TD03 – Théorie des Langages

Exercice 1.

Question 2

Solution. Si L est un langage ne contenant pas ε et x ≠ y deux lettres, on peut commencer par remarquer les lemmes suivants :

$$x^{-1}L^* = x^{-1}(L^+ + \varepsilon) = x^{-1}(L.L^* + \varepsilon) = x^{-1}(L.L^*) + x^{-1}\varepsilon = (x^{-1}L)L^* + \emptyset$$
$$x^{-1}L^* = (x^{-1}L)L^*$$
$$x^{-1}x^* = x^*$$
$$x^{-1}y^* = \emptyset$$

On utilise l'algorithme du cours :

Etape 0. Initialisation

$L_0 = L = a^*b^*$

Etape 1. On calcule les quotients gauches de L_0

$$a^{-1}L_0 = a^{-1}(a^*b^*) = (a^{-1}a^*)b^* + a^{-1}b^* = a^*b^* + \emptyset$$
$$a^{-1}L_0 = a^*b^* = L_0$$

$$b^{-1}L_0 = b^{-1}(a^*b^*) = (b^{-1}a^*)b^* + b^{-1}b^* = \emptyset b^* + b^* = \emptyset + b^*$$
$$b^{-1}L_0 = b^* = L_1$$

Etape 2. On recommence avec le nouveau langage L_1

$$a^{-1}L_1 = a^{-1}b^* = \emptyset = L_2$$

$$b^{-1}L_1 = b^{-1}b^* = b^* = L_1$$

Etape 3. On continue tant qu'on trouve des nouveaux sous-langages...

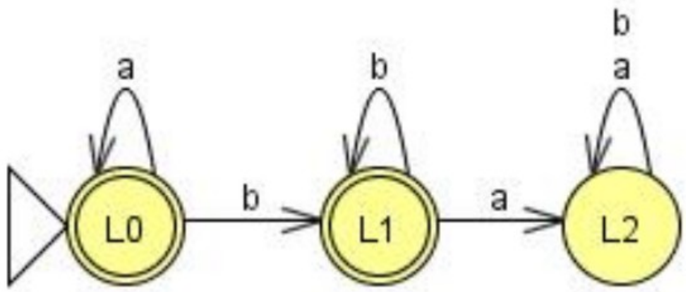
$$a^{-1}L_2 = a^{-1}\emptyset = \emptyset = L_2$$

$$b^{-1}L_2 = b^{-1}\emptyset = \emptyset = L_2$$

Pour construire notre automate, il nous suffit de construire un état pour chaque sous-langage trouvé et de suivre le résultat des quotients gauche de chaque sous-langage par tous les terminaux pour en déduire les transitions.

Les langages L0 et L1 contiennent le mot ε, les états de l'automate associés sont donc des états finaux.

L'automate trouvé par les quotients gauches est donc :



L'état L2 est l'état poubelle. L'algorithme des quotients gauche nous génère toujours un automate déterministe avec état poubelle.

Question 3

On cherche maintenant à vérifier que l'automate est bien équivalent à l'expression régulière initiale. Pour cela, résoudre le système d'équation issu de l'automate en utilisant le lemme d'Arden.

Solution. Le système d'équations de l'automate précédent est :

$$L_0 = aL_0 + bL_1 + \varepsilon \qquad // \text{ On ajoute } \varepsilon \text{ à l'équation car } L_0 \text{ est un état final.} \tag{1}$$

$$L_1 = bL_1 + aL_2 + \varepsilon \qquad // \text{ On ajoute } \varepsilon \text{ à l'équation car } L_1 \text{ est un état final.} \tag{2}$$

$$L_2 = (a + b)L_2 \qquad // \text{ On factorise } aL_2 + bL_2. \tag{3}$$

Note : considérer L_2 (l'état poubelle) n'est pas indispensable.

On ne peut pas appliquer le lemme d'Arden directement à l'équation (3) car il nous manque un terme.

Or l'équation peut également s'écrire :

$$L_2 = (a + b)L_2 + \emptyset$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (3), on obtient :

$$L_2 = (a + b)^*\emptyset = \emptyset$$

En remplaçant L_2 dans l'équation (2), on obtient :

$$L_1 = bL_1 + a\emptyset + \varepsilon = bL_1 + \varepsilon$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (2), on obtient :

$$L_1 = b^*\varepsilon = b^*$$

En remplaçant L_1 dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} L_0 &= aL_0 + bb^* + \varepsilon && // \text{ Or } bb^* = b^+ \\ L_0 &= aL_0 + b^+ + \varepsilon && // \text{ Or } b^+ + \varepsilon = b^* \\ L_0 &= aL_0 + b^* \end{aligned}$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (1), on obtient :

$$L_0 = a^*b^* = L$$

Exercice 2

Question 1

Solution. Le système d'équations de cet automate est :

$$\mathrm{Pa} = 0\ \mathrm{Pa} + 1\ \mathrm{Im} + \varepsilon \tag{4}$$
$$\mathrm{Im} = 0\ \mathrm{Im} + 1\ \mathrm{Pa} \tag{5}$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (2), on en déduit

$$\mathrm{Im} = 0^*1\mathrm{Pa}$$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$$\mathrm{Pa} = (0 + 10^*1)\ \mathrm{Pa} + \varepsilon$$

En appliquant le lemme d'Arden à cette nouvelle équation, on en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{Pa} &= (0 + 10^*1)^*\varepsilon \\ \mathrm{Pa} &= (0 + 10^*1)^* = L \end{aligned}$$

Question 2

Solution. On utilise l'algorithme du cours.
Etape 0. Initialisation

$$L_0 = L = (0 + 10^*1)^*$$

Etape 1.

$$0^{-1}L_0 = 0^{-1}(0 + 10^*1)^*$$
$$0^{-1}L_0 = (0^{-1}(0 + 10^*1))(0 + 10^*1)^* = (0^{-1}(0 + 10^*1))L_0$$
$$0^{-1}L_0 = (0^{-1}0 + 0^{-1}10^*1)L_0$$
$$0^{-1}L_0 = (\varepsilon + \emptyset)L_0 = \varepsilon L_0$$
$$0^{-1}L_0 = (0 + 10^*1)^* = L_0$$

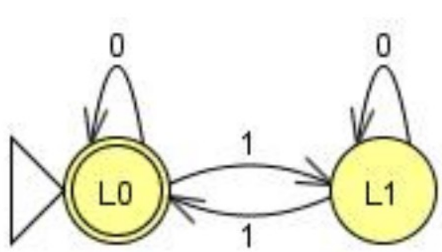
$$1^{-1}L_0 = 1^{-1}(0 + 10^*1)^*$$
$$1^{-1}L_0 = (1^{-1}(0 + 10^*1))L_0$$
$$1^{-1}L_0 = (1^{-1}0 + 1^{-1}10^*1)L_0$$
$$1^{-1}L_0 = (\emptyset + \varepsilon 0^*1)L_0$$
$$1^{-1}L_0 = 0^*1L_0 = L_1$$

Etape 2.

$$0^{-1}L_1 = 0^{-1}0^*1L_0$$
$$0^{-1}L_1 = (0^{-1}0^*)1L_0 + 0^{-1}1L_0$$
$$0^{-1}L_1 = 0^*1L_0 + (0^{-1}1)L_0$$
$$0^{-1}L_1 = 0^*1L_0 + \emptyset L_0 = 0^*1L_0 + \emptyset$$
$$0^{-1}L_1 = 0^*1L_0 = L_1$$

$$1^{-1}L_1 = 1^{-1}0^*1L_0$$
$$1^{-1}L_1 = (1^{-1}0^*)1L_0 + 1^{-1}1L_0$$
$$1^{-1}L_1 = \emptyset 1L_0 + \varepsilon L_0$$
$$1^{-1}L_1 = \emptyset + L_0 = L_0$$

On crée ensuite l'automate correspondant :



On remarque que l'on retrouve bien l'automate initial.

Exercice 3

Question 1

Solution. Le système d'équations de cet automate est :

$$E_0 = AE_0 + \mathrm{m}E_1 \tag{6}$$
$$E_1 = \mathrm{a}E_2 \tag{7}$$
$$E_2 = \mathrm{n}E_3 \tag{8}$$
$$E_3 = \varepsilon \tag{9}$$

On remplace E_1 dans l'équation (1) en se servant de (2), (3) et (4), on en déduit

$$E_0 = AE_0 + \mathrm{man}$$

En appliquant le lemme d'Arden à cette nouvelle équation, on en déduit

$$E_0 = A^*\mathrm{man} = L$$

Question 2

Solution. On utilise l'algorithme du cours.
Etape 0. Initialisation

L0 = L = A*man

Etape 1. On calcule les quotients gauches de L_0

$$\mathrm{m}^{-1}L_0 = \mathrm{m}^{-1}A^*\mathrm{man}$$
$$\mathrm{m}^{-1}L_0 = (\mathrm{m}^{-1}A^*)\mathrm{man} + \mathrm{m}^{-1}\mathrm{man}$$
$$\mathrm{m}^{-1}L_0 = (\mathrm{m}^{-1}A)A^*\mathrm{man} + \mathrm{an}$$
$$\mathrm{m}^{-1}L_0 = (\mathrm{m}^{-1}(\mathrm{m} + A_{/\{\mathrm{m}\}}))A^*\mathrm{man} + \mathrm{an}$$
$$\mathrm{m}^{-1}L_0 = (\varepsilon + \emptyset)A^*\mathrm{man} + \mathrm{an} = A^*\mathrm{man} + \mathrm{an}$$
$$\mathrm{m}^{-1}L_0 = L_0 + \mathrm{an} = L_1$$

$$\mathrm{a}^{-1}L_0 = \mathrm{a}^{-1}A^*\mathrm{man}$$
$$\mathrm{a}^{-1}L_0 = (\mathrm{a}^{-1}A^*)\mathrm{man} + \mathrm{a}^{-1}\mathrm{man}$$
$$\mathrm{a}^{-1}L_0 = (\mathrm{a}^{-1}A)A^*\mathrm{man} + \emptyset$$
$$\mathrm{a}^{-1}L_0 = (\mathrm{a}^{-1}(\mathrm{a} + A_{/\{\mathrm{a}\}}))L_0$$
$$\mathrm{a}^{-1}L_0 = (\varepsilon + \emptyset)L_0 = L_0$$

de la même façon, on obtient

$$\mathrm{n}^{-1}L_0 = L_0$$

et pour tout $x \notin \{\mathrm{m}, \mathrm{a}, \mathrm{n}\}$ on a

$$x^{-1}L_0 = L_0$$

que l'on note

$$A^{-1}_{/\{\mathrm{m},\mathrm{a},\mathrm{n}\}}L_0 = L_0$$

Etape 2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}^{-1}L_1 &= \mathrm{m}^{-1}(L_0 + \mathrm{an}) = \mathrm{m}^{-1}L_0 + \mathrm{m}^{-1}\mathrm{an} = L_1 + \emptyset = L_1\\
\mathrm{a}^{-1}L_1 &= \mathrm{a}^{-1}(L_0 + \mathrm{an}) = \mathrm{a}^{-1}L_0 + \mathrm{a}^{-1}\mathrm{an} = L_0 + \mathrm{n} = L_2\\
\mathrm{n}^{-1}L_1 &= \mathrm{n}^{-1}(L_0 + \mathrm{an}) = \mathrm{n}^{-1}L_0 + \mathrm{n}^{-1}\mathrm{an} = L_0 + \emptyset = L_0
\end{aligned}$$

de la même façon, on obtient

$$A^{-1}_{/\{\mathrm{m,a,n}\}}L_1 = L_0$$

Etape 3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}^{-1}L_2 &= \mathrm{m}^{-1}(L_0 + \mathrm{n}) = \mathrm{m}^{-1}L_0 + \mathrm{m}^{-1}\mathrm{n} = L_1 + \emptyset = L_1\\
\mathrm{a}^{-1}L_2 &= \mathrm{a}^{-1}(L_0 + \mathrm{n}) = \mathrm{a}^{-1}L_0 + \mathrm{a}^{-1}\mathrm{n} = L_0 + \emptyset = L_0\\
\mathrm{n}^{-1}L_2 &= \mathrm{n}^{-1}(L_0 + \mathrm{n}) = \mathrm{n}^{-1}L_0 + \mathrm{n}^{-1}\mathrm{n} = L_0 + \varepsilon = L_3
\end{aligned}$$

de la même façon, on obtient

$$A^{-1}_{/\{\mathrm{m,a,n}\}}L_2 = L_0$$

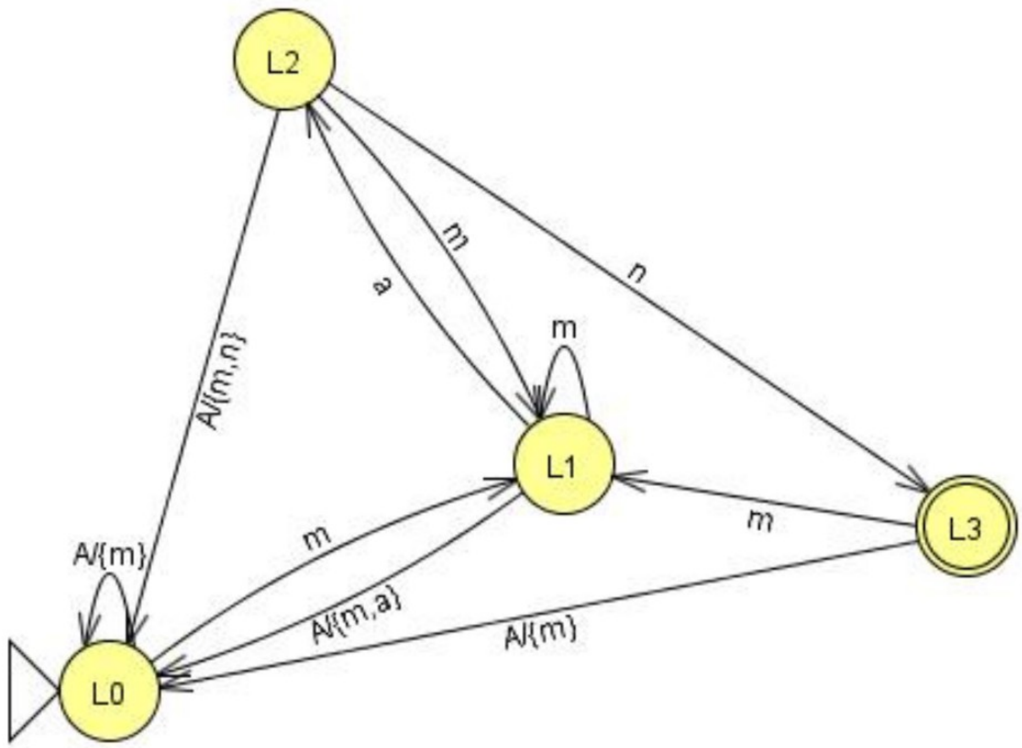
Etape 4.

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}^{-1}L_3 &= \mathrm{m}^{-1}(L_0 + \varepsilon) = \mathrm{m}^{-1}L_0 + \mathrm{m}^{-1}\varepsilon = L_1 + \emptyset = L_1\\
\mathrm{a}^{-1}L_3 &= \mathrm{a}^{-1}(L_0 + \varepsilon) = \mathrm{a}^{-1}L_0 + \mathrm{a}^{-1}\varepsilon = L_0 + \emptyset = L_0\\
\mathrm{n}^{-1}L_3 &= \mathrm{n}^{-1}(L_0 + \varepsilon) = \mathrm{n}^{-1}L_0 + \mathrm{n}^{-1}\varepsilon = L_0 + \emptyset = L_0
\end{aligned}$$

de la même façon, on obtient

$$A^{-1}_{/\{\mathrm{m,a,n}\}}L_3 = L_0$$

On crée ensuite l'automate correspondant :



On remarque que l'on retrouve bien l'automate déterministe que l'on avait trouvé lors du TD2 pour reconnaître ce langage. On a maintenant montré que cet automate était minimal.