Содержание

# Тема 6. Элементы логики

## 6.1 Раздел теории

---

**Логические представления** – это описания исследуемой системы, процесса или явления в виде совокупности сложных высказываний, составленных из простых (элементарных) высказываний и логических связок между ними.

---

Логические представления характеризуются законами логики – логически правильными методами рассуждений, представляющими собой наборы свойств и допустимых преобразований логических представлений.

Математическая логика состоит из двух разделов: логики высказываний и логики предикатов. Ниже будут представлены элементы теории логики высказываний.

---

**Высказывание** – это повествовательное предложение, представляющее собой утверждение или суждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

---

Примерами высказываний могут служить научные или политические законы, теоремы, постулаты, формулировки, отражающие жизненные ситуации и т. д. Не являются высказываниями побудительные, вопросительные и не имеющие смысла предложения.

Простым (элементарным) называется неделимое высказывание, не содержащее логических связок. Сложным называется составное высказывание, полученное из простых при помощи логических связок.

Логические связки (в русском языке – союзы) представляют собой основные операции логики высказываний.

Основными логическими связками являются:

1. Конъюнкция ($И$, логическое произведение). Конъюнкцией двух элементарных высказываний называется составное высказывание, истинное, когда оба высказывания истины и ложно во всех остальных случаях.

   Конъюнкция обозначается одним из следующих способов: $A \wedge B, A\ И\ B, A\ and\ B, AB$, где $A, B$ – элементарные высказывания.

2. Дизъюнкция ($ИЛИ$, логическое сложение). Дизъюнкцией двух элементарных высказываний называется составное высказывание, ложное, когда оба высказывания ложны и истинное во всех остальных случаях.

   Дизъюнкция обозначается одним из следующих способов: $A \vee B, A\ ИЛИ\ B, A\ or\ B, A + B$, где $A, B$ – элементарные высказывания.

3. Импликация ($ЕСЛИ...ТО$, логическое следование). Импликацией двух элементарных высказываний называется составное высказывание, ложное, когда первое элементарное высказывание истинно, и истинное во всех остальных случаях.

   Импликация обозначается одним из следующих способов: $A \rightarrow B, A \supset B$, где $A, B$ – элементарные высказывания.

4. Эквивалентность (равнозначность). Эквивалентностью двух элементарных высказываний называется составное высказывание, истинное, когда значения элементарных высказываний совпадают и ложное во всех остальных случаях.

   Эквивалентность обозначается одним из следующих способов: $A \longleftrightarrow B, A \equiv B, A \sim B$ где $A, B$ – элементарные высказывания.

5. Неравнозначность (исключающее $ИЛИ$, сложение по модулю 2). Неравнозначностью двух элементарных высказываний называется высказывание, когда истинные значения элементарных высказываний не совпадают и ложное во всех остальных случаях.

   Неравнозначность обозначается одним из следующих способов: $A \Delta B, A \oplus B$, где $A, B$ – элементарные высказывания.

6. Отрицание ($НЕ$, инверсия). Отрицанием высказывания называется высказывание, ложное, когда заданное высказывание истинно и истинное, когда заданное высказывание ложно.

   Отрицание обозначается одним из следующих способов: $\overline{A}$, $\neg A$, где $A$ – элементарное высказывание.

Логические операции конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, неравнозначность являются бинарными, так как соответствующие логические связки соединяют два простых высказывания в одно сложное.Логическая операция отрицание является унарной, так как логическая связка применима только для одного элементарного высказывания.

Высказывания, выраженные посредством буквенного обозначения элементарных высказываний, логических связок и скобок, называются логическими формулами.

Предпочтительными считаются логические формулы, содержащие меньшее количество отрицаний.

Основными объектами, изучаемыми в алгебре логики, являются логические формулы, состоящие из букв, знаков логических операций и скобок. Примером логической формулы может служить запись вида

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \wedge x_1) \vee (x_1 \oplus (x_1 \vee x_2)).$$

Буквы обозначают логические переменные, которые в алгебре логики могут принимать только два значения: ложь или истина.

Знаки логических операций обозначают действия, которые необходимо проделать над переменными.

Скобки, как и в любой формуле, необходимы для установления порядка проведения операций, в данном случае, логических.

Каждая формула задает логическую функцию, которая, как и входящие в формулу логические переменные, может принимать только два значения: ложь или истина. Таким образом, запись вида

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \wedge x_1) \vee (x_1 \oplus (x_1 \vee x_2)).$$

можно назвать логической функцией (логической функцией трех переменных).

Преобразования над логическими формулами осуществляются при помощи алгебры логики.

---

**Алгебра логики** – это алгебра, образованная множеством $A = \{0,1\}$ вместе со всеми возможными на нем логическими операциями.

---

Наиболее распространены следующие логические операции:

- конъюнкция (логическое умножение);
- дизъюнкция (логическое сложение);
- отрицание (инверсия);
- импликация (логическое следование);
- эквивалентность (равнозначность);
- неравнозначность (сложение по модулю 2);

Существуют и другие логические операции:

- константа 0;
- константа 1;
- стрелка Пирса;
- Штрих Шеффера;
- $\overline{\rightarrow}$ направленное следование 1;
- $\overline{\leftarrow}$ направленное следование 2;
- $\leftarrow$ направление следования.

Каждая логическая операция имеет свое значение для каждого набора переменных (или элементов множества $A = \{0,1\}$): *00, 01, 10, 11*.

В таблице 6.1 представлены значения наиболее распространенных логических операций.

*Таблица 6.1 – Значения логических операций*

| $x_1,x_2$ | $\wedge$ | $\vee$ | $\overline{x}_1$ | $\rightarrow$ | ˜ | $\oplus$ | **0** | **1** | $\downarrow$ | $\mid$ | $\overline{\rightarrow}$ | $\overline{\leftarrow}$ | $\leftarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

В таблице 6.1 приняты обозначения операций:

- $\wedge$ конъюнкция;
- $\vee$ дизъюнкция;
- $\overline{x}$ отрицание;
- $\longrightarrow$ конъюнкция;
- $\sim$ эквивалентность;
- $\oplus$ неравнозначность (сложение по модулю 2);
- 0 константа 0;
- 1 константа 1;
- $\downarrow$ стрелка Пирса;
- $\mid$ Штрих Шеффера;
- $\overline{\rightarrow}$ направленное следование 1;
- $\overline{\leftarrow}$ направленное следование 2;
- $\leftarrow$ направление следования.

Отрицание является унарной операцией, следовательно, осуществляется на одном аргументе, в данном случае на $x_1$. Операция отрицания может также обозначаться символом $\neg$.

Конъюнкция также может обозначаться знаком • (по аналогии с операцией умножения). Иногда знак • опускается.

Среди логических функций наибольшее распространение получили инверсия (отрицание, *NOT, НЕ*), конъюнкция (*AND* или логическое умножение) и дизъюнкция (*OR* или логическое сложение).

Любую логическую функцию можно записать таблицей истинности. Таблица истинности представляется следующим образом:

- левая часть таблицы содержит все возможные значения аргументов (сочетания элементов множества $A = \{0,1\}$);
- правая часть содержит значения операций, осуществленных над аргументами.

Ниже представлен пример таблицы истинности (таблица 6.2) для функции

$$f(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee x_2).$$

*Таблица 6.2 – Пример таблицы истинности для функции* $f(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee x_2)$.

| $x_1,x_2$ | $\overline{x}_1$ | $\overline{x}_1 \vee x_2$ | $(\overline{x}_1 \vee x_2) \to x_3$ |
|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 0 |

Логические функции трех и более переменных также задаются таблицами истинности или формулами.

Например, формула

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \to x_3$$

означает, что функция трех переменных задана формулой, состоящей из символов этих переменных, над которыми выполняются унарная операция отрицания, бинарная операция дизъюнкции, бинарная операция логического следования. Таблица истинности (таблица 6.3) для приведенной формулы представлена ниже.

*Таблица 6.3 – Пример таблицы истинности для функции* $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \to x_3$

| $x_1, x_2, x_3$ | $\overline{x}_1$ | $\overline{x}_1 \vee x_2$ | $(\overline{x}_1 \vee x_2) \to x_3$ |
|---|---|---|---|
| 000 | 1 | 1 | 0 |
| 001 | 1 | 1 | 1 |
| 010 | 1 | 1 | 0 |
| 011 | 1 | 1 | 1 |
| 100 | 0 | 0 | 1 |
| 101 | 0 | 0 | 1 |
| 110 | 0 | 1 | 0 |
| 111 | 0 | 1 | 1 |

В общем случае формула описывает логическую функцию как суперпозицию других, более простых функций.

Эквивалентными или равносильными называются формулы, представляющие одну и ту же функцию, однако, имеющие разную структуру.

Метод установления эквивалентности формул сводится к восстановлению таблиц истинности и их сравнения. Эквивалентность формул обозначается знаком равенства.