8. Теория вероятностей и математическая статистика

Сайт:	Интернет-институт ТулГУ	Напечатано::	Артемов Александр Евгеньевич
Курс:	Математика 4	Дата:	среда, 17 января 2024, 20:53
Книга:	8. Теория вероятностей и математическая статистика		

Оглавление

1. Случайные события. Элементы комбинаторики. Частота и вероятность

- Понятие случайного события. Классическое определение вероятности;
- Элементы комбинаторики;
- Статистическое определение вероятности;
- Геометрическое определение вероятности.

1.1. Понятие случайного события. Классическое определение вероятности

Теория вероятностей изучает вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий.

Все события можно разделить на три вида:

- достоверные;
- невозможные;
- случайные.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S.

Случайным называется событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Вероятность – количественная нормированная объективная мера уверенности в том, что некоторое случайное событие произойдет.

Далее вместо слов «осуществлена совокупность условий S» будем говорить «произведено испытание». Примеры испытаний: бросок монеты или игрального кубика, выстрел по мишени, извлечение шара из урны с разноцветными шарами. Таким образом, событие является результатом или исходом некоторого испытания.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Примеры несовместных событий: извлечение стандартной и извлечение нестандартной детали из ящика, выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты.

Несколько событий образуют полную группу событий, если в результате испытания наступит хотя бы одно из них. Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий. Примеры полной группы событий:

1. испытание – куплено два лотерейных билета, возможны следующие исходы испытания: первый билет выиграл, второй нет; первый не выиграл, второй выиграл; оба выиграли; оба не выиграли;
2. испытание – выстрел по мишени, возможные исходы испытания: промах и попадание;
3. испытание – бросок игрального кубика, возможные исходы испытания: выпадение одного очка, или двух очков, или трех очков, или четырех очков, или пяти очков, или шести очков.

События называются **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Примеры равновозможных событий:

1. испытание – бросок монеты, возможные исходы испытания – выпадение герба или цифры;
2. испытание – бросок игрального кубика, возможные исходы испытания – выпадение одного очка, или двух очков, или трех очков, или четырех очков, или пяти очков, или шести очков.

Элементарным исходом (элементарным событием) называется каждый из возможных результатов испытания.

Те элементарные исходы, в которых интересующее испытателя событие A наступает, называются **благоприятствующими** этому событию или **благоприятными**.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов испытания к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Вероятность события A определятся формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}\,, \tag{1}$$

где m – число исходов, благоприятствующих событию A,
n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Это определение вероятности называется классическим.

Из определения вероятности следуют ее свойства:

1. вероятность достоверного события равна единице, $m = n$, $P(A) = \frac{n}{n} = 1$;
2. вероятность невозможного события равна нулю, $m = 0$, $P(A) = \frac{0}{n} = 0$;
3. вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей, $0 < m < n$, $0 < \frac{m}{n} < 1$, $0 < P(A) < 1$.

Таким образом, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

1.2. Элементы комбинаторики

На практике часто приходится выбирать из какого-нибудь множества объектов подмножества, обладающие некоторыми свойствами и распределять их по определенному порядку. Например, в группе студентов из 25 человек надо выбрать старосту, его заместителя и профорга или команду из трех человек на спортивные соревнования. Требуется подсчитать, сколькими способами можно сделать такие выборки.

Такие задачи называются комбинаторными, так как в них идет речь о тех или иных комбинациях объектов.

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов некоторого заданного множества. При этом число элементов множества конечно, а их природа не имеет значения. При непосредственном вычислении вероятностей часто используются формулы комбинаторики. Наиболее употребительными являются три вида комбинаций элементов множеств: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ , \tag{2}$$

где n – число элементов рассматриваемого множества,
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ – факториал числа n или n-факториал («эн-факториал») – произведение всех натуральных чисел от единицы до данного натурального числа n включительно.

При решении задач комбинаторики удобно рассматривать$0!$, полагая, по определению, $0! = 1$.

Отметим свойство факториала, которое следует из его определения и будет использоваться в дальнейшем:

$$n! = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{(n-1)} = (n-1)! \cdot n \ . \tag{3}$$

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 так, чтобы каждая цифра входила в изображение числа только один раз?

Решение. Искомые трехзначные числа состоят из одних и тех же цифр и различаются только порядком их расположения. Поэтому искомое количество трехзначных чисел равно числу перестановок из трех элементов: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Эти 6 чисел можно выписать: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Ответ: 6.

Пример 2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы каждая цифра входила в изображение числа только один раз?

Решение: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Пример 3. На четырех карточках написаны буквы А, Б, В, Г. Сколькими способами можно разложить эти буквы друг за другом?

Решение: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \tag{4}$$

или

$$C_n^m = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} \tag{4 ’}$$

Число сочетаний – это число способов, которыми можно выбрать из n различных элементов группу, состоящую из m элементов.

Пример 4. Сколькими способами можно выбрать три кубика из семи разноцветных кубиков, находящихся в коробке?

Решение. Искомое число способов определяется как число сочетаний из семи кубиков по три с помощью формулы (4):

$$C_1^3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \ .$$

Ответ: 35.

Число сочетаний обладает свойством симметрии:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ , \tag{5}$$

то есть число способов, которыми можно выбрать m элементов из n элементов, равно числу способов, которыми можно выбрать n - m элементов из n элементов. Другими словами, число способов выбрать m элементов из n элементов равно числу способов оставить n - m элементов из n элементов, или число выборок равно числу остатков.

Пример 5. Сколькими способами можно оставить четыре кубика из семи разноцветных кубиков, находящихся в коробке?

Решение. Искомое число способов определяется как число сочетаний из семи кубиков по четыре с помощью формулы (4): C_7^4. Пользуясь свойством (5), получим $C_7^4 = C_7^{7-4} = 35$.

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число размещений

$$A_n^m = P_m C_n^m = n\left(n-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-m+1\right)\ . \tag{6}$$

Если некоторые элементы конечного множества повторяются, то число комбинаций с повторениями определяется по другим формулам:

1. число перестановок с повторениями

$$P_n\left(n_1 n_2,\ldots,n_k\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot\ldots\cdot n_k}\ ; \tag{7}$$

2. число сочетаний с повторениями

$$\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m\ ; \tag{8}$$

3. число размещений с повторениями

$$\widehat{A}_n^m = n^m\ . \tag{9}$$

При решении задач комбинаторики используются следующие правила:

1. **правило суммы**: если объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами;
2. **правило произведения**: если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать n способами, то пару объектов $\left(A,B\right)$ в указанном порядке можно выбрать mn способами.

1.3. Статистическое определение вероятности

Наряду с вероятностью одним из основных понятий теории вероятностей является относительная частота.

Относительная частота события – это отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}\ , \tag{10}$$

где m – число появлений события A,
n – общее число испытаний.

Определение вероятности не требует, чтобы испытания проводились в действительности. Определение же относительной частоты предполагает, что испытания были проведены фактически, то есть вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся опыты, в каждом из которых число испытаний велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного значения. Это постоянное значение равно вероятности появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Слабая сторона классического определения вероятности состоит в том, что часто бывает невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Также трудно бывает указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. По этой причине наряду с классическим определением вероятности используются другие определения, в частности, статистическое определение: в качестве статистической вероятности события принимается относительная частота этого события или число, близкое к ней.

Свойства вероятности, следующие из ее классического определения, сохраняются и при статистическом определении.

Для существования статистической вероятности события A требуется выполнение следующих условий:

1. возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A наступает или не наступает;
2. устойчивость относительных частот появления события A в различных сериях большого числа испытаний.

Пример 6. Стрелок произвел 20 выстрелов по мишени и 17 раз попал в нее. Найти относительную частоту попаданий в мишень.

Решение. Относительную частоту попаданий в мишень найдем по формуле (10): $W = \frac{17}{20} = 0{,}85$.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

1.4. Геометрическое определение вероятности

Для того чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят геометрические вероятности – вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.)

Пусть отрезок A_1B_1 длины l составляет часть отрезка AB длины l. На отрезок AB наудачу поставлена точка.

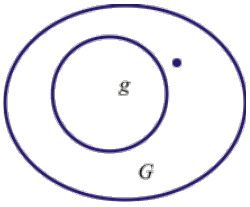
Это означает выполнение следующих предположений:

1. поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка AB;
2. вероятность попадания точки на отрезок A_1B_1 пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка AB.

В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок A_1B_1 определяется формулой

$$P = \frac{l}{L}\ . \tag{11}$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений:



1. поставленная точка может оказаться в любой точке фигуры G;
2. вероятность попадания точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее формы, ни от ее расположения относительно фигуры G.

В этих предположениях вероятность попадания точки в фигуру g определяется формулой

$$P = \frac{S_g}{S_G}\ , \tag{12}$$

где S_g– площадь фигуры g,
S_G – площадь фигуры G.

Данные выше определения являются частными случаями общего определения геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области mes, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу (в указанном выше смысле) в область g – часть области G, определяется формулой

$$P = \frac{mes\,(g)}{mes\,(G)}\ . \tag{13}$$

При классическом определении вероятность достоверного события равна единице, а невозможного – нулю. Справедливы и обратные утверждения: если вероятность события равна единице, то событие достоверно; если нулю – то невозможно. В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, но это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным.

Пример 7. На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусами 1 и 2 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное двумя окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

Решение.

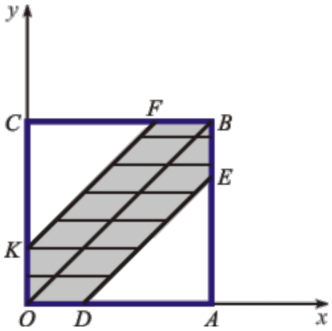
Площадь кольца $S_g = \pi\left(2^2 - 1^2\right) = 3\pi$.

Площадь большого круга $S_G = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

Искомую вероятность найдем по формуле (12): $P = \dfrac{3\pi}{4\pi} = 0,75$.

Пример 8. Задача о встрече. Два студента договорились встретиться в определенном месте между 17 и 18 часами дня. По договоренности, студент, пришедший первым, ждет второго в течение 15 минут, а потом уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает время своего прихода между 17 и 18 часами.

Решение. Будем вести отсчет времени в минутах от 17:00. Обозначим моменты прихода на встречу первого и второго студента соответственно через x и y. По условию задачи величины x и y могут принять любые значения от 0 до 60 минут, то есть должны выполняться двойные неравенства: $0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60$. Введем прямоугольную систему координат Oxy. В этой системе координат указанным двойным неравенствам удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих квадрату $OABC$ (рисунок). Поэтому квадрат $OABC$ является фигурой G, координаты точек которой представляют собой все возможные значения моментов прихода студентов на встречу.



Встреча состоится, если разность между моментами прихода студентов по абсолютной величине не превысит 15 минут, то есть если $|x-y| \leq 15$. Это неравенство эквивалентно двойному неравенству $-15 \leq x-y \leq 15$ или системе неравенств

$$\begin{cases} y \leq x+15\ , \\ y \geq x-15\ . \end{cases} \tag{14}$$

Точки квадрата $OABC$, координаты которых удовлетворяют первому неравенству системы, лежат ниже прямой $y=x+15$, а точки, координаты которых удовлетворяют второму неравенству системы, лежат выше прямой $y=x-15$. Из рисунка видно, что множество точек, удовлетворяющих системе неравенств (14), образует шестиугольник $ODEBFK$. Этот шестиугольник является фигурой g, координаты точек которой определяют моменты прихода студентов x и y, благоприятные для их встречи.

Таким образом, вероятность встречи студентов

$$P=\frac{S_{ODEBFK}}{S_{OABC}}=\frac{S_{OABC}-2S_{DAE}}{S_{OABC}}=\frac{60^2-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(60-15)^2}{60^2}=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16}\ .$$

Ответ: $P=\dfrac{7}{16}$.

2. Основные формулы для вычисления вероятности

- Теоремы сложения и умножения вероятностей;
- Формула полной вероятности;
- Формула Байеса.

2.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой $A+B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении события A, или события B , или обоих этих событий.

Пример 1. Производится бросок игрального кубика. Событие A – выпадение четного числа очков (2, 4 или 6). Событие B – выпадение числа очков, кратного трем (3 или 6). Суммой $A+B$ этих событий будет выпадение числа очков, кратного двум ИЛИ трем (2, 3, 4 или 6).

Если события A и B несовместные, то $A+B$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Например, событие $A+B+C$ состоит в появлении одного из следующих событий: A, B, C, A и B, A и C, B и C, A и B и C.

Теорема 1 (теорема сложения вероятностей несовместных событий): вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right).$$

Доказательство.

По классическому определению вероятности, $P\left(A\right)=\dfrac{m_1}{n}$ – вероятность события A, $P\left(A\right)=\dfrac{m_2}{n}$ – вероятность события B.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению или события A, или события B, равно m_1+m_2. Тогда вероятность события $A+B$

$$P\left(A+B\right)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P\left(A\right)+P\left(B\right).$$

Теорема доказана.

Следствие: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(A_1+A_2+A_3+\ldots A_n\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)+\ldots P\left(A_n\right).$$

Доказательство.

Проведем доказательство для трех попарно несовместных событий A, B, C. События $A+B$ и C несовместны, поэтому к ним можно применить теорему 1: $P(A+B+C)=P((A+B)+C)=P(A+B)+P(C)$. События A и B также несовместны, тогда по теореме 1:

$$P(A+B+C)=P((A+B)+C)=P(A+B)+P(C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

Доказательство для большего числа попарно несовместных событий аналогично.

Пример 2. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих, 15 белых. Наудачу извлекают один шар. Найти вероятность появления цветного шара. (Здесь и далее будем называть цветным шар любого цвета кроме белого.)

Решение. Цветной шар – красный ИЛИ синий. Событие A – из урны извлечен красный шар, $P\left(A\right)=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$. Событие B – из урны извлечен синий шар, $P\left(A\right)=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$. Событие $A+B$ – из урны извлечен цветной шар. События A и B несовместны, тогда по теореме сложения несовместных событий:

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, число элементарных исходов, благоприятных для появления цветного шара, $m=10+5=15$. Тогда, по определению вероятности,

$$P\left(A+B\right)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Теорема 2: сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образующих полную группу, равна единице,

$$P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots.+P\left(A_n\right)=1.$$

Доказательство.

Появление одного из событий полной группы достоверно, так как в одном испытании обязательно должно наступить одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots.+P\left(A_n\right)=1. \qquad (1)$$

События полной группы попарно несовместны, и по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots.+P\left(AA_n\right)=1. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим

$$P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots.+P\left(A_n\right)=1.$$

Теорема доказана.

Противоположными событиями называются два единственно возможных события, образующих полную группу.

Примеры противоположных событий:

1. выпадение герба и выпадение цифры при одном броске монеты;
2. попадание и промах при одном выстреле по мишени.

Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$.

Теорема 3: сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P\left(A\right) + P\left(\overline{A}\right) = 1\ .$$

Доказательство.

Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице. Теорема доказана.

Часто вероятность одного из двух противоположных событий обозначают p, а другого – q. Тогда в силу предыдущей теоремы $p + q = 1$.

При решении задач на отыскание вероятности события A бывает удобно сначала вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, а потом найти вероятность события A по формуле, следующей из теоремы 3:

$$P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right)\ . \tag{3}$$

Пример 3. В урне 50 шаров: 10 красных, 5 синих, 15 желтых, 20 белых. Наудачу извлекают один шар. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Событие A – из урны извлечен цветной шар (безразлично, красный, синий или желтый), тогда противоположное событие $\overline{A}$ – из урны извлечен белый шар, $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$. По формуле (3) $P\left(A\right) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\dfrac{3}{5}$.

Произведением двух событий A и B называется событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Например, если событие A – деталь стандартная, событие B – деталь окрашенная, то событие AB – деталь годная и окрашенная.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Условной вероятностью $P_A\left(B\right)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, определяется по формуле

$$P_A\left(B\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}\ . \tag{4}$$

В выражении (4) $P\left(A\right) \neq 0$, так как событие A уже наступило.

Теорема 4 (теорема умножения вероятностей): вероятность появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило,

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right)P_A\left(B\right)\ . \tag{5}$$

Доказательство.

По определению условной вероятности, $P_A\left(B\right) = \dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}$. Из этой формулы выражается вероятность события AB: $P\left(AB\right) = P\left(A\right)P_A\left(B\right)$. Теорема доказана.

Вероятность события BA: $P\left(BA\right) = P\left(B\right)P_B\left(A\right)$. Событие AB не отличается от события BA, поэтому $P\left(AB\right) = P\left(B\right)P_B\left(A\right)$, тогда

$$P\left(A\right)P_A\left(B\right) = P\left(B\right)P_B\left(A\right)\ . \tag{6}$$

Следствие теоремы умножения вероятностей: вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}P(A_{)}P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)\ . \tag{7}$$

Порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, то есть безразлично, какое событие считать первым, какое вторым и т.д.

Пример 4. В ящике лежат 4 тетради в клетку и 6 в линейку. Школьник наугад взял одну тетрадь, а затем вторую. Найти вероятность того, что первой взята тетрадь в клетку, а второй – в линейку.

Решение. Событие A – первой взята тетрадь в клетку, $P(A) = \frac{4}{4+6} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Событие B – второй взята тетрадь в линейку. Вычислим вероятность этого события в предположении, что событие A наступило, то есть его условную вероятность $P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Вероятность события AB (первой взята тетрадь в клетку, а второй – в линейку) по теореме умножения вероятностей $P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

Ответ: $\frac{4}{15}$.

Событие B называется **независимым от события** A, если появление события A не изменяет вероятности события B, то есть если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B) \ . \tag{8}$$

Подставим выражение (8) в соотношение (6):

$$P(A)P(B) = P(B)P_B(A) \ .$$

Тогда

$$P_B(B) = P(A) \ , \tag{9}$$

то есть для независимых событий условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B, равно его безусловной вероятности.

Теорема 5 (теорема умножения вероятностей независимых событий): вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B) \ . \tag{10}$$

Два события называются **независимыми**, если вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий. В противном случае события называются **зависимыми**.

Пример 5. В первом ящике 300 болтов, из которых 75 с резьбой M12, а остальные с резьбой M10. Во втором ящике 200 гаек, из которых 80 с резьбой M12, а остальные с резьбой M14. Рабочий берет наудачу один болт и одну гайку. Найти вероятность того, что они подойдут друг другу.

Решение. Событие A – резьба взятого болта M12, $P(A) = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$. Событие B – резьба взятой гайки M12, $P(B) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$. Болт и гайка подойдут друг другу, если будут иметь резьбу M12, то есть если наступит событие AB. События A и B независимые, тогда по теореме 5 $P(AB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

Ответ: $\frac{1}{10}$.

Если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Несколько событий называются **попарно независимыми**, если каждые два из них независимы.

Несколько событий называются **независимыми в совокупности** (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных событий.

Например, если события A, B и C независимы в совокупности, то независимы события A и B, A и C, B и C, A и BC, B и AC, C и AB.

Следствие теоремы умножения независимых событий: вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \, . \tag{11}$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то противоположные им события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$тоже независимы в совокупности.

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, или некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Требуется определить вероятность наступления хотя бы одного из этих событий. Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий.

Теорема 6: вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - q_1q_2\ldots q_n \ . \tag{12}$$

Доказательство.

Пусть событие A состоит в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Событие $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ – ни одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не наступило. События A и$\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ являются противоположными, следовательно, по теореме 3, сумма их вероятностей равна единице: $P(A) + P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}\right) = 1$. Из этого равенства, используя теорему 5 умножения вероятностей для независимых событий, получим

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\ldots P\left(\overline{A_n}\right)$$

или

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \ .$$

Теорема доказана.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковые вероятности, равные p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n \ . \tag{13}$$

Пример 6. Четыре стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности попадания в мишень для каждого из них равны 0,9, 0,8, 0,7 и 0,6. Найти вероятность того, что мишень поражена.

Решение.

Событие A – мишень поражена. Событие $\overline{A}$ – мишень не поражена. Вероятности поражения мишени каждым стрелком соответственно равны $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$, $p_4 = 0,6$, а вероятности промаха $q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}3$, $q_4 = 0{,}4$. Событие $\overline{A}$ наступит, если все четыре стрелка промахнутся, то есть $P\left(\overline{A}\right) = q_1 q_2 q_3 q_4$, тогда

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0,9976 \ .$$

Ответ: 0,9976.

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 7. Событие A – появление двух очков при одном броске игрального кубика. Событие B – появление четного числа очков. События A и B совместные.

Теорема 7 (теорема сложения вероятностей совместных событий): вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \, . \tag{14}$$

Доказательство.

По условию теоремы, события A и B совместны. Поэтому событие $A + B$ произойдет, если наступит одно из трех несовместных событий $\overline{A}B$, $A\overline{B}$ или AB. По теореме 1 сложения вероятностей несовместных событий,

$$P(A+B) = P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) + P(AB) \, . \tag{15}$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий $A\overline{B}$ или AB. По теореме 1 сложения вероятностей несовместных событий,$P(A) = P\left(A\overline{B}\right) + P(AB)$, откуда следует, что

$$P\left(A\overline{B}\right) = P(A) - P(AB) \ \ . \tag{16}$$

На основании этой же теоремы

$$P(B) = P\left(\overline{A}B\right) + P(AB) \ \ ,$$

откуда следует, что

$$P\left(\overline{A}B\right) = P(B) - P(AB) \, . \tag{17}$$

Подставляя выражения (16) и (17) в формулу (15), получим

$$P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) \, .$$

Теорема доказана.

Пример 8. Два орудия стреляют по цели, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,7, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что цель поражена.

Решение.

Событие A – попадание в цель первого орудия, $P(A) = 0{,}7$, событие B – попадание в цель второго орудия, $P(B) = 0{,}6$. События A и B совместные, тогда по теореме 7 : $P(A+B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88$.

Ответ: 0,88.

2.2. Формула полной вероятности

Следствием теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей является формула полной вероятности.

Пусть событие A может наступить при условии наступления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, которые образуют полную группу. Эти события называются гипотезами.

Теорема 8: вероятность события A, которое может наступить только при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$ образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) P_{H_n}(A) \tag{18}$$

Доказательство.

Событие A может наступить, если наступит одно из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, то есть наступление события A означает появление одного из несовместных событий $H_1A, H_2A, \ldots, H_nA$. По теореме 1 сложения вероятностей несовместных событий, вероятность события A

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) P_{H_n}(A) \tag{19}$$

Преобразуем каждое слагаемое в правой части выражения (19), используя теорему 4 умножения вероятностей:

$$P(H_1A) = P(H_1) P_{H_1}(A), P(H_2A) = P(H_2) P_{H_2}(A), \ldots, P(H_nA) = P(H_n) P_{H_n}(A)$$

Подставим правые части этих равенств в формулу (19):

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) P_{H_n}(A)$$

Теорема доказана.

Формула (18) называется формулой полной вероятности.

Пример 9. Имеется две урны с черными и белыми шарами. В первой урне 10 черных и 20 белых шаров, во второй – 20 черных и 10 белых. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из наудачу взятой урны, будет белым.

Решение.

Событие A – наудачу извлеченный шар белый. Гипотеза H_1 – шар взят из первой урны, гипотеза H_2 – шар взят из второй урны. Урна выбирается наудачу, поэтому вероятности гипотез одинаковы: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Условные вероятности события A при каждой из введенных гипотез $P_{H_1}(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, $P_{H_2}(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2.3. Формула Байеса

Пусть произведено испытание, в результате которого наступило событие A. Определим, как изменились вероятности гипотез в связи с тем, что событие A наступило, то есть будем искать условные вероятности $P_A(H_1), P_A(H_2), \ldots, P_A(H_n)$.

Найдем условную вероятность $P_A(H_1)$. По теореме умножения вероятностей 4 (формула (5)), $P(AH_1) = P(A)P_A(H_1) = P(H_1)P_{H_1}(A)$, откуда:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} .$$

Заменяя $P(A)$ по формуле полной вероятности, получим:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_n)P_{H_n}(A)} . \tag{20}$$

Аналогично может быть вычислена условная вероятность любой гипотезы $H_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1))P_{H_1}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)} . \tag{21}$$

Полученные формулы (20), (21) называются формулами Байеса. Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример 10. Имеется две урны с черными и белыми шарами. В первой урне 10 черных и 20 белых шаров, во второй – 20 черных и 10 белых. Шар, наудачу извлеченный из наудачу взятой урны, оказался белым. Найти вероятность того, что он извлечен из первой урны.

Решение.

Событие A – наудачу извлеченный шар белый. Гипотеза H_1 – шар взят из первой урны, гипотеза H_2 – шар взят из второй урны. Урна выбирается наудачу, поэтому вероятности гипотез одинаковы: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Условные вероятности события A при каждой из введенных гипотез $P_{H_1}(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, $P_{H_2}(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Вероятность события A $P(A) = \frac{1}{2}$. Условную вероятность гипотезы H_1 найдем по формуле Байеса (20):

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} .$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

3. Схема испытаний Бернулли. Формулы Бернулли и Пуассона

При практическом применении теории вероятностей часто встречаются задачи, в которых одно и то же испытание повторяется несколько раз. В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A. При этом испытателя интересует не результат каждого отдельного испытания, а общее число появлений события A в результате серии испытаний.

Испытания называются **независимыми** относительно события A, если в каждом испытании вероятность события A не зависит от исходов других испытаний.

Будем рассматривать такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$.

Введем понятие **сложного события**, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называются простыми.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться или не появиться, $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A появится k раз и не появится $n - k$ раз, причем не требуется, чтобы событие A наступило в определенной последовательности. Например, при трех появлениях события A в четырех испытаниях возможны следующие сложные события: $AAA\overline{A}$, $AA\overline{A}A$, $A\overline{A}AA$, $\overline{A}AAA$.

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий, равна $P_1 = p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k, то есть C_n^k. Эти сложные события несовместны, тогда, по теореме сложения вероятностей несовместных событий, искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Вероятности этих сложных событий одинаковы, поэтому вероятность появления события A k раз в n испытаниях равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \ . \qquad (1)$$

Эта формула называется **формулой Бернулли**.

Пример 1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? Ничьи во внимание не принимаются.

Решение. Так как противники равносильные, вероятности выигрыша и проигрыша в одной партии для каждого из них равны, $p = 1 = \frac{1}{2}$. Найдем вероятность выиграть одну партию из двух по формуле Бернулли (1):

$$P_2(1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Аналогично найдем вероятность выиграть две партии из четырех:

$$P_4(1) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} \ .$$

Так как $P_1(1) > P_4(2)$, то вероятнее выиграть одну партию из двух.

С помощью формулы Бернулли можно вычислить следующие вероятности:

1. вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит менее m раз,

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1) \ ; \qquad (2)$$

2. вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит более m раз,

$$P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n) \ ; \qquad (3)$$

3. вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее m раз,

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n) \ ; \qquad (4)$$

4. вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не более m раз

$$P_n(k \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m) \ . \qquad (5)$$

Пример 2. Игральный кубик бросают пять раз. Найти вероятность того, что одно очко выпадет:

1. менее трех раз;
2. не менее трех раз.

Решение. Вероятность того, что при одном броске кубика выпадет одно очко, равна $p = \frac{1}{6}$. Вероятность того, что одно очко не выпадет, $q = \frac{5}{6}$. Вероятность того, что при пяти бросках кубика одно очко выпадет менее трех раз, найдем по формуле (2):

$$P_5(k<3)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=C_5^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-0}+C_5^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-1}+C_5^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}\approx 0{,}9645\ .$$

Вероятность того, что при пяти бросках кубика одно очко выпадет не менее трех раз, найдем по формуле (4):

$$P_5(k\geq 3)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=C_5^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}+C_5^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-4}+C_5^5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-5}\approx 0{,}0355\ .$$

Заметим, что события «одно очко выпало менее пяти раз» и «одно очко выпало НЕ менее пяти раз» противоположные. Поэтому сумма их вероятностей равна 1.

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события A в каждом испытании очень мала, то используется приближенная формула

$$P_n(k)\approx\lambda^k\frac{e^{-k}}{k!}\ , \tag{6}$$

где $\lambda=np$ – среднее число появлений события A в n независимых испытаниях.

Эта формула называется **формулой Пуассона**.

Пример 3. Экспериментатор 1000 раз снимает показания измерительных приборов. Вероятность того, что погрешность при снятии показания превысит допустимую, равна 0,01. Найти вероятность того, что 5 показаний будут сняты с превышением допустимой погрешности.

Решение. Событие A – погрешность при снятии одного показания прибора превысит допустимую, $P(A)=p=0{,}01$ (вероятность события A мала). Число снятых показаний $n=1000$ велико. Поэтому для нахождения вероятности того, что 5 показаний будут сняты с превышением допустимой погрешности, можно использовать формулу Пуассона $(\lambda=1000\cdot 0{,}01=10)$:

$$P_{1000}(5)\approx 10^5\cdot\frac{e^{-10}}{5!}\approx 0{,}03783\ .$$

Ответ: $P_{1000}(5)\approx 0{,}03783$.

4. Случайные величины

- Понятие случайной величины;
- Числовые характеристики случайных величин;
- Законы распределения дискретных случайных величин.

4.1. Понятие случайной величины

Случайной называется величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Будем обозначать случайные величины X , Y, Z, а их возможные значения – x_i, y_i, z_i.

Дискретной (или прерывной) называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности:

$$\begin{matrix} X x_1 & x_2 \ldots x_n \\ p p_1 & p_2 \ldots p_n \end{matrix} . \tag{1}$$

В одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, поэтому события $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ образуют полную группу. Следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 . \tag{2}$$

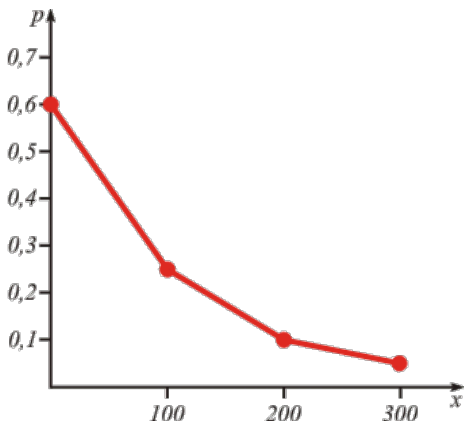
Пример 1. В лотерее участвует 100 билетов. Разыгрывается 5 выигрышей по 300 рублей, 10 выигрышей по 200 рублей и 25 выигрышей по 100 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – размера возможного выигрыша для владельца одного билета.

Решение. Случайная величина X может принимать следующие возможные значения: 0, 100, 200, 300. Вероятности этих возможных значений 0,6; 0,25; 0,1 и 0,05 соответственно. Тогда закон распределения случайной величины X имеет вид:

$$\begin{matrix} X & 0 & 100 & 200 & 300 \\ p & 0,6 & 0,25 & 0,1 & 0,05 \end{matrix} , \qquad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,6 + 0,25 + 0,1 + 0,05 = 1 .$$

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной системе координат строят точки с координатами $(x_i; p_i)$, а затем соединяют их отрезками прямых. Полученная фигура называется многоугольником распределения.

Пример 2. Построить многоугольник распределения для закона распределения из примера 1.



4.2. Числовые характеристики случайных величин

Часто закон распределения случайной величины бывает неизвестен, и приходится пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называются числовыми характеристиками случайных величин.

Основными числовыми характеристиками дискретных и непрерывных случайных величин являются:

- математическое ожидание;
- дисперсия;
- среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$MX = \sum_{i-1}^{n} x_i p_i \qquad \text{или} \qquad MX = \sum_{i-1}^{\infty} x_i p_i \ . \tag{3}$$

Первая из формул (3) справедлива для конечного числа возможных значений дискретной случайной величины, вторая – для бесконечного. Математическое ожидание является неслучайной (постоянной) величиной.

Пусть вероятность события A равна p. Случайная величина X – число появлений события A в одном испытании – может принимать два значения: $x_1 = 1$ (событие A наступило) с вероятностью p и $x_2 = 0$ (событие A не наступило) с вероятностью $q = 1 - p$. Математическое ожидание такой случайной величины X $MX = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, то есть математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Размерность математического ожидания совпадает с размерностью случайной величины X.

Свойства математического ожидания:

1. математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине,

$$MC = C, \qquad C - const \ ; \tag{4}$$

2. постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания,

$$M(CX) = CMX, \qquad C - const \ ; \tag{5}$$

3. для формулировки следующего свойства математического ожидания дадим определения. Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Несколько случайных величин называются взаимно независимыми, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные. Определим произведение независимых случайных величин X и Y как случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения случайной величины X на каждое возможное значение случайной величины Y. Вероятности возможных значений произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений множителей. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий,

$$M(XY) = MX \cdot MY. \tag{6}$$

Следствие свойства 3: математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий,

$$M(X_1 X_2 \,..\, X_n) = MX_1 \cdot MX_2 \cdot \ldots \cdot MX_n \ ; \tag{7}$$

4. определим сумму случайных величин X и Y как случайную величину $X + Y$, возможные значения которой равны сумме каждого возможного значения случайной величины X и каждого возможного значения случайной величины Y. Вероятности возможных значений случайной величины $X + Y$ для независимых величин X и Y равны произведениям вероятностей слагаемых, для зависимых величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность другого. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых,

$$M(X + Y) = MX + MY. \tag{8}$$

Следствие свойства 4: математическое ожидание суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равно сумме их математических ожиданий,

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = MX_1 + MX_2 + \ldots + MX_n \ . \tag{9}$$

Отклонением называется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием. Математическое ожидание отклонения случайной величины равно нулю:

$$M(X - MX) = MX - M(MX) = MX - MX = 0 \ . \tag{10}$$

Центрированной случайной величиной $\mathring{X}$ называется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{X} = X - MX, \qquad M\overset{\circ}{X} = 0\,. \tag{11}$$

Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$DX = M(X - MX)^2\,. \tag{12}$$

Дисперсия случайной величины является неслучайной (постоянной) величиной.

Теорема 1: дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания,

$$DX = MX^2 - (MX)^2\,. \tag{13}$$

Доказательство.

$$DX = M(X - MX)^2 = M\left[X^2 - 2XMX + (MX)^2\right] = M(X)^2 - M\,(2XMX) + M\left[(MX)^2\right] = M\left(X^2\right) - 2MXMX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2\,.$$

Теорема доказана.

Размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины X.

Свойства дисперсии:

1. дисперсия постоянной величины C равна нулю,

$$DC = 0, \qquad C - const\,; \tag{14}$$

2. постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат,

$$D\,(CX) = C^2DX, \qquad C - const\,; \tag{15}$$

3. дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин,

$$D\,(X + Y) = DX + DY\,. \tag{16}$$

Следствия свойства 3:

- дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин,

$$D\,(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \ldots DX_n\,; \tag{17}$$

- дисперсия суммы постоянной величины и случайной величины равна дисперсии случайной величины,

$$D\,(C + X) = DC + DX = 0 + DX = DX\,; \tag{18}$$

4. дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин,

$$D\,(X - Y) = DX + D\,(-Y) = DX + (-1)^2DY = DX\,; \tag{19}$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{DX}\,. \tag{20}$$

Среднее квадратическое отклонение является неслучайной (постоянной) величиной. Размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью случайной величины X. Поэтому в случаях, когда надо, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, используется среднее квадратическое отклонение, а не дисперсия.

Теорема 2: среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин,

$$\sigma\,(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2\,(X_1) + \sigma^2\,(X_2) + \ldots + \sigma^2\,(X_n)}\,. \tag{21}$$

Доказательство.

По свойствам дисперсии (формула (17), дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин

$$D\,(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n\,.$$

Тогда

$$\sqrt{D\,(X_1 + X_2 + X_n)} = \sqrt{DX_1 + DX_2 + DX_n}\,.$$

Заменяя дисперсии под знаками радикалов на соответствующие квадраты средних квадратических отклонений, получим

$$\sqrt{DX_1 + DX_2 + DX_n} = \sqrt{\sigma^2\,(X_1) + \sigma^2\,(X_2) + \ldots + \sigma^2\,(X_n)}\,.$$

Теорема доказана.

4.3. Законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальный закон распределения. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться или не появиться. Вероятность появления события A во всех испытаниях постоянна и равна p.

Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях. Найдем закон распределения случайной величины X. Для этого надо определить возможные значения X и их вероятности. Возможные значения $X: x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_{n+1} = n$. Вероятности этих возможных значений определяются по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n \ . \tag{22}$$

Эта формула является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли, называется **биномиальным**, так как правую часть равенства(22) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n q^0 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} \ldots + C_n^0 p^0 q^n \ .$$

Таблица биномиального закона имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} X & 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & n \\ p & q^n & C_n^1 p q^{n-q} & \cdots & C_n^k p^k q^{n-k} & \cdots & p^n \end{array} \ . \tag{23}$$

Пример 3. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

Решение. Событие A – выпадение герба при одном броске монеты. Вероятность появления события A при каждом броске постоянна и равна $p = 0,5$. Поэтому случайная величина X – число выпадений герба – распределена по биномиальному закону. Найдем закон распределения этой случайной величины по формулам (23):

$$\begin{array}{cccc} X & 0 & 1 & 2 \\ p & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{array} \ .$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$MX = np \ . \tag{24}$$

Дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании,

$$DX = npq \ . \tag{25}$$

Закон распределения Пуассона. В случаях, когда n велико, а вероятность p мала, используется асимптотическая формула Пуассона. Найдем вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события A очень мала, это событие наступит ровно k раз. При этом предполагается, что произведение np сохраняет постоянное значение $np = \lambda$. По формуле Бернулли вычислим вероятность

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \ ,$$

но $np = \lambda$, $p = \dfrac{\lambda}{n}$, тогда

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \ .$$

Учитывая, что n имеет очень большое значение, вместо $P_n(k)$ найдем $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$. Так как произведение np постоянно и равно λ, то при $n \to \infty p \to 0$,

$$P_n \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldotp\ldotp \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot 1 \ .$$

Формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ . \tag{26}$$

выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) случайных событий.

Числовые характеристики дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона:

$$MX = \lambda, \qquad DX = \lambda \ . \tag{27}$$

Геометрический закон распределения. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна $p\,(0 < p < 1)$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A, то есть если событие A появилось в k-ом испытании, то в предыдущих k-1 испытании оно не появилось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые надо провести до первого появления события A. Возможные значения $X : x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_k = k$. Вероятность того, что в первых k-1 испытаниях событие A не наступило, а в k-ом испытании появилось, по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P\left(X = k\right) = q^{k-1}p\ . \tag{28}$$

Полагая в формуле (28) $k = 1, 2, \ldots$, получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем $q\left(0 < q < 1\right)$:

$$p, qp, q^2p, \ldots, q^{k-1}p, \ldots\ . \tag{29}$$

Поэтому распределение (28) называется **геометрическим** .

Сумма вероятностей (28) является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (29):

$$p + qp + q^2p + \ldots + q^{k-1}p + \ldots = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1\ .$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины, распределенной по геометрическому закону:

$$MX = \frac{1}{p}, DX = \frac{q}{p^2}\ . \tag{30}$$

Гипергеометрический закон распределения. Для того чтобы дать определение гипергеометрического распределения, рассмотрим задачу. Пусть в партии из N изделий M стандартных $\left(M < N\right)$. Из партии случайным образом отбирают n изделий. Каждое изделие быть извлечено с одинаковой вероятностью. Отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию. Поэтому формула Бернулли здесь неприменима.

Обозначим X случайную величину – число m стандартных изделий среди n отобранных. Возможные значения случайной величины $X : 0, 1, 2, \ldots, min\left(M, n\right)$. Вероятность того, что $X = m$,

$$P\left(X = m\right) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\ . \tag{31}$$

Эта формула определяет распределение вероятностей, которое называется гипергеометрическим. Это распределение определяется тремя параметрами N, M, n.

Числовые характеристики дискретной случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону:

$$MX = \frac{nM}{N}, \qquad DX = \frac{nM}{N-1}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n}{N}\right)\ . \tag{32}$$

5. Непрерывные случайные величины

- Функции распределения вероятностей случайной величины;
- Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины;
- Числовые характеристики непрерывных случайных величин ;
- Законы распределения непрерывных случайных величин.

5.1. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Непрерывная случайная величина в отличие от дискретной не может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Для задания случайных величин любого типа (дискретных и непрерывных) вводятся функции распределения вероятностей случайных величин.

Пусть x – действительное число. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть вероятность события $X < x$, обозначим $F(x)$.

Функцией распределения называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x) \ . \qquad (1)$$

Геометрический смысл этого равенства следующий: $F(x)$ – это вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Определение функции распределения справедливо и для дискретных, и для непрерывных случайных величин.

Пример 1. Монета брошена 2 раза. Найти функцию распределения случайной величины X – числа выпадений герба – и построить ее график.

Решение. Случайная величина X – число выпадений герба – распределена по биномиальному закону. Закон распределения этой случайной величины имеет вид

X	0	1	2
p	0,25	0,5	0,25

Найдем функцию распределения случайной величины X по определению, используя формулу (1). Если $x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = 0$, так как случайная величина X не имеет отрицательных возможных значений. Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0,25$, так как X может принять значение 0. Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < 2) = P(0) + P(1) = 0,25 + 0,5 = 0,75$, так как X может принять значения 0 или 1, причем эти события несовместны. Если $x > 2$, то в этом случае $F(x) = P(X \le 2) = 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1$. Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 0,25, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 0,75, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Построим график этой функции.

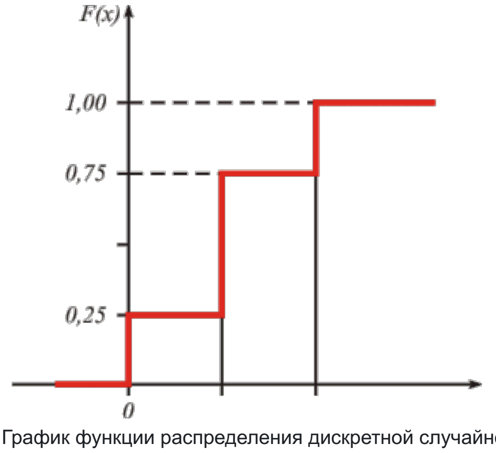


График функции распределения дискретной случайной величины

Случайная величина называется **непрерывной**, если ее функция распределения является непрерывной, кусочно-дифференцируемой функцией с непрерывной производной.

Свойства функции распределения:

1. значения функции распределения принадлежат отрезку $[0, 1]$,

$$0 \le F(x) \le 1 \ . \qquad (2)$$

2. $F(x)$ – неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
   Следствия свойства 2:
   - вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $[a, b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале,

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) \ . \qquad (3)$$

- вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю,

$$P(X=a)=0\ . \tag{4}$$

3. если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a,b), то $F(x)=0 \quad \text{при} \quad x\le\ a, F(x)=1 \quad \text{при} \quad x\ge b$.

Следствие свойства 3: если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей оси x, то справедливы предельные соотношения

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=0, \lim_{x\to\infty}F(x)=1\ . \tag{5}$$

5.2. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которая называется плотностью распределения или плотностью вероятности.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$ – первая производная от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) \ . \tag{6}$$

Теорема 1: вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \ . \tag{7}$$

Доказательство.

Используем следствие а) свойства 2 функции распределения:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \ .$$

Вычислим определенный интеграл (7) по формуле Ньютона–Лейбница, используя определение (6),

$$\int_a^b f\{x\} dx = \int_a^b F'(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Тогда

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx \ . \tag{8}$$

События $X = a$ и $a < X < b$ несовместные, поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(a < X < b) = P(X = a) + P(a < X < b) = P(a < X < b) \ .$$

так как $P(X = a) = 0$ (следствие б) свойства 2 функции распределения). Подставляя последнее равенство в левую часть выражения (8), получим

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \ .$$

Теорема доказана.

Геометрический смысл этой теоремы следующий: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком плотности распределения $f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \ . \tag{9}$$

Свойства плотности распределения:

1. плотность распределения – неотрицательная функция, $f(x) \geq 0$, так как функция распределения $F(x)$ – неубывающая. Это означает, что точки, принадлежащие графику плотности распределения, расположены или над осью Ox, или на этой оси. График плотности распределения называется **кривой распределения**;
2. несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \ . \tag{10}$$

Выражение(10) называется также условием нормировки.

5.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определения числовых характеристик дискретных случайных величин распространяются на непрерывные величины.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется **определенный интеграл**

$$MX = \int_a^b x f(x) dx \, . \tag{11}$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \, . \tag{12}$$

Предполагается, что этот несобственный интеграл сходится абсолютно, то есть существует конечный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f(x) dx$.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x) dx \, . \tag{13}$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x) dx \, . \tag{14}$$

Для вычисления дисперсии существуют более удобные формулы:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - (MX)^2 \, . \tag{15}$$

или

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (MX)^2 \, . \tag{16}$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется выражением

$$\sigma_x = \sqrt{DX} \, . \tag{17}$$

Свойства математического ожидания и дисперсии, указанные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

5.4. Законы распределения непрерывных случайных величин

Рассмотрим основные законы распределения непрерывных случайных величин.

Равномерный закон распределения.

Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Найдем плотность равномерного распределения $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} C, & \text{если} \quad x \in (a; b] \\ 0, & \text{если} \quad x\,(-\infty; a] \cup (b; \infty) \end{cases}$$

Константу C найдем из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\, f\,(x)dx$.

Для равномерного закона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(x)dx = \int\limits_{a}^{b} C dx = Cx|_a^b = C\,(b-a) = 1, \qquad \text{откуда} \quad C = \dfrac{1}{b-a}$. Тогда

$$f\,(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a < x \le b, \\ 0, & \text{если} \quad x > b \end{cases} \tag{18}$$

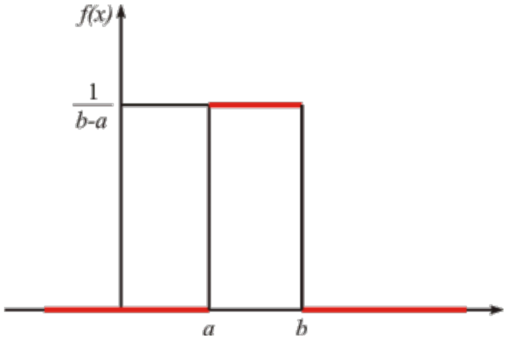


График плотности равномерного распределения

Найдем функцию равномерного распределения $F\,(x)$ по формуле (9)

$$F\,(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f\,(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad a < x \le b, \\ 1, & \text{если} \quad x > b. \end{cases} \tag{19}$$

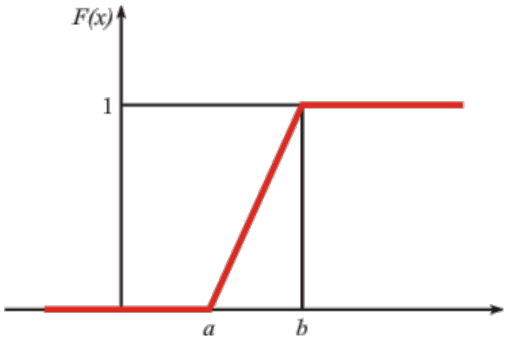


График функции равномерного распределения

Найдем числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины. Математическое ожидание по формуле (11)

$$MX = \int\limits_{a}^{b} xf\,(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} = \frac{a+b}{2}\;. \tag{20}$$

Дисперсия по формуле (15)

$$\begin{aligned} DX = \int\limits_{a}^{b} x^2 f\,(x)dx - (MX)^2 = \int\limits_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{x^3}{3\,(b-a)}\bigg|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \\ = \frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}\;. \end{aligned} \tag{21}$$

Среднее квадратическое отклонение по формуле (17)

$$\sigma_x = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \ . \tag{22}$$

Нормальный закон распределения.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \ . \tag{23}$$

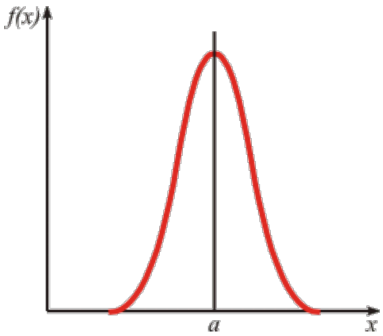


График плотности нормального распределения

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ.

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой (или кривой Гаусса).**

Функция(23) определена на всей оси Ox.

При всех значениях x $f(x) > 0$, то есть нормальная кривая расположена над осью Ox. $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, значит, ось Ox является горизонтальной асимптотой графика.

Исследуем функцию на экстремум, $f'(x) = -\dfrac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $f'(x) = 0$, при $x = a$, $f'(x) > 0$ при $x < a$, $f'(x) < 0$ при $x > a$.

При $x = a$ функция $f(x)$ имеет максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

График функции симметричен относительно прямой $x = a$.

Изменение величины параметра a не изменяет форму нормальной кривой, а только приводит к ее сдвигу вдоль оси Ox вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$.

С возрастанием значения σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, то есть прижимается к оси Ox. При уменьшении σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси Oy.

Найдем числовые характеристики нормально распределенной случайной величины. Математическое ожидание по формуле (12)

$$\begin{aligned} MX &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{matrix} z = \dfrac{xa}{\sigma} \\ x = \sigma z + a, dx = \sigma dz \end{matrix} \right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma z + a}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{z^2}{2}} \sigma dz = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z e^{\dfrac{-z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\dfrac{-z^2}{2}} dz = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 + a = a \ , \end{aligned} \tag{24}$$

так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ – интеграл Пуассона.

Таким образом, математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно параметру a.

Дисперсия по формуле (14)

$$DX = M(X - MX)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma z + a, dx = \sigma dz \end{array} \right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma z^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 z^2}{2\sigma^2}} \sigma dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \tag{25}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = z, du = dz \\ d\nu = z e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \nu = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right\} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-z e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + \sqrt{2\pi}\right) = \sigma^2 .$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ,распределенной по нормальному закону, $\sigma_x = \sqrt{DX} = \sigma$ равно параметру σ.

Общим называется нормальное распределение с произвольными параметрами a и $\sigma > 0$.

Нормированным называется нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$.

Если X – нормальная случайная величина с параметрами a и σ, то $U = \dfrac{X-a}{\sigma}$ – нормированная нормальная случайная величина, $MU = 0$, $\sigma_U = 1$.

Плотность нормированного распределения $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi^{e^{-\frac{u^2}{2}}}}}$.

Функция общего нормального распределения

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz . \tag{26}$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma z + a, dx = \sigma dz \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) ,$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dz$ – функция Лапласа.

Найдем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X меньше заданного положительного числа ε, используя формулу (27),

$$\begin{gathered} P(|X-a| < \delta) = P(a-\delta < X < a+\delta) = \\ = \Phi\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) . \end{gathered} \tag{28}$$

Показательный закон распределения.

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 0 \\ \lambda e^{\lambda x} \quad \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{29}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Показательное распределение определяется одним параметром λ.

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x} \tag{30}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

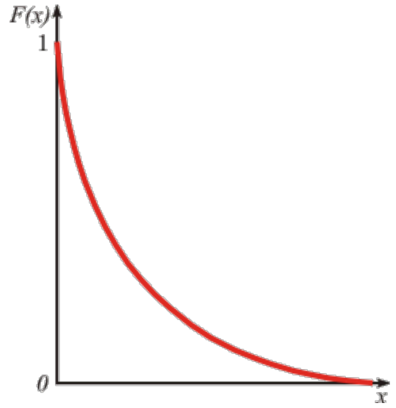


График плотности показательного распределения при $\lambda = 1$.

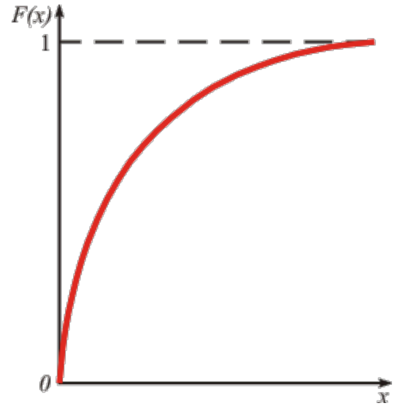


График функции показательного распределения при $\lambda = 1$.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, в интервал a, b

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = a^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\,. \tag{31}$$

Найдем числовые характеристики случайной величины, распределенной по показательному закону. Математическое ожидание по формуле (12)

$$\begin{gathered} MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, du = dx, \\ d\nu = \lambda e^{-\lambda x}dx, \nu = -e^{-\lambda x} \end{matrix} \right\} = \\ = -xe^{-\lambda x}\,|_0^\infty + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -(0-0) - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 0 + \frac{1}{\lambda}\,. \end{gathered} \tag{32}$$

Дисперсия по формуле (16)

$$\begin{gathered} DX = M\left(X^2\right) - (MX)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int\limits_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \\ = \left\{ \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx, \\ d\nu = \lambda e^{-\lambda x}dx, & \nu = -e^{-\lambda x} \end{matrix} \right\} = -x^2e^{-\lambda x}\,|_0^\infty + \int\limits_{0}^{\infty} 2xe^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \\ = -(0-0) + 2\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,. \end{gathered} \tag{33}$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = \sqrt{DX} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Рассмотрим одно из практических приложений показательного закона распределения.

Будем называть элементом некоторое устройство независимо от того, простое оно или сложное.

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а через время t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы элемента. Если элемент проработал безотказно до наступления отказа время, меньшее t, то за время длительностью t наступит отказ.

Функция распределения $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t. Вероятность безотказной работы за то же время t $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$.

Функция $F(t) = P(T > t)$, определяющая вероятность безотказной работы элемента за время t, называется функцией надежности.

Если длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение, то функция $R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$.

Показательным законом надежности называется функция надежности $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность отказов.

Этот закон обладает важным **свойством**: вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t не зависит от продолжительности предыдущей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t.

6. Системы случайных величин. Уравнения прямой регрессии

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины. Представим одну из величин как функцию другой, ограничившись приближенным представлением величины Y в виде линейной функции величины X:

$$Y \approx h(X) = \alpha X + \beta \, , \tag{1}$$

где α и β – параметры, подлежащие определению. Их можно определить разными способами, наиболее употребительный из которых – метод наименьших квадратов.

Функция $h(X) = \alpha X + \beta$ называется **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Линейная среднеквадратическая регрессия Y на X имеет вид

$$y = MY + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - MX) \ . \tag{2}$$

Прямая, описываемая уравнением (1), называется **прямой среднеквадратической регрессии** Y на X.

Аналогичный вид имеет уравнение прямой среднеквадратической регрессии X на Y:

$$x = MX + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - MY) \ . \tag{3}$$

Из уравнений(2) и (3) следует, что обе прямые регрессии проходят через точку $(MX; MY)$, которая называется центром совместного распределения величин X и Y.

Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально с двумерной плотностью

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}} e^{-\frac{u^2 + v^2 - 2r_{xy}^2 uv}{2(1 - r_{xy}^2)}} \ .$$

где $u = \dfrac{(x - a_1)}{\sigma_x}$, $\nu = \dfrac{y - a_2}{\sigma_y}$, то составляющие X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью

$$y = a_2 + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_1) \ , \qquad x = a_1 + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_2) \ .$$

7. Статистические оценки параметров распределения

- Основы понятия выборочного метода;
- Точечные оценки параметров распределения;
- Метод моментов для точечной оценки параметров распределения;
- Метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.

7.1. Основные понятия выборочного метода

На практике часто требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Во многих случаях обследовать все объекты невозможно, и для изучения из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов.

Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности называется число объектов этой совокупности.

Повторной называется выборка, при которой отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называется выборка, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Выборка должна быть **репрезентативной** (представительной), то есть должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, в которой значение x_1 наблюдалось n_1 раз, значение $x_2 - n_2$ раз, ..., значение $x_k - n_k$ раз, и $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем выборки.

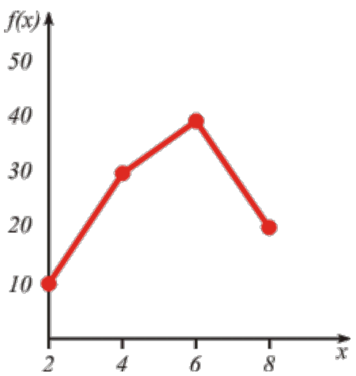
Наблюдаемые значения x_i называются **вариантами**. Числа наблюдений вариант n_i называются **частотами**, а их отношения к объему выборки $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ – **относительными частотами**.

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Полигоном частот называется ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, $\ldots$, $(x_k; n_k)$.

Пример 1. Построить полигон частот распределения $\begin{array}{ccccc} x_i & 2 & 4 & 6 & 8 \\ n_i & 10 & 30 & 40 & 20 \end{array}$.

Решение.



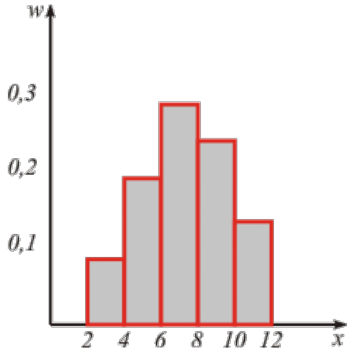
Полигон частот

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $h_i = x_{i+1} - x_i$, а высоты равны отношениям $\dfrac{n_i}{h}$ (плотность частоты).

Пример 2. Построить гистограмму относительных частот распределения $\begin{array}{cccccc} x_i & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ n_i & 10 & 30 & 40 & 20 & 15 \end{array}$.

Решение. Найдем объем выборки $n = \sum\limits_{i=1}^{5} n_i = 10 + 20 + 30 + 25 + 15 = 100$.

Найдем распределение относительных частот $\begin{array}{cccccc} x_i & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ W_i & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,25 & 0,15 \end{array}$, $\sum\limits_{i=1}^{5} W_i = 1$.



Гистограмма относительных частот

7.2. Точечные оценки параметров распределения

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называется функция от наблюдаемых случайных величин.

Несмещенной называется статистическая оценка θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ любом объеме выборки, то есть $M\theta^* = \theta$.

Смещенной называется оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Эффективной называется статистическая оценка, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Генеральной средней $\overline{x}_i$ называется среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности

$$\overline{x}_i = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_k N_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{k} k_i N_i \ , \tag{1}$$

где N_1 – число значений x_1,
N_2 – число значений x_2,...,
N_k – число значений x_k в генеральной совокупности, $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$ – объем генеральной совокупности.

Выборочной средней $\overline{x_e}$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности,

$$\overline{x_e} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{N} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} k_i n_i \ . \tag{2}$$

Выборочная средняя является несмещенной состоятельной оценкой генеральной средней, $M\left(\overline{x}_e\right) = \overline{x}_i$.

Генеральной дисперсией $D_г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x}_i$,

$$D_i = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_i\right)^2 N_i \ . \tag{3}$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (или стандартом) называется квадратный корень из генеральной дисперсии, $\sigma_i = \sqrt{D_i}$.

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от среднего значения $\overline{x}_e$,

$$D_e = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_e\right)^2 n_i \ . \tag{4}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется квадратный корень из выборочной дисперсии, $\sigma_e = \sqrt{D_e}$.

Вычисление генеральной или выборочной дисперсии можно упростить, используя формулу

$$D = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 \ , \tag{5}$$

где $\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{k} x_i^2 N_i, \quad \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{k} x_i N_i$, или $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} x_i^2 n_i, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} k_i n_i$.

Выборочная дисперсия $D_в$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_г$, то есть математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой генеральной дисперсии, $M\left(D_e\right) = \frac{n-1}{n} D_i$.

Выборочную дисперсию можно «исправить» так, чтобы ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Для этого надо умножить $D_в$ на $\frac{n-1}{n}$. После умножения получим **исправленную выборочную дисперсию**

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} \left(x_i - \overline{x_e}\right)^2 n_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{k} \left(x_i - \overline{x_e}\right)^2 n_i \ . \tag{6}$$

Исправленная дисперсия является несмещенной оценкой генеральной дисперсии, $M\left(s^2\right) = D_i$.

Для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используется «исправленное» среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_e\right)^2 n_i} \ . \tag{7}$$

которое является смещенной оценкой.

При больших объемах выборки n выборочная и исправленная дисперсии отличаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если

$n < 30$.

7.3. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного закона распределения состоит в приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения и соответствующих эмпирических (найденных по данным выборки) моментов того же порядка.

Если плотность вероятностей непрерывной случайной величины $X f(x, \theta)$ определяется одним неизвестным параметром θ, то для его точечной оценки достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Согласно методу моментов, приравняем начальный теоретический момент первого порядка, равный MX, и начальный эмпирический момент первого порядка, равный $\overline{x}_e$

$$MX = \overline{x}_e \ . \qquad (8)$$

Математическое ожидание случайной величины X

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, \theta) dx = \varphi(\theta) \ ,$$

является функцией от оцениваемого параметра θ, поэтому равенство (8) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным $\varphi(\theta) = \overline{x}_e$. Решение этого уравнения – это точечная оценка θ^*, которая зависит от выборочной средней и, следовательно, от вариант выборки: $\theta^* = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример 3. Предполагая, что случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятности $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0, \end{cases}$ по данной выборке $\begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_k \end{matrix}$ найти точечную оценку параметра λ методом моментов.

Решение. Математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону, по формуле (32) из лекции [5.4. "Законы распределения непрерывных случайных величин"] $MX = \frac{1}{\lambda}$. Выборочная средняя по формуле (2) $\overline{x}_e = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} k_i n_i$. По методу моментов приравняем теоретический и эмпирический моменты первого порядка, $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} k_i n_i$, тогда $\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i-1}^{k} k_i n_i}$ – точечная оценка параметра показательного закона распределения.

Если плотность вероятностей непрерывной случайной величины $X \ f(x, \theta_1, \theta_2)$ определяется двумя неизвестными параметрами θ_1, θ_2, то для их точечных оценок нужны два уравнения относительно этих параметров. Согласно методу моментов, приравняем начальный теоретический момент первого порядка, равный MX, и начальный эмпирический момент первого порядка, равный $\overline{x}_e$, а также центральный теоретический момент второго порядка, равный DX, и центральный эмпирический момент второго порядка, равный $D_в$:

$$\begin{cases} MX = \overline{x}_e \\ DX = D_e \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X являются функциями от оцениваемых параметров θ_1, θ_2, поэтому решение системы уравнений (9) – это точечные оценки θ_1^*, θ_2^* которые зависят от выборочной средней и выборочной дисперсии и, следовательно, от вариант выборки: $\theta_1^* = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

7.4. Метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения

Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$– выборка объема n из значений случайной величины X (дискретной или непрерывной). Для простоты предположим, что все значения в выборке различны. Считаем, что закон распределения случайной величины X задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется найти точечную оценку этого параметра.

Функцией правдоподобия называется функция аргумента θ

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\theta\right) = p\left(x_1\theta\right) p\left(x_2\theta\right) \cdot \ldots \cdot p\left(x_n\theta\right)\ . \tag{10}$$

для дискретной случайной величины, где $p\left(x_i\theta\right) = P\left(X = x_i\right), i = 1, 2, \ldots, n$ и

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_3\theta\right) = f\left(x_1\theta\right) f\left(x_2\theta\right) \cdot \ldots \cdot f\left(x_n\theta\right)\ , \tag{11}$$

для непрерывной случайной величины, где $f(x)$ – известный вид плотности распределения.

В качестве точечной оценки параметра θ принимается такое его значение $\theta^* = \psi\left(x_1, x_2, \ldots, x_3\right)$, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Оценка θ^* называется оценкой наибольшего правдоподобия.

В ряде случаев вместо функции L удобнее рассматривать функцию $\ln L$, которая достигает максимума при том же значении θ^*, что и функция L.

Функция $\ln L$ называется **логарифмической функцией правдоподобия**.

Для отыскания точки максимума логарифмической функции правдоподобия нужно:

1. найти производную $\dfrac{d\ln L}{d\theta}$;
2. приравнять производную к нулю: $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = 0$ – и найти решение θ^* этого уравнения, которое называется уравнением правдоподобия. Найденный корень уравнения является критической точкой функции $\ln L$;
3. найти вторую производную $\dfrac{d^2\ln L}{d\theta^2}$. Если при $\theta = \theta^*\ \dfrac{d^2\ln L}{d\theta^2} < 0$, то θ^* – точка максимума функции $\ln L$.

Найденная точка максимума логарифмической функции правдоподобия θ^* принимается в качестве оценки максимального правдоподобия параметра θ.

Оценки параметров, полученные по методу максимального правдоподобия, состоятельны, но могут быть смещенными. Они распределены асимптотически нормально и имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками. Если оценка θ^* параметра θ является эффективной, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение θ^*.

Оценка максимального правдоподобия не всегда совпадает с оценкой, найденной методом моментов.

Пример 4. Проведено n измерений продолжительности телефонных разговоров. Получено n значений $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Предполагая, что продолжительность разговоров распределена по показательному закону с плотностью вероятности $f\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda e} & \quad \text{при} \quad \geq 0x \end{cases}$ найти точечную оценку параметра λ методом максимального правдоподобия.

Решение. Найдем значения плотности $f\left(t\right)$ при каждом из значений аргумента $t_1, t_2, \ldots, t_n$:$f\left(t_1\lambda\right) = \lambda e^{-\lambda t_1},\ f\left(t_2\lambda\right) = \lambda e^{-\lambda t_2},\ \ldots,\ f\left(t_n\lambda\right) = \lambda e^{-\lambda t_n}$. Составим функцию правдоподобия

$$L\left(\lambda\right) = f\left(t_1, \lambda\right) \cdot f\left(t_2, \lambda\right) \cdot \ldots \cdot f\left(t_n, \lambda\right) = \lambda e^{-\lambda t_1} \cdot \lambda e^{-\lambda t_2} \cdot \ldots \cdot \lambda e^{-\lambda t_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i-1}^{n} t_i}$$

Для удобства рассмотрим логарифмическую функцию правдоподобия $\ln L = n\ln\lambda - \lambda\sum\limits_{i-1}^{n} t_i$.

Найдем производную $\dfrac{d\ln N}{d\lambda} = \dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{i-1}^{n} t_i$ и приравняем ее к нулю: $\dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{i-1}^{n} t_i = 0$.

Решение этого уравнения $\lambda^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{i-1}^{n} t_i}$.<\p>

Найдем вторую производную $\dfrac{d^2\ln N}{d\lambda^2} = -\dfrac{n}{\lambda^2}, -\dfrac{n}{\lambda^2} < 0$ при любом значении λ, в том числе при $\lambda = \lambda^2$.

Значит, $\lambda = \lambda^*$ является точкой максимума логарифмической функции правдоподобия, а $\lambda^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{i-1}^{n} t_i}$ – точечная оценка неизвестного параметра λ.

8. Доверительные интервалы для оценки числовых характеристик нормального закона распределения вероятностей

- Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения;
- Доверительный интервал для оценки среднего квадратического нормального распределения .

8.1. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения

Точечной называется оценка, которая определяется одним числом.

Рассмотренные ранее оценки являются точечными. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра. Поэтому при небольшом объеме выборки надо пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называется оценка, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ. Если $\delta > 0$ и $|\theta - \theta^*| < \delta$, то оценка θ^* тем точнее, чем меньше δ. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Статистические методы позволяют говорить только о вероятности γ, с которой выполняется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Надежностью (или доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называется вероятность γ, с которой выполняется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берется число, близкое к единице $(0{,}95,\ 0{,}99,\ 0{,}999)$.

Определение надежности выражается формулой

$$P\left(|\theta - \theta^*| < \delta\right) = \gamma\ , \tag{1}$$

или

$$P\left(\theta - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma\ ,$$

то есть вероятность того, что интервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ.

Доверительным интервалом называется интервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью γ.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Оценим неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\overline{x}$. Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\overline{X}$, найденная по независимым наблюдениям тоже распределена нормально с параметрами $M\left(\overline{X}\right) = a, \sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Потребуем выполнения равенства $P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \delta\right) = \gamma$, где γ – заданная надежность. Вероятность выполнения неравенства $\left|\overline{X} - a\right| < \delta$ определяется формулой $P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Заменяя X на $\overline{X}$ и σ на $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, получим

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(t\right)\ ,$$

где $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$,

тогда $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ и $P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(t\right) = \gamma$,

где $\Phi\left(t\right)$ – функция Лапласа.

Получаем формулу для оценки математического ожидания

$$P\left(\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(t\right) = \gamma\ , \tag{2}$$

где число t определяется из равенства $\Phi\left(t\right) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице функции Лапласа.

Пример 1. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. По выборке объема $n = 36$ найдена выборочная средняя $\overline{x} = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение. Для построения доверительного интервала по таблице значений функции Лапласа найдем аргумент t, при котором $\Phi\left(t\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$: $t = 1,96$. Найдем точность оценки $\delta = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{36}} = \frac{3,92}{6} \approx 0,65$. Тогда доверительный интервал имеет вид: $(3 - 0,65; 3 + 0,65)$ или $(2,35; 3,65)$, то есть с надежностью $0,95$ интервал $2,35 < a < 3,635$ покрывает неизвестный параметр a.

Ответ : $2,35 < a < 3,635$.

Если количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, но среднее квадратическое отклонение неизвестно, то можно построить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания.

Построим по данным выборки случайную величину

$$T = \frac{\overline{X} - a}{S/\sqrt{n}}$$

где $\overline{X}$ – выборочная средняя,

s – «исправленное» среднее квадратическое отклонение,

n – объем выборки.

Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Вероятность неравенства $\frac{\overline{X} - a}{s/\sqrt{n}} < \gamma$ определяется формулой

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - a}{s/\sqrt{n}}\right| < \gamma\right) = 2\int\limits_0^t S(t, n)dt = \gamma \; ,$$

где $S(t, n)$ – плотность распределения Стьюдента.

Заменяя неравенство в круглых скобках равносильным ему двойным неравенством, получим

$$P\left(\overline{X} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma \; , \tag{3}$$

где величина t_γ находится по таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ по заданным γ и n.

Таким образом, интервал $\left(\overline{x}_e - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}; \overline{x}_e + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает параметр a нормального распределения при неизвестной дисперсии с надежностью γ.

Пример 2. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону. По выборке объема $n = 25$ найдены выборочная средняя $\overline{x}_e = 7,5$ и «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение $s = 1$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Решение. Для построения доверительного интервала по таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ найдем значение t_γ: при $\gamma = 0{,}99$ и $n = 25$ $t_\gamma = 2{,}797$.

Найдем границы доверительного интервала в формуле (3):

$$\overline{x_e} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 7,5 - \frac{2,797 \cdot 1}{\sqrt{25}} = 7,5 - 0,5594 = 6,9406 \; ,$$

$$\overline{x_e} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 7,5 + \frac{2,797 \cdot 1}{\sqrt{25}} = 7,5 + 0,5594 = 8,0594 \; .$$

Тогда доверительный интервал имеет вид: $(6,9406; 8,0594)$, то есть с надежностью $0,99$ интервал $6,9406 < a < 8,0594$ покрывает неизвестный параметр a.

Ответ: $6,9406 < a < 8,0594$.

8.2. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Оценим неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению S. Для этого найдем доверительный интервал, покрывающий параметр σ с заданной надежностью γ.

Потребуем выполнения соотношения

$$P\left(|\delta - s| < \delta\right) = \gamma \quad \text{или} \quad P\left(s - \delta < \sigma < s + \delta\right) = \gamma \ .$$

Для использования готовой таблицы преобразуем двойное неравенство $s - \delta < \sigma < s + \delta$ в равносильное неравенство $s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\sigma}{s}\right)$.

Полагая $\frac{\delta}{s} = q$, получим

$$s\left(1 - q\right) < \sigma < \left(1 + q\right) \ . \tag{4}$$

Чтобы найти q , рассмотрим случайную величину «хи» $\chi = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n-1}$, где n – объем выборки, с плотностью $R\left(\chi, n\right)$.

Преобразуем неравенство (4) так, чтобы оно приняло вид $\chi_1 < \chi < \chi_2$.

Вероятность выполнения этого неравенства равна заданной вероятности γ, то есть $\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} R\left(\chi, n\right) d\chi = \gamma$.

Предполагая, что $q < 1$, перепишем неравенство (4) в виде

$$\frac{1}{s\left(1+q\right)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s\left(1-q\right)} \ .$$

Умножая все части этого неравенства на $s\sqrt{n-1}$, получим

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q} \qquad \text{или} \qquad \frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q} \ .$$

Вероятность того, что это неравенство и, следовательно, равносильное ему неравенство (4) будет выполнено, равна

$$\int\limits_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)} R\left(\chi, n\right) d\chi = \gamma \ .$$

Из этого уравнения по заданным n и γ можно найти q. На практике для отыскания q пользуются таблицей.

Вычислив по выборке s и найдя по таблице q, получим искомый доверительный интервал (4), покрывающий σ с заданной надежностью γ.

Пример 3. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону. По выборке объема $n = 50$ найдено «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение $s = 1,2$ Найти доверительный интервал для оценки неизвестного среднего квадратического отклонения σ с надежностью $\gamma = 0,99$.

Решение. Для построения доверительного интервала по таблице значений $q = q\left(\gamma, n\right)$ найдем значение q: при $\gamma = 0,99$ и $n = 50$, $q = 0,3$.

Найдем границы доверительного интервала по формуле (4):

$$s\left(1 - q\right) = 1,2 \cdot \left(1 - 0,3\right) = 1,2 \cdot 0,7 = 0,84 \ ,$$

$$s\left(1 + q\right) = 1,2 \cdot \left(1 + 0,3\right) = 1,2 \cdot 1,3 = 1,56 \ .$$

Тогда доверительный интервал имеет вид: (0,84; 1,56), то есть с надежностью 0,99 интервал $0,84 < \sigma < 1,56$ покрывает неизвестный параметр σ.

Ответ: $0,84 < \sigma < 1,56$.