**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Тульский государственный университет»**

**Интернет-институт**

РАСЧЕТНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Математика»

Семестр 4

Вариант 3


Выполнил: студент гр. ИБ262521-ф

Артемов Александр Евгеньевич

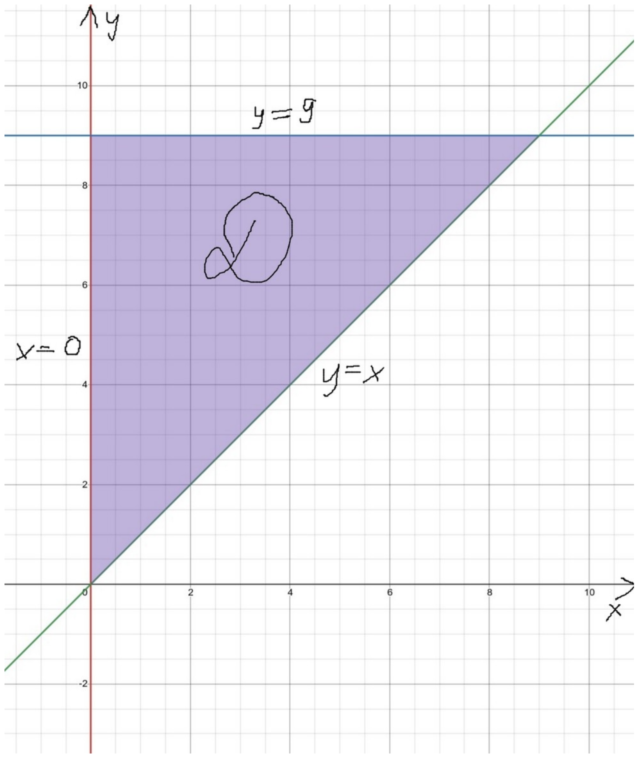
Проверил: канд. физ.-мат. наук, доц.

Христич Дмитрий Викторович


Тула 2024

1. Вычислить $\iint\limits_D 10y^2\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dxdy$ , если D ограничена линиями: $x = 0,\ y = 9,\ y = x.$

**Решение:**




$0 \le y \le 9$ , $0 \le x \le y$

$$\iint\limits_D 10y^2\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dxdy = \int\limits_0^9 dy\int\limits_0^y 10y^2\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dx = \int\limits_0^9 dy\int\limits_0^y 10y^2\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dx$$

Рассмотрим отдельно $\int\limits_0^y 10y^2\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dx$ :

$$\int\limits_0^y 10y^2\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dx = 10y^2\int\limits_0^y \cos\left(\frac{xy}{2}\right)dx = \left|\begin{matrix} U=\frac{xy}{2} \\ x=\frac{2U}{y} \\ dx=\frac{2}{y}dU \end{matrix}\right| = 10y^2\int\limits_0^y \cos U\,\frac{2}{y}\,dx = 20y\int\limits_0^y \cos U\,dx =$$

$$20y\sin U = 20y\sin\frac{xy}{2}\Big|_0^y = 20y\sin\frac{y^2}{2}$$

Подставим результат в $\int\limits_0^9 dy\int\limits_0^y 10y^2\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dx$ :

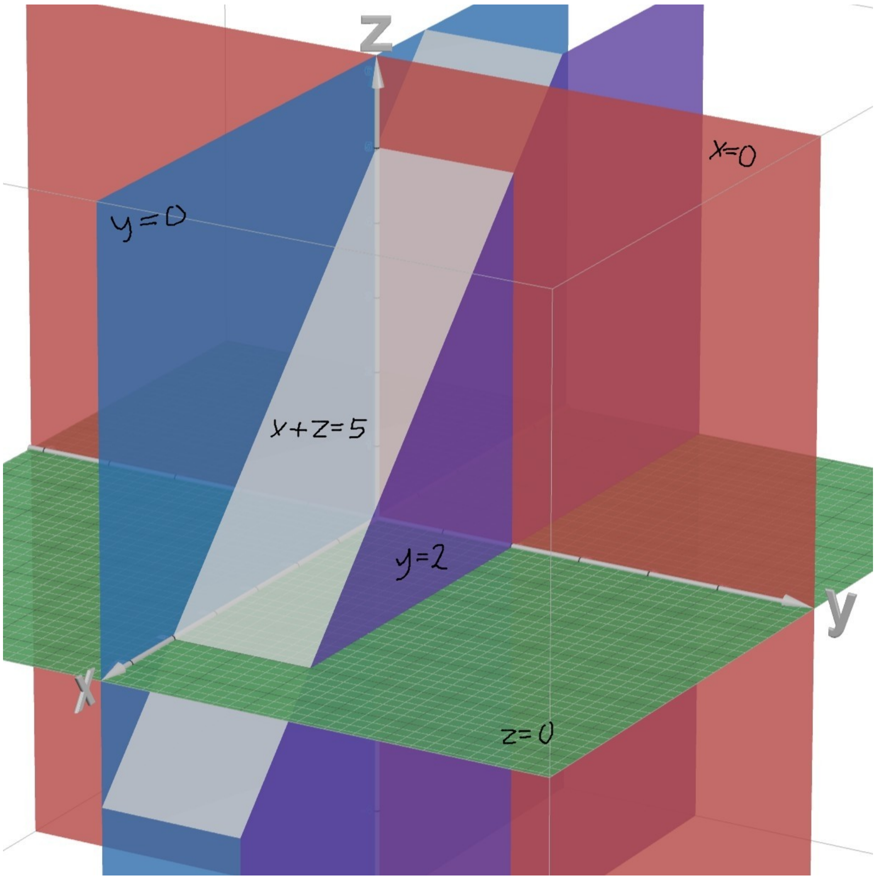
$$\int\limits_0^9 20y\sin\frac{y^2}{2}dy = \left|\begin{matrix} x=\frac{y^2}{2} \\ dx=ydy \end{matrix}\right| = 20\int\limits_0^9 \sin x\,dx = -20\cos x = -20\cos\frac{y^2}{2}\Big|_0^9 = -20\cos\frac{81}{2} + 20 \approx 38{,}85$$

**Ответ: 38,85**.

2. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(6x+2y+5z+1)^3}$, если область интегрирования ограничена поверхностями $V: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+z=5,\ y=2.$

**Решение:**

Рассмотрим эскиз:




Из эскиза видно, что $0\le x\le 5,\ 0\le y\le 2,\ z=5-x$, откуда:

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(6x+2y+5z+1)^3} = \int\limits_0^5 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{5-x} \frac{dz}{(6x+2y+5z+1)^3}$$

Рассмотрим отдельно $\int\limits_0^{5-x} \frac{dz}{(6x+2y+5z+1)^3}$ :

$$\int\limits_0^{5-x} \frac{dz}{(6x+2y+5z+1)^3} = \frac{1}{5}\int\limits_0^{5-x} (6x+2y+5z+1)^{-3} d(5z) = -\frac{1}{10(6x+2y+5z+1)^2}\Bigg|_0^{5-x} =$$

$$= \frac{1}{10(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{10(6x+2y+26)^2}$$

Рассмотрим отдельно $\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{10(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{10(6x+2y+26)^2}\right) dy$ :

$$\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{10(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{10(6x+2y+26)^2}\right) dy = \frac{1}{10}\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{(6x+2y+26)^2}\right) dy =$$

$$=\frac{1}{10}\int_0^2\frac{dy}{(6x+2y+1)^2}-\frac{1}{10}\int_0^2\frac{dy}{(6x+2y+26)^2}=\left.\frac{1}{20(6x+2y+1)}\right|_0^2-\left.\frac{1}{20(6x+2y+26)}\right|_0^2=$$

$$=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{6x+5}-\frac{1}{6x+1}-\frac{1}{x+30}+\frac{1}{x+26}\right)$$

Рассмотрим отдельно $\int_0^5\frac{1}{20}\left(\frac{1}{6x+5}-\frac{1}{6x+1}-\frac{1}{x+30}+\frac{1}{x+26}\right)dx$ :

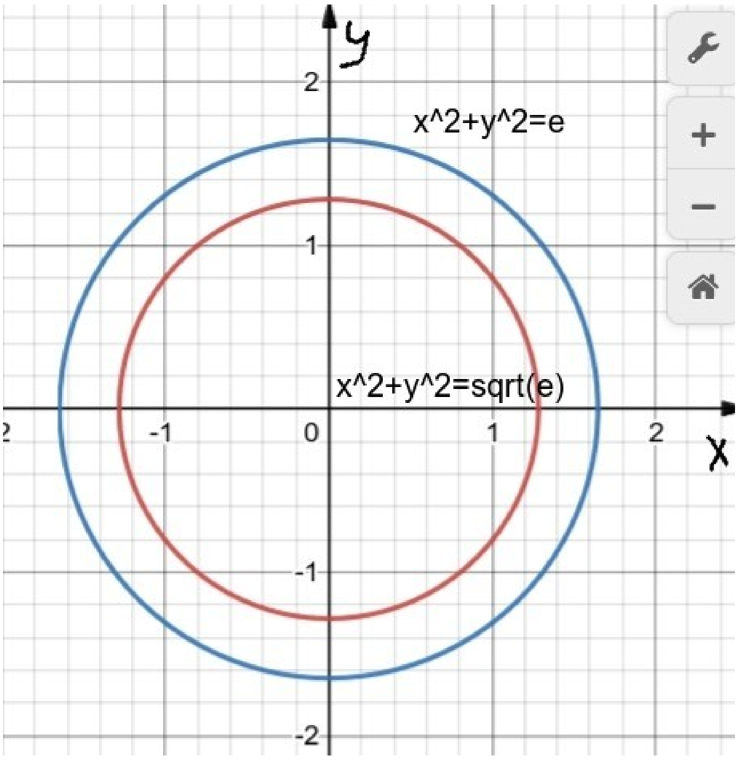
$$\int_0^5\frac{1}{20}\left(\frac{1}{6x+5}-\frac{1}{6x+1}-\frac{1}{x+30}+\frac{1}{x+26}\right)dx=\left.\frac{1}{20}\left(\frac{\ln|6x+5|}{6}-\frac{\ln|6x+1|}{6}-\ln|x+30|+\ln|x+26|\right)\right|_0^5=$$

$$=\frac{1}{120}(\ln 35-\ln 31-6\ln 35+6\ln 31-\ln 5+\ln 1+6\ln 30-6\ln 26)=-0{,}0113136$$

**Ответ**: -0,0113136.

3. Вычислить $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$, если область $D$ ограничена линиями $D: x^2+y^2=\sqrt{e},\ x^2+y^2=e$ .

**Решение:**




Перейдем к полярным координатам, выполним замену переменных:

$$\left.\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ x=\rho\sin\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$$

Заметим, что $0\le\varphi\le2\pi$ , а $\sqrt[4]{e}\le\rho\le\sqrt{e}$ .

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy=\iint\limits_D \ln\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} d\rho\int\limits_0^{2\pi}\ln\rho^2\cdot\rho\,d\varphi=\int\limits_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} d\rho\left[\ln\rho^2\cdot\rho\cdot\varphi\right]\Big|_0^{2\pi}=$$

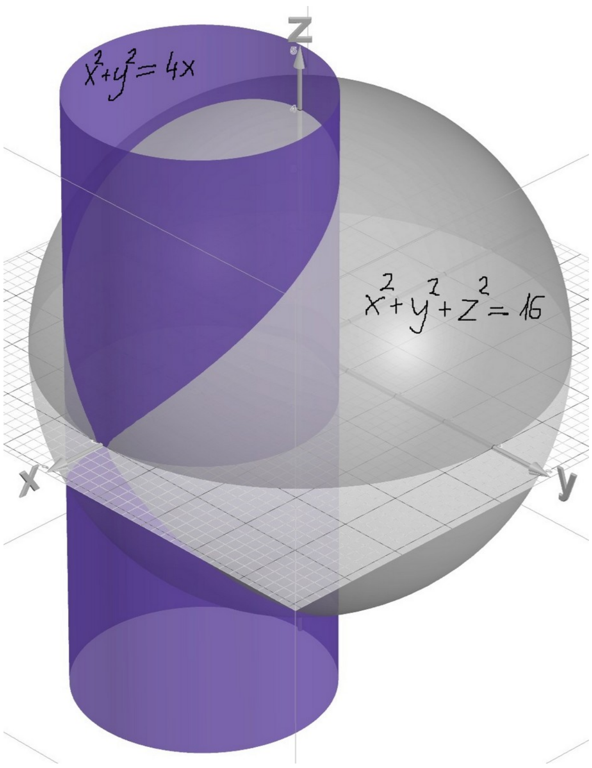
$$=2\pi\int\limits_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}}\ln\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\begin{vmatrix} u=\ln\rho & dv=\rho\,d\rho \\ du=\dfrac{d\rho}{\rho} & v=\int\rho\,d\rho=\dfrac{\rho^2}{2}\end{vmatrix}=2\pi\left(\rho^2\ln\rho-\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}}=$$

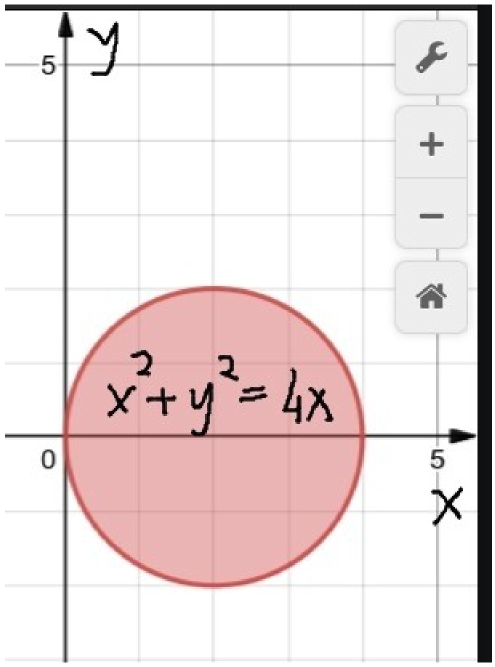
$$=2\pi\left(e\ln\sqrt{e}-\frac{e}{2}-\left(\sqrt{e}\ln\sqrt[4]{e}-\frac{\sqrt{e}}{2}\right)\right)=2\pi\left(\frac{e}{2}-\frac{e}{2}-\frac{\sqrt{e}}{4}+\frac{\sqrt{e}}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{e}}{2}$$

**Ответ:** $\dfrac{\pi\sqrt{e}}{2}$

4. Вычислить объем V тела, ограниченного поверхностями $V: x^2+y^2=4x, x^2+y^2+z^2=16$

**Решение:**




$$x^2+y^2+z^2=16 \;\Rightarrow\; z^2=16-x^2-y^2 \;\Rightarrow\; z=\sqrt{16-x^2-y^2}$$

Объем тела вычисляется как $V_T = \iiint\limits_V dxdydz$ .

Перейдем к цилиндрическим координатам, выполним замену переменных:

$$\left.\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ x=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+y^2 = 4x \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi = 4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = 4\cos\varphi \\ z=\sqrt{16-\rho^2} \end{matrix}\right. .$$

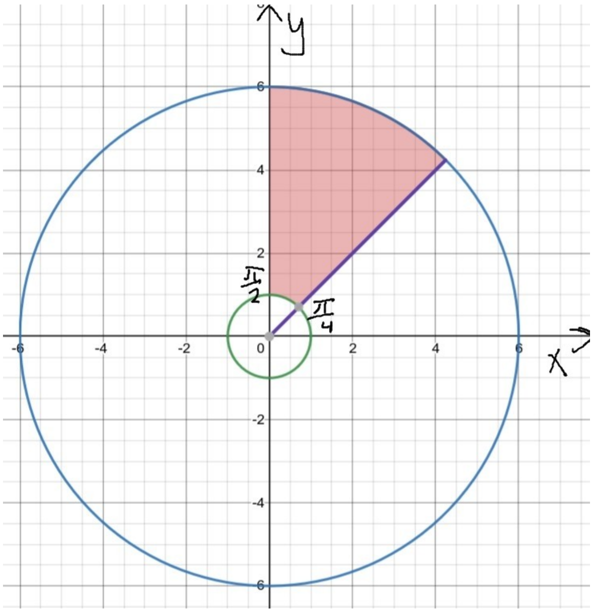
$$V_T = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} d\rho \int\limits_{-\sqrt{16-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\, dz = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} 2\rho\sqrt{16-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{128}{3}\left(1+\sin^3\varphi\right) d\varphi = \frac{128\pi}{3} \quad .$$

**Ответ:** $\dfrac{128\pi}{3}$ .

5. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz$ ; $V:\ 1\le x^2+y^2\le 36,\ x\ge 0,\ y\ge x,\ z\ge 0$ .

**Решение:**




По условию задачи тело V не имеет ограничивающей поверхности сверху, поэтому границы интегрирования по dz не заданы.

Перейдем к цилиндрическим координатам, выполним замену переменных:

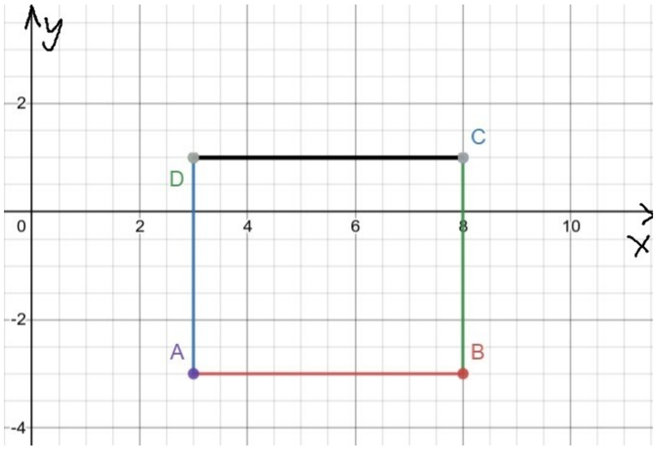
$$\left.\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ x=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1\le\rho\le 6 \\ \dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases} .$$

$$\iiint\limits_V z^2\,dxdydz = \int_1^6 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \rho z^2\,dz = \int_1^6 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho z^3}{3}\,d\varphi = \int_1^6 \frac{\pi\rho z^3}{12}\,d\rho = \left.\frac{\pi\rho^2 z^3}{24}\right|_1^6 = \frac{35\pi z^3}{24}$$

**Ответ:** $\dfrac{35\pi z^3}{24}$

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x,y)=-2x-3xy+4y$ по контуру прямоугольника с вершинами $A(3,-3),\ B(8,-3),\ C(8,1),\ D(3,1)$.

**Решение:**




Перейдем к уравнениям сторон прямоугольника ABCD, заданных параметрически.

$\begin{cases} x=a_2t+a_1 \\ y=b_2t+b_1 \end{cases}$, где $a_1$ и $b_1$ - координаты начальной точки стороны, а $a_2$ и $b_2$ - расстояние до конечной точки по координатам x и y соответственно.

Криволинейный интеграл высчитывается по формуле:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y(t))^2}\,dt$$ , где $\alpha\le t\le\beta$

**1. Рассмотрим сторону AB:**

Исходя из координат $A(3,-3),\ B(8,-3)$ получим $\begin{cases} x=5\text{t}+3 \\ y=0\text{t}-3 \end{cases}$, где $0\le t\le 1$.

$$f(x(t),y(t)) = f((5t+3),-3) = -2(5t+3)-3(5t+3)(-3)+4(-3) = 35t+9$$

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{0}^{1} (35t+9)\cdot\sqrt{(5)^2+(0)^2}\,dt = 175\int\limits_{0}^{1} t\,dt+45\int\limits_{0}^{1} dt = \left(\frac{175t^2}{2}+45t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{265}{2}.$$

**2. Рассмотрим сторону BC:**

Исходя из координат $B(8,-3),\ C(8,1)$ получим $\begin{cases} x=0t+8 \\ y=4t-3 \end{cases}$, где $0\le t\le 1$.

$$f(x(t),y(t)) = f(8,(4t-3)) = -2\cdot 8-3\cdot 8(4t-3)+4(4t-3) = -80t+44$$

$$\int\limits_{L_{BC}} f(x,y)dl = \int\limits_{0}^{1} (-80t+44)\cdot\sqrt{(0)^2+(4)^2}\,dt = -320\int\limits_{0}^{1} t\,dt+176\int\limits_{0}^{1} dt = \left(-160t^2+176t\right)\Big|_0^1 = 16.$$

**3. Рассмотрим сторону CD:**

Исходя из координат $C(8,1),\ D(3,1)$ получим $\begin{cases} x=-5t+8 \\ y=0t+1 \end{cases}$, где $0\le t\le 1$.

$$f(x(t),y(t)) = f((-5t+8),1) = -2(-5t+8)-3(-5t+8)+4 = 25t-36$$

$$\int\limits_{L_{CD}} f(x,y)\,dl = -\int\limits_0^1 (25t-36)\cdot\sqrt{(-5)^2+(0)^2}\,dt = -125\int\limits_0^1 t\,dt + 180\int\limits_0^1 dt = \left(-\frac{160t^2}{2}+180t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{235}{2}\ .$$

**4. Рассмотрим сторону DA:**

Исходя из координат $D(3,1),\ A(3,-3)$ получим $\begin{cases} x=0t+8 \\ y=-4t+1 \end{cases}$, где $0\le t\le 1$ .

$$f(x(t),y(t)) = f(3,(-4t+1)) = -2\cdot3-3\cdot3(-4t+1)+4(-4t+1) = 20t-5$$

$$\int\limits_{L_{DA}} f(x,y)\,dl = \int\limits_0^1 (20t-5)\cdot\sqrt{(0)^2+(-4)^2}\,dt = 80\int\limits_0^1 t\,dt + 20\int\limits_0^1 dt = \left(40t^2-20t\right)\Big|_0^1 = 20\ .$$

$$L_{ABCD} = L_{AB}+L_{BC}+L_{CD}+L_{DA} = \frac{265}{2}+\frac{235}{2}+16+20 = 286\ .$$

**Ответ:** $L_{ABCD} = 286$

7. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S (5x^2+5y^2-5z^2-2)\,d\sigma$ , где S — часть конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ , лежащая между плоскостями $z=2,\ z=7$ .

**Решение:**

Для вычисления поверхностного интеграла используем формулу:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_S f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2}\,dxdy$$

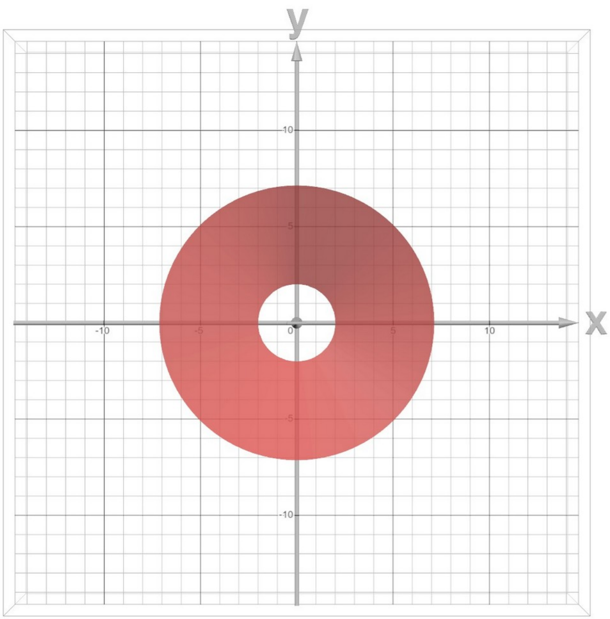
$$\frac{\delta z}{\delta x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,\quad\frac{\delta z}{\delta y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy\ .$$

Заменим $d\sigma$ и z в изначальном поверхностном интеграле:

$$\iint\limits_S (5x^2+5y^2-5z^2-2)\,d\sigma=\iint\limits_S (5x^2+5y^2-5\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2-2)\sqrt{2}\,dxdy=-2\sqrt{2}\iint\limits_S dxdy\ .$$

Рассмотрим область D — проекцию поверхности S на плоскость Oxy в полярных координатах:




Очевидно, что радиус проекции изменяется от 2 до 7, а угол от 0 до 2π.

$$\iint\limits_S (5x^2+5y^2-5z^2-2)\,d\sigma=-2\sqrt{2}\iint\limits_S dxdy=-2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_2^7\rho\,d\rho=-2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{45}{2}\,d\varphi=$$

$$=-2\sqrt{2}\,\frac{45}{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi}=-90\sqrt{2}\pi\ .$$

**Ответ:** $-90\sqrt{2}\pi$ **.**

8. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u=\ln(9x^2+7y^2+6z^2)$ в точке $M_0(1;5;7)$ .

**Решение:**

Наибольшая скорость возрастания скалярного поля $max\frac{\delta u}{\delta\lambda}=|\overrightarrow{grad}u(M_o)|$ .

$$\overrightarrow{grad}u(M_o)=\frac{\delta u}{\delta x}\bigg|_{M_0}\cdot\vec{i}+\frac{\delta u}{\delta y}\bigg|_{M_0}\cdot\vec{j}+\frac{\delta u}{\delta z}\bigg|_{M_0}\cdot\vec{k}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}\bigg|_{M_0}=(\ln(9x^2+7y^2+6z^2))'_x=\frac{18x}{9x^2+7y^2+6z^2}=\frac{18\cdot1}{9\cdot1+7\cdot25+6\cdot49}=\frac{9}{239}\ .$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}\bigg|_{M_0}=(\ln(9x^2+7y^2+6z^2))'_y=\frac{14y}{9x^2+7y^2+6z^2}=\frac{14\cdot5}{9\cdot1+7\cdot25+6\cdot49}=\frac{35}{239}\ .$$

$$\frac{\delta u}{\delta z}\bigg|_{M_0}=(\ln(9x^2+7y^2+6z^2))'_z=\frac{16z}{9x^2+7y^2+6z^2}=\frac{16\cdot7}{9\cdot1+7\cdot25+6\cdot49}=\frac{56}{239}\ .$$

$$\overrightarrow{grad}u(M_o)=\left\{\frac{9}{239},\frac{35}{239},\frac{56}{239}\right\}$$

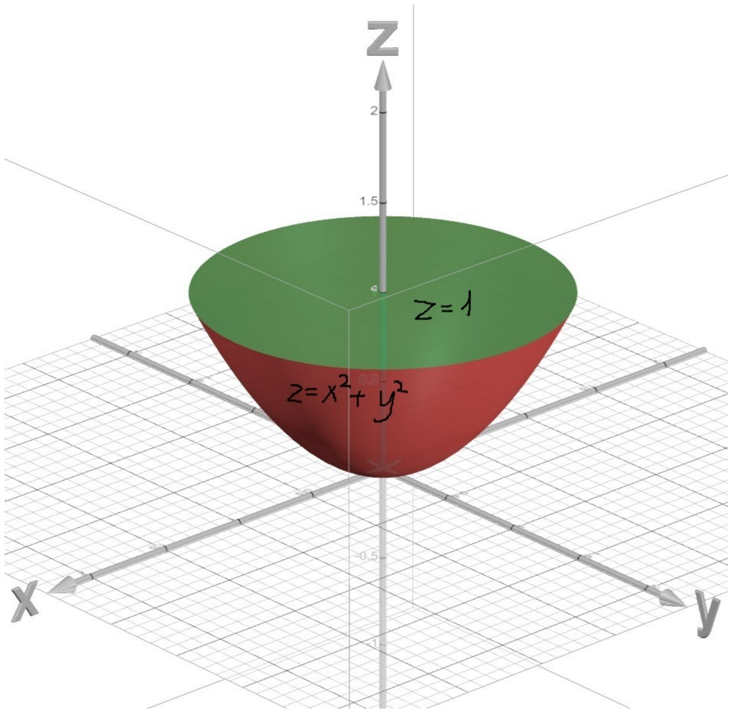
$$|\overrightarrow{grad}u(M_o)|=\sqrt{\left(\frac{9}{239}\right)^2+\left(\frac{35}{239}\right)^2+\left(\frac{56}{239}\right)^2}=\frac{\sqrt{4442}}{239}$$

Значит, $max\frac{\delta u}{\delta\lambda}=\frac{\sqrt{4442}}{239}$

**Ответ:** $\frac{\sqrt{4442}}{239}$ .

9. Найти поток векторного поля $\vec{a} = 7xy\,\vec{i} + 5yz\,\vec{j} + 8xz\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность S: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ в направлении внешней нормали.

**Решение:**




Представим поле как $\vec{a} = (P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)) = (7xy,\, 5yz,\, 8xz)$ .

Дивергенция поля $div\,\vec{a} = \frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z} = 7x + 5z + 8x$ .

Поток векторного поля $\Pi = \iint\limits_S \vec{a}\,dS = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dV = \iiint\limits_V (7y + 5z + 8x)\,dV$

Перейдем к цилиндрическим координатам, выполним замену переменных:

$$\left.\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\ z = x^2 + y^2 = \rho^2 \\ 7y + 5z + 8x = 7\rho\sin\varphi + 5z + 8\rho\cos\varphi \end{matrix}\right. .$$

$$\Pi = \iiint\limits_V (7y + 5z + 8x)\,dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_0^{\rho^2} (7\rho\sin\varphi + 5z + 8\rho\cos\varphi)\,\rho\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(7\rho^4\sin\varphi + \frac{5\rho^5}{2} + 8\rho^4\cos\varphi\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{7}{5}\sin\varphi + \frac{5}{12} + \frac{8}{5}\cos\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{7}{5}\cos\varphi + \frac{5\varphi}{12} + \frac{8}{5}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \left(-\frac{7}{5} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7}{5}\right) = \frac{5\pi}{6} .$$

**Ответ:** $\frac{5\pi}{6}$ .

10. Найти ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{a} = -2(z^2+y^2)\vec{i} - (z^2+x^2)\vec{j} - 5(x^2+y^2)\vec{k}$ в точке $M_0(-2;-4;5)$ . Является ли данное поле потенциальным или соленоидальным?

**Решение:**

Представим поле как $\vec{a}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))=(-2(z^2+y^2),-(z^2+x^2),-5(x^2+y^2))$ .

Дивергенция поля $div\,\vec{a} = \frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z} = 0+0+0 = 0$ , $div\,\overrightarrow{a_{M_0}} = 0$ - поле соленоидальное.

Ротор поля $rot\,\vec{a} = \left(\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\delta P}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y}\right)\vec{k} =$

$= (-10y+2z)\vec{i}+(-4z+10x)\vec{j}+(-2x+4y)\vec{k}$ .

В точке $M_0(-2;-4;5)$ $rot\,\overrightarrow{a_{M_0}} = (-10(-4)+2\cdot 5)\vec{i}+(-4\cdot 5+10(-2))\vec{j}+(-2(-2)+4(-4))\vec{k} =$

$= -30\vec{i}-40\vec{j}-12\vec{k} \neq 0$ - поле не является потенциальным.

**Ответ:** Ротор поля $rot\,\vec{a} = -30\vec{i}-40\vec{j}-12\vec{k} \neq 0$ - поле не является потенциальным; дивергенция поля $div\,\overrightarrow{a_{M_0}} = 0$ - поле соленоидальное.

11. Из колоды в 36 карт вынимают по одной три карты. Найти вероятность того, что в порядке появления в руках окажутся: шестерка, семерка, восьмерка.

**Решение:**

Вероятность, что 1-ая вынутая карта — шестерка: $P_Ш = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ , где 4 — количество шестерок в колоде, а 36 — количество карт всего.

Вероятность, что 2-ая вынутая карта — семерка: $P_С = \frac{4}{35}$ , где 4 — количество семерок в колоде, а 35 — количество карт после извлечения шестерки.

Вероятность, что 3-ья вынутая карта — восьмерка: $P_В = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$ , где 4 — количество семерок в колоде, а 34 — количество карт после извлечения шестерки и семерки.

Итого, вероятность предложенной ситуации $P = P_Ш \cdot P_С \cdot P_В = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{35} \cdot \frac{2}{17} = \frac{8}{5355}$ .

**Ответ:** $\frac{8}{5355}$ .

12. В цехе работают 15 человек, из которых 10 мужчин. По табельным номерам наудачу отобраны 9 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

**Решение:**

Найдем количество сочетаний выборки 9 человек из 15:

$$C_{15}^{9} = \frac{15!}{9!\cdot 6!} = 5005$$

Найдем количество сочетаний выборки 3 женщин из 5:

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$$

Найдем количество сочетаний выборки 6 мужчин из 10:

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$$

Вероятность нахождения 3 женщин среди 9 отобранных составит:

$$P = \frac{10\cdot 210}{5005} \approx 0{,}4196$$

**Ответ:** $\approx 0{,}4196$

13. Заготовки на сборку поступают из двух бункеров: 70% из первого и 30% из второго. При этом заготовки первого бункера имеют плюсовые допуски в 1 % случаев, а у второго – в 2 %. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь имеет плюсовой допуск.

**Решение:**

Вероятность взять деталь из 1-го бункера $P_1 = 0{,}7$ .

Вероятность взять деталь из 1-го бункера с плюсовым допуском $P_1^+ = 0{,}01$ .

Вероятность взять деталь из 2-го бункера $P_2 = 0{,}3$ .

Вероятность взять деталь из 2-го бункера с плюсовым допуском $P_2^+ = 0{,}02$ .

Вероятность взять случайную деталь с плюсовым допуском:

$$P = P_1 \cdot P_1^+ + P_2 \cdot P_2^+ = 0{,}7 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}013 .$$

**Ответ:** 0,013.

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут не менее 5 попаданий?

**Решение:**

Используем формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для расчета вероятности пяти, шести, семи или восьми попаданий, где $n$ - количество повторных событий, $k$ - количество успешных событий, $p$ - вероятность успешного события, $q=1-p$ - вероятность не успешного события.

Вероятность пяти попаданий, где $n=8,\ k=5,\ p=0.6,\ q=0.4$

$$P_8(5) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}2787$$

Вероятность шести попаданий, где $n=8,\ k=6,\ p=0.6,\ q=0.4$

$$P_8(6) = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot 0{,}6^6 \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}2090$$

Вероятность семи попаданий, где $n=8,\ k=7,\ p=0.6,\ q=0.4$

$$P_8(7) = \frac{8!}{7! \cdot 1!} \cdot 0{,}6^7 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}0896$$

Вероятность восьми попаданий, где $n=8,\ k=8,\ p=0.6,\ q=0.4$

$$P_8(8) = \frac{8!}{8! \cdot 0!} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^0 \approx 0{,}0168$$

Так как события несовместные, искомая вероятность может быть найдена по формуле сложения вероятностей пяти, шести, семи и восьми попаданий:

$$P = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = 0{,}2787 + 0{,}2090 + 0{,}0896 + 0{,}0168 = 0{,}5941 \ .$$

**Ответ:** 0,5941

15. Дано следующее распределение дискретной случайной величины X:

| **X** | -1 | 1 | 3 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| **P** | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,14 | 0,1 |

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

**Решение:**

1. Математическое ожидание $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

$M(X)=(-1)\cdot 0,1+1\cdot 0,3+3\cdot 0,3+4\cdot 0,14+10\cdot 0,16=3,26$

2. Дисперсия $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$

$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i=(-1)^2\cdot 0,1+1^2\cdot 0,3+3^2\cdot 0,3+4^2\cdot 0,14+10^2\cdot 0,16=21,34$

$D(X)=21,34-(3,26)^2=10,7124$

2. Среде квадратичное отклонение $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{10,7124}\approx 3,273$

**Ответ**: $M(X)=3,26$ , $D(X)=10,7124$ , $\sigma_x\approx 3,273$