $a > 0$ tel que $P(\{|X| \leq a\}) \geq 0.95$.

Exercice 4 - Lois normales

Pour toute v.a.r.a.c. suivant une loi normale standard, on notera φ sa *f.d.p.* et Φ sa *f.r.*.

1) Soit X une v.a.r.a.c. qui suit la loi normale standard (centrée réduite), i.e., $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   A l'aide de la table de la loi normale standard, calculer :

$$P(\{X > 2\}) \quad ; \quad P(\{-1 < X < 1.5\}) \quad ; \quad P(\{X < 0.5\})$$

2) Soit Y une v.a.r.a.c. qui suit une loi normale ; $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(4, 16)$. Calculer :

$$P(\{Y > 2\}) \quad ; \quad P(\{-1 < Y < 1.5\}) \quad ; \quad P(\{Y < 0.5\})$$

3) Soit U une v.a.r.a.c. qui suit une loi normale ; $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   Sachant que $\mu = 6$ et $\sigma^2 = 4$, calculer :

$$P(\{|U - 4| < 3\}) \quad \text{et} \quad P_{\{U>3\}}(\{U > 6\})$$

4) Déterminer l'écart-type σ et l'espérance μ d'une v.a.r.a.c. V qui suit une loi normale telle que $P(\{V < 5\}) = 0.1587$ et $P(\{V < 20\}) = 0.9772$.

Exercice 5 - Test de Wechsler

Le test de Wechsler est destiné à mesurer le “Quotient Intellectuel” (QI), à l'aide de tests mesurant les facultés cognitives des personnes testées. On compare le score global de la personne testée avec la distribution des scores obtenus par un échantillon représentatif de la population d'un âge donné. On suppose que le résultat à ce test, noté R, est une v.a.r.a.c. qui suit une loi normale, de moyenne 100 points et d'écart-type 15 points, i.e., $R \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$.

Note. On donnera les solutions arrondies à 10^{-2} près en utilisant la table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Quelle est la probabilité d'avoir un QI inférieur à 80 ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir un QI compris entre 105 et 110 ?
3) Un individu obtenant un score de 69 points fait-il partie des 5% inférieur de la distribution ?
4) En dessous de quel QI se trouve le tiers des individus ?
5) Quel QI minimum faut-il obtenir pour faire partie des 5% d'individus les plus performants ?

Exercice 6 - Lois normales

Un pépiniériste vends des graines par sachets. Le poids total des graines par sachet est une v.a.r.a.c. X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1) Pour $\mu = 500$ g et $\sigma = 50$ g, calculer la probabilité que le poids des graines d'un sachet donné soit compris entre 400 g et 600 g.
2) Sachant que $\mu = 500$ g et que la probabilité que le poids des graines d'un sachet donné soit supérieur à 550 g vaut 0.1788 ; calculer σ.
3) Sachant que $\sigma = 50$ g et que la probabilité que le poids des graines d'un sachet donné soit inférieur à 500 g vaut 0.488 ; calculer μ.