1. Кратные интегралы

1.4. Тройной интеграл, его свойства

К понятию "тройного интеграла" приводит задача по отысканию массы неоднородного тела. Если тело занимает пространственную область V, а плотность распределения массы является непрерывной функцией координат $f(x,y,z)$, то, разбивая тело на n частей объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n и полагая, что внутри каждого объема плотность постоянна и равна плотности в точке $P_i(x_i,y_i,z_i)$, массу этого тела можно представить приближенно как $M_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$.

Предел этой суммы при условии, что $n\to\infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку (его диаметр стремится к нулю), даёт массу тела

$$M=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max d_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\ . \tag{6}$$

Сумма M_n называется **n-ой интегральной суммой**, а ее предел – **тройным интегралом** от функции $f(x,y,z)$ по пространственной области V.

Основные свойства тройных интегралов:

1. свойство линейности:
$$\iiint\limits_V [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dV=\alpha\iiint\limits_V f(x,y,z)dV+\beta\iiint\limits_V g(x,y,z)dV\ ;$$
2. свойство аддитивности:
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV+\iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV\ ,$$
где $V=V_1+V_2$;
3. если всюду в области V $f(x,y,z)\ge g(x,y,z)$, то
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\ge\iiint\limits_V g(x,y,z)dV\ ;$$
4. если во всех точках области интегрирования $m\le f(x,y,z)\le M$, то
$$mV<\iiint\limits_V f(x,y,z)dV<MV\ ,$$
где V – объем рассматриваемой области;
5. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V$,
где $f(\xi,\eta,\zeta)$ – среднее значение функции $f(x,y,z)$ в области V.

Если подынтегральная функция $f(x,y,z)$ всюду в области V, то тройной интеграл выражает объем области V:

$$\iiint\limits_V dV=V\ , \tag{7}$$

◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►

?