

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тульский государственный университет»

Интернет-институт

РАСЧЕТНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Математика»

Семестр 4

Вариант 3

Выполнил: студент гр. ИБ262521-ф

Артемов Александр Евгеньевич

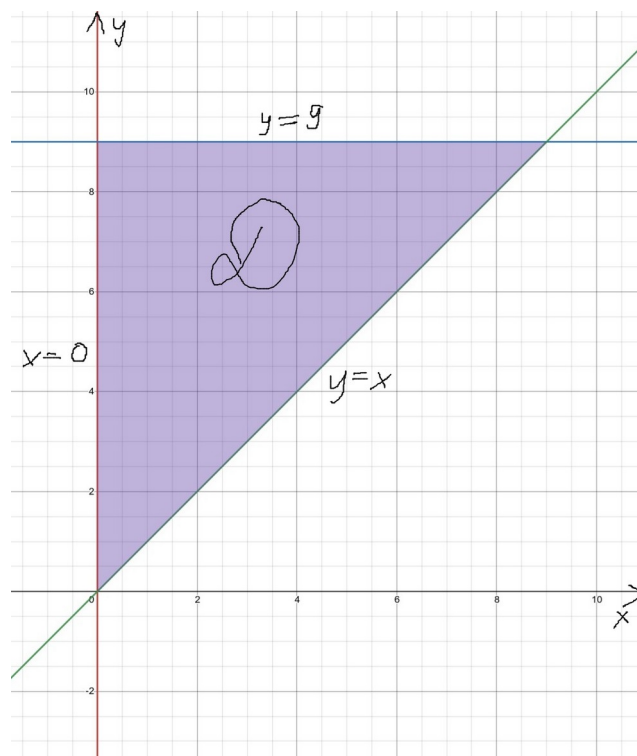
Проверил: канд. физ.-мат. наук, доц.

Христич Дмитрий Викторович

Тула 2024

1. Вычислить $\iint_D 10 y^2 \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx dy$, если D ограничена линиями: $x = 0$, $y = 9$, $y = x$.

Решение:



$$0 \leq y \leq 9, \quad 0 \leq x \leq y$$

$$\iint_D 10 y^2 \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx dy = \int_0^9 dy \int_0^y 10 y^2 \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx = \int_0^9 dy \int_0^y 10 y^2 \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx$$

Рассмотрим отдельно $\int_0^y 10 y^2 \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx$:

$$\int_0^y 10 y^2 \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx = 10 y^2 \int_0^y \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx = \left. \begin{array}{l} U = \frac{xy}{2} \\ x = \frac{2U}{y} \\ dx = \frac{2}{y} dU \end{array} \right| = 10 y^2 \int_0^y \cos U \frac{2}{y} dx = 20 y \int_0^y \cos U dx =$$

$$20 y \sin U = 20 y \sin \frac{xy}{2} \Big|_0^y = 20 y \sin \frac{y^2}{2}$$

Подставим результат в $\int_0^9 dy \int_0^y 10 y^2 \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx$:

$$\int_0^9 20 y \sin \frac{y^2}{2} dy = \left. \begin{array}{l} x = \frac{y^2}{2} \\ dx = y dy \end{array} \right| = 20 \int_0^9 \sin x dx = -20 \cos x = -20 \cos \frac{y^2}{2} \Big|_0^9 = -20 \cos \frac{81}{2} + 20 \approx 38,85$$

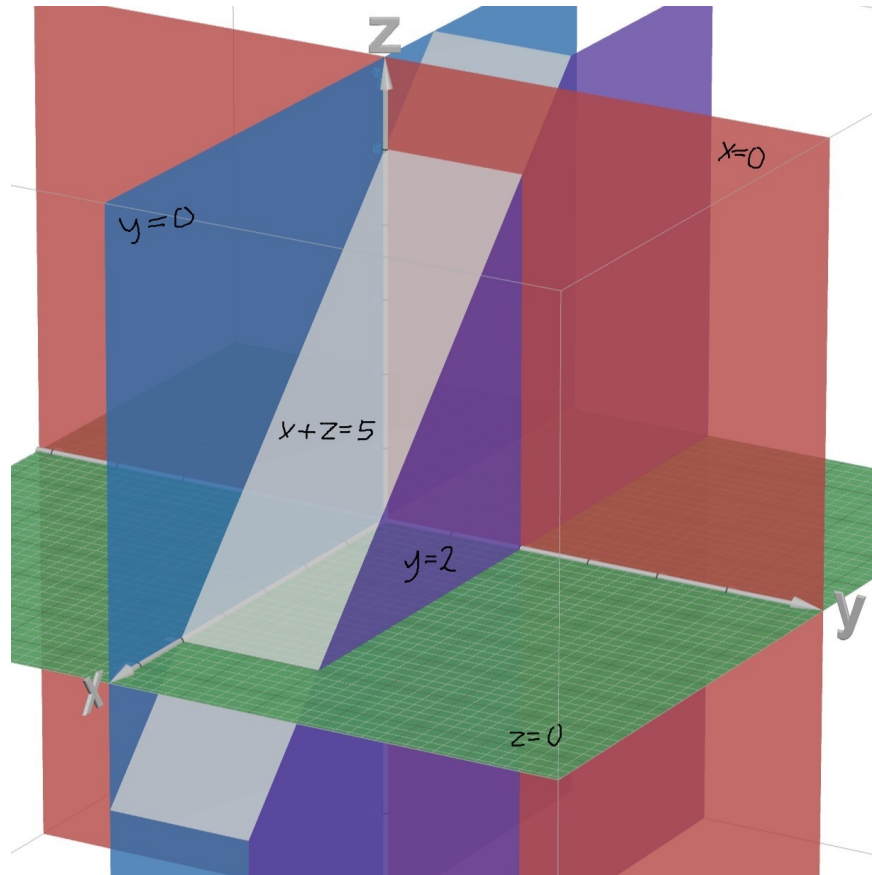
Ответ: 38,85.

2. Вычислить $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(6x+2y+5z+1)^3}$, если область интегрирования ограничена поверхностями

$$V : x=0, y=0, z=0, x+z=5, y=2.$$

Решение:

Рассмотрим эскиз:



Из эскиза видно, что $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, z=5-x$, откуда:

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(6x+2y+5z+1)^3} = \int_0^5 dx \int_0^2 dy \int_0^{5-x} \frac{dz}{(6x+2y+5z+1)^3}$$

Рассмотрим отдельно $\int_0^{5-x} \frac{dz}{(6x+2y+5z+1)^3}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{5-x} \frac{dz}{(6x+2y+5z+1)^3} &= \frac{1}{5} \int_0^{5-x} (6x+2y+5z+1)^{-3} d(5z) = -\frac{1}{10(6x+2y+5z+1)^2} \Big|_0^{5-x} = \\ &= \frac{1}{10(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{10(6x+2y+26)^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно $\int_0^2 \left(\frac{1}{10(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{10(6x+2y+26)^2} \right) dy$:

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{10(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{10(6x+2y+26)^2} \right) dy = \frac{1}{10} \int_0^2 \left(\frac{1}{(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{(6x+2y+26)^2} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{10} \int_0^2 \frac{dy}{(6x+2y+1)^2} - \frac{1}{10} \int_0^2 \frac{dy}{(6x+2y+26)^2} = \frac{1}{20(6x+2y+1)} \Big|_0^2 - \frac{1}{20(6x+2y+26)} \Big|_0^2 = \\
&= \frac{1}{20} \left(\frac{1}{6x+5} - \frac{1}{6x+1} - \frac{1}{x+30} + \frac{1}{x+26} \right)
\end{aligned}$$

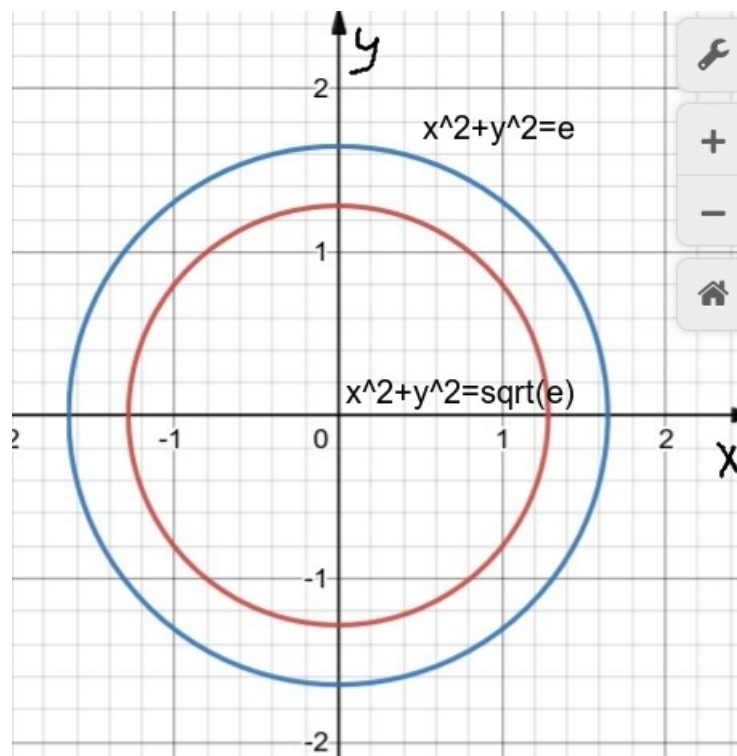
Рассмотрим отдельно $\int_0^5 \frac{1}{20} \left(\frac{1}{6x+5} - \frac{1}{6x+1} - \frac{1}{x+30} + \frac{1}{x+26} \right) dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^5 \frac{1}{20} \left(\frac{1}{6x+5} - \frac{1}{6x+1} - \frac{1}{x+30} + \frac{1}{x+26} \right) dx &= \frac{1}{20} \left(\frac{\ln|6x+5|}{6} - \frac{\ln|6x+1|}{6} - \ln|x+30| + \ln|x+26| \right) \Big|_0^5 = \\
&= \frac{1}{120} (\ln 35 - \ln 31 - 6 \ln 35 + 6 \ln 31 - \ln 5 + \ln 1 + 6 \ln 30 - 6 \ln 26) = -0,0113136
\end{aligned}$$

Ответ: -0,0113136.

3. Вычислить $\iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy$, если область D ограничена линиями $D: x^2+y^2 = \sqrt{e}, x^2+y^2 = e$.

Решение:



Перейдем к полярным координатам, выполним замену переменных:

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$$

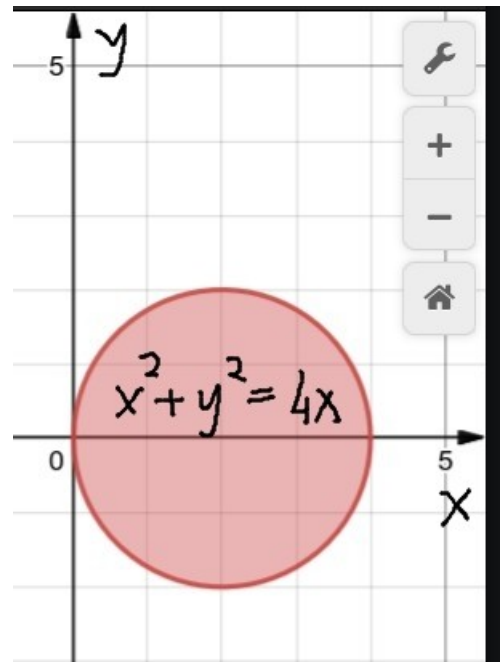
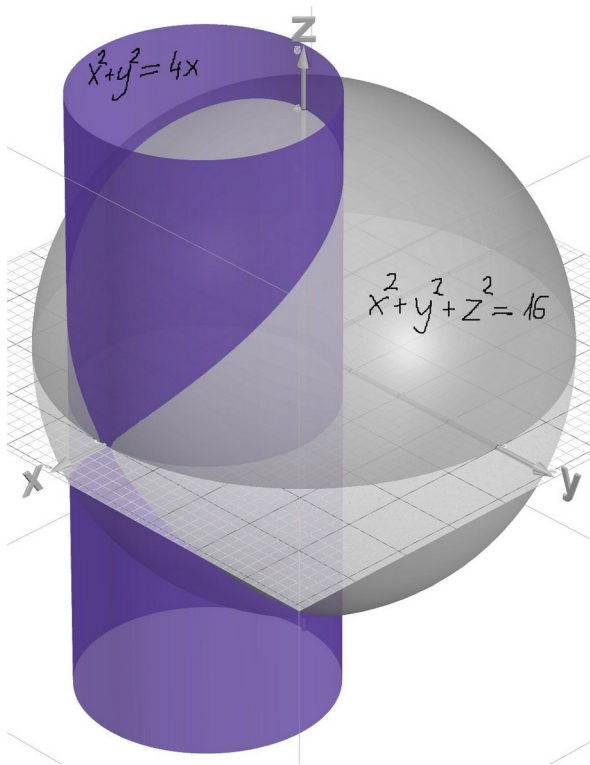
Заметим, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а $\sqrt[4]{e} \leq \rho \leq \sqrt{e}$.

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy &= \iint_D \ln \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} d\rho \int_0^{2\pi} \ln \rho^2 \cdot \rho d\varphi = \int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} d\rho [\ln \rho^2 \cdot \rho \cdot \varphi]_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi \int_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} \ln \rho^2 \cdot \rho d\rho = \left| \begin{array}{ll} u = \ln \rho^2 & dv = \rho d\rho \\ du = \frac{d\rho}{\rho} & v = \int \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \end{array} \right| = 2\pi \left(\rho^2 \ln \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\sqrt[4]{e}}^{\sqrt{e}} = \\ &= 2\pi \left(e \ln \sqrt{e} - \frac{e}{2} - \left(\sqrt{e} \ln \sqrt[4]{e} - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) \right) = 2\pi \left(\frac{e}{2} - \frac{e}{2} - \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{\sqrt{e}}{2} \right) = \frac{\pi \sqrt{e}}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi \sqrt{e}}{2}$

4. Вычислить объем V тела, ограниченного поверхностями $V: x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Решение:



$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow z^2 = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Объем тела вычисляется как $V_T = \iiint_V dx dy dz$.

Перейдем к цилиндрическим координатам, выполним замену переменных:

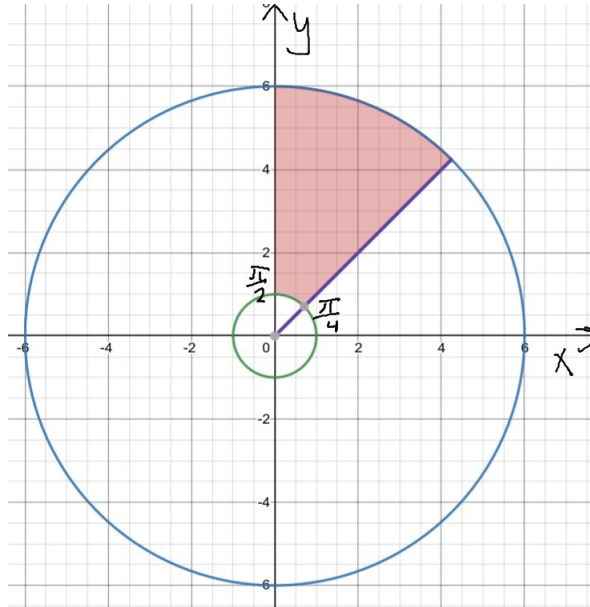
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi \\ z = \sqrt{16 - \rho^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_T &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} d\rho \int_{-\sqrt{16 - \rho^2}}^{\sqrt{16 - \rho^2}} \rho dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} 2\rho \sqrt{16 - \rho^2} d\rho = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{128}{3} (1 + \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{128\pi}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{128\pi}{3}$.

5. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V z^2 dx dy dz$; $V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq x, z \geq 0$.

Решение:



По условию задачи тело V не имеет ограничивающей поверхности сверху, поэтому границы интегрирования по dz не заданы.

Перейдем к цилиндрическим координатам, выполним замену переменных:

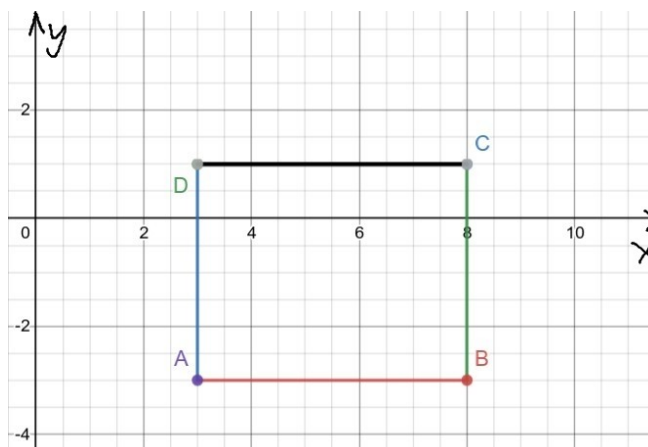
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 6 \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

$$\iiint_V z^2 dx dy dz = \int_1^6 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \rho z^2 dz = \int_1^6 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho z^3}{3} d\varphi = \int_1^6 \frac{\pi \rho z^3}{12} d\rho = \frac{\pi \rho^2 z^3}{24} \Big|_1^6 = \frac{35 \pi z^3}{24}$$

Ответ: $\frac{35 \pi z^3}{24}$

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y) = -2x - 3xy + 4y$ по контуру прямоугольника с вершинами $A(3, -3), B(8, -3), C(8, 1), D(3, 1)$.

Решение:



Перейдем к уравнениям сторон прямоугольника ABCD, заданных параметрически.

$$\begin{cases} x = a_2 t + a_1 \\ y = b_2 t + b_1 \end{cases}, \text{ где } a_1 \text{ и } b_1 - \text{координаты начальной точки стороны, а } a_2 \text{ и } b_2 - \text{расстояние до}$$

конечной точки по координатам x и y соответственно.

Криволинейный интеграл высчитывается по формуле:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \text{ где } \alpha \leq t \leq \beta$$

1. Рассмотрим сторону АВ:

Исходя из координат $A(3, -3), B(8, -3)$ получим $\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 0t - 3 \end{cases}$, где $0 \leq t \leq 1$.

$$f(x(t), y(t)) = f((5t+3), -3) = -2(5t+3) - 3(5t+3)(-3) + 4(-3) = 35t + 9$$

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_0^1 (35t + 9) \cdot \sqrt{(5)^2 + (0)^2} dt = 175 \int_0^1 t dt + 45 \int_0^1 dt = \left(\frac{175t^2}{2} + 45t \right) \Big|_0^1 = \frac{265}{2}.$$

2. Рассмотрим сторону ВС:

Исходя из координат $B(8, -3), C(8, 1)$ получим $\begin{cases} x = 0t + 8 \\ y = 4t - 3 \end{cases}$, где $0 \leq t \leq 1$.

$$f(x(t), y(t)) = f(8, (4t-3)) = -2 \cdot 8 - 3 \cdot 8(4t-3) + 4(4t-3) = -80t + 44$$

$$\int_{L_{BC}} f(x, y) dl = \int_0^1 (-80t + 44) \cdot \sqrt{(0)^2 + (4)^2} dt = -320 \int_0^1 t dt + 176 \int_0^1 dt = (-160t^2 + 176t) \Big|_0^1 = 16.$$

3. Рассмотрим сторону CD:

Исходя из координат $C(8, 1), D(3, 1)$ получим $\begin{cases} x = -5t + 8 \\ y = 0t + 1 \end{cases}$, где $0 \leq t \leq 1$.

$$f(x(t), y(t)) = f((-5t+8), 1) = -2(-5t+8) - 3(-5t+8) + 4 = 25t - 36$$

$$\int_{L_{CD}} f(x, y) dl = - \int_0^1 (25t - 36) \cdot \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} dt = -125 \int_0^1 t dt + 180 \int_0^1 dt = \left(-\frac{160t^2}{2} + 180t \right) \Big|_0^1 = \frac{235}{2} .$$

4. Рассмотрим сторону DA:

Исходя из координат $D(3, 1)$, $A(3, -3)$ получим $\begin{cases} x=0t+3 \\ y=-4t+1 \end{cases}$, где $0 \leq t \leq 1$.

$$f(x(t), y(t)) = f(3, (-4t+1)) = -2 \cdot 3 - 3 \cdot 3(-4t+1) + 4(-4t+1) = 20t - 5$$

$$\int_{L_{DA}} f(x, y) dl = \int_0^1 (20t - 5) \cdot \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} dt = 80 \int_0^1 t dt + 20 \int_0^1 dt = (40t^2 - 20t) \Big|_0^1 = 20 .$$

$$L_{ABCD} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = \frac{265}{2} + \frac{235}{2} + 16 + 20 = 286 .$$

Ответ: $L_{ABCD} = 286$

7. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_S (5x^2 + 5y^2 - 5z^2 - 2) d\sigma$, где S — часть конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, лежащая между плоскостями $z = 2, z = 7$.

Решение:

Для вычисления поверхностного интеграла используем формулу:

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_S f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

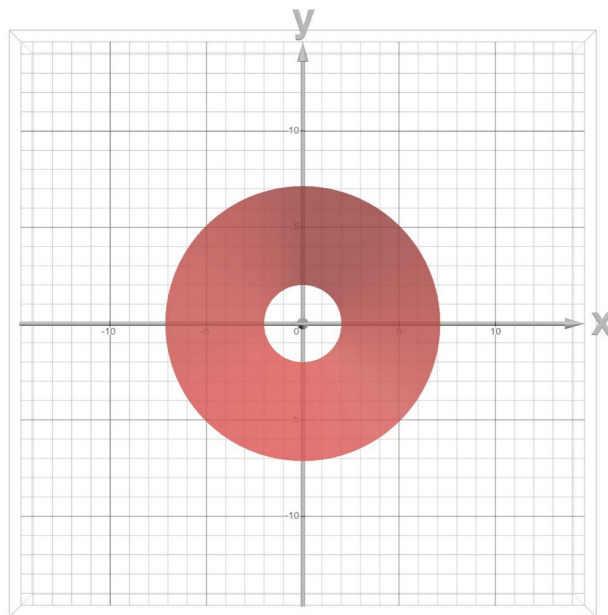
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\sqrt{x^2 + y^2})'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (\sqrt{x^2 + y^2})'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Заменим $d\sigma$ и z в изначальном поверхностном интеграле:

$$\iint_S (5x^2 + 5y^2 - 5z^2 - 2) d\sigma = \iint_S (5x^2 + 5y^2 - 5(\sqrt{x^2 + y^2})^2 - 2) \sqrt{2} dx dy = -2\sqrt{2} \iint_S dx dy.$$

Рассмотрим область D — проекцию поверхности S на плоскость Oxy в полярных координатах:



Очевидно, что радиус проекции изменяется от 2 до 7, а угол от 0 до 2π .

$$\begin{aligned} \iint_S (5x^2 + 5y^2 - 5z^2 - 2) d\sigma &= -2\sqrt{2} \iint_S dx dy = -2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^7 \rho d\rho = -2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{45}{2} d\varphi = \\ &= -2\sqrt{2} \frac{45}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = -90\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Ответ: $-90\sqrt{2}\pi$.

8. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u = \ln(9x^2 + 7y^2 + 6z^2)$ в точке $M_0(1; 5; 7)$.

Решение:

Наибольшая скорость возрастания скалярного поля $\max \frac{\delta u}{\delta \lambda} = |\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0)|$.

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = \left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left. \frac{\delta u}{\delta y} \right|_{M_0} \cdot \vec{j} + \left. \frac{\delta u}{\delta z} \right|_{M_0} \cdot \vec{k}$$

$$\left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_{M_0} = (\ln(9x^2 + 7y^2 + 6z^2))'_x = \frac{18x}{9x^2 + 7y^2 + 6z^2} = \frac{18 \cdot 1}{9 \cdot 1 + 7 \cdot 25 + 6 \cdot 49} = \frac{9}{239}.$$

$$\left. \frac{\delta u}{\delta y} \right|_{M_0} = (\ln(9x^2 + 7y^2 + 6z^2))'_y = \frac{14y}{9x^2 + 7y^2 + 6z^2} = \frac{14 \cdot 5}{9 \cdot 1 + 7 \cdot 25 + 6 \cdot 49} = \frac{35}{239}.$$

$$\left. \frac{\delta u}{\delta z} \right|_{M_0} = (\ln(9x^2 + 7y^2 + 6z^2))'_z = \frac{16z}{9x^2 + 7y^2 + 6z^2} = \frac{16 \cdot 7}{9 \cdot 1 + 7 \cdot 25 + 6 \cdot 49} = \frac{56}{239}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = \left\{ \frac{9}{239}, \frac{35}{239}, \frac{56}{239} \right\}$$

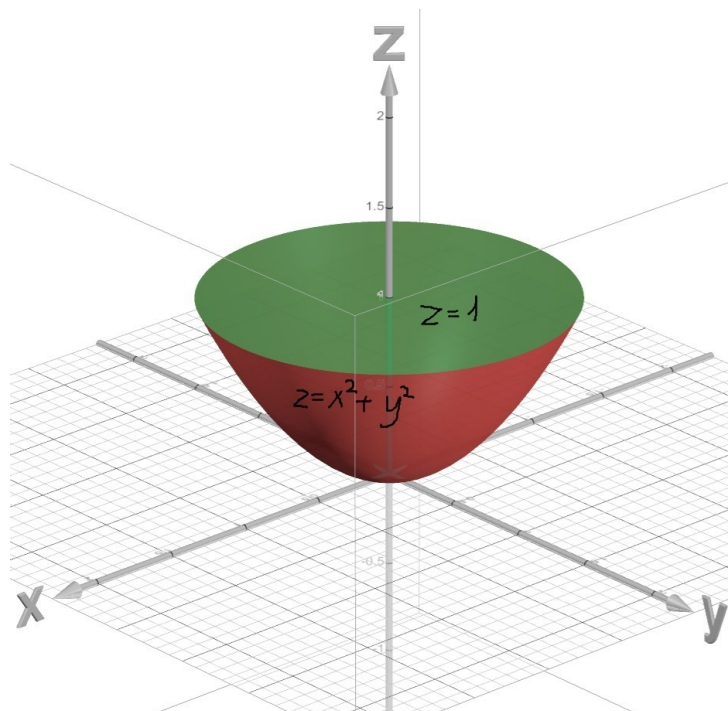
$$|\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{9}{239}\right)^2 + \left(\frac{35}{239}\right)^2 + \left(\frac{56}{239}\right)^2} = \frac{\sqrt{4442}}{239}$$

$$\text{Значит, } \max \frac{\delta u}{\delta \lambda} = \frac{\sqrt{4442}}{239}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{4442}}{239}.$$

9. Найти поток векторного поля $\vec{a} = 7xy\vec{i} + 5yz\vec{j} + 8xz\vec{k}$ через замкнутую поверхность S : $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ в направлении внешней нормали.

Решение:



Представим поле как $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = (7xy, 5yz, 8xz)$.

Дивергенция поля $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 7x + 5z + 8x$.

Поток векторного поля $\Pi = \iint_S \vec{a} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iiint_V (7y + 5z + 8x) dV$

Перейдем к цилиндрическим координатам, выполним замену переменных:

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dV = \rho d\rho d\varphi dz \\ z = x^2 + y^2 = \rho^2 \\ 7y + 5z + 8x = 7\rho \sin \varphi + 5z + 8\rho \cos \varphi \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V (7y + 5z + 8x) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 (7\rho \sin \varphi + 5z + 8\rho \cos \varphi) \rho dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(7\rho^2 \sin \varphi + \frac{5\rho}{2} + 8\rho^2 \cos \varphi - 7\rho^4 \sin \varphi - \frac{5\rho^5}{2} - 8\rho^4 \cos \varphi \right) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{14}{15} \sin \varphi + \frac{5}{6} + \frac{16}{15} \cos \varphi \right) d\varphi = \left(-\frac{14}{15} \cos \varphi + \frac{5\varphi}{6} + \frac{16}{15} \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{3}$.

10. Найти ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{a} = -2(z^2 + y^2)\vec{i} - (z^2 + x^2)\vec{j} - 5(x^2 + y^2)\vec{k}$ в точке $M_0(-2; -4; 5)$. Является ли данное поле потенциальным или соленоидальным?

Решение:

Представим поле как $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = (-2(z^2 + y^2), -(z^2 + x^2), -5(x^2 + y^2))$.

Дивергенция поля $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$, $\operatorname{div} \vec{a}_{M_0} = 0$ - поле соленоидальное.

Ротор поля $\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} =$
 $= (-10y + 2z)\vec{i} + (-4z + 10x)\vec{j} + (-2x + 4y)\vec{k}$.

В точке $M_0(-2; -4; 5)$ $\operatorname{rot} \vec{a}_{M_0} = (-10(-4) + 2 \cdot 5)\vec{i} + (-4 \cdot 5 + 10(-2))\vec{j} + (-2(-2) + 4(-4))\vec{k} =$
 $= -30\vec{i} - 40\vec{j} - 12\vec{k} \neq 0$ - поле не является потенциальным.

Ответ: Ротор поля $\operatorname{rot} \vec{a} = -30\vec{i} - 40\vec{j} - 12\vec{k} \neq 0$ - поле не является потенциальным; дивергенция поля $\operatorname{div} \vec{a}_{M_0} = 0$ - поле соленоидальное.

11. Из колоды в 36 карт вынимают по одной три карты. Найти вероятность того, что в порядке появления в руках окажутся: шестерка, семерка, восьмерка.

Решение:

Вероятность, что 1-ая вынутая карта — шестерка: $P_{ш} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, где 4 — количество шестерок в колоде, а 36 — количество карт всего.

Вероятность, что 2-ая вынутая карта — семерка: $P_{с} = \frac{4}{35}$, где 4 — количество семерок в колоде, а 35 — количество карт после извлечения шестерки.

Вероятность, что 3-ья вынутая карта — восьмерка: $P_{в} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$, где 4 — количество семерок в колоде, а 34 — количество карт после извлечения шестерки и семерки.

Итого, вероятность предложенной ситуации $P = P_{ш} \cdot P_{с} \cdot P_{в} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{35} \cdot \frac{2}{17} = \frac{8}{5355}$.

Ответ: $\frac{8}{5355}$.

12. В цехе работают 15 человек, из которых 10 мужчин. По табельным номерам наудачу отобраны 9 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

Решение:

Найдем количество сочетаний выборки 9 человек из 15:

$$C_{15}^9 = \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 5005$$

Найдем количество сочетаний выборки 3 женщин из 5:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Найдем количество сочетаний выборки 6 мужчин из 10:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

Вероятность нахождения 3 женщин среди 9 отобранных составит:

$$P = \frac{10 \cdot 210}{5005} \approx 0,4196$$

Ответ: $\approx 0,4196$

13. Заготовки на сборку поступают из двух бункеров: 70% из первого и 30% из второго. При этом заготовки первого бункера имеют плюсовые допуски в 1 % случаев, а у второго – в 2 %. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь имеет плюсовой допуск.

Решение:

Вероятность взять деталь из 1-го бункера $P_1 = 0,7$.

Вероятность взять деталь из 1-го бункера с плюсовым допуском $P_1^+ = 0,01$.

Вероятность взять деталь из 2-го бункера $P_2 = 0,3$.

Вероятность взять деталь из 2-го бункера с плюсовым допуском $P_2^+ = 0,02$.

Вероятность взять случайную деталь с плюсовым допуском:

$$P = P_1 \cdot P_1^+ + P_2 \cdot P_2^+ = 0,7 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 = 0,013 \text{ .}$$

Ответ: 0,013.

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут не менее 5 попаданий?

Решение:

Используем формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для расчета вероятности пяти, шести, семи или восьми попаданий, где n - количество повторных событий, k - количество успешных событий, p - вероятность успешного события, $q = 1 - p$ - вероятность не успешного события.

Вероятность пяти попаданий, где $n=8, k=5, p=0.6, q=0.4$

$$P_8(5) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^3 \approx 0,2787$$

Вероятность шести попаданий, где $n=8, k=6, p=0.6, q=0.4$

$$P_8(6) = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot 0,6^6 \cdot 0,4^2 \approx 0,2090$$

Вероятность семи попаданий, где $n=8, k=7, p=0.6, q=0.4$

$$P_8(7) = \frac{8!}{7! \cdot 1!} \cdot 0,6^7 \cdot 0,4 \approx 0,0896$$

Вероятность восьми попаданий, где $n=8, k=8, p=0.6, q=0.4$

$$P_8(8) = \frac{8!}{8! \cdot 0!} \cdot 0,6^8 \cdot 0,4^0 \approx 0,0168$$

Так как события несовместные, искомая вероятность может быть найдена по формуле сложения вероятностей пяти, шести, семи и восьми попаданий:

$$P = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = 0,2787 + 0,2090 + 0,0896 + 0,0168 = 0,5941$$

Ответ: 0,5941

15. Дано следующее распределение дискретной случайной величины X:

X	-1	1	3	4	10
P	0,1	0,3	0,3	0,14	0,1

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение:

1. Математическое ожидание $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

$$M(X) = (-1) \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,14 + 10 \cdot 0,16 = 3,26$$

2. Дисперсия $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i = (-1)^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,14 + 10^2 \cdot 0,16 = 21,34$$

$$D(X) = 21,34 - (3,26)^2 = 10,7124$$

2. Среднее квадратичное отклонение $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{10,7124} \approx 3,273$

Ответ: $M(X) = 3,26$, $D(X) = 10,7124$, $\sigma_x \approx 3,273$