# 1. Кратные интегралы

## 1.3. Вычисление двойных интегралов

При вычислении двойного интеграла удобно считать, что область интегрирования $D$ в плоскости $Oxy$ разбита на частичные области двумя системами координатных линий $x = const$ и $y = const$. Тогда частичные области представляют собой прямоугольники со сторонами $\Delta x_i$ и $\Delta y_i$, а частичные площади $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$, поэтому элемент площади $d\sigma$ запишем в виде $d\sigma = dxdy$. Тогда имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \,.$$

При вычислении двойного интеграла будем исходить из того, что объем цилиндрического тела $V$ можно также вычислить с помощью определенного интеграла по формуле:

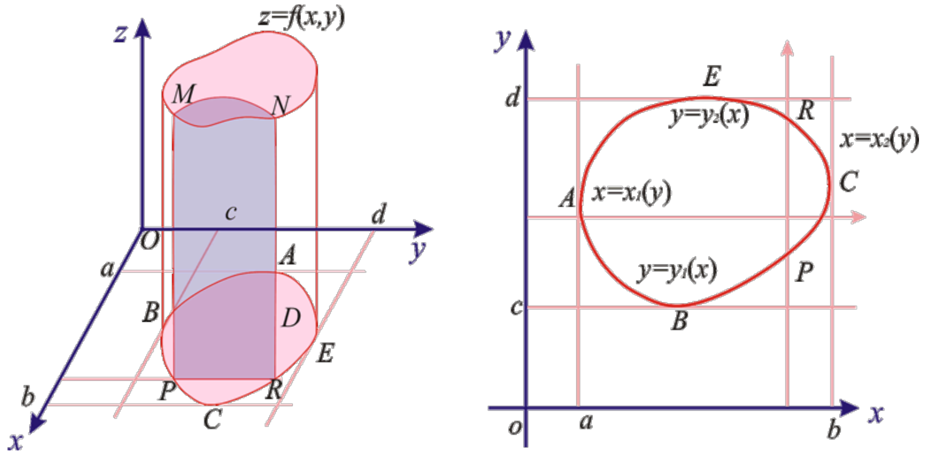
$$V = \int\limits_a^b S(x)dx \,, \tag{3}$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$, а $x = a,\ x = b$ – уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

Предположим, что область интегрирования $D$ удовлетворяет следующему условию: любая прямая, параллельная оси $Ox$ или оси $Oy$, пересекает границу области не более чем в двух точках. Такие области называют **правильными**. В этом случае область $D$ может быть заключена в прямоугольник $a \le x \le b,\ c \le y \le d$, стороны которого касаются ее границ в точках $A,\ B,\ C,\ E$. Точками $A$ и $C$ граница области разбивается на две линии $ABC$ и $AEC$, уравнения которых можно записать в форме, разрешенной относительно $y$:

$$y = y_1(x)\ (ABC)\,,$$

$$y = y_2(x)\ (AEC)\,.$$




Аналогично точками E и $B$ граница разбивается на две линии с уравнениями

$$x = x_1(y)\ (BAE)\,,$$

$$x = x_2(y)\ (BCE)\,.$$

Рассечем рассматриваемое тело плоскостью параллельной плоскости $Oyz$, то есть $x = const$, $a \le x \le b$. В сечении получим криволинейную трапецию $PMNR$, где точка $P$ – точка входа прямой $x = const$ $(z = 0)$ в область $D$, а точка $R$ – точка ее выхода из области $D$.

Из рисунка следует, что координаты этих точек соответственно $P(x, y_1, 0)$ и $R(x, y_2, 0)$. Криволинейная трапеция $PMNR$ сверху ограничена кривой $MN$ – сечением поверхности $z = f(x,y)$ плоскостью $x = const$ с уравнением $z_{MN} = f(x,y)$, где $x = const$ . Тогда площадь поперечного сечения

$$S(x) = \int\limits_{y_P}^{y_R} z_{MN}dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \,,$$

?

а объем цилиндрического тела в соответствии с (3) определяется выражением

$$V = \int\limits_a^b \left[ \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

или в более удобной форме:

$$\iint f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \ . \qquad (4)$$

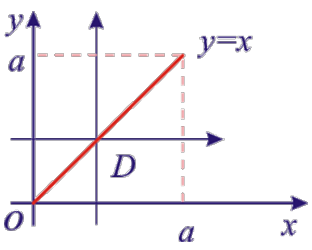
Таким образом, двойной интеграл вычисляется посредством последовательного вычисления двух обыкновенных определенных интегралов, причем во внутреннем интеграле одна из переменных полагается постоянной, а пределы интегрирования – переменные. Интеграл, стоящий в правой части равенства (4), называют двукратным интегралом.

Если в наших рассуждениях поменять местами $x$ и $y$, то двойной интеграл можно вычислить по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x,y)dx \ . \qquad (5)$$

Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к нахождению двукратных интегралов (4) или (5).

**Пример.** Привести к двукратному интегралу двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если область $D$ – треугольник со сторонами $y=0, \ y=x, \ x=0$.




Решение.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^x f(x,y)dy$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^a dx \int_y^a f(x,y)dx \ .$$

Если $f(x,y) = x+y$, то

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x (x+y)dy = \int\limits_0^a \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int\limits_0^a \left( x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} \ ,$$

или

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a (x+y)dx = \int\limits_0^a \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_y^a dy = \int\limits_0^a \left[ \frac{a^2}{2} + ay - \frac{y^2}{2} - y^2 \right] dy = \left( \frac{a^2}{2} y + \frac{ay^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} \ .$$


◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►

?