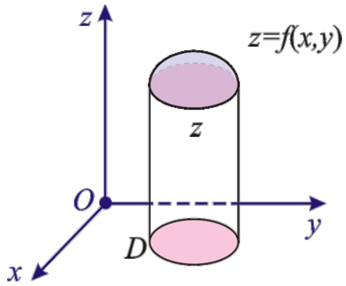
1. Кратные интегралы

1.1. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное плоскостью Oxy, поверхностью $z = f(x, y)$, с которой любая прямая, параллельная оси Oz, пересекается не более чем в одной точке, и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz.

Область D, вырезаемая цилиндрической поверхностью на плоскости Oxy, называется основанием цилиндрического тела.



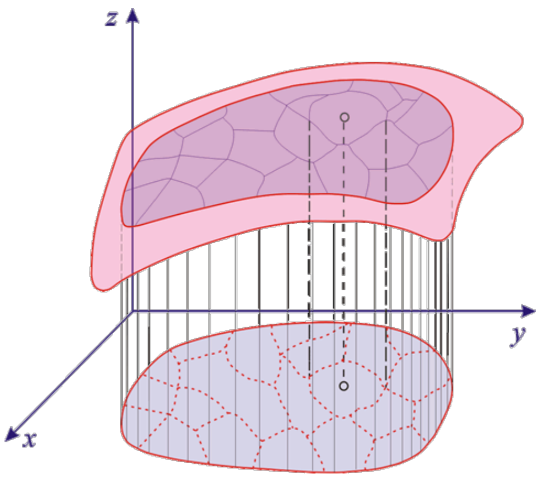
При вычислении объема цилиндрического тела будем исходить из следующих свойств объемов:

1. если разбить тело на части, то его объем равен сумме объемов получившихся частей;
2. объем прямого цилиндра равен площади основания, умноженной на его высоту.

Пусть для рассматриваемого цилиндрического тела функция $f(x, y) > 0$ всюду в области D, то есть поверхность $z = f(x, y)$ лежит выше плоскости Oxy. Разобьем основание цилиндрического тела на n частей произвольной формы, обозначив их площади $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \ldots,\ \Delta\sigma_n$. Через границу каждой области проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. Эти цилиндрические поверхности разобьют поверхность $z = f(x, y)$ на n кусков. Тогда цилиндрическое тело окажется разбитым на n частичных цилиндрических тел.

Возьмем внутри каждой частичной области $\Delta\sigma_i$ точку $\mathrm{P}_i(x_i, y_i)$ и заменим соответствующее частичное цилиндрическое тело прямым цилиндром с тем же основанием $\Delta\sigma_i$ и высотой, равной $z_i = f(x_i, y_i)$. В результате получим n-ступенчатое тело, объем которого:

$$V_n = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2 y_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i\ .$$



Будем считать объем данного цилиндрического тела V приближенно равным объему полученного ступенчатого тела V_n, причем V_n тем точнее выражает объем V, чем больше n и чем меньше каждая из частичных областей. Назовем диаметром d_i частичной области $\Delta\sigma_i$ наибольший из ее размеров и перейдем к пределу суммы V_n при $n \to \infty$ и $\max d_1 \to 0$. Тогда объем цилиндрического тела:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i\ . \tag{1}$$

?

Сумма, стоящая под знаком предела, в общем случае называется **интегральной суммой** для функции двух переменных $f(x, y)$ в области D при заданном разбиении этой области на n частичных областей.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел, к которому стремится интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y)d\sigma \ . \qquad (2)$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, ограниченной замкнутой линией, то ее интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей, причем этот предел не зависит от способа разбиения области D на частичные области $\Delta\sigma_i$ и от выбора в них точек P_i.

◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►

?