Cycles hamiltoniens

Chaînes et cycles hamiltoniens

Définition

Une chaîne ou un cycle C de G (un graphe non orienté) est dit **hamiltonien(ne)** si et seulement tout sommet x de X est contenu dans C **sans répétition**.

Définition

Un graphe non orienté est dit **hamiltonien** s'il possède un **cycle hamiltonien**.

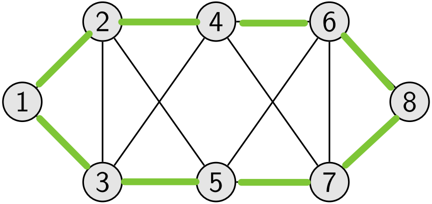


FIGURE – Graphe hamiltonien : $\{1,2,4,6,8,7,5,3,1\}$

Propriétés et Théorèmes

PROPOSITION (Condition nécessaire)

Soit $G = (X, E)$ un graphe hamiltonien, et $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$. Le nombre de composantes connexes de $G - Y$ ne dépasse pas $\mathrm{card}(Y)$.

THÉORÈME (Condition suffisante)

Un graphe simple $G = (X, E)$ est hamiltonien si, quelques soient deux sommets non voisins x et y, $d(x) + d(y) \geq n$.

- Pour tout entier naturel $n \geq 3$, K_n est hamiltonien et admet $\dfrac{(n-1)!}{2}$ cycles hamiltoniens.
- Un graphe biparti $G = (X_1, X_2, E)$ est hamiltonien si et seulement si $\mathrm{card}(X_1) = \mathrm{card}(X_2)$

Problème du voyageur de commerce (PVC)

Traveling Salesman Problem (TSP)

On se donne un ensemble de villes toutes reliées directement entre elles. Quelle est la tournée la plus courte couvrant toutes les villes une fois et une seule ?

- Modélisation : le graphe représente la cartographie de l'ensemble des villes
  - sommets : villes
  - arêtes : routes entre les villes
  - valuation : distance
- Le graphe G obtenu doit être complet à valuations positives
- **PVC correspond à trouver un cycle hamiltonien C dans G tel que $v(C)$ soit minimal.**

Problème du voyageur de commerce (PVC)

THÉORÈME (KARP, 1972)

Le problème PVC est un problème NP-complet.

En théorie de la complexité, un problème NP-complet vérifie les propriétés suivantes :

- Il est possible de **vérifier** une solution efficacement (en temps polynomial), mais il est impossible (?) de **trouver** une solution efficacement.
- Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale.
  - s'il existe une solution polynomiale pour un des problèmes NP-complet, alors ils peuvent être tous résolu en temps polynomial
  - savoir si P=NP ou P≠NP fait parti des problèmes non résolu en mathématiques

PVC : Solutions ?

- Première solution : effectuer une recherche exhaustive
  - recenser tous les cycles hamiltoniens ;
  - en choisir un parmi ceux avec la valeur la plus faible.
  - solution exacte, mais complexité exponentielle : $O(\frac{(n-1)!}{2})$
  - solution inutilisable

Quelques chiffres

Si calculer un chemin se fait en 1 microseconde :

- pour 10 sommets, il faudrait 0.18 secondes ;
- pour 15 sommets, il faudrait un peu plus de 12h ;
- pour 20 sommets, il faudrait 1927 ans.

PVC : Solutions ?

- Deuxième solution : appliquer un algorithme "glouton"
  - on initialise le cycle avec un sommet du graphe choisi arbitrairement ;
  - le sommet suivant est le sommet adjacent non encore visité le plus proche (en terme de valuation d'arête).
  - solution approchée

Définition

Un algorithme est dit **glouton** lorsqu'il suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local.

PVC : Notion d'algorithme ε-approché

Définition

Un algorithme est dit ε-**approché** si et seulement si pour toute instance $G = (X, E, \omega)$ du problème PVC, il fournit un cycle hamiltonien C tel que

$$\frac{\omega(C)}{\omega^*(G)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Dans le cas du PVC géographique, la voie directe entre deux villes est toujours la voie la plus courte. Donc :

$$\forall (x, y, z) \in X^3, \omega(xy) \leq \omega(xz) + \omega(zy)$$

PVC Géographique : algorithme approché

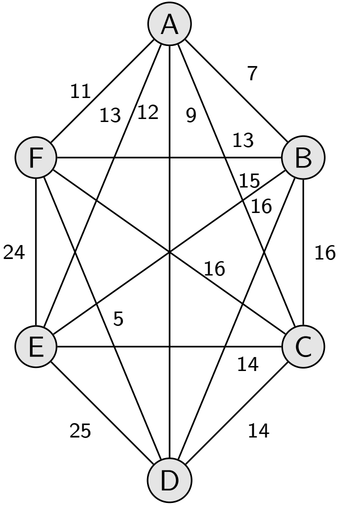
Soit $G = (X, E, \omega)$ une instance du PVC

1. Calculer arbre couvrant minimal T de G.
2. Doubler chaque arête de T pour obtenir un graphe eulérien U. Trouver le cycle eulérien D de U.
3. Raccourcir la suite de D en supprimant tout sommet déjà rencontré auparavant : on obtient le cycle hamiltonien C.

THÉORÈME

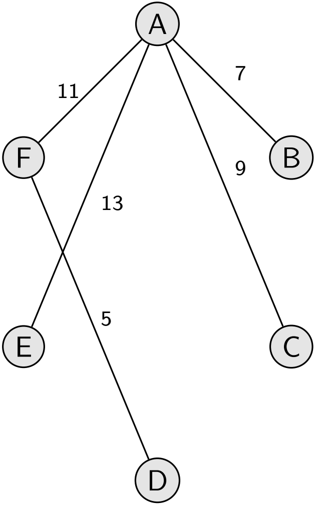
Cet algorithme est $\frac{1}{2}$-approché pour tout instance métrique du PVC.

PVC Géographique : algorithme approché – Exemple



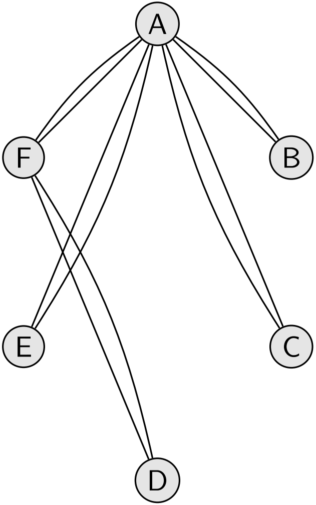
Soit $G = (X, E, \omega)$ une instance du PVC

PVC Géographique : algorithme approché – Exemple



Etape 1 :
Calculer arbre couvrant minimal T de G.

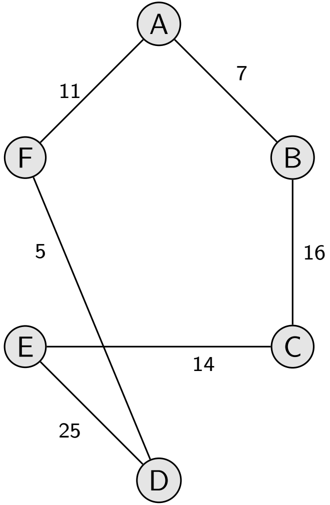
PVC Géographique : algorithme approché – Exemple



Etape 2 :
Doubler chaque arête de T pour obtenir un graphe eulérien U.
Trouver le cycle eulérien D de U.

$D = (a, f, d, f, a, e, a, c, a, b, a)$

PVC Géographique : algorithme approché – Exemple



Etape 3 :
Raccourcir la suite de D en supprimant tout sommet déjà rencontré auparavant : on obtient le cycle hamiltonien C.

$$D = (a, f, d, f, a, e, a, c, a, b, a)$$
$$C = (a, f, d, e, c, b, a)$$

PVC Géographique : algorithme approché – Justification

Cet algorithme est $\frac{1}{2}$-approché pour tout instance métrique du PVC.

- L'arbre couvrant minimum vérifie la relation $\omega(T) \leq \omega^*(G)$
- La valeur totale du cycle eulérien D : $\omega(D) = 2\omega(T)$
- Un racourcissement d'une chaîne $(x_1, x_2, ..., x_k)$ par(x_1, x_k) vérifie :
  $\omega(x_1, x_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \omega(x_i, x_{i+1})$
- On a donc : $\omega(C) \leq \omega(D) = 2\omega(T)$, donc $\omega(C) \leq 2\omega^*(G)$ d'où :

$$\frac{\omega(C)}{\omega^*(G)} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$