

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ-
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Т.В. ГАИБОВА, В.В. ТУГОВ, Н.А. ШУМИЛИНА

СИСТЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ЧАСТЬ I

Рекомендовано к изданию Ученым Советом государственного
образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Оренбургский государственный университет»
в качестве учебного пособия для студентов направления
220100 Системный анализ и управление

Оренбург 2008

УДК519.23(07)
ББК22.172 я7
Г 14

Рецензент

Гаибова Т.В.

Г 30 Системное моделирование. В 3 ч. ч 1: учебное пособие
/Т.В. Гаибова, В.В. Тугов, Н.А. Шумилина. - Оренбург:
ГОУ ОГУ, 2008. - 116 с.

При проектировании и управлении сложными системами большую роль играют модели, так как они позволяют изучать влияние различных системных решений, не прибегая к реальному конструированию и испытаниям рассматриваемого явления.

В учебном пособии рассмотрены концепции, подходы и методы системного моделирования сложных технологических процессов и объектов, позволяющие безотносительно к предметным областям разрабатывать математические модели изучаемых систем. Приведены примеры построения моделей электрических, механических, тепловых, гидравлических систем. Учебное пособие предназначено для студентов направления 220100 – Системный анализ и управление.

ББК22.172 я7

© Гаибова Т.В., 2008
© Тугов В.В., 2008
© Шумилина Н.А., 2008
© ГОУ ОГУ, 2008

Содержание

Введение.....	5
1 Системный подход к моделированию.....	6
1.2 Основные понятия моделирования.....	9
1.3 Постановка задачи системного моделирования и обзор методов моде- лирования сложных объектов и процессов.....	16
1.4 Декомпозиция и агрегирование моделей.....	23
1.5 Принцип аналогии в системном моделировании.....	27
1.6 Методика построения модели сложной системы из математических мо- делей элементов.....	29
2 Математические модели простейших типовых элементов электрических, механических, тепловых и гидравлических систем.....	33
2.1 Модели типовых элементов электрических систем.....	34
2.2 Модели типовых элементов механических систем.....	39
2.3 Модели типовых элементов тепловых систем.....	44
2.4 Модели типовых элементов гидравлических систем.....	51
2.5 Особенности пневматических систем.....	54
3 Примеры объектов, требующих системного подхода к моделированию.....	59
3.1 Моделирование производственных процессов в химической и нефтех- мической промышленности.....	59
3.1.1 Общая характеристика производственных процессов в химико-тех- нологических системах.....	59
3.1.2 Иерархическая структура химико-технологической системы.....	61
3.1.3 Классификация химико-технологических систем.....	64
3.1.4 Входные и выходные потоки системы	67
3.1.5 Математическое описание элемента ХТС.....	68
3.1.6 Оценка эффективности функционирования ХТС.....	71
3.2 Моделирование производственных процессов в машиностроении.....	88
3.3 Моделирование гидравлических систем с многофракционной рабочей смесью.....	92
3.4 Моделирование сепарационной установки газ-нефть как объекта управ- ления.....	96
3.4.1 Математическое описание сепарационной установки газ-нефть как объекта управления по давлению газа с учетом расходов газа, нефти и воды	96
Список использованных источников.....	112

Введение

Чем дальше развивается цивилизация общества, тем сложнее становятся общественные отношения и создаваемые обществом технические, организационные, информационные, энергетические, транспортные, производственные, военные и другие системы, составляющие основу данной цивилизации. Создание и использование этих систем требует применения специального теоретического инструментария анализа и синтеза сложных систем любой природы. Современная наука ищет способы и методы строгой формализации общих закономерностей развития природы и общества на основе последних достижений математики, логики, кибернетики, информатики и других точных наук. Методологической основой исследования и проектирования сложных систем является теория и практика математического моделирования сложных систем. Классический системный подход, как правило, опирается на математическое моделирование с использованием теории подобия, теории научного эксперимента, математической статистики, теории алгоритмов и ряда других фундаментальных классических теорий. Большое разнообразие видов моделей и инструментов моделирования привело к тому, что зачастую при рассмотрении процедур моделирования большую часть внимания уделяют средствам моделирования («компьютерное» моделирование), игнорируя системную природу и моделируемых объектов и самих моделей, а также начальные этапы перевода вербального описания системы в формальное.

В данном учебном пособии значение моделирования раскрывается более полно. Рассматриваются виды моделей, которыми удобно пользоваться для исследования больших систем, начиная с символических и качественных моделей и заканчивая количественными. Рассматриваются также особенности моделирования механических, электрических, гидравлических, тепловых и пневматических систем, представляющих собой основу многих технологических процессов промышленных предприятий. Несмотря на то, что модели, с помощью которых определяется функционирование конкретной системы, ее характеристики, стоимость и временные оценки, могут оказаться уникальными, неприменимыми в общем случае, существуют некоторые общие методы моделирования, которые широко применяются и могут оказать существенную помощь инженеру в самых различных областях его деятельности.

Особенно необходимы подобные знания студентам, обучающимся по направлению «Системный анализ и управление», так как они должны обладать системным мышлением, знаниями, подходами, методами, позволяющими анализировать, проектировать и управлять функционированием систем различной физической природы.

1 Системный подход к моделированию

1.1 Применение моделирования в системных исследованиях

Процедуры моделирования необходимы при решении всех основных задач исследования систем, с которыми имеет дело инженер-проектировщик (анализ, синтез, улучшение системы). Так как только системный подход может гарантировать хорошее качество проекта, модели оказываются неизменными спутниками любого процесса проектирования. На рисунке 1.1 показана взаимосвязь системных исследований в процессе проектирования.

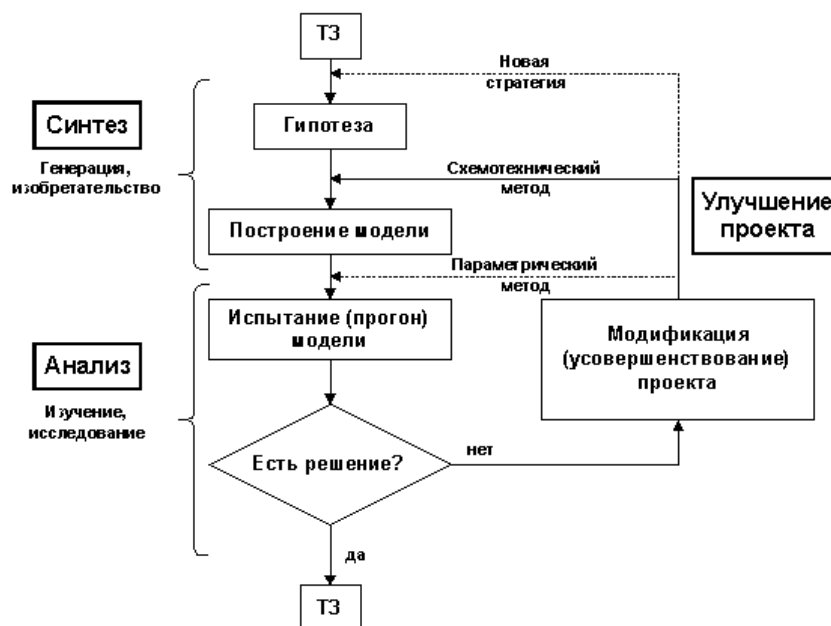


Рисунок 1.1 - Основные задачи инженера-проектировщика

Чтобы разобраться в системе, изучить, исследовать ее (задача анализа), надо описать систему, зафиксировать ее свойства, поведение, структуру и параметры, то есть построить одну или несколько моделей системы. Для этого надо ответить на три основных вопроса:

- 1) что делает система (узнать поведение, функцию системы);
 - 2) как она устроена (выяснить структуру системы);
 - 3) каково ее качество (насколько хорошо она выполняет свои функции).
- Применение моделирования в процедурах анализа системы показано на рисунке 1.2.

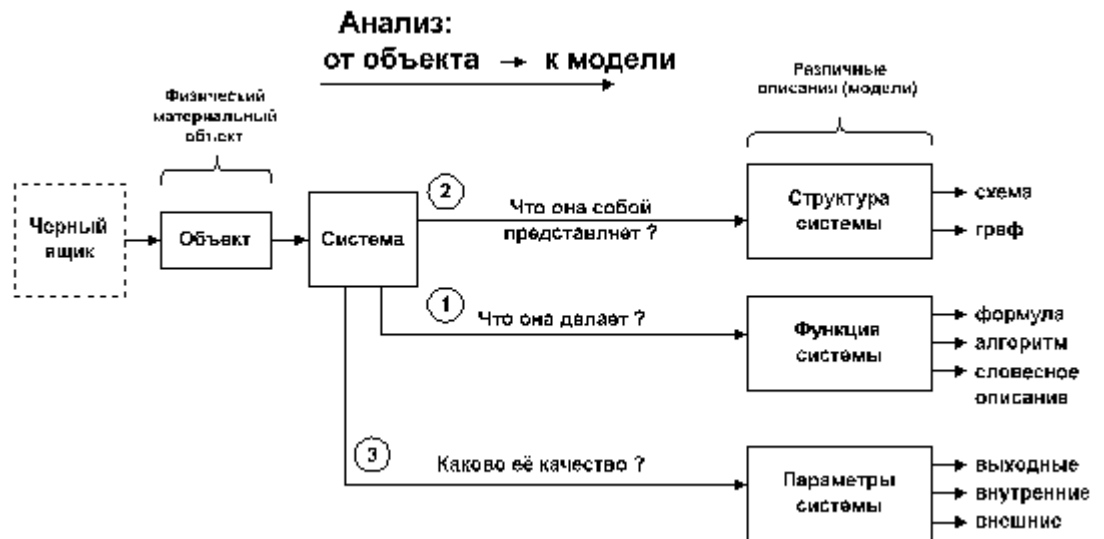


Рисунок 1.2 – Модели, используемые при анализе системы

При анализе объекта предполагается, что объект уже существует и задача сводится к его изучению, исследованию. Отыскав его функцию и структуру, "измерив" его параметры, тем самым решают эту задачу. Но чаще инженер встречается с противоположной задачей - объекта нет, и его предстоит создать, спроектировать. Это задача синтеза объекта. Рассуждая с позиции системного подхода и глядя на рисунок 3, мы можем сказать, что для ее решения надо сделать три шага: выявить функцию системы (абстрактный синтез), разработать структуру системы (структурный синтез) и определить параметры системы так, чтобы получить желаемое качество проекта. Сначала надо выявить глобальную функцию системы, рассматривая саму систему на абстрактном уровне в виде черного ящика, о котором известно только то, что он будет делать. Затем следует "транслировать" функциональное описание в структурное, например, разбивая глобальную функцию системы на подфункции и повторяя, при необходимости, это дробление до тех пор, пока не будут получены элементарные функции, структуры которых очевидны (или уже реализованы). Этот этап порождения структуры, реализующий необходимые функции, называют структурным синтезом. На третьем этапе (параметрический синтез) остается лишь подобрать параметры системы так, чтобы достичь желаемого качества ее работы.



Рисунок 1.3 - Этапы синтеза объекта

В теории и практике системного анализа и проектирования под моделью обычно понимается качественное или количественное представление объекта или процесса, отражающее влияние факторов, важных для рассмотрения. Несмотря на то, что модель может не соответствовать реальному явлению во всех отношениях, она описывает существенные входные и выходные величины, внутренние характеристики, а также обеспечивает учет влияния окружающих условий, аналогичных тем, в которых работает реальная система.

Модели применяются в основном для оценки и предсказания результатов, а также для анализа и изучения различных элементов системы. Модели позволяют вынести упрощенное представление о системе и получить некоторые результаты за меньшее время, с меньшими затратами. Хотя время, затраты или разного рода трудности могут быть и не такими уж малыми при создании и использовании моделей, но они значительно меньше по сравнению с затратами времени и средств для получения той же информации от реальной системы, которую нужно создать и провести потом все необходимые исследования. Более того, различные гипотетические модели могут быть исследованы и изучены до того, как сама система будет создана.

Структурная схема объекта моделирования представлена на рисунке 1.4.

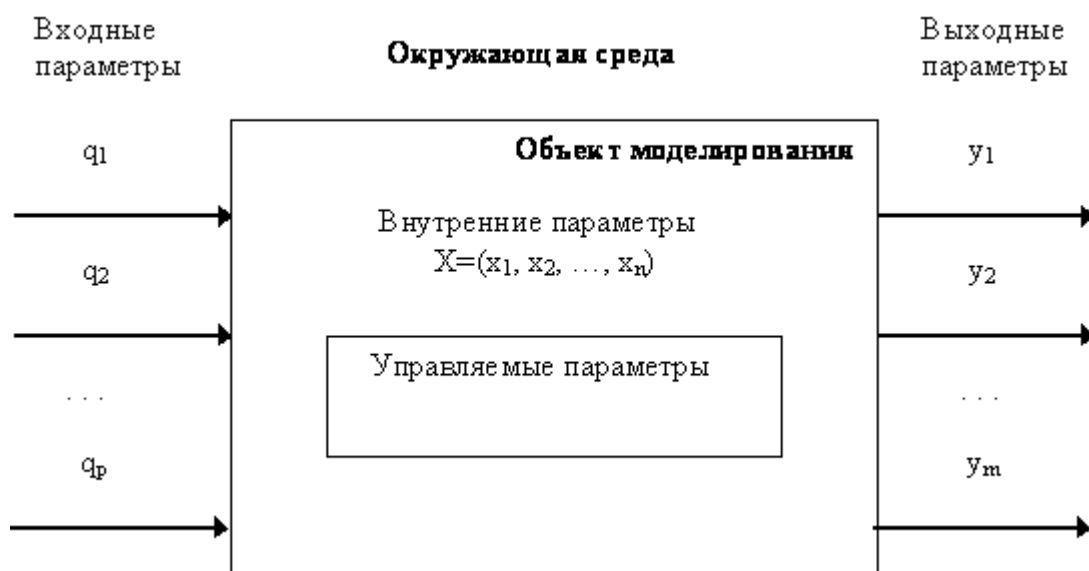


Рисунок 1.4 - Структурная схема объекта моделирования

Таким образом, необходимость математического моделирования является основой системного подхода к решению сложных проблем.

1.2 Основные понятия моделирования

Модель - объект или описание объекта, системы для замещения (при определенных условиях предложениях, гипотезах) одной системы (т.е. оригинала) другой системой для изучения оригинала или воспроизведения его каких - либо свойств.

В таблице 1 показаны виды математических моделей по различным признакам классификации.

Таблица 1 - Классификация математических моделей

Признаки классификации	Виды математических моделей
1 Принадлежность к иерархическому уровню	1 Модели микроуровня 2 Модели макроуровня 3 Модели метаяуровня
2 Характер отображаемых свойств объекта	1 Структурные 2 Функциональные
3 Способ представления свойств объекта	1 Аналитические 2 Алгоритмические 3 Имитационные
4 Способ получения модели	1 Теоретические 2 Эмпирические
5 Особенности поведения объекта	1 Детерминированные 2 Вероятностные

Приведенная классификация математических моделей может быть применена по отношению к любым объектам. Мы рассмотрим особенности различных видов моделей применительно к производственным (технологическим) объектам (процессам).

Математические модели на микроуровне производственного процесса отражают физические процессы, протекающие, например, при резании металлов. Они описывают процессы на уровне отдельной технологической операции.

Математические модели на макроуровне производственного процесса описывают технологические процессы.

Математические модели на метауровне производственного процесса описывают технологические системы (участки, цехи, предприятие в целом).

Структурные математические модели предназначены для отображения структурных свойств объектов.

Функциональные математические модели предназначены для отображения информационных, физических, временных процессов, протекающих в работающем оборудовании, в ходе выполнения технологических процессов и т.д.

Аналитические математические модели представляют собой явные математические выражения выходных параметров как функций от параметров входных и внутренних. Ввиду того, что нами будет рассматриваться далее целый ряд аналитических моделей, поговорим о них более подробно.

Аналитическое моделирование основано на косвенном описании моделируемого объекта с помощью набора математических формул. Наиболее существенная характеристика аналитических моделей заключается в том, что модель не является структурно подобной объекту моделирования. Под структурным подобием здесь понимается однозначное соответствие элементов и связей модели элементам и связям моделируемого объекта. Аналитическая модель всегда представляет собой конструкцию, которую можно проанализировать и решить математическими средствами.

Важным моментом является размерность конкретной аналитической модели. Часто для реальных технологических систем (автоматических линий, гибких производственных систем) размерность их аналитических моделей столь велика, что получение оптимального решения на основе таких моделей оказывается весьма сложным с вычислительной точки зрения. Для повышения вычислительной эффективности в этом случае используют различные приемы. Один из них связан с разбиением задачи большой размерности на подзадачи меньшей размерности так, чтобы автономные решения подзадач в определенной последовательности давали решение основной задачи. При этом возникают проблемы организации взаимодействия подзадач, которые не всегда оказываются простыми. Другой прием предполагает уменьшение точности вычислений, за счет чего удается сократить время решения задачи.

Алгоритмические математические модели выражают связи между выходными параметрами и параметрами входными и внутренними в виде алгоритма.

Имитационные математические модели – это алгоритмические модели, отражающие развитие процесса (поведение исследуемого объекта) во времени при задании внешних воздействий на процесс (объект). Например, это модели систем массового обслуживания, заданные в алгоритмической форме.

Имитационное моделирование основано на прямом описании моделируемого объекта. Существенной характеристикой таких моделей является структурное подобие объекта и модели. Это значит, что каждому существенному с точки зрения решаемой задачи элементу объекта ставится в соответствие элемент модели. При построении имитационной модели описываются законы функционирования каждого элемента объекта и связи между ними.

Работа с имитационной моделью заключается в проведении имитационного эксперимента. Процесс, протекающий в модели в ходе эксперимента, подобен процессу в реальном объекте. Поэтому исследование объекта на его имитационной модели сводится к изучению характеристик процесса, протекающего в ходе эксперимента.

Ценным качеством имитации является возможность управлять масштабом времени. Динамический процесс в имитационной модели протекает в так называемом системном времени. Системное время имитирует реальное время. При этом пересчет системного времени в модели можно выполнять двумя способами. Первый способ заключается в «движении» по времени с некоторым постоянным шагом. Второй способ заключается в «движении» по времени от события к событию, при этом считается, что в промежутках времени между событиями в модели изменений не происходит.

Теоретические математические модели создаются в результате исследования объектов (процессов) на теоретическом уровне. Например, существуют выражения для сил резания, полученные на основе обобщения физических законов. Но они не приемлемы для практического использования, т.к. очень громоздки и не совсем адаптированы к реальным процессам обработки материалов.

Эмпирические математические модели создаются в результате проведения экспериментов (изучения внешних проявлений свойств объекта с помощью измерения его параметров на входе и выходе) и обработки их результатов методами математической статистики.

Детерминированные математические модели описывают поведение объекта с позиций полной определенности в настоящем и будущем. Примеры таких моделей: формулы физических законов, технологические процессы обработки деталей и т.д.

Вероятностные математические модели учитывают влияние случайных факторов на поведение объекта, т.е. оценивают его будущее с позиций вероятности тех или иных событий. Примеры таких моделей: описание ожидаемых длин очередей в системах массового обслуживания, ожидаемых объемов выпуска сверхплановой продукции производственным участком, точности размеров в партии деталей с учетом явления рассеяния и т.д.

К математическим моделям предъявляются следующие основные требования:

- 1) универсальности;
- 2) точности;
- 3) адекватности;
- 4) экономичности.

Универсальность математической модели характеризует полноту отражения в ней свойств реального объекта. Математическая модель отражают не все, а лишь некоторые свойства реального объекта.

Точность математической модели оценивается степенью совпадения значений выходных параметров реального объекта и значений тех же параметров, рассчитанных с помощью модели.

Пусть отражаемые в математической модели свойства объекта оцениваются вектором выходных параметров $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, y_{im} – i -ый параметр, рассчитанный с помощью модели, а y_{id} – истинное значение того же параметра. Тогда относительная погрешность математической модели по i – му параметру будет равна:

$$E_i = \frac{|y_{im} - y_{id}|}{y_{id}}.$$

По этой формуле рассчитываются погрешности для каждого выходного параметра, в результате получается вектор погрешностей $E = (E_1, E_2, \dots, E_m)$. В целом для математической модели погрешность оценивается следующим образом:

$$E_{mm} = \max E_i, i = \overline{1, m}.$$

Адекватность математической модели – это ее способность отражать заданные свойства объекта с погрешностью, не выше заданной.

Т. к. выходные параметры модели являются функцией $Y = F(X, Q)$ от параметров внутренних и входных, то и точность модели зависит от их значений. Адекватность модели имеет место в ограниченной области изменения внутренних и входных параметров. Если обозначить область адекватности как OA , то

$$OA = \{X, Q / E_{mm} \leq \delta\},$$

где δ – некоторое заданное число.

Экономичность математической модели характеризуется затратами вычислительных ресурсов на ее реализацию. Если работа с математической моделью осуществляется вручную, то ее экономичность определяется

затратами личного времени проектировщика. Если модель используется при автоматизированном проектировании, то затратами машинного времени и памяти компьютера. Так как указанные величины определяются характеристиками конкретного компьютера, то использовать их для оценки экономичности математической модели не корректно. Поэтому, для оценки экономичности самой математической модели используют другие величины:

- а) среднее количество операций, выполняемых при одном обращении к математической модели;
- б) размерность системы уравнений в математической модели;
- в) количество используемых в модели внутренних параметров и т.д.

Требования высокой степени универсальности, точности, широкой области адекватности математической модели, с одной стороны, и высокой ее экономичности, с другой стороны, противоречивы. Поэтому компромиссные решения определяются решаемой задачей.

К математическим моделям предъявляется и целый ряд других требований, среди которых следует выделить следующие:

- а) вычислимость, т.е. возможность ручного или с помощью ЭВМ исследования качественных и количественных закономерностей функционирования объекта (системы);
- б) модульность, т.е. соответствие конструкций модели структурным составляющим объекта (системы);
- в) алгоритмизируемость, т.е. возможность разработки соответствующих алгоритма и программы, реализующей математическую модель на ЭВМ;
- г) наглядность, т.е. удобное визуальное восприятие модели.

Проблема моделирования состоит из трех задач:

- 1) построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);
- 2) исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);
- 3) использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

Основными операциями используемыми над моделями являются:

- а) линеаризация: пусть $M=M(X,Y,A)$, где X - множество входов, Y - выходов, A - состояний системы. Схематически можно это изобразить:

$$X \rightarrow A \rightarrow Y$$

Если X, Y, A - линейные пространства (множества), а ϕ, ψ - линейные операторы, то система (модель) называется линейной. Другие системы (модели) - нелинейные. Нелинейные системы трудно поддаются исследованию, поэтому их часто линеаризуют - сводят к линейным каким-то образом;

б) идентификация: пусть $M=M(X,Y,A)$, $A=\{a_i\}$, $a_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{ik})$ - вектор состояния объекта (системы). Если вектор a_i зависит от некоторых неизвестных параметров, то задача идентификации (модели, параметров модели) состоит в определении по некоторым дополнительным условиям, например, экспериментальным данным, характеризующим состояние системы в некоторых случаях. Идентификация - решение задачи построения по результатам наблюдений математических моделей, описывающих адекватно поведение реальной системы;

в) агрегирование: операция состоит в преобразовании (сведении) модели к модели (моделям) меньшей размерности (X, Y, A) ;

г) декомпозиция: операция состоит в разделении системы (модели) на подсистемы (подмодели) с сохранением структур и принадлежности одних элементов и подсистем другим;

д) сборка: операция состоит в преобразовании системы, модели, реализующей поставленную цель из заданных или определяемых подмоделей (структурно связанных и устойчивых);

е) макетирование: эта операция состоит в апробации, исследовании структурной связности, сложности, устойчивости с помощью макетов или подмоделей упрощенного вида, у которых функциональная часть упрощена (хотя вход и выход подмоделей сохранены);

ж) экспертиза, экспертное оценивание: операция или процедура использования опыта, знаний, интуиции, интеллекта экспертов для исследования или моделирования плохо структурируемых, плохо формализуемых подсистем исследуемой системы;

з) вычислительный эксперимент: это эксперимент, осуществляемый с помощью модели на ЭВМ с целью распределения, прогноза тех или иных состояний системы, реакции на те или иные входные сигналы. Прибором эксперимента здесь является компьютер (и модель!).

Модели и моделирование применяются по следующим основным и важным направлениям:

- обучение (как моделям, моделированию, так и самих моделей);
- познание и разработка теории исследуемых систем - с помощью каких - то моделей, моделирования, результатов моделирования;
- прогнозирование (выходных данных, ситуаций, состояний системы);
- управление (системой в целом, отдельными подсистемами системы, выработка управленческих решений и стратегий);
- автоматизация (системы или отдельных подсистем системы).

Моделирование как метод исследования технологических процессов включает в себя следующие основные этапы:

- 1) постановка цели моделирования;
- 2) построение модели;
- 3) проверка адекватности модели и внесение корректив;

4) использование ее для исследования свойств и поведения объекта.

Одному и тому же объекту-оригиналу в зависимости от целей моделирования может соответствовать большое число моделей, отражающих разные его стороны. При использовании теоретического подхода модель строится на основе соотношений, вытекающих из физических законов; при использовании формального подхода — принципов «черного ящика». Поэтому первый подход применяют в тех случаях, когда известны законы, которым подчиняются технологические процессы, протекающие в объекте моделирования, второй в случае отсутствия такой информации. Детерминированные модели, построенные с использованием теоретического подхода, имеют ряд существенных преимуществ: их можно разрабатывать даже при отсутствии действующего объекта, как это часто бывает проектировании; они качественно более правильно характеризуют процессы, протекающие в объекте, даже при наличии недостаточно точных в количественном отношении параметров модели; пригодны для обобщений, связанных с изучением общих свойств объектов определенного класса, и для прогнозирования поведения объекта.

Если априорная информация об объекте моделирования не обладает достаточной полнотой или из-за его значительной сложности невозможно описать в виде модели все выходные воздействия, а влияние ненаблюдаемых переменных на выходные координаты объекта существенно, то принимают стохастическую модель.

Наиболее полное представление о поведении объекта дают динамические модели. Однако их использование приводит к довольно сложным вычислительным задачам, поэтому для объектов, инерционностью которых можно пренебречь по сравнению с временным интервалом, на котором решается задача моделирования, или при сравнительно малом спектре возмущений ограничиваются статическими моделями. Когда можно пренебречь пространственной неравномерностью переменных, используют модели с сосредоточенными переменными, в противном случае — модели с распределенными переменными. Последние можно построить только при использовании теоретико-физического подхода. При этом вычислительная задача еще больше усложняется.

Идентификация модели базируется на использовании активного или пассивного экспериментального метода. При активном эксперименте исследователь сам выбирает нужное регулярное воздействие, которое поступает на вход объекта. При этом фиксируется реакция объекта на регулярные входные воздействия. При пассивном эксперименте исследователь лишь регистрирует случайные входные воздействия, возникающие при нормальной эксплуатации объекта, и реакцию объекта на эти воздействия.

Активные методы требуют меньше времени на наблюдение и обработку результатов, чем пассивные, и поэтому их применяют во всех случаях, за исключением тех, когда их использование вызывает трудности:

- 1) на объектах, где целенаправленное изменение входных воздействий недопустимо по условиям технологического регламента;
- 2) на объектах, у которых не удастся на время эксперимента стабилизировать все внешние возмущающие воздействия;
- 3) на объектах, имеющих высокий уровень шумов при невозможности выделить в выходном сигнале объекта компоненту отклика объекта на входное воздействие.

Итак, можно сказать, что модель нужна: для того чтобы понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром; для того чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях; для того чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Перечисленные в данном подразделе виды моделей не являются взаимоисключающими и могут применяться по отдельности и комплектно.

1.3 Постановка задачи системного моделирования и обзор методов моделирования сложных объектов и процессов

Постановка любой задачи заключается в том, чтобы перевести ее словесное, «вербальное» описание в формальное (математическая зависимость между величинами в виде формулы, уравнения, системы уравнений) [18].

В случае относительно простых задач такой переход осуществляется в сознании человека, который не всегда даже может объяснить, как он это сделал. Если полученная формальная модель опирается на фундаментальный закон или подтверждается экспериментом, то этим доказывается ее адекватность.

По мере усложнения задач получение формальной модели и доказательство ее адекватности усложняется. Прямой натурный эксперимент над современными технологическими системами дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса. В общем случае процедуру исследования сложных технологических объектов и процессов можно представить в виде следующей формальной системы [20]:

$$Y_{(t)} = f[X_{(t)}, \Theta_{(t)}] - \text{функция выходов,}$$

$$\Theta_{(t)} = g[X_{(t)}, \Theta_{(t-1)}] - \text{функция переходов,}$$

$$X_{(t)} = u[Y_{(t-1)}] - \text{функция управления процессом.}$$

Здесь $X_{(t)}$ - множество значений входных факторов в момент времени t , $\Theta_{(t)}$ - множество значений параметров, характеризующих различные внутренние состояния сложной системы в этот же момент времени, $Y_{(t)}$ и $Y_{(t-1)}$ - множества значений измеряемых показателей изучаемых свойств системы в обозначенные моменты времени. Первые два уравнения моделируют суть изучаемого процесса, а третье уравнение является математическим описанием (моделью) процесса воздействий исследователя на изучаемую систему. Исследователю, как правило, доступно только определенное подмножество $Y'_{(t)}$ наблюдаемых параметров и весьма ограниченное подмножество $X'_{(t)}$ управляемых факторов. Его представление о внутренних состояниях исследуемой системы также ограничено некоторым подмножеством $\Theta'_{(t)}$. Поэтому в представлении исследователя математическая модель исследуемой им системы имеет вид:

$$f'[X'_{(t)}, \Theta'_{(t)}] = Y''_{(t)}$$

$$g'[X'_{(t)}, \Theta'_{(t)}] = \Theta'_{(t+1)}.$$

В целом формализованная схема процесса исследования сложной системы показана на рисунке 5.

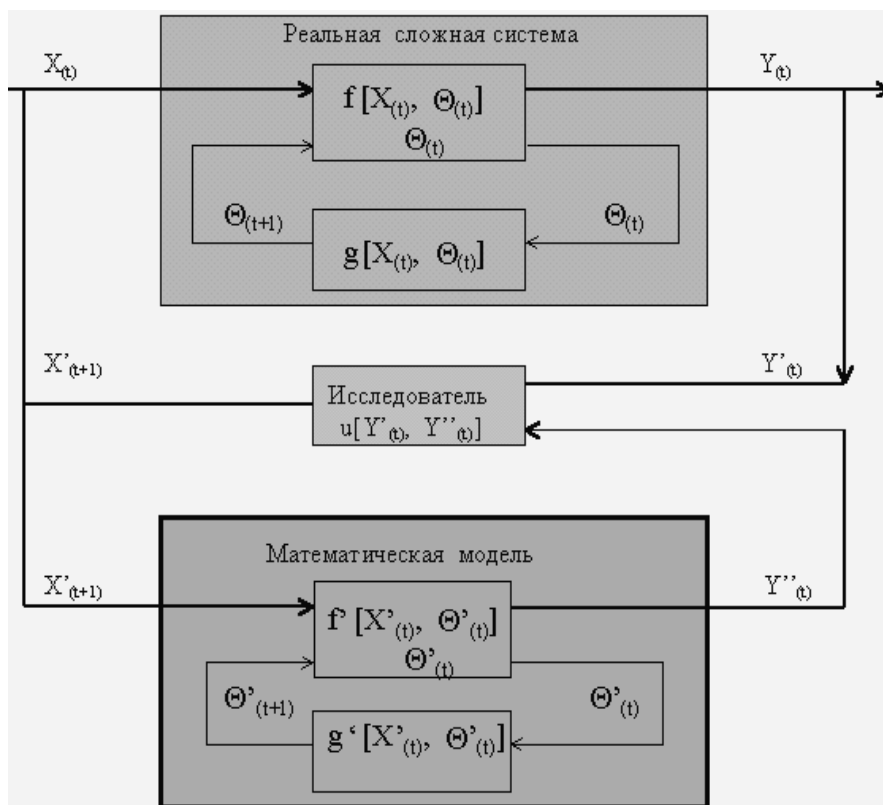


Рисунок 1.5 - Схема обобщенной математической модели процесса

Разработка моделей систем представляет собой сложную исследовательскую задачу, процесс решение которой состоит из следующих этапов: концептуальное моделирование; эскизное проектирование; техническое проектирование; рабочее проектирование; постановка и проведение модельного эксперимента; статистическая обработка результатов моделирования. Цель концептуального моделирования состоит в определении принципиальных решений по созданию построению и использованию будущей модели в процессе решения проблемы, стоящей перед исследователем. Для достижения этой цели должны быть решены следующие задачи: определение сути каждого элемента системы или ее подсистем; выяснение и описание процесса функционирования системы, как последовательности состояний из множества $\Theta(t)$, возникающих под воздействием внешних и внутренних факторов из множества $X(t)$; определение показателя эффективности функционирования системы, как функции выхода системы $Y(t)$; отбор подмножества наиболее существенных факторов и показателей, характеризующих процесс функционирования системы; определение характера взаимосвязей между входом, состоянием и выходом системы, формализация математической модели процесса в общем виде; постановка задачи на разработку технического, программного и информационного обеспечения моделирования данного процесса на ЭВМ. Формирование модели становится важной составной частью процесса принятия решения. Причем эту составную часть не всегда можно выделить как отдельный этап, завершив который, можно обращаться с полученной формальной моделью так же, как с обычным математическим описанием, строгим и абсолютно справедливым. Большинство реальных ситуаций проектирования сложных технических комплексов и задач управления экономикой необходимо отображать классом самоорганизующихся систем, модели которых должны постоянно корректироваться и развиваться. При этом возможно изменение не только модели, но и метода моделирования, что часто является средством развития представления лица принимающего решения о моделируемой ситуации.

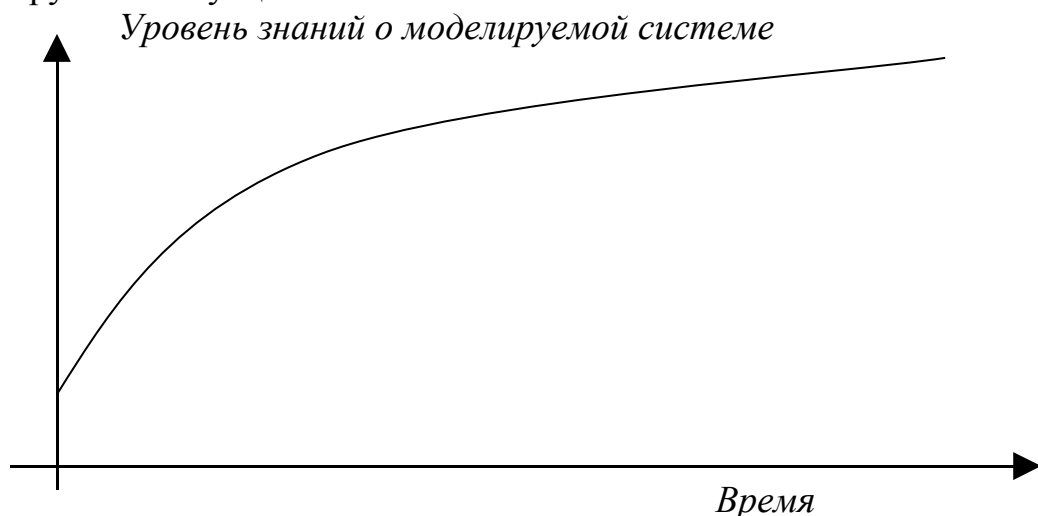


Рисунок 1.6 – Изменение уровня знаний о системе в процессе работы над ней

На рисунке 1.6 показана зависимость изменения уровня знаний о системе в процессе работы над ней (т.е. в процессе анализа, синтеза, оптимизации). Уровень знаний о системе (объекте исследования или процессе) в самом начале работы будет низким, а затем будет довольно быстро возрастать по мере накопления основных сведений и окажется больше всего к концу. Важно понимать, что уровень соответствия модели реальному процессу может сильно измениться в течение периода разработки системы. Модель, совершенно адекватная самому первому представлению о системе может быть заменена в процессе работы на более точную.

Наиболее полная на сегодняшний день классификация методов моделирования сложных систем изложена в [18]. В таблице 2 представлены основные группы методов моделирования систем в порядке возрастания возможностей формализации исследуемого объекта. С большей частью приведенных методов читатель уже знаком: методы коллективной генерации идей, сценариев, Дельфи, методы структуризации, а также и морфологические, экспертные, графические, статистические и аналитические методы были рассмотрены в курсах системного анализа и теории принятия решений, математических методов системного анализа и методов оптимизации систем. Поэтому ограничимся лишь их краткой характеристикой.

Таблица 2 – Методы моделирования систем

Методы моделирования систем	
Методы, направленные на активизацию использования интуиции и опыта специалистов	Методы формализованного представления систем
Методы типа «мозговой атаки» или коллективной генерации идей	Аналитические методы
Методы типа «сценариев»	Статистические методы
Методы типа «Дельфи»	Теоретико-множественные методы
Методы структуризации (типа «дерева целей»)	Логические методы
Морфологические методы	Лингвистические методы
Экспертные оценки	Семиотические методы
Методы организации сложных экспертиз	Графические методы

Реальный процесс моделирования индивидуален. Различные люди для решения одной и той же проблемы выбирают модели различной природы. При синтезе новой системы можно найти наиболее эффективный постепенный путь, начиная с общего качественного исследования и переходя со временем к более детальному и точному представлению по мере накопления знаний о моделируемом процессе.

Методику решения перечисленных задач концептуального моделирования рассмотрим на примере уточнения параметров орбиты космического аппарата по траекторным измерениям с наблюдательных пунктов, приведенном в [20].

Пример. Рассматривается проблема уточнения параметров орбиты космического аппарата (КА) по измерениям с наземной станции наблюдения. В данном случае исследуемая система состоит из космического аппарата, находящегося в полете по околоземной орбите, и наземной измерительной станции. Исследуемым процессом является процесс измерения параметров орбиты КА с целью уточнения их значений. Орбитой КА называется пространственное положение центра масс КА, движущегося по инерции в гравитационном поле Земли. Знание параметров орбиты КА необходимо для управления его полетом и для решения целевых задач в космосе и из космоса. Поэтому в космонавтике большое внимание уделяется проблемам определения, прогнозирования и уточнения параметров орбит космических аппаратов. Для решения этих проблем разрабатываются соответствующие математические модели орбитального движения КА. Обычно математическая модель земной орбиты КА представляется в виде эллипса, связанного с геоцентрической прямоугольной системой координат. Параметрами орбиты космического аппарата являются: наклонение (i) плоскости орбиты к плоскости экватора, долгота восходящего узла орбиты (Ω), аргумент перигея (ω) (угловое расстояние перицентра орбиты от ее восходящего узла), фокальный параметр орбиты (p), эксцентриситет орбиты (e), время пролета перицентра (t_n); или же значения координат гринвичской системы: x, y, z, x', y', z', t_i . В обобщенном виде эти параметры обозначаются символами $x_j, j = 1, \dots, m$. Однако по техническим причинам непосредственное измерение значений этих параметров невозможно. Поэтому измеряются другие параметры: дальность (D) от станции наблюдения до КА, азимут (A) со станции наблюдения на КА, угол места (γ) КА в точке стояния станции наблюдения, высота (h) КА над уровнем океана, скорости D', A', γ' , и время (t_n) в момент измерения орбиты. В обобщенном виде эти параметры обозначаются через $y_i, i = 1, \dots, n$. Обычно имеет место функциональная зависимость:

$$y_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_6, t_i). \quad (1)$$

Как правило, после запуска КА имеются приближенные расчетные значения ($x_j^{(0)}$) элементов орбиты x_j , и существует способ прогнозирования этих значений на любой заданный момент времени t_n . Поэтому на момент измерения величины y_i всегда можно получить два ее значения: измеренное - $y_{i,n}$ и расчетное - $y_{i,p}$,

$$y_{i,p} = F_i(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_6^{(p)}, t_{i,n}). \quad (2)$$

Разности $\delta y_i = y_{i,и} - y_{i,р}$ в дальнейшем используются для определения соответствующих поправок $\delta x_j = x_{j,иск} - x_j^{(р)}$ к расчетным значениям элементов орбиты x_j , $j = 1, \dots, 6$, где $x_{j,иск}$ - неизвестное (искомое) значение элемента x_j . Схема процесса измерения параметров орбиты КА с наземного измерительного пункта показана на рисунке 7, где \bar{x}_0 - вектор начальных значений элементов орбиты, определенных на момент отделения КА от ракеты носителя, $\bar{x}_{(р)}$ - вектор значений тех же элементов орбиты, спрогнозированных на момент t_n проведения траекторных измерений, $\bar{x}_{(искмое)}$ - вектор искомых истинных значений элементов обиты, $\bar{y}_{(измеренное)}$ - вектор значений измеряемых параметров, и $\bar{y}_{(р)}$ - вектор значений тех же параметров, рассчитанных по известным уравнениям связи (2), которые могут быть представлены в следующем обобщенном виде: $\bar{y}_{(р)} = F(\bar{x}_{(р)})$.

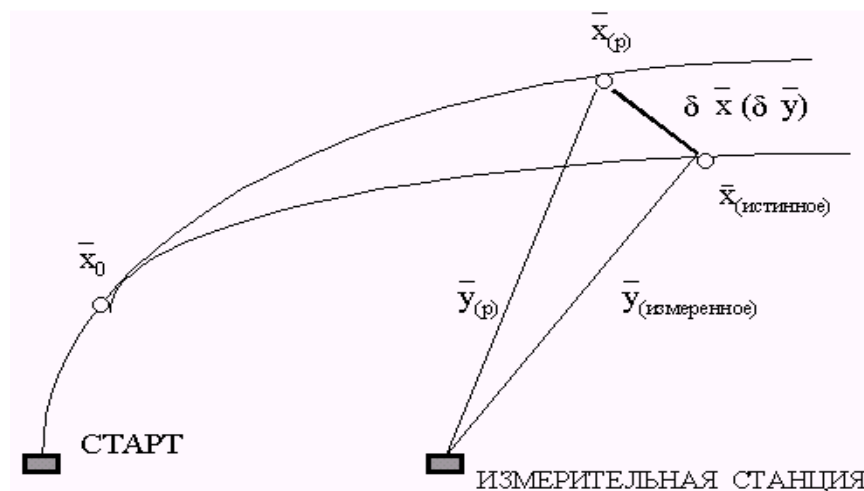


Рисунок 1.7 - Схема измерения параметров орбиты КА с наземной измерительной станцией

В результате наличия ошибок прогнозирования расчетная траектория орбиты КА не совпадает с истинной. Поэтому имеют место отклонения $\delta \bar{x} = \bar{x}_{(ист)} - \bar{x}_{(р)}$ и $\delta \bar{y} = \bar{y}_{(изм)} - \bar{y}_{(р)}$. Кроме того, в результате ошибок измерения $y_{i(изм)}$ не совпадает с $y_{i(ист)}$, поэтому δy_i содержит в себе и ошибку измерения, и ошибку прогнозирования. Задача математического моделирования в данном случае состоит в том, чтобы найти и решить уравнение, наиболее правдоподобно связывающее случайные величины δy_i со случайными величинами δx_j . Схема этой модели показана на рисунке 8.

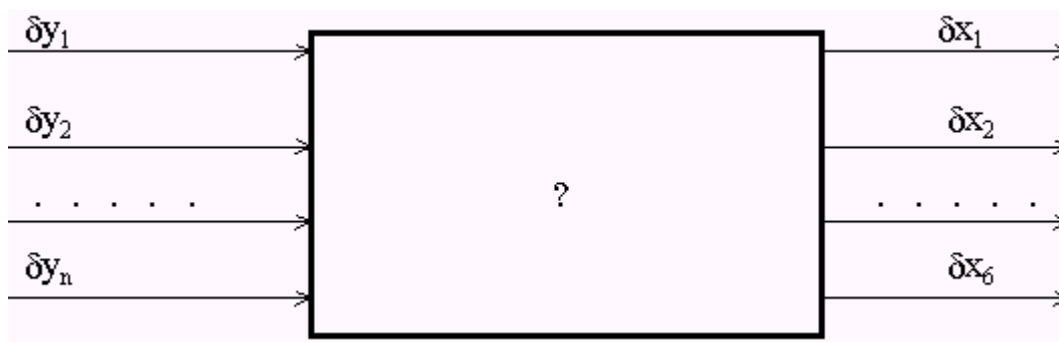


Рисунок 1.8 - Схема математической модели определения поправок параметров орбиты КА по отклонениям измеряемых параметров

Уравнения, связывающие отклонения δy_i с поправками δx_j получаются в результате дифференцирования уравнений связи (3) по параметрам x_j и составления следующих приближенных уравнений:

$$\delta y_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_6} \delta x_6, \quad i=1, \dots, n, \quad (3)$$

где $\partial F_i / \partial x_j$ - частные производные функции F_i по параметрам орбиты x_j , рассчитанные на момент проведения измерений. Количество уравнений в системе (4) может быть увеличено до любого значения N за счет измерения одной и той же величины y_i в различные моменты времени. В векторной форме эта система уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\delta \bar{y} = \left[\partial F(\bar{x}, t_{i,n}) / \partial \bar{x} \right] \delta \bar{x}, \quad (4)$$

где выражение $\left[\partial F(\bar{x}, t_{i,n}) / \partial \bar{x} \right]$ представляет собой так называемую структурную, или опорную, матрицу A системы уравнений (4). Элементы a_{ij} матрицы A представляют собой значения частных производных $\partial F_i(\bar{x}, t_{i,n}) / \partial x_j$ рассчитанные по уравнениям связи y_i с x_j ($j = 1, \dots, 6$) в расчетной точке $x_{(p)}$. При этом уравнение (4) имеет следующую матричную форму записи: $\delta \bar{y} = A \delta \bar{x}$. Матрица A имеет размер $N \times m$. Принимая во внимание факт существования ошибок ξ_i прогнозирования и измерения параметров y_i , данное уравнение следует представить в виде: $\delta \bar{y} = A \delta \bar{x} + \bar{\xi}$, или в виде:

$$\bar{\xi} = \delta \bar{y} - A \delta \bar{x}. \quad (5)$$

Задача состоит в том, чтобы, используя соотношения (5) найти наиболее правдоподобные поправки δx_j расчетных значений элементов орбиты x_j . В этом и состоит суть математической формулировки (постановки) решаемой проблемы. Для решения этой проблемы, как известно, применя-

ют метод наименьших квадратов. Согласно этому методу считают, что наиболее правдоподобными являются те значения элементов орбиты (или отклонения δx_j), которые обращают в минимум сумму квадратов ошибок ξ_i измеряемых значений y_i :

$$S = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^6 a_{ij} \delta x_j - \delta y_i \right)^2. \quad (6)$$

где N - число измерений параметров орбиты, проведенных со станции наблюдения. Обычно $N > m$. Необходимые значения δx_j находят, приравняв нулю частные производные $\partial S / \partial \delta x_j$ и решая полученную при этом систему из m дифференциальных уравнений. В матричном виде эти преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S &= \bar{\xi}' \bar{\xi}, \\ S &= (\delta \bar{y} - A \delta \bar{x})' (\delta \bar{y} - A \delta \bar{x}), \\ S &= \delta \bar{y}' \delta \bar{y} - 2 \delta \bar{x}' A' \delta \bar{y} + \delta \bar{x}' A' A \delta \bar{x}, \\ \partial S / \partial \delta \bar{x} &= -2 A' \delta \bar{y} + 2 A' A \delta \bar{x} = 0, \text{ или} \\ (A' A) \delta \bar{x} &= A' \delta \bar{y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Данная система имеет следующее решение:

$$\delta \bar{x}^{\wedge} = (A' A)^{-1} A' \delta \bar{y} \quad (8)$$

Таким образом, мы нашли то выражение, которое должно быть поставлено на место знака вопроса в математической модели на рисунке 8. В данном случае нас не интересует технология получения измерений δy_i и технология вычислений по формуле (8). Поэтому можно считать, что математическая модель имеет всего одно внутреннее состояние θ , в котором реализуются вычисления по формуле (8). На этом этап концептуального моделирования процесса решения данной проблемы может быть закончен. Следующим является этап эскизного проектирования, на котором проводится детализация математического метода и алгоритма решения системы (8).

1.4 Декомпозиция и агрегирование моделей

При построении моделей для анализа и управления сложными системами, традиционно сформировались [16], по крайней мере, два подхода.

Согласно первому подходу, предполагается, что для сложного и многомерного объекта или процесса (например, современное крупное

производство) нельзя построить модель, которая бы отражала все его существенные стороны. Поэтому для каждой задачи строится своя собственная модель, по которой и осуществляется решение задачи. Такие модели должны быть достаточно простыми, чтобы соответствующую задачу управления можно было решить в сроки, приемлемые для пользователя. При подобном подходе остается открытым вопрос о глобальной модели сложной системы или иерархии моделей, которую не удастся получить путем простого объединения всех моделей частных задач. Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу во всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естествен подход, реализующий принцип «от простого — к сложному», когда следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая.

Поэтому обычно прибегают к другому подходу, при котором предполагается возможность сформулировать некоторую исходную, подробную и многомерную модель, охватывающую все те стороны функционирования исследуемой системы, которые могут заинтересовать пользователя. Такая детальная и сложная модель не может, разумеется, непосредственно использоваться при решении каждой задачи, относящейся к управлению сложной системой, поэтому требуется ее упрощение с целью сокращения размерности.

Известны два пути упрощения сложной модели и сокращения ее размерности: декомпозиция и агрегирование.

При декомпозиции исходная модель расчленяется на несколько меньших по размеру, каждая из которых обычно связывает между собой часть переменных исходной модели. Совместное решение задач по тем частным моделям, которые получаются в результате декомпозиции, и задачи координации, описывающей связь между некоторыми переменными частных задач, дает в точности или хотя бы приближенно тот же результат, что и непосредственный анализ исходной модели. Декомпозиция целесообразна в тех случаях, когда решение частных задач моделирования и координация в совокупности проще, чем решение исходной задачи.

При агрегировании модели, переменные исходной модели заменяются меньшим числом других переменных, которые получают название агрегированных. Между новыми и прежними переменными существует известная связь, имеющая, как правило, ясный физический смысл. Кроме того, связь между агрегированными переменными в новой агрегированной модели точно или по крайней мере приближенно соответствует связи между прежними переменными в исходной задаче.

Рассмотрим процедуру декомпозиция сложных систем.

В рамках иерархических систем управления обычно говорят о декомпозиции сложной системы, руководствуясь тремя основными понятиями уровней сложности:

- 1) уровни описания или абстрагирования (страты);
- 2) уровни сложности принимаемого решения (слои);
- 3) организационные уровни (эшелоны).

Рассмотрим подробнее каждый уровень.

Страты – уровни описания и абстрагирования.

Действительно сложную систему почти невозможно описать полно и детально, что, по существу, вытекает уже из определения такой системы. Основная проблема – найти компромисс между простотой описания, позволяющей составить и сохранять целостное представление об исследуемом или проектируемом объекте, и детализацией описания, позволяющей отразить многочисленные особенности конкретного объекта. Один из путей решения этой проблемы – задание системы совокупностью моделей, каждая из которых описывает поведение системы с точки зрения соответствующего уровня абстрагирования. Для каждого уровня существуют характерные особенности, законы и принципы, с помощью которых описывается поведение системы на этом уровне. Чтобы такое описание было эффективным, необходима как можно большая независимость моделей. Для такой концепции иерархии используется термин «стратифицированное описание», при этом уровни абстрагирования называются стратами.

В [18] приводятся общие характеристики стратифицированного описания систем:

1) выбор страт, в терминах которых описывается данная система, зависит от наблюдателя, его знания и заинтересованности в деятельности системы;

2) аспекты описания функционирования системы на различных стратах в общем случае не связаны между собой, поэтому принципы и законы, используемые для характеристики систем на любой страте, не могут быть выведены из принципов, используемых на других стратах;

3) существует ассиметричная зависимость между условиями функционирования системы на различных стратах. Требования, предъявляемые к работе системы на любой страте, выступают как условия или ограничения деятельности на нижестоящих стратах;

4) на каждой страте имеется свой собственный набор терминов, концепций и принципов. То, что является объектом рассмотрения на данной страте, более подробно раскрывается на нижерасположенной страте;

5) понимание системы возрастает при последовательном переходе от одной страты к другой: чем ниже мы спускаемся по иерархии – тем более детальным становится раскрытие системы, чем выше мы поднимаемся – тем яснее становится смысл и значение всей системы.

В качестве простейшего примера стратифицированного описания в [18] приводится отображение ЭВМ в виде двух страт (рисунок 9): нижняя – физические операции (система описывается на языке физических зако-

нов, управляющих работой и взаимодействием ее механических и электронных элементов); верхняя – математические и логические операции (программирование и реализация программ, информационные потоки, команды языков программирования и т.п.)

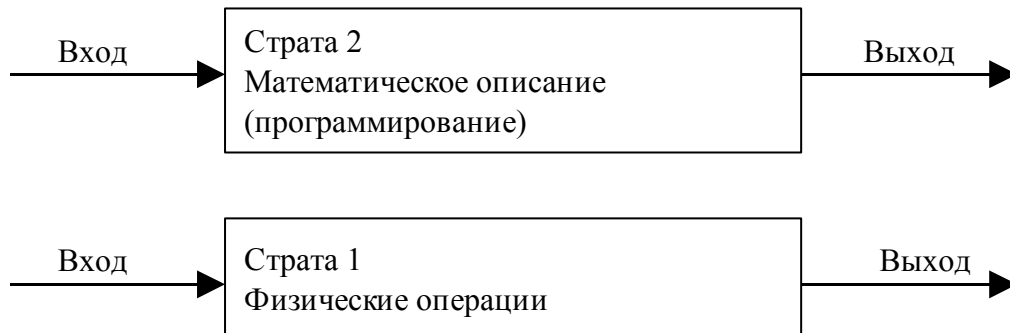


Рисунок 1.9 – Стратифицированное отображение ЭВМ

Начинать изучение системы можно с любой страты, в том числе и находящейся в середине стратифицированной модели. На каждой страте могут разрабатываться и применяться свои модели, но система сохраняется до тех пор, пока не изменяется представление о ней на верхней страте, т.е. сохраняется концепция, замысел, который раскрывается, детализируется в стратифицированной модели на каждом уровне.

Страты могут выделяться по разным принципам. Например, при представлении системы управления предприятием страты могут соответствовать сложившимся уровням управления: управление технологическими процессами (собственно производственным процессом), и организационное управление предприятием. Если предприятие входит в объединение, то к этим двум стратам может быть добавлен уровень управления объединением.

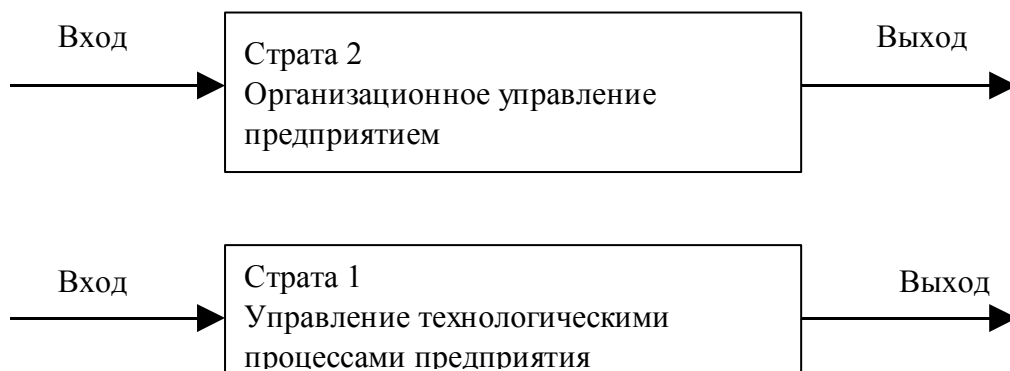


Рисунок 1.10 – Стратифицированное отображение системы управления предприятием

Слои – уровни сложности принимаемого решения

Слои – вид многоуровневой структуры, предложенный М. Месаровичем для организации процессов принятия решений.

Слои принимаемого решения выделяются для уменьшения неопределенности ситуации, то есть определяется совокупность последовательно решаемых проблем. При этом выделение проблем осуществляется таким образом, чтобы решение вышележащей проблемы определяло бы ограничения (допустимую степень упрощения) при моделировании на нижележащем уровне, то есть снижало бы неопределенность нижележащей проблемы, но без утраты замысла решения общей проблемы.

Многослойные системы принятия решений полезно формировать для решения задач планирования и управления промышленными предприятиями, отраслями и государством в целом. При постановке и решении таких проблем нельзя раз и навсегда определить цели, выбрать конкретные действия – экономические и технологические условия производства непрерывно меняются. Все это можно отразить в многослойной системе.

При рассмотрении многослойной иерархии принятия решения по управлению каким-либо процессом можно выделить, как минимум, три основных аспекта проблемы принятия решения в условиях неопределенности:

- 1) выбор;
- 2) обучение и адаптация;
- 3) самоорганизация.

Нижний слой, самый близкий к управляемому процессу – слой «выбора». Задача этого слоя – выбор способа действий. Принимающий решения элемент получает информацию об управляемом процессе и, применяя алгоритм, полученный на верхних слоях, находит нужный способ действия, т.е. последовательность управляющих воздействий на управляемый процесс.

1.5 Принцип аналогии в системном моделировании

Моделирование аналоговое, один из важнейших видов моделирования, основанный на аналогии (в более точных терминах - изоморфизме) явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими (дифференциальными, алгебраическими или какими-либо другими) уравнениями.

Простой пример - две системы, первая из которых имеющая механическую природу, состоит из оси, передающей вращение через пружину и маховик, погруженный частично в вязкую тормозящую жидкость, валу, жестко связанному с маховиком. Вторая система - электрическая - состоит из источника электродвижущей силы, соединённого через катушку индуктивности, конденсатор и активное сопротивление со счётчиком электрической энергии. Если подобрать значения индуктивности, ёмкости и сопро-

тивления так, чтобы они определённым образом соответствовали упругости пружины, инерции маховика и трению жидкости, то эти системы обнаружат структурное и функциональное сходство (даже тождество), выражаемое, в частности, в том, что они будут описываться одним и тем же дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Это уравнение может служить "теоретической моделью" обеих систем, любая же из них - "экспериментальной моделью" этого уравнения и "аналоговой моделью" друг друга. Эта аналогия лежит в основе электрического моделирования механических систем: электрические модели гораздо более удобны для экспериментального исследования, нежели моделируемые механические. Другой традиционной областью применения М. а. является исследование процессов теплопроводности, основанное на электро-тепловой и гидротепловой аналогиях (в первой из них аналогами температурного поля в твёрдом теле и теплоёмкости служат соответственно поле электрического потенциала в электропроводной среде и ёмкости некоторых конденсаторов, во второй - температура моделируется уровнем воды в вертикальных стеклянных сосудах, образующих гидравлическую модель, теплоёмкость элементарного объёма - площадью поперечного сечения этих сосудов, а тепловое сопротивление - гидравлическим сопротивлением соединяющих сосуда трубок). Для исследования лучистого (радиационного) переноса тепла часто применяют метод светового моделирования, при котором потоки теплового излучения заменяют подобными им потоками излучения светового. Таким путём определяют угловые коэффициенты излучения, а если оптические свойства (степень черноты и поглощательные способности) соответствующих поверхностей у модели и натуры тождественны, то и распределение тепловых потоков по поверхностям, входящим в систему лучистого теплообмена. До создания цифровых электронных вычислительных машин в конце 1940-х гг. аналоговое моделирование было основным способом "предметно-математического моделирования" многих процессов, связанных с распространением электромагнитных и звуковых волн, диффузии газов и жидкостей, движения и фильтрации жидкостей в пористых средах, кручения стержней и др. (в связи с чем его часто называли тогда просто "математическим моделированием"), причём для каждой конкретной задачи моделирования строилась своя "сеточная" модель (основными её элементами служили соединённые в плоскую сеточную схему электрические сопротивления различных видов), а аналоговые вычислительные машины позволяли проводить аналоговое моделирование целых классов однородных задач. В настоящее время значение аналогового моделирования значительно уменьшилось, поскольку моделирование на ЭВМ имеет большие преимущества перед ним в отношении точности моделирования и универсальности. В достаточно фиксированных и специальных задачах свои преимущества (простота, а тем самым и дешевизна технического выполнения) имеет и аналоговое моделирование. Употребительно также и совместное использование обоих методов.

1.6 Методика построения модели сложной системы из математических моделей элементов

Методика построения математического описания сложной системы выделяет шесть положений, которые должны соблюдаться при моделировании систем любой физической природы.

1 Выбрать и определить границы области моделирования для рассматриваемого процесса. В пределах этой области переменные являются постоянными или изменяются незначительно.

2 Идентифицировать транспортные потоки, которые текут поперек границы системы

3 Записать материальный (массовый баланс) в словесной форме.

4 Представить каждый баланс в виде математических выражений с соответствующими переменными.

5 Уравнения математического описания должны быть дополнены соотношениями для того, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных.

6 Для более сложных моделей целесообразно создать диаграмму потока информации.

При рассмотрении процессов и объектов из различных предметных областей в качестве области моделирования будут рассматриваться различные элементы. Так, для химико-технологических систем этой областью может быть реактор, сечение реактора, часть реактора, газовый пузырьки или капля жидкости. Вообще модель всегда упрощает реальную систему.

Так например, для реактора с мешалкой концентрации и плотность реагирующей массы реактора однородны по всему объему. Это означает, что выходные свойства потока идентичны со свойствами содержания реактора. Поэтому областью, для которой необходимо составить уравнения математического описания, может служить сам реактор.

Полная масса в системе дается произведением объема реактора V (м^3) на плотность реагирующей смеси ρ ($\text{кг}/\text{м}^3$). Таким образом масса любого компонента A в реакторе определяется либо терминах фактической массы этого вещества или числа молей (грамм-молекул) в объеме V в виде концентрации вещества A ($\text{кг } A/\text{м}^3$ или моль $A/\text{м}^3$).

В случае трубчатого реактора концентрации продуктов и реагентов изменяются непрерывно по длине реактора даже, когда реактор работает в установившемся режиме. При этом концентрация в любом сечении реактора будет постоянной и это и есть тот регион, для которого необходимо составить уравнения математического описания.

Для некоторых процессов извлечения широко используется представление о ступени процесса, которая и является соответствующей областью.

После определения области, для которой составляется математическое описание необходимо для нее идентифицировать все входы (входы) и выходы (выходы). Это могут быть физические расходы, диффузионные потоки, а также потоки межфазной передачи.

Затем записывается уравнение материального баланса. Например, это может быть сделано в следующем виде:

Накопление вещества	=	Приток вещества	-	Сток вещества
---------------------	---	-----------------	---	---------------

Этот баланс, как уже было отмечено ранее, записывают или для всего аппарата в целом, или для отдельного региона.

Различают материальные балансы: а) по веществу, б) общий.

Обобщенное уравнение сохранения массы может также применяться к каждому химическому компоненту системы. Эти уравнения можно распространить также на атомный уровень и может применяться к химическим элементам.

Если накопление вещества = 0, то это статический процесс. Если накопление вещества $\neq 0$, то это динамический процесс.

Рассмотрим основные составляющие уравнений материального баланса.

Накопление вещества. Изменение массы некоторого компонента в пределах системы может быть представлено в виде производной массы

по времени: $\frac{dm_i}{dt}$, где масса i -го вещества m_i выражено в кг или молях, а время в часах, минутах или секундах. Для любого компонента $\frac{dm_i}{dt} = \frac{d(V * C_i)}{dt}$, где C_i - концентрация компонента i (кмоль/м³ или кг/м³).

Для газов может использоваться уравнение Менделеева-Клайперона, которое связывает концентрацию с парциальным давлением и мольной долей: $p_i * V = n_i * R * T$, где p_i -парциальное давление компонента i в пределах системы газовой фазы, n_i -число молей газа, и R - константа идеального газа (в соответствующих совместимых с p , V , M и T единицах измерения). В терминах концентрации

$$C_i = \frac{n_i M_i}{V} = \frac{p_i * M_i}{R * T} = \frac{y_i * P * M_i}{R * T},$$

где y_i - мольная доля компонента в газовой фазе, и P - полное давление в системе.

Накопления для газовой фазы может быть написано в виде числа молей:

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{d(V * C_i)}{dt} = \frac{d\left(\frac{p_i * V * M_i}{R * T}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{y_i * P * V * M_i}{R * T}\right)}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(V * \rho)}{dt}$$

Для всей системы можно записать:

Для описания процессов массопереноса используются законы молекулярного и конвективного переноса.

Конвективные потоки (конвективный перенос).

Конвективный поток полной массы оценивают как произведение объемного расхода w и плотности ρ : $M = w * \rho$. Конвективный поток для массы по компонентам: $M_i = w * C_i$

Диффузия компонентов (молекулярный перенос).

Диффузионный поток в технических приложениях обычно выражаются в соответствии с законом Фика для молекулярной диффузии :

$j_i = - D_i * \frac{dC_i}{dZ}$, где j_i является поперечным потоком любого компонента (кмоль/м²/с) и $\frac{dC_i}{dZ}$ (кмоль/м³/м) - градиент концентрации, D_i - коэффициент диффузии компонента i (м²/с)

В соответствии с законом Фика этот поток всегда направлен в сторону уменьшения концентрации.

При истинной молекулярной диффузии, константа диффузии равна молекулярному коэффициенту диффузии компонента i в системе. D .

Для других случаев, типа диффузии в пористых материалах и для турбулентных приложений диффузии, используется эффективное значение, которое должно быть определено экспериментально.

Вычисление массы диффузии требует знания площади поверхности S , через которую она происходит.

Концентрационный градиент можно приближенно записать в виде:

$$j_i * S = - D_i * \frac{\Delta C_i}{\Delta Z} * S$$

Массопередача (межфазный перенос).

Массопередача также может представлять возможный ввод(вход) или сток для рассматриваемой области. Для межфазного перехода из фазы G в фазу L , который происходит поперек через площадь поверхности S , которая отделяет две фазы, полный массовый поток определяется формулой:

$$J = K * S * \Delta C$$

где, J - полный массовый поток (кмоль/сек.), S - полная площадь поверхности раздела для массообмена (м²). ΔC - концентрационная движущая сила (кмоль/м³), и K - коэффициент массообмена (м/с).

Важно обратить внимание, что концентрационная движущая сила представляется как разность между фактической концентрацией и равновесной.

Продукционные потоки. Так называемые продукционные продукты учитывают производство или расход вещества в химической реакции и

должны быть включены в уравнения математического описания. Эти потоки определяются следующим образом: $R_A = r_A * V$,

где R_A -скорость химической реакции по веществу А(кг/с),

r_A -количество вещества, которое образуется в единице объема V (м^3) реактора в единицу времени.

В уравнение математического описания входят параметры модели (эмпирические соотношения и эмпирические константы), которые определяются по экспериментальным данным тем самым модель подстраивается под эксперимент.

Как правило, динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, а статический процесс записывается в виде системы обыкновенных дифференциальных или алгебраических уравнений.

Уравнение теплового баланса.

Энергетический баланс необходим всякий раз, когда важны температурные изменения. Например, как это имеет место при химической реакции, когда реакция вызывает изменение температуры в реакторной зоне.

Для энергетического баланса необходимо придерживаться тех же, сформулированных нами ранее принципов. Однако энергетические балансы значительно более сложны, из-за многих процессов, которые вызывают температурное изменение в химических системах. Рассматриваемые здесь вопросы несколько упрощены, но позволяют понять неизотермические примеры моделирования.

Энергетический баланс базируется на законе сохранения энергии и на первом законе термодинамики. Внутренняя энергия зависит, не только от температуры, но также и от массы системы и ее составляющих.

По этой причине, материальный баланс является необходимым фундаментом энергетического баланса.

Для открытой системы с энергетическим обменом поперек его границ энергетический баланс может быть написан как:

Количество накопленной энергии	=	Количество энергии во входных потоках	-	Количество энергии в выходных потоках	+	Количество энергии, полученное через по- верхность	-	Количество энергии, унесенное через поверхность
--------------------------------------	---	--	---	--	---	--	---	---

Если накопление тепловой энергии $=0$, то это статический процесс.

Если накопление тепловой энергии $\neq 0$, то это динамический процесс.

Полностью процесс построения модели химико-технологической системы приведен в подразделе 4.2.

Любая модель дает приближенное описание процесса функционирования объекта или системы. Поэтому необходима специальная процеду-

ра доказательства достоверности (адекватности) построенной модели. От решения задачи оценки адекватности зависит степень доверия к результатам, полученным методом моделирования.

Именно сложность доказательства адекватности предлагаемой модели принято считать важнейшим недостатком метода моделирования.

Фактически единственным, достоверным способом оценки в данном случае является проверка согласованности модели с накопленными знаниями о реальном объекте.

В частности, об адекватности модели можно судить по результатам полученных с ее помощью прогнозных данных.

Кроме того, при оценке адекватности проверяют:

- 1) полноту отражения моделью свойств реального объекта;
- 2) соответствие модели исходной информации;
- 3) корректность принятых при моделировании допущений и ограничений; правильность используемых логических и математических соотношений (функций).

При необходимости в модель вносятся соответствующие коррективы.

Для того, чтобы можно было судить об адекватности модели по результатам прогноза, при одних и тех же условиях замеряются некоторые экспериментальные данные Y_{is} (где $i=1,2,...,n$), и при тех же условиях решаются уравнения математической модели процесса и получают соответствующие значения Y_{im} . По их расхождению и судят об адекватности модели в смысле прогнозирования. Например, для регрессионных моделей используют критерий Фишера.

2 Математические модели простейших типовых элементов электрических, механических, тепловых и гидравлических систем

При всем разнообразии объектов исследования, в которых протекают процессы различной физической природы, обычно удается выделить отдельные блоки, агрегаты или узлы, каждый из которых в зависимости от переносимой и преобразуемой физической субстанции можно рассматривать как электрическую, механическую поступательную или вращательную, тепловую, гидравлическую или пневматическую систему [9]. В общем случае эти системы взаимосвязаны, но, используя принцип декомпозиции, их можно представить совокупностью простейших типовых элементов, описываемых сравнительно несложными математическими моделями макроуровня. Среди внешних и выходных параметров, характеризующих состояние каждого такого элемента, удастся выделить величины, имеющие смысл потенциалов и потоков физических субстанций (например, разность электрических потенциалов и сила тока, разность температур и тепловой поток и т.п.). Эти величины будем называть потенциальными и потоковыми соответственно. Связь

между этими величинами устанавливают при помощи так называемых уравнений состояния элемента, в которые входят также и его внутренние параметры.

2.1 Модели типовых элементов электрических систем

Несмотря на различие физических процессов, протекающих в типовых элементах разнообразных *технических объектов*, большинство этих элементов удастся объединить в три группы, каждую из которых удобно охарактеризовать на примере так называемых пассивных *электрических двухполюсников*: резистора, конденсатора без потерь заряда и индуктивной катушки без сопротивления. Резистор является характерным представителем типового элемента, обладающего свойством оказывать сопротивление переносу некоторой физической субстанции (в данном случае – электрических зарядов). Для прохождения через такой элемент потока этой субстанции необходимо располагать разностью потенциалов на входе в элемент и выходе из него. Конденсатор обладает свойством накапливать эту субстанцию при повышении разности потенциалов, а индуктивная катушка – свойством инерции, проявляющимся в стремлении сохранить поток этой субстанции неизменным.

Среди простейших типовых элементов, в которых протекают процессы иной физической природы по сравнению с электрической системой, существуют элементы со свойствами, аналогичными указанным свойствам резистора, конденсатора и индуктивной катушки. Поэтому рассмотрение целесообразно начать с *уравнений состояния* простейших элементов электрической системы, а затем по аналогии с ними строить *математические модели* (ММ) типовых элементов, характерных для других технических систем.

ММ резистора, описывающей протекание через него электрического тока, является хорошо известная формула

$$\Delta U = I R \quad (2.1)$$

закона Ома, где ΔU и I – падение электрического напряжения (разность электрических потенциалов) на резисторе и сила тока, измеряемые в вольтах (В) и амперах (А) соответственно (рис. 3.1, а); R – **сопротивление резистора**, измеряемое в омах (Ом = В/А). Величину $g = 1/R$ называют **проводимостью резистора**, единицей измерения которой является сименс (См = 1/Ом). Электрическая энергия, затрачиваемая на преодоление сопротивления при протекании через резистор тока, переходит в тепловую энергию, причем измеряемая в ваттах ($P = B \cdot A$) мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = I\Delta U = I^2 R = \frac{(\Delta U)^2}{R} = g(\Delta U)^2 \quad (2.2)$$

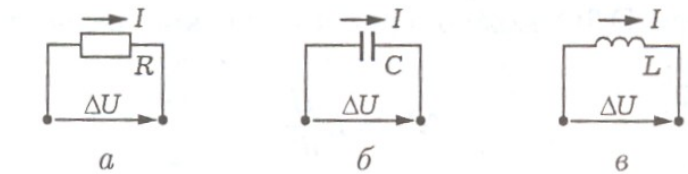


Рисунок 2.1 – Электрические схемы двухполюсников

Электрический конденсатор обладает свойством накапливать электрический заряд Q_e , измеряемый в кулонах (Кл), пропорционально разности потенциалов ΔU на его обкладках, причем $Q_e = C\Delta U$, где C – **емкость конденсатора**, измеряемая в фарадах (Ф). Для идеализированного конденсатора с постоянной емкостью, в котором нет перетекания электрического заряда через разделяющий обкладки диэлектрик, при изменении ΔU во времени t в цепи, содержащей последовательно включенный конденсатор (рисунок 2.1, б), протекает ток силой

$$I = \frac{dQ_e}{dt}, \text{ т.е.}$$

$$I = C \frac{d\Delta U}{dt} \quad (2.3)$$

Энергию электрического поля в конденсаторе, равную $E_e = Q_e\Delta U/2 = C(\Delta U)^2/2 = Q_e^2/(2C)$, измеряют в джоулях (Дж). При изменении во времени силы тока, протекающего через индуктивную катушку, возникает электродвижущая сила (ЭДС) самоиндукции, препятствующая изменению силы тока (рисунок 2.1, в). В случае идеализированной (без сопротивления) катушки эту ЭДС можно представить как разность потенциалов

$$\Delta U = L \frac{dI}{dt} \quad (2.4)$$

на концах катушки, где L – ее **индуктивность**, измеряемая в генри (Гн). При прохождении электрического тока через катушку каждый ее виток пронизывает некоторый магнитный, поток. Для катушки индуктивности принимают, что этот поток одинаков для всех витков (говорят, что он "сцеплен" с каждым витком) и равен $\Psi = LI$. Величину Ψ называют потокоцеплением и измеряют в веберах (Вб). Энергия магнитного поля катушки, измеряемая в Дж, равна $E_m = \Psi I/2 = LI^2/2 = \Psi^2/(2L)$

Таким образом, ММ резистора является алгебраическое уравнение, а для конденсатора и индуктивной катушки ММ имеет форму обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Если считать, что R , C и L в (2.1) – (2.4) не зависят от силы тока и напряжения, то эти уравнения устанавливают линейную связь между I и ΔU , что является признаком линейности ММ.

Наряду с пассивными двухполюсниками к типовым элементам электрических цепей относят источники напряжения и тока, условное обозначение которых представлено на рисунке 2.2, *а* и *б* соответственно. Идеальный источник электрического напряжения является двухполюсником, задающим на своих полюсах изменение во времени t по определенному закону $\Delta U(t)$ разности напряжений, не зависящей от значения $I(t)$ силы тока, протекающего через него. Это означает, что такой источник имеет столь малое внутреннее сопротивление \bar{R} , что падением $I(t)\bar{R}$ напряжения на таком сопротивлении можно пренебречь по сравнению с $\Delta U(t)$. Наоборот, идеальный источник электрического тока – это двухполюсник, обладающий столь большим

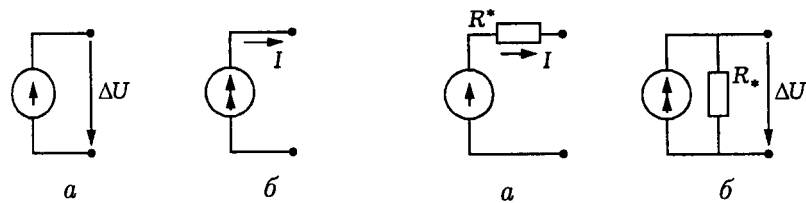


Рисунок 2.2 – Источники напряжения и тока

внутренним сопротивлением \bar{R} , что изменяющаяся по определенному закону $I(t)$ сила проходящего через такой источник тока не зависит от разности $\Delta U(t)$ напряжений на его полюсах, т.е. величиной $\Delta U(t)$ можно пренебречь по сравнению с $I(t)\bar{R}$

Практически источник тока, близкий к идеальному, можно получить последовательным соединением источника достаточно большого напряжения и резистора с сопротивлением R^* , существенно превосходящим сопротивление внешней электрической цепи (рисунок 2.3, *а*). Близким к идеальному источнику напряжения будет двухполюсник, состоящий из параллельно соединенных источника тока и резистора с сопротивлением R^* , существенно меньшим сопротивления внешней цепи (рисунок 2.3, *б*).

Пусть через резистор течет переменный во времени t ток силой

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.5)$$

где I_0 – амплитуда колебаний силы тока, ω – угловая частота и φ_0 – начальная фаза колебаний. Величину $\omega t + \varphi_0$ называют **фазой колебаний**. В соответствии с законом Ома для падения напряжения на резисторе с сопротивлением R получим

$$\Delta U_R(t) = I(t)R = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2.6)$$

Таким образом, для резистора сила тока и падение напряжения имеют одинаковую начальную фазу колебаний (говорят, что они совпадают по фазе), т.е. эти величины одновременно достигают нулевых, максимальных и минимальных значений (рис. 2.4).

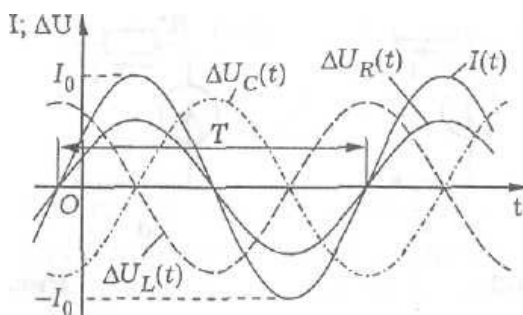


Рисунок 2.4 – Колебания силы тока и падения напряжения

В этом случае средняя за период $T = 2\pi/\omega$ колебаний силы тока мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) \Delta U(t) dt = \frac{I_0^2 R}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{I_0^2 R}{2}$$

т.е. она вдвое меньше наибольшего мгновенного значения мощности, соответствующего прохождению через тот же резистор постоянного тока силой I_0 .

Если изменяющийся по закону (2.5) ток течет через катушку с индуктивностью L , то в соответствии с (2.4) на катушке возникнет падение напряжения

$$\Delta U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega L I_0 \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (2.7)$$

Учитывая (3.3), несложно установить, что для протекания такого тока в цепи, внешней по отношению к конденсатору емкостью C , падение напряжения на конденсаторе должно изменяться по закону

$$\Delta U_C(t) = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}) \quad (2.8)$$

Итак, для конденсатора изменение падения напряжения отстает по фазе на $\pi/2$ от изменения силы тока, а для индуктивной катушки, наоборот, опережает на $\pi/2$ (см. рис. 2.4).

Используя показательную форму представления комплексного числа и формулу Эйлера, вместо (2.5) – (2.8) запишем **комплексные представления** соответствующих **функций**:

$$I(t) = \text{Im}(\hat{I}e^{i\omega t}), \quad \Delta U_R(t) = \text{Im}(\Delta \hat{U}_R e^{i\omega t})$$

$$\Delta U_L(t) = \text{Im}(\Delta \hat{U}_L e^{i\omega t}), \quad \Delta U_C(t) = \text{Im}(\Delta \hat{U}_C e^{i\omega t})$$

где $\hat{I} = I_0 e^{i\varphi_0}$, $\Delta \hat{U}_R = I_0 \text{Re}^{i\varphi_0}$, $\Delta \hat{U}_L = \omega L I_0 e^{i(\varphi_0 + \pi/2)}$ – комплексные амплитуды силы тока и соответствующих падений напряжения, $i^2 = -1$, $\text{Im } z$ – мнимая часть комплексного числа z . Отношения

$$\begin{cases} Z_R = \frac{\Delta \hat{U}_R}{\hat{I}} = R, \\ Z_L = \frac{\Delta \hat{U}_L}{\hat{I}} = \omega L e^{i\pi/2} = i\omega L, \\ Z_C = \frac{\Delta \hat{U}_C}{\hat{I}} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \end{cases} \quad (2.9)$$

называют **комплексными сопротивлениями** соответствующих электрических двухполюсников или **импедансами** (от латинского слова *impedio* – препятствую). При изменяющемся по закону (2.5) токе говорят об **активном сопротивлении** R резистора, **индуктивном сопротивлении** ωL катушки и **емкостном сопротивлении** $1/(\omega C)$ конденсатора. Последние два термина объединяют общим термином **“реактивное сопротивление”**.

Если резистор, индуктивную катушку и конденсатор рассматривать как звено, преобразующее входной сигнал (силу тока $I(t)$) в выходной сигнал (падение напряжения), то соответствующее комплексное сопротивление называют **комплексным передаточным числом** такого звена или **комплексным коэффициентом усиления**. Зависимости модуля $A(\omega)$ комплексного передаточного числа и главного значения аргумента $\beta(\omega)$ этого числа от угловой частоты ω называют соответственно **амплитудно-частотной (АЧХ)** и **фазочастотной характеристиками (ФЧХ)** звена. С помощью этих характеристик комплексное передаточное число Z можно представить в виде $Z = A(\omega) e^{i\beta(\omega)}$. На рис. 2.5 соответствующими индексами отмечены эти характеристики для резистора, индуктивной катушки и конденсатора.

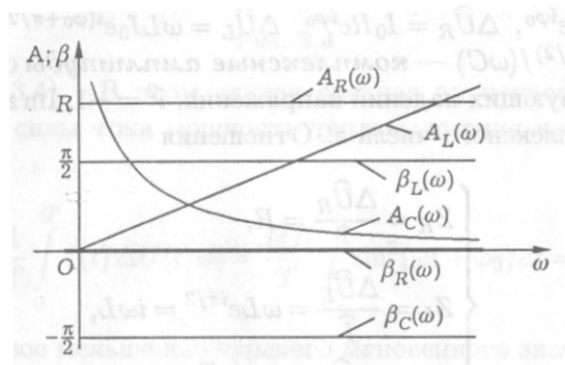


Рисунок 2.5 – АЧХ и ФЧХ для резистора, индуктивной катушки и конденсатора.

Замечание 2.1. Подчеркнем еще раз, что рассмотренные двухполюсники идеализированы, так как при построении их ММ использованы упрощенные *расчетные схемы* реальных элементов электрических цепей. К отмеченным выше допущениям следует добавить, что не учтена конечная скорость распространения электрических и магнитных полей, т.е. эти ММ являются *квазистационарными математическими моделями*. Такое допущение не приводит к заметным погрешностям, если наименьшая длительность t_{min} протекающих в этих двухполюсниках процессов удовлетворяет условию $t_{min} \gg l_{max}/c$, где l_{max} – наибольший линейный размер электрической цепи, $c \sim 2,9979 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

В линейной ММ процесса, описываемого периодической функцией времени, можно рассматривать отдельно влияние каждой гармоники в разложении этой функции в ряд Фурье, а в случае непериодического процесса – влияние функции $S(\omega)e^{j\omega t}$, где $S(\omega)$ – соответствующая спектральная функция. Но использование гармоник и спектральных функций при больших значениях ω может привести к значительным погрешностям квазистационарных ММ, поскольку при этом уменьшается значение $t_{min} = 2\pi/\omega$

2.2 Модели типовых элементов механических систем

При относительном перемещении отдельных элементов механической системы на поверхности их контакта возникают силы трения, препятствующие этому перемещению. Для уменьшения сопротивления трения к поверхности контакта подводят смазочный материал. Тогда скорость v скольжения одной детали относительно другой в первом приближении пропорциональна приложенной силе P (рисунок 2.6), т.е. $P = k_{mp} S v$ где k_{mp} – коэффициент вязкого трения, S – площадь поверхности контакта. Если в этом случае для механической системы в качестве *потенциальной величины* выбрать силу P , а в качестве *потокосвой* – скорость v , то записанное равенство можно рассматривать как аналог формулы (2.1) закона Ома

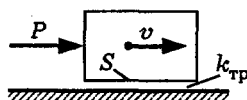


Рисунок 2.6 – Перемещение элементов механической системы

$$P = k_{тр} S v = R_M v, \quad (2.10)$$

а величину $R_M = k_{тр} S$ – как аналог электрического сопротивления R . Так как основными единицами измерения силы и скорости являются соответственно $H = \frac{кг \cdot м}{с^2}$ (ньютон) и м/с, то величину R_M измеряют в $\frac{H \cdot с}{м} = \frac{кг}{с}$, а коэффициент вязкого трения – в $\frac{H \cdot с}{м^3} = \frac{кг}{м^2 \cdot с}$.

При вращении, например, цапфы 1 вала 2 относительно вкладыша 3 подшипника скольжения 4 (рис. 2.7) вращающий момент M , приложенный к валу и измеряемый в $H \cdot м$, можно

считать при вязком трении пропорциональным угловой скорости ω (единица измерения рад/с). Тогда вместо (2.10) следует написать

$$M = k_{тр} \pi \frac{d^3 l}{4} \omega = R_M^o \omega \quad (2.11)$$

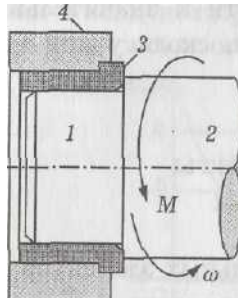


Рисунок 2.7 – Схема вала

где d и l – диаметр и длина цапфы. В этом случае момент M будет потенциальной величиной, угловая скорость ω – потоковой, а измеряемая в $H \cdot м \cdot с$ величина $R_M^o = k_{тр} \pi d^3 l / 4$ – аналогом электрического сопротивления R в (2.1).

При движении против сил сопротивления вязкого трения совершается работа. Мощность, требуемая для преодоления вязкого трения при поступательном движении, равна $W_{тр} = P v = k_{тр} S v^2 = R_M v^2$, а при вращательном – $W_{тр} = P v = k_{тр} \pi d^3 l \omega^2 / 4 = R_M^o \omega^2$. Эта мощность является аналогом мощности тепловыделения на резисторе (см. 2.1).

В технических устройствах различного назначения механическую связь между отдельными деталями и агрегатами характеризуют жесткостью узлов крепления, под которой понимают отношение силы, приложен-

ной к такому узлу, к перемещению точки приложения этой силы. Простейшей *расчетной схемой* узла крепления некоторой детали 1 к неподвижному основанию 2 является пружина 3 (рис. 2.8), один конец которой присоединен к этой детали, а второй – к основанию. Жесткостью

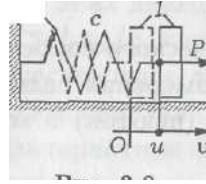


Рисунок 2.8 - Простейшая схема узла крепления

пружины называют измеряемое в $\text{Н/м} = \text{кг/с}^2$ отношение $c = P/u$, где P – сила, приложенная к пружине в точке ее присоединения к детали, а u – перемещение этой точки в направлении действия силы.

Изменение во времени t силы P приведет к изменению перемещения u . Если не учитывать силы инерции, возникающие при перемещении витков пружины, и принять значение c постоянным, то после дифференцирования равенства $u = P/c$ по времени получим

$$\frac{du}{dt} = v = \frac{1}{c} \frac{dP}{dt} = C_M \frac{dP}{dt} \quad (2.12)$$

где v – скорость перемещения точки приложения силы P . В этом случае величину $C_M = 1/c$, измеряемую в м/Н и называемую податливостью пружины, можно рассматривать как аналог емкости C , входящей в соотношение (3.3) для электрического конденсатора. При растяжении или сжатии пружины она накапливает потенциальную энергию, равную работе силы P , совершаемой при перемещении точки приложения этой силы:

$$\Pi = \int_0^u P du = \int_0^u c u du = \frac{c}{2} u^2 = \frac{P^2}{2c}$$

Эта энергия является аналогом энергии электрического поля в конденсаторе (см. 2.1). Так как $v = du/dt$, $I = dQ_e/dt$ и скорость v – аналог силы I электрического тока, то перемещение u – аналог электрического заряда Q_e .

Зависимость вида (2.12) характерна для многих элементов, материал которых при нагружении сохраняет свойство линейной упругости. Так, например, продольную деформацию линейно упругого стержня с поперечным сечением площадью S при растяжении силой P можно считать одинаковой по всей длине l стержня (рис. 2.9) и равной в соответствии с *законом Гука*

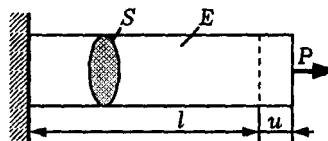


Рисунок 2.9 – Продольная деформация линейно упругого стержня

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{ES}$, где $\sigma = P/S$ – механическое напряжение в поперечном сечении стержня, E – модуль упругости материала стержня при растяжении (модуль Юнга), измеряемые в паскалях ($\text{Па} = \text{Н/м}^2$). При этом торец стержня, подверженный действию силы, переместится относительно закрепленного торца на расстояние $u = \varepsilon l = Pl/(ES)$. При сравнительно медленном изменении во времени t силы P , позволяющем пренебречь силами инерции, получим

$$\frac{du}{dt} = v = \frac{l}{ES} \frac{dP}{dt} = \bar{C}_M \frac{dP}{dt} \quad (2.13)$$

где величина $\bar{C}_M = l/(ES)$ является аналогом емкости C в (2.3). Из курса сопротивления материалов известно, что поперечная сила P , приложенная к концу консольной упругой балки длиной l , жестко заземленной другим концом (рис. 2.10), вызывает прогиб $w = Pl^3/(3EJ_x)$, где J_x – *геометрический момент инерции* поперечного сечения балки относительно главной центральной оси этого сечения, перпендикулярной плоскости изгиба, в которой лежит нейтральная ось балки и действует сила P . Так, $J_x = \pi d^4/64$ для круглого сечения диаметра d и $J_x = bh^3/12$ для прямоугольного сечения шириной b и высотой h . При изменении во времени t силы P приходим к зависимости, аналогичной (2.12) и (2.13):

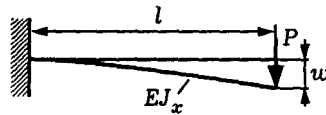


Рисунок 2.10 – Схема приложения поперечной силы к балке

$$\frac{dw}{dt} = v = \frac{l^3}{3EJ_x} \frac{dP}{dt} = \hat{C}_M \frac{dP}{dt} \quad (2.14)$$

где $\hat{C}_M = l^3/(3EJ_x)$

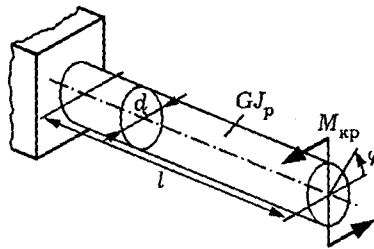


Рисунок 2.11 – Приложение крутящего момента к стержню

Если один из концов упругого стержня длиной l с круглым поперечным сечением диаметра d жестко закреплен, а ко второму приложен крутящий момент $M_{кр}$ (рис. 2.11), то угол закручивания стержня будет $\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}$, где G – модуль сдвига материала стержня, $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции сечения стержня. Дифференцированием по времени t находим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{l}{GJ_p} \frac{dM_{кр}}{dt} = C_M^O \frac{dM_{кр}}{dt} \quad (2.15)$$

где $C_M^O = \frac{l}{GJ_p}$. При закручивании стержня в (2.15) потенциальной величиной является крутящий момент $M_{кр}$, а потоковой – угловая скорость ω поворота того конца стержня, к которому приложен этот момент.

Таким образом, при различном выполнении упругих элементов механической системы между скоростью перемещения (или угловой скоростью) и скоростью изменения приложенной силы (или крутящего момента) справедлива зависимость, аналогичная соотношению (2.3) для электрического конденсатора. Соотношение, аналогичное (2.4) для индуктивной катушки, в случае поступательного движения тела массой m с изменяющейся во времени скоростью v следует непосредственно из второго закона Ньютона в виде

$$P = m \frac{dv}{dt} = L_M \frac{dv}{dt}, \quad L_M = m \quad (2.16)$$

Здесь масса m тела служит аналогом индуктивности L катушки. При вращении тела относительно фиксированной оси с переменной угловой скоростью ω получим

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = L^O \frac{d\omega}{dt}, \quad L^O = J \quad (2.17)$$

где M – вращающий момент относительно этой оси. В (2.17) аналогом индуктивности является момент инерции J тела относительно оси вращения. Кинетическая энергия при поступательном движении равна $K = mv^2/2 = L_M v^2/2$, а при вращательном – $K = J\omega^2/2 = L^O \omega^2/2$. Величина K является аналогом энергии магнитного поля индуктивной катушки (см. 2.1).

Количество движения (импульс) тела массой m , имеющего скорость v , равно mv , а момент количества движения (момент импульса) вращающегося тела – $J\omega$. Продолжая аналогию с индуктивной катушкой, приходим к выводу, что аналогом импульса при поступательном движении тела или момента импульса при вращении тела будет потокосцепление $\Psi = LI$ катушки индуктивностью L , через которую протекает электрический ток силой I (см. 2.1).

Аналогию между *математическими моделями* (ММ) типовых элементов механических систем и *электрических двухполюсников* называют *электромеханической*. Ее удобно использовать при построении ММ сложных механических систем, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой элементов.

2.3 Модели типовых элементов тепловых систем

Под тепловыми будем понимать технические системы, в которых происходит накопление и перенос тепловой энергии. Аналогами разности электрических потенциалов (напряжений) и силы тока в тепловой системе являются разность (перепад) ΔT температур и тепловой поток Q , измеряемые в Кельвинах (К) и ваттах (Вт) соответственно.

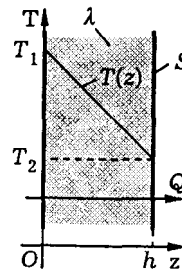


Рисунок 2.12 – Простейшая схема тепловой системы

Многие элементы конструкции тепловых систем могут быть сведены к *расчетной схеме* (РС) плоской стенки толщиной h (рис. 2.12). Если на поверхностях стенки, материал которой имеет коэффициент теплопроводности λ , измеряемый в $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, заданы постоянные значения T_1 и T_2 температур, то при $\lambda = \text{const}$ установившееся распределение температуры по толщине стенки будет линейным: $T(z) = T_1 - \Delta T(z/h)$, где $\Delta T = T_1 - T_2$, а z – координата, отсчитываемая внутрь стенки от поверхности с температурой T_1 . В этом можно убедиться, решив одномерное уравнение Лапласа $\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = 0$, описывающее стационарное температурное поле в плоской стенке. В соответствии с эмпирическим законом теплопроводности [XII], установленным Ж.Б.Ж. Фурье, тепловой поток, проходящий через стенку, одна из поверхностей которой имеет площадь S , равен $Q = (\lambda/h)S\Delta T$. Отсюда получаем зависимость

$$\Delta T = Q \frac{h}{\lambda S} = QR_T \quad (2.18)$$

аналогичную *закону Ома* (2.1). Величину $R_T = h/(\lambda S)$ в (2.18) называют *термическим сопротивлением* плоской стенки.

Если стенка состоит из нескольких плоских слоев, то при заданных температурах на внешних поверхностях стенки R_T в (2.18) следует рассматривать как суммарное термическое сопротивление, равное сумме термических сопротивлений всех слоев. При неидеальном тепловом контакте между слоями в эту сумму должны войти контактные термические сопротивления.

Многослойные элементы конструкции тепловых систем могут иметь криволинейные поверхности (например, стенки трубопроводов и сосудов, покрытые слоями теплоизоляционного материала). Такие элементы при установившемся одномерном распределении $T(z)$ температуры можно свести к РС неоднородного многослойного тела с коэффициентом теплопроводности $\lambda(z)$ и нормальным к координатной оси Oz сечением площадью $S(z)$. Начало отсчета координаты z поместим на поверхности тела, имеющей температуру T_1 (рисунок 2.13). На противоположной поверхности тела при $z = h$ задана температура T_2 . Так как проходящий через тело тепловой поток Q одинаков для любого сечения, нормального к оси Oz , то в соответствии с законом

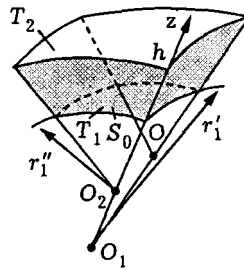


Рисунок 2.13 – Тепловая система с криволинейной поверхностью

теплопроводности имеем $Q = -\lambda(z)S(z)\frac{dT(z)}{dz} = \text{const}$ и после интегрирования получаем

$$T_2 = T_1 - Q \int_0^h \frac{dz}{\lambda(z)S(z)}$$

Отсюда следует (2.18), если для многослойного тела обозначить

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{Q} = \int_0^h \frac{dz}{\lambda(z)S(z)} \quad (2.19)$$

Пусть тело состоит из N слоев толщиной h_n , $n = \overline{1, N}$, с коэффициентами теплопроводности $\lambda_n = \text{const}$, причем r_n' и r_n'' – главные радиусы кривизны поверхности идеального теплового контакта между слоями с номерами $n-1$ и n . Тогда, отсчитывая от этой поверхности координату z_n , для n -го слоя можно написать $S_n(z_n) = S_0 \frac{(r_n' + z_n)(r_n'' + z_n)}{r_1' r_1''}$, где S_0 и r_1' , r_1'' – площадь и главные радиусы кривизны поверхности тела, на которой задана температура T_1 (см. рис. 2.13). В этом случае, используя свойство аддитивности определенного интеграла, из (2.19) находим

$$R_T = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{h_n} \frac{dz_n}{S_n(z_n)} = \frac{r_1' r_2''}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n (r_n' - r_n'')} \ln \frac{1 + \frac{h_n}{r_n''}}{1 + \frac{h_n}{r_n'}} \quad (2.20)$$

Если один или оба радиуса кривизны поверхности отрицательны, то выражение для $S_n(z_n)$ и (2.20) имеют смысл лишь при условии $h_n/|r_n'| < 1$ или $h_n/|r_n''| < 1$. В частном случае круглой цилиндрической стенки при $r_n' \rightarrow \infty$ и $r_n'' = r_n$ из (2.19) получим

$$\hat{R}_T = \frac{r_1}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \ln(1 + \frac{h_n}{r_n}) \quad (2.21)$$

а для плоской ($r_n' \rightarrow \infty$, $r_n'' \rightarrow \infty$) сферической ($r_n' = r_n'' = r_n$) стенок предельным переходом найдем соответственно

$$\bar{R}_T = \frac{1}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{h_n}{\lambda_n}, \quad \tilde{R}_T = \frac{r_1^2}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{h_n / r_n}{\lambda_n (r_n + h_n)}$$

Сравним термические сопротивления однослойных цилиндрической и плоской стенок одинаковой толщины h с одинаковыми коэффициентами теплопроводности $\lambda = \text{const}$ при условии $S_0 = S$, записав с учетом (2.21)

$$y = \frac{\lambda S}{h} \hat{R}_T = \frac{\lambda S}{h} \frac{r_1}{\lambda S} \ln(1 + \frac{h}{r_1}) = \frac{1}{\xi} \ln(1 + \xi)$$

где $\xi = h/r_1$. На рис. 2.14 показана зависимость y от ξ , которая характеризует погрешность, возникающую при представлении цилиндрической стенки более простой расчетной схемой плоской стенки.

Один из распространенных в природе и технике видов теплового взаимодействия тела с окружающей средой состоит в теплообмене между ними

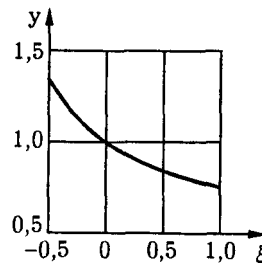


Рисунок 2.14 – Погрешность при использовании РС плоской стенки

при движении среды относительно тела. Такой вид взаимодействия носит название *конвективного теплообмена*. Для него считают справедливым зависимость

$$Q = \alpha(T_c - T)S \quad (2.22)$$

где T_c – температура среды, S – площадь поверхности тела, α – коэффициент теплоотдачи (коэффициент конвективного теплообмена), измеряемый в $\frac{Вт}{м^2 \cdot К}$. Эту зависимость обычно называют законом Ньютона

для теплоотдачи. Из (2.22) следует, что величину $R_T^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha S} = \frac{T_c - T}{Q}$ можно рассматривать как термическое сопротивление, которое преодолевает тепловой поток при переносе тепловой энергии от среды к телу (или от тела к среде при $T_c < T$).

Пример 1. Пусть криволинейная поверхность с главными радиусами кривизны $r'_1 r''_1$ покрыта слоем теплоизоляционного материала толщиной h (см. рис. 2.13). Примем коэффициент λ теплопроводности теплоизоляционного материала постоянным и, положив в (2.20) $N=1$, запишем суммарное термическое сопротивление между этой поверхностью площадью S_0 и окружающей средой, с которой происходит конвективный теплообмен на внешней поверхности слоя теплоизоляции при $z = h$:

$$R^\Sigma = R_T + R_T^{(\alpha)} = \frac{r'_1 r''_1}{\lambda (r'_1 - r''_1) S_0} \ln \frac{1 + h/r''_1}{1 + h/r'_1} + \frac{1/(\alpha S_0)}{(1 + h/r'_1)(1 + h/r''_1)}$$

В отличие от плоской поверхности, для которой с увеличением h линейно возрастает суммарное термическое сопротивление, в случае криволинейной поверхности зависимость R^Σ от h может быть немонотонной. Для исследования этой зависимости вычислим производную

$$\frac{dR^\Sigma}{dh} = \frac{r'_1 r''_1}{\lambda S_0 (h + r'_1)(h + r''_1)} - \frac{(2h + r'_1 + r''_1) r'_1 r''_1}{\alpha S_0 (h + r'_1)^2 (h + r''_1)^2}$$

В соответствии с необходимым условием экстремума функции $R^\Sigma(h)$ приравняем эту производную нулю и получим равенство

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{1}{h + r'_1} + \frac{1}{h + r''_1} \quad (2.23)$$

Так как по смыслу $h > 0$ и $\alpha/\lambda > 0$, то равенство (2.23) можно удовлетворить лишь при условии $0 < \alpha/\lambda < 1/r'_1 + 1/r''_1$. Тогда получим квадратное уравнение с неотрицательным решением

$$h_* = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{r'_1 + r''_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 + \frac{(r'_1 - r''_1)^2}{4}}$$

Если $\frac{\lambda}{\alpha} < \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r''_1}$ то значение $\frac{dR^\Sigma}{dh}$ при $h=0$ и отрицательно. Следовательно, значение h_* , называемое критической толщиной слоя теплоизоляционного материала, соответствует минимуму суммарного термического сопротивления. При этом возникает парадоксальная ситуация: увеличение h в интервале $(0, h_*)$ не увеличивает, а, наоборот, снижает термическое со-

противление, что приводит к лишним затратам теплоизоляционного материала и увеличению массы всей конструкции. Избежать такой ситуации можно, если выбрать теплоизоляционный материал с таким значением λ , чтобы было выполнено неравенство $\frac{\alpha}{\lambda} \geq \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_1''}$

Отметим, что РС, представленную на рис. 2.13, можно использовать для построения одномерной *нелинейной математической модели* (ММ) процесса стационарной теплопроводности в однородном теле с криволинейной поверхностью, коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ которого зависит от температуры. В этом случае, согласно закону теплопроводности, запишем

$Q = -\lambda(T)S(z)\frac{dT(z)}{dz} = \text{const}$ и после разделения переменных и интегрирования получим

$$Q \int_0^h \frac{dz}{S(z)} = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT$$

Отсюда вместо (2.19) найдем термическое сопротивление

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{Q} = (T_1 - T_2) \frac{\int_0^h \frac{dz}{S(z)}}{\int_{T_2}^{T_1} \lambda(T) dT}$$

Термическое сопротивление деталей и конструкций более сложной конфигурации можно найти из решения задачи стационарной теплопроводности. Для приближенных двусторонних оценок (снизу и сверху по отношению к истинному значению термического сопротивления) целесообразно использовать двойственную вариационную формулировку этой задачи.

Если некоторая деталь или конструкция выполнены из материала с высокой теплопроводностью, то их температура достаточно быстро выравнивается во всех направлениях и ее можно приближенно считать не зависящей от пространственных координат. В этом случае тепловое состояние детали или конструкции в любой текущий момент времени t допустимо характеризовать лишь одним значением температуры T , однородным по занимаемому ими объему V . Такое приближение соответствует РС высоко-теплопроводного тела с однородной по его объему температурой и измеряемой в джоулях (Дж) тепловой энергией

$$U = \int_V dV(M) \int_0^T c(T, M) dT \quad (2.24)$$

где $c(T, M)$ – удельная объемная теплоемкость материала (единица измерения $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$), зависящая в общем случае от температуры T и координат точки $M \in V$ (когда конструкция выполнена из различных материалов).

При изменении температуры T во времени тепловая энергия тела постоянной конфигурации изменяется со скоростью

$$\frac{dU}{dt} = \left(\int_V c(T, M) dV \right) \frac{dT}{dt} \quad (2.25)$$

Это равенство получено дифференцированием внутреннего интеграла в (3.24) по переменному верхнему пределу T , зависящему, в свою очередь, от времени t . Из закона сохранения энергии следует, что тепловая энергия тела может изменяться лишь за счет подвода к телу энергии или ее отвода от него. Если подвод или отвод энергии происходит путем теплового взаимодействия тела с окружающей средой, то интенсивность этого взаимодействия можно характеризовать тепловым потоком Q , который примем положительным в случае подвода тепловой энергии к поверхности тела. Тогда будем иметь $\frac{dU}{dt} = Q$, или, учитывая (2.25),

$$C_T \frac{dT}{dt} = Q(t) \quad C_T = \int_V c(T, M) dV \quad (2.26)$$

что аналогично зависимости (2.3) для электрического конденсатора. Величину C_T , аналогичную емкости C конденсатора, называют *полной теплоемкостью тела* (единица измерения Дж/К).

Аналогия между термическим и электрическим сопротивлениями, а также между полной теплоемкостью и электрической емкостью позволяет РС процесса конвективного теплообмена тела, имеющего полную теплоемкость C_T , и среды с температурой T_c (рисунок 2.15, а), представить в виде электрической цепи, состоящей из источника разности потенциалов ΔU , пропорциональной разности $T_c - T_o$ температуры среды и начальной температуры тела, резистора сопротивлением R и конденсатора емкостью C (рисунок 2.15, б). Аналогичными будут и ММ, описывающие процессы в рассматриваемой тепловой системе и

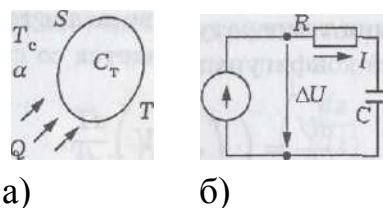


Рисунок 2.15 – Электротермическая аналогия

в электрической цепи, причем тепловой поток Q в тепловой системе будет пропорционален силе I тока в электрической цепи. Для построения ММ рассматриваемой тепловой системы подставим (2.22) в (2.26) и получим ОДУ первого порядка

$$C_T = \frac{dT}{dt} = \alpha (T_c - T)S.$$

При постоянных значениях C_T , α , T_c и известной температуре T_0 тела в момент времени $t = 0$, принимаемый за начальный, это ОДУ имеет решение в виде

$$\frac{T_c - T(t)}{T_c - T_0} = \exp\left(-\frac{\alpha St}{C_T}\right) = \exp\left(-\frac{t}{R_T^{(a)} C_T}\right)$$

С течением времени температура тела стремится к температуре окружающей среды. С точностью до 1 % от значения $T_c - T_0$ процесс выравнивания этих температур можно считать завершенным при условии $\exp(-\alpha St / C_T) \leq 0.01$, или

$$t \geq \frac{C_T}{\alpha S} \ln 100 \approx 4.6 \frac{C_T}{\alpha S} = 4.6 R_T^{(a)} C_T$$

Установленную выше аналогию между ММ элементов тепловых систем и *электрических двухполюсников* принято называть *электротепловой*. Эта аналогия позволяет для сложной тепловой системы построить *эквивалентную схему* в виде электрической цепи, состоящей из таких двухполюсников, а затем использовать хорошо разработанные и формализованные приемы получения ММ электрических цепей для построения ММ рассматриваемой тепловой системы.

Замечание 3.2. Используемый при получении (2.18) эмпирический закон теплопроводности в виде $q = -\lambda \text{grad} T$ предполагает, что в ответ на появление в материале с коэффициентом теплопроводности λ градиента $\text{grad} T$ температуры мгновенно возникает тепловой поток с вектором плотности q . Это равносильно предположению, что скорость распространения тепловой энергии в материале бесконечно велика. На самом деле в реальном материале неизбежно некоторое запаздывание возникновения теплового потока по отношению к появлению градиента температуры (т.е. разности температур в окрестности некоторой точки). Величина такого запаздывания зависит от микромеханизма передачи тепловой энергии в материале и связана со временем обмена энергией между отдельными элементами микроструктуры материала (например, в металлах это время обмена между электронным газом и ионами в узлах кристаллической решетки, имеющее порядок 10^{-10} с). Время τ запаздывания возрастает по мере уменьшения удельной объемной теплоемкости и плотности теплопроводящей среды. В случае высокоинтенсивных и быстро протекающих процессов переноса

тепловой энергии указанный эффект запаздывания играет заметную роль и его можно учесть при помощи модифицированного закона теплопроводности. Здесь отметим лишь то, что этот эффект аналогичен влиянию индуктивности в электрической цепи (см. 2.1).

2.4 Модели типовых элементов гидравлических систем

Перейдем к рассмотрению простейших типовых элементов, характерных для технических систем, в которых происходит перемещение несжимаемой жидкости. Такие системы принято называть гидравлическими.

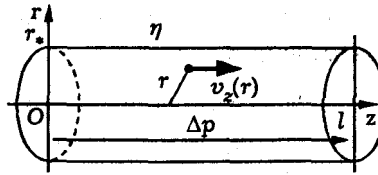


Рисунок 2.16 – Участок трубопровода длиной l

Разности электрических потенциалов (напряжений) и силе тока в гидравлической системе соответствуют разность (перепад) Δp давлений и объемный расход $Q_{ж}$ жидкости, измеряемые в Па (паскалях) и м³/с соответственно.

Из курса физики известно, что для участка достаточно длинного трубопровода с круглым поперечным сечением радиуса r_* при установившемся ламинарном течении вязкой жидкости справедлива следующая зависимость скорости v_z вдоль оси трубопровода от радиальной координаты r :

$$v_z(r) = \frac{r_*^2 - r^2}{4\eta l} \Delta p \quad (2.27)$$

где $\eta > 0$ – коэффициент сдвиговой вязкости жидкости, измеряемый в Па • с, $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ – перепад давления, приходящийся на участок трубопровода длиной l (рис. 2.16). Эту зависимость можно получить, решая уравнение Навье – Стокса. Учитывая (2.27), вычисляем объемный расход

$$Q_{ж} = \int_0^{r_*} 2\pi r v_z(r) dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l} \int_0^{r_*} r(r_*^2 - r^2) dr = \frac{\pi r_*^4}{8\eta l} \Delta p \quad (2.28)$$

жидкости через трубопровод. Зависимость (2.28) установлена экспериментально Ж.Л.М. Пуазейлем при изучении кровообращения. Величину $R_\Gamma = 8\eta l / (\pi r_*^4)$ можно рассматривать как гидравлическое сопротивление участка трубопровода длиной l и записать

$$\Delta p = Q_{ж} R_\Gamma \quad (2.29)$$

что аналогично закону Ома в виде (2.1).

Если поперечное сечение трубопровода не является круглым, то выражение для R_T в (2.29) будет зависеть от формы этого сечения. При увеличении объемного расхода жидкости через трубопровод растет ее скорость и ламинарный режим течения переходит в турбулентный, а R_T становится функцией $Q_{ж}$, т.е. *математическая модель* (ММ) установившегося течения в трубопроводе оказывается нелинейной.

Рассмотрим цилиндрический сосуд с вертикально расположенной образующей и поперечным сечением площадью S , заполняемый (или опорожняемый) через трубопровод, присоединенный к этому сосуду (рис. 2.17). Скорость v течения жидкости в трубопроводе будем считать достаточно малой по модулю, так что динамическим давлением $\rho v^2/2$, где ρ – плотность жидкости, можно пренебречь по сравнению со статическим давлением p на входе трубопровода в сосуд. Это давление равно $p = p_0 + \rho gH$, где p_0 – давление над зеркалом жидкости (для сосуда, сообщающегося с атмосферой, оно равно атмосферному давлению), $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, H – высота уровня жидкости в сосуде. Изменения во времени t уровня жидкости и разности $\Delta p = p - p_0$ давлений связаны между собой зависимостью $\frac{d\Delta p}{dt} = \rho g \frac{dH}{dt}$

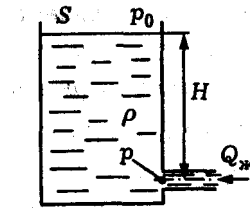


Рисунок 2.17 – Схема вертикального сосуда

Тогда для объемного расхода жидкости через трубопровод, положительного при заполнении сосуда, можно записать

$$Q_{ж} = S \frac{dH}{dt} = \frac{S}{\rho g} \frac{d\Delta p}{dt} = C_T \frac{d\Delta p}{dt} \quad (2.30)$$

где $C_T = \frac{S}{\rho g}$ – величина, аналогичная емкости C электрического конденсатора в (2.3). Таким образом, аналогом конденсатора для гидравлической системы будет сосуд с жидкостью, подводимой или отводимой через трубопровод, присоединенный к дну сосуда.

Элементом гидравлической системы, аналогичным идеализированной (без сопротивления) индуктивной катушке, является участок горизонтального цилиндрического трубопровода длиной l , по которому течет с переменным во времени объемным расходом $Q_{ж}(t)$ идеальная (невязкая) несжимаемая жидкость плотностью ρ (рис. 2.18). Пусть S – площадь поперечного сечения трубопровода. Тогда в момент времени t на рассматриваемом участке трубопровода будет находиться масса $m_{ж} = \rho S l$

жидкости, движущаяся со скоростью $v(t) = Q_{ж}(t)/S$. При переменном объемном расходе за счет ускорения этой массы возникнет сила инерции $F = m_{ж} \frac{dv(t)}{dt} = \rho l \frac{dQ_{ж}(t)}{dt}$. Так как жидкость идеальная, то гидравлическое сопротивление при ее течении отсутствует и сила инерции уравновешена лишь разностью $(p_1 - p_2)S$ сил давления в поперечных сечениях трубопровода. Следовательно, имеем

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{F}{S} = \frac{\rho l}{S} \frac{dQ_{ж}}{dt} = L_{\Gamma} \frac{dQ_{ж}}{dt} \quad (2.31)$$

где $L_{\Gamma} = \rho l/S$ – величина, которую можно назвать гидравлической индуктивностью участка трубопровода. Она аналогична индуктивности L катушки в (2.4).

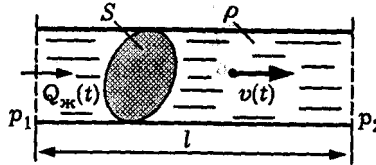


Рисунок 2.18 - Участок горизонтального трубопровода

Итак, в гидравлических системах можно выделить простейшие элементы, ММ которых с точностью до обозначений совпадают с ММ идеализированных *электрических двухполюсников*: резистора, конденсатора без потерь заряда и индуктивной катушки без сопротивления. Как и в случае реальных электрических элементов (см. 2.1), комбинируя ММ идеализированных элементов гидравлических систем, можно учесть, например, влияние вязкости жидкости.

При течении по трубопроводу вязкой жидкости неизбежно возникает гидравлическое сопротивление, влияние которого при ее переменном объемном расходе можно учесть аналогично учету электрического сопротивления индуктивной катушки (см. пример 2.7). *Расчетную схему* участка трубопровода длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* (см. рис. 2.16) представим последовательно соединенными гидравлическим сопротивлением $R_{\Gamma} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4}$ и гидравлической индуктивностью $L_{\Gamma} = \rho l/S$ (рис. 2.19). Тогда, учитывая (2.29) и (2.31), получаем ОДУ первого порядка

$$L_{\Gamma} \frac{dQ_{ж}(t)}{dt} + R_{\Gamma} Q_{ж}(t) = \Delta p$$

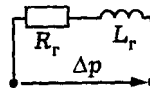


Рисунок 2.19 - Электрическая схема участка трубопровода

Аналогию между ММ типовых элементов гидравлической системы и электрических двухполюсников называют *электрогидравлической*. Она дает возможность в случае сложной гидравлической системы построить ее *эквивалентную схему* в виде электрической цепи, объединяющей такие двухполюсники. Это позволяет для получения ММ гидравлической системы применить детально разработанные и формализованные приемы построения ММ электрических цепей.

Замечание 2.3. Рассмотренные ММ некоторых простейших элементов гидравлических систем являются (как и в 2.1) *квазистационарными математическими моделями*, поскольку при их построении неявно предполагалось, что возмущения, вызванные изменением давления или объемного расхода жидкости в трубопроводе, распространяются вдоль трубопровода мгновенно. В действительности реальные жидкости обладают некоторой сжимаемостью. Это приводит к тому, что возмущения распространяются с довольно большой, но конечной скоростью a , называемой скоростью звука в жидкости. Если при длине l трубопровода наименьшая длительность t_{min} протекающих в нем процессов удовлетворяет условию $t_{min} \gg l/a$, то применение квазистационарных ММ не приводит к большим погрешностям. Но при нарушении этого условия такие ММ становятся неадекватными реальному элементу. Например, они не применимы при моделировании процесса перекрытия трубопровода задвижкой за время одного порядка со значением l/a , когда объемный расход жидкости быстро падает до нуля, что приводит к значительному повышению давления (так называемый *гидравлический удар*). Этот эффект удаётся учесть, если от ММ трубопровода с сосредоточенными параметрами (*математической модели макроуровня*) перейти к его *математической модели микроуровня*.

2.5 Особенности пневматических систем

В широком смысле слова под пневматическими понимают технические системы, в которых рабочей средой является воздух или газ. Основное отличие пневматической системы от гидравлической состоит в том, что рабочая среда является сжимаемой, т.е. ее плотность ρ существенно зависит от давления p . Газ называют *совершенным*, если для него справедливо *уравнение Клапейрона – Менделеева*

$$p = \rho RT, \quad (2.32)$$

где T – температура газа, а R – удельная газовая постоянная для данного газа, измеряемая в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

В пневматической системе, как и в гидравлической, величиной, имеющей смысл потенциала, является разность (перепад) Δp давлений. Однако в качестве величины, характеризующей перенос рабочей среды, вме-

сто объемного расхода удобнее рассматривать расход m массы газа, измеряемый в кг/с. Рассмотрим простейшие элементы пневматических систем и сравним их *математические модели* (ММ) с аналогичными ММ элементов гидравлических систем (см. 2.4).

Пусть в сосуде с фиксированным объемом V находится газ, имеющий температуру T и давление p . Если этот газ допустимо считать совершенным, то его плотность в соответствии с (2.32) равна $\rho = \frac{p}{RT}$, а масса $m = \rho V = \frac{pV}{RT}$. Предположим, что масса газа в сосуде изменяется во времени t путем закачки или выпуска газа при условии $T = T_0 = \text{const}$. Тогда получим соотношение

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{V}{RT_0} \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{p_0} \frac{dp}{dt} = C_{II} \frac{dp}{dt} \quad (2.33)$$

аналогичное (2.3) для электрического конденсатора, причем величину $C_{II} = \frac{V}{RT_0} = \frac{m_0}{p_0}$ где m_0 и p_0 масса и давление газа в сосуде перед началом процесса его закачки или выпуска, можно считать аналогом емкости C конденсатора или величины C_T в уравнении (2.30) для сосуда с несжимаемой жидкостью.

Условие $T = T_0 = \text{const}$ соответствует изотермическому процессу закачки или выпуска газа, и оно выполнимо лишь при весьма интенсивном теплообмене газа со стенками сосуда, которые поддерживаются при этой постоянной температуре T_0 , т.е. при бесконечно большой величине *коэффициента теплоотдачи* a . При конечном значении a в соответствии с законом сохранения энергии (первым законом термодинамики) для единицы массы (1кг) газа в случае выпуска его из сосуда запишем

$$c_v dT + p dv = \alpha (T_0 - T) \frac{S}{m} dt \quad (2.34)$$

где $C_v > 0$ –изохорная теплоемкость (или теплоемкость при постоянном объеме) газа, измеряемая в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $v = 1/\rho$ удельный объем газа, S –площадь поверхности стенок, контактирующих с газом. Первое слагаемое в левой части (2.34) характеризует изменение массовой плотности внутренней энергии совершенного газа при изменении его температуры, а второе –работу, совершаемую 1кг газа при его расширении ($dv > 0$) в процессе выпуска. Правая часть (2.34) равна тепловой энергии, передаваемой 1кг газа от стенок сосуда за промежуток времени dt .

В сосуде объемом V масса газа равна $m = \rho V = V/v$. Отсюда находим $v = V/m$, $dv = -\frac{V}{m^2} dm$ и после подстановки в (2.34) с учетом (2.32) получаем

$$c_v \frac{dT}{dt} = \rho RT \frac{V}{m^2} \frac{dm}{dt} + \alpha S \frac{T_0 - T}{m} = \frac{RT}{m} \dot{m} + \alpha S \frac{T_0 - T}{m} \quad (2.35)$$

Если $\dot{m} = \dot{m}_0 = \text{const} < 0$, то $m = m_0 + \dot{m}_0 t$, где m_0 — масса газа в сосуде перед началом его выпуска в момент времени $t = 0$, и в полученном ОДУ можно разделить переменные:

$$\frac{dT}{\beta T_0 - T} = \frac{\chi dt}{m_0 + \dot{m}_0 t} \quad \beta = \frac{\alpha S}{\alpha S - R\dot{m}_0} \quad \chi = \frac{\alpha S - R\dot{m}_0}{c_v}$$

Пологая $T = T_0$ при $t = 0$, после интегрирования находим

$$\frac{T}{T_0} = \beta + (1 - \beta) \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0} \right)^{-\chi/\dot{m}_0} = \beta + (1 - \beta) \left(\frac{m}{m_0} \right)^{-\chi/\dot{m}_0} \quad (2.36)$$

Используя (2.32) при $t = 0$ и $t > 0$, имеем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p/(\rho R)}{p_0/(\rho_0 R)} = \frac{p/(\rho V)}{p_0/(\rho_0 V)} = \frac{p/m}{p_0/m_0} = \frac{p}{p_0} \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0} \right)^{-1}$$

после подстановки в (2.36) получаем

$$\frac{p}{p_0} = \beta \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0} \right) + (1 - \beta) \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0} \right)^{1 - \chi/\dot{m}_0} \quad (2.37)$$

При адиабатическом процессе выпуска газа из сосуда, когда $\alpha = 0$, т.е. теплообмен газа со стенками отсутствует, $\beta = 0$, $\chi = -R\dot{m}_0/c_v$, и мы из (3.36) и (3.37) находим

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^{R/c_v}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\gamma}, \quad (2.38)$$

где $\gamma = 1 + R/c_v$ — показатель адиабатического процесса. Для совершенного газа с двухатомными молекулами $\gamma \sim 1.40$, а если молекулы состоят из трех и более атомов, то $\gamma \sim 1.29$. Инертные газы имеют одноатомные молекулы, и для них $\gamma \sim 1.67$, а для воздуха, если считать его совершенным газом, можно принять $\gamma \sim 1.40$. Так как $m = V/\nu$, то из второго равенства (2.38) следует известное соотношение $p\nu^\gamma = \text{const}$, называемое уравнением адиабаты Пуассона.

Записав второе равенство (2.38) в виде $m = m_0(p/p_0)^{1/\gamma}$ и продифференцировав по времени t , получим

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{\gamma p_0^{1/\gamma}} p^{1/\gamma-1} \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{\gamma p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1-1/\gamma} \frac{dp}{dt} = C_{\pi}(p) \frac{dp}{dt}.$$

Величина $C_{\pi}(p) = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1-1/\gamma} \frac{m_0}{\gamma p_0}$, являющаяся аналогом емкости конденсатора в (2.3), в данном случае зависит от давления p , т.е. рассматриваемая ММ нелинейна в отличие от линейной ММ (2.33) изотермического процесса.

При закачке газа в сосуд в правой части (2.34) необходимо учесть подводимую вместе с газом тепловую энергию:

$$c_v dT + p dv = \alpha (T_0 - T) \frac{S}{m} dt + \frac{c_v}{m} (T_1 - T) dm$$

где T_1 – температура подводимого к сосуду газа. Преобразуя это равенство аналогично (2.34), получаем

$$c_v \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{m} \dot{m} + \alpha S \frac{T_0 - T}{m} + c_v \frac{T_1 - T}{m} \dot{m} \quad (2.39)$$

Если $\dot{m} = \dot{m}_0 = \text{const} > 0$, то в полученном ОДУ, как и в (2.35), можно разделить переменные:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{\tilde{T} - T} &= \frac{\tilde{\chi} dt}{m_0 + \dot{m}_0 t} & \tilde{T} &= \frac{\alpha S T_0 + c_v \dot{m}_0 T_1}{\alpha S + (c_v - R) \dot{m}_0} \\ \tilde{\chi} &= \frac{\alpha S + (c_v - R) \dot{m}_0}{c_v} \end{aligned}$$

После интегрирования и нахождения произвольной постоянной из условия $T = T_0$ при $t = 0$ имеем

$$T = \tilde{T} + (T_0 - \tilde{T}) \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0} \right)^{\tilde{\chi} / \dot{m}_0} \quad (2.40)$$

Отсюда при помощи (2.32) аналогично переходу от (2.36) к (2.37) можно перейти к зависимости давления p в сосуде от времени.

Отметим, что при получении (2.36) и (2.40) было принято $\alpha = \text{const}$. В действительности коэффициент теплоотдачи зависит как от давления газа, так и от его температуры. Кроме того, расход \dot{m} газа при его закачке в сосуд и выпуске из него может изменяться во времени t . Все это приводит к тому, что в общем случае не удастся получить точные аналитические решения ОДУ (2.35) и (2.39) и их приходится решать численными методами.

С увеличением давления p ММ совершенного газа в виде соотношения (2.32) становится неадекватной реальному газу. Дело в том, что эта

ММ не учитывает объема, занимаемого молекулами газа, и притяжения между ними. Влияние указанных факторов отражает, например, уравнение состояния реального газа

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v-b} \quad \text{или} \quad p = \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2, \quad (2.41)$$

предложенное в 1873 году Я.Д. Ван-дер-Ваальсом. При постоянной температуре и $p \rightarrow \infty$ из (2.41) следует, что $p \rightarrow 1/b$, т.е. b можно интерпретировать как объем, занимаемый собственно молекулами 1 кг реального газа. Второй член в правой части (2.41), содержащий параметр a , учитывает влияние притяжения между молекулами такого газа. Существуют и другие варианты уравнений состояния реального газа.

Ясно, что использование (2.41) вместо (2.32) приведет к существенному усложнению ММ процессов закачки газа в сосуд и выпуска его из сосуда. Количественный анализ таких ММ удастся провести лишь при помощи численных методов.

Перейдем к рассмотрению процесса течения газа по трубопроводу. При установившемся ламинарном течении по трубопроводу вязкого газа с постоянным расходом \dot{m} линейное соотношение

$$\Delta p = \dot{m} R_{\Pi} \quad R_{\Pi} = \text{const}, \quad (2.42)$$

аналогичное закону Ома в виде (2.1), можно считать справедливым лишь при условии, что изменение давления по длине l трубопровода вызывает пренебрежимо малое изменение плотности ρ газа. В этом случае допустимо принять $\rho = \text{const}$, что означает постоянство объемного расхода газа $Q = \dot{m} / \rho$. Если трубопровод имеет круглое поперечное сечение радиуса r_* , то можно использовать выражение $R_{\Gamma} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4}$ для гидравлического сопротивления при ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости (см. 2.4). В итоге для коэффициента R_{Π} в (2.42) получим

$$R_{\Pi} = \frac{R_{\Gamma}}{\rho} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4 \rho}.$$

В достаточно длинном трубопроводе изменение давления газа может оказаться существенным, что вызовет заметное изменение плотности газа. В результате при постоянном расходе \dot{m} массы газа его объемный расход по длине трубопровода будет переменным. В этом случае длинный трубопровод можно условно разбить на ряд более коротких участков так, чтобы в пределах каждого из них плотность газа было бы допустимо считать постоянной. При этом следует учитывать, что плотность газа в соответствии с уравнением состояния вида (2.32) или (2.34) является функцией не только давления, но и температуры газа, изменяющейся по длине трубопровода в зависимости от характера протекающего в газе термодинами-

ческого процесса и теплового взаимодействия газа со стенками трубопровода. Как и в случае несжимаемой жидкости, при турбулентном режиме течения газа зависимость сопротивления трубопровода от расхода газа становится нелинейной.

Если для идеального (невязкого) газа, движущегося с изменяющейся во времени t скоростью $v(t)$, пренебречь изменением его плотности ρ по длине l участка трубопровода с поперечным сечением площадью S , то в соответствии со вторым законом Ньютона $S\Delta p = \rho S l \frac{dv(t)}{dt}$ или $\Delta p = L_{II} \frac{dm}{dt}$, где $L_{II} = l/S$ – величина, аналогичная индуктивности катушки в (2.4). Учет изменения плотности по длине трубопровода приведет к более сложной зависимости перепада Δp давления от скорости изменения расхода m газа.

3 Примеры объектов, требующих системного подхода к моделированию

3.1 Моделирование производственных процессов в химической и нефтехимической промышленности

3.1.1 Общая характеристика производственных процессов в химико-технологических системах

Производственные процессы в химической, нефтехимической промышленности характеризуются большим разнообразием выпускаемой продукции и, как правило, большой сложностью. Общая, характерная черта всех этих процессов состоит в том, что для превращения исходного сырья или полупродукта в целевой конечный продукт необходимо сравнительно большое число функционально различных ступеней переработки. Для целенаправленного протекания этих процессов в отдельных ступенях необходимы различные виды энергии, вспомогательных веществ и информации. Процессы химической технологии отличаются большим ассортиментом продуктов, которые можно получить из одного и того же сырья, большим разнообразием путей, которыми можно получить один и тот же продукт и динамикой обновления, как ассортимента, так и технологических процессов.

Условия протекания отдельных стадий могут быть различны.

Несмотря на большие качественные и количественные разнообразия отдельных технологических процессов, их различные масштабы, различие продуктов, условий протекания и т. д., все они имеют общие свойства, а именно: являются структурно сложными, состоящими из отдельных частей; перерабатывают вещество, энергию, информацию и, кроме того, связаны с другими, соседними производствами.

Используя терминологию общей теории систем, такие технологические комплексы можно назвать сложными системами; в нашем рассматриваемом случае — химико-технологическими системами.

Под ХТС будем понимать совокупность физико-химических процессов и средств для их проведения с целью производства продукции заданного качества и в нужном количестве с соблюдением экологических норм и надёжности.

ХТС состоит из элементов, из отдельных частей, в которых протекают технологические операции, необходимые для достижения цели, поставленной перед ХТС в целом.

Понятия «система» и «элемент» — относительны, т. е. одна система может быть элементом другой системы более крупного масштаба, а элемент системы может быть разделен на составные части, т. е. он также является системой, но более низкого ранга. В силу этого необходимо ввести понятие иерархии ХТС. Под иерархией ХТС мы понимаем ее многоуровневую структуру в плане ее функционирования и организации. С учетом агрегации подсистем целесообразно ввести следующие уровни иерархии:

Таблица 3.1 – Иерархия ХТС

Уровень иерархии ХТС	Типовой пример
Отрасль или химический комбинат	Совокупность заводов нефтепереработки данного района (объединения), соединенных сырьем (полу-продуктами), продуктами
Технологическая линия	Совокупность заводов, связанных общей производственной линией: АВТ — атмосферно-вакуумная трубчатка; пиролиз бензина для получения этилена; полимеризация этилена; переработка полиэтилена в готовые изделия
Химический завод	Совокупность цехов, объединенных общим сырьем (или полупродуктами), вместе со вспомогательными службами
Цех	Совокупность отделений, работающих на выпуск заданной продукции. Цех синтеза аммиака
Типовой процесс (элемент системы)	Ректификационная колонна, теплообменник, реактор

ХТС характеризуются структурой (топологией), т. е. составом элементов и их взаимными связями. Отличительная черта современных ХТС — большое количество внутренних связей, в том числе и обратных (рециклических), которые обусловлены необходимостью более полного использования сырья, вторичных энергоресурсов и стремлением к созданию более гибких ХТС. ХТС — это открытые системы, т. е. они

связаны с внешней окружающей средой так называемыми входами и выходами системы для обмена сырьем, продуктами, энергией и информацией.

Такая формализация конкретной ХТС и ее иерархическая структура — важные предпосылки для разработки и применения единого подхода к решению задач, которые связаны как с созданием (синтезом), так и с исследованием, расчетом (анализом) и эксплуатацией (управлением) процесса.

Под анализом ХТС понимают исследование данного производства с целью выявления его структуры (элементов, иерархических уровней, входов и выходов системы) и режимов его функционирования. Важнейшими задачами при этом, кроме декомпозиции (разделение на составные части), являются моделирование элементов и структур, а также расчет параметров выходов ХТС по заданным параметрам входов и при известных математических описаниях элементов ХТС.

Под синтезом ХТС понимают создание такой структуры, и выбор таких элементов ХТС, чтобы она обеспечивала преобразование заданных входных потоков в заданные выходные потоки системы некоторым наилучшим (оптимальным) образом.

Формализация ХТС как объекта и методов его исследования (анализ, синтез, управление) — основа для создания единой методики исследования, применения хорошо разработанных методов и алгоритмов теории систем, системотехники, технической кибернетики, математики.

3.1.2 Иерархическая структура химико-технологической системы

Многоуровневая структура ХТС дает основу не только для формальной декомпозиции и систематизации существующих ХТС, но и ключ к решению задач анализа и синтеза на отдельных уровнях иерархии.

Характерная черта современной химической промышленности — многосвязность ее элементов (подотраслей) со сравнительно небольшим числом отдельных видов сырья, например, с нефтью, природным газом, каменной солью и т. д. и полупродуктами, например, с аммиаком, этиленом, серной кислотой и другими, а также с энергоносителями. При этом химическая промышленность является не только крупным потребителем энергии различных видов (электрической, тепловой), но и крупным производителем различных видов энергии, т. е. ХТС — своеобразный энерготехнологический комплекс (рисунок 3.1).

Элементы этого уровня иерархии — комбинаты или отдельные производства — связаны между собой и окружающей средой подсистемами для транспорта сырья, энергии, полупродуктов и продуктов. Они также содержат подсистемы для хранения сырья, продуктов и т. п. Общая структура такой системы показана на рисунке 3.2.

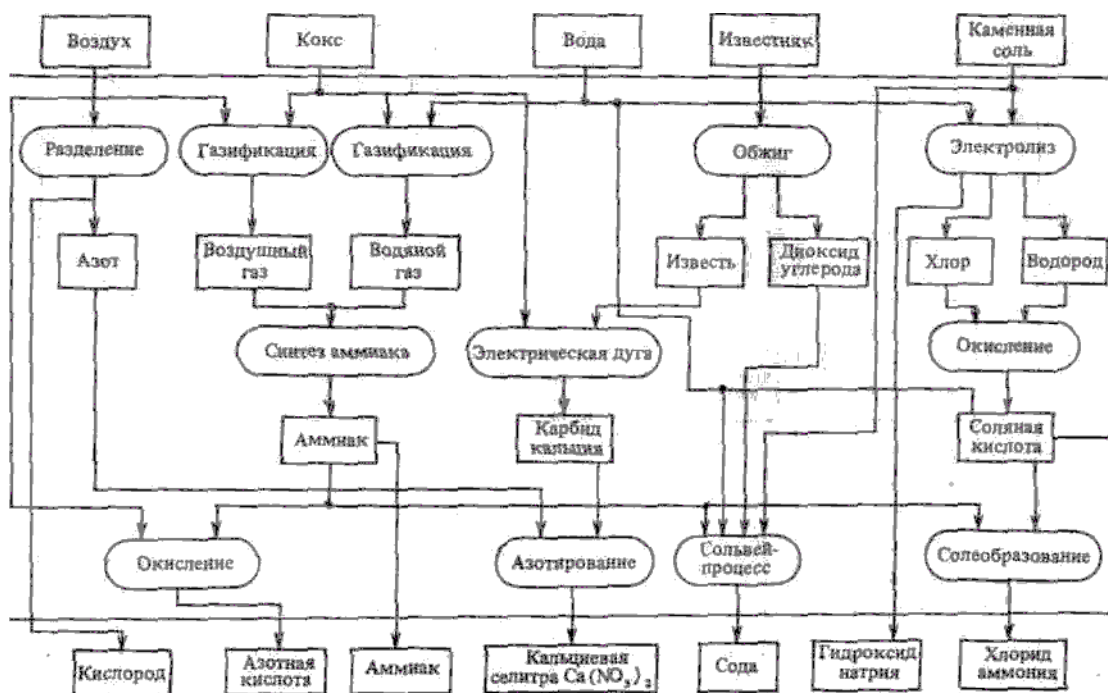


Рисунок 3.1 – Структурная схема химико-технологического комплекса

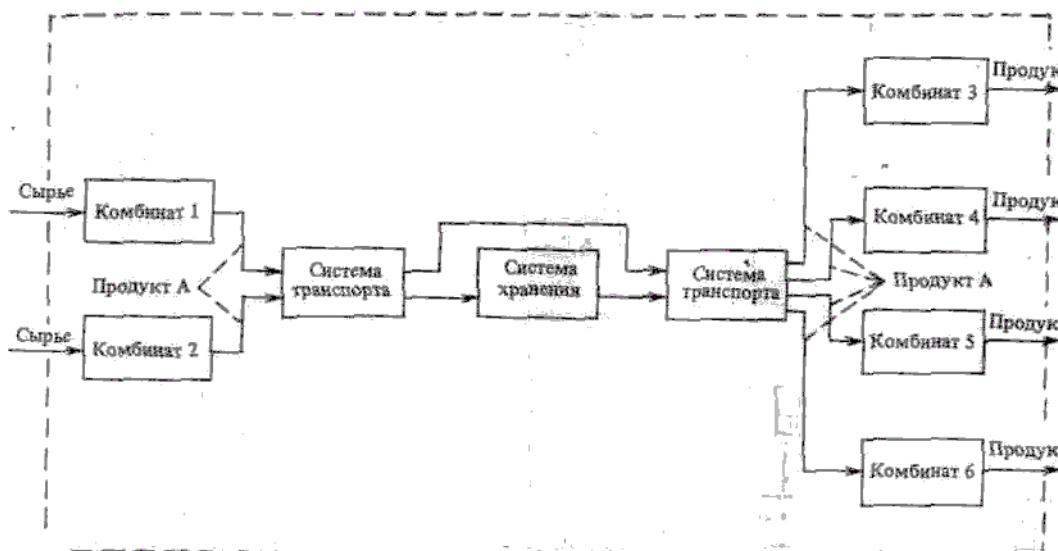


Рисунок 3.2 – Функциональная схема химико-технологического комплекса

Характерными для систем этого уровня иерархии являются подсистемы с большой единичной мощностью, что приводит к относительному снижению капиталовложений в промышленные установки. Важные задачи решаются на этом уровне иерархии (вследствие сильной связности подсистем): оптимальное распределение ресурсов, особенно

тогда, когда существуют альтернативные варианты; определение мощностей новых подсистем; время их ввода в эксплуатацию; выбор типа технологии для производства новых продуктов.

На уровне «технологическая линия» химико-технологическая система это система с преимущественно последовательно соединенными подсистемами, в которых сырье последовательно перерабатывается в один или несколько продуктов. Примером может служить производство изделий из полиэтилена. Подсистемами этой ХТС являются: атмосферно-вакуумная трубчатка; пиролиз бензина; выделение этилена; полимеризация этилена

На уровне «химический завод» ХТС состоит обычно из ряда подсистем: химических производств; энергоснабжения (промышленные ТЭЦ); снабжения вспомогательными материалами (воздух, азот, охлаждающая вода, хладагенты и т. д.); утилизации отходов (очистка промышленных сточных вод, обезвреживание ядовитых отходов и т. д.); транспорта (различные системы проводов и кабелей для снабжения электроэнергией, трубопроводов для снабжения паром, водой, хладагентами и т.д.); хранения и погрузки продуктов. Характерная задача на этом уровне — например, оптимальное распределение ограниченных ресурсов для достижения максимального дохода завода, что можно свести к задаче оптимизации параллельно работающих подсистем. Другой тип задачи — синтез оптимальной сети трубопроводе для снабжения подсистем паром, водой, азотом и т. д.

«Цех» — это ХТС самого распространенного типа, предназначенная для производства определенного продукта или полупродукта. Цех состоит из подсистем: подготовки сырья; собственно химического превращения; выделения целевых продуктов; энергообеспечения; автоматизации и т. д. (рисунок 3.3). В зависимости от конкретного производства может преобладать та или иная подсистема. Существует большое разнообразие задач, которые необходимо решать на этом уровне иерархии.



Рисунок 3.3 - Общая структура системы на уровне цеха

При проектировании нового производства — это задача синтеза структуры ХТС; расчет оборудования; обеспечение необходимой надежности; оценка отдельных качественных показателей системы и их оптимизация.

«Типовой процесс» условно принят за самую малую часть системы, хотя в свою очередь он состоит из отдельных частей. В дальнейшем он рассматривается как элемент, не подлежащий дальнейшему расчленению. Такими элементами являются все известные процессы и соответствующие им аппараты химической технологии (гидродинамические, механические, массо- и теплообменные, химические и биохимические). Сюда относятся также вспомогательные элементы для обеспечения надежной и безопасной работы оборудования и управления им. Некоторое промежуточное положение между элементом и цехом занимает так называемая «группа элементов», например, каскад химических реакторов, цепь теплообменников, комплекс компрессоров.

3.1.3 Классификация химико-технологических систем

Вследствие большого разнообразия конкретных ХТС на уровне «цех» их можно классифицировать по таким, например, разным признакам, как характеристика производимых продуктов; тип структуры; вид функционирования; область значений переменных состояний (температура, давление и т. п.). Ниже мы остановимся лишь на некоторых наиболее важных аспектах классификации ХТС.

Классификация по типу функционирования (исходя из временного изменения наиболее важных переменных состояния ХТС и ее структуры):

1) ХТС, предназначенные для производства одного продукта - непрерывно работающие ХТС. Такие системы характеризуются временным постоянством (стационарностью) главных переменных состояний и выходов ХТС. Кроме этого, их структура не изменяется во времени. Примерами таких ХТС являются технологические схемы производств метанола, аммиака, серной кислоты и др.

2) ХТС, предназначенные для производства нескольких продуктов - ХТС широкого назначения используют, как правило, для производства таких малотоннажных продуктов, как красители, фармацевтические препараты и т. п. Обычно они работают периодически, их структура устанавливается в соответствии регламентом на производство заданного продукта. В зависимости от того, может ли изменяться последовательность включения элементов в системе или нет, различают типа систем: ХТС многоцелевого назначения (гибкие технологические системы) перестраиваемой структурой и ХТС многоассортиментного производства (совмещенные технологические схемы, где последовательность элементов задана жестко).

В ХТС многоцелевого производства (гибкая ХТС) в соответствии с производственной программой и необходимыми аппаратами каждый раз заново формируется необходимая новая структура системы. В зависимости от этих условий в данном наборе аппаратов возможно получение одного или нескольких продуктов одновременно. Примером может служить

производство эпоксидных смол, красителей и т. д. Как правило, структура системы изменяется после завершения производства каждого продукта.

ХТС типа многоассортиментного производства (совмещенная ХТС) объединяет, как правило, совокупность отдельных производств. В состав ХТС входят не только общие для всех производств элементы, но и элементы, работающие только при производстве отдельных продуктов. Последовательность их включения в систему задана. Обычно в такой ХТС отдельные продукты синтезируются во временной последовательности, часто производятся несколько партий одного и того же продукта подряд. Подобные ХТС широко используют для получения красителей и органических полупродуктов.

Классификация по структуре: хотя конкретные ХТС отличаются большой сложностью и разнообразием структур, практически все конкретные структуры могут быть при помощи декомпозиции или агрегации элементов (объединение нескольких элементов в так называемый суперэлемент или блок-агрегат) сведены к небольшому числу типовых структур. Структура ХТС имеет большое значение не только для организации данного конкретного технологического процесса, но и для расчета, оптимизации и управления им. Рассмотрим самые важные типовые структуры.

Последовательное соединение элементов (рисунок 3.4) — основной прием в химической технологии, так как оно соответствует многошаговому принципу переработки сырья в качественно различных элементах.



Рисунок 3.4 - Последовательное соединение элементов ХТС

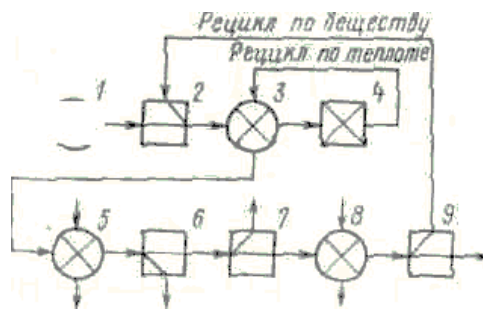
Последовательное включение однотипных элементов (реакторов, теплообменников, тарелок колонны, ступеней компрессора) — это важный принцип для повышения выхода целевого продукта, степени превращения, к. п. д. и вообще для уменьшения необратимых потерь в ходе процессов. При контакте двух или более потоков в элементах системы возникает несколько вариантов структур в зависимости от направления потоков. Например, различают прямоток и противоток; в случае нескольких потоков возникают более сложные связи различного вида.

Параллельное соединение элементов.

Различные причины, например, отдельная подготовка потоков сырья для проведения химической реакции, мероприятия по повышению надежности работы системы или производительности установки и т. п., приводят к необходимости параллельного соединения подсистем и элементов. В зависимости от процесса и специальных требований к нему параллельное соединение аппаратов может быть в начале, середине или

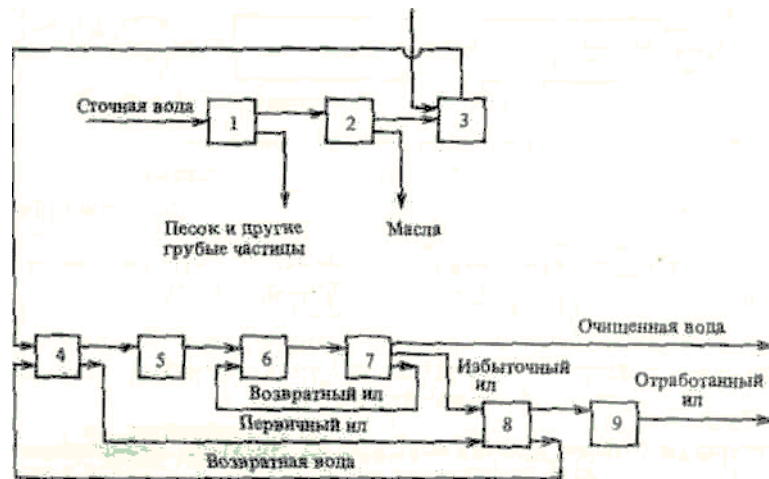
конце системы. Иногда используют несколько параллельных путей. Параллельное соединение элементов широко применяют для повышения гибкости системы. Структуру с байпасами широко используют не только для повышения гибкости ХТС, но и в системах переработки с последующим смешением, где для обеспечения заданного состава и качества продукта необходимо переработать (очистить, разделить и т. п.) не весь поток, а лишь его часть. Потoki смешиваются в таком соотношении, чтобы получился продукт заданного качества.

Современные ХТС характеризуются большим числом обратных (рециркулирующих) потоков. Это обусловлено стремлением более полно использовать сырье путем рециркуляции непревращенной его доли; теплоты или холода технологических потоков в системе для подогрева холодных или охлаждения горячих потоков, т. е. для создания безотходных энергозамкнутых ХТС (рисунок 3.5). Кроме этого, рециркуляцию применяют как способ повышения скорости процесса. Например, при синтезе аммиака для поддержания высокой скорости реакции процесс проводят только до 20%-ной степени превращения, отделяют продукт от реакционной смеси и возвращают ее в цикл на смешение со свежей азотоводородной смесью. Определенная доля циркулирующего газа выводится из цикла для поддержания допустимого количества инертных веществ.



1 — компрессор; 2 — смеситель; 3 — теплообменник; 4 — реактор; 5, 8 — холодильники; 6, 9 — сепараторы; 7 — делитель.

Рисунок 3.5 - Использование рециркуляции для повышения эффективности процесса синтеза аммиака.



1 — механическая очистка; 2 — удаление масла; 3 — нейтрализация; 4 — первичный отстойник; 5 — сборник; 6 — аэротенк; 7 — вторичный отстойник; 8, 9 — ступени обработки избыточного ила.

Рисунок 3.6 - ХТС с рециклами — технологическая схема очистки сточных вод:

3.1.4 Входные и выходные потоки системы

Входным потокам в ХТС соответствуют внешние источники вещества или энергии, которые поступают в ХТС для переработки и обеспечивают функционирование системы.

Выходным потокам соответствуют стоки вещества или энергии, которые образуются в результате функционирования системы.

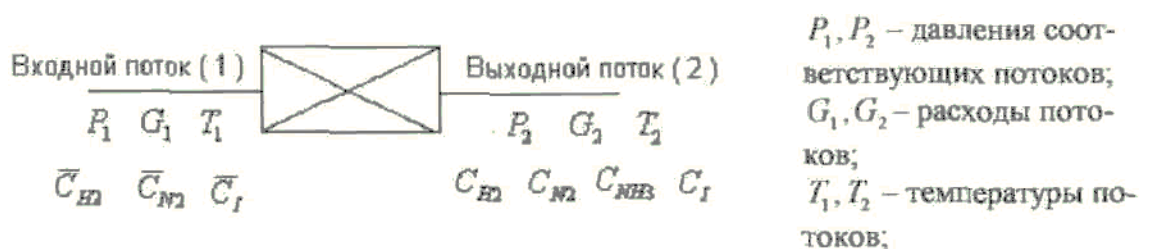
Все остальные потоки носят название промежуточных потоков.

Каждый поток системы характеризуется $k + 2$ значениями, где k — число компонентов в потоке смеси. Эти $k + 2$ величины соответствуют числу термодинамических степеней свободы. Число $k + 2$ носит название параметричности данного потока.

Каждый поток системы характеризуется параметрами термодинамического состояния (2 параметра): давление и температура, или давление и отношение фаз, или температура и отношение фаз.

Состав и количество (k параметров): Мольные расходы отдельных компонентов или мольные доли и расход всего потока. Во втором случае используются $k - 1$ величина, так как $\sum X_i = 1$, и потому всегда имеет место только k независимых параметров.

На рисунке 3.7 приведен пример элемента ХТС.



C_{H_2} , C_{N_2} , C_b , C_{NH_3} , - концентрации водорода, азота, инертных, аммиака в соответствующем потоке; G, P, T - определяют расход, температуру и давление потока.

Рисунок 3.7 – Пример элемента ХТС

Параметричность входного потока = 5. Параметричность выходного потока = 6.

3.1.5 Математическое описание элемента ХТС

Исходя из внешних признаков, любой процесс может быть условно изображен так, как показано на рисунке 3.7, где выделены основные группы параметров, определяющих его течение и характеризующих состояние в любой момент времени.

Обычно выделяют следующие группы:

1) входные параметры x_i ($i=1, \dots, m$). Входными называют параметры, значения которых могут быть измерены, но возможность воздействия на них отсутствует. Предполагается также, что значения указанных параметров не зависят от режима процесса. Для химического реактора это может быть, например, контролируемый состав исходного сырья, неподдающийся регулировке в процессе эксплуатации. Сюда же можно отнести и фиксированные геометрические характеристики аппарата;

2) управляющие параметры u_j ($j=1, \dots, r$). Под управляющими понимают параметры, на которые можно оказывать прямое воздействие в соответствии с теми или иными требованиями, что позволяет управлять процессом. Такими параметрами для химического реактора могут быть, например, регулируемое количество исходной смеси, подаваемой в реактор, регулируемое давление в реакторе и температура теплоносителя и т. д.;

3) возмущающие параметры z_k ($k=1, \dots, l$). Возмущающими называют параметры, значения которых случайным образом изменяются с течением времени и которые недоступны для измерения. Это могут быть, например, различные примеси в исходном сырье для химической реакции, постепенное изменение активности катализатора и т. д.;

4) выходные параметры y_l ($l=1, \dots, n$). Под выходными понимают параметры, величины которых определяются режимом процесса и которые характеризуют его состояние, возникающее в результате суммарного воздействия входных, управляющих и возмущающих параметров. Иногда выходные параметры называют также параметрами или переменными состояния, подчеркивая тем самым их назначение описывать состояние процесса. Однако понятие «параметры состояния» является более широким, чем понятие «выходные параметры», поскольку к выходным обычно относят только характеристики получаемой продукции, тогда как

параметрами состояния служат также характеристики режима процесса, например температуры в различных точках аппарата, составы и т. д.

По отношению к процессу входные и управляющие параметры можно считать внешними, что подчеркивает независимость их значений от режима процесса. Напротив, выходные параметры или параметры состояния в данном случае определяются как *внутренние*, на которые непосредственно влияет режим процесса. Возмущающие параметры могут относиться к внешним и внутренним. Например, неконтролируемые примеси в исходном сырье можно рассматривать как внешнее возмущающее воздействие, а изменение активности катализатора с течением времени — как внутреннее возмущение.

Однако в любом случае, действие возмущающих параметров проявляется в том, что параметры состояния процесса при известной совокупности входных и управляющих параметров характеризуются неоднозначно. Процессы, в которых влияние случайных возмущающих параметров велико, обычно называют стохастическими в отличие от детерминированных, для которых предполагается, что параметры состояния однозначно определяются заданием входных и управляющих воздействий.

Для изучения стохастических процессов обычно используют математический аппарат теории вероятностей, при помощи которого параметры состояния оцениваются в терминах математического ожидания, а возмущающие параметры характеризуются вероятностными законами распределения.

В дальнейшем принимается, что случайные возмущающие параметры отсутствуют.

Для описания совокупностей входных, управляющих параметров и параметров состояния ниже часто будет применяться следующая векторная форма записи:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m);$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n);$$

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_l);$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_r).$$

Математическое описание каждого процесса задается системой конечных или дифференциальных уравнений, отражающих взаимное влияние различных параметров, причем присутствие в математическом описании уравнений одного вида (например, конечных) не исключает возможности присутствия и уравнений другого вида (дифференциальных).

Систему уравнений математического описания необходимо разрешить относительно выходных параметров.

Получение соотношений для выходных параметров в явном аналитическом виде непосредственно из уравнений математического описания, как правило, невозможно. Вследствие этого для нахождения

вида указанных зависимостей необходимо иметь определенный алгоритм решения системы уравнений математического описания, применяя который для любой совокупности значений входных и управляющих параметров можно рассчитать параметры состояния.

Таким образом, математическая модель представляет собой систему уравнений математического описания, отражающую сущность явлений, протекающих в объекте моделирования, которая с помощью определенного алгоритма позволяет прогнозировать поведение объекта при изменении входных и управляющих параметров.

Можно записать: для динамики $Y=F(X, U, P, t)$, для статики $Y=F(X,U,P)$, где P - параметры математического описания, которые определяются по экспериментальным данным.

Разумеется, принципиально возможно вместо математической модели применять и сам объект (если он существует), для чего его следует оборудовать соответствующими измерительными средствами, дающими возможность определять реакцию объекта на любое изменение входных и управляющих параметров.

Отсюда следует, насколько важно иметь математическую модель процесса, которая позволяет, не затрагивая сам процесс, определить, какое решение нужно принять, чтобы улучшить его режим. При этом эксперимент на процессе фактически заменяется экспериментом на его модели.

Очевидно, что для успешного использования математической модели необходимо, чтобы модель достаточно верно описывала качественно и количественно свойства объекта моделирования, т. е. она должна быть адекватна моделируемому объекту. Для проверки адекватности математической модели реальному процессу нужно сравнить результаты измерения на процессе с результатами предсказания модели в идентичных условиях (при определенных значениях входных и управляющих параметров) и подстроить параметры МО. Такая проверка позволяет оценить точность математической модели и, следовательно, возможность ее применения для решения различных задач.

На практике все же приходится считаться с тем, что никакая модель не может полностью заменить моделируемый объект, и мириться с необходимостью применения моделей, которые лишь с тем или иным приближением предсказывают поведение реального объекта.

В значительной степени это обусловлено наличием в процессе возмущающих параметров, вносящих определенный шумовой фон в результаты измерений на реальном объекте. В таких случаях, если указанный фон недопустимо велик, нужно проводить дополнительные исследования для выявления возмущающих параметров процесса с последующим учетом их (уже в качестве входных) в составе математического описания.

3.1.6 Оценка эффективности функционирования ХТС

ХТС характеризуются множеством различных свойств, большинство из которых должны быть выражены либо в высокой степени (положительные свойства), либо в малой степени (отрицательные свойства). Для количественной оценки того, в какой степени данная система обладает тем или иным свойством, используют методы оценки свойств ХТС. Носитель оценки того или иного свойства ХТС называется критерием качества ХТС, а в связи с оптимизацией - критерием оптимальности.

Эффективность функционирования ХТС характеризуется:

- 1) критериями;
- 2) свойствами.

Различают следующие большие группы критериев:

а) критерии оценки степени использования сырья, энергии и качества выпускаемых продуктов; такими критериями являются: степень превращения исходного вещества; выход целевого продукта; селективность; энергетический, энтропийный и эксергетический коэффициенты полезного действия и т.д.;

б) критерий оценки качества функционирования ХТС; сюда относятся критерии для оценки таких свойств, как чувствительность, устойчивость, надежность и др.

в) экологические критерии, как, например, оценки степени загрязнения воздуха, воды и почвы действующей ХТС;

г) социально-психологический критерий; он характеризует обслуживаемость системы, условие работы на рабочих местах и т.д.,

д) экономические критерии, оценивающие капиталовложения, себестоимость, доход, приведенные затраты, рентабельность и т.д.

Различают следующие свойства:

1) чувствительность ХТС. Под *чувствительностью* системы понимают ее свойство изменять характеристики своего функционирования под влиянием изменений собственных параметров системы и внешних возмущающих воздействий. Исследование чувствительности при разработке систем управления необходимо для выявления параметров системы, нуждающихся в наиболее точном измерении, а также возможностью выбора управляющих воздействий, обеспечивающих наибольшую чувствительность выходных переменных систем. Кроме того, исследование чувствительности — важный этап создания таких ХТС, которые малочувствительны или нечувствительны как в статических, так и в динамических режимах функционирования к параметрам внешней среды;

2) управляемость. Под *управляемостью* понимают свойство системы, которое характеризует способность системы с помощью управляющих воздействий переходить за конечный отрезок времени из заданного начального состояния в требуемое;

3) надёжность системы. Надежность системы - свойство системы в данных условия и при определенных характеристиках интенсивности отказов отдельных ее элементов выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные характеристики в требуемых пределах в течение заданного промежутка времени или требуемой наработки. Надежность ХТС связана со способностью системы в течение определенного интервала времени сохранять работоспособность и со способностью ХТС приспосабливаться к обнаружению и устранению причин, вызвавших отказы, а также со способностью ХТС к длительной эксплуатации;

4) устойчивость химико-технологических систем. Устойчивость ХТС это способность системы сохранять требуемые характеристические свойства в условиях действующих возмущений. В более узком смысле под устойчивостью ХТС следует понимать устойчивость как статических, так и динамических режимов функционирования ХТС. Интенсификация процессов ХТС приводит к тому, что отдельные элементы ХТС эксплуатируются в предельных режимах, обеспечивающих максимальные значения показателей функционирования ХТС. В этих случаях возможен неустойчивый режим работы как отдельных элементов, так и ХТС в целом. В качестве примера ХТС, для которых приходится решать проблемы устойчивости стационарных режимов, можно привести каталитический реактор, где протекает экзотермическая реакция, и теплообменник, связанные перекрестными технологическими потоками. В данной ХТС возможны три стационарных технологических режима, при которых расход тепла равен его приходу. Два из них являются устойчивыми, а один — неустойчивым.

Устойчивость динамических режимов функционирования ХТС можно пояснить на примере абсорбционно-десорбционных систем, широко распространенных в химической промышленности. Если абсорбер эксплуатируется в мало интенсивных гидродинамических режимах (плёночный, промежуточный, турбулентный), то система устойчива в динамических режимах. При функционировании абсорбера в наиболее эффективном режиме, которым является эмульгирование, в условиях действующих возмущений возможен переход режима работы абсорбера в область неустойчивости, что ведет к захлебыванию абсорбера, неустойчивости режима функционирования абсорбционно-десорбционной системы в целом и необходимости ее аварийного останова. Неустойчивость стационарных и динамических режимов функционирования ХТС является крайне нежелательным явлением, ликвидировать которое можно и с помощью введения дополнительных технологических связей (в частности, рециклов) и воздействий (таких, как изменение поверхности теплообмена, размера зерна катализатора), и с помощью информационных связей путем разработки специальных систем управления.

Помехозащищенность ХТС - это свойство системы эффективно функционировать в условиях действия внутренних и внешних помех. К

внутренним помехам ХТС можно отнести изменения активности катализатора, температуры или давления в элементах ХТС и т. д. Внешними помехами являются изменения атмосферных условий, расхода и состава сырья; нарушение режимов поставки сырья, отгрузки готовой продукции и т. д. При анализе ХТС как объекта управления, следует провести исследование характера действующих помех, выявив, относятся ли они к медленно, либо быстро изменяющимся, являются разовыми или постоянно действующими, детерминированными или стохастическими. Приводит ли их наличие к изменению параметров элементов и характеристических свойств ХТС и т. д. Помехи могут привести к существенному ухудшению эффективности функционирования ХТС, поэтому их наличие и характер действия следует учитывать при разработке и выборе типа систем управления ХТС. Для управления ХТС в присутствии помех эффективно использовать адаптивные системы управления.

В проектировочной или эксплуатационной системе все критерии и свойства должны быть выполнены в заданной мере. Отсюда компромиссное решение.

Эмерджентность и интерэктность ХТС являются отличительными характеристическими свойствами системы в целом.

Эмерджентность ХТС - это способность системы приобретать новые свойства, которые отличаются от свойств отдельных элементов, образующих эту систему.

Эмерджентность ХТС обуславливает следующее:

а) возможность появления неустойчивых режимов ХТС, каждый элемент которой обладает устойчивостью (каталитический реактор и теплообменник, связанные между собой перекрестным технологическим потоком);

б) изменение чувствительности ХТС по сравнению с чувствительностью отдельных ее элементов за счет введения обратных технологических связей (увеличение чувствительности при введении положительной и уменьшение при введении отрицательной);

в) необходимость учета транспортных коммуникаций, по которым протекают технологические потоки, т. е. больших транспортных запаздываний, и т. д.

Интерэктность ХТС - способность элементов, образующих систему, взаимодействовать между собой при функционировании системы, обеспечиваемая технологическими и информационными связями между элементами. Интерэктность ХТС проявляется в том, что изменение переменных на входе одного элемента ХТС приводит к изменению выходных переменных других элементов и системы в целом.

Построение математических моделей элементов ХТС.

Построение модели начинается с выбора модели для гидродинамики. Можно предложить разные подходы к изучению структуры потока и

влияния этой структуры на ход химических процессов. Наиболее полную информацию о структуре потока можно получить, зная скорость жидкости в любой точке аппарата, т. е. получив поле скоростей. Но при таком подходе встречаются труднопреодолимые препятствия. Прежде всего, чрезвычайно трудна экспериментальная задача измерения скоростей во всех частях потока. В любом аппарате имеются области, где почти невозможно измерить скорость, не нарушив структуру потока. Знание поля скоростей лишь в принципе дает возможность решения практических задач. Чаще всего это решение оказывается настолько сложным, что львиной долей информации, которая заключена в данных о поле скоростей, воспользоваться не удастся.

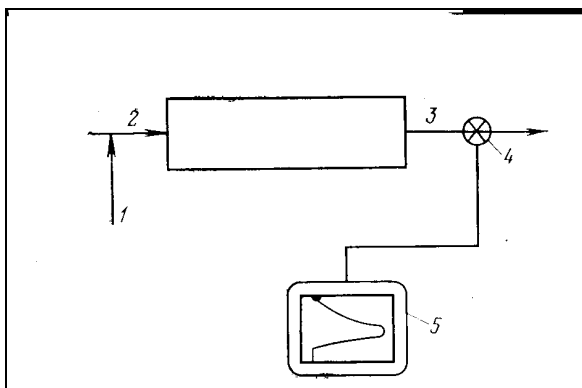
Поле скоростей - сложная трехмерная структура, описание которой должно содержать функции, по меньшей мере, трех координат. Не стационарность (например, в турбулентном потоке) добавляет четвертую - время. Математическое описание поля скоростей получается в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных; решить такую систему даже с помощью современных ЭВМ удастся лишь в простейших случаях.

Второй возможный подход - описание потока на основе распределения времени пребывания.

Разработаны две модели идеальных потоков: идеальное вытеснение и идеальное смешение. Здесь отметим одну особенность этих моделей: они не содержат никаких параметров, отражающих специфику структуры потока. Единственный параметр этих моделей - среднее время пребывания.

Для определения гидродинамической обстановки в аппарате во входящий поток добавляют порцию какой-либо примеси, называемой индикатором, или трассером. Индикатор должен быть легко количественно определим. Кроме того, его добавление не должно влиять на характер потока (в частности, его следует вводить мало, чтобы существенно не изменять расход), а сам он должен двигаться вместе с потоком, ни с чем не реагируя и не сорбируясь. Так, к потоку воды можно добавить немного кислоты или красителя, к воздуху—немного CO_2 или гелия.

На выходе из аппарата измеряют концентрацию индикатора C_i как функцию t . Схема установки изображена на рисунке 3.8. Характер зависимости C_i от t показан следующий: в момент $t=0$ на входе, например, резким импульсом вводится индикатор, на выходе вначале $C_i=0$: ни одна частица индикатора не успела дойти до выхода. В момент t_1 выхода достигает самая быстрая часть потока, появляется индикатор. Далее его концентрация нарастает до момента t_2 , а затем начинает убывать: основная масса потока прошла, выходят те части индикатора, которые попали в зоны циркуляции или застоя.



1 — ввод индикатора; 2 — вход в аппарат; 3 — выход из аппарата; 4 — датчик концентрации индикатора; 5 — самопишущий прибор.

Рисунок 3.8 - Схема установки для измерения распределения времени пребывания.

Результаты эксперимента позволяют определить величину τ :

$$\tau = \frac{V_{\text{реактора}}}{W_{\text{объёмн. расход.}}}$$

Время пребывания определяется по формуле:

По экспериментальным данным можно решить одну из двух задач: либо по известному объёму реактора V рассчитать расход жидкости W , либо по известному объёмному расходу W - неизвестный объём.

Математическое описание химического реактора с мешалкой непрерывного действия на основе модели идеального смешения

Химический реактор является одним из наиболее важных элементов химико-технологической схемы.

Модель химического реактора с мешалкой непрерывного действия базируется на допущении об идеальном перемешивании реагирующей смеси в зоне реакции, т.е. температура и концентрации компонентов одинаковы во всех точках реактора и на выходе из реактора.

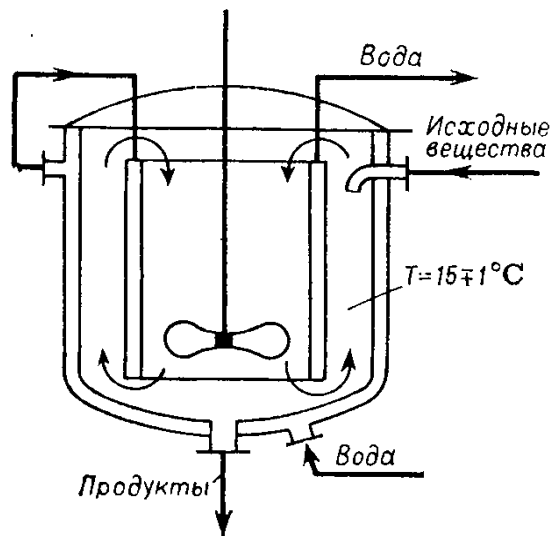


Рисунок 3.9 – Схема реактора

Основным назначением математического описания такого реактора является определение из уравнения материального баланса и теплового баланса концентрации и температуры в выходном потоке.

С точки зрения управления очень важно поддерживать заданное молярное соотношение реагентов на входе в реактор.

Регулирование температуры осуществляется за счёт подачи хладагента в охлаждающую рубашку реактора и в змеевик.

При превышении температуры выше допустимой, происходит прекращение подачи исходного вещества.

Введем следующие обозначения:

V - объём реактора; w - объемный расход реагирующей смеси.

C_j - концентрация j -го вещества в реакторе и на выходе из него..

Уравнения материального баланса для вещества j можно записать следующим образом:

$$\Delta(V * C_j) = w * C_{j,ex} * \Delta t - w * C_j * \Delta t + R_j * V * \Delta t$$

где $\Delta(V * C_j)$ - накопление вещества в реакторе,

$w * C_{j,ex} * \Delta t, w * C_j * \Delta t$ - конвективный приток и сток вещества;

$R_j * V * \Delta t$ - количество вещества образующегося в реакторе.

Если накопление вещества в реакторе $\Delta(V * C_j) = 0$, то это статический процесс, в случае $\Delta(V * C_j) \neq 0$ - это динамический процесс.

Уравнение материального баланса можно записать в следующем виде:

$$\frac{dC_j}{dt} = \frac{W}{V} * C_{j, \text{вх}} - \frac{W}{V} C_j + r_j,$$

где среднее расчётное время пребывания жидкости в аппарате рассчитывается по формуле: $\frac{V}{W} = \tau$

Концентрации веществ измеряются в кмоль/м³.

Уравнение теплового баланса для реактора имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(V * T * C_p * \rho) = (w * C_p * T_{\text{вх}}) - (W * C_p * T * \rho) + Q_{\text{реакц}} - Q_{\text{отв}}$$

Здесь:

$V * T * C_p * \rho$ - накопление тепловой энергии в реакторе,

$w * T_{\text{вх}} * \rho$ - количество теплоты, входящей в реактор,

$W * T * C_p * \rho$ - количество теплоты, выходящей из реактора ,

$Q_{\text{реакц.}}$ - количество теплоты ,которое образуется в ходе реакции,

$$Q_{\text{реакц.}} = V * \sum_{i=1}^R r_i * (-\Delta H_i)$$

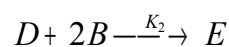
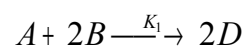
$Q_{\text{отв}}$ - теплота, которая отводится из реактора с помощью хладагента.

$$Q_{\text{отв.}} = K_{mn} * S * (T - T_{\text{хл}})$$

Уравнение теплового баланса запишем в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_{\text{вх}} - T) + \alpha_1 * Q_{\text{реакц}} - \alpha_2 * Q_{\text{отв}}$$

Построение математического описания кинетики химической реакции. Рассмотрим процесс, состоящий из двух стадий химических реакций:



Каждая стадия характеризуется константой скорости химической реакции.

$$K_1 = K_{10} * \exp(-\frac{E_1}{RT})$$

$$K_2 = K_{20} * \exp(-\frac{E_2}{RT})$$

Вводится понятие скорость протекания стадий r_1 и r_2 и скорость протекания реакции по веществам R_A, R_B, R_C, R_D . Для каждой стадии r_1 и r_2 применим закон действующих масс, который гласит, что скорость стадий, пропорциональна концентрации исходных веществ в степенях, равных стехиометрическим коэффициентам.

$$r_1 = K_1 * C_A * C_B^2 = K_1 * a * b^2 \quad r_2 = K_2 * C_D * C_B^2 = K_2 * b^2 * d$$

Тогда, скорости химических реакций по веществу, будут иметь следующий вид:

$$R_A = -r_1 \quad ; \quad R_B = -2*r_1 - r_2 \quad ; \quad R_D = 2*r_1 - r_2 \quad ; \quad R_E = r_2$$

Для каждой химической реакции существует определённое число ключевых компонентов. Это те вещества, по скорости образования и расходования которых, можно судить о скорости образования всех веществ.

В рассматриваемом примере в качестве ключевых компонентов можно выбрать А и Е.

$$\text{Тогда: } R_A = -r_1; R_E = r_2; R_D = -2*R_A - R_E; R_B = 2*R_A - 2*R_E$$

Это обстоятельство важно учитывать при составлении уравнений материального баланса реакторов.

Исследование устойчивости стационарных режимов химического реактора с мешалкой непрерывного действия.

Одной из важных характеристик химического реактора является его устойчивость- способность возвращаться к исходному стационарному состоянию после устранения внешних возмущений.

Для исследования устойчивости стационарных режимов химического реактора с мешалкой непрерывного действия используют график зависимости тепловыделения и теплоотвода от температуры .

Рассмотрим это на примере протекания в реакторе с мешалкой реакции 1-го порядка $A \rightarrow B$.

Из уравнения материального баланса следует, что:

$$C_A = \frac{C_{A,ex}}{1 + k*\tau} = \frac{C_{A,ex}}{1 + \tau * k_0 * \exp(-\frac{E}{R*T})}$$

$$\text{или с учетом того, что } R_A = k * C_A$$

$$R_A = \frac{k_0 * \exp(-\frac{E}{R * T}) * C_{A,ex}}{1 + \tau * k_0 * \exp(-\frac{E}{R * T})}$$

Запишем уравнение энергетического баланса для стационарного режима в следующем виде:

$$\frac{Q_{реакц.}}{W * C_p * \rho} = T - T_{ex} + \frac{Kmn * S}{W * C_p * \rho} * (T - T_{xl})$$

Обозначим левую часть уравнения Q_R - количество теплоты, выделяемого при протекании химической реакции в единицу времени, а правую - Q_T количество теплоты, отводимого в единицу времени через рубашку реактора и с потоком. Запишем эти уравнения в другом виде:

$$Q_T = T - T_{ex} + \alpha * (T - T_{xl}) \text{ или } Q_T = -(T_{ex} + \alpha * T_{xl}) + T * (1 + \alpha),$$

$$\text{где } \alpha = \frac{Kmn * S}{W * C_p * \rho}$$

$$\text{или } Q_T = -A + T * (1 + \alpha),$$

$$\text{где } A = -(T_{ex} + \alpha * T_{xl})$$

Выражение для расчета величины тепловыделения Q_R :

$$Q_R = \frac{Q_{реакц.}}{W * C_p * \rho}$$

Выражение для Q_T представляет собой уравнение прямой линии, причем Q_T растет с увеличением α .

Рассмотрим стационарный режим, который соответствует режиму работы при температуре T_3 .

Пусть в результате возмущения изменяется значение T_3 и произойдет увеличение ее на величину ΔT_3 . При этом за счет увеличения скорости реакции возрастает скорость выделения тепла. Одновременно, за счет увеличения разности температур между температурами в реакторе и теплоносителя возрастает скорость отвода теплоты. Далее точки 3 линия теплоотвода проходит выше, чем линия тепловыделения. Поэтому при температуре $T_3 + \Delta T_3$ отвод теплоты оказывается больше, чем его выделение.

Поэтому после снятия возмущения ΔT_3 реактор начнет охлаждаться. Охлаждение будет продолжаться до тех пор, пока температура в реак-

торе не станет равной T_3 . При этой температуре отвода и выделение теплоты опять уравниваются, и режим снова станет стационарным.

Если же в результате возмущения реактор начнет охлаждаться, то после снятия возмущения реактор снова начнет нагреваться до достижения в нем температуры равной T_3 .

Таким образом, стационарный режим в точке 3 возвращается к исходному состоянию после снятия внешних возмущений, т.е. режим устойчивый.

Аналогичная картина наблюдается и в точке 1.

Теперь рассмотрим режим правее точки 2. Здесь линия теплоотвода ниже, чем линии тепловыделения. При изменении температуры T_2 до величины $T_2 + \Delta T_2$ выделение теплоты становится больше, чем теплоотвод. Поэтому после снятия возмущения реактор будет не охлаждаться, а нагреваться, удаляясь от исходного состояния.

Нагревание будет продолжаться до тех пор, пока снова скорость тепловыделения не станет равной скорости теплоотвода, т.е. реактор достигнет нового стационарного состояния - при температуре T_3 . Аналогично, при отрицательных возмущениях реактор будет самопроизвольно охлаждаться до тех пор, пока не достигнет устойчивого стационарного состояния при температуре T_1 .

Проведенный анализ показывает, что из трех возможных в данных условиях стационарных режимов только два:

1- при низкой температуре (и, соответственно, малой скорости реакции) и 3- при высокой температуре (и большой скорости реакции) являются устойчивыми, а третий - при промежуточных значениях температуры и скорости реакции (точка 2) - неустойчив.

Математическое описание химического трубчатого реактора непрерывного действия на основе модели идеального вытеснения.

В соответствии с этой моделью принимается, что в реакторе реакционная масса движется равномерно, все частицы потока имеют одинаковую скорость, а распределение вещества и тепла в направлении, перпендикулярном движению потока, равномерно.

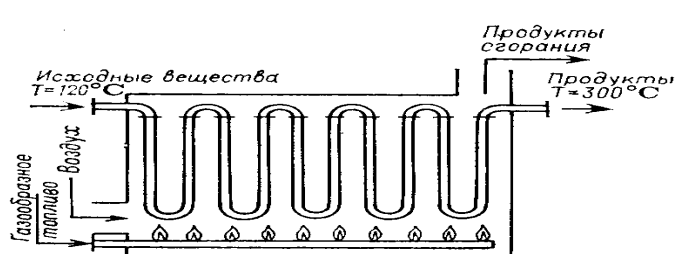


Рисунок 3.10 – Реактор для хлорирования

На рисунке 3.10 представлен реактор для хлорирования пентана. Реакционное пространство этого реактора имеет вид длинного змеивика, обогреваемого снаружи дымовыми газами.

Запишем уравнение материального баланса.

$$\frac{dC_j}{dt} = - \frac{dC_j}{d\tau} + R_j$$

Статический режим:

$$\frac{dC_j}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dC_j}{d\tau} = R_j$$

Уравнение теплового баланса для статического режима можно определить в следующем виде:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{c_v} * Q_{реакц} - \frac{K_{mn} * S_{y\partial}}{c_v} * (T - T_{хлад})$$

где

$$Q_{реакц} = \sum_{j=1}^{n_R} \Delta H_j * r_j$$

c_v - удельная объемная теплоемкость,

$S_{y\partial}$ - площадь поверхности теплообмена в единице объема реактора.

При определенных условиях температура охлаждающей среды может быть постоянной или изменяться по длине реактора. В последнем случае:

$$\pm \frac{dT_{хлад}}{d\tau} = \frac{w * K_{mn} * S_{y\partial}}{w_{хл} * c_{хл}}$$

Знак (+) в формуле соответствует прямотоку реагирующей смеси и хладоагента, а знак (-) противотоку.

Для гомогенных трубчатых реакторов, имеющих значительную длину, необходимо учитывать изменение давления в реакторе. Эта закономерность может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{dp}{d\tau} = - 0.5 * \lambda * d^{-1} * v^3 * \rho^{-2}$$

В математическую модель трубчатого реактора входят также граничные и начальные условия.

Начальные условия устанавливают значения концентрации и температуры в реакторе в начальный момент времени:

при $t=0$ для любых τ $C_j = \text{const} = 0$ $\tau \approx l$ (длина реактора).

Граничные условия определяют условия протекания процесса на входе в реактор: при $\tau = 0$ для любого момента времени t $C_j = C_{jBX}$.

Модели неидеальных потоков.

Ячеечная модель—исторически первая.. Эта модель схематически представляет реальный аппарат как некоторое число n одинаковых последовательно соединенных аппаратов (ячеек) идеального смешения (рис.) . Суммарный объем всех ячеек равен объему реального аппарата, следовательно, объем каждой ячейки равен V/n . Число ячеек—единственный параметр ячейечной модели.

Ячеистую модель очень удобно использовать для моделирования динамических режимов химических реакторов. Ячеистая модель - промежуточный режим между режимом идеального смешения и режимом идеального вытеснения.

n - количество аппаратов, число ячеек.

Математическое описание таких процессов можно представить в следующем виде:

$$\frac{dC_{j1}}{dt} = \frac{1}{\tau} * (C_{j1} - C_{jBX}) + R_j \quad \text{для (1)}$$

Математическое описание ХТС

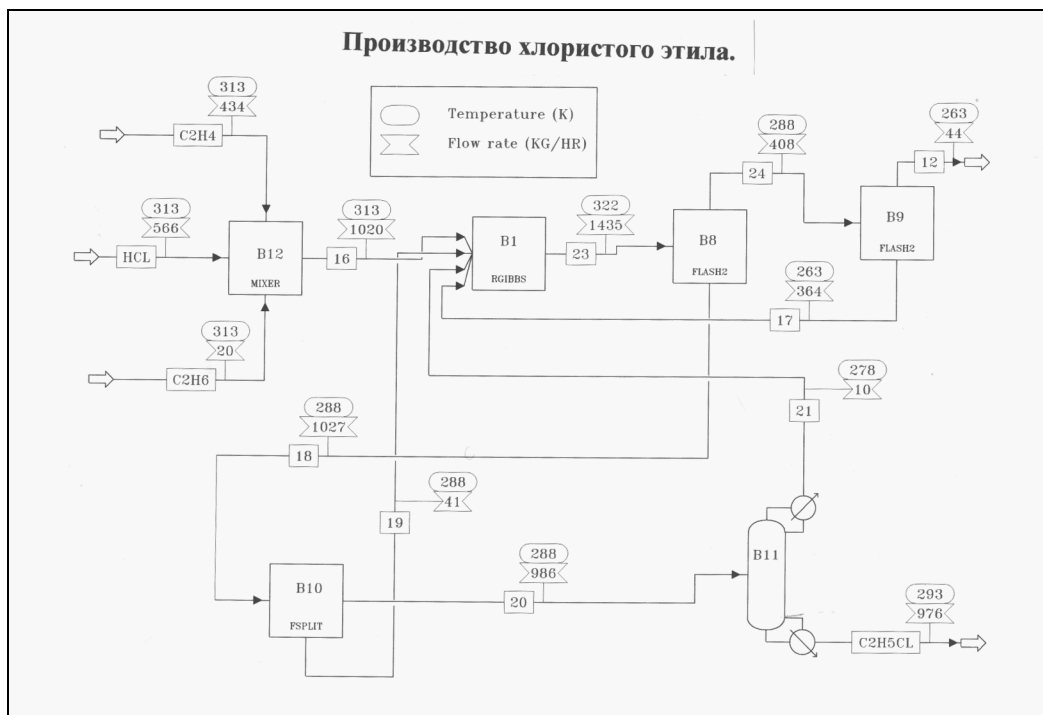


Рисунок 3.11 – Схема производства хлористого этила

ХТС включает следующие понятия.

Топология ХТС:

A - набор элементов ХТС (аппаратов) с их математическим описанием.

B математическое описание входят параметры математического описания, которые определяются по экспериментальным данным.

S - связь между элементами ХТС.

Параметры потоков ХТС:

V - вектор параметров входных потоков.

X - вектор параметров промежуточных потоков.

Y - вектор параметров выходных потоков.

Управление ХТС:

U - вектор управляющих воздействий.

Цель функционирования ХТС:

R - критерий эффективности функционирования ХТС.

Для рассматриваемой ХТС: A=(Набор аппаратов: смеситель потоков, химический реактор, два испарителя, распределитель потоков, ректификационная колонна и их математическое описание). Заданы вещества, функционирующие в системе. Каждый поток характеризуется $3+2=5$ параметрами. Заданы параметры, характеризующие работу каждого элемента и связи между элементами.

Для смесителя потоков: давление в смесителе.

Для реактора (модель Гиббса): вещества, принимающие участие в химическом превращении, давление и температура.

Для распределителя потока: коэффициенты деления потока на части.

Для испарителя: температура и давление.

Для ректификационной колонны: расход дистиллята, число теоретических тарелок, номер тарелки питания, давление в колонне, флегмовое число.

V =(параметры входных потоков этилена, хлористого водорода, этана).

Промежуточные потоки: 16, 23, 24, 17, 21, 18, 19, 20.

Выходные потоки: 44, C_2H_5Cl .

Управляющие воздействия: давление и температура в реакторе, флегмовое число в колонне.

Цель функционирования получение хлористого этила.

Математическое описание ХТС может быть представлено в двух видах: 1) модульная форма (модульное математическое описание (ММО)), когда задаются математические описания отдельных элементов и структура системы. В этом случае математическое описание ХТС состоит из системы уравнений для элементов, уравнений связи между элементами.

ММО	1 элемента
ММО	2 элемента
.....	
ММО	элемента i
Уравнения связей между элементами.	

2) интегральная форма (интегральное математическое описание (ИМО)), когда оно представляется в виде системы уравнений с учетом структуры.

ИМО	1 элемента
ИМО	2 элемента
.....	
ИМО	элемента i

Различие между этими двумя формами записи уравнений МО состоит в том, что во-первых в интегральной форме нет уравнений связи, а во вторых, в отличие от модульной формы, где любое ММО рассматривается как единое целое, здесь уравнения могут рассматриваться по отдельности.

Формализация основных задач разработки ХТС:

1) анализ ХТС (поверочный расчет).

Дано: V , U , A , S . Найти: X , Y , R

Анализ осуществляется для выявления ресурсов повышения эффективности и повышения путей их реализации.

Направления повышения эффективности:

- за счет оптимального управления;
- за счет интенсификации процессов в аппаратах;
- за счет реконструкции ХТС.

2) синтез ХТС.

Синтез управления. Дано: V, Y, S, A . Найти: X, U, R .

Пример. Синтез оптимальной ХТС. Дано: X, V, Y . Найти: A, S, U, R

При этом ищется экстремальное значение R .

Понятие о расчёте статических режимов разомкнутых ХТС.

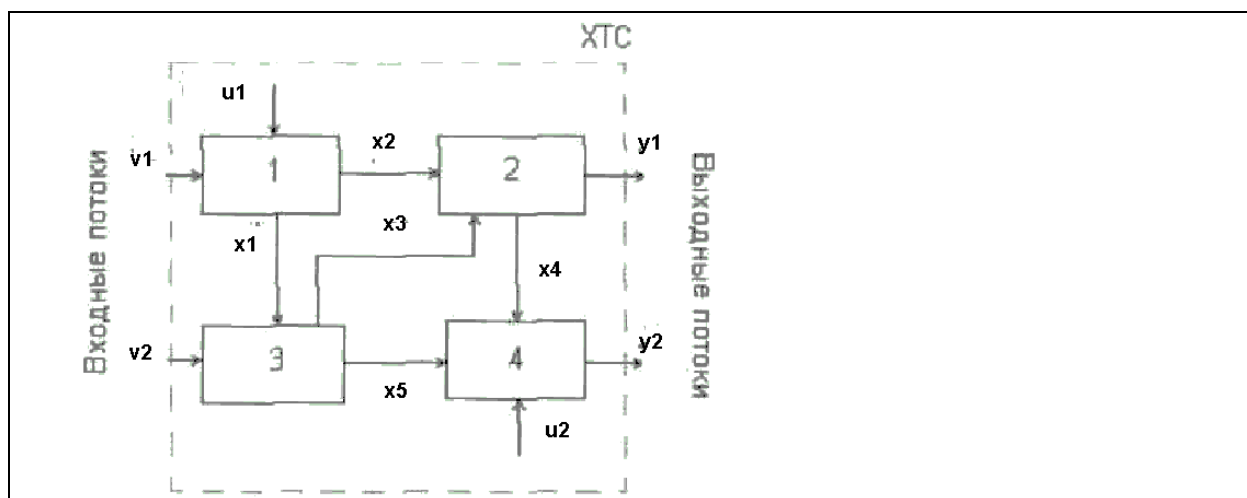


Рисунок 3.12 - Пример структуры ХТС

Для представленной ХТС надо проанализировать статический режим работы.

При этом задана топология - 4 аппарата химической технологии с известным математическим описанием в интегральном виде.

Таблица 3.2 – Топология ХТС

№ элемента	Уравнение математического описания	Выходные переменные
1	$x1=F1(v1,u1)$ $X2=F2(v1,u1)$	$x1,x2$
2	$x4=F3(x2,x3)$ $Y1=F4(x2,x3)$	$x4,y1$
3	$x3=F5(v2,x1)$ $X5=F6(v2,x1)$	$x3,x5$
4	$Y2= F7(x4,x5,u2)$	$y2$

Параметры потоков ХТС:

V - вектор параметров входных потоков. $V=(v_1,v_2)$.

X - вектор параметров промежуточных потоков $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$

Y - вектор параметров выходных потоков $Y=(y_1,y_2)$

Управление ХТС:

U - вектор управляющих воздействий. $U=(u_1,u_2)$

Цель функционирования ХТС:

R - критерий эффективности функционирования ХТС.

Как было показано ранее, задача анализа ХТС заключается в нахождении следующих переменных: $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, $Y=(y_1,y_2)$, R .

Таблица 3.3 – Структура уравнений математического описания ХТС

Уравнения	Неизвестные						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
F1	1						
F2		1					
F3		1	1	1			
F4		1	1			1	
F5	1		1				
F6	1				1		
F7				1	1		1
Уравнения	Неизвестные						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2

Структуру уравнений математического описания представим в виде таблицы, где строки будут соответствовать номеру уравнения, а столбцы - переменным, входящим в эти уравнения. Факт принадлежности переменной уравнению отметим 1. Так как значения переменной v_1, u_1 нам заданы, то уравнение (1) можно решить относительно величины x_1 . Этот факт отметим так: (F1, x_1). Таким образом, первым решается уравнение (1) и определяется первая переменная x_1 . Поскольку теперь нам значение этой переменной известно, а уравнение (1) не содержит других переменных, то можно исключить из рассмотрения 1 столбец и 1 строку рассматриваемой таблицы. Мысленно удалив эту строку и этот столбец, продолжаем наши рассуждения дальше. Переменная x_2 содержится во 2 уравнении и может быть определена решением этого уравнения. Таким образом, вторым решается 2 уравнение, отметим это: (F2, x_2). Вычеркивая соответствующие строки и столбцы, продолжаем аналогичные действия дальше, определяя порядок решения уравнений математического описания ХТС и порядок определения переменных в виде для ИМО:

(F1, x_1), (F2, x_2), (F5, x_3), (F3, x_4), (F4, y_1), (F6, x_5), (F7, y_2).

С учётом выходных переменных для каждого элемента можно указать последовательность вычисления элементов этой ХТС при ММО в следующем виде: 1,3,2,4.

Эта последовательность называется вычислительной последовательностью элементов данной разомкнутой ХТС.

Понятие о расчёте статических режимов замкнутых ХТС.

Рассмотрим решение задачи анализа замкнутой ХТС, представленной на рисунке

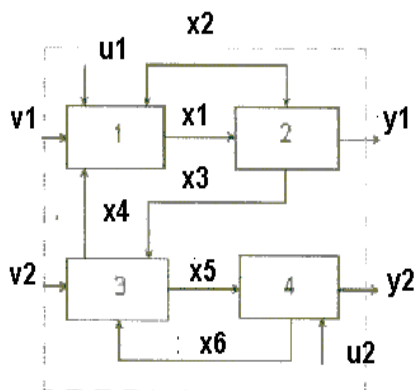


Рисунок 3.13 - Схема задачи анализа замкнутой ХТС

При этом задано следующее.

Топология - 4 аппарата химической технологии с известным математическим описанием в интегральном виде:

Элемент 1	$x1=F1(v1,u1,x2,x4)$
Элемент 2	$x2=F2(x1)$ $y1=F3(x1)$ $x3=F4(x1)$
Элемент 3	$x5=F5(v2,x3,x6)$ $x4=F6(v2,x3,x6)$
Элемент 4	$x6=F7(x5,u2)$ $y2=F8(x5,u2)$

Параметры потоков ХТС:

V - вектор параметров входных потоков. $V=(v1,v2)$.

X - вектор параметров промежуточных потоков.

$X=(x1,x2,x3,x4,x5,x6)$

Y - вектор параметров выходных потоков. $Y=(y1,y2)$

Управление ХТС:

U - вектор управляющих воздействий. $U=(u1,u2)$

Цель функционирования ХТС:

R - критерий эффективности функционирования ХТС.

Как было показано ранее, задача анализа ХТС заключается в нахождении следующих переменных: $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, $Y=(y_1, y_2)$, R.

Математическое описание данной ХТС состоит из 8 уравнений с 8 неизвестными. Следует иметь ввиду, что для реальных ХТС таких уравнений может быть до 2000-3000. Для решения этой задачи существует два способа:

1) при небольшом количестве уравнений решать их совместно. В последнее время при расчёте системы уравнений используется их структура. При этом решение существенно упрощается;

2) декомпозиционный метод - предполагает разбиение одной сложной задачи на подзадачи. Этот метод является наиболее хорошо разработанным и широко используется в современных программных продуктах. Рассмотрим его более подробно.

Основная задача разбивается на следующие подзадачи:

1) превращение замкнутой системы в разомкнутую. Для этого замкнутая ХТС путём мысленного разрыва некоторых потоков превращается в разомкнутую. В результате на местах таких разрывов образуется по 2 потока;

2) определение порядка расчёта элементов для полученной разомкнутой системы;

3) собственно поэлементной расчёт элементов схемы;

4) обеспечение равенства полученных потоков. Для этого на местах разрыва приходится решать дополнительные уравнения. Их количество равно суммарной параметричности разрываемых потоков. В общем случае их число равно $m \cdot (k+2)$, где m- число разрываемых потоков для превращения замкнутой системы в разомкнутую, k- число веществ, функционирующих в потоках. Это является своеобразной платой за последовательный расчёт элементов схемы.

В общем случае существует несколько вариантов превращения замкнутой системы в разомкнутую. Предпочтение отдают варианту, для которого на местах разрыва нужно решать меньшее число уравнений.

3.2 Моделирование производственных процессов в машиностроении

Под объектами моделирования в машиностроительном производстве следует понимать:

1) технологические системы (ТС) – участки из универсальных станков, автоматические линии, гибкие производственные системы (ГПС);

2) технологические процессы (ТП);

3) физические процессы (ФП) – процессы, протекающие при резании металлов, при функционировании технологического оборудования в упругой системе и т.д.

Рассмотрим примеры математических моделей технологических систем и физических процессов.

В чистом виде (по – отдельности) математические модели данных объектов применяются редко, как правило, они комбинированные. Например, в математических моделях ТС используются математические модели ТП, в которых, в свою очередь, применяются математические модели ФП.

Математические модели разрабатываются для:

1. Описания ФП, ТП, ТС.
2. Исследования ФП, ТП, ТС.
3. Проектирования ТП, ТС.
4. Оптимизации в ходе проектирования ТП, ТС и организации работы ТС.
5. Построения систем автоматизированного проектирования.

Вид, состав, сложность математической модели зависит от того, какой объект она описывает и для каких целей разработана.

Пример 1. Пусть требуется описать и исследовать процесс резания (точения) с точки зрения действующих сил, которые представим известными в теории резания уравнениями:

$$P_X = C_{PX} t^{X_{Px}} s^{Y_{Px}} K_{ОЩ};$$

$$P_Y = C_{PY} t^{X_{Py}} s^{Y_{Py}} K_{ОЩ};$$

$$P_Z = C_{PZ} t^{X_{Pz}} s^{Y_{Pz}} K_{ОЩ},$$

где C_P – удельные силы резания;

t – глубина резания;

s – подача;

X, Y – показатели степени, выражающие влияние соответствующего параметра режима резания на силу резания (при точении $X_P \cong 1, Y_P \cong 0,75$);

$K_{ОЩ} = K_M K_H K_{...}$ – коэффициент, зависящий от свойств обрабатываемого материала, инструментального материала и т.д.

Представленные выше три уравнения – это уже один из вариантов математической модели процесса точения с точки зрения действующих сил. Она, конечно же, простейшая и может служить для:

- 1) описания процесса резания;
- 2) исследования процесса резания;
- 3) расчета сил резания.

Например, с помощью данной модели можно исследовать зависимость силы резания P_Z от глубины резания t (рисунок 3.14)

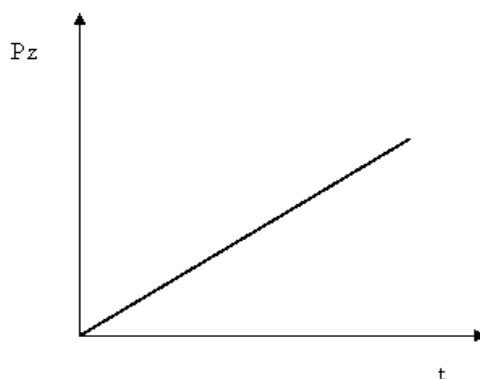


Рисунок 3.14 - Зависимость силы резания P_z от глубины резания t

Использовать математическую модель процесса резания в таком виде, например, для проведения оптимизации режимов резания нельзя, она слишком проста. Для оптимизации математическая модель должна иметь следующие элементы:

- 1) критерий или критерии оптимизации.
- 2) целевую функцию.
- 3) систему ограничений.
- 4) систему уравнений, описывающих объект.
- 5) входные, выходные и внутренние параметры.
- 6) управляемый (варьируемый) или управляемые (варьируемые) параметры, которые выделяются из числа внутренних параметров.

Пример 2. Однопараметрическая однокритериальная оптимизация режимов резания.

Пусть требуется определить оптимальную подачу s_{opt} , при этом глубина резания постоянна ($t = const$).

1. Критерий оптимизации - сила резания P_z .
2. Целевая функция – зависимость между критерием (критериями) оптимизации и подлежащими оптимизации параметрами с указанием направления (вида) экстремума. В нашем примере она имеет следующий вид:

$$P_z = C_{Pz} t^{X_{Pz}} s^{Y_{Pz}} K_{OBC} \rightarrow \max.$$

3. Система ограничений включает в себя лишь одно из них:
 $0,07 \leq s \leq 4,16, \text{ мм/об.}$
4. Система уравнений. Математическая модель в нашем примере включает в себя одно уравнение

$$P_z = C_{Pz} t^{X_{Pz}} s^{Y_{Pz}} K_{OBC}.$$

5. Входные параметры – $C_{Pz}, X_{Pz}, Y_{Pz}, K_{OBC}$,
 - выходной параметр – P_z ,
 - внутренние параметры – t, s .
6. Управляемый (варьируемый) параметр – s .

Задача оптимизации решается в два этапа (см. рисунок 3.2):

Этап 1. Определение области допустимости решений (работаем с ограничениями) – ОДР.

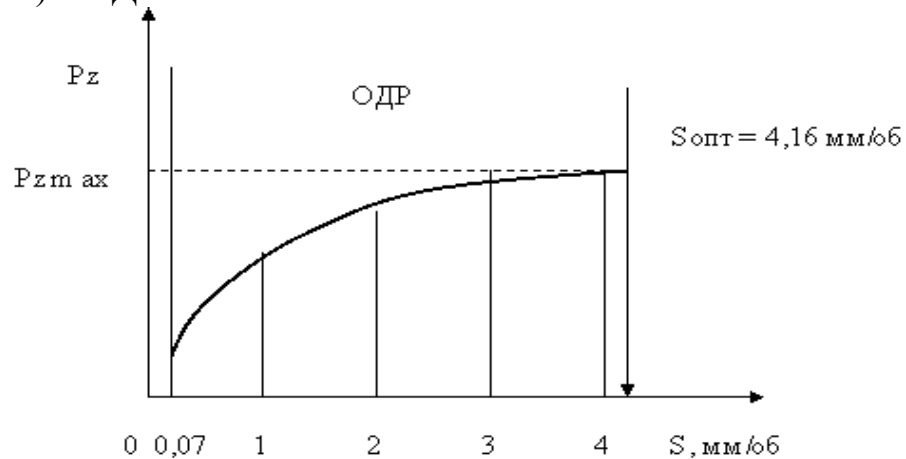


Рисунок 3.15 - Графическая иллюстрация решения задачи оптимизации

Этап 2. Определение оптимального параметра – $S_{\text{опт}}$.

В общем виде математическая модель объекта записывается:

$$Y = F(X, Q),$$

где Y – вектор выходных параметров, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$;

X – вектор внутренних параметров, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

Q – вектор внешних (входных) параметров, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_p)$.

Для приведенной выше математической модели процесса резания:

$$Y = (P_x, P_y, P_z);$$

$$X = (t, s);$$

$$Q = (C_{PX}, C_{PY}, C_{PZ}, X_{PK}, X_{PY}, X_{PZ}, Y_{PK}, Y_{PY}, Y_{PZ}, K_{\text{ОБЦ}}).$$

Следует иметь в виду, что любой объект не может существовать обособленно, без взаимосвязи с другими объектами (окружающей средой). Для процесса резания элементами окружающей среды являются обрабатываемый и инструментальный материалы, смазочно-охлаждающая жидкость, образующаяся в результате обработки стружка и т.д. Для технологического процесса в ходе его реализации – это технологическое оборудование, режущий инструмент, элементы приспособления и т.д. Для технологической системы (механического участка из универсальных станков или станков с ЧПУ, автоматической линии и др.) элементами окружающей среды являются другие технологические системы, цеховой транспорт и т.д.

3.3 Моделирование гидравлических систем с многофракционной рабочей смесью

Потребность в моделировании гидравлических систем с многофракционной рабочей смесью возникает при построении моделей сложных физико-химических систем (ФХС), в которых гидравлические процессы играют важную роль. Под многофракционной рабочей смесью понимается смесь нескольких жидкостей, включая растворы, суспензии и эмульсии.

Ориентация на компонентный подход обусловлена универсальностью подхода и его широкими возможностями. Основой компонентного подхода является представление системы в виде цепи, состоящей из компонентов и связей между ними. Условное изображение компонента приведено на рисунке 3.16.

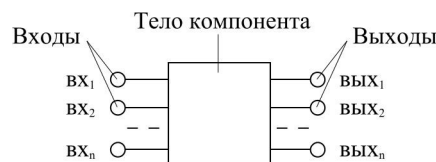


Рисунок 3.16 – Условное изображение компонента

Связи соединяют входы и выходы компонентов, пересечения связей образуют узлы. Соотношения между потенциальными и потоковыми переменными определяются законами Кирхгофа.

Основными переменными системы являются потенциальная переменная P (давление) и потоковая переменная I (поток вещества). При моделировании гидравлических систем рабочее вещество системы обычно полагается однородным и для него применимо выражение давления и потока в виде скалярных переменных P и I .

Особенностью ФХС является наличие нескольких фракций в рабочей смеси гидравлической подсистемы и неравномерность распределения концентрации фракций по объему системы. Особенностью предлагаемого подхода является представление давления и потока векторными переменными с размерностью n , соответствующей количеству веществ в системе:

$$\bar{P} = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n],$$

$$\bar{I} = [I_1 \quad I_2 \quad \dots \quad I_n],$$

где P_i – давление i -ого вещества;

I_i – поток i -ого вещества.

В соответствии с размерностью потенциальной и векторной переменных, размерность связей также принимается равной n , что можно представить в виде совокупности отдельных скалярных связей. Первый закон Кирхгофа для векторных узлов принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^m \bar{I}_j = 0 ,$$

где m – количество связей, подходящих к узлу.

Для построения компонентной цепи системы используются следующие компоненты: емкость, труба, источник (давления и потока), измеритель (давления и потока), ключ.

Емкость. Модель емкости построена на основе модели реактора идеального смешения, то есть все вещества, поступившие в емкость, мгновенно и идеально перемешиваются. Такой подход используется при моделировании химических процессов и соответствует в некотором приближении реальной емкости, оснащенной механическим перемешивающим устройством. Как будет показано далее, модель идеально смешения может успешно применяться и для моделирования емкостей, в которых перемешивание не является идеальным.

Емкость характеризуется внутренним состоянием V :

$$\bar{V} = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n] ,$$

где V_i – объем i -ого вещества, содержащегося в емкости в данный момент времени.

Для емкостей задаются начальные условия моделирования в виде объемов, пополняющих емкость веществ, на начальный момент времени.

Зависимость выходного потока i -ой составляющей от входного описывается уравнением:

$$\bar{I}_{\text{вых}_i} = \sum \bar{I}_{\text{вх}} \cdot \frac{V_i}{\sum \bar{V}} .$$

Труба характеризуется векторным сопротивлением потоку, которое может быть задано разным для разных веществ:

$$\bar{R} = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_n] .$$

Сопротивление потоку является функцией от геометрических параметров трубы и свойств вещества. Уравнение трубы для каждой составляющей потока имеет вид:

$$P_{2_i} - P_{1_i} = R_i \cdot I_i .$$

Источники давления и потока задают, соответственно, постоянное давление и ток между входом и выходом. Уравнения источников давления и потока имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum P_2 - \sum P_1 &= P_0 , \\ \sum I_1 &= \sum I_2 = I_0 . \end{aligned}$$

Измерители давления и потока включаются в цепь для снятия числовых значений давления (или разности давлений) и потока в заданных узлах.

Ключ предназначен для разрыва цепи и является моделью логического крана.

В дальнейшем планируется расширить спектр компонентов за счет создания моделей переменных сопротивлений, источников давления и по-

тока, зависящих от времени и других компонентов, являющихся производными представленных.

Графические представления компонентов приведены на рисунке 3.17. Жирной линией обозначены векторные связи компонентов.

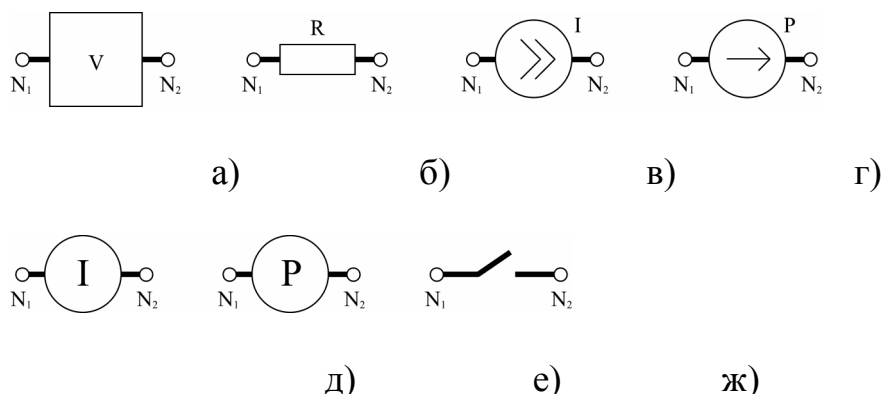


Рисунок 3.17 – Графические представления компонентов:
а) емкость, б) труба, в) источник потока, г) источник давления,
д) измеритель потока, е) измеритель давления, ж) ключ.

Модель реактора идеального смешения. Схема модели приведена на рисунке 3.18.

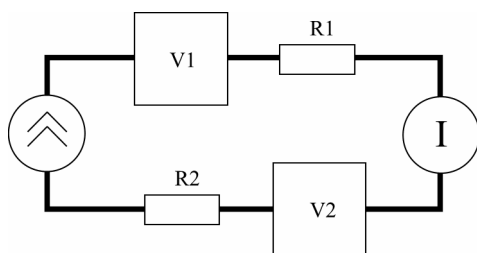


Рисунок 3.18 – Схема модели реактора идеального смешения.

Емкость $V1$ изначально заполнена веществом А, емкость $V2$ – веществом В. Контрольным объемом является объем $V1$. Для уменьшения влияния замкнутости контура на результаты моделирования, выражающегося в возвращении вещества А в емкость $V1$, заданы следующие условия: $V2 \gg V1$, $R2_A \gg R2_B$. Таким образом, представленные схемы позволяют смоделировать ступенчатое возмущение в виде вещества В на входе емкости.

Результаты моделирования схемы в Mathcad и график выходной характеристики модели реактора идеального смешения приведены на рисунке 3.19.

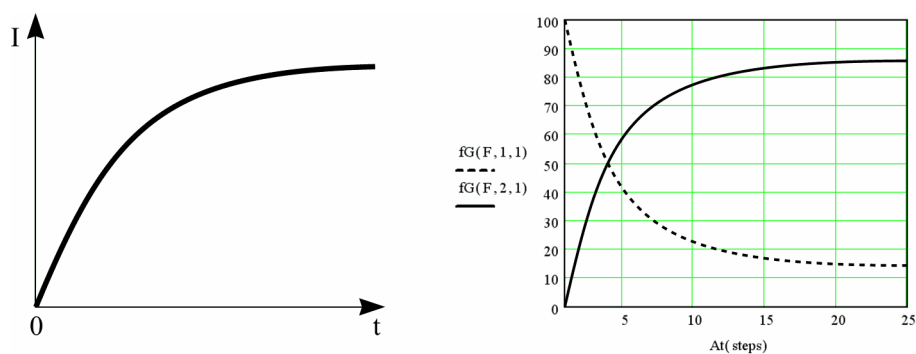


Рисунок 3.19 – Выходные характеристики моделей идеального смешения:

а) для типовой модели, б) для моделируемой схемы.

Ячеечная модель. Схема модели приведена на рисунке 3.20.

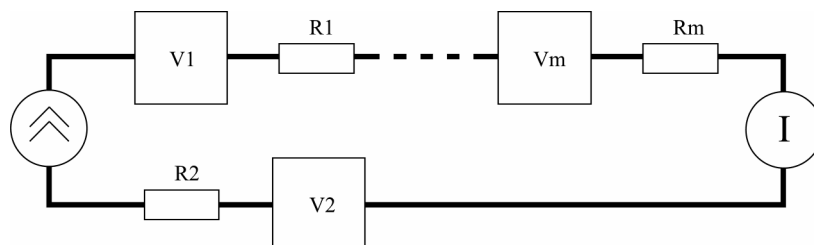


Рисунок 3.20 – Схема ячейечной модели

Контрольным объемом является объем V_m . Результаты моделирования схемы в Mathcad и графики выходной характеристики ячейечной модели для различных значений m приведены на рисунке 3.21. Сплошной линией обозначен поток контрольного вещества В, пунктиром – поток начального вещества А.

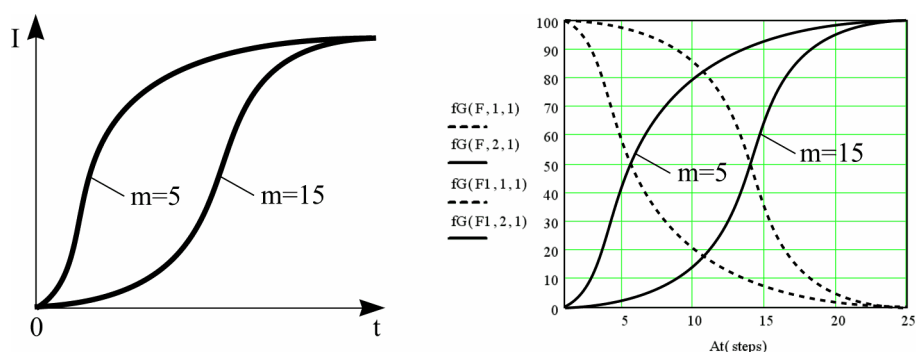


Рисунок 3.21 – Выходные характеристики ячейечных моделей:

а) для типовой модели, б) для моделируемой схемы.

Модели были также успешно опробованы для смесей, состоящих из трех и более веществ. Полученные результаты хорошо согласуются с теорией моделирования химических реакторов. Разработанные модели

компонентов теоретически позволят строить модели гидравлических систем любой сложности.

3.4 Моделирование сепарационной установки газ-нефть как объекта управления

В настоящее время предъявляются повышенные требования к качеству процессов сепарации нефти в связи с ухудшающейся экологической обстановкой и большими потерями при сепарировании. Правильный выбор систем автоматического управления процессами сепарации нефти и надежная их работа приобретают важное значение при комплексной автоматизации процессов добычи и переработки нефти и газа [19].

Основными системами автоматического управления сепарационной установки природный газ-нефть являются системы регулирования давления природного газа в сепараторе, регулирования уровня нефти и уровня раздела вода-нефть в сепараторе. Часто несколько сепараторов работают параллельно. Сепаратор как объект автоматического управления является сложным объектом, динамические свойства которого описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений. Существующие методы математического описания сепарационных установок являются неполными потому, что обычно авторы абстрагируются на одном каком – либо параметре и не учитывают влияние других параметров.

Аналоговые системы управления, которыми снабжены сепарационные установки газ-нефть, переоборудуются в настоящее время на цифровые системы управления. Синтез цифровых систем управления технологическими процессами промышленных установок с использованием микропроцессорных устройств требует более подробного математического описания и анализа работы объектов управления по сравнению с описанием объектов управления с использованием аналоговых систем управления.

3.4.1 Математическое описание сепарационной установки газ-нефть как объекта управления по давлению газа с учетом расходов газа, нефти и воды

Математическое описание сепарационной установки газ-нефть рассматривается применительно к системе автоматического регулирования давления в сепараторе. Вначале рассматривается математическое описание сепарационной установки газ-нефть как объекта управления по давлению газа с учетом расходов газа, нефти и воды, а после этого рассматривается математическое описание сепарационной установки газ-нефть как объекта управления по давлению газа с учетом расхода только газа.

На рисунке 3.22 приведена схема сепарационной установки газ-нефть по давлению газа. Она содержит трубопровод 1 подвода сырой нефти, на котором установлен клапан 2, сепаратор 3, который в нижней части заполнен водой, в средней части заполнен нефтью 5, а газ находится в

верхней части 6 сепаратора 3. Газ по трубопроводу 7 подводится к регулирующему клапану 8 и далее отводится по трубопроводу 9.

Трубопровод 11 предназначен для отвода нефти из сепаратора. На этом трубопроводе обычно установлен регулирующий клапан 10, управляемый от регулятора уровня газ-нефть. По трубопроводу 10 отводится дренаж воды из сепаратора. На этом трубопроводе также устанавливается регулирующий клапан 12 системы регулирования уровня вода-нефть.

Вначале рассмотрим теоретические положения по давлению газа в сепараторе, принимая уровень нефти в сепараторе неизменным.

Для машиностроительных приложений газовой динамики [42] для течения газа с достаточно большими скоростями через относительно короткие проточные части машин теплообмен между газовыми частицами не успевают осуществиться в заметной степени, поэтому газодинамические расчеты могут строиться на основе предположения об адиабатичности процесса. Отсюда вытекает, что при дросселировании газа энтальпия не изменяется и температура до и после регулирующего клапана 8 отвода газа из сепаратора остается постоянной.

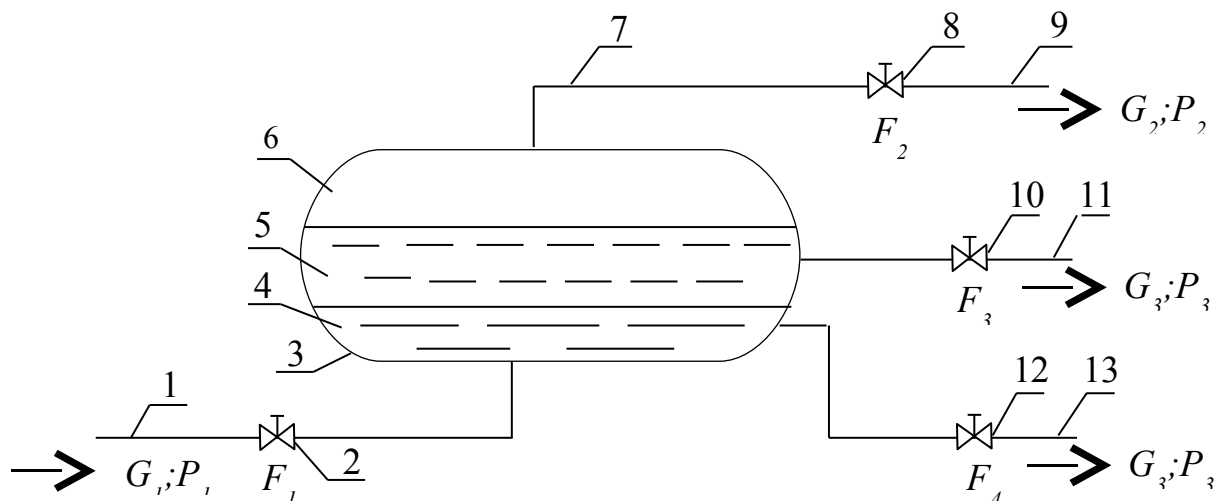


Рисунок 3.22 – Схема сепарационной установки газ-нефть как объекта управления по давлению газа

Течение газа через регулирующие клапаны может происходить с докритической или сверхкритической (дозвуковой или сверхзвуковой) скоростью и характеризуется коэффициентом β . Для адиабатичного процесса и двухатомных газов коэффициент адиабаты $k = 1.4$, тогда коэффициент определяется по формуле:

$$\beta = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 0,528 .$$

По значению коэффициента β определяют критическое давление:

$$P_{кр} = \beta P ,$$

где P - давление газа до регулирующего клапана, то есть давление в сепарационной установке, Па;

$P_{кр}$ - критическое давление после регулирующего клапана установленного на трубопроводе отводящем газ из установки, Па.

Если давление газа в трубопроводе после регулирующего клапана изменяется в пределах $0 < P < P_{кр}$, тогда скорость течения газа является докритической.

Для рассматриваемых горизонтальных совмещенных сепарационных установок рабочее давление в сепараторе не превышает 0,6 МПа и критическое давление $P_{кр} = 0,528 \cdot 0,6 = 0,317$ МПа.

Таким образом, течение газа через регулирующий клапан, отводящий газ из сепарационной установки, может происходить с докритической или сверхкритической скоростью и зависит от давления газа после регулирующего клапана. Так как после регулирующего клапана отсутствует устройство подъема давления газа для его перемещения, а течение газа в трубопроводе после регулирующего клапана происходит от давления газа в сепарационной установке, тогда потери давления на регулирующем клапане должны быть минимальными. На основании этого принимается течение газа через редукционный клапан докритическим.

Динамика сепарационных установок как объектов управления по давлению газа обычно рассматривается с учетом притока и отвода газа из установок. Однако на давление газа в сепарационной установке существенное влияние оказывает изменение уровня жидкости, а именно: изменение уровня газ-нефть и уровня нефть-вода.

Состояние углеводородного газа, находящегося в сепарационной установке, описывается уравнением состояния газа:

$$PV_z = mRT, \quad (3.1)$$

где P – давление газа в сепарационной установке, Па;

V_z – объем газового пространства в сепарационной установке, находящийся выше жидкости, м³;

m – масса газа в установке, кг;

R – газовая постоянная, м²с⁻²К⁻¹;

T – абсолютная температура газа, К.

На основании принятых допущений для сепарационной установки в уравнении (2.1) переменными величинами являются давление P , объем V и масса m . Поэтому, дифференцируя уравнение (2.1) по времени t получим:

$$P \frac{dV_z}{dt} + V_z \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt} RT \quad (3.2)$$

или

$$\frac{P}{RT} \frac{dV_z}{dt} + \frac{V_z}{RT} \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt}. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) является уравнением динамики сепарационной установки и может быть представлено следующим уравнением:

$$\frac{P}{RT} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{RT} \frac{dP}{dt} = G_1 - G_2 - G_3 - G_4, \quad (3.4)$$

где G_1 – массовый расход газожидкостной смеси $G_{см}$ нефти, воды и газа, поступающей в сепарационную установку, кг/с;

G_2, G_3, G_4 – массовые расходы соответственно газа, нефти и воды, выходящих из сепарационной установки, кг/с.

Массовый расход $G_1 = G_{см}$ характеризует расход газожидкостной смеси, поступающей в сепарационную установку. Главной особенностью газожидкостной смеси является наличие изменяющегося во времени и в пространстве поверхностей раздела фаз.

Эти изменения влекут за собой силовые и тепловые взаимодействия на границе раздела, которые являются причиной появления дополнительных градиентов скорости течения обеих фаз, давлений, температуры, и концентраций компонентов. Обычно выделяют для парожидкостных смесей четыре режима течения, которые принимают и для газожидкостных смесей: пузырьковое течение, снарядное, пенное и пленочное течения.

При пузырьковом режиме течения газовая фаза распределена в жидкости в виде отдельных пузырьков, размеры которых существенно меньше характерного размера аппарата, например, диаметра трубопровода.

Снарядный режим течения характеризуется периодическим прохождением вдоль оси трубопровода больших, имеющих пулеобразную форму пузырей (газовых включений). Диаметры таких пузырей сравнимы с диаметром трубопровода. Пузыри газа следуют на некотором расстоянии друг от друга, а пространство между ними заполнено жидкостью. Структура снарядного течения является неустойчивой и при незначительном повышении газосодержания появляется пена. Такой режим течения называется пенным течением.

Пленочное течение характеризуется наличием отчетливо выраженного разделения течения жидкой и газовой фаз. Это разделение зависит от ориентации трубопровода. При вертикальном расположении трубопровода, например, может появиться течение жидкой фазы вдоль стенок трубопровода, а газовой фазы – в центре жидкой фазы газожидкостной смеси.

В настоящее время не существует методов, позволяющих осуществить точный расчет двухфазных газожидкостных течений. Обычно при теоретическом описании двухфазных течений газожидкостных систем используют два подхода: феноменологический и статический. В рамках феноменологического подхода выделяют: простые аналитические методы, к которым относятся модели гомогенного и раздельного течений, интегральный и дифференциальный анализы течений и модель сплошной сферы.

В гомогенной модели смесь компонентов принимается псевдонепрерывной средой с усредненными свойствами, то есть газожидкостная смесь рассматривается как однородная жидкость, к которой применены обычные законы гидродинамики. Принимается, что газ и жидкость перемещаются с одинаковой скоростью, которая равна приведенной скорости и структура потоков не рассматривается.

Модель раздельного течения, которая называется также двухжидкостной моделью, основана на предположении о том, что каждая фаза газожидкостной смеси соответствует основным законам гидромеханики, в частности законам сохранения импульса, массы и энергии. Причем эти законы записываются отдельно для каждой из фазы двухфазной газожидкостной смеси. Фазы движутся раздельно и взаимодействуют между собой на границе раздела. Такую модель очень сложно математически описать, поэтому также используется упрощенная модель раздельного течения, но уравнения динамики записываются применительно к двухфазной системе в целом, но учитывается различие скоростей движения фаз.

Определим гомогенную модель течения газожидкостной смеси. Согласно основному понятию о гомогенной модели предполагается, что газожидкостная смесь представляет собой жидкость с усредненными свойствами смеси.

Допустим (рисунок 3.23), что по трубопроводу 1 с площадью поперечного течения $F_{тр}$, $м^2$, протекает газожидкостная смесь с массовым расходом $G_I = G_{см}$, $кг/с$, причем:

$$G_{см} = G_{ж} + G_{г} , \quad (3.5)$$

где $G_{ж}; G_{г}$ - массовый расход жидкости и газа в газожидкостной смеси, $кг/с$.

Обычно вводят обозначение:

$$x = \frac{G_{г}}{G_{см}} , \quad (3.6)$$

где x - массовое расходное удельное газосодержание в газожидкостной смеси.

Разделив обе части уравнения (3.5) на $G_{см}$ и подставив соотношение (3.6), получим:

$$(1 - x) = \frac{G_{ж}}{G_{см}} , \quad (3.7)$$

где $(1 - x)$ - массовое расходное удельное содержание жидкости в газожидкостной смеси.

Согласно модели гомогенного течения, принимается, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, равной приведенной скорости.

При этом удельный объем смеси складывается аддитивно из удельных объемов фаз, то есть:

$$v_{см} = \frac{1}{\rho_{см}} = x v_{г} + (1-x) v_{ж} = \frac{x}{\rho_{г}} + \frac{1-x}{\rho_{ж}}, \quad (3.8)$$

где $v_{см}, v_{г}, v_{ж}$ - удельные объемы соответственно газожидкостной смеси, газовой и жидкой фаз этой смеси, м³/кг;

$\rho_{г}, \rho_{ж}$ - плотность газовой и жидкой фаз газожидкостной смеси, кг/м³.

Скорость движения газожидкостной смеси $U_{см}$, м/с, можно определить по соотношению [31]:

$$U_{см} = \frac{G_{см}}{F'_1 \rho_{см}}, \quad (3.9)$$

где F'_1 - площадь сечения трубопровода, по которой пробежит газожидкостная смесь, м².

Из формул (3.8) и (3.9) получим:

$$U_{см} = \frac{G_{см}}{F'_1} \left(\frac{x}{\rho_{г}} + \frac{1-x}{\rho_{ж}} \right). \quad (3.10)$$

Для определения массового расхода газожидкостной смеси через клапан 2 (рисунок 3.22), учитывая принятую модель гомогенного течения, используем формулу течения обычной жидкости через клапаны:

$$G = \mu_1 F_1 \sqrt{2\rho(P_1 - P)}. \quad (3.11)$$

Подставим в эту формулу вместо G расход газожидкостной смеси $G_{см}$ и вместо плотности жидкости ρ плотность газожидкостной смеси и получим:

$$G_{см} = \mu_1 F_1 \sqrt{2\rho_{см}(P_1 - P)}, \quad (3.12)$$

где μ_1 - коэффициент расхода газожидкостной смеси через клапан 2;

F_1 - площадь проходного сечения клапана 2, м²;

P_1, P - давление газожидкостной смеси соответственно до и после клапана 2, Па.

Подставив в формулу (3.12) значения $\rho_{см}$ из формулы (3.8) получим, что

$$G_{см} = \mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}} \right]}} . \quad (3.13)$$

С учетом формул (3.6) и (3.7) формула (3.13) принимает вид:

$$G_{см} = \mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\left[\frac{G_z}{G_{см} \rho_z} + \frac{G_{жс}}{G_{см} \rho_{жс}} \right]}}$$

или

$$G_{см} = \frac{2\mu_1^2 F_1^2 (P_1 - P)}{\frac{G_z}{\rho_z} + \frac{G_{жс}}{\rho_{жс}}} . \quad (3.14)$$

Массовый расход через регулирующий клапан 8 G_2 , кг/с, при докритическом течении газа, определяется по формуле:

$$G_2 = \mu_2 F_2 k_a \sqrt{\frac{P(P - P_2)}{RT}} , \quad (3.15)$$

где μ_2 – коэффициент расхода регулирующего клапана, установленного на трубопроводе отвода газа из сепарационной установки;

F_2 – площадь проходного сечения регулирующего клапана расхода газа из сепарационной установки, м²;

k_a – коэффициент, определенный по формуле:

$$k_a = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} , \quad (3.16)$$

где k – коэффициент адиабаты;

P, P_2 – давление газа соответственно в сепарационной установке и после регулирующего клапана расхода газа, Па;

R – газовая константа, м²с⁻²К⁻¹

T – абсолютная температура среды, К.

Массовые расходы нефти G_3 , кг/с, G_4 , кг/с, соответственно через регулирующие клапаны 10 и 12 (рисунок 3.22) определяются по формулам идентичным формуле (3.11):

$$G_3 = \mu_3 F_3 \sqrt{2\rho_n(P - P_3)} ; \quad G_4 = \mu_4 F_4 \sqrt{2\rho_e(P - P_4)} ; \quad (3.17)$$

где μ_3, μ_4 – коэффициенты расхода соответственно нефти и воды для регулирующих клапанов 10 и 12;

F_3, F_4 - площадь проходного сечения соответственно регулирующих клапанов отвода из сепарационной установки нефти и воды, м^2 ;

P, P_3, P_4 - давление соответственно газожидкостной смеси в сепарационной установке и в трубопроводах отвода нефти и воды после регулирующих клапанов 10 и 12, Па;

ρ_n, ρ_v - плотность соответственно нефти и воды, кг/м^3 .

Преобразуем выражение $\frac{P}{RT} \frac{dV_z}{dt}$ в уравнении (3) через уровень жидкости в сепарационной установке потому, что при изменении уровня жидкости изменяется объем пространства, занимаемого газом в установке.

Если провести плоскость перпендикулярно оси сепарационной установки, тогда получим в сечении окружность. На рисунке 3.23 представлена окружность и оси координат. Центр окружности обозначен буквой C с координатами a и b , $C(a, b)$.

Если на окружности взять точку $M(x, y)$, тогда прямая CM будет представлять радиус окружности и определяется по соотношению для уравнения по двум точкам:

$$CM = R_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}. \quad (2.18)$$

Расположим оси координат на вертикальном диаметре и в нижней части окружности, как показано на рисунке 3.24.

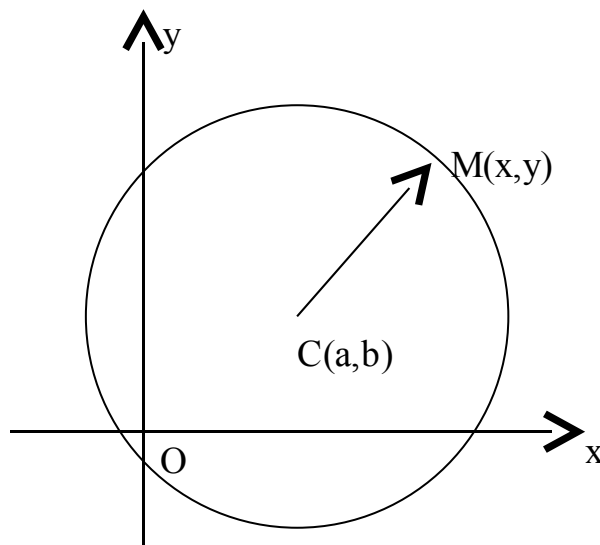


Рисунок 3.23 – Сечение сепарационной установки

Уравнение (3.18) принимает в этом случае следующий вид:

$$CM = R_1 = \sqrt{x^2 + (y-b)^2}. \quad (3.19)$$

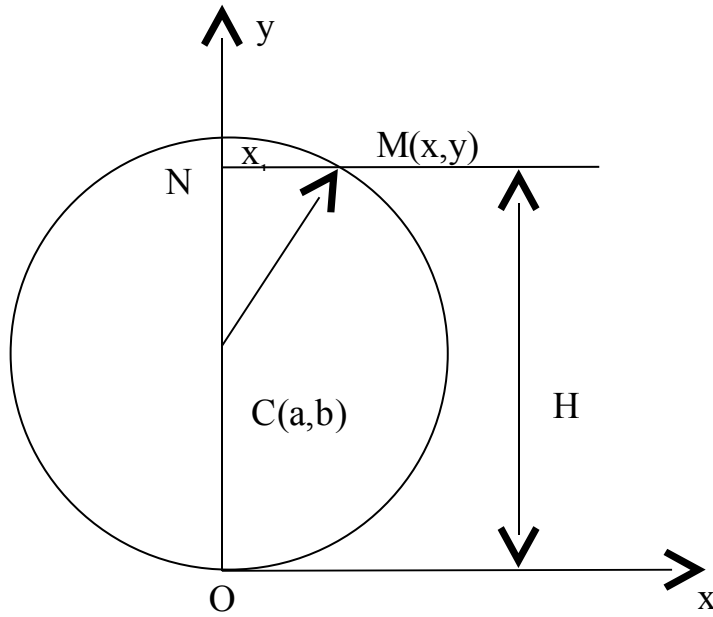


Рисунок 3.24 - Сечение сепарационной установки при смене координат

Уровень жидкости в сепарационной установке обозначен через H , а отрезок $NM = x_1$. Отрезок $NC = H - OC = H - R_1$.

Из треугольника CNM определяем, что

$$x_1 = \sqrt{R_1^2 - (H - R_1)^2} = \sqrt{R_1^2 - H^2 + 2HR_1 - R_1^2} = \sqrt{2HR_1 - H^2}. \quad (3.20)$$

Площадь поверхности жидкости в сепарационной установке s , м^2 , определяется по соотношению:

$$s = 2x_1 L = 2L \sqrt{2HR_1 - H^2}, \quad (3.21)$$

где L - длина сепарационной установки, м .

Изменение объема жидкости в сепарационной установке от изменения уровня

$$\Delta V_{\text{жс}} = s \Delta H = 2L \sqrt{2HR_1 - H^2} \Delta H, \quad (3.22)$$

или в дифференциальной форме, разделив обе части уравнения (3.22) на dt получим, что

$$\frac{dV_{\text{жс}}}{dt} = 2L \sqrt{2HR_1 - H^2} \frac{dH}{dt}. \quad (3.23)$$

Увеличение уровня и объема жидкости в сепарационной установке приводит к уменьшению объема занимаемого газом, dV_z , поэтому

$$\frac{dV_{ж}}{dt} = -\frac{dV_z}{dt} \quad (3.24)$$

или

$$\frac{dV_z}{dt} = -2L\sqrt{2HR_l - H^2} \frac{dH}{dt}. \quad (3.25)$$

После подстановки соотношений (3.13), (3.15), (3.17) и (3.25) в уравнение (3.4) получим:

$$\begin{aligned} \frac{V_z}{RT} \frac{dP}{dt} = & \mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{ж}}}} - \mu_2 F_2 k_a \sqrt{\frac{P(P - P_2)}{RT}} - \mu_3 F_3 \sqrt{2\rho_n(P - P_3)} - \\ & - \mu_4 F_4 \sqrt{2\rho_d(P - P_4)} + 2L\sqrt{2HR_l - H^2} \frac{dH}{dt} \frac{P}{RT}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Соотношение (3.26) является нелинейным уравнением, которое необходимо линеаризовать. Переменными величинами в уравнении (3.26) являются $F_1, F_2, F_3, F_4, P_1, P_2, P_3, P_4, H$.

Установившиеся значения этих переменных величин обозначим:

$$\begin{aligned} F_1 \rightarrow F_{10}; F_2 \rightarrow F_{20}; F_3 \rightarrow F_{30}; F_4 \rightarrow F_{40}; P_1 \rightarrow P_{10}; P \rightarrow P_0; \\ P_2 \rightarrow P_{20}; P_3 \rightarrow P_{30}; P_4 \rightarrow P_{40}; H \rightarrow H_0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Координаты переменных величин, выраженные через приращения и установившиеся значения имеют вид:

$$\begin{aligned} F_1 = F_{10} + \Delta F_1; \quad F_2 = F_{20} + \Delta F_2; \quad F_3 = F_{30} + \Delta F_3; \quad F_4 = F_{40} + \Delta F_4; \\ P_1 = P_{10} + \Delta P_1; \\ P = P_0 + \Delta P; \quad P_2 = P_{20} + \Delta P_2; \quad P_3 = P_{30} + \Delta P_3; \quad P_4 = P_{40} + \Delta P_4; \quad H = H_0 + \Delta H. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В уравнении (3.26) нелинейные слагаемые перенесены в правую часть. Линеаризации подлежит фактически правая часть уравнения (3.26), которую обозначаем как $M(F_1, F_2, F_3, F_4, P_1, P, P_2, P_3, P_4, H)$. Для линеаризации уравнения (3.26) разложим его (правую часть) в ряд Тейлора по переменным согласно уравнению (3.28), пренебрегая производными выше первого порядка и величинами второго порядка малости по следующему соотношению:

$$\begin{aligned} M(F_1, F_2, F_3, F_4, P_1, P, P_2, P_3, P_4, H, H^1)_0 + \left(\frac{\partial M}{\partial F_1}\right)_0 \Delta F_1 + \left(\frac{\partial M}{\partial F_2}\right)_0 \Delta F_2 + \left(\frac{\partial M}{\partial F_3}\right)_0 \Delta F_3 + \\ + \left(\frac{\partial M}{\partial F_4}\right)_0 \Delta F_4 + \left(\frac{\partial M}{\partial P_1}\right)_0 \Delta P_1 + \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_0 \Delta P + \left(\frac{\partial M}{\partial P_2}\right)_0 \Delta P_2 + \left(\frac{\partial M}{\partial P_3}\right)_0 \Delta P_3 + \left(\frac{\partial M}{\partial P_4}\right)_0 \Delta P_4 + \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_0 \Delta H + \left(\frac{\partial M}{\partial(dH/dt)}\right)_0 \Delta \frac{dH}{dt}.$$

Выполняя действия согласно этому соотношению для уравнения (3.26) получим:

$$\begin{aligned} \frac{V_z}{RT} \frac{dP}{dt} = & (\mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} - \mu_2 F_2 K_a \sqrt{\frac{P^2 - PP_2}{RT}} - \mu_3 F_3 \sqrt{2\rho_h(P - P_3)} - \\ & - \mu_4 F_4 \sqrt{2\rho_e(P - P_4)} + 2L \sqrt{2HR - H^2} \frac{dH}{dt} \frac{P}{RT})_0 + \left(\frac{\partial \left[\mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} \right]}{\partial F_1} \right)_0 \Delta F_1 - \\ & - \left(\frac{\partial \left[\mu_2 F_2 K_a \sqrt{\frac{P^2 - PP_2}{RT}} \right]}{\partial F_2} \right)_0 \Delta F_2 - \left(\frac{\partial [\mu_3 F_3 \sqrt{2\rho_h(P - P_3)}]}{\partial F_3} \right)_0 \Delta F_3 - \left(\frac{\partial [\mu_4 F_4 \sqrt{2\rho_e(P - P_4)}]}{\partial F_4} \right)_0 \Delta F_4 + \\ & + \left(\frac{\partial \left[\mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} \right]}{\partial P_1} \right)_0 \Delta P_1 + \left(\frac{\partial \left[\mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2(P - P)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} \right]}{\partial P} \right)_0 \Delta P - \left(\frac{\partial \left[\mu_2 F_2 K_a \sqrt{\frac{P^2 - PP_2}{RT}} \right]}{\partial P} \right)_0 \Delta P - \\ & - \left(\frac{\partial [\mu_3 F_3 \sqrt{2\rho_h(P - P_3)}]}{\partial P} \right)_0 \Delta P - \left(\frac{\partial [\mu_4 F_4 \sqrt{2\rho_e(P - P_4)}]}{\partial P} \right)_0 \Delta P + \left(\frac{\partial \left[2L \sqrt{2HR - H^2} \frac{P}{RT} \frac{dH}{dt} \right]}{\partial P} \right)_0 \Delta P - \\ & - \left(\frac{\partial \left[\mu_2 F_2 K_a \sqrt{\frac{P^2 - PP_2}{RT}} \right]}{\partial P_2} \right)_0 \Delta P_2 - \left(\frac{\partial [\mu_3 F_3 \sqrt{2\rho_h(P - P_3)}]}{\partial P_3} \right)_0 \Delta P_3 - \left(\frac{\partial [\mu_4 F_4 \sqrt{2\rho_e(P - P_4)}]}{\partial P_4} \right)_0 \Delta P_4 + \\ & + \left(\frac{\partial \left[2L \frac{P}{RT} \sqrt{2HR - H^2} \frac{dH}{dt} \right]}{\partial H} \right)_0 \Delta H + \left(\frac{\partial \left[2L \frac{P}{RT} \sqrt{2HR - H^2} \frac{dH}{dt} \right]}{\partial(dH/dt)} \right)_0 \Delta \frac{dH}{dt}. \end{aligned}$$

Продолжим преобразование этого соотношения:

$$\begin{aligned}
\frac{V_z}{RT} \frac{dP}{dt} = & \mu_1 F_{10} \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} - \mu_2 F_{20} K_a \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}} - \mu_3 F_{30} \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} - \\
& - \mu_4 F_{40} \sqrt{2\rho_e(P_0 - P_{40})} + \mu_1 \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} \Delta F_1 - \mu_2 K_a \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}} \Delta F_2 - \mu_3 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} \Delta F_3 - \\
& - \mu_4 \sqrt{2\rho_e(P_0 - P_{40})} \Delta F_4 + \frac{1}{2} \frac{\mu_1 F_{10} \left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}{\sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}}} \Delta P_1 + \frac{1}{2} \frac{\mu_1 F_{10} \left(-\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]\right)}{\sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}}} \Delta P - \\
& - \frac{\mu_2 F_{20} K_a (2P_0 - P_{20})}{2 \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}} RT} \Delta P - \frac{\mu_3 F_{30} 2\rho_h}{2 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})}} \Delta P - \frac{\mu_4 F_{40} 2\rho_e}{2 \sqrt{2\rho_e(P_0 - P_{40})}} \Delta P + \frac{2L \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2}}{RT} \frac{dH_0}{dt} \Delta P - \\
& - \frac{\mu_2 F_{20} K_a \left(-\frac{P_0}{RT}\right)}{2 \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}}} \Delta P_2 - \frac{\mu_3 F_{30} (-2\rho_h)}{2 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})}} \Delta P_3 - \frac{\mu_4 F_{40} (-2\rho_e)}{2 \sqrt{2\rho_e(P_0 - P_{40})}} \Delta P_4 + \frac{2LP_0}{RT} \times \dot{i} \\
& \dot{i} \left[\frac{(2R_1 - 2H_0)}{2 \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2}} \frac{dH_0}{dt} + \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2} \left(\frac{dH}{\partial H} \right) \right] \Delta H + \frac{2LP_0}{RT} \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2} \Delta \frac{dH}{dt} .
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение без учета выражений, которые равны нулю или которыми пренебрегаем, как величинами второго порядка малости.

$$\begin{aligned}
\frac{V_z}{RT} \frac{dP}{dt} = & \mu_1 F_{10} \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} - \mu_2 F_{20} K_a \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}} - \mu_3 F_{30} \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} - \mu_4 F_{40} \sqrt{2\rho_e(P_0 - P_{40})} \\
& + \mu_1 \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} \Delta F_1 - \mu_2 K_a \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}} \Delta F_2 - \mu_3 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} \Delta F_3 - \mu_4 \sqrt{2\rho_e(P_0 - P_{40})} \Delta F_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_1 F_{10} \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}}}{2} \Delta P_1 - \frac{\mu_1 F_{10} \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}}}{2} \Delta P - \frac{\mu_2 F_{20} K_a (2P_0 - P_{20})}{2 RT \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}}} \Delta P - \frac{\mu_3 F_{30} \rho_h}{\sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})}} \Delta P - \\
& - \frac{\mu_4 F_{40} \rho_g}{\sqrt{2\rho_g(P_0 - P_{40})}} \Delta P + \frac{\mu_2 F_{20} K_a P_0}{2 \sqrt{RT(P_0^2 - P_0 P_{20})}} \Delta P_2 + \frac{\mu_3 F_{30} \rho_h}{\sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})}} \Delta P_3 + \frac{\mu_4 F_{40} \rho_g}{\sqrt{2\rho_g(P_0 - P_{40})}} \Delta P_4 + \\
& + \frac{2LP_0}{RT} \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2} \Delta \frac{dH}{dt} . \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Для установившегося режима течения газожидкостной смеси в сепарационную установку и в отдельности газа и жидкости из установки уравнение (3.26) при значениях соотношений (3.27) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{V_z}{RT} \frac{dP_0}{dt} = & \mu_1 F_{10} \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} - \mu_2 F_{20} k_a \sqrt{\frac{P_0(P_0 - P_{20})}{RT}} - \mu_3 F_{30} \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} - \\
& - \mu_4 F_{40} \sqrt{2\rho_g(P_0 - P_{40})} + 2L \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2} \frac{dH_0}{dt} \frac{P_0}{RT} = 0 . \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Это соотношение равно нулю потому, что dP_0/dt и dH_0/dt равны нулю как производные от постоянных величин P_0 и H_0 .

Уравнение (3.30) позволяет определить установившийся массовый расход газа и жидкости через сепарационную установку, а именно:

$$\begin{aligned}
G_0 = & \mu_1 F_{10} \sqrt{\frac{2(P_{10}-P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}}\right]}} = \mu_2 F_{20} k_a \sqrt{\frac{P_0(P_0 - P_{20})}{RT}} + \mu_3 F_{30} \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} + \\
& + \mu_4 F_{40} \sqrt{2\rho_g(P_0 - P_{40})} . \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Если из уравнения (3.29) вычесть соответствующие части уравнения (3.30), затем разделить обе части полученного соотношения на установившийся расход G_0 с учетом его значения по формуле (3.31), тогда получим:

$$\frac{V_z}{G_0 RT} \frac{dP}{dt} = \frac{\Delta F_1}{F_{10}} - \frac{\mu_2 k_a}{G_0} \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}} \Delta F_2 - \frac{\mu_3}{G_0} \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} \Delta F_3 - \frac{\mu_4}{G_0} \sqrt{2\rho_g(P_0 - P_{40})} \Delta F_4 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{4} \frac{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}} \right]}{(P_{10} - P_0)} \Delta P_1 - \left(\frac{\mu_1 F_{10} \frac{2}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}} \right]}}{2G_0 \sqrt{\frac{2(P_{10} - P_0)}{\left[\frac{x}{\rho_z} + \frac{(1-x)}{\rho_{жс}} \right]}}} + \frac{\mu_2 F_0 k_a (2P_0 - P_{20})}{2G_0 \sqrt{RT(P_0^2 - P_0 P_{20})}} + \frac{\mu_3 F_{30} \rho_h}{G_0 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})}} + \right. \\
& \left. + \frac{\mu_4 F_{40} \rho_h}{G_0 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{40})}} \right) \Delta P + \frac{\mu_2 F_{20} k_a P_0}{2G_0 \sqrt{RT(P_0^2 - P_0 P_{20})}} \Delta P_2 + \frac{\mu_3 F_{30} \rho_h}{G_0 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})}} \Delta P_3 + \\
& + \frac{\mu_4 F_{40} \rho_h}{G_0 \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{40})}} \Delta P_4 + \frac{2LP_0}{G_0 RT} \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2} \Delta \frac{dH}{dt} .
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

Уравнение (3.32) преобразуем таким образом, чтобы были отношения:

$$\frac{\Delta F_1}{F_{10}}; \quad \frac{\Delta F_2}{F_{20}}; \quad \frac{\Delta F_3}{F_{30}}; \quad \frac{\Delta F_4}{F_{40}}; \quad \frac{\Delta P_1}{P_{10}}; \quad \frac{\Delta P}{P_0}; \quad \frac{\Delta P_2}{P_{20}}; \quad \frac{\Delta P_3}{P_{30}}; \quad \frac{\Delta P_4}{P_{40}}; \quad \frac{\Delta H}{H_0} .$$

Выражение $\frac{V_z}{G_0 RT} \frac{dP}{dt}$ преобразуем следующим образом:

$$\frac{V_z}{G_0 RT} \frac{dP}{dt} = \frac{V_z}{G_0 RT} \frac{d(\Delta P)}{dt} = \frac{V_z}{G_0 RT} \frac{d\left(\Delta P \frac{P_0}{P_0}\right)}{dt} = \frac{V_z P_0}{G_0 RT} \frac{d\left(\frac{\Delta P}{P_0}\right)}{dt} ,$$

а выражение

$$\frac{2LP_0 \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2}}{G_0 RT} \Delta \frac{dH}{dt} = \frac{2LP_0 H_0 \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2}}{G_0 RT} \frac{d\left(\frac{\Delta H}{H_0}\right)}{dt} .$$

С учетом этих замечаний уравнение (3.32) принимает вид:

$$\frac{V_z P_0}{G_0 RT} \frac{d\left(\frac{\Delta P}{P_0}\right)}{dt} = \frac{\Delta F_1}{F_{10}} - \frac{\mu_2 F_{20} K_a}{G_0} \sqrt{\frac{P_0^2 - P_0 P_{20}}{RT}} \frac{\Delta F_2}{F_{20}} - \frac{\mu_3 F_{30}}{G_0} \sqrt{2\rho_h(P_0 - P_{30})} \frac{\Delta F_3}{F_{30}} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mu_4 F_{40}}{G_0} \sqrt{2\rho_\epsilon (P_0 - P_{40})} \frac{\Delta F_4}{F_{40}} + \frac{P_{10}}{2(P_{10} - P_0)} \frac{\Delta P_1}{P_{10}} - \frac{P_0}{G_0} \left(\frac{\mu_1 F_{10}}{\sqrt{2 \left[\frac{x}{\rho_\epsilon} + \frac{(1-x)}{\rho_{\text{жс}}} \right] (P_{10} - P_0)}} + \right. \\
& + \frac{\mu_2 F_{20} K_a (2P_0 - P_{20})}{2\sqrt{RT (P_0^2 - P_0 P_{20})}} + \frac{\mu_3 F_{30} \rho_h}{\sqrt{2\rho_h (P_0 - P_{30})}} + \frac{\mu_4 F_{40} \rho_\epsilon}{\sqrt{2\rho_\epsilon (P_0 - P_{40})}} \left. \right) \frac{\Delta P}{P_0} + \\
& + \frac{\mu_2 F_{20} K_a P_0 P_{20}}{2G_0 \sqrt{RT (P_0^2 - P_0 P_{20})}} \frac{\Delta P_2}{P_{20}} + \frac{\mu_3 F_{30} P_{30} \rho_h}{G_0 \sqrt{2\rho_h (P_0 - P_{30})}} \frac{\Delta P_3}{P_{30}} + \frac{\mu_4 F_{40} P_{40} \rho_\epsilon}{G_0 \sqrt{2\rho_\epsilon (P_0 - P_{40})}} \frac{\Delta P_4}{P_{40}} + \\
& + \frac{2 L H_0 P_0}{G_0 RT} \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2} \frac{d \left(\frac{\Delta H}{H_0} \right)}{dt}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\frac{V_\epsilon P_0}{G_0 RT} &= T_a; \quad \frac{\Delta P}{P_0} = x(t); \quad \frac{\Delta F_1}{F_{10}} = a(t); \quad \frac{\Delta F_2}{F_{20}} = b(t); \quad \frac{\Delta P_1}{P_{10}} = c(t); \quad \frac{\Delta P_2}{P_{20}} = d(t); \\
\frac{\Delta P_3}{P_{30}} &= m(t); \quad \frac{\Delta F_3}{F_{30}} = n(t); \quad \frac{\Delta F_4}{F_{40}} = r(t); \quad \frac{\Delta H}{H_0} = \psi(t); \quad \frac{\Delta P_4}{P_{40}} = \beta(t); \\
\frac{P_0}{2(P_{10} - P_0)} + \frac{P_0}{G_0} \left[\frac{\mu_2 F_{20} K_a (2P_0 - P_{20})}{2\sqrt{RT (P_0^2 - P_0 P_{20})}} + \frac{\mu_3 F_{30} \rho_h}{\sqrt{2\rho_h (P_0 - P_{30})}} + \frac{\mu_4 F_{40} \rho_\epsilon}{\sqrt{2\rho_\epsilon (P_0 - P_{40})}} \right] &= k_1; \\
\frac{\mu_2 F_{20} K_a}{G_0} \sqrt{\frac{P_0 (P_0 - P_{20})}{RT}} &= k_2; \quad \frac{\mu_3 F_{30}}{G_0} \sqrt{2\rho_h (P_0 - P_{30})} = k_3; \\
\frac{\mu_4 F_{40}}{G_0} \sqrt{\rho_\epsilon (P_0 - P_{40})} &= k_4; \\
\frac{P_{10}}{2(P_{10} - P_0)} &= k_5; \quad \frac{\mu_2 F_{20} K_a P_0 P_{20}}{2G_0 \sqrt{RT (P_0^2 - P_0 P_{20})}} = k_6; \quad \frac{\mu_3 F_{30} P_{30} \rho_h}{G_0 \sqrt{2\rho_h (P_0 - P_{30})}} = k_7; \\
\frac{\mu_4 F_{40} P_{40} \rho_\epsilon}{G_0 \sqrt{2\rho_h (P_0 - P_{40})}} &= k_8; \quad \frac{2 L P_0 H_0}{G_0 RT} \sqrt{2H_0 R_1 - H_0^2} = T_\epsilon. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

С учетом соотношений (3.34) уравнение (3.33) принимает вид:

$$T_a \frac{dx(t)}{dt} + k_1 x(t) = a(t) - k_2 b(t) - k_3 n(t) - k_4 r(t) + k_5 c(t) + k_6 d(t) + k_7 m(t) + k_8 \beta(t) + T_\epsilon \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (3.35)$$

В соотношении (3.35) T_a и T_ϵ – постоянные времени, с, а $k_1 - k_8$ – безразмерные коэффициенты.

После преобразования по Лапласу уравнения (3.35) получим:

$$T_a s x(s) + k_1 x(s) = a(s) - k_2 b(s) - k_3 n(s) - k_4 r(s) + k_5 c(s) + k_6 d(s) + k_7 m(s) + k_8 \beta(s) + T_\epsilon s \psi(s), \quad (3.36)$$

где s -оператор Лапласа.

На рисунке 3.25 представлена структурная схема сепарационной установки газ-нефть как объекта управления по давлению газа, составленная по уравнению (3.36).

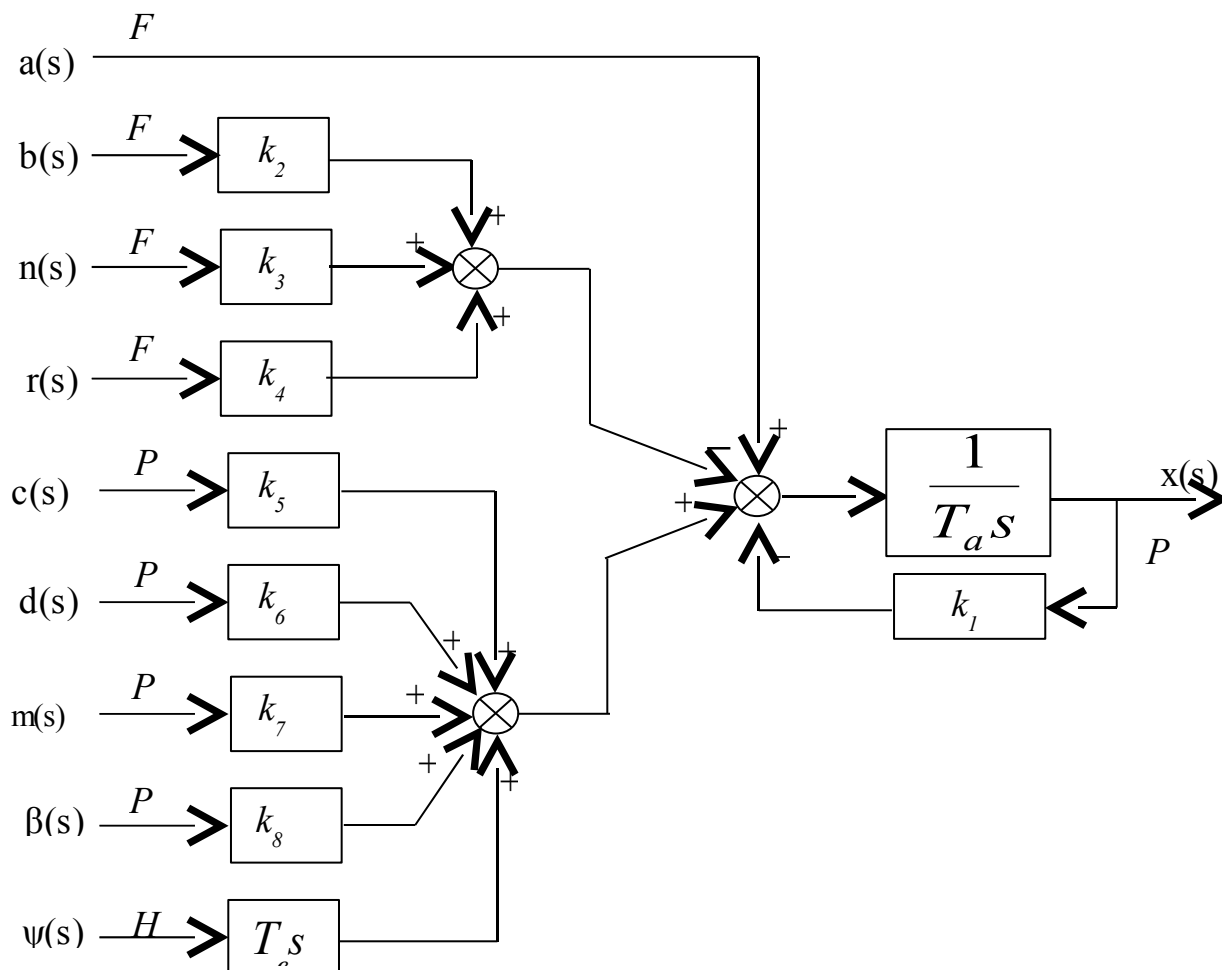


Рисунок 3.25 - Структурная схема сепарационной установки газ-нефть как объекта управления по давлению газа с учетом расходов газа, нефти и воды

Список использованных источников

- 1 **Аврамчук, Е.Ф.** Технология системного моделирования [Текст] / Аврамчук Е.Ф., Вавилов А.А., Емельянов С.В. – М.: Машиностроение, 1988. – 520 с.
- 2 **Айзерман, М.А.** Классическая механика [Текст] – М.: Наука, 1980. – 386 с.
- 3 **Бир, С.Т.** Кибернетика и управление производством [Текст]. - М.: Наука, 1965. – 302 с.
- 4 **Волкова, В.Н.** Методы формализованного представления систем [Текст] : учебное пособие / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – СПб:СПбГТУ, 1993. – 107 с.
- 5 **Волкова, В.Н.** Основы теории систем и системного анализа [Текст] / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – СПб:СПбГТУ, 1993. – 107 с.
- 6 **Гартман, Т.Н.** Компьютерное моделирование простых гидравлических систем [Текст] : Учебное пособие / Т.Н. Гартман, В.Н. Калинин, Л.И. Артемьева. Под общ. ред. Т.Н. Гартмана. – Москва: РХТУ, 2002. – 40 с.
- 7 **Гантмахер, Ф.Р.** Лекции по аналитической механике [Текст] - М.: Наука, 1968. – 300 с.
- 8 **Дилигенский, Н.В.** Моделирование, многокритериальная оптимизация и оценки качества функционирования производственно-экономических и медико-экологических систем в условиях неопределенности [Текст] / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов – М.: Машиностроение – 1, 2005. – 324 с.
- 9 **Зарубин, В.С.** Математическое моделирование в технике [Текст] - М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003 г. – 442 с.
- 10 **Калман, Р.** Очерки по математической теории систем [Текст] / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб – М.: Мир, 1971. – 400 с.
- 11 **Колесов, И.М.** Основы технологии машиностроения: Учебник для машиностроительных вузов. – М.: Машиностроение, 1997. – 592 с.
- 12 **Краснощеков, П.С.** Принципы построения моделей [Текст] / - М.: Изд.-во МГУ, 1983. – 264 с.
- 13 **Месарович, М.** Теория иерархических многоуровневых систем [Текст] / М.Месарович, Д.Мако, И. Такахара – М.: Мир, 1973. – 344 с.
- 14 **Мухленов, И.П.** Химико-технологические системы [Текст] / – М.: Наука, 1986. - 425 с.
- 15 **Павлов, К.Ф.** Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии [Текст] : учебное пособие для вузов / К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков. Под общ. ред. П.Г. Романкова. - Ленинград: Химия, 1987 г. – 576 с.
- 16 **Подчукаев, В.А.** Декомпозиция, агрегирование и векторная оптимизация больших систем автоматического управления [Текст] / Саратов: СПИ, 1983. – 48 с.

17 **Самарский, А.А.** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. [Текст] / А.А. Самарский, А.П. Михайлов – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.

18 Системный анализ и принятие решений [Текст]: Словарь-справочник: Учебное пособие для вузов / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Высш. шк., 2004. – 616 с.

19 **Тугов, В.В.** Разработка принципиальных схем и математического обеспечения систем управления первичной подготовки нефти [Текст] : Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Науч. рук. Н.И. Жежера – Оренбург: ОГУ, 2002. – 165 с

20 **Устенко, А.С.** Основы математического моделирования и алгоритмизации процессов функционирования сложных систем [Текст] - М.: Изд.-во МГУ, 2005. – 236 с.

21 **Утеуш, Э.В.** Введение в кибернетическое моделирование [Текст] / Э.В. Утеуш, З.В. Утеуш – М.: Энергия, 1971. – 208 с.