TD04 – Théorie des Langages

Exercice 1.

Question 4. $L_4 = \{a^n b^p \ / \ (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } n \neq p\}$

Solution. 1. On remarque que L_4 peut se décomposer selon :

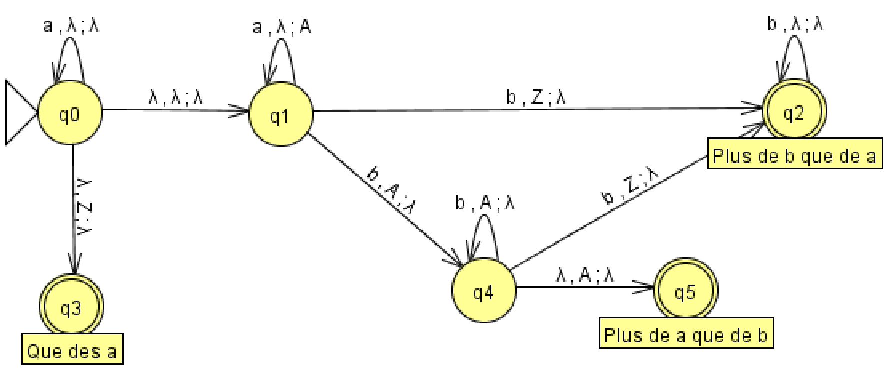
$L_4 = \{a^n b^p / (n, p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \text{ et } n > p\} \cup \{a^n b^p / (n, p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \text{ et } n < p\}$
$= \{a^p a^{n-p} b^p / (n, p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \text{ et } n > p\} \cup \{a^n b^{p-n} b^n / (n, p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \text{ et } n < p\}$
$= \{a^n b^p / (n, p) \in \mathrm{N}^* \times \mathrm{N}\} \cup \{a^n b^p / (n, p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}^*\}$

La grammaire $G =< T, N, S, P >$ convient avec

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b\} \\
N &= \{S, X, Y\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid aX \mid bY \\ X \rightarrow aX \mid \varepsilon \\ Y \rightarrow bY \mid \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peux pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.



On empile autant de A que l'on lit de a en tête et on les dépile ensuite en lisant les b. Il suffit alors de s'assurer soit qu'il reste des A (état q3), soit qu'on continue à lire des b après avoir atteint le fond de la pile (état q2).

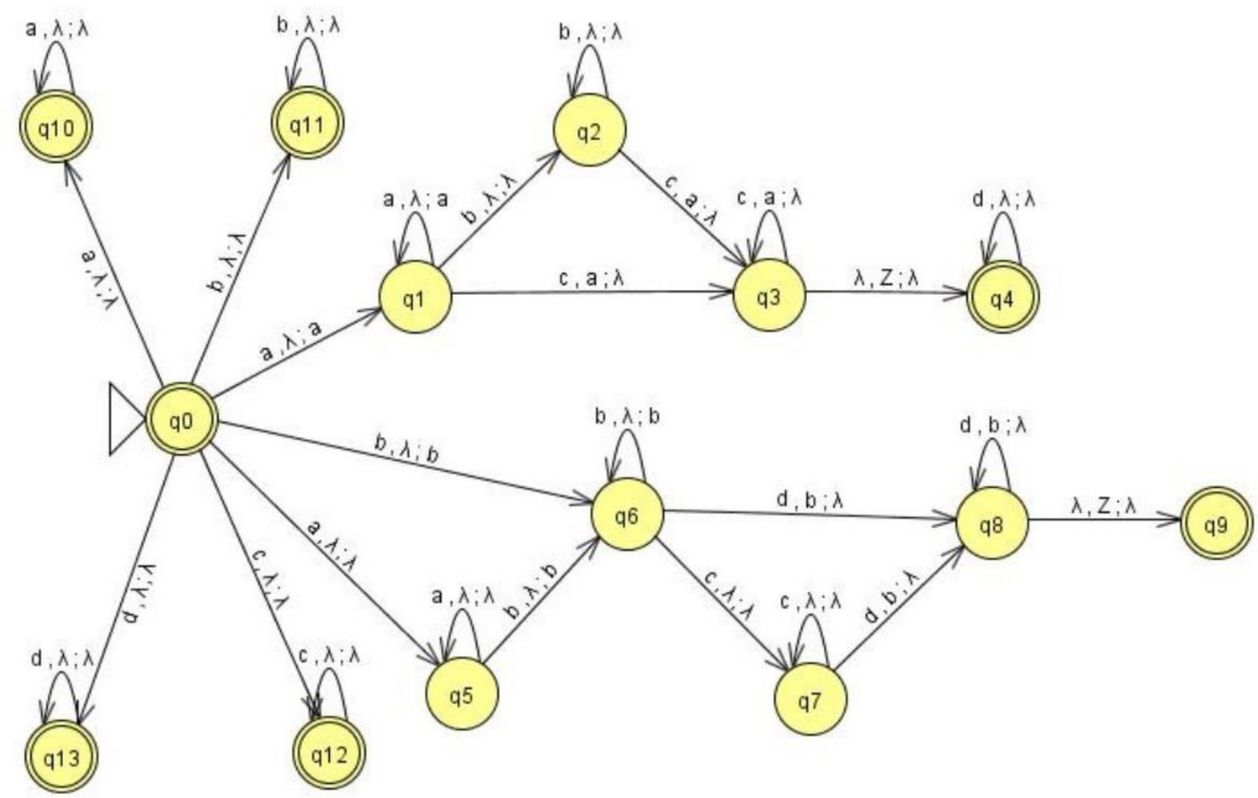
Question 5.

Solution. 1. La grammaire $G =< T, N, S, P >$ convient avec

$$
\begin{aligned}
T &= \{a, b, c, d\} \\
N &= \{S, X, Y, Z, V, U, T\} \\
S &= S \\
P &= \left\{ \begin{array}{c} S \to XY \mid VU \\ X \to aXc \mid Z \\ Z \to bZ \mid \varepsilon \\ Y \to dY \mid \varepsilon \\ U \to bUd \mid T \\ T \to cT \mid \varepsilon \\ V \to aV \mid \varepsilon \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peux pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.



Question 6.

Solution. 1. Comme à la question 4, on décompose L_6 selon

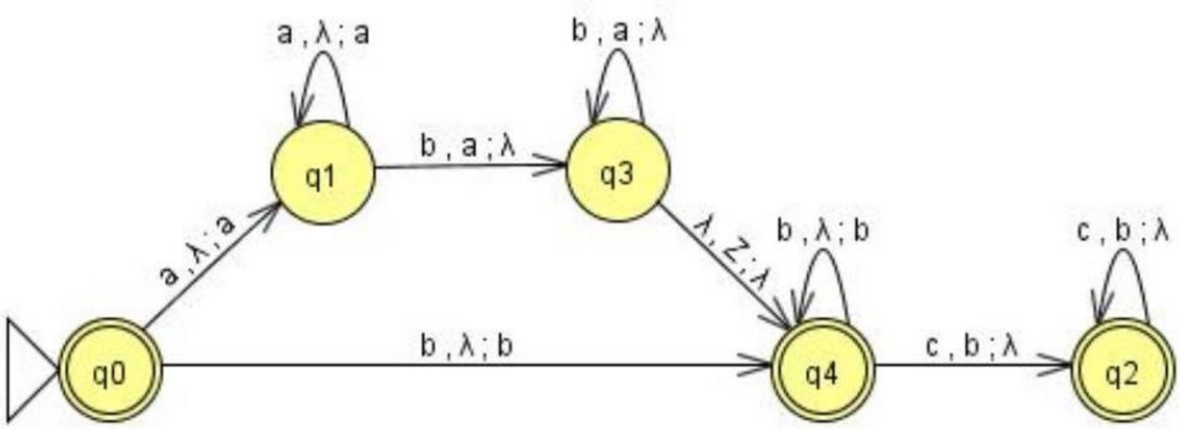
$$L_6 = \{(a^n b^n) b^p (b^q c^q)/n, p, q \in \mathbb{N}\} = \{a^n b^n / n \in \mathbb{N}\}\ b^*\ \{b^q c^q / q \in \mathbb{N}\}$$

La grammaire $G =< T, N, S, P >$ convient avec

$$\begin{aligned} T &= \{a, b, c\} \\ N &= \{S, X, Y, Z\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{c} S \to XYZ \\ X \to aXb \mid \varepsilon \\ Y \to bY \mid \varepsilon \\ Z \to bZc \mid \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peux pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.



Question 7.

Solution. 1. On décompose L_7 selon

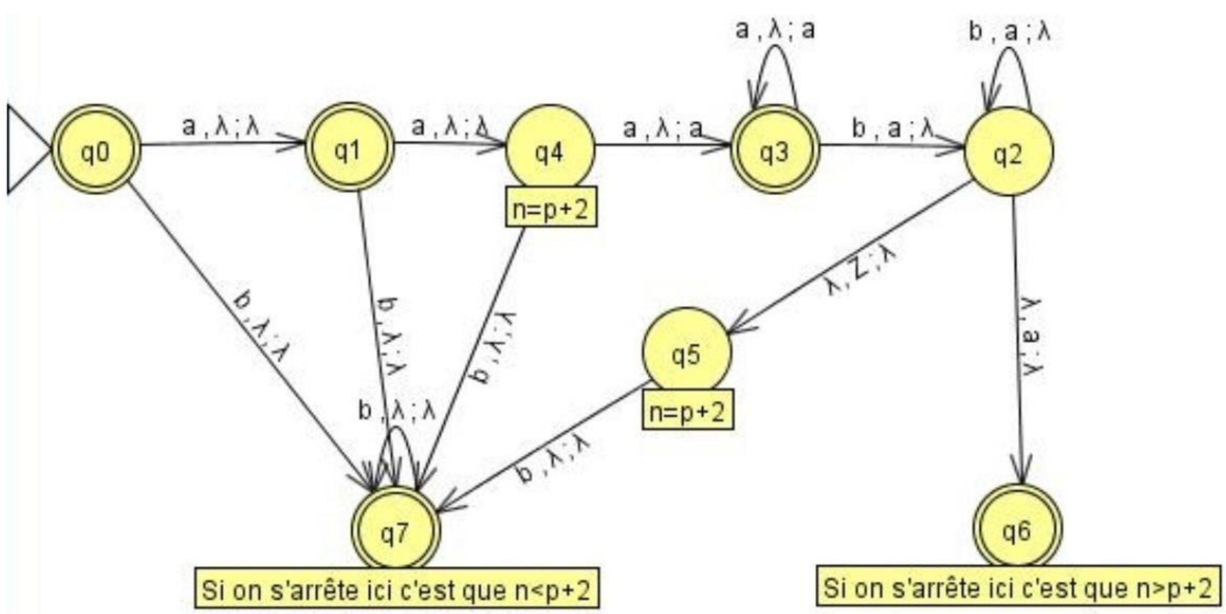
$$L_7 = \{a^n b^p / n \neq p+2 \text{ et } n+p<3\} \ \cup \ \{a^n b^p / n \neq p+2 \text{ et } n+p \geq 3\}$$
$$L_7 = \{\varepsilon, a, b, ab, bb\} \ \cup \ \{a^n b^p / n > p+2 \text{ et } n+p \geq 3\} \ \cup \ \{a^n b^p / n < p+2 \text{ et } n+p \geq 3\}$$
$$L_7 = \{\varepsilon, a, b, ab, bb\} \ \cup \ \{a^p(a^{n+2}b^n)/p>0\} \ \cup \ \{(a^{n+2}b^n)b^p/p>0\}$$

La grammaire $G =< T, N, S, P >$ convient avec

$$\begin{aligned} T &= \{a, b\} \\ N &= \{S, X, Y, Z\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ \begin{array}{ll} S \to XY \mid YZ & \\ X \to a \mid aX & // \ a^+ \\ Y \to aa \mid aYb & // \ a^{n+2}b^n \\ Z \to b \mid bZ & // \ b^+ \\ S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid ab \mid bb & \end{array} \right\} \end{aligned}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peux pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.



Question 8.

Solution. 1. La grammaire $G =< T, N, S, P >$ convient avec

$$\begin{aligned} T &= \{a, b\} \\ N &= \{S\} \\ S &= S \\ P &= \left\{ S \to aSb \mid aSbb \mid \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

2. On remarque que les règles de P respectent bien le format des grammaires de type 2 mais pas le format de type 3. Le langage est donc algébrique mais on ne peux pas conclure qu'il est rationnel.

3. L'automate à pile suivant convient.