5. Кратные интегралы и теория поля: Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)

3. Криволинейные интегралы

3.5. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D и L – линия, целиком расположенная в этой области. Разобьем кривую L на n участков; возьмем на каждом участке произвольную точку (x_i, y_i) и построим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i \ ,$$

где Δs_i – длина соответствующего участка линии L.

Криволинейным интегралом по длине дуги (первого рода) называется предел n-й интегральной суммы (8) при условии, что длина наибольшего из участков разбиения стремится к нулю:

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i \ .$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода осуществляется путем сведения его к определенному интегралу исходя из того, что $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то:

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)]\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt \ .$$

Если линия L задана уравнением $y = y(x)$, то:

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{x_M}^{x_N} f[x, y(x)]\sqrt{1 + (y_x')^2}dx \ .$$

Если линия L задана уравнением $x = x(y)$, то:

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{y_M}^{y_N} f[x(y), y]\sqrt{1 + (x_y')^2}dy \ .$$

К понятию криволинейного интеграла первого рода приводит задача об отыскании массы кривой. Если плотность линии задана функцией $\delta(x, y)$, то масса линии L определяется интегралом $\int_L f(x, y)ds$. Длина линии L может быть вычислена с помощью криволинейного интеграла $\int_L ds$.

Пример. Найти массу дуги окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, расположенной в первом октанте, если плотность определяется функцией $\delta = ax$, $a = const$.

Решение. Запишем функцию плотности в параметрической форме $\delta = aR\cos t$, тогда:

$$M = \int_L \delta ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} aR\cos t\sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\,dt = aR^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = aR^2 \cdot \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = aR^2 \ .$$