4. Поверхностные интегралы

4.5. Вычисление поверхностных интегралов II рода

Поверхностный интеграл второго рода, записанный в форме (5'), удобно вычислять как интеграл первого рода по формулам (2) – (2''). Если поверхность S задана явным уравнением $z = z(x, y)$ и однозначно проектируется в область D плоскости Oxy, то известны выражения для направляющих косинусов нормали к поверхности:

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\,;\quad \cos\beta = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\,;\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\,. \tag{7}$$

В этих выражениях полагается, что выбрана та сторона поверхности S, для которой уголγ острый.

С учётом того, что $d\sigma = \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$, получим

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = \iint\limits_D \left[P(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + R(x,y,z(x,y))\right]dxdy\,. \tag{8}$$

Поверхностный интеграл по координатам (6) можно вычислять и как сумму трёх двойных интегралов:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy\,,$$

где \({D_{yz}},\;{D_{xz}},\;{D_{xy} \) – проекции поверхности S на соответствующие координатные плоскости, а знаки плюс или минус определяются знаком косинуса соответствующего угла.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл $I = \iint\limits_S xdydz + dxdz + xz^2dxdy$,

где S – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключённой в первом октанте.

Решение.

$$I_1 = +\iint\limits_{D_{yz}} xdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1+x^2+y^2}dydz = \frac{\pi}{6}\,,$$

$$I_2 = +\iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$I_3 = +\iint\limits_{D_{xy}} x(1-x^2-y^2)dxdy = \frac{2}{15}\,,$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{15} = \frac{25\pi+8}{60}\,.$$

◄ Вопросы преподавателю

?