5. Кратные интегралы и теория поля: Свойства двойных интегралов, их геометрический смысл

1. Кратные интегралы

1.2. Свойства двойных интегралов, их геометрический смысл

Перечислим свойства двойного интеграла:

1. свойство линейности, связанное с операциями над функциями: двойной интеграл от линейной комбинации функций по области D равен линейной комбинации двойных интегралов от этих функций по той же области:

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y)d\sigma + \beta \iint_D g(x,y)d\sigma \ ;$$

2. свойство аддитивности двойного интеграла по области D: если область D разбита на неперекрывающиеся области D_1 и D_2, причем $D = D_1 + D_2$, то

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma \ ;$$

3. если во всех точках области D функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют неравенству $f(x,y) \geq g(x,y)$, то

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \geq \iint_D g(x,y)d\sigma \ ;$$

4. если функция $f(x,y)$ во всех точках области интегрирования D удовлетворяет неравенствам $m \leq f(x,y) \leq M$, то

$$mS_D < \iint_D f(x,y)d\sigma < MS_D \ ;$$

   где S_D – площадь области D;

5. двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке (ξ,η) области D на площадь области интегрирования:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S_D$$

Значение $f(\xi,\eta)$ называют средним значением функции $f(x,y)$ в области D.

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл $\iint_D f(x,y)d\sigma$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$, взятому со знаком "+", если $f(x,y) > 0$ на всей области D, и взятому со знаком "−", если $f(x,y) < 0$ в области D .

Если всюду в области D подынтегральная функция равна 1, то двойной интеграл равен площади S_D области интегрирования, то есть