6. Элементы теории поля

6.5. Свойства простейших векторных полей

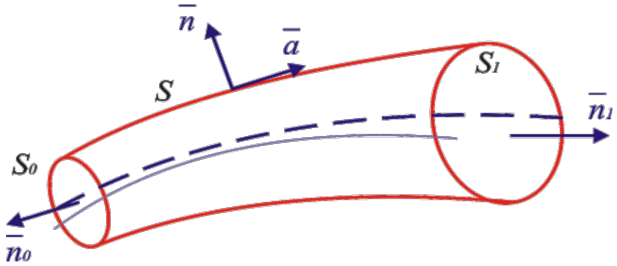
Трубчатое (соленоидальное) поле – это векторное поле $\vec{a}(P)$, дивергенция которого во всех точках равна нулю:

$$\mathrm{div}\vec{a} = 0 \;.$$

Возьмем в этом поле какую-нибудь площадку S_0 и проведем через каждую точку ее границы векторные линии. Эти линии ограничивают часть пространства, называемую векторной трубкой. Жидкость при своем течении все время движется по своей трубке, не пересекая ее стенок.

Определим по теореме Остроградского поток жидкости через поверхность трубки, ограниченную двумя ее сечениями S_0 и S_1 :

$$\iint\limits_{S_0} \vec{a}\cdot\vec{n}_0 d\sigma + \iint\limits_{S} \vec{a}\cdot\vec{n} d\sigma + \iint\limits_{S_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1 d\sigma = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\vec{a}\, dV = 0 \;.$$



Тогда $\iint\limits_{S_0} \vec{a}\cdot\vec{n}_0 d\sigma = \iint\limits_{S_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1 d\sigma$, так как нормали внешние, т.е. поток вектора в направлении векторных линий через каждое сечение векторной трубки не меняется, т.е. в поле без источников через каждое сечение трубки тока протекает одно и то же количество жидкости.

Ранее установлено, что $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$, т.е. поле ротора любого векторного поля трубчатое. Поэтому каждое трубчатое поле является полем ротора некоторого векторного поля. Если $\mathrm{div}\vec{a} = 0$, то существует такое поле $\vec{b}$, что $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}$. Примером соленоидального поля является магнитное поле, т.к. $\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$, что подтверждает отсутствие магнитных зарядов.

Потенциальное (безвихревое) поле – это векторное поле $\vec{a}(P)$, во всех точках которого ротор равен нулю:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{0} \;.$$

Это равносильно условию

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}\;, \qquad \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial y}\;, \qquad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}\;,$$

откуда $a_x dx + a_y dy + a_z dz = du(x,y,z)$ – полный дифференциал функции $u(x,y,z)$, причем:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}\;, \qquad a_y = \frac{\partial u}{\partial y}\;, \qquad a_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Это значит, что вектор $\vec{a}(P)$ потенциального поля является градиентом скалярного поля:

$$\vec{a}(P) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u \;.$$

Функция $u(x,y,z)$ называется **потенциалом** векторного поля.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру в силу формулы Стокса равна нулю. С точки зрения течения жидкости равенство нулю циркуляции означает, что в потоке нет замкнутых струек жидкости, т.е. нет водоворотов.

?

Работа в силовом потенциальном поле равна разности потенциалов в конечной и начальной точках линии L:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = u(B) - u(A)\ .$$

Гармоническое поле – это векторное поле $\vec{a}(P)$, одновременно являющееся и потенциальным, и трубчатым.

Поскольку поле потенциально, его можно записать

$$\vec{a}(P) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \, u\ ,$$

где u – потенциал поля.

Условие трубчатости означает

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \, u = 0$$

или

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\ .$$

Функция u, подчиняющаяся этому условию, называется **гармонической**.

◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►

?