5. Кратные интегралы и теория поля: Оператор Гамильтона и векторные дифференциальные операции второго порядка

6. Элементы теории поля

6.4. Оператор Гамильтона и векторные дифференциальные операции второго порядка

Английским математиком У.Гамильтоном введен в употребление символический вектор

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \ ,$$

который называют **набла-оператором** Гамильтона.

Перечислим правила действий с этим вектором:

1. произведение набла-оператора на скалярную функцию $u(P)$ дает градиент этой функции:

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u \ ,$$

2. скалярное произведение набла-оператора на векторную функцию $\vec{a}(P)$ дает дивергенцию этой функции

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{a} \ .$$

3. векторное произведение набла-оператора на векторную функцию $\vec{a}(P)$ дает ротор этой функции

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_z & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{a} \ .$$

Действия взятия градиента, дивергенции, ротора являются дифференциальными операциями первого порядка.

Пример. Рассмотрим электрическое поле точечного заряда е, помещенного в начало координат. Оно описывается в точке $P(x, y, z)$ вектором напряженности $\vec{E} = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, r = \ | \ \vec{r} \ | \ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Потенциалом электрического поля точечного заряда е называется функция

$$u(P)\frac{ke}{r} = \frac{ke}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ .$$

Найдем градиент функции u:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = -\frac{ke}{(sqrtx^2+y^2+z^2)^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = -\frac{ke}{r^3}\vec{r} \ .$$

Тогда напряженность электрического поля $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$.

Поверхности уровня потенциала $u(P) = C$ называют **эквипотенциальными поверхностями**.

Они представляют собой сферы с центром в начале координат. Векторные линии поля $vecE$ в каждой точке поля ортогональны проходящей через эту точку эквипотенциальной поверхности, т.е. направлены вдоль радиусов сферы.

Найдем дивергенцию электрического поля:

$$\mathrm{div}\vec{E} = ke\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right] = ke\left[\frac{r^3-r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6}+\frac{r^3-r^2\frac{\partial r}{\partial y}y}{r^6}+\frac{r^3-r^2\frac{\partial r}{\partial z}z}{r^6}\right] = ke$$

$$\frac{1}{r^6}\left[r^3-3x^2r+r^3-3y^2r+r^3-3z^2r\right] = ke\,\frac{1}{r^5}\left[3r^2-3(x^2+y^2+z^2)\right] = 0 \ ,$$

так как $x^2+y^2+z^2 = r^2$.

Этот результат получен при $r \neq 0$. Он означает, что в любой точке, за исключением начала координат, отсутствуют источники поля. В начале координат $\mathrm{div}\vec{E} = \infty$ (бесконечная плотность заряда). Найдем ротор электрического поля:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = ke\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} = ke\left[\vec{i}\left(-\frac{3zy}{r^5}+\frac{3zy}{r^5}\right)-\vec{j}\left(-\frac{3zx}{r^5}+\frac{3zx}{r^5}\right)+\vec{k}\left(-\frac{3xy}{r^5}+\frac{3xy}{r^5}\right)\right] = \vec{0} \ ,$$

Таким образом, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}$ (такое поле потенциально) и, следовательно, магнитная индукция в этом поле не изменяется, так как по закону электромагнитной индукции Фарадея $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Правила вычислений с оператором Гамильтона:

1. если оператор воздействует на линейную комбинацию функций F_i, то:

$$\vec{\nabla}(\alpha_1F_1+\alpha_2F_2+\ ...\ +\alpha_nF_n) = \alpha\_1vec\,\nabla F_1+\alpha_2\vec{\nabla}F_2+\ ...\ +\alpha_n\vec{\nabla}F_n \ ;$$

2. воздействие оператора на произведение нескольких функций выражается формулой:

$$\vec{\nabla}(FGH) = (\vec{\nabla} F)GH + F(\vec{\nabla} G)H + FG(\vec{\nabla} H)\ .$$

Найдем, например,

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{a})\times\vec{b} + \vec{a}\times(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) = (\vec{\nabla}\times\vec{a})\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{b}$$

.

С помощью набла-оператора можно записать формулу для вычисления производной скалярного поля по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{e}_\lambda\cdot\vec{\nabla} u = (\vec{e}_\lambda\cdot\vec{\nabla})u\ ,$$

тогда символ $\frac{\partial}{\partial l} = \vec{e}_\lambda\cdot\vec{\nabla}$ называют оператором производной по направлению.

Производная по направлению векторного поля равна $\frac{\partial\vec{a}}{\partial l}(\vec{e}_\lambda\cdot\vec{\nabla})\vec{a}$.

Пусть имеется скалярное поле $u(P)$ и градиент этого поля $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u$. Поле градиента является векторным полем, поэтому можно искать его дивергенцию и ротор.

Если задано векторное поле $\vec{a}(P)$, то оно порождает два поля: скалярное поле $\operatorname{div}\vec{a}$ и векторное поле $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a}$. Тогда можно искать градиент первого поля, а также дивергенцию и ротор второго поля:

1. $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u$, где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;
2. $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla} u = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})u = \vec{0}$;
3. $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = 0$;
4. $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}u = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\vec{k} = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\vec{k} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(a_y\vec{i} - a_x\vec{j}) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(a_z\vec{i} - a_x\vec{k}) + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(a_z\vec{j} - a_y\vec{k})$;
5. $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{a} - \vec{\nabla}^2\vec{a}$, где $\vec{\nabla}^2\vec{a} = \vec{\nabla}^2 a_x\vec{i} + \vec{\nabla}^2 a_y\vec{j} + \vec{\nabla}^2 a_z\vec{k}$;

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = \vec{i}\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z\partial x}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}\right) = \; = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{a} - \vec{i}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right) - \vec{k}\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\ .$$