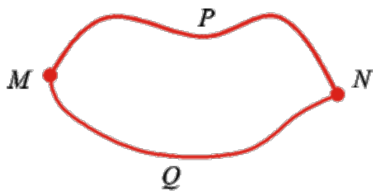
3. Криволинейные интегралы

3.4. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Рассмотрим две произвольные кривые MPN и MQN, лежащие в некоторой плоской области D и соединяющие точки M и N.



Пусть криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы кривой интегрирования, а зависит только от положения начальной и конечной точек M и N. В этом случае

$$\int\limits_{MPN} Xdx + Ydy = \int\limits_{MQN} Xdx + Ydy\ ;$$

Тогда

$$\int\limits_{MPN} Xdx + Ydy - \int\limits_{MQN} Xdx + Ydy = 0\ .$$

Меняя направление интегрирования во втором интеграле, получим:

$$\int\limits_{MPN} Xdx + Ydy + \int\limits_{NQM} Xdx + Ydy = 0\ ,$$

то есть криволинейный интеграл по замкнутому контуру $L = MPNQM$ равен нулю:

$$\oint\limits_{L} Xdx + Ydy = 0\ .$$

Таким образом, из условия независимости криволинейного интеграла от формы кривой интегрирования следует равенство нулю криволинейного интеграла по любому замкнутому контуру, лежащему в области D. Справедливо и обратное утверждение: если в области D криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то этот интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей любые две точки, а зависит только от положения этих точек.

Для того чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad \forall (x, y) \in D\ . \tag{7}$$

Доказательство этого утверждения основывается на рассмотрении формулы Грина. Если условие (7) выполняется, то левая часть равенства (6) равна нулю и

$$\oint\limits_{L} Xdx + Ydy = 0\ .$$

Выполнение условия (7) равносильно тому, что выражение $Xdx + Ydy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, то есть $Xdx + Ydy = du(x, y)$, причем $X = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

В этом случае

$$\int\limits_{MN} Xdx + Ydy = \int\limits_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M)\ ,$$

?

то есть криволинейный интеграл по любой кривой L, соединяющей точки M и N, равняется разности значений функции $u(x, y)$ в этих точках.