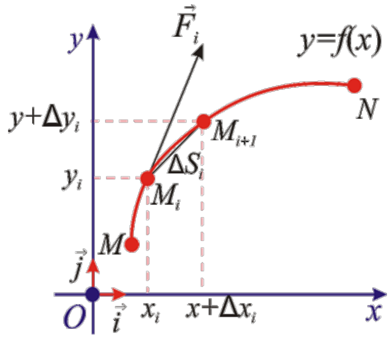
3. Криволинейные интегралы

3.1. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам)

Пусть точка $P(x, y)$ движется по плоской линии L от точки M к точке N под действием силы $\vec{F}$ меняющейся по величине и направлению при перемещении точки P. Вычислим работу A силы $\vec{F}$ при перемещении точки P из положения M в положение N. Для этого разобьем кривую MN на n произвольных частей точками $M_0 = M,\ M_1\ M_2,\ \ldots,\ M_i,\ \ldots,\ M_n = N$ в направлении от M к N и обозначим через $\overrightarrow{\Delta s_i}$ вектор $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$. Величину силы $\vec{F}$ в точке M_i обозначим $\vec{F}_i$.



Работа силы $\vec{F}_i$ вдоль дуги $M_i M_{i+1}$ приближенно равна $A_i = \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}$. При этом считаем, что сила постоянна при перемещении из M_i в M_{i+1}, и криволинейный путь $M_i M_{i+1}$ заменяем вектором $\overrightarrow{\Delta s_i}$. Пусть $\vec{F} = F_x(x,y)\vec{i} + F_y(x,y)\vec{j}$, где $F_x(x,y)$ и $F_y(x,y)$ – проекции вектора $\vec{F}$ на оси Ox и Oy соответственно. Вектор $\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i \vec{i}| + \Delta y_i \vec{j}$. Тогда $A_i = F_x(x_i, y_i)\Delta x_i + F_y(x_i, y_i)\Delta y_i$.

Приближенное значение работы A силы $\vec{F}$ на всей кривой MN можно найти как сумму

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \left[F_x(x_i, y_i)\Delta x_i + F_y(x_i, y_i)\Delta y_i\right]\ . \tag{1}$$

Переходя к пределу интегральной суммы (1) при $\Delta s_i \to 0$, получим точное выражение для работы A силы $\vec{F}$:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left[F_x(x_i, y_i)\Delta x_i + F_y(x_i, y_i)\Delta y_i\right]\ . \tag{2}$$

Предел, стоящий в правой части равенства (2), называют криволинейным интегралом второго рода от $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ по кривой L и обозначают

$$A = \int\limits_L F_x dx + F_y dy\ . \tag{3}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода:

1. криволинейный интеграл определяется подынтегральным выражением, формой кривой интегрирования и указанием направления интегрирования, причем:

$$\int\limits_{MN} F_x dx + F_y dy = -\int\limits_{NM} F_x dx + F_y dy\ ;$$

2. если кривую L разбить на две части точкой K, так что $MN = MK + KN$, то:

$$\int\limits_{MN} F_x dx + F_y dy = \int\limits_{MK} F_x dx + F_y dy + \int\limits_{KN} F_x dx + F_y dy\ .$$

Если кривая L замкнута, то есть точки M и N совпадают, то криволинейный интеграл по замкнутому контуру обозначают $\oint\limits_L F_x dx + F_y dy$.

◄ Вопросы преподавателю

?