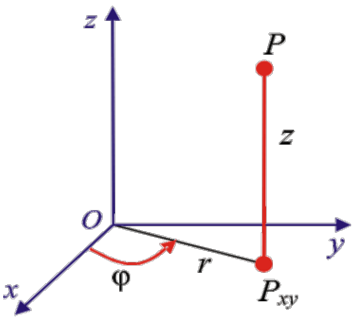
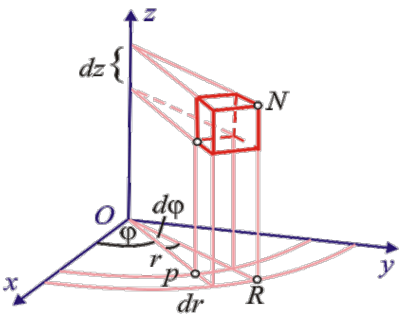
2. Замена переменных в кратных интегралах

2.2. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

В случае цилиндрических координат положение точки P в пространстве определяется тремя числами: φ, r, z, где φ, r – полярные координаты точки F_{xy} – проекции точки P в плоскость Oxy, z – аппликата точки P. Переход от цилиндрических координат к прямоугольным декартовым координатам осуществляется по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z\,.$$





Для вычисления тройного интеграла разобьем пространственную область V на элементарные области координатными поверхностями: $\varphi = \varphi_i$ – полуплоскости, проходящие через ось Oz перпендикулярно плоскости Oxy; $r = r_i$ – круговые цилиндры; $z = z_i$ – плоскости перпендикулярные к оси Oz. Элементарный объем в этом случае вычисляется по формуле $\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta\varphi_i \Delta z_i$

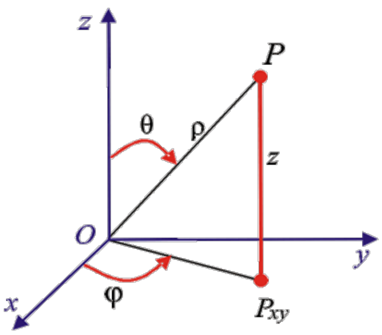
Тройной интеграл по области V от функции $F(\varphi, r, z)$ в цилиндрических координатах имеет вид:

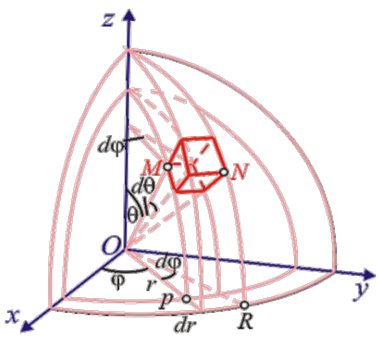
$$\iiint\limits_V F(\varphi, r, z) dV = \iiint\limits_V F(\varphi, r, z) r\, dr d\varphi dz\,.$$

В сферических координатах положение точки P в пространстве определяется числами φ, r, θ: φ – полярный угол точки P_{xy}, r – расстояние от точки P до начала координат, θ – угол между радиус-вектором $\overrightarrow{OP}$ точки P и осью Oz . Связь между сферическими и прямоугольными координатами имеет вид

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta\,.$$

Пространственную область V разобьем на элементарные части координатными поверхностями: $\varphi = \varphi_i$ – полуплоскости, проходящие через ось Oz; $r = r_i$ – сферы с центром в начале координат; $\theta = \theta_i$ – конусы с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью Oz.





Элементарный объем можно найти как объем параллелепипеда с ребрами Δr_i, $r_i\Delta\theta_i$, $r_i\sin\theta_i\Delta\varphi_i$, тогда

$$\Delta V_i = \Delta r_i \cdot r_i\Delta\theta_i \cdot r_i\sin\theta_i \cdot \Delta\varphi_i = r_i^2\sin\theta_i \Delta r_i \Delta\theta_i \Delta\varphi_i\,.$$

Тройной интеграл от функции $F(\varphi, r, \theta)$ по области V в сферических координатах имеет вид:

$$\iiint\limits_V F(\varphi, r, \theta) dV = \iiint\limits_V F(\varphi, r, \theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta\,.$$

?