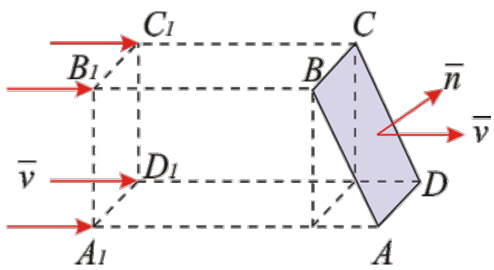
4. Поверхностные интегралы

4.3. Поток жидкости через поверхность. Поверхностные интегралы II рода

Рассмотрим установившееся течение жидкости, когда скорости частиц жидкости, протекающих через данную точку, зависят только от координат (x, y, z) этой точки и не зависят от времени. В каждой точке $M(x, y, z)$ рассматриваемой пространственной области V задан вектор скорости частицы жидкости:

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}\ . \qquad (4)$$

Плотность жидкости считаем постоянной и равной единице. Потоком жидкости через поверхность S назовём количество жидкости, свободно протекающей через эту поверхность в единицу времени.

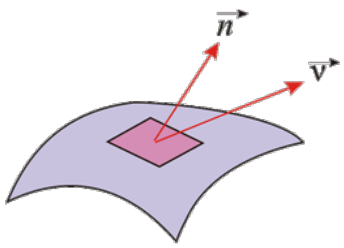


Пусть скорость течения жидкости одинакова во всех точках области и равна $\vec{v}$. Тогда поток жидкости через прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, расположенный в перпендикулярной к скорости $\vec{v}$ плоскости, $\Pi = S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot \vec{v}$. Такое же количество жидкости протекает и через прямоугольник $\mathrm{ABC}D$, расположенный в плоскости, нормаль к которой составляет угол φ с вектором скорости $\vec{v}$. Площадь $S_{A_1B_1C_1D_1} = S\cos\varphi$, где $S = S_{ABCD}$. Тогда:

$$\Pi = S\cos\varphi \cdot |\vec{v}| = Sv_n\ ,$$

где $v_n = |\vec{v}|\cos\varphi$ – проекция вектора $\vec{v}$ на $\vec{n}$ нормаль .

В общем случае в рассматриваемой области вектор $\vec{v}$ не постоянен, а определяется соотношением (4). Найдём поток жидкости через поверхность S. Для этого разобьём поверхность S на n ячеек произвольной формы $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. В каждой ячейке выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$.



Будем считать, что в пределах каждой ячейки скорость $\vec{v}$ постоянна и равна значению в точке M_i : $\vec{v}(x_i, y_i, z_i)$, а ячейки $\Delta\sigma_i$ заменим площадками касательных плоскостей, то есть будем считать, что в пределах $\Delta\sigma_i$ не меняется направление единичной нормали $\vec{n}_i$. Тогда приближённое выражение для потока жидкости через поверхность S имеет вид:

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i |\vec{v}_i| \cos\varphi_i\ .$$

Произведение $|\vec{v}_i|\cos\varphi_i = \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i$, если $|\vec{n}_i| = 1$. Единичный вектор нормали имеет своими проекциями направляющие косинусы:

$$\vec{n}_i = \cos\alpha_i\vec{i} + \cos\beta_i\vec{j} + \cos\gamma_i\vec{k}\ .$$

Тогда

$$|\vec{v}_i|\cos\varphi_i = \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i = P_i\cos\alpha_i + Q_i\cos\beta_i + R_i\cos\gamma_i\ ,$$

где $P_i = P(x_i, y_i, z_i),\ Q_i = Q(x_i, y_i, z_i),\ R_i = R(x_i, y_i, z_i)$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и при условии, что каждая ячейка стягивается в точку, получим точное выражение для потока жидкости:

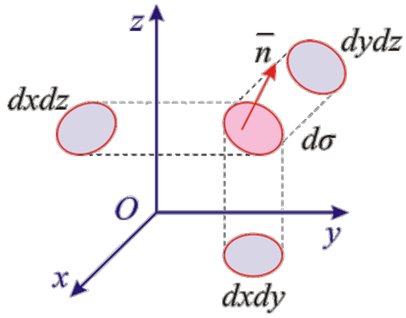
$$\Pi = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (P_i\cos\alpha_i + Q_i\cos\beta_i + R_i\cos\gamma_i)\Delta\sigma_i\ . \qquad (5)$$

?

Предел построенной интегральной суммы (5) называют поверхностным интегралом второго рода:

$$\Pi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma \ . \qquad (5')$$

Рассмотрим элемент поверхности $d\sigma$ и его проекции на координатные плоскости. Пусть $\vec{n} = \cos\alpha_i\vec{i} + \cos\beta_i\vec{j} + \cos\gamma_i\vec{k}$.



Проекции $d\sigma$ на координатные плоскости равны:

$$d\sigma \cdot \cos\alpha = dydz \ ;$$

$$d\sigma \cdot \cos\beta = dxdz \ ;$$

$$d\sigma \cdot \cos\gamma = dxdy \ .$$

Тогда интеграл (5') записывают в виде

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \qquad (6)$$

и называют поверхностным интегралом по координатам.