5. Кратные интегралы и теория поля: Приложения кратных интегралов к задачам геометрии и механики

2. Замена переменных в кратных интегралах

2.3. Приложения кратных интегралов к задачам геометрии и механики

Двойные и тройные интегралы широко применяются в геометрии и физике. Рассмотрим некоторые задачи механики, в которых используются понятия двойного и тройного интегралов.

1. **Масса плоской пластинки переменной плотности.**

   Рассмотрим тонкую пластинку, расположенную на плоскости Oxy и занимающую область D. Толщину ее считаем настолько малой, что изменением плотности по толщине можно пренебречь. Поверхностная плотность δ является непрерывной функцией координат $\delta = \delta(x, y)$.

   Разобьем область D на частичные области $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. Выберем в каждой частичной области точку $P_i(x_i, y_i)$ и будем считать, что плотность во всех точках частичной области постоянна и равна плотности в точке P_i, то есть $\delta(x_i, y_i)$. Тогда масса рассматриваемой частичной области равна $\delta(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$, а масса всей пластинки приближенно равна интегральной сумме:

   $$M_n = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ .$$

   Для точного выражения массы пластинки надо найти предел интегральной суммы при условии, что $n \to \infty$ и каждая частичная область стягивается в точку. Тогда:

   $$M = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \iint_D \delta(x_i, y_i)d\sigma \ .$$

2. **Статические моменты инерции и центр тяжести неоднородной пластинки.**

   Сосредоточим в точках $P_i(x_i, y_i)$ массы частичных областей и найдем статические моменты инерции полученной системы материальных точек относительно координатных осей:

   $$M_x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} y_i\delta(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ , \qquad M_y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\delta(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \ .$$

   Переходя к пределам при $n \to \infty$ и заменяя интегральные суммы интегралами, получим

$$M_x = \iint\limits_D y\delta(x,y)d\sigma, \qquad M_y = \iint\limits_D x\delta(x,y)d\sigma .$$

Координаты центра тяжести пластинки находятся по формуле

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x\delta(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \delta(x,y)d\sigma}, \qquad y_0 = \frac{\iint\limits_D y\delta(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \delta(x,y)d\sigma} .$$

3. **Моменты инерции пластинки.**

Моментом инерции материальной точки P относительно какой-либо оси называют произведение массы точки на квадрат расстояния от точки P до этой оси. Тогда моменты инерции неоднородной пластинки относительно осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\delta(x,y)d\sigma, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2\delta(x,y)d\sigma ,$$

центробежный момент инерции:

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy\delta(x,y)d\sigma ;$$

полярный момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\delta(x,y)d\sigma .$$

4. **Центр тяжести пространственного тела.**

Плотность тела задается функцией $\delta = \delta(x,y,z)$, тело занимает область V, тогда координаты центра тяжести пространственного тела находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_V x\delta(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dV}, \qquad y_0 = \frac{\iiint\limits_V y\delta(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dV}, \qquad z_0 = \frac{\iiint\limits_V z\delta(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dV} .$$

5. **Моменты инерции тела относительно координатных осей.**

$$I_x = \iiint\limits_V (y_0^2+z_0^2)\delta(x,y,z)dV, \qquad I_y = \iiint\limits_V (x_0^2+z_0^2)\delta(x,y,z)dV, \qquad I_z = \iiint\limits_V (x_0^2+y_0^2)\delta(x,y,z)dV .$$

Полярный момент инерции:

$$I_0 = \iiint\limits_V (x_0^2y_0^2+z_0^2)\delta(x,y,z)dV .$$