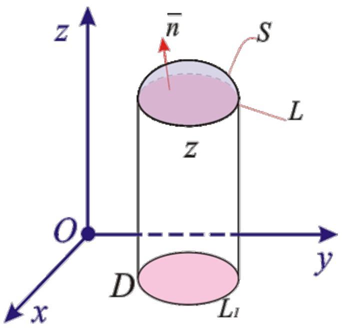
5. Формулы Стокса и Остроградского

5.1. Формула Стокса

Эта формула устанавливает связь между интегралом по поверхности S и криволинейным интегралом по границе L этой поверхности.

Пусть поверхность S может быть задана уравнением $z = z(x, y)$. Границу поверхности S обозначим L. Положительное направление единичной нормали $\vec{n}$ выберем так, чтобы она образовывала с положительным направлением оси Oz острый угол. Направляющие косинусы нормали в этом случае вычисляются по соотношениям (7).



Пусть в пространственной области, содержащей поверхность S, задана функция $P(x, y, z)$, непрерывная вместе со своими частными производными. Рассмотрим криволинейный интеграл по кривой L: $\int\limits_L P(x, y, z)dx$.

На линии L существует связь $z = z(x, y)$, следовательно, $\int\limits_L P(x, y, z)dx = \int\limits_{L_1} P(x, y, z(x, y))dx$ – интеграл по линии L_1 – проекции линии L в плоскость Oxy.

Преобразуем этот интеграл по формуле Грина, положив $X(x, y) = P(x, y, z(x, y));\ Y(x, y) = 0$, и получим

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{L_1} Xdx + Ydy$$

или

$$-\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} = \oint\limits_{L_1} Xdx, \qquad \text{так как } Y = 0 \,.$$

На основании выражения для производной сложной функции имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \,.$$

Тогда

$$-\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{L_1} P(x, y, z(x, y))dx$$

или

$$\oint\limits_L P(x, y, z)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy - \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} dxdy \,.$$

Интегралы, стоящие в правой части, можно представить как поверхностные, если учесть, что $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, где $\gamma = \left(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}\right)$:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma d\sigma \,, \qquad \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} dxdy = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \cos\gamma d\sigma \,.$$

С учётом соотношений (7)

?

$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma d\sigma = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma} = -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta d\sigma\ .$$

Тогда получаем, что

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx = -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta d\sigma\ . \tag{10}$$

Направление обхода контура L должно быть согласовано с выбранным положительным направлением нормали $\vec{n}$: если смотреть с конца нормали, то обход контура L надо видеть против часовой стрелки.

Аналогично получим и следующие выражения для интегралов:

$$\oint\limits_L Q(x,y,z)dy = -\iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha d\sigma + \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma d\sigma\ , \tag{10'}$$

$$\oint\limits_L R(x,y,z)dz = -\iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta d\sigma + \iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha d\sigma\ . \tag{10''}$$

Складывая левые и правые части формул (10), (10'), (10''), получим формулу Стокса:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]d\sigma$$

или

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz\ . \tag{11}$$

Если поверхность S есть часть плоскости, параллельной плоскости Oxy, то $dz=0$ и из формулы Стокса получаем формулу Грина как частный случай (11).

◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►