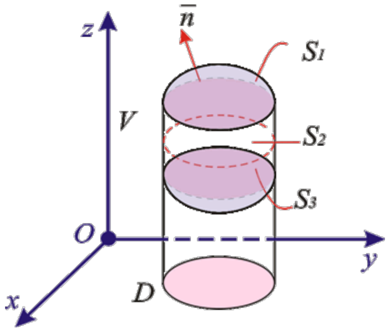
5. Формулы Стокса и Остроградского

5.2. Формула Остроградского

Эта формула связывает тройной интеграл по пространственной области V с поверхностным интегралом по поверхности, ограничивающей область V.

В пространстве задана область V, ограниченная замкнутой поверхностью S, проектирующаяся в плоскость Oxy в правильную область D. Пусть поверхность S можно разбить на три части $S_1,\ S_2$ и S_3 так, что S_1: $z = z_1(x,y)$; S_2: $z = z_2(x,y)$, а S_3 – цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz.

В пространственной области V заданы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывные вместе со своими частными производными.



Рассмотрим интеграл $I = \iiint\limits_V \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz$.

Произведём интегрирование по z:

$$I = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy = \iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy \,.$$

Выберем направление нормали к поверхности S внешнее по отношению к области V, тогда $\cos\gamma$ на поверхности S_2, $\cos\gamma > 0$ на S_1 и $\cos\gamma < 0$ на цилиндрической поверхности S_3.

Двойные интегралы, стоящие в правой части последнего равенства, равны соответствующим интегралам по поверхности:

$$\iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy = -\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma \,,$$

$$\iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy = -\iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma \,.$$

Тогда

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma$$

или

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma \,, \qquad (12)$$

так как $\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma = 0,\ \cos\gamma = 0$ на S.

Аналогично можно получить соотношения:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta d\sigma \,, \qquad (12')$$

?

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha d\sigma \ . \qquad (12'')$$

Складывая почленно формулы (12), (12'), (12''), получим формулу Остроградского:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma \ . \qquad (13)$$

Если функции P, Q, R представляют собой составляющие вектора скорости жидкости, протекающей через область V, то формуле Остроградского можно дать гидромеханическую интерпретацию: изменение количества жидкости внутри области V обусловлено потоком жидкости через ограничивающую V поверхность.

?