Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тульский государственный университет»

Интернет-институт ТулГУ

Кафедра ИБ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Модели и методы анализа проектных решений 1»

на тему

«Модели пневматических систем на микроуровне»

Вариант 3

Выполнил

студент группы ИБ262521-ф
Артемов Александр Евгеньевич

Проверила

канд. техн. наук, доц.
Французова Юлия Вячеславовна

Тула 2025

Содержание

Задание на работу

1. Составить реферат на тему «Модели пневматических систем на микроуровне».
2. Оформить КР и сдать преподавателю.

Введение

Микроуровень – это нижний иерархический уровень декомпозиции объектов проектирования по степени абстрагирования при составлении математического описания.

На этом уровне осуществляется детальное описание физических свойств технического объекта. Объекты рассматриваются как сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделяемые в трехмерном геометрическом пространстве. Такие объекты представляют собой динамические системы с распределенными параметрами. Их также называют непрерывными системами. Функционирование этих систем описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Объекты проектирования на микроуровне

Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств технического объекта с распределенными параметрами:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0 \quad (1)$$

или в компактной форме: $L_\varphi(\vec{Z}) = \theta(\vec{Z})$ (2), где

L – дифференциальный оператор;

φ – искомая функция (фазовая координата);

x_i – пространственные координаты;

n – количество пространственных координат;

t – время;

$\vec{Z}$ – вектор независимых переменных;

$\theta(\vec{Z})$ – известная функция независимых координат.

Независимыми переменными в этих моделях являются пространственные координаты $x_i, i = \overline{1,n}$, и время t. Фазовая координата – функция независимых переменных.

Размерность задачи определяется числом пространственных координат n:

при $n = 1$ – объект одномерный;

при $n = 2$ – двумерный;

при $n = 3$ – трехмерный.

Если уравнение содержит одну фазовую переменную, система описывается одним уравнением вида 1, если несколько фазовых переменных, т.е. вектор $\vec{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, то системой уравнений.

Если фазовые переменные не являются явными функциями времени, задачу анализа объекта называют стационарной, в противном случае – нестационарной. Стационарная задача характеризует статическое состояние технического объекта. Динамические режимы. функционирования объекта относятся к нестационарным задачам и для их оценки требуются исследования переходных процессов.

Уравнение 1 имеет множество решений. Для получения единственного решения необходимо задать краевые условия. Краевые условия включают граничные и начальные условия.

Граничные условия – это сведения об искомых непрерывных функциях φ и (или) их производных на границе S области определения объекта Ω, характеризующие условия взаимодействия с окружающей внешней средой.

Начальные условия – это значения этих же функций во всей области определения в начальный момент времени.

Начальные условия задаются только при решении нестационарных задач (при исследовании переходных процессов).

Исходное дифференциальное уравнение в частных производных 1 вместе с краевыми условиями носит название дифференциальной краевой задачи и представляет собой математическую модель технического объекта с распределенными параметрами.

Существует несколько стандартных способов задания граничных условий. Для теплового объекта, представляющего собой твердое гомогенное (однородное) тело, используют граничные условия первого, второго и третьего родов.

Граничные условия первого рода – условия, которые задают на границе S области определения объекта Ω значений φ_s искомой функции фазовой переменной φ.

Граничные условия второго рода – условия, которые задают на границе значения частных производных искомой функции по пространственным координатам.

Граничные условия третьего рода условия, которые задают уравнения баланса потоков, характеризующих обмен энергией объекта с окружающей внешней средой.

В некоторых случаях, например для гетерогенных (неоднородных по составу материала) тепловых объектов, могут быть и иные граничные условия.

Состояние объекта характеризуется изменением во времени фазовых координат, определяемых в различных его точках. Задача анализа процесса функционирования технического объекта на микроуровне заключается в определении функций фазовых координат для множества точек, выделенных в области определения объекта.

Объекты с распределенными параметрами могут быть различной физической природы: механические, гидравлические, тепловые, электрические, магнитные и др.

Механические объекты представляют собой элементы и базовые детали машин и механизмов: корпуса, рамы, панели, валы, крылья самолетов, лопасти турбин и др. При анализе механических объектов находят деформации и напряжения. Они определяют несущую способность конструктивных элементов, надежность и нормальные условия функционирования базирующихся на них других элементов объекта.

При проектировании многих технических объектов возникает необходимость анализа теплонапряженности деталей, выбора оптимальных размеров и конфигурации теплообменников и решения многих других задач теплопередачи. В тепловых объектах определению подлежат температурные поля и термические напряжения.

При анализе гидравлических и пневматических систем определяют режимы течения сплошных потоков жидкостей и газов, характеризуемые скоростями и давлениями.

Обычно в исходные уравнения 1 входят не все фазовые координаты, характеризующие процессы функционирования технического объекта, а только базисные, например деформации – в модели механической системы, температуры – в тепловой системе и т.д. Остальные фазовые координаты (например, напряжения в упомянутых системах) определяют через базисные координаты на основе уравнений, устанавливающих между ними соответствующие соотношения.

Модели гидравлических и пневматических систем на микроуровне

В технических системах широкое применение находят гидравлические и пневматические приводы. При большой длине гидравлических или пневматических магистралей в них возникают волновые процессы, исследование которых возможно на основе непрерывных моделей, использующих дифференциальные уравнения в частных производных.

Основные физические свойства жидкостей и газов – текучесть, сжимаемость и непрерывность потока. Текучесть оценивается вязкостью, сжимаемость – модулем объемной упругости.

Все применяемые на практике жидкости и газы представляют собой обычные ньютоновские вязкие среды. В такой среде при взаимных перемещениях ее элементов возникают силы внутреннего трения. Напряжения трения в ньютоновской жидкости пропорциональны относительным скоростям, или скоростям сдвига.

Жидкости обычно имеют сравнительно большую вязкость и слабую сжимаемость. Газы, наоборот, отличаются малой вязкостью и высокой сжимаемостью. Тем не менее математическое описание физических свойств жидкостей и газов на микроуровне можно выполнить на основе одних и тех же законов. Поэтому в дальнейшем будем говорить о жидкостной сплошной среде.

Движение жидкости в трубопроводе обычно рассматривают как одномерный сплошной поток. При этом положение поперечного сечения потока относительно начала отсчета геометрической координаты, выбираемого на левой граничной поверхности трубопровода, определяется одной координатой x. Значение x не зависит от кривизны осевой линии трубопровода, а равно ее длине от начала отсчета до рассматриваемого сечения.

Для описания движения жидкости используют закон сохранения массы и закон сохранения количества движения.

Закон сохранения массы выражает свойство непрерывности потока жидкости в трубопроводе и записывается в виде $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$ (1).

Уравнение Навье – Стокса в одномерном случае, выражающее закон сохранения количества движения элементарной массы имеет вид $\frac{\partial v}{\partial t} = G_M - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ (2).

При анализе движения жидкости в трубопроводе обычно массовыми силами пренебрегают. Тогда $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ (3).

Находит применение также приближенная форма уравнения Навье – Стокса: $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2\xi}{\rho}v$ (4), где ξ – коэффициент линеаризованного вязкого трения в трубопроводе.

Иногда при исследованиях пренебрегают вязкостью жидкости. Принимая $\eta = 0$ в выражении (3), получаем уравнение Эйлера для одномерного потока в трубопроводе постоянного сечения: $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ (5).

Уравнение Эйлера учитывает лишь инерционные свойства потока, а уравнение Навье–Стокса – инерционные и диссипативные (рассеивание энергии) свойства.

Уравнения (1) и (3) сведем в единую систему: $\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases}$ (6).

Уравнения (6) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями: скорости v, давления p и плотности ρ. Чтобы сделать систему определенной, необходимо в нее добавить уравнение связи между p и ρ.

Будем предполагать, что поток жидкости изолирован от притока тепла извне. Такой процесс движения жидкости называют адиабатическим. Характерная его особенность – постоянство энтропии. Следовательно, адиабатический процесс является изоэнтропическим.

Для газа в рассматриваемом случае плотность можно выразить через давление на основании уравнения состояния: $\frac{p}{\rho} = RT = \frac{k-1}{k}h$ (7), где R – газовая постоянная; T – температура; k – показатель адиабаты: $k = \frac{C_P}{C_V}$; C_P и C_V – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно; $h = C_P T$ – энтальпия.

В пневматических приводах большинства технических объектов в качестве рабочего тела используют воздух. Параметры воздуха при $T = 273{,}15$ К и $p_0 = 1$ Па: $\rho = 1{,}293$ кг/м^3; $C_P = 1{,}006 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); $C_V = 0{,}718 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); показатель адиабаты $k = 1{,}405$.

Следует также учитывать зависимость динамической вязкости от температуры. Обычно используют степенную зависимость вида $\eta = \eta_0 \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^n$ (8).

Показатель степени *n* для воздуха при температуре *90…300* К равен (-0,889), а при температуре *300…400* К *n = -0,75*, $\eta_0 = 18{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Зависимость плотности от давления для жидкостей представляется следующим обобщенным уравнением изоэнтропы $\frac{(p+B)}{\rho^n} = const$ (9).

При проектировании машиностроительных гидроприводов часто принимают линейную аппроксимацию зависимости изменения давления от относительного изменения объема жидкости при ее сжатии. Эта зависимость устанавливается законом Гука и в одномерном случае имеет вид $\frac{\partial p}{\partial t} = -E\frac{\partial v}{\partial x}$ (10), где *E* – модуль объемной упругости жидкости, который при адиабатическом процессе определяется выражением $E_a = \frac{V\,dp}{dV}$; *V* – объем жидкости.

Учитывая слабую сжимаемость рабочих жидкостей гидроприводов, полагают и для анализа полей скоростей и давлений в трубопроводе используют систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -E\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases} \quad (11).$$

Значение модуля объемной упругости зависит от типа жидкости, давления, температуры, скорости деформации и характера термодинамического процесса. Наибольшее влияние на него оказывает давление, поэтому для минеральных масел обычно используют линеаризованную зависимость $E_a = E_{a_0} + A_a p$.

Коэффициент пропорциональности A_a зависит от типа жидкости и ее температуры. Так, для жидкости АМГ-10 при *T = 293* К $E_{a_0} = 1{,}68 \cdot 10^3$ МПа; $A_a = 12{,}75$.

Реальная жидкость в гидроприводах обычно представляет собой двухфазную газожидкостную смесь. Воздух в этой смеси может находиться в растворенном и нерастворенном состоянии. Растворенный воздух практически не влияет на свойства рабочих жидкостей. Нерастворенный воздух содержится в жидкости в виде пузырьков. Вследствие значительно большей сжимаемости воздуха по сравнению со сжимаемостью жидкости модуль объемной упругости газожидкостной двухфазной смеси уменьшается, причем это уменьшение является существенным при малых давлениях.

Для определения модуля объемной упругости газожидкостной смеси E_c используется приближенное выражение $$E_c = \frac{\varepsilon_B\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}+\left(1-\varepsilon_B\right)A_a\sqrt{\frac{E_{a_0}+A_a p_0}{E_{a_0}+A_a p}}}{\frac{\varepsilon_B}{kp}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}+\frac{1-\varepsilon_B}{E_{a_0}+A_a p}} \quad (12),$$

где ε_B – относительный объем газовой фазы в смеси; k – показатель адиабаты сжатия воздуха; p_0 – давление, при котором определен модуль объемной упругости E_{a_0} (обычно принимают избыточное давление $p_0 = 0$).

Для минеральных масел, используемых в машиностроительных гидроприводах, параметры находятся в следующих пределах: $E_{a_0} = (1,35\ldots1,92)\cdot10^3$ МПа; $A_a = 12\ldots13$; $\varepsilon_B = 0,005\ldots0,06$; $k = 1,4$.

Распределенные модели используются при анализе высокочастотных колебаний в системах гидравлических и пневматических приводов. Для решения систем уравнений (6) и (11) необходимо задать краевые условия. Обычно принимают граничные условия первого рода и задают функции давлений и скоростей на левой и правой границах участка трубопровода:

$\begin{cases} p = \varphi_1(t) \\ v = \varphi_2(t) \end{cases}$ (13) при $x = 0$ и $x = L$, где L – длина участка трубопровода.

Начальными условиями являются значения этих же функций в начальный момент времени $t_0 = 0$ всех контролируемых точках трубопровода. Если функции (13) не зависят от времени, процесс движения жидкости в трубопроводе будет стационарным. Его характеристики зависят только от граничных условий. Начальные условия задаются для исследования нестационарных (переходных) процессов, обусловленных переменными внешними воздействиями, определяемыми функциями (13).

Заключение

Моделирование гидравлических и пневматических систем на микроуровне играет ключевую роль в разработке и оптимизации сложных технических устройств. На этом уровне рассматриваются отдельные компоненты, такие как микроклапаны, микронасосы, капиллярные каналы и другие элементы, которые обеспечивают передачу и управление жидкостями или газами в микросистемах. Эти модели позволяют детально изучить поведение потоков, давление, скорость и другие параметры, что особенно важно для миниатюрных устройств, где даже незначительные изменения могут существенно повлиять на производительность.

Особенностью моделирования на микроуровне является необходимость учёта эффектов, которые на макроуровне часто игнорируются. Например, в микрогидравлических системах значительное влияние оказывают капиллярные силы, вязкость жидкости и поверхностное натяжение. В микропневматических системах важно учитывать сжимаемость газа и тепловые эффекты. Для точного описания этих процессов используются сложные математические модели, включающие уравнения Навье-Стокса, уравнения состояния газа и другие физические законы.

Модели гидравлических и пневматических систем на микроуровне находят применение в различных областях, таких как микроэлектромеханические системы (MEMS), биомедицинские устройства, микрофлюидика и робототехника. Они позволяют проектировать высокоэффективные и компактные устройства, такие как микрожидкостные чипы для анализа ДНК, миниатюрные насосы для доставки лекарств или пневматические приводы для микророботов. Таким образом, моделирование на микроуровне является важным инструментом для создания инновационных технологий, которые становятся основой для развития науки и техники.

Список источников

1. Математические модели технических систем на макроуровне https://tulsu.ru/sdoii/pluginfile.php/277479/mod_resource/content/1/lex/lex_6/lex_6_4.html
2. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов. Минск: Издательство «Дизайн ПРО», 2004. — 640 с.
3. Гаибова Т.В. Системное моделирование. В 3 ч. ч 1: учебное пособие /Т.В. Гаибова, В.В. Тугов, Н.А. Шумилина. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. - 116 с.