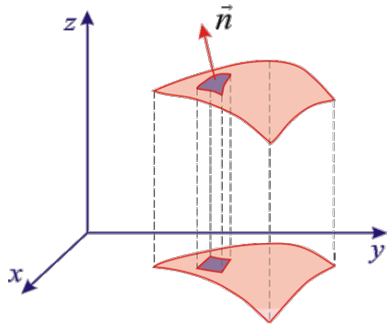
4. Поверхностные интегралы

4.2. Вычисление поверхностных интегралов I рода, их приложения

Предположим, что поверхность S простая, то есть однозначно проектируется на какую-либо координатную плоскость, например, на плоскость Oxy. В этом случае поверхность может быть задана явным уравнением $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой области D – проекции поверхности S в плоскость Oxy.

Нормаль $\vec{n}$ к площадке $d\sigma$ образует острый угол γ с положительным направлением оси Oz. Будем считать, что в пределах $d\sigma$ направление нормали $\vec{n}$ не меняется, т.е. $d\sigma$ будем рассматривать как часть касательной к поверхности S плоскости. Тогда по теореме о связи площадей фигур при ортогональном проектировании получим $dxdy = d\sigma \cos\gamma$.



Из теории поверхностей известно, что

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} .$$

Тогда

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

Интеграл по площади поверхности (1) в этом случае вычисляется сведением к двойному интегралу

$$\iint\limits_S F(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_D F(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy . \qquad (2)$$

Если поверхность S задана явным уравнением $y = y(x, z)$, то есть однозначно проектируется в область D_{xz} плоскости Oxz, то

$$\iint\limits_S F(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} F(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz . \qquad (2')$$

Если поверхность S задана явным уравнением $x = x(y, z)$, то есть однозначно проектируется в область D_{yz} плоскости Oyz, то

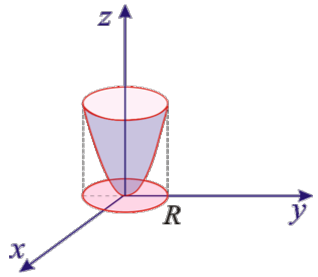
$$\iint\limits_S F(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} F(x(x, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\, dzdy . \qquad (2'')$$

Полезно иметь в виду выражения для элементов площадей некоторых поверхностей в криволинейных системах координат:

- элемент поверхности прямого кругового цилиндра $(r = r_0))$ в цилиндрической системе координат $d\sigma = r_0 d\varphi dz$;
- элемент поверхности прямого кругового конуса $\theta = \theta_0$ в сферической системе координат $d\sigma = \sin\theta_0 r dr d\varphi$;
- элемент сферической поверхности $d\sigma = r_0^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, где – r_0 радиус сферы.

Пример. Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

?



Решение. Здесь поверхность S задана уравнением $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, тогда $\partial z/\partial x = x,\ \partial z/\partial y = y$, элемент поверхности $d\sigma=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, а область D – круг радиусом R.

Вычислим площадь, переходя к полярным координатам на плоскости Oxy:

$$S=\iint\limits_S d\sigma=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{2\pi}{3}\left((1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)\ .$$

С помощью поверхностных интегралов первого рода вычисляют моменты инерции и координаты центра тяжести поверхности S с поверхностной плотностью $\delta=\delta(x,y,z)$:

$$I_x=S=\iint\limits_S(y^2+z^2)\delta(x,y,z)d\sigma\ ,\qquad I_y=S=\iint\limits_S(x^2+z^2)\delta(x,y,z)d\sigma\ ,\qquad I_z=S=\iint\limits_S(y^2+x^2)\delta(x,y,z)d\sigma\ , \tag{3}$$

$$I_xy=S=\iint\limits_S z^2\delta(x,y,z)d\sigma\ ,\qquad I_xz=S=\iint\limits_S y^2\delta(x,y,z)d\sigma\ ,\qquad I_yz=S=\iint\limits_S x^2\delta(x,y,z)d\sigma\ ,$$

$$I_0=S=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\delta(x,y,z)d\sigma\ ,$$

$$x_C=\frac{\iint\limits_S x\delta(x,y,z)d\sigma}{\iint\limits_S\delta(x,y,z)d\sigma}\ ,\qquad y_C=\frac{\iint\limits_S y\delta(x,y,z)d\sigma}{\iint\limits_S\delta(x,y,z)d\sigma}\ ,\qquad z_C=\frac{\iint\limits_S z\delta(x,y,z)d\sigma}{\iint\limits_S\delta(x,y,z)d\sigma}\ .$$

Пример. Вычислить координаты центра тяжести однородной полусферы радиуса R.

Решение. Уравнение поверхности S:$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ или в сферических координатах $r=R$.

Поверхностная плотность постоянна и равна δ, так как сфера однородна.

В силу симметрии поверхности

$$x_C=y_C=0\ ,$$

$$z_C=\frac{\iint\limits_S z d\sigma}{\iint\limits_S d\sigma}\ .$$

Вычислим интегралы, входящие в выражение для z_C:

$$S=\iint\limits_S d\sigma=\iint\limits_S R^2\sin\theta d\theta d\varphi=R^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=R^2\cdot 2\pi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}=2\pi R^2\ ,$$

$$\iint\limits_S z d\sigma=\iint\limits_S R\cos\theta\cdot R^2\sin\theta d\theta d\varphi=R^3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta=R^3\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi R^3\ .$$

Тогда $z_C=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$.

Координаты центра тяжести однородной полусферы $x_C=y_C=0,\ z_C=\frac{R}{2}$.

?

◄ Вопросы преподавателю

?