3. Криволинейные интегралы

3.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Пусть кривая L задана уравнением в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$. Если точке M кривой L соответствует значение параметра $t = \alpha$, а точке N соответствует значение $t = \beta$, то от криволинейного интеграла (3) можно перейти к определенному интегралу:

$$\int\limits_{MN} F_x dx + F_y dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [F_x(t)x'(t) + F_y(t)y'(t)]dt \ .$$

Если в качестве параметра t взять координату x, т.е. положить $x = t$, $y = y(x)$, $dy = y'(x)dx$, то

$$\int\limits_{MN} F_x dx + F_y dy = \int\limits_{x_M}^{x_N} [F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x)]dx \ .$$

Если в качестве параметра t принять координату y, т.е. положить $y = t$, $x = x(y)$, $dx = x'(y)dy$, то

$$\int\limits_{MN} F_x dx + F_y dy = \int\limits_{y_M}^{y_N} [F_x(x(y), y)x'(y) + F_y(x(y), y)]dy \ .$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L xydx + (x+y)dy$, где L – четверть окружности $x = R\cos t$ $y = R\sin t$ от $t = 0$ до $t = \dfrac{\pi}{2}$.

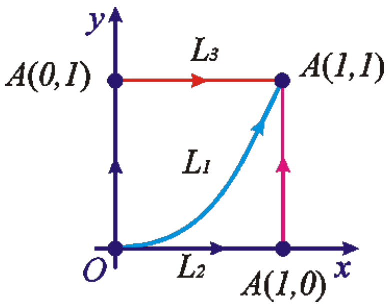
Решение. Найдем $dx = -R\sin tdt, \ dy = R\cos tdt$, тогда

$$\int\limits_L xydx + (x+y)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(-R^3)\cos t\sin^2 t + R^2(\cos t + \sin t)\cos t\right] dt =$$

$$= -R^3 \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + R^2\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + R^2\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{R^3}{3} + \frac{\pi R^2}{4} + \frac{R^2}{2} \ .$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L xydx + (x+y)dy$, где

1. линия L – парабола $y = x^2$от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$;
2. линия L – двухзвенная ломаная, стороны которой параллельны осям координат.



Решение.

Случай (1): $y = x^2$, $dy = 2xdx, \ x_O = 0, \ x_A = 1$;

$$\int\limits_{L_1} xydx + (x+y)dy = \int\limits_0^1 (x^3 + (x + x^2)\cdot 2x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{17}{12} \ .$$

Случай (2): $\int\limits_{L_2} xydx + (x+y)dy = \int\limits_{OA_1} xydx + (x+y)dy + \int\limits_{A_1A} xydx + (x+y)dy;$

на отрезке OA_1: $y = 0$; $dy = 0$, $x_O = 0$, $x_{A_1} = 0$,

?

$$\int_{OA_1} xydx + (x+y)dy = 0 ;$$

на отрезке A_1A: $x = 1$, $dx = 0$, $y_{A_1} = 0$, $y_A = 1$,

$$\int_{A_1A} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 (1+y)dy = \left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} ,$$

тогда $\int_{L_2} xydx + (x+y)dy = \frac{3}{2}$.

Случай (3): $\int_{L_3} xydx + (x+y)dy = \int_{OA_2} xydx + (x+y)dy + \int_{A_2A} xydx + (x+y)dy;$

на отрезке OA_2: $x = 0$; $dx = 0$, $y_O = 0$, $y_{A_2} = 1$,

$$\int_{OA_2} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 ydy = \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} ;$$

на отрезке A_2A: $y = 1$, $dy = 0$, $x_{A_2} = 0$, $x_A = 1$,

$$\int_{A_2A} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} ;$$

тогда $\int_{L_3} xydx + (x+y)dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

С помощью криволинейного интеграла второго рода можно вычислить площадь, ограниченную замкнутой линией L по формуле: $S = \oint_L xdy - ydx$.

Пример. Вычислить площадь эллипса, заданного уравнениями в параметрической форме: $x = a\,\cos t$, $y = b\,\sin t$.

Решение.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\,\cos t \cdot b\,\cos t - b\,\sin t(-a\,\sin t)]\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} \left(cos^2 t + \sin^2 t\right)\,dt = \frac{ab}{2}t\Bigg|_0^{2\pi} = \pi\,ab\,.$$

◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►

?