Modèles probabilistes (Polycopié de Hassan Maatouk) (ING 1 - GI)

Nom : Yalcin Aktar

Email: yalcin.aktar@cyu.fr

Bureau: CY206

Évaluation: Examen Final

26 septembre 2023

Déroulement du module

1. Nous avons 8 séances de CM et 14 séances de TD.
2. Le partiel aura lieu au début de l'année prochaine (seconde semaine du Janvier).
3. Évaluation en deux parties : théorique avec un coefficient de 0.75 et simulation avec un coefficient de 0.25 sur papier.
   L'évaluation durera 2 heures et 2 feuilles A4 r-v et calculatrice seront autorisées. La table de la loi normale sera dans le sujet d'examen. Dans quelques séances de TDs il se peut que je vous donne des sujets QCMs qui seront notés, je vous annoncerai les dates à l'avance si c'est le cas.

Plan

Plan

1. Variables aléatoires réelles continues
   - Fonction de répartition d'une VAR à densité
   - Moments d'une VAR à densité
   - Variables aléatoires réelles indépendantes
   - Lois à densité usuelles
2. Couples de variables aléatoires réelles
   - Cas général
   - Cas discret
   - Cas à densité
3. Convergence
   - Rappel
   - Convergence
   - Somme de variables aléatoires réelles indépendantes
4. Introduction à la simulation

Variables aléatoires réelles continues

Définition 1 (Variable aléatoire réelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r. en abrégé) sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *toute fonction :* $X \ : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Cela est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (X \leq x) = X^{-1}(]-\infty; x]) = \{\omega \in \Omega \ | \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

$X(\Omega)$ *est appelé univers image de* Ω *par* X*.*

Définition 2 (Densité de probabilité)

Soit $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est une fonction de densité de probabilité (f.d.p. en abrégé) sur* $\mathbb{R}$ *si :*

1. $f(x) \geq 0$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. f *est une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Variables aléatoires réelles continues

Exemple (fonction de densité)

Soit $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est une fonction de densité de probabilité.

Démonstration.

1. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. C'est évident que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ $(\alpha = 1/2 < 1)$. De plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{x}}\mathrm{d}x. \quad \text{(Intégrale généralisée)}$$

□

suite de la démonstration de l'exemple.

Soit $\epsilon > 0$, on a

$$2\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{4\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x = [\sqrt{x}]_{\epsilon}^{1} = 1 - \sqrt{\epsilon}.$$

Finalement, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} (1 - \sqrt{\epsilon}) = 1.$ $\square$

Définition 3 (variable aléatoire réelle (v.a.r.) à densité)

Une v.a.r. X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est dite à densité, si sa loi P_X est à densité. Autrement dit, s'il existe une f.d.p., notée f_X, telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\mathrm{d}x.$$

- *On dit aussi que X est une v.a.r. absolument continue (ou de loi absolument continue).*
- *f_X est appelée une densité de X.*

Variables aléatoires réelles continues

Exemple

Si X est une v.a.r. à densité, de densité f_X, alors :

$$\mathrm{P}(X \in [1;3]) = \int_1^3 f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque

Il n'y a pas d'unicité de la densité pour une variable aléatoire réelle X. N'importe quelle densité f égale à f_X sauf (par exemple) sur un nombre fini de points est aussi une densité de X. En effet, deux fonctions égalent presque par tout ont la même intégrale. Par exemple

$$f_1(x) = \mathbb{1}_{[0;1]}(x); \quad f_2(x) = \mathbb{1}_{[0;1[}(x); \quad f_3(x) = \mathbb{1}_{]0;1]}(x); \quad f_4(x) = \mathbb{1}_{]0;1[}(x),$$

sont des fonctions de densité de la même variable aléatoire.

Définition 4 (Fonction de répartition)

Soit X une VAR à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, de densité f_X. La fonction de répartition de X, notée F_X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Le réel $F_X(x)$ représente la probabilité de toutes les réalisations inférieures ou égales au réel x.

Propriété 1

Soit X une VAR à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, de densité f_X et F_X sa fonction de répartition. Alors

1. *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. *F_X est continue sur $\mathbb{R}$.*
4. *F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points.*
5. *Si f_X est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors F_X est dérivable en ce point et on a*

$$f_X(x_0) = F'_X(x_0).$$

Variables aléatoires réelles continues

Remarque

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0;1]$.
- La fonction de répartition F_X de la VAR à densité X caractérise complètement sa loi.

Théorème 1 (Réciproque)

Soit X une VAR sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ de fonction de répartition F_X.

- *Si F_X vérifie :*
  1. *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.*
  2. *$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.*
  3. *F_X est continue sur $\mathbb{R}$.*
  4. *F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points.*

  Alors X est une VAR à densité.
- *Si f est une fonction telle que $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f(x_0) = F'_X(x_0)$ en tout point x_0 où F_X est dérivable alors f est une densité de X.*

Proposition 1

Soit X une VAR et F_X sa fonction de répartition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors :

1. $\mathrm{P}(\{X \leq a\}) = F_X(a)$.
2. $\mathrm{P}(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$.
3. $\mathrm{P}(\{a \leq X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$.
4. $\mathrm{P}(\{X = a\}) = F_X(a^+) - F_X(a^-) = 0$.

Exemple

Soit $f \;: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = k(1-x)\mathbb{1}_{[0;1]}(x)$.

1. Déterminer la constante k pour que f soit la densité d'une VAR X.
2. Définir la fonction de répartition de X.

Proposition 1

Soit X une VAR et F_X sa fonction de répartition. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors :

1. $\mathrm{P}(\{X \leq a\}) = F_X(a)$.
2. $\mathrm{P}(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$.
3. $\mathrm{P}(\{a \leq X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$.
4. $\mathrm{P}(\{X = a\}) = F_X(a^+) - F_X(a^-) = 0$.

Exemple

Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = k(1-x)\mathbb{1}_{[0;1]}(x)$.

1. Déterminer la constante k pour que f soit la densité d'une VAR X.
2. Définir la fonction de répartition de X.

Démonstration.

1. $k = 2$.
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variables aléatoires réelles continues

Définition 5 (Espérance)

Soit X *une VAR à densité, de densité* f_X *. On dit que* X *admet une espérance si la fonction* $xf_X(x)$ *est absolument convergente sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) \mathrm{d}x < +\infty.$$

Dans ce cas, l'espérance de X *est notée* $\mathrm{E}[X]$ *et elle est définie par*

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Théorème 2 (transfert)

Soit X *une VAR à densité* f_X*. Soit* $g \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux. Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale, l'espérance de la VAR* $g(X)$ *vaut :*

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Théorème 3 (Linéarité de l'espérance)

Soient X *et* Y *deux VAR à densité sur le même* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, *admettant des espérances. Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Alors la VAR* $aX + bY$ *admet une espérance et on a :*

$$\mathrm{E}[aX + bY] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y].$$

Propriété 2 (Croissance de l'espérance)

Soient X *et* Y *deux VAR à densité sur le même* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, *admettant des espérances. Alors*

$$Y \leq X \;\Rightarrow\; \mathrm{E}[Y] \leq \mathrm{E}[X].$$

En particulier,

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq X & \Rightarrow & 0 \leq \mathrm{E}[X] \\ \forall a, b \in \mathbb{R},\; a \leq X \leq b & \Rightarrow & a \leq \mathrm{E}[X] \leq b. \end{array}$$

Remarque : L'espérance d'une constante est lui même, i.e., $\mathrm{E}[a] = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Variables aléatoires réelles continues

Définition 6 (variance et écart-type)

Soit X une VAR à densité de densité f_X et admettant une espérance $\mathrm{E}[X]$. Sous réserve de convergence de l'intégrale, on appelle :

- *Variance de X :*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}[X])^2 f_X(x)\mathrm{d}x.$$

- *Écart-type :*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Remarque

- $\mathrm{Var}(X)$ est l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne.
- $\mathrm{Var}(X)$ est donc un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x de X autour de leurs moyenne pondérée $\mathrm{E}[X]$.
  Plus précisément, c'est $\sigma(X)$ qui mesure l'étendue de cette dispersion.

Définition 7 (VAR centrée/centrée réduite)

Soit X une VAR à densité. On dit que

- X *est centrée si elle admet une espérance nulle, i.e.,* $\mathrm{E}[X] = 0$.
- X *est centrée réduite si elle admet une espérance nulle et une variance égale à 1, i.e.,*

$$\mathrm{E}[X] = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Var}(X) = 1.$$

Théorème 4

Soit X une VAR à densité.

- *Si X admet une espérance, alors $X - \mathrm{E}[X]$ est centrée.*
- *Si X admet une variance non nulle, alors $X^* = \frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.*

Démonstration.

Exercice. □

Définition 8 (Moment)

Soit X une VAR à densité, de densité f_X et $m \in \mathbb{N}_*$. Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale, on appelle :

- *moment d'ordre m de X, la quantité*

$$\mathrm{E}[X^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x)\mathrm{d}x.$$

- *moment centré d'odre m de X, la quantité*

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}[X])^m f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Propriété 3

Soit X une VAR à densité. Si X admet un moment d'ordre $m \in \mathbb{N}_*$ alors X admet des moments de tout ordre $j \in [\![1; m]\!]$, où $[\![1; m]\!]$ représente l'intervalle des entiers entre 1 et m.

Variables aléatoires réelles continues

Théorème 5 (Inégalité de Markov)

Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre $m \in \mathbb{N}_*$. Alors

$$\forall x > 0,\ \mathrm{P}(|X| \geq x) \leq \frac{\mathrm{E}[|X|^m]}{x^m}.$$

Démonstration.

Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[|X|^m] &= \int_{-\infty}^{x} |y|^m f_X(y)\mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} y^m f_X(y)\mathrm{d}y \\
&\geq \int_{-\infty}^{x} |y|^m f_X(y)\mathrm{d}y + x^m \int_{x}^{+\infty} f_X(y)\mathrm{d}y \\
&= x^m \mathrm{P}(X \geq x) + \int_{-\infty}^{-x} |y|^m f_X(y)\mathrm{d}y + \int_{-x}^{x} |y|^m f_X(y)\mathrm{d}y \\
&\geq x^m \mathrm{P}(X \geq x) + \int_{-\infty}^{-x} |y|^m f_X(y)\mathrm{d}y \geq x^m \mathrm{P}(X \geq x) + x^m \int_{-\infty}^{-x} f_X(y)\mathrm{d}y \\
&= x^m \mathrm{P}(X \geq x) + x^m \mathrm{P}(X \leq -x) = x^m \mathrm{P}(|X| \geq x).
\end{aligned}$$

Théorème 6 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une VAR à densité. Si X admet une variance alors

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{P}(|X - \mathrm{E}[X]| \geq x) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{x^2}.$$

Preuve : On utilise l'inégalité de Markov avec $m = 2$.

Proposition 2

Si X une VAR à densité admet un moment d'ordre 2, alors :

1. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$ *(Formule de Koenig-Huyghens).*
2. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.*

Démonstration.

Linéarité de l'espérance. □

Remarque : la variance d'une constante est nulle, i.e., $\mathrm{Var}(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Variables aléatoires réelles indépendantes

Définition 9

Toutes les v.a.r. ci-après sont définies sur la même $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

- *Deux variables aléatoires sont indépendantes, si et seulement si,* $\forall (A, B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$,

  les événements $\{X \in A\}$ *et* $\{Y \in B\}$ *sont indépendants*

  i.e.,

  $$\mathrm{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathrm{P}(\{X \in A\})\mathrm{P}(\{Y \in B\}).$$

- *Une suite de v.a.r.* $(X_1, \ldots, X_n)$ *est dite indépendante, si et seulement si* $\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^n$,

  la suite d'événement $(\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\})$ *est indépendante*

  i.e.,

  $$\mathrm{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in A_n\}) = \mathrm{P}(\{X_1 \in A_1\}) \ldots \mathrm{P}(\{X_n \in A_n\}).$$

Théorème 7 (Indépendance)

Toutes les v.a.r. ci-après sont définies sur la même $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

- *Deux variables aléatoires sont indépendantes, si et seulement si,* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

  les événements $\{X \leq x\}$ *et* $\{Y \leq y\}$ *sont indépendants*

  i.e.,
  $$\mathrm{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = \mathrm{P}(\{X \leq x\})\mathrm{P}(\{Y \leq y\}).$$

- *Une suite de v.a.r.* $(X_1, \ldots, X_n)$ *est dite indépendante, si et seulement si* $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

  la suite d'événement $(\{X_1 \leq x_1\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\})$ *est indépendante.*

  En particulier,
  $$\mathrm{P}\left(\{X_1 \leq x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \leq x_n\}\right) = \mathrm{P}(\{X_1 \leq x_1\}) \ldots \mathrm{P}(\{X_n \leq x_n\}).$$

Proposition 3

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2. Si* X *et* Y *sont indépendantes, alors :*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[XY] &= \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \\ \mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). \end{aligned}$$

Lois usuelles (loi uniforme)

Définition 10 (Loi Uniforme)

Soient a, b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une VAR à densité X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}([a; b])$, si X admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}(x).$$

Propriété 4

Si $X \sim \mathcal{U}([a; b])$ alors :

$$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

et sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \textit{si } x \in [a; b] \\ 1 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.

Simple calculs d'intégrales. □

Exercice 1

Soient $k \in \mathbb{R}_*$ *et* $[a;b]$ *un segment avec* $a < b$. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} k & \textit{si } x \in [a;b] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. *Déterminer* k *pour que* f *soit une densité de probabilité. Représenter graphiquement* f.
2. *Soit* X *une VAR de densité* f. *Déterminer* F, *sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.*
3. *Calculer, si elles existent,* $\mathrm{E}[X]$ *et* $\mathrm{Var}(X)$.
4. *Tracer la fonction de densité et la fonction de répartition de* X.

Exercice 1

Soient $k \in \mathbb{R}_*$ *et* $[a;b]$ *un segment avec* $a < b$. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} k & \textit{si } x \in [a;b] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. *Déterminer* k *pour que* f *soit une densité de probabilité. Représenter graphiquement* f.
2. *Soit* X *une VAR de densité* f. *Déterminer* F, *sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.*
3. *Calculer, si elles existent,* $\mathrm{E}[X]$ *et* $\mathrm{Var}(X)$.
4. *Tracer la fonction de densité et la fonction de répartition de* X.

1. $k = \frac{1}{b-a}$.

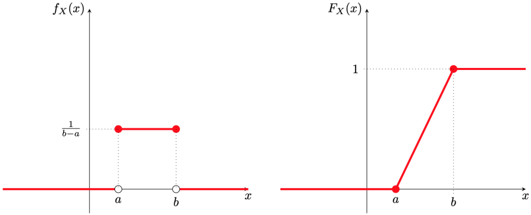


Figure 1 – Fonction de densité et de répartition de $X \sim \mathcal{U}([a;b])$.

Lois usuelles (loi uniforme)

Proposition 4

Soit X *une VAR à densité. Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$. *Alors :*

$$X \sim \mathcal{U}([0;1]) \quad \Leftrightarrow \quad a + (b-a)X \sim \mathcal{U}([a;b]),$$

$$X \sim \mathcal{U}([a;b]) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}([0;1]).$$

Démonstration.

Simple calculs d'espérances et de variances. $\square$

Lois usuelles (loi exponentielle)

Définition 11 (Loi exponentielle)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. On dit qu'une VAR à densité X suit une loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, si X admet pour densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x).$$

Propriété 5

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Sa fonction de répartition est égale à

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.

Simple calculs d'intégrales. □

Lois usuelles (loi exponentielle)

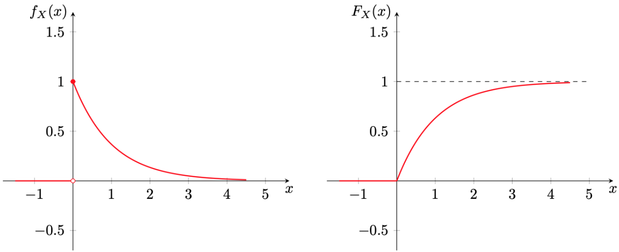


Figure 2 – Fonction de densité et de répartition de $X \sim \mathcal{E}(1)$.

Proposition 5

Soit X une VAR à densité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Alors :

$$X \sim \mathcal{E}(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda X \sim \mathcal{E}(1).$$

Exercice 2

La durée de vie d'une atome d'une élément radioactif est une VAR qui admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x),$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. *Représenter graphiquement f.*
2. *Soit X une VAR de densité f. Déterminer F, sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.*
3. *Calculer,si elles existent, $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.*
4. *On prend t en seconde et $\lambda = 0.2$.*
   1. *Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie supérieur à 4 secondes ?*
   2. *Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie comprise entre 1 et 3 secondes ?*

Lois usuelles (loi exponentielle)

Démonstration.

1. Voir la Figure 2 précédente pour $\lambda = 1$.
2. F est donnée dans la propriété précédente.
3. Ils sont donnés dans la propriété précédente.
4.
   1. $\mathrm{P}(X \geq 4) = e^{-0.8} = 0.449$.
   2. $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3) = e^{-0.2} - e^{-0.6} = 0.26992$.

$\square$

Loi normale ou loi de GAUSS

La loi normale joue un rôle central dans la théorie des probabilités et les statistiques. Une de ses premières applications était due à C.F. Gauss, qui l'utilisa en 1809 pour modéliser les erreurs d'observation en astronomie.

Définition 12 (Loi normale)

Soient μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$. On dit qu'une VAR à densité X suit une loi normale (ou gaussienne) de paramètres (μ, σ) et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si X admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

En particulier, si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit une loi normale centrée réduite. Dans ce cas :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Remarque

- Il n'existe pas d'expression analytique simple d'une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$.
- Vous avez déjà montré en prépa au cours de divers exercices que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Lois usuelles (loi normale)

Propriété 6

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*, alors sa densité vérifie les propriétés suivantes :*

1. f_X *est symétrique par rapport au point* μ *:* $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. f_X *est maximale au point* μ *:* $f_X(x) \leq f_X(\mu)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Proposition 6

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *alors sa fonction de répartition est donnée par :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

C'est simplement la définition de la fonction de répartition. □

Lois usuelles (loi normale)

Remarque

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Puisque f_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ alors F_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'_X(x) = f_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

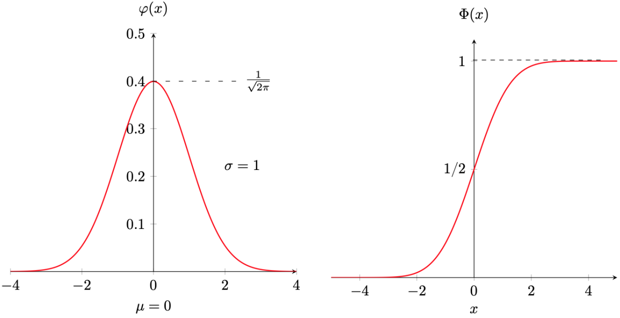


Figure 3 – Fonction densité et de répartition de la loi normale centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Lois usuelles (loi normale)

Proposition 7

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *alors*

$$\mathrm{E}[X] = \mu \quad \textit{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Proposition 8 (transformation affine)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$. *Alors*

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, (a\sigma)^2).$$

Corollaire 1

Soit X *une VAR à densité. Soit* $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors :*

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$
$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Lois usuelles (loi normale)

Remarque

L'intérêt de ce résultat est de ramener tous les calculs des lois normales à des calculs sur la loi normale standard, c'est-à-dire une loi normale centrée réduite.

Remarque [Fonction de répartition d'une VAR suivant une loi normale]

Nous avons vu que nous pouvions toujours passer d'une loi normale à une loi normale centrée réduite par transformation affine. Puisqu'il n'existe pas de primitive analytique de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, il n'existe pas d'expression analytique simple à la fonction de répartition d'une loi normale. C'est pourquoi la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est tabulée (donnée dans une table appelée 'table de la loi normale centrée réduite').

Table de la loi normale standard. La f.r. Φ de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ est

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme il n'existe pas d'expression analytique simple pour la f.r. Φ autre que sa formulation intégrale, les valeurs de la fonction Φ pour x entre 0 et 4, par incréments de 0.01, sont rassemblées dans une table appelée table de la loi normale standard.

Lois usuelles (loi normale)

Valeurs pour la loi normale standard

- **Cas $0 \leq x \leq 4$:** La valeur de $\Phi(x)$ est lu sur la table à l'intersection de la ligne et de la colonne dont la somme vaut x. Par exemple, $\Phi(1.37) = 0.914657$.

- **Cas $-4 \leq x \leq 0$:** On utilise la relation $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Par exemple, $\Phi(-1.37) = 1 - \Phi(1.37) = 0.085343$.

- **Approximation de $\Phi(x)$** : Dans certains calculs très précis, on a besoin des valeurs de $\Phi(x)$ pour $x > 4$. La formule suivante donne une très bonne approximation :

$$\Phi(x) \simeq 1 - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Par exemple, $\Phi(5) = 1 - 7.45 \times 10^{-7} = 0.999999255$.

Plan

Afin d'alléger l'écriture des définitions et propriétés de ce chapitre, nous allons utiliser la notation suivante : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est un espace probabilisé, X et Y sont deux VAR sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarque

Afin d'alléger les notations, on notera simplement

$$(X = x, Y = y) = (X = x) \cap (Y = y).$$

Couples VAR (cas général)

Définition 13 (Couple de variables aléatoires réelles)

On appelle couple de variables aléatoires, le couple $(X;Y)$.

Remarque

Si $Z=(X;Y)$, alors $Z(\Omega)=\{(X(\omega);Y(\omega))\ \mid\ \omega\in\Omega\}\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Définition 14 (Loi conjointe/Lois marginales)

On appelle loi (conjointe) de $Z=(X;Y)$*, l'application définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *par*

$$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\quad \mathrm{P}_Z(B)=\mathrm{P}(Z\in B).$$

On appelle lois marginales de $(X;Y)$*, les lois de probabilités des variables* X *et* Y.

Définition 15 (Fonction de répartition)

Soit $(X;Y)$ *un couple de VAR. La fonction*

$$F_{(X;Y)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & [0,1] \\ (x;y) & \longmapsto & F_{(X;Y)}(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) \end{array} \right.$$

est appelée fonction de répartition du couple $(X;Y)$ *ou fonction de répartition conjointe de* X *et* Y*. Les fonctions de répartitions de* X *et de* Y*, notées respectivement* F_X *et* F_Y *sont qualifiées de première (resp. deuxième) fonction de répartition marginale de* $(X;Y)$*.*

Propriété 7 (Relations entre f.r. conjointe et f.r. marginales)

Soit $(X;Y)$ *un couple de VAR de fonction de répartition* $F_{(X;Y)}$*. On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X;Y)}(x,y).$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{(X;Y)}(x,y).$$

Démonstration.

Admis. □

Couples VAR (cas général)

Exercice 3

Exprimer à l'aide des fonctions de répartitions conjointe et marginales, les probabilités suivantes :

1. $\mathrm{P}(\{X > x\} \cup \{Y > y\})$.
2. $\mathrm{P}(\{X > x\} \cap \{Y > y\})$.
3. $\mathrm{P}(\{X > x\} \cap \{Y < y\})$.
4. $\mathrm{P}(\{x_1 < X \leq x_2\} \cap \{y_1 < Y \leq y_2\})$.

Démonstration.

1. $\mathrm{P}(\{X > x\} \cup \{Y > y\}) = \mathrm{P}(\overline{\{X < x\} \cap \{Y < y\}}) = 1 - \mathrm{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = 1 - F_{(X;Y)}(x, y)$.
2. $\mathrm{P}(\{X > x\} \cap \{Y > y\}) = \mathrm{P}(\overline{\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}}) = 1 - \mathrm{P}(\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}) = 1 - (\mathrm{P}(X \leq x) + \mathrm{P}(Y \leq y) - \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y)) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{(X;Y)}(x, y)$.
3. $\mathrm{P}(\{X > x\} \cap \{Y < y\}) = F_Y(y) - F_{(X;Y)}(x, y)$ (Faire un graphique).
4. $\mathrm{P}(\{x_1 < X \leq x_2\} \cap \{y_1 < Y \leq y_2\}) = F_{(X;Y)}(x_2, y_2) - F_{(X;Y)}(x_2, y_1) - F_{(X;Y)}(x_1, y_2) + F_{(X;Y)}(x_1, y_1)$.

Remarque : avec un dessin c'est plus facile à visualiser les résultats. □

Couples VAR (cas général)

Définition 16 (Indépendance)

Deux VAR X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sont dites indépendantes si et seulement si pour tous boréliens A et B, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants :

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{P}(X \in A, Y \in B) = \mathrm{P}(X \in A)\mathrm{P}(Y \in B).$$

Théorème 8

Soient F_X et F_Y les fonctions de répartitions respectivement, de X et de Y. Il y a équivalence entre :

1. *X et Y sont indépendantes.*
2. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X;Y)}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$
3. *Si de plus X et Y sont continues,*
   $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(X;Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, *où f_X et f_Y sont les fonctions de densités.*

Couples VAR discrètes

Dans cette section, X et Y sont deux VAR discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
$X(\Omega) = \{x_i \ : \ i \in I\}$, avec I dénombrable et les x_i deux à deux distincts.

$$\forall i \in I, \ \mathrm{P}(X = x_i) = p_i.$$

De même, $Y(\Omega) = \{y_j \ : \ j \in J\}$, J dénombrable, les y_j deux à deux distincts et

$$\forall j \in J, \ \mathrm{P}(Y = y_j) = q_j.$$

Théorème 9 (Calcul des lois marginales)

Les lois marginales X et Y se calculent par :

$$\forall i \in I, p_i = \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathrm{P}(X = x_i, Y = y)$$

$$\forall j \in J, p_j = \mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = x, Y = y_j).$$

Démonstration.

Soit $x \in X(\Omega)$. Alors $(X = x, Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles telle que

$$\begin{aligned} \bigcup_{y \in Y(\Omega)} (X = x, Y = y) &= \bigcup_{y \in Y(\Omega)} (X = x) \cap (Y = y) = (X = x) \cap \bigcup_{y \in Y(\Omega)} (Y = y) = (X = x) \\ &= (X = x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Fonction de répartition CVAR discrètes

Propriété 8

Dans le cas discret, la fonction de répartition est donnée par :

$$F_{(X;Y)}(x,y) = \sum_{\substack{u \in X(\Omega) \\ u \leq x}} \sum_{\substack{v \in Y(\Omega) \\ v \leq y}} \mathrm{P}(X = u, Y = v).$$

Remarque

Si on connait la loi de probabilité de Y et la loi conditionnelle de X sachant Y et si la probabilité $\mathrm{P}(Y = y)$ n'est jamais nulle, alors on peut trouver la loi du couple $(X;Y)$

$$\forall i \in I, \forall j \in J,\ p_{ij} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(Y = y_j)\mathrm{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i).$$

Définition 17 (Indépendance)

Les VARs X et Y sont dites indépendantes si et seulement si

$$\forall (i,j) \in I \times J, p_{ij} = \mathrm{P}_{(X;Y)}((X = x_i, Y = y_j)) = p_i p_j = \mathrm{P}(X = x_i)\mathrm{P}(Y = y_j).$$

Couples VAR discrètes

Proposition 9

Si la série double $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{ij}$ *est absolument convergente, alors :*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} u_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} u_{ij}.$$

Théorème 10 (de transfert)

Soit $(X;Y)$ *un c.a.r. discret. Soit* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction quelconque. La v.a.r. discrète* $g(X;Y)$ *admet une espérance si et seulement si la série double*

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\mathrm{P}(X=x,Y=y)$$

converge absolument. Cette espérance est alors donnée par

$$\mathbb{E}[g(X;Y)] = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\mathrm{P}(X=x,Y=y)$$

Exemple

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = i, Y = j) = \frac{i + j}{2^{i+j} i! j! e}.$$

Soit $Z = 2^{X+Y}$. Montrer que $\mathrm{E}[Z] = 2e$.

Exemple

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{2^{i+j} i! j! e}.$$

Soit $Z = 2^{X+Y}$. Montrer que $\mathrm{E}[Z] = 2e$.

Solution : D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x,y) \mathrm{P}(X = x, Y = y)$$

avec $g(x,y) = 2^{x+y}$ et $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z] &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j} \frac{i+j}{2^{i+j} i! j! e} = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{i! j!} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i}{i! j!} + \frac{j}{i! j!} \right) = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} + \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} \right) \\
&= \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{i!} e + \frac{1}{i!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} \right) = \frac{1}{e} \left[e \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} + e \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \right] \\
&= \frac{1}{e} (2e^2) = 2e.
\end{aligned}$$

Couples VAR discrètes

Définition 18 (Lois conditionnelles)

La loi de X conditionnée à Y (ou loi de X sachant Y) est l'application

$$P_Y \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times \{y \in Y(\Omega) \ : \ \mathrm{P}(Y = y) \neq 0\} & \longrightarrow & [0;1] \\ (x;y) & \longmapsto & \mathrm{P}_{\{Y=y\}}(X = x) = \frac{\mathrm{P}(X=x,Y=y}{\mathrm{P}(Y=y)} \end{array} \right.$$

Proposition 10

Soit $(X;Y)$ un c.a.r. discret. Si X et Y possèdent chacune un moment d'ordre 2, alors la v.a.r. discrète XY possède une espérance donnée par :

$$\mathrm{E}[XY] = \sum_{x \in X(\Omega} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy\mathrm{P}(X = x, Y = y).$$

Covariance couples var discrètes

Définition 19 (covariance)

Soit $(X;Y)$ *un c.a.r. discret tel que* X *et* Y *possèdent chacune un moment d'ordre 2. On appelle covariance de* X *et* Y *, le réel noté* $\mathrm{Cov}(X,Y)$ *défini par :*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])\right] = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}(x-\mathrm{E}[X])(y-\mathrm{E}[Y])\mathrm{P}(X=x,Y=y).$$

Proposition 11

Soient X *et* Y *deux v.a.r. discrètes admettant chacune un moment d'ordre deux. Alors :*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \quad \textit{(Formule de } \textsc{Koenig-Huyghens}\textit{)}$$

Proposition 12

La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace des v.a.r. discrètes de carré intégrable. Si X_1*,* X_2 *et* Y *sont des v.a.r. de carré intégrable, alors :*

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
2. $\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\mathrm{Cov}(X_1,Y) + b\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) \geq 0$.

Covariance couples var discrètes

Remarque

La covariance n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas définie. En effet : $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Cov}(a, a) = 0,$$

avec $X = a$ représente une variable aléatoire réelle certaine.

Propriété 9

Sous réserve d'existence, on a :

1. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$.
2. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Covariance couples var discrètes

Proposition 13

Si X et Y sont indépendantes, alors sous réserve d'existence, on a :

1. $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.
2. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Remarque

Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. La réciproque n'est pas toujours vraie sauf si X et Y forme un vecteur gaussien.

Coefficient de corrélation

Définition 20 (Coefficient de corrélation)

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes admettant chacune une variance non nulle. On appelle ***coefficient de corrélation linéaire*** *de X et Y, le réel définie par :*

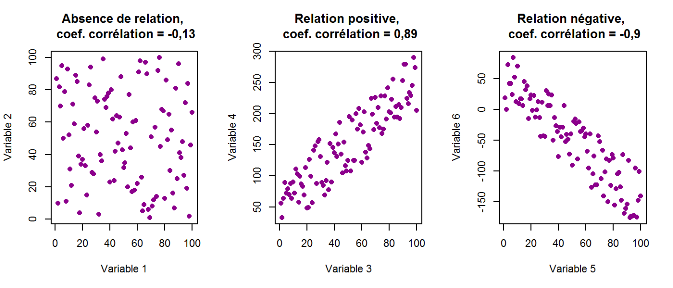
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarque

1. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
2. $\rho(X,Y)$ mesure le degré de liaison entre X et Y.
   1. $\rho(X,Y) > 0$ indique que X et Y varient dans le même sens.
   2. $\rho(X,Y) < 0$ indique que X et Y varient en sens contraire.
3. Si $\rho(X,Y) = 0$, alors on dit que X et Y sont non-corrélées ; c'est notamment le cas quand elles sont indépendantes.

Coefficient de corrélation linéaire

Trois types de corrélation linéaire



Application

Pour un échantillon de 100 naissances, on a obtenu des résultats concernant le problème des naissances prématurées. On note X la v.a.r. représentant le nombre de mois entiers écoulés entre la conception et la naissance d'un enfant et Y la v.a.r. représentant le poids de l'enfant à la naissance. En arrondissant au mois et kg inférieurs, les résultats sont résumés en pourcentage dans le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3	4
6	8	2	0	0
7	2	5	5	0
8	0	10	25	10
9	0	3	10	20

1. Que vaut $\mathrm{P}(X=7, Y=3)$? et $\mathrm{P}(X=8, Y=4)$? Donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X (dite première loi marginale de (X, Y) ou loi marginale en X). Reporter les résultats obtenus dans le tableau de contingence.
3. Déterminer la loi de Y (dite deuxième loi marginale de $(X; Y)$ ou loi marginale en Y). Reporter les résultats obtenus dans le tableau de contingence.
4. Vérifier que
$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathrm{P}(X=x, Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathrm{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathrm{P}(Y=y) = 1.$$
5. A-t-on $\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$, $\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$?
Que peut-on en déduire ?

suite application

6. Calculer $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
7. Calculer $\mathrm{E}[XY]$ et $\mathrm{E}[(X+Y)^2]$. Calculer également $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et $\rho(X,Y)$.
8. Déterminer la loi de X conditionnelle à $\{Y=1\}$, notée $\mathrm{P}_{X \mid \{Y=1\}}$.
   Vérifier que $\mathrm{P}_{X \mid \{Y=1\}}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.
9. Déterminer la loi de Y conditionnelle à $\{X=9\}$, notée $\mathrm{P}_{Y \mid \{X=9\}}$.
   Vérifier que $\mathrm{P}_{Y \mid \{X=9\}}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(Y(\Omega), \mathcal{P}(Y(\Omega)))$.

Solution de l'application

1. On a

$$\mathrm{P}(X=7,Y=3)=\mathrm{P}(\{X=7\}\cap\{Y=3\})=\frac{5}{100}=0.05$$
$$\mathrm{P}(X=8,Y=4)=0.1$$
$$X(\Omega)=\{6,7,8,9\}$$
$$Y(\Omega)=\{1,2,3,4\}$$

2. On a $\mathrm{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathrm{P}(X=x,Y=y)=\sum_{j=1}^{4}\mathrm{P}(X=x,Y=j)$.

$$\mathrm{P}(X=6)=\sum_{j=1}^{4}\mathrm{P}(X=6,Y=j)=\frac{8}{100}+\frac{2}{100}+2\frac{0}{100}=\frac{10}{100}=0.1$$
$$\mathrm{P}(X=7)=\frac{12}{100}=0.12$$
$$\mathrm{P}(X=8)=\frac{45}{100}=0.45$$
$$\mathrm{P}(X=9)=\frac{33}{100}=0.33$$

Suite solution application

3. De même, $\mathrm{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathrm{P}(X=x,Y=y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1)&=0.1\\
\mathrm{P}(Y=2)&=0.2\\
\mathrm{P}(Y=3)&=0.4\\
\mathrm{P}(Y=4)&=0.3
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}\mathrm{P}(X=x,Y=y) &= \sum_{x\in X(\Omega)}\left(\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\right)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)}\mathrm{P}(X=x)=1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}\mathrm{P}(X=x,Y=y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)}\left(\sum_{x\in X(\Omega)}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\right)\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)}\mathrm{P}(Y=y)=1.
\end{aligned}$$

suite solution application

5. X et Y sont bien dépendantes car par exemple
$$\mathrm{P}(\{X=7\}) \times \mathrm{P}(\{Y=3\}) = \frac{12 \times 40}{10000} = 0.048 \neq \mathrm{P}(X=7, Y=3) = 0.05.$$

6. L'espérance de X est égale à
$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathrm{P}(X=x) = 6\mathrm{P}(X=6) + \ldots + 9\mathrm{P}(X=9) = 8.01.$$
L'espérance de Y est égale à
$$\mathrm{E}[Y] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathrm{P}(Y=y) = 1\mathrm{P}(Y=1) + \ldots + 4\mathrm{P}(Y=4) = 2.9.$$
La variance de X est égale à
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2.$$
Or, $\mathrm{E}[X^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\mathrm{P}(X=x) = 65.01$. Donc, $\mathrm{Var}(X) = 65.01 - (8.01)^2 = 0.8499$.
De même la variance de Y est égale à
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[Y])^2.$$
Or, $\mathrm{E}[Y^2] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2\mathrm{P}(Y=y) = 9.3$. Donc, $\mathrm{Var}(Y) = 9.3 - (2.9)^2 = 0.89$.

Suite solution application

7. Par le théorème de transfert, on a

$$\mathrm{E}[XY] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathrm{P}(X=x, Y=y) = 23.85.$$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathrm{E}[(X+Y)^2] = \mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y^2] + 2\mathrm{E}[XY] = 122.01.$$

La covariance entre X et Y est égale à

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = 23.85 - 8.01 \times 2.9 = 0.621.$$

Donc, X et Y sont bien dépendantes.
Finalement, le coefficient de corrélation entre X et Y est égal à

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0.621}{\sqrt{0.8499 \times 0.89}} = 0.714.$$

Donc, X et Y sont corrélées positivement.

Suite solution application

8. <u>Loi conditionnelle de X sachant $\{Y = 1\}$</u> :

$$\mathrm{P}(\{X = x\} \mid \{Y = 1\}) = \frac{\mathrm{P}(X = x, Y = 1)}{\mathrm{P}(Y = 1)}, \quad \forall x \in X(\Omega).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\{X = 6\} \mid \{Y = 1\}) &= \frac{0.08}{0.1} = 0.8 \\
\mathrm{P}(\{X = 7\} \mid \{Y = 1\}) &= \frac{0.02}{0.1} = 0.2 \\
\mathrm{P}(\{X = 8\} \mid \{Y = 1\}) &= \mathrm{P}(\{X = 9\} \mid \{Y = 1\}) = 0
\end{aligned}$$

On a $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathrm{P}(\{X = x\} \mid \{Y = 1\}) = 1$. Donc, $\mathrm{P}_{X \mid \{Y=1\}}$ définie bien une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

9. Loi conditionnelle de Y sachant $\{X = 9\}$:

$$\mathrm{P}(\{Y = y\} \mid \{X = 9\}) = \frac{\mathrm{P}(X = 9, Y = y)}{\mathrm{P}(X = 9)}, \quad \forall y \in Y(\Omega).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\{Y = 1\} \mid \{X = 9\}) &= 0 \\
\mathrm{P}(\{Y = 2\} \mid \{X = 9\}) &= \frac{0.03}{0.33} = \frac{1}{11} \\
\mathrm{P}(\{Y = 3\} \mid \{X = 9\}) &= \frac{0.1}{0.33} = \frac{10}{33} \\
\mathrm{P}(\{Y = 4\} \mid \{X = 9\}) &= \frac{0.2}{0.33} = \frac{20}{33}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathrm{P}(\{Y = y\} \mid \{X = 9\}) = \frac{1}{11} + \frac{10}{33} + \frac{20}{33} = 1.$

Donc, $\mathrm{P}_{Y \mid \{X=9\}}$ est bien une probabilité sur l'espace probabilisable $(Y(\Omega), \mathcal{P}(Y(\Omega)))$.

Loi de couple à densité

Définition 21 (Densité de probabilité)

Soit $f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est une densité de probabilité sur* $\mathbb{R}^2$ *si :*

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) \geq 0.$
2. f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *sauf éventuellement en un nombre fini de courbes régulières.*
3. $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1.$

Définition 22 (Couple aléatoire réel à densité)

On dit qu'un couple aléatoire réel $(X; Y)$ *est à densité, s'il existe une densité, notée* $f_{(X;Y)}$ *telle que*

$$\forall D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \ \mathrm{P}((X; Y) \in D) = \iint_D f_{(X;Y)}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Lois marginales

Théorème 11 (Calcul des lois marginales)

Les lois marginales X et Y se calculent par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X;Y)}(x,y)\mathrm{d}y,$$
$$\forall y \in \mathbb{R}, f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X;Y)}(x,y)\mathrm{d}x.$$

Démonstration.

Admis. □

Fonction de répartition

Définition 23

Soit $(X;Y)$ *un couple aléatoire réel. La fonction*

$$\begin{array}{rcl} F_{(X;Y)} : \mathbb{R}^2 & \to & [0;1] \\ (x,y) & \mapsto & F_{(X;Y)}(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) \end{array}$$

est appelée fonction de répartition de (X, Y) ou fonction de répartition conjointe de X *et* Y*.*

- *Si* $(X;Y)$ *admet une densité* $f_{(X;Y)}$ *alors*

  $$F_{(X;Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X;Y)}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint_A f_{(X;Y)}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

  avec $A = \{(s;t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ s \leq x$ *et* $t \leq y\}$*.*
- *Les fonctions de répartitions de* X *et de* Y*, notées respectivement* F_X *et* F_Y *sont qualifiées de première fonction de répartition marginale (respectivement deuxième fonction de répartition marginale) de* $(X;Y)$*.*

cas à densité

Propriété 10

Soit $(X;Y)$ *un couple de VAR de fonction de répartition* F *et possédant une densité* f *. Si* f *est continue au voisinage de* $(x;y) \in \mathbb{R}$ *, alors*

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Propriété 11 (Relations entre f.r. conjointe et f.r. marginales)

Soit $(X;Y)$ *un couple aléatoire réel de fonction de répartition* $F_{(X;Y)}$*. Alors :*

- *La fonction de répartition de* X*, notée* F_X *est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X;Y)}(x,y).$$

- *La fonction de répartition de* Y*, notée* F_Y *est donnée par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \lim_{x \to +\infty} F_{(X;Y)}(x,y).$$

Densités conditionnelles

Théorème 12 (Densités conditionnelles)

Soit $(X;Y)$ *un couple de VAR possédant une densité* f, f_X *et* f_Y *les densités marginales.*
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $f_X(x) > 0$, *la fonction* $f_{Y \mid \{X=x\}}$ *définie par*

$$f_{Y \mid \{X=x\}}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

est une densité de probabilité, appelée densité de Y *conditionnelle à* $\{X = x\}$*. On dit aussi que c'est la densité de la loi de* Y *conditionnelle à* $\{X = x\}$*.*
Énoncé symétrique en remplaçant $Y \mid \{X = x\}$ *par* $X \mid \{Y = y\}$*.*

Démonstration.

En utilisant le résultat du Théorème 11 on montre aisément que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y \mid \{X=x\}}(y)\mathrm{d}y = 1$ (la positivité et la continuité de la fonction étant évidente). □

Loi uniforme

Définition 24 (Loi uniforme)

Soit $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *d'aire non nulle. On dit qu'un couple* $(X;Y)$ *de VAR à densité suit une loi uniforme sur* D *et on note* $(X;Y) \sim \mathcal{U}_D$ *s'il admet pour densité*

$$f(x,y) = \frac{1}{Aire(D)} \mathbb{1}_D(x,y).$$

Exercice 4

Soient X *et* Y *deux VAR dont la densité conjointe est définie par :*

$$f(x,y) = \mathbb{1}_{[0;1]^2}(x,y).$$

Déterminer les densités conditionnelles de $(X;Y)$.

Loi uniforme

Définition 24 (Loi uniforme)

Soit $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ d'aire non nulle. On dit qu'un couple $(X;Y)$ de VAR à densité suit une loi uniforme sur D et on note $(X;Y) \sim \mathcal{U}_D$ s'il admet pour densité

$$f(x,y) = \frac{1}{Aire(D)} \mathbb{1}_D(x,y).$$

Exercice 4

Soient X et Y deux VAR dont la densité conjointe est définie par :

$$f(x,y) = \mathbb{1}_{[0;1]^2}(x,y).$$

Déterminer les densités conditionnelles de $(X;Y)$.

Démonstration. Nous avons $(X;Y) \sim \mathcal{U}_{[0;1]^2}$. Calculons les densités marginales. Si $x \notin [0;1]$, alors pour tout y, $f(x,y) = 0$, donc $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = 0$. Si par contre, $x \in [0;1]$ alors $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0;1]}(y)\mathrm{d}y = 1$. De même pour f_Y. Donc, $f_X = f_Y = \mathbb{1}_{[0;1]}$.
Ainsi, pour $x \notin [0;1]$, la loi conditionnelle $f_{Y \mid \{X=x\}}$ n'est pas définie. Pour $x \in [0;1]$, $f_{Y \mid \{X=x\}}(y) = \frac{f(x,y)}{1} = \mathbb{1}_{[0;1]}(y)$.
De même pour la loi de $f_{X \mid \{Y=y\}}$.

Loi uniforme

Exercice 5

Soient X *et* Y *deux VAR dont la densité conjointe est définie par*

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{x^2+y^2\leq 1}(x,y)$$

Déterminer les densités conditionnelles de $(X;Y)$.

Exercice 5

Soient X et Y deux VAR dont la densité conjointe est définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{x^2+y^2\leq 1}(x,y)$$

Déterminer les densités conditionnelles de $(X;Y)$.

Démonstration. Nous voyons que $(X;Y) \sim \mathcal{U}_D$ où D est le disque unité (d'aire π). Calculons les densités marginales.

- Si $x \notin [-1;1]$, alors pour tout y, $f(x,y) = 0$, donc $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = 0$.
- Si par contre $x \in [-1;1]$ alors $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$.

  De même pour f_Y.

Passons aux lois conditionnelles :

- Pour $x \notin]-1;1[$, la loi conditionnelle $f_{Y\mid\{X=x\}}$ n'est pas définie.
- Pour $x \in]-1;1[$, $f_{Y\mid\{X=x\}}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathbb{1}_{[-\sqrt{1-x^2};+\sqrt{1-x^2}]}(y)$ (on vérifie bien que $\int_{\mathbb{R}} f_{Y\mid\{X=x\}}(y)\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y = 1$). De même pour $f_{X\mid\{Y=y\}}$.

Exercice 6

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles dont la densité conjointe est définie par :*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-x^2-2xy-3y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer les densités conditionnelles de $(X; Y)$ *et identifier les lois marginales.*

Loi uniforme

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles dont la densité conjointe est définie par :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-x^2-2xy-3y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer les densités conditionnelles de $(X;Y)$ et identifier les lois marginales.

Démonstration :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-x^2-2xy-3y^2}\mathrm{d}y.$$

On sait que $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}y = 1$. Or,

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}y^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}y - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}.$$

Par identification, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\sigma^2} = -3 \\ \frac{\mu}{\sigma^2} = -2x \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \mu = -\frac{1}{3}x \end{array} \right.$$

Ainsi, $-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} = \frac{\frac{-x^2}{9}}{\frac{1}{3}} = -\frac{x^2}{3}$.

suite de la démonstration

Donc

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(-\frac{1}{3}x)}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)^2 = -3y^2 - 2xy - \frac{x^2}{3}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2xy-3y^2}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(-\frac{1}{3}x)}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)^2} \times e^{-\frac{2}{3}x^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{6}}}e^{-\frac{2}{3}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(-\frac{1}{3}x)}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)^2}\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{\frac{2}{3\pi}}e^{-\frac{2}{3}x^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Donc, } X \sim \mathcal{N}(0, (\sqrt(3)/2)^2). \end{aligned}$$

Densité conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_{Y \mid \{X=x\}}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{-x^2-2xy-3y^2}}{\sqrt{\frac{2}{3\pi}e^{-\frac{2}{3}x^2}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-\frac{1}{3}x^2-2xy-3y^2}.$$

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-x^2-2xy-3y^2}\mathrm{d}x.$$

On sait que $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x = 1$. Or,

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}\mu^2.$$

Par identification, on trouve $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\mu = -y$. Donc, $-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2 = -y^2$.
Finalement

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(-y)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = -x^2 - 2xy - y^2.$$

Par suite,

$$e^{-x^2-2xy-3y^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(-y)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2} e^{-2y^2}.$$

suite de la démonstration

Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2xy-3y^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(-y)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2} e^{-2y^2}\mathrm{d}x \\
&= e^{-2y^2}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(-y)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2} > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 1/4).
\end{aligned}
$$

Densité conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$: elle est définie pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f_{X \mid \{Y=y\}}(x) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{-x^2-2xy-3y^2}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}e^{-2y^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2-2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+y)^2}.
\end{aligned}
$$

Loi conjointe de deux v.a.r. indépendantes

Proposition 14

Deux v.a.r. X et Y à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sont indépendantes ssi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq x)\mathrm{P}(Y \leq y).$$

Théorème 13

Soit $(X;Y)$ un couple aléatoire réel à densité. Il y a équivalence entre :

1. *X et Y sont indépendantes ;*
2. *$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $F_{(X;Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$;*
3. *$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f_{(X;Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.*

Théorème de transfert

Théorème 14 (de transfert)

Soit $(X;Y)$ *un couple aléatoire réel possédant une densité* f. *Soit* $g\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable (une v.a.r.). La v.a.r.* $g(X,Y)$ *admet une espérance si et seulement si l'intégrale*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

converge absolument. Cette espérance est alors donnée par :

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Proposition 15

Soit $(X;Y)$ *un couple aléatoire réel possédant une densité* f. *Si les v.a.r.* X *et* Y *possèdent chacune un moment d'ordre 2, alors la v.a.r.* XY *possède une espérance donnée par :*

$$\mathrm{E}[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Covariance d'un couple aléatoire réel à densité

Définition 25 (covariance)

Soit $(X;Y)$ *un couple aléatoire réel possédant une densité* f *et tel que* X *et* Y *possèdent chacune un moment d'ordre 2. On appelle covariance de* X *et* Y*, le réel noté* $\mathrm{Cov}(X,Y)$ *défini par :*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} (x-\mathrm{E}[X])(y-\mathrm{E}[Y])f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Proposition 16

Soient X *et* Y *deux v.a.r. admettant chacune un moment d'ordre deux. Alors :*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \quad \textit{(Formule de Koenig-Huyghens).}$$

Covariance d'un couple aléatoire réel à densité

Proposition 17

La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace des v.a.r. de carré intégrable. Si X_1, X_2 et Y sont des v.a.r. de carré intégrable, alors :

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
2. $\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\mathrm{Cov}(X_1,Y) + b\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X,X) \geq 0$.

Proposition 18

Si X et Y sont indépendantes, alors sous réserve d'existence, on a :

1. $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.
2. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Remarque

X et Y sont indépendantes implique que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ mais la réciproque n'est pas toujours vraie (sauf si X et Y forme un vecteur gaussien).

Coefficient de corrélation linéaire

Définition 26

Soient X et Y deux v.a.r. à densité admettant chacune une variance non nulle. On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y, le réel défini par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarque

1. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
2. $\rho(X,Y)$ mesure le degré de liaison entre X et Y.
    - $\rho(X,Y) > 0$ indique que X et Y varient dans le même sens.
    - $\rho(X,Y) < 0$ indique que X et Y varient en sens contraire.
3. Si $\rho(X,Y) = 0$, alors on dit que X et Y sont non-corrélées ; c'est notamment le cas quand elles sont indépendantes.

Application

Soit $(X;Y)$ un couple aléatoire réel à densité, de densité f définie par :

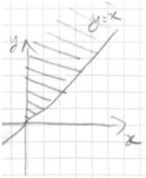
$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les densités marginales f_X et f_Y. X et Y sont-elles indépendantes.
3. Déterminer F la fonction de répartition de $(X;Y)$.
4. Déterminer les fonctions de répartition marginales F_X et F_Y à partir de la fonction de répartition conjointe F. Vérifier l'indépendance de X et Y.
5. Déterminer les densités conditionnelles $f_{X \mid \{Y=y\}}$ et $f_{Y \mid \{X=x\}}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!.$$

7. Calculer l'espérance et la variance de X et Y.
8. Calculer $\mathrm{E}[XY]$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et $\mathrm{Cor}(X,Y)$.

Solution application



1. On cherche à vérifier que f définie une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$:
   - $f(x,y) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^2$.
   - f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ sauf sur la droite $x=0$ et la droite $y=x$.
   - On a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{+\infty} \left(\int_{x=0}^{x=y} e^{-y}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{+\infty} ye^{-y}\mathrm{d}y.$$

Soit $A > 0$

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{A} ye^{-y}\mathrm{d}y &= [-ye^{-y}]_0^A + \int_0^A e^{-y}\mathrm{d}y \\ &= -Ae^{-A} + 1 - e^{-A} = e^{-A}(-A-1)+1. \end{aligned}$$

Donc, $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{A \to +\infty} (e^{-A}(-A-1)+1) = 1.$

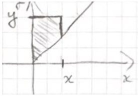
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

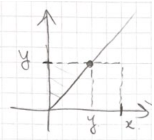
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y = e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= e^{-x}\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}(x). \end{aligned}$$

Pour $x < 0$, $f_Y(y) = 0$. Pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{y} e^{-y}\mathrm{d}x = ye^{-y} & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= ye^{-y}\mathbb{1}_{0\leq x\leq y}(y). \end{aligned}$$

Pour exemple, pour $x = 1$ et $y = 2$, on a
$f(1,2) = e^{-2} \neq f_X(1)f_Y(2) = e^{-1} \times 2e^{-2} = 2e^{-3}$. Donc, X et Y sont dépendantes.





3. Fonction de répartition de $(X;Y)$

$$\begin{aligned} F_{(X;Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \int_{s=0}^{s=x}\left(\int_{t=s}^{t=y} e^{-t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s & \text{si } 0\le x\le y \\ \int_{s=0}^{y}\left(\int_{t=s}^{y} e^{-t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s & \text{si } 0\le y\le x \\ 0 & \text{si } y<0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $\int_{s=0}^{s=x}\left(\int_{t=s}^{t=y} e^{-t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = 1 - xe^{-y} - e^{-x}$. De plus, $\int_{s=0}^{y}\left(\int_{t=s}^{y} e^{-t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = 1 - e^{-y}(1+y)$. Donc,

$$F_{(X;Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \text{ ou } y<0 \\ 1 - xe^{-y} - e^{-x} & \text{si } 0\le x\le y \\ 1 - e^{-y}(1+y) & \text{si } 0\le y\le x. \end{cases}$$

Suite solution application

4. Fonction de répartition marginales :

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{(X;Y)}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}(1+y) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a d'une part, $F_X(1) \times F_Y(1) = 1 - \frac{3}{e} + \frac{2}{e^2}$. D'autre part, $F_{(X;Y)}(1,1) = 1 - \frac{2}{e}$.
Donc, X et Y sont bien dépendantes.

Suite solution application

5. Densité conditionnelle $f_{X \mid \{Y=y\}}$: elle est définie pour $y > 0$. On a

$$f_{X \mid \{Y=y\}}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} & \text{si } 0 < x \leq y \\ 0 & \text{si } 0 < y < x \text{ ou } x < 0 < y \end{cases}$$
$$= \frac{1}{y}\mathbb{1}_{0<x\leq y}.$$

Densité conditionnelle $f_{Y \mid \{X=x\}}$ elle est définie pour $x \in [0; y]$. On a

$$f_{Y \mid \{X=x\}}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}}.$$

Suite solution application

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!.$$
On va essayer de la montrer par récurrence :
- Initialisation : pour $n = 0$
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = 1 = 0!.$$
Donc, l'hypothèse est vraie pour $n = 0$.
- On suppose que l'hypothèse est vraie jusqu'au le rang n et on va la démontrer au rang $n+1$. Donc on a par hypothèse
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!.$$
On va démontrer que $\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} \mathrm{d}x = (n+1)!$. Soit $A > 0$,
$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+1} e^{-x} \mathrm{d}x &\underset{I.P.P.}{=} \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^A + \int_0^A (n+1)x^n e^{-x} \mathrm{d}x \\ &\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} (n+1)n! = (n+1)!.\end{aligned}$$

Suite solution application

7.
- Espérance de X :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A xe^{-x}dx = 1! = 1.$$

- Espérance de Y :

$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}dy = 2! = 2.$$

- Variance de X :

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Or, $E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = 2$. Donc

$$Var(X) = 2 - 1^2 = 1.$$

- Variance de Y : de même

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2.$$

Or, $E[Y^2] = \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y}dy = 3! = 6$. Donc,

$$Var(Y) = 6 - 2^2 = 2.$$

Suite solution application

8

- Espérance de XY

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[XY] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{+\infty} \left(\int_{x=0}^{y} xye^{-y}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{+\infty} ye^{-y} \left(\int_{x=0}^{y} x\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{+\infty} ye^{-y}\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}3! = 3.
\end{aligned}$$

- Covariance entre X et Y :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = 3 - 2 = 1.$$

- Coefficient de corrélation entre X et Y :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Plan

Convergence

Théorème 15 (Inégalité de Markov)

Si X est une VAR admettant une espérance, alors

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{E}[|X|]}{\epsilon}.$$

Théorème 16 (Inégalité de Tchebychev)

Si X est une VAR admettant une variance, alors

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{P}(|X - \mathrm{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2}.$$

Convergence en loi

Définition 27 (Convergence en loi)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ *une suite de VAR et* $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}_*}$ *la suite des fonctions de répartition associées. Soit* X *une VAR et* F_X *sa fonction de répartition. On dit que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ *converge en loi vers* X *et on note :*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

lorsque $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}_*}$ *converge simplement vers* F_X *en tout point de continuité de* F_X *.*

Remarque

Si $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ F_X \text{ est continue en } x\}$, alors

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in D, \quad F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in D, \quad \mathrm{P}(X_n \leq x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

Convergence en loi

Exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR discrètes de lois :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left\{ \begin{array}{l} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n} \text{ et } \mathrm{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}. \end{array} \right.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la VAR constante égale à 1.

Démonstration.

La fonction de répartition de la variable aléatoire certaine $X = 1$ est égale à

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, il est clair que pour tout n, $F_{X_n}(x) = 0$. Si $x \geq 1$, $F_{X_n}(x) = 1$. Enfin, si $x \in [0; 1[$, alors $F_{X_n}(x) = \mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Donc, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X = 1$. □

Théorème 17

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ converge en loi vers X, alors la suite $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}_*}$ converge en loi vers $g(X)$.

Convergence en probabilité

Définition 28 (Convergence en probabilité)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ *une suite de VAR et* X *une VAR. On dit que* (X_n) *converge en probabilité vers* X *et on note*

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$$

lorsque

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque

On a l'équivalence suivante :

$$\mathrm{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(|X_n - X| < \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exemple

Soi $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR absolument continues, de densité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}.$$

Montrer que la suite de VAR $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la VAR constante égale à 0.

Démonstration.

Calculons la probabilité pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathrm{P}(|X_n| < \epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2} \mathrm{d}x.$$

En effectuant le changement de variables $u = e^{-nx}$, nous obtenons l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|X_n| < \epsilon) &= \int_{e^{-n\epsilon}}^{e^{n\epsilon}} \frac{du}{(1+u)^2} \\ . &= \left[-\frac{1}{1+u}\right]_{e^{-n\epsilon}}^{e^{n\epsilon}} = -\frac{1}{1+e^{n\epsilon}} + \frac{1}{1+e^{-n\epsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Convergence en probabilités

Exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR absolument continues, de densité :

$$f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Déterminer F_n la fonction de répartition de X_n pour tout $n \geq 1$.
3. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$.
4. Montrer que la suite de VAR $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la VAR constante égale à 0.

Démonstration.

1. On a $f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2} = \frac{ne^{-nx}}{e^{-2nx}(1+e^{nx})^2} = \frac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} = f_n(-x)$.
   Donc, f_n est une fonction symétrique. Pour $x = 0$, $f_n(x)$ diverge. Sinon, $f_n(x)$ converge vers 0.
2. Nous l'avons calculé dans l'exemple précédent,

$$F_{X_n}(x) = \frac{1}{1+e^{-nx}}.$$

Convergence en probabilité

Suite de la démonstration.

3. Pour x fixé, la suite numérique $(F_{X_n})_n$ tend vers 0 si $x < 0$, $\frac{1}{2}$ si $x = 0$ et vers 1 si $x > 0$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, F_{X_n} converge vers F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire certaine $X = 0$.

$\square$

Théorème

Soit $g \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X, alors la suite $(g(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $g(X)$.

Démonstration.

Voir les séries de fonctions. $\square$

Propriété 12

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X, alors elle converge en loi vers X.

Convergence presque sûre

Définition 29 (Convergence presque sûre)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de VAR et* X *une VAR. On dit que* (X_n) *converge presque sûrement (ou presque partout) vers* X *et on note*

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X$$

lorsqu'il existe un événement N *négligeable tel que*

$$\forall \omega \in N^c,\ X_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X(\omega).$$

Remarque

$X_n \xrightarrow{p.s.} X \quad \Leftrightarrow \quad \exists M$ un événement tel que $\mathrm{P}(M) = 1$ et $\forall \omega \in M$, $X_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X(\omega)$.

Lemme 1 (Borel-Cantelli)

Une condition suffisante pour montrer la convergence presque-sûr de (X_n) *vers* X *est*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sum_n \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon) < +\infty.$$

Convergence presque sûre

Exemple

On travaille dans l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P})$ où P est la probabilité uniforme sur le segment $[0;1]$:

$$\forall D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{P}(D) = \int_D \mathbb{1}_{[0;1]}(x)\mathrm{d}x = \int_{D\cap[0;1]} \mathrm{d}x.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. On suppose que $X_n = \mathbb{1}_{]0;\frac{1}{n}]}$. Montrer que $(X_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la variable certaine $X = 0$.
2. On suppose que $X_n = \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{n}]}$. Montrer que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers la variable certaine $X = 0$.

Démonstration.

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\omega \leq 0$ ou $\omega > 1$, alors $\forall n \geq 1$, $X_n(\omega) = 0 = X(\omega)$. Si $\omega \in]0;1]$, alors il existe $n_0 > \frac{1}{\omega} \geq 1$ tel que $\omega > \frac{1}{n_0}$ et donc $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \omega$, donc $\forall n \geq n_0$, $X_n(\omega) = 0 = X(\omega)$. Nous avons donc bien la convergence simple cherchée.

□

Convergence presque sûre

Démonstration.

2. Le fait de fermer en 0 change la donne. Nous avons toujours que pour tout $\omega < 0$ ou $\omega > 1$, $X_n(\omega) = 0$ et pour tout $\omega \in]0;1]$, en prenant $n_0 > \frac{1}{\omega} \geq 1$, nous avons pour tout $n > n_0$, $X_n(\omega) = 0$. Il reste donc le cas $\omega = 0$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \in [0; \frac{1}{n}]$, donc $X_n(\omega) = 1 \neq 0$. Cependant, $\mathbb{R}^*$ est un événement certain (de probabilité 1) car

$$\mathrm{P}(\mathbb{R}^*) = \int_{\mathbb{R}^* \cap [0;1]} \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} \mathrm{d}x = 1.$$

Donc on vient de montrer qu'en prenant $M = \mathbb{R}^*$ de probabilité 1, nous avions une convergence presque-sûre vers $X = 0$.

□

Convergence presque sûre

Théorème

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers X, alors la suite $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $g(X)$.

Démonstration.

Voir théorème de convergence simple de suites de fonctions. □

Propriété 13

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Définition 30 (Notations)

Soit X une VAR.

- *On dit que X est intégrable et on note $X \in L^1$, si X admet un moment d'ordre 1 :*
$$X \in L^1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}[|X|] < +\infty.$$
- *On dit que X est de carré intégrable et on note $X \in L^2$, si X admet un moment d'ordre 2 :*
$$X \in L^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}[|X|^2] < +\infty.$$

Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Définition 31 (Convergence en moyenne et en moyenne quadratique)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VAR et X une VAR.

- *On dit que (X_n) converge en moyenne (ou converge dans L^1) vers X et on note*

$$X_n \xrightarrow{L^1} X$$

  lorsque

$$\mathrm{E}[|X_n - X|] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- *On dit que (X_n) converge en moyenne quadratique (ou convergence dans L^2) vers X et on note*

$$X_n \xrightarrow{L^2} X$$

  lorsque

$$\mathrm{E}[|X_n - X|^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque

- Pour la convergence dans L^1, il faut vérifier que $\forall n \geq 1$, $\mathrm{E}[|X_n - X|] < +\infty$.
- Pour la convergence dans L^2, il faut vérifier que $\forall n \geq 1$, $\mathrm{E}[|X_n - X|^2] < +\infty$.

Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR discrètes de lois

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} X_n(\Omega) = \{0, n\} \\ \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^3} \\ \mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^3}. \end{cases}$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique et en moyenne vers la VAR $X = 0$.

Démonstration.

- Convergence en moyenne quadratique :

$$\mathrm{E}[X_n^2] = 0^2\mathrm{P}(X_n = 0) + n^2\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Convergence en moyenne :

$$\mathrm{E}[X_n] = 0\mathrm{P}(X_n = 0) + n\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR discrètes de lois

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} X_n(\Omega) = \{0, n\} \\ \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \\ \mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$

La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en moyenne quadratique vers la VAR $X = 0$? Et en moyenne ?

Démonstration.

- Convergence en moyenne quadratique :

$$\mathrm{E}[X_n^2] = 0^2\mathrm{P}(X_n = 0) + n^2\mathrm{P}(X_n = n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$ Donc non.

- Convergence en moyenne :

$$\mathrm{E}[X_n] = 0\mathrm{P}(X_n = 0) + n\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$ Donc oui.

□

Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Théorème

Soit $g \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique (resp. en moyenne) vers X, alors la suite $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique (rep. en moyenne) vers $g(X)$.

Démonstration.

Admis. □

Propriété 14

- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers X, alors elle converge en moyenne vers X.*
- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.*

Convergence

Remarque

Diagramme de convergence :

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Convergence p.s.} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{Convergence } L^2 \arrow[r, Rightarrow] & \text{Convergence } L^1 \arrow[r, Rightarrow] & \text{Convergence en probabilité} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Convergence en loi}
\end{tikzcd}$$

Remarque

Résumé :

- **Loi** : F_{X_n} converge simplement vers F_X.
- **Probabilité** : pour tout ϵ, $\mathrm{P}(|X_n - X| \geq \epsilon)$ tend vers 0.
- **Presque sûrement** : X_n converge simplement vers X sur un événement presque sûr.
- **Moyenne** : $\mathrm{E}[|X_n - X|]$ tend vers 0.
- **Moyenne quadratique** : $\mathrm{E}[|X_n - X|^2]$ tend vers 0.

Somme de variables aléatoires réelles indépendantes

Définition 32

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de VAR.*

- *Pour tout* $n \geq 1$, *on pose*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

  - S_n *est appelée somme partielle d'ordre* n *de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
  - $\bar{X}_n$ *est appelée moyenne empirique d'ordre* n *de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- *On dit que les VAR* X_n *sont identiquement distribuées, si elles ont même loi (ou même f.d.r.).*
- *On dit que les VAR* X_n *sont indépendantes identiquement distribuées (en abrégé i.i.d.), si elles sont mutuellement indépendantes et ont même loi (ou même f.d.r.).*

Propriété 15

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de VAR indépendantes et identiquement distribuées.*

- *Si* $\mathrm{E}[|X_1|] < +\infty$, *alors* $\mathrm{E}[X_1]$ *existe et on a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}[X_n] = \mathrm{E}[X_1]$.
- *Si* $\mathrm{E}[|X_1|^2] < +\infty$, *alors* $\mathrm{Var}(X_1)$ *existe et on a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X_1)$.

Par conséquence

$$\mathrm{E}[S_n] = n\mathrm{E}[X_1] \qquad \mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1)$$

$$\mathrm{E}[\bar{X}_n] = \mathrm{E}[X_1] \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}.$$

Démonstration.

Elles ont la même loi, donc même espérance et même variance (lorsqu'elles existent). Pour les formules, on applique la linéarité de E la formule correspondante pour Var (attention à l'indépendance). $\square$

Propriété 16 (Loi faible des grands nombres)

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de VAR i.i.d telle que* $\mathrm{E}[|X_1|^2] < \infty$, *alors*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}[X_1].$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (Théorème 6) : Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \mathrm{E}[\bar{X}_n]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}{\epsilon^2}.$$

Or, $\mathrm{E}[\bar{X}_n] = \mathrm{E}[X_1]$ et $\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}$. Donc,

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \mathrm{E}[X_1])| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\epsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Loi des grands nombres

Propriété 17 (Loi forte des grands nombres (Kolmogorov-Khintchine))

Si $(X_n)_n$ *une suite des VAR i.i.d. alors*

$$\overline{X}_n \text{ converge presque sûrement} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}[|X_1|] < \infty.$$

En cas de convergence

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mathrm{E}[X_1].$$

Démonstration.

Admis. □

Remarque

Ce théorème signifie que plus n est grand plus la variable aléatoire $\overline{X}_n$ se rapproche de la variable déterministe $X = \mathrm{E}[X_1]$.

Loi des grands nombres

Exemple

Soit A un événement de probabilité $\mathrm{P}(A)$. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événement indépendants et de même loi que A. En prenant $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$, on a $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{P}(A)$. Par la LFGN on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathrm{P}(A).$$

Par exemple si A est l'événement "obtenir un six lors du lancer d'un dé équilibré", la LFGN nous dit que la fréquence d'obtention du six en n lancers converge presque sûrement vers $1/6$ lorsque n tend vers l'infini.

Théorème Central Limite (TCL)

Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR i.i.d telle que $\mathrm{E}[|X_1|^2] < \infty$. Si $\mathrm{Var}(X_1) > 0$, alors :

- La suite de terme général

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\mathrm{E}[X_1]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X_1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^*,$$

  où $Z^* \sim \mathcal{N}(0;1)$.
- En note Φ la fonction de répartition de la VAR Z^*, on a pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n^* \leq z) = \Phi(z).$$

Démonstration.

Admis. $\square$

Théorème Central Limite

Remarque

En général, pour $n \geq 30$, on utilise l'approximation

$$\forall z \in \mathbb{R},\ F_{S_n^*}(z) = \mathrm{P}(S_n^* \leq z) \approx \Phi(z).$$

Remarque

Si $X \sim \mathcal{N}(m;\sigma^2) \ \Leftrightarrow\ Y = aX + b \sim \mathcal{N}(am + b; a^2\sigma^2)$ et $\mathrm{E}[X] = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ implique $\mathrm{E}[Y] = am + b$ et $\mathrm{Var}(Y) = a^2\sigma^2$.

Théorème Central Limite

Considérons une suite des variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathrm{E}[|X_1|^2] < +\infty$.

Approximation de la loi de S_n pour n assez grand. Soit S_n^* la variable aléatoire réelle centrée réduite associer à S_n. On a

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\mathrm{E}[X_1]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X_1)}}.$$

D'où

$$S_n = \sqrt{n\mathrm{Var}(X_1)}S_n^* + n\mathrm{E}[X_1].$$

Comme $\mathcal{L}(S_n^*) \approx \mathcal{N}(0;1)$ pour n assez grand, on a l'approximation pour la loi de S_n :

$$\mathcal{L}(S_n) \approx \mathcal{N}\left(n\mathrm{E}[X_1]; n\mathrm{Var}(X_1)\right).$$

Théorème Central Limite

Approximation de la loi de X_n pour n assez grand. On a $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$. Du résultat précédent on en déduit que pour n assez grand

$$\mathcal{L}(\overline{X}_n) \approx \mathcal{N}\left(\mathrm{E}[X_1]; \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}\right).$$

Remarque

La VAR centrée réduite $\overline{X}_n^*$ associée à $\overline{X}_n$ vérifie

$$\overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - \mathrm{E}[\overline{X}_n]}{\sigma(\overline{X}_n)} = \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sigma(S_n)} = S_n^*.$$

Donc on peut appliquer le théorème central limite à la suite de terme général $\overline{X}_n^*$.

Théorème Central Limite

Approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Prenons $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de n VAR i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On sait que la VAR $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (qui compte le nombre de succès) suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Le TCL nous permet pour n assez grand d'approcher la loi de S_n par une loi normale :

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(n\mathrm{E}[X_1], n\mathrm{Var}(X_1)).$$

Comme $\mathrm{E}[X_1] = p$ et $\mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$, il vient :

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np; np(1-p)).$$

Approximation de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Prenons $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de n VAR i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$. On sait que la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi $\mathcal{P}(n\alpha)$. Le TCL nous permet pour n assez grand d'approcher la loi de S_n par une loi normale :

$$\mathcal{P}(n\alpha) \approx \mathcal{N}(n\mathrm{E}[X_1]; n\mathrm{Var}(X_1)).$$

Comme $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{Var}(X_1) = \alpha$, il vient :

$$\mathcal{P}(n\alpha) \approx \mathcal{N}(n\alpha; n\alpha).$$

Remarque

En pratique, lorsque $\lambda \geq 15$, on utilise l'approximation

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda; \lambda).$$

En posant $\lambda = n\alpha$, la valeur minimale de n sera fixée par la valeur de α.

Plan