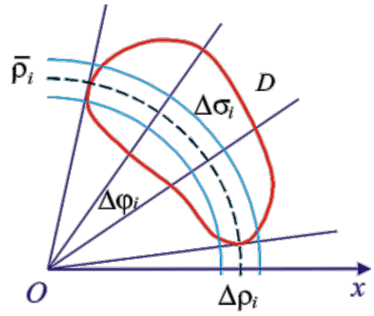
2. Замена переменных в кратных интегралах

2.1. Двойной интеграл в полярных координатах

В плоскости Oxy введем систему полярных координат такую, что полюс ее находится в точке O, а полярная ось совпадает с осью Ox. Тогда декартовы координаты x, y некоторой точки связаны с ее полярными координатами ρ, φ соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi \ .$$

Разобьем область интегрирования D на частичные области $\Delta\sigma_i$ системой координатных линий: $\rho = const$ (концентрические окружности) и $\varphi = const$ (лучи, исходящие из полюса).



В этом случае площадь частичной области можно найти как разность площадей двух секторов, ограниченных лучами φ_{i-1} и $\varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i$ и окружностями ρ_{i-1} и $\rho_{i-1} + \Delta\rho_i$:

$$\Delta\sigma_i \frac{1}{2}(\rho_{i-1} + \Delta\rho_i)^2 \Delta\varphi_i - \frac{1}{2}\rho_{i-1}^2 \Delta\varphi_i = \left(\rho_{i-1} + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right) \Delta\rho_i \Delta\varphi_i \ ,$$

или

$$\Delta\sigma_i = \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\varphi_i \ ,$$

где $\bar{\rho}_i = \rho_{i-1} + \dfrac{\Delta\rho_i}{2}$ – средний радиус между ρ_{i-1} и $\rho_{i-1} + \Delta\rho_i$.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y) d\sigma$.

Составим для него интегральную сумму, выбирая точки $P_i(x_i, y_i)$ лежащими на средних окружностях радиуса $\bar{\rho}_i$, то есть, полагая $x_i = \bar{\rho}_i \cos \varphi_i$, $y_i = \bar{\rho}_i \sin \varphi_i$. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \sum_{n=1}^{n} f(\bar{\rho}_i \cos \varphi_i, \ \bar{\rho}_i \sin \varphi_i)\bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\varphi_i \ .$$

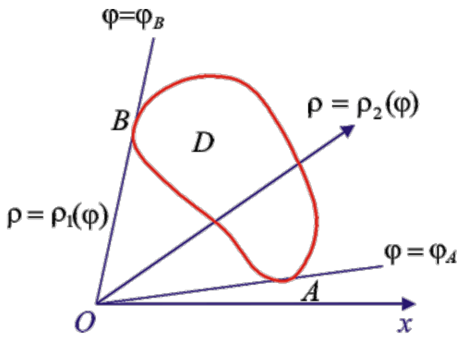
Переходя к пределу, получаем:

$$\iint\limits_D f(x, y) d\sigma = \iint\limits_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\rho \, d\rho d\varphi \ .$$

Если полюс не содержится в области D, пределы интегрирования при переходе к полярным координатам расставляются в соответствии с рисунком по формуле:

$$\iint\limits_D f(x, y) d\sigma = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\rho \, d\rho \ .$$

?



Если полюс лежит внутри области интегрирования, принимают $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi)$ – уравнение границы области.

Пример. Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \left(1 + x^2 + y^2\right)^2 d\sigma \; ; \qquad \text{область } D \; - \; \text{круг } x^2 + y^2 \leq R^2 \; .$$

Решение. Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ в подынтегральной функции:

$$\left(1 + x^2 + y^2\right)^2 = \left(1 + \rho^2\cos^2\varphi^2 + \rho^2\sin^2\varphi^2\right)^2 = \left(1 + \rho^2 +\right)^2$$

Уравнение границы области D в полярных координатах: $\rho = R$. Найдем пределы интегрирования: $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = R$, $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = 2\pi$. Вычислим

$$\iint\limits_D \left(1 + x^2 + y^2\right)^2 d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (1 + \rho^2)^2 \rho \, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{(1 + \rho^2)^3}{3}\Bigg|_0^R d\varphi = \frac{\pi}{3}\left[(1 + R^2)^3 - 1\right] \; .$$

◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►

?