Содержание

2. Теоретические сведения и методические указания к выполнению работы

Линейное программирование – численный метод решения задач нахождения экстремума линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

Первые исследования по линейному программированию были проведены в 30-е годы в Ленинградском университете акад. Л.В.Канторовичем, Термин «линейное программирование» появился в 1951 г. в работах американских ученых Дж.Б.Данцига и Т.Купманса.

Математически задача линейного программирования ставится следующим образом: необходимо найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, доставляющих экстремум целевой функции:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

при наличии ограничений:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array}\right\}$$

Целевую функцию называют также линейной формой; а ограничения, представляющие систему линейно независимых уравнений, – системой ограничений.

На переменные x_i наложено ограничение неотрицательности, т. е. x_i > 0 однако и таких решений имеется бесчисленное множество. Задача линейного программирования состоит в выборе из этого множества одного решения, которое обращает в минимум линейную форму.

В ряде случаев все или некоторые ограничения задаются в виде неравенств:

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \text{ или } a_{j1}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \qquad (1)$$

которые превращаются в равенства введением дополнительной переменной

При решении задач линейного программирования часто пользуются геометрическими интерпретациями.

Неравенства (1) определяют в пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$, выпуклую область – выпуклый многогранник или многоугольник. Рассмотрим для простоты случай двух переменных: x_1 и x_2 для которых справедлива система ограничений:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array}\right\}$$

Каждое из этих соотношений определяет область, лежащую по одну сторону от прямой:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_i - 0.$$

На рисунке 2.1, а заштрихована выпуклая область значений x_1 и x_2. Линейная форма в случае двух переменных запишется в виде:

$$Z = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Это уравнение прямой в плоскости x_1, x_2 пересекающее оси x_1 и x_2 соответственно в точках Z / a_1 и Z / a_2 (см. рисунок 2.1, б).

Величины a_1 и a_2 определяют угол наклона прямой a. Действительно:

$$\cos\alpha = a_1 / \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Расстояние от начала координат до прямой:

$$d = Z / \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Геометрически задача линейного программирования интерпретируется следующим образом. Если требуется найти такие x_1 и x_2, которые придали бы линейной форме минимальное значение, то геометрически это означает, что необходимо провести прямую Z, проходящую хотя бы через одну точку области и имеющую минимальное расстояние d от начала координат. В случае нахождения максимума целевой функции это расстояние должно быть максимальным.

Таким образом, оптимальное решение всегда находится в точке пересечения граней многогранника ограничивающих условий. Если число ограничений больше двух, то это приведет к увеличению числа граней многоугольника. Для случая трех видов продукции (трехмерное пространство) геометрическая интерпретация задачи затруднена и вообще невозможна для n-мерного пространства (n>3).

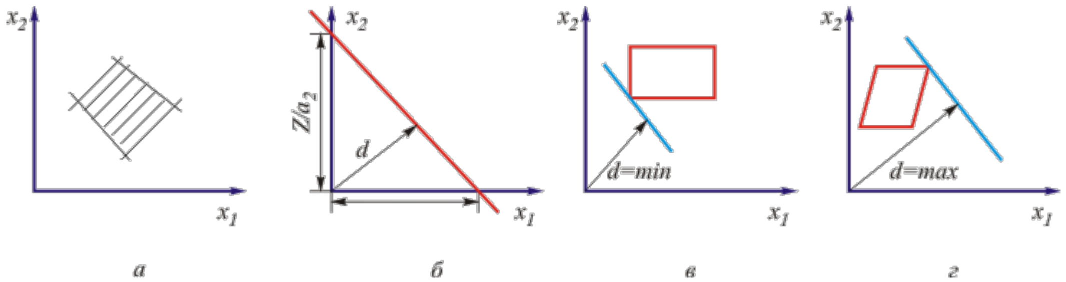

Рисунок 2.1 – Геометрическая интерпретация линейного программирования.

Пример 1. Завод выпускает два вида изделий Y_1 и Y_2 системы управления, используя для этой цели два вида технологических линеек $ТЛ_1$и $ТЛ_2$. На производство одного Y_1 на $ТЛ_1$ затрачивается 2 ч, а на $ТЛ_2$ – 1 ч; на изготовление одного Y_2 затрачивается соответственно 1 и 2 ч. Завод может использовать $ТЛ_1$ в течение 10, а $ТЛ_2$ в течение 8 ч. Прибыль от реализации одного Y_1, составляет 5, а от реализации одного Y_2 – 4 руб. Определить количество x_1 узлов Y_1 и количество x_2 узлов Y_2, которое необходимо выпустить заводу с тем, чтобы: 1) был полностью использован весь фонд времени двух технологических линеек; 2) завод получил максимальную прибыль.

Решение. Целевую функцию запишем в виде:

$$Z = 5x_1 + 4x_2.$$

Ограничения имеют вид:

$$\underset{ТЛ_1}{2x_1 + x_2 = 10;} \quad \underset{ТЛ_2}{x_1 + 2x_2 = 8.}$$

Решив систему уравнений из двух ограничений находятся x_1 и x_2, доставляющие максимум функции z.

Симплексный метод решения ЗЛП

Симплекс-метод был разработан и впервые применен для решения задач в 1947 г. американским математиком Дж. Данцигом.

Симплексный метод в отличие от геометрического универсален. С его помощью можно решить любую задачу линейного программирования.

В основу симплексного метода положена идея последовательного улучшения получаемого решения.

Геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника ограничений к соседней, в которой целевая функция принимает лучшее (или, по крайней мере, не худшее) значение до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение - вершина, где достигается оптимальное значение функции цели (если задача имеет конечный оптимум).

Таким образом, имея систему ограничений, приведенную к канонической форме (все функциональные ограничения имеют вид равенств), находят любое базисное решение этой системы, заботясь только о том, чтобы найти его как можно проще. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то осуществляется переход к другому, обязательно допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении целевая функция, если и не достигнет оптимума, то приблизится к нему (или, по крайней мере, не удалится от него). С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не отыщется решение, которое является оптимальным.

Процесс применения симплексного метода предполагает реализацию трех его основных элементов:

1. способ определения какого-либо первоначального допустимого базисного решения задачи;
2. правило перехода к лучшему (точнее, не худшему) решению;
3. критерий проверки оптимальности найденного решения.

Симплексный метод включает в себя ряд этапов и может быть сформулирован в виде четкого алгоритма (четкого предписания о выполнении последовательных операций). Это позволяет успешно программировать и реализовывать его на ЭВМ. Задачи с небольшим числом переменных и ограничений могут быть решены симплексным методом вручную.

Далее рассмотрим симплексный алгоритм, не углубляясь в его обоснование.

Реализация симплекс-алгоритма включает восемь шагов. Опишем их, параллельно рассматривая пример выполнения каждого шага в применении к задаче о хоккейных клюках и шахматных наборах.

Шаг 1. Формулировка ЗЛП (формирование целевой функции и системы ограничений).

Для определенности будем считать, что решается задача на отыскание максимума. Ниже приведем общую постановку такой задачи.

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \max;$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Еще раз повторим формулировку задачи из нашего примера.

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 120, \\ 2x_1 + 6x_2 \le 72, \\ x_2 \le 10; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Шаг 2. Приведение задачи к канонической форме (перевод функциональных ограничений в систему уравнений).

Для реализации шага в ограничения задачи вводятся дополнительные переменные. Ниже приведен порядок выполнения этой операции.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{cases}$$

Обозначим добавочные переменные несколько иначе, а именно:

$$y_1 = x_{n+1},\ y_2 = x_{n+2},\ \ldots,\ y_m = x_{n+m},$$

где n – число переменных в исходной задаче,
m – число уравнений.

Все дополнительные переменные также должны быть неотрицательными.

В отношении добавочных переменных нужно сделать еще одно важное замечание. Все они должны иметь тот же знак, что и свободные члены системы ограничений. В противном случае используется так называемый М-метод (метод искусственного базиса).

Выполним второй шаг для нашего примера.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 120, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 72, \\ x_2 + x_5 = 10. \end{cases}$$

Шаг 3. Построение исходной симплекс-таблицы (получение первоначального допустимого базисного решения).

При ручной реализации симплексного метода удобно использовать так называемые симплексные таблицы. Исходная симплекс-таблица соответствует первоначальному допустимому базисному решению. В качестве такового проще всего взять базисное решение, в котором основными являются дополнительные переменные x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m}. Ниже приведены исходная симплексная таблица в общем виде (см. таблицу 2.4) и в применении к рассматриваемой нами задаче (см. таблицу 2.5).

Таблица 2.4 – Общий вид исходной симплекс-таблицы

базис	**переменные**							b_i
	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	1	b_m
c_j	c_1	c_2	…	c_n	0	0	0	L

Итак, в левом столбце записываются основные (базисные) переменные, в первой строке таблицы перечисляются все переменные задачи. Крайний правый столбец содержит свободные члены системы ограничений b_1, b_2, …, b_m. В последней строке таблицы (она называется оценочной) записываются коэффициенты целевой функции, а также значение целевой функции (с обратным знаком) при текущем базисном решении ($L=-f(x)$). В рабочую область таблицы (начиная со второго столбца и второй строки) занесены коэффициенты aij при переменных системы ограничений.

Таблица 2.5 – Исходная симплекс-таблица для задачи о хоккейных клюшках и шахматных наборах

базис	**переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

x_3	4	6	1	0	0	120
x_4	2	6	0	1	0	72
x_5	0	1	0	0	1	10
c_j	2	4	0	0	0	0

Таким образом, в данном базисном решении неосновные переменные x_1 и x_2 равны нулю. Базисные переменные отличны от нуля: x_3 = 120, x_4 = 72, x_5 = 10. Данное базисное решение является допустимым. Естественно, что значение целевой функции в этом случае равно нулю, так как в формировании целевой функции участвуют переменные, которые для данного базисного решения являются неосновными.

Шаг 4. Проверка условия: все c_j≤0. Если НЕТ – осуществляется переход к шагу 5, если ДА – задача решена. Таким образом, на данном шаге проверяется наличие положительных элементов в последней строке симплексной таблицы. Если такие элементы имеются, необходимо продолжать решение.

В нашей задаче последняя строка содержит два положительных элемента, следовательно, необходимо перейти к шагу 5.

Шаг 5. Выбор разрешающего столбца (переменной, вводимой в базис). Разрешающий столбец выбирается в соответствии со следующим условием:

$$c_r = \max_{j=\overline{1,n+m}} \{c_j\},$$

где r – номер разрешающего столбца.

Таким образом, при определении разрешающего столбца просматривается последняя строка симплексной таблицы и в ней отыскивается наибольший положительный элемент.

В нашей задаче в качестве разрешающего выберем второй столбец (соответствующий переменной x_2), поскольку в последней строке для этого столбца содержится 4.

Шаг 6. Проверка условия: все a_{ir}≤0. Если ДА – целевая функция неограничена и решения нет, если НЕТ – переход к шагу 7.

Таким образом, необходимо проверить элементы разрешающего столбца. Если среди них нет положительных, то задача неразрешима.

В нашем примере все элементы разрешающего столбца положительны (6, 6 и 1), следовательно, необходимо перейти к шагу 7.

Шаг 7. Выбор разрешающей строки (переменной, выводимой из базиса) по условию:

$$D_s = \min_{i=\overline{1,m}} \left\{\frac{b_i}{a_{ir}}\right\}, \text{ для } a_{ir}>0,$$

где s – номер разрешающей строки.

Таким образом, для тех строк, где элементы разрешающего столбца положительны, необходимо найти частное от деления элемента b_i (последний столбец таблицы) на элемент, находящийся в разрешающем столбце. В качестве разрешающей выбирается строка, для которой результат такого деления будет наименьшим.

Проиллюстрируем выполнение шага 7, обратившись к нашему примеру.

- Для первой строки: D_1 = 120 / 6 = 20.
- Для второй строки: D_2 = 72 / 6 = 12.
- Для третьей строки: D_3 = 10 / 1 = 10.

Наименьший результат деления – в третьей строке, значит именно эту строку мы выбираем в качестве разрешающей, т.е. исключать из базисного решения будем переменную x_5.

Разрешающий элемент – элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца.

В нашем случае таковым является единица, стоящая на пересечении третьей строки и второго столбца.

Исходная симплекс-таблица нашего примера с выделенными цветом разрешающей строкой и разрешающим столбцом представлена ниже (см. таблицу 2.6).

Таблица 2.6 – Исходная симплекс-таблица с выделенными разрешающей строкой и столбцом, а также с иллюстрацией к применению правила прямоугольника

базис	переменные					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	6	1	0	0	120
x_4	2	6	0	1	0	72
x_5	0	1	0	0	1	10
c_j	2	4	0	0	0	0

Шаг 8. Пересчет элементов симплекс-таблицы (переход к новому базисному решению). Порядок пересчета различных элементов таблицы несколько отличается.

Для элементов разрешающей строки используются следующие формулы:

$$a'_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{sr}}; \quad b'_s = \frac{b_s}{a_{sr}},$$

где s – номер разрешающей строки,

r – номер разрешающего столбца,

a'_{sj}, b'_s – новые значения пересчитываемых элементов,

a_{sj}, b_s – старые значения пересчитываемых элементов,

a_{sr} – старое значение разрешающего элемента.

Таким образом, при пересчете элементов разрешающей строки каждый ее элемент делится на разрешающий элемент.

Еще проще пересчитать элементы разрешающего столбца. Все они (кроме разрешающего элемента) становятся равными нулю:

$$a'_{ir} = 0, \quad c'_r = 0.$$

Элементы, не принадлежащие разрешающим столбцу и строке, пересчитываются по так называемому правилу прямоугольника: мысленно выделяется прямоугольник, в котором элемент, подлежащий пересчету и разрешающий элемент образуют одну из диагоналей. Формулы будут иметь следующий вид:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{sj}}{a_{sr}};$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{ir}b_s}{a_{sr}};$$

$$c'_j = c_j - \frac{a_{sr}c_r}{a_{sr}};$$

$$L' = L - \frac{c_r b_s}{a_{sr}},$$

где a'_{ij}, b'_i, c'_j, L' – новые значения пересчитываемых элементов,

a_{ij}, b_i, c_j, L – старые значения пересчитываемых элементов.

Применение правила прямоугольника проиллюстрируем, используя таблицу 2.6. Пересчитаем элемент a_{11} (в исходной симплекс-таблице его значение равно 4). В таблице 2.6 можно видеть прямоугольник (прочерчен пунктиром), соединяющий четыре элемента, участвующих в пересчете:

$$a'_{11} = a_{11} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{32}}, \text{ т.е. } a'_{11} = 4 - \frac{6 \cdot 0}{1} = 4.$$

Аналогичным образом пересчитываются остальные элементы.

По окончании пересчета осуществляется возврат к шагу 4.

Полностью результат пересчета для нашего примера можно видеть в таблице 2.7

Таблица 2.7 – Симплекс-таблица для задачи о хоккейных клюшках и шахматных наборах (второе базисное решение)

базис	**переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	0	1	0	-6	60
x_4	2	0	0	1	-6	12
x_2	0	1	0	0	1	10
c_j	2	0	0	0	-4	-40

Таким образом, в новом базисном решении базисными переменными являются: x_2 = 10, x_3 = 60, x_5 = 12 (соответствующие значения можно видеть в последнем столбце таблицы). Неосновные переменные x_1 и x_5 равны нулю. Значение целевой функции в этом случае равно 40 (значение можно видеть в правой нижней ячейке таблицы).

Доведем решение нашего примера до конца.

Вернемся к **шагу 4** симплекс-алгоритма. Рассмотрим последнюю строку таблицы 2.7. В ней есть положительные элементы, значит полученное решение не является оптимальным.

Шаг 5. Выберем разрешающий столбец. Им окажется столбец x_1, поскольку здесь содержится единственный положительный элемент нижней строки. Стало быть, переменную x_1 будем переводить в основные.

Далее. **Шаг 6**. Проверка показывает, что в разрешающем столбце есть положительные элементы, следовательно, можно продолжать решение.

Шаг 7. Определим разрешающую строку. При этом будем рассматривать лишь первую и вторую строки, поскольку для третьей строки в разрешающем столбце находится нуль. Найдем частное от деления элемента bi на элемент, находящийся в разрешающем столбце:

- Для первой строки: D_1 = 60 / 4 = 15.
- Для второй строки: D_2 = 12 / 2 = 6.

Наименьший результат деления – во второй строке, значит именно эту строку мы выбираем в качестве разрешающей, т.е. переводить в неосновные (исключать из базиса) будем переменную x_4.

Ниже приведена симплекс-таблица с выделенными разрешающей строкой и столбцом (см. таблицу 2.8).

Таблица 2.8 – Симплекс-таблица (второе базисное решение) с выделенными разрешающей строкой и столбцом

базис	**переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	0	1	0	-6	60
x_4	2	0	0	1	-6	12
x_2	0	1	0	0	1	10
c_j	2	0	0	0	-4	-40

Далее перейдем к шагу 8 и осуществим пересчет элементов симплексной таблицы в соответствии с правилами, приводимыми выше. Результат пересчета представлен в таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Симплекс-таблица для задачи о хоккейных клюшках и шахматных наборах (третье базисное решение)

базис	**переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	-2	6	36
x_1	1	0	0	1/2	-3	6
x_2	0	1	0	0	1	10
c_j	0	0	0	-1	2	-52

Таким образом, в очередном (третьем) базисном решении основными переменными являются: x_1 = 6, x_2 = 10, x_3 = 36. Неосновные переменные x_4 и x_5 равны нулю. Значение целевой функции для этого решения равно 52.

Вернемся к **шагу 4** симплекс-алгоритма. Рассмотрим последнюю строку таблицы 2.9. В ней все еще есть положительные элементы, значит полученное решение не является оптимальным, и необходимо продолжить выполнение симплекс-алгоритма.

Шаг 5. Выберем разрешающий столбец. Им окажется столбец x_5, поскольку здесь содержится единственный положительный элемент нижней строки. Переменную x_5 будем переводить в основные.

Шаг 6. Проверка показывает, что в разрешающем столбце есть положительные элементы, следовательно, можно продолжать решение.

Шаг 7. Определим разрешающую строку. При этом будем рассматривать лишь первую и третью строки, поскольку для второй строки в разрешающем столбце находится отрицательное число. Найдем частное от деления элемента b_i на элемент, находящийся в разрешающем столбце:

- Для первой строки: D_1 = 36 / 6 = 6.
- Для третьей строки: D_2 = 10 / 1 = 10.

Наименьший результат деления – в первой строке, значит именно эту строку мы выбираем в качестве разрешающей, т.е. переводить в неосновные (исключать из базиса) будем переменную x_3.

Ниже приведена симплекс-таблица с выделенными разрешающей строкой и столбцом (см. таблицу 2.10).

Таблица 2.10 – Симплекс-таблица (третье базисное решение) с выделенными разрешающей строкой и столбцом

базис	**переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	-2	6	36
x_1	1	0	0	1/2	-3	6
x_2	0	1	0	0	1	10
c_j	0	0	0	-1	2	-52

Далее перейдем к **шагу 8** и осуществим пересчет элементов симплексной таблицы в соответствии с правилами, приводимыми выше.

Результат пересчета представлен в таблице 2.11.

Таблица 2.11 – Симплекс-таблица для задачи о хоккейных клюшках и шахматных наборах (четвертое базисное решение)

базис	**переменные**					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	1/6	-1/3	1	6
x_1	1	0	1/2	-1/2	0	24
x_2	0	1	-1/6	1/3	0	4
c_j	0	0	-1/3	-1/3	0	-64

Таким образом, в очередном (четвертом) базисном решении основными переменными являются: x_1 = 24, x_2 = 4, x_5 = 6. Неосновные переменные x_3 и x_4 равны нулю. Значение целевой функции для этого решения равно 64.

Вернемся к **шагу 4**. Рассмотрим последнюю строку таблицы 2.11. Положительных элементов в ней не осталось, следовательно полученное решение является оптимальным. Решение задачи найдено. Оно, что естественно, совпадает с решением, полученным для этой же задачи при помощи графического метода:

$$x_1^* = 24, \quad x_2^* = 4, \quad f\left(\overline{x^*}\right) = 64.$$