МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тульский государственный университет»

Интернет-институт

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Математика»

Семестр 2

Вариант 3

Выполнил: студент гр. ИБ262521-ф

Артемов Александр Евгеньевич

Проверил: д.ф.-м.н., проф. Христич Д.В.

Тула 2023

1. Провести полное исследование функции и построить её график:

$$y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$$

Решение:

Общая характеристика функции:

- Область определения $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$;
- Точка $x=1$ - точка разрыва функции;
- Пределы слева и справа в точке разрыва

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)} = +\infty$$

Прямая $x=1$ - вертикальная асимптота графика функции;

- $y(-x) \neq y(x) \neq -y(x)$ Функция ни четная, ни нечетная, не периодическая.

Интервалы монотонности и экстремумы функции:

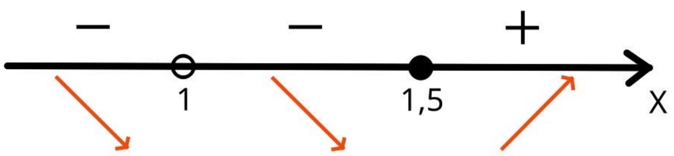
Вычислим производную функции.

$$y' = \left(\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}\right)' = \frac{e^{-2}}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{x-1}\right)' = \frac{1}{2e^2} \cdot \frac{2e^{2x}(x-1) - e^{2x}}{(x-1)^2} = \frac{1}{2e^2} \cdot \frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}$$

Приравняем *y' = 0* .

$\frac{1}{2e^2} \cdot \frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$. При ***x = 1*** производная не существует. $e^{2(x-1)}$ всегда больше 0.

Рассмотрим *2x - 3 = 0:* ***x = 1,5***. Построим числовую прямую:



Значит, функция убывает на интервалах (-∞; 1) и (1; 1,5), и возрастает на (1,5; +∞).

Вычислим значение функции в точке минимума $x_{min} = 1,5$:

$$y(1{,}5) = \frac{e^{2(1{,}5-1)}}{2(1{,}5-1)} = \frac{e}{1} = e$$

Интервалы выпуклости и вогнутости функции:

Вычислим производную функции 2-го порядка.

$$y'' = \left(\frac{1}{2e^2} \cdot \frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}\right)' = \frac{1}{2e^2} \cdot \frac{4e^{2x}(x-1)(x-1)^2 - e^{2x}(2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{1}{2e^2} \cdot \frac{2e^{2x}(2(x-1)^3 - (2x-3)(x-1))}{(x-1)^4} = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{e^{2x}(2x^3 - 8x^2 + 11x - 5)}{(x-1)^4}$$

Приравняем производную функции 2-го порядка к 0 для нахождения точек перегиба:

$$\frac{1}{e^2}\cdot\frac{e^{2x}(2x^3-8x^2+11x-5)}{(x-1)^4}=0$$

При $x=1$ выражение не существует, а e^{2x} всегда положительно.

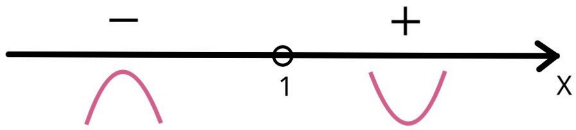
Рассмотрим $2x^3-8x^2+11x-5=0$

$$(x-1)(2x^2-6x+5)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x_1=1$$

$$2x^2-6x+5=0$$

$D=b^2-4ac=36-4\cdot2\cdot5=36-40=-4<0$ - нет решений

Но при $x=1$ выражение не существует, значит, функция не имеет точек перегиба.



Следовательно, функция на интервале (-∞;1) — выпукла, а на интервале (1; ∞) - вогнута.

<u>Асимптоты функции:</u>

Так как $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}=+\infty$, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой функции.

Для нахождения наклонной асимптоты $y=kx+b$ найдем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2(x-1)}}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{2(x-1)})'}{(2x(x-1))'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2(x-1)}}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(2e^{2(x-1)})'}{(2x-1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2(x-1)}}{2}=\infty$$

$k=\infty$ значит наклонной асимптоты не существует.

Найдем горизонтальную асимптоту:

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2(-\infty-1)}}{2(-\infty-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^0}{-\infty}==\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\infty}=0$$

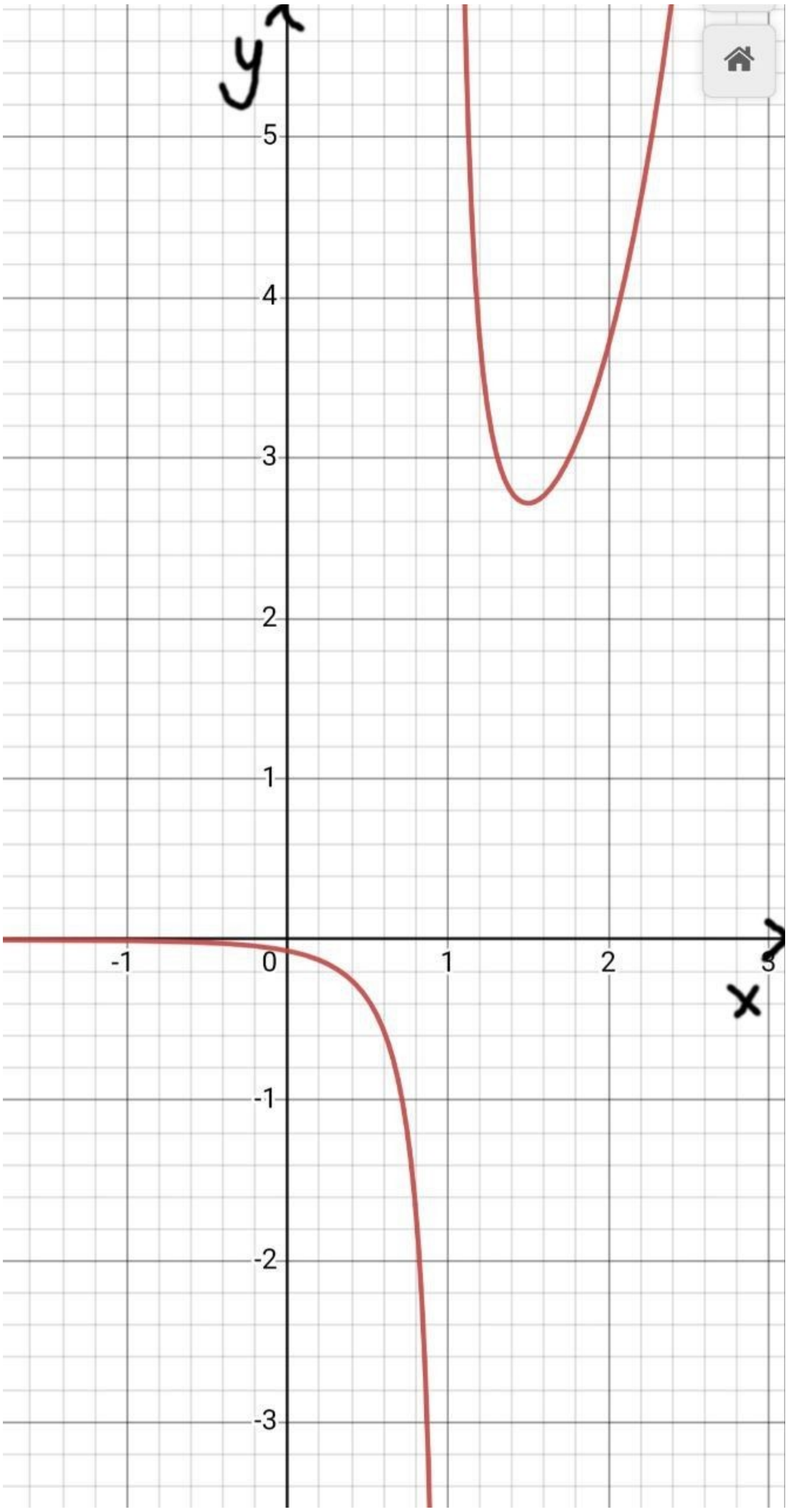
Следовательно, прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота.

<u>Результаты исследования представлены в таблице:</u>

x	y''	y'	y
$x\to-\infty$	<0	<0	$y\to0$
$(-\infty;1)$	<0	<0	убывает, выпуклая
1	не существует	не существует	не существует, $y\to\pm\infty$
(1;1,5]	> 0	< 0	убывает, вогнутая
1,5	> 0	$y'=0$	Минимум функции, $y=e$
[1,5; +∞)	> 0	> 0	возрастает, вогнутая

$x \to \infty$	> 0	> 0	$y \to +\infty$

<u>График функции:</u>



2. Найдите действительную часть комплексного числа: $z = \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i}$

Решение:

Используем формулу для деления комплексных чисел: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

Первое слагаемое: $\frac{1-i}{1+i} = \frac{1\cdot1+(-1)\cdot(-1)}{1^2+1^2} + \frac{(-1)\cdot1-1\cdot1}{1^2+1^2} i = \frac{0}{2} + \frac{-2}{2} i = 0-i$

Второе слагаемое: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1\cdot1+1\cdot(-1)}{1^2+(-1)^2} + \frac{1\cdot1-1\cdot(-1)}{1^2+(-1)^2} i = \frac{0}{2} + \frac{2}{2} i = 0+i$

Откуда $z = 0-i+0+i = 0$

Ответ: 0

3. Найти неопределенный интеграл: $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$

Решение:

$$\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}+1\right)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+x+C=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{\sqrt{x}}+x+C$$

Ответ: $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{\sqrt{x}}+x+C$

4. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$

Решение:

$$\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}} = \int \left(3-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(3-4x^2\right)\frac{4x}{-8x} = -\frac{1}{2}\int \left(3-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(3-4x^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\left(3-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(3-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C = -\sqrt{3-4x^2}+C$$

Ответ: $-\sqrt{3-4x^2}+C$

5. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x-3}{9x^2+7}dx$

Решение:

$$\int \frac{x-3}{9x^2+7}dx = \int \frac{\frac{18x}{18}-3}{9x^2+7}dx = \frac{1}{18}\int \frac{18x}{9x^2+7}dx - \int \frac{3}{9x^2+7}dx$$

Рассмотрим слагаемые по отдельности:

1). $\frac{1}{18}\int \frac{18x}{9x^2+7}dx = \left|\begin{matrix} t=9x^2+7 \\ dt=18xdx \end{matrix}\right| = \frac{1}{18}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{18}\ln|t| = \frac{1}{18}\ln|9x^2+7|+C$

2). $\int \frac{3}{9x^2+7}dx = \left|\begin{matrix} t=\frac{3x}{\sqrt{7}} \\ x=\frac{\sqrt{7}t}{3} \\ dx=\frac{\sqrt{7}dt}{3} \end{matrix}\right| = \int \frac{3\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}dt}{7t^2+7} = \int \frac{\sqrt{7}dt}{7(t^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{7}}arctg(t) =$

$= \frac{1}{\sqrt{7}}arctg(\frac{3x}{\sqrt{7}})+C$

Следовательно:

$$\frac{1}{18}\int \frac{18x}{9x^2+7}dx - \int \frac{3}{9x^2+7}dx = \frac{1}{18}\ln|9x^2+7| - \frac{1}{\sqrt{7}}arctg(\frac{3x}{\sqrt{7}})+C$$

Ответ: $\frac{1}{18}\ln|9x^2+7| - \frac{1}{\sqrt{7}}arctg(\frac{3x}{\sqrt{7}})+C$

6. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$

Решение:

Разложим знаменатель $3x^2-8x-3$ на множители:

$$3x^2-8x-3 = 3\left(x^2-\frac{8}{3}x-1\right) = 3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (x-3)(3x-1)\ .$$

Представим выражение $\frac{1}{(x-3)(3x+1)}$ в виде суммы двух дробей с неизвестными параметрами А и В: пусть $\frac{1}{(x-3)(3x+1)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{3x+1} = \frac{A(3x+1)+B(x-3)}{(x-3)(3x+1)}$.

Тогда $A(3x+1)+B(x-3) = 1$.

Вычистим параметры А и В подстановкой переменной x :

при $x = 3$: $A(3\cdot 3+1)+B(3-3) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{10}$;

при $x = -\frac{1}{3}$: $A\left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)+B\left(-\frac{1}{3}-3\right) = 1 \Rightarrow B = -\frac{3}{10}$.

Подставив найденные значения параметров А и В в выражение $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{3x+1}$ получим, что

$$\frac{1}{3x^2-8x-3} = \frac{1}{(x-3)(3x+1)} = \frac{1}{10(x-3)}-\frac{3}{10(3x+1)}\ .$$

$$\int \frac{dx}{3x^2-8x-3} = \int \frac{dx}{(x-3)(3x+1)} = \int \left(\frac{1}{10(x-3)}-\frac{3}{10(3x+1)}\right)dx = \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x-3}-\frac{3}{10}\int \frac{dx}{3x+1} =$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x-3|-\frac{3}{10}\ln|3x+1|\cdot\frac{1}{3}+C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-3}{3x+1}\right|+C$$

Ответ: $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-3}{3x+1}\right|+C$

7. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$

Решение:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1} = \left| \begin{matrix} t=\sqrt{x} \ \Rightarrow \ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^2}{t^2-1}dt = 2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2t+2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2t+2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = 2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.$$

Ответ: $2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.$

8. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin\ x+\sin 2x}$

Решение:

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{sinx+\sin 2x} = \int \frac{dx}{2\,sinx\cdot(1+cosx)} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2}=U \\ cosx=\frac{1-U^2}{1+U^2};\ sinx=\frac{2U}{1+U^2} \\ dx=\frac{2dU}{1+U^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dU}{1+U^2}}{\frac{4U}{1+U^2}\cdot\left(1+\frac{1-U^2}{1+U^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{\frac{dU}{2U}}{\left(\frac{1+U^2+1-U^2}{1+U^2}\right)} = \int \frac{1+U^2}{4U}dU = \frac{1}{4}\int \frac{dU}{U}+\frac{1}{4}\int UdU = \frac{1}{4}\ln|U|+\frac{U^2}{8} = \frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{tg^2\frac{x}{2}}{8}+C$$

Вычисляем:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin\ x+\sin 2x} = \left.\frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{tg^2\frac{x}{2}}{8}\right|_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(\frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= (0+0{,}125)-(-0{,}220343397+0{,}021446609) = 0{,}323896787$$

Ответ: 0,323896787.

9. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^2 \ln x \, dx$

Решение:

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} U = \ln x \\ x = V \\ dU = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int \frac{xdx}{x} = x \cdot \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Вычисляем:

$$\int_1^2 \ln x \, dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^2 = 2 \cdot (\ln 2 - 1) - 1 \cdot (\ln 1 - 1) = 0{,}386294361$$

Ответ: 0,386294361

10. Вычислить несобственный интеграл или указать его расходимость: $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{2x+1}$

Решение:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_{1}^{\infty} = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_{1}^{\infty} = \lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|2B+1| - \frac{1}{2}\ln 3\right) = \infty$$

Следовательно, данный несобственный интеграл является расходящимся.

Ответ: интеграл является расходящимся.

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=(x-2)^3$; $y=4x-8$.

Решение:

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Вычислим точки пересечения графиков функций, приравняв данные функции друг к другу и решив получившееся уравнение: $(x-2)^3=4x-8$.

$$x^3-6x^2+12x-8=4x-8.$$

$$x^3-6x^2+8x=0$$

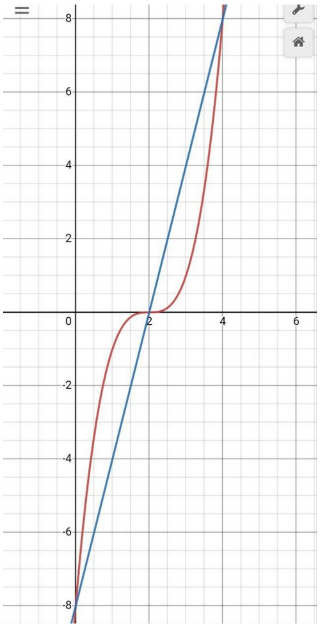
$x(x^2-6x+8)=0$, откуда $x_1=0$

Решим уравнение $x^2-6x+8=0$

$D=b^2-4ac$ $\quad D=36-4\cdot 1\cdot 8=36-32=4>0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $\quad x_2=\dfrac{6+2}{2}=4$, $\quad x_3=\dfrac{6-2}{2}=2$

Так как графики функций пересекаются в 3 точках, следует предположить, что получаемая фигура состоит из 2-х частей на промежутках [0;2] и [2;4] соответственно. Данное предположение подтверждается эскизом графиков данных функций:



Вычислим площадь фигуры на промежутке [0;2]:

$$f(x)-g(x)=(x-2)^3-(4x-8)=x^3-6x^2+8x$$

$$S_1=\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Big|_0^2=\frac{16}{4}-16+16-0=4$$

Вычислим площадь фигуры на промежутке [2;4]:

$$f(x)-g(x)=(4x-8)-(x-2)^3=-x^3+6x^2-8x$$

$$S_2 = \int_2^4 (-x^3+6x^2-8x)\,dx = -\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_2^4 = -(64-128+64)-(4-16+16) = 4$$

Получаем общую площадь: $S = S_1+S_2 = 4+4=8$ ед. кв.

Ответ: 8 ед.кв.

12. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=5(t-\sin\ t) \\ y=5(1-\cos\ t) \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi$

Решение:

Для нахождения длины дуги кривой воспользуемся формулой: $L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$

Найдем производные:

$x'=(5(t-\sin\ t))'=5-5\cos\ t$

$y'=(5(1-\cos\ t))'=5\sin\ t$

Возведем производные в квадрат и найдем их сумму:

$(x')^2=(5-5\cos\ t)^2=25-50\cos\ t+25\cos^2 t$

$(y')^2=(5\sin\ t)^2=25\sin^2 t$

$(x')^2+(y')^2=25-50\cos\ t+25\cos^2 t+25\sin^2 t=25-50\cos\ t+25=25(2-2\cos\ t)$

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int\sqrt{25(2-\cos\ t)}dt=5\int\sqrt{(2-\cos\ t)}dt=\left|\begin{matrix} U=tg\dfrac{t}{2}\Rightarrow\cos\ t=\dfrac{1-U^2}{1+U^2} \\ dt=\dfrac{2dU}{1+U^2}\end{matrix}\right|=5\int\sqrt{2-2\cdot\frac{1-U^2}{1+U^2}}\frac{2dU}{1+U^2}=$$

$$=5\int\frac{4UdU}{(1+U^2)^{3/2}}=\left|\begin{matrix} V=U^2+1 \\ dV=2UdU\end{matrix}\right|=5\cdot 2\int\frac{dV}{V^{3/2}}=10\frac{V^{-1/2}}{-1/2}=\frac{-20}{\sqrt{V}}=\frac{-20}{\sqrt{U^2+1}}=\frac{-20}{\sqrt{tg^2\dfrac{t}{2}+1}}+C$$

Найдем длину дуги, вычислив определенный интеграл на интервале $0\leqslant t\leqslant\pi$

$$L=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{25(2-\cos\ t)}dt=\left.\frac{-20}{\sqrt{tg^2\dfrac{t}{2}+1}}\right|_0^{\pi}$$

Так как значение функции $tg\dfrac{\pi}{2}$ не определено и стремится к $+\infty$ слева, найдем $\lim\limits_{t\to\pi-0}\dfrac{-20}{\sqrt{tg^2\dfrac{t}{2}+1}}$

$$\lim_{t\to\pi-0}\frac{-20}{\sqrt{tg^2\dfrac{t}{2}+1}}=\lim_{t\to\pi-0}\frac{-20}{\sqrt{\infty+1}}=0$$

$$L=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{25(2-\cos\ t)}dt=\left.\frac{-20}{\sqrt{tg^2\dfrac{t}{2}+1}}\right|_0^{\pi}=0-(-20)=20$$

Ответ: 20

13. Найти значения частных производных функции $u = \ln \sin(x - 2y + z/4)$ в точке $M_0\,(1;1/2;\pi)$

Решение:

$$u_x = (\ln \sin(x-2y+z/4))_x{}' = \frac{\cos(x-2y+z/4)}{\sin(x-2y+z/4)}\cdot 1 = ctg\,(x-2y+z/4)$$

В точке M_0 $u_x = ctg(1-1+\pi/4) = 1$

$$u_y = (\ln \sin(x-2y+z/4))_y{}' = \frac{\cos(x-2y+z/4)}{\sin(x-2y+z/4)}\cdot(-2) = -2ctg(x-2y+z/4)$$

В точке M_0 $u_y = -2\,ctg(1-1+\pi/4) = -2$

$$u_z = (\ln \sin(x-2y+z/4))_z{}' = \frac{\cos(x-2y+z/4)}{\sin(x-2y+z/4)}\cdot(1/4) = \frac{1}{4}ctg(x-2y+z/4)$$

В точке M_0 $u_z = \frac{1}{4}ctg(1-1+\pi/4) = \frac{1}{4}$

Ответ: $u_x = 1$, $u_y = -2$, $u_z = \frac{1}{4}$

14. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$

Решение:

Найдем частные производные функции и приравняем их к 0 для нахождения точки экстремума:

$z_x = ((x-5)^2 + y^2 + 1)_x' = 2x - 10$

$z_y = ((x-5)^2 + y^2 + 1)_y' = 2y$

$\begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$

Значит, $M_0(5;0)$ - точка экстремума функции, а $z(M_0) = 0 + 0 + 1 = 1$ экстремум функции.

Определим является ли точка $M_0(5;0)$ точкой минимума или точкой максимума функции. Найдем параметры A, B, C и Δ:

$A = z_{xx} = (2x - 10)'_x = 2$

$B = z_{xy} = (2x - 10)'_y = 0$

$C = z_{yy} = (2y)'_y = 2$

$\Delta = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$, точка экстремума существует.

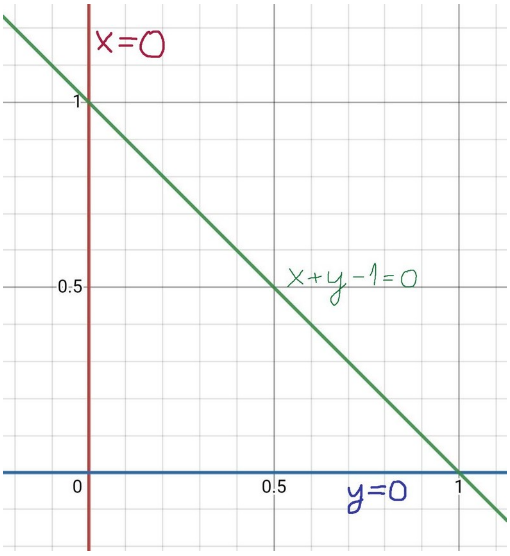
A > 0 - значит $M_0(5;0)$ - точка минимума.

Ответ: $M_0(5;0)$ - точка минимума, $z(M_0) = 1$ - минимум функции.

15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2+3y^2-2x-2y+2$ в области $D: x=0,\ y=0,\ x+y-1=0.$

Решение:

Составим эскиз области D:



1). Найдем экстремумы функции:

Найдем частные производные функции и приравняем их к 0 для нахождения точек экстремума:

$z_x = (3x^2+3y^2-2x-2y+2)_x' = 6x-2$

$z_y = (3x^2+3y^2-2x-2y+2)_y' = 6y-2$

$\begin{cases} 6x-2=0 \\ 6y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/3 \\ y=1/3 \end{cases}$

Значит, $M_0(1/3;1/3)$ - точка экстремума функции, а $\boldsymbol{z(M_0)=1/3+1/3-2/3-2/3+2 = 4/3}$ - экстремум функции.

Определим является ли точка $M_0(1/3;1/3)$ точкой минимума или точкой максимума функции.

Найдем параметры A, B, C и Δ:

$A = z_{xx} = (6x-2)'_x = 6$

$B = z_{xy} = (6x-2)'_y = 0$

$C = z_{yy} = (6y-2)'_y = 6$

$\Delta = A\cdot C-B^2 = 6\cdot 6-0 = 36>0$, точка экстремума существует.

A > 0 — значит $M_0(1/3;1/3)$ - точка минимума.

Рассмотрим границы области D.

2). x=0; функция примет вид $z = 0+3y^2-0-2y+2 = 3y^2-2y+2$.

Найдем вершину этой параболы:

$z' = (3y^2-2y+2)' = 6y-2 = 0 \Rightarrow y=1/3$

Найдем значение функции в этой точке $M_1(0;1/3)$ $\boldsymbol{z(M_1)=0+1/3-0-2/3+2 = 5/3}$

Рассмотрим также концы отрезка на оси OY $M_2(0;0)$ и $M_3(0;1)$

$\boldsymbol{z(M_2)=0+0-0-0+2=2}$ $\boldsymbol{z(M_3)=0+3-0-2+2=3}$

3). y=0; функция примет вид $z=3x^2+0-2x-0+2=3x^2-2x+2$.

Найдем вершину этой параболы:

$z'=(3x^2-2x+2)'=6x-2=0 \Rightarrow x=1/3$

Найдем значение функции в этой точке $M_4(1/3;0)$ $\boldsymbol{z(M_4)=1/3+0-2/3-0+2=5/3}$

Рассмотрим также конец отрезка на оси OX $M_5(1;0)$

$\boldsymbol{z(M_5)=1+0-2-0+2=3}$

4). $x+y-1=0$; функция примет вид $z=3x^2+3(1-x)^2-2x-2(1-x)+2=6x^2-6x+3$.

Найдем вершину этой параболы:

$z'=(6x^2-6x+3)'=12x-6=0 \Rightarrow x=1/2$

При подстановке $x=1/2$ в $x+y-1=0$ получим $y=1/2$

Найдем значение функции в этой точке $M_6(1/2;1/2)$ $\boldsymbol{z(M_6)=3/4+3/4-1-1+2=3/2}$

Рассмотрев значения функции в этих 6 точках приходим к выводу, что наименьшее значение, равное 4/3, функция принимает в точке $M_0(1/3;1/3)$, а наибольшее, равное 3 - в точках $M_3(0;1)$ и $M_5(1;0)$.

Ответ: 3; 4/3.