Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тульский государственный университет»

Интернет-институт ТулГУ

Кафедра ИБ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Модели и методы анализа проектных решений 2»

на тему

«Компонентные и топологические уравнения механической системы»

Вариант 3

Выполнил

студент группы ИБ262521-ф

Артемов Александр Евгеньевич

Проверила

канд. техн. наук, доц.

Французова Юлия Вячеславовна

Тула 2025

Содержание

Задание на работу

1. Составить реферат на тему «Компонентные и топологические уравнения механической системы».
2. Оформить КР и сдать преподавателю.

Введение

На макроуровне осуществляют проектирование различных машин и механизмов. Объекты проектирования рассматриваются как сложные технические системы, состоящие из совокупности взаимодействующих элементов. Таким образом, в отличие от микроуровня, где объектами проектирования были детали машин (валы, корпуса, панели и т.п.), на макроуровне объект имеет сложную неоднородную структуру, состоящую из элементов – объектов проектирования микроуровня.

На микроуровне использовались математические модели, представляемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Эти модели универсальны, дают наиболее полное описание физических свойств и позволяют решать любые задачи анализа технического объекта. Однако они чрезвычайно сложны даже для отдельного элемента машины или механизма и требуют значительных затрат времени на проведение анализа. Если рассматривать каждый элемент объекта макроуровня как сплошную среду, т.е. как динамическую систему с распределенными параметрами, то это сделает практически нереальным решение задач оптимизации структуры и параметров объекта.

Вместе с тем многие задачи проектирования успешно решаются с использованием более простых математических моделей. Эти модели можно получить путем аппроксимации распределенных моделей микроуровня на основе соответствующих допущений относительно представления структуры и физических свойств объекта. При этом динамическая система с распределенными параметрами путем дискретизации в пространственных координатах представляется совокупностью материальных объектов, выделенных из сплошной среды, – дискретных элементов с постоянными усредненными параметрами. Такую систему называют динамической системой с сосредоточенными параметрами.

Дискретный элемент в общем случае обладает инерционными, упругими и диссипативными свойствами (внутренние свойства системы). Различают простые и сложные элементы. Простой элемент наделен только одним из упомянутых физических свойств, а сложный – более чем одним.

Основанием для дискретизации является наличие выраженного дискретного спектра собственных частот колебаний системы в ограниченном диапазоне (например, для механических систем – до 300 Гц). Дискретные системы оказываются вполне пригодными для анализа колебательных процессов в этом диапазоне частот.

Таким образом, объекты проектирования на макроуровне рассматриваются как системы, состоящие из совокупности взаимодействующих дискретных элементов. Задача проектирования таких объектов состоит в определении оптимальных параметров и структуры исходя из заданного описания внешней среды и технических требований к объекту.

Динамическая модель технического объекта на макроуровне

Построение математической модели технического объекта осуществляется на основе его динамической модели.

Динамическая модель – это абстрактное графическое отображение основных физических свойств технического объекта и характеристик взаимодействия с внешней средой.

При построении динамической модели следует принимать во внимание лишь те физические свойства объекта и воздействия внешней среды, которые могут оказать существенное влияние на точность результатов исследования моделируемого процесса функционирования объекта. Такой подход позволит избежать необоснованной избыточности в его математическом описании. Но при этом должна быть обеспечена адекватность математической модели.

На этапе построения математической модели микроуровня в инвариантной форме динамическая модель объекта проста. Она представляет собой графическое изображение области определения объекта Ω соответствующей конфигурации, определяемой граничной поверхностью S, посредством которой осуществляется взаимодействие объекта с внешней средой. Во многих случаях достаточно вербального описания динамической модели. Необходимость построения динамической модели микроуровня возникает лишь при разработке алгоритмической модели.

При построении математической модели макроуровня в инвариантной форме почти всегда необходима разработка динамической модели. Это объясняется тем, что структура динамической модели макроуровня гораздо сложнее. Она представляется в виде совокупности взаимодействующих дискретных элементов и ее сложность зависит от степени абстрагирования при отображении физических свойств объекта.

На макроуровне для выделения дискретных элементов из сплошной среды используют различные методы: сеток, функционально законченных элементов и сосредоточенных масс.

Методы сеток подразделяют на метод конечных разностей и метод конечных элементов. Они обычно используются при построении алгоритмической модели на микроуровне в процессе алгебраизации дифференциальных уравнений в частных производных, но могут применяться и для построения математической модели макроуровня путем аппроксимации модели микроуровня.

Метод функционально законченных элементов основан на выделении типовых элементов технического объекта, завершенных в конструктивном отношении и предназначенных для выполнения определенных функций (например, в гидромеханической системе – участок гидромагистрали, золотниковый клапан, дроссель, обратный клапан, насос, гидромотор и др.). Имея библиотеку математических моделей функционально законченных элементов и зная структуру технического объекта, можно составить полную математическую модель.

Наиболее часто при построении динамической модели используют метод сосредоточенных масс. Этот метод применим, если система имеет явно выраженный дискретный спектр собственных частот. Это характерно для технических объектов, у которых масса распределена в пространстве неравномерно. Например, в механической системе автомобиля масса вращающихся деталей в основном сосредоточена в маховике двигателя, крупных шестернях трансмиссии, барабане стояночного тормоза, колесах, имеющих большие радиальные размеры и обладающих большими моментами инерции, а соединяющие их детали (валы, муфты, карданные передачи и др.) имеют малые радиальные размеры и массу, но обладают существенными упругими свойствами. Из названия метода следует, что он предназначен для моделирования технических объектов, мерой инертности элементов которых служит масса.

При построении динамической модели методом сосредоточенных масс выделяют некоторые абстрактные материальные субстанции, наделяя их определенными физическими свойствами. Такими субстанциями являются: сосредоточенные массы, эквивалентные массам соответствующих частей технического объекта, и элементы, лишенные массы (невесомые), отображающие характер взаимодействия сосредоточенных масс.

Сосредоточенные массы обладают инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию. Их называют инерционными элементами. Количество выделяемых сосредоточенных масс в динамической модели равно числу ее степеней свободы.

Взаимодействие сосредоточенных масс осуществляется посредством упругих, диссипативных, фрикционных и трансформаторных элементов:

- упругие элементы отображают упругие свойства динамической системы. Они обладают способностью накапливать потенциальную энергию;
- диссипативные элементы отображают свойства диссипации (рассеивания) энергии конструктивными элементами технического объекта, обусловленные силами внутреннего трения, пропорциональными относительной скорости перемещения взаимодействующих сосредоточенных масс (или сосредоточенных масс относительно внешней среды, например, при движении жидкости в трубопроводе);

– фрикционные элементы отображают физические свойства фрикционных механизмов технического объекта;

– трансформаторные элементы отображают безынерционные преобразования параметров потока энергии, осуществляемые техническими устройствами, называемыми трансформаторами.

Следует отметить, что рабочие процессы трансформаторов в общем случае могут быть весьма сложными, в особенности, если происходит преобразование одного вида энергии в другой. В таком случае необходима более детальная математическая модель трансформатора. Здесь же речь идет о тех случаях, когда внутренними процессами трансформатора можно пренебречь и учитывать лишь пропорциональные изменения величин выходных фазовых переменных по отношению к величинам переменных на его входе без преобразования вида энергии.

Состояние сосредоточенных масс характеризуется фазовыми координатами типа потока. Это геометрические координаты и их первые производные по времени, позволяющие определять положение сосредоточенных масс в многомерном фазовом пространстве и скорости их движения.

Взаимодействие различных элементов динамической модели отображается переменными типа потенциала.

Фазовые координаты типа потока выбирают в качестве обобщенных координат. Количество независимых обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы. В общем случае не все введенные фазовые переменные типа потока будут независимыми. Переменные же типа потенциала всегда принадлежат к зависимым координатам и выражаются через переменные типа потока.

Направления фазовых координат типа потока выбирают таким образом, чтобы они отражали положительное направление потока передаваемой через техническую систему энергии внешних источников. При этом также учитываются ограничения, наложенные объектами внешней среды на свободу перемещения сосредоточенных масс. Направления фазовых координат типа потока должны быть отображены в динамической модели системы.

Связи – ограничения на изменения геометрических координат и скоростей движения сосредоточенных масс динамической системы.

Различают связи:

– геометрические (позиционные) и кинематические;
– удерживающие и неудерживающие (виртуальные);
– стационарные и нестационарные;

– голономные и неголономные.

Математическое описание ограничений дается уравнениями связей. Каждое уравнение связи отображает тот факт, что данная связь лишает материальную систему одной степени свободы. При этом соответственно уменьшается количество независимых координат системы.

Если в динамической модели выбрать только такие независимые фазовые координаты, которые отображают лишь перемещения сосредоточенных масс, допускаемые позиционными удерживающими связями, то необходимость составления и использования уравнений этих связей исключается. Сложное движение твердого тела при этом раскладывается на простейшие составляющие – поступательное и вращательное.

При моделировании технического объекта с виртуальными и неголономными связями уравнения этих связей включаются в состав математической модели.

Для обозначения элементов в динамических моделях применяют графические изображения, используемые в кинематических и принципиальных схемах.

В заключение еще раз подчеркнем необходимость обоснованного подхода к выбору моделей на различных этапах проектирования, постепенного их усложнения при приближении к заключительному этапу. Необходимость использования большого количества разнообразных моделей в процессе проектирования одного и того же технического объекта обусловливает актуальность автоматизации их формирования.

Компонентные и топологические уравнения

Физические свойства технического объекта в динамической модели макроуровня отображаются совокупностью взаимодействующих дискретных элементов. В зависимости от способа построения динамической модели каждый элемент может наделяться одним или несколькими физическими свойствами. При дискретизации методом функционально законченных элементов или сеточными методами элементы обычно обладают несколькими физическими свойствами и являются сложными. В методе сосредоточенных масс все элементы простые, так как, каждый из них наделен только одним физическим свойством.

Рассмотрим простые дискретные элементы.

Состояние простого элемента характеризуется одной фазовой переменной типа потока и одной переменной типа потенциала. Физическое свойство элемента описывается математической моделью, выражающей зависимость между этими фазовыми переменными. Это выражение называют компонентным уравнением.

Основные физические свойства технических объектов любой физической природы – инерционные, упругие и диссипативные. Они отображаются в динамических моделях соответственно инерционными, упругими и диссипативными элементами. Фрикционные и трансформаторные элементы отображают специфические свойства, характерные не для всех технических объектов. Математическое описание этих свойств может быть различным, в зависимости от физической природы технического объекта.

Компонентные уравнения дискретных элементов могут быть получены аппроксимацией моделей микроуровня или непосредственным использованием физических законов.

Аппроксимация моделей микроуровня осуществляется путем замены всех частных производных фазовых переменных по пространственным координатам отношениями конечных разностей. Например, производную $\partial\varphi/\partial x$ заменяют выражением $\partial\varphi/\partial x = (\varphi_1 - \varphi_2)/l_x$, где φ_1 и φ_2 - значения фазовой переменной φ на границах дискретного элемента (в узлах 1 и 2 дискретизации сплошной среды), а l_x – длина дискретного элемента вдоль оси x.

Значения параметров элементов, выделяемых из сплошной среды с распределенными параметрами, усредняют. Для математического описания физических свойств элементов могут быть также использованы физические законы. Компонентные уравнения, полученные на основе физических законов, имеют следующий вид:

- для инерционного элемента: $U_И = И\, dI_И / dt$ (1);
- для диссипативного элемента: $U_Д = Д\, I_Д$ (2);
- для упругого элемента: $U_У = У \int I_У dt$ (3);

где *И, Д, У* – параметры инерционного, диссипативного и упругого элементов соответственно;

I – фазовая переменная типа потока;

U – фазовая переменная типа потенциала.

Индексы при фазовых переменных *I* и *U* указывают на принадлежность их соответствующим элементам.

Для получения полной математической модели технической системы необходимо объединить все компонентные уравнения элементов в общую систему уравнений. Объединение осуществляется на основе физических законов, выражающих условия равновесия и непрерывности фазовых переменных. Уравнения этих законов называют топологическими уравнениями. Они описывают характер взаимодействия между простыми элементами, устанавливая соотношения между однотипными фазовыми переменными.

Условия равновесия записываются для фазовых переменных типа потенциала $\sum_i U_i = 0$ (4), а условия непрерывности – для фазовых переменных типа потока $\sum_k I_k = 0$ (5).

Форма компонентных и топологических уравнений одинакова для систем различной физической природы.

Если фазовые переменные – векторные величины, то направления векторов учитываются только топологическими уравнениями, а в компонентных уравнениях их направления не учитываются. Компонентные уравнения (1) – (3) в этом случае устанавливают соотношения лишь между модулями фазовых переменных. Это позволяет обеспечить корректное описание взаимодействия элементов системы в полной математической модели.

Топологическое уравнение для векторных переменных формируются как равенство нулю геометрической суммы соответствующих фазовых координат, а для скалярных – равенство нулю алгебраической суммы этих координат.

Полная математическая модель технического объекта на макроуровне, составленная на основе компонентных уравнений, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Искомыми функциями в этих уравнениях являются базисные фазовые координаты I и U, а независимой переменной – время t. Размерность математической модели определяется общим порядком системы дифференциальных уравнений (или числом базисных координат). Эту модель обычно представляют в нормальной форме Коши, в которой все уравнения разрешены относительно первых производных фазовых координат dI/dt и dU/dt.

Координатный базис в этом случае составляют фазовые переменные типа потока I и типа потенциала U.

Состояние сосредоточенных масс определяется фазовыми координатами типа потока. Количество таких координат соответствует числу степеней свободы динамической модели объекта.

Компонентные и топологические уравнения механической системы

Фазовые координаты

Сосредоточенные массы, отображаемые на динамических моделях механических систем, в силу учитываемых позиционных связей, могут совершать только простейшие виды движений – поступательное и вращательное. Сложное движение твердого тела представляется сочетанием этих простейших видов движения и соответствующим количеством сосредоточенных масс (инерционных элементов).

Поступательное движение твердого тела характеризуется линейной скоростью v и силой F, а вращательное – угловой скоростью ω и вращающим моментом M. Они и принимаются в качестве фазовых переменных механической системы:

фазовые переменные типа потока – скорости v (м/с), ω (рад/с);

фазовые переменные типа потенциала – силы F (Н), вращающие моменты M (Н·м).

Параметры элементов

Параметром инерционного элемента при поступательном движении является масса m (кг), а при вращательном движении – момент инерции J (кг×м^2).

Параметр диссипативного элемента – коэффициент сопротивления μ, называемый также коэффициентом неупругого сопротивления, коэффициентом вязкого трения, коэффициентом демпфирования. При поступательном движении он измеряется в Н×с/м, а при вращательном – в Н×м×с/рад.

Параметр упругого элемента – коэффициент жесткости c. При поступательном движении в качестве единицы измерения с используется Н/м, а при вращательном – Н×м/рад.

Компонентные уравнения

Компонентное уравнение инерционного элемента получают на основе второго закона Ньютона. Для поступательного движения твердого тела уравнение имеет вид $F_И = m \cdot \dfrac{dv_И}{dt}$ (6), а для вращательного -

$M_И = J \cdot \frac{d\omega_И}{dt}$ (7), где $F_И$ и $M_И$ – соответственно сила инерции и момент сил инерции (или инерционный момент) элементов, $v_И$ и $\omega_И$ – скорости инерционных элементов.

Скорости $v_И$ и $\omega_И$ представляют собой абсолютные скорости сосредоточенных масс соответственно при поступательном и вращательном движениях. Если твердое тело совершает сложное движение, то его раскладывают на простейшие составляющие, выделяют соответствующие им сосредоточенные массы и для каждой из них составляют свое компонентное уравнение инерционного элемента.

Математическое описание диссипативного элемента основано на использовании закона Ньютона для вязкого трения: сила вязкого трения пропорциональна относительной скорости перемещения элементов трения. При поступательном движении компонентное уравнение имеет вид $F_Д = \mu \cdot v_Д$ (8), а при вращательном - $M_Д = \mu \cdot \omega_Д$ (9), где $F_Д$ и $M_Д$ – соответственно сила и момент диссипативных элементов, а $v_Д$ и $\omega_Д$ – скорости диссипативных элементов.

Согласно закону Гука сила упругости деформируемого механического элемента при поступательном движении $F_У$ или момент упругости $M_У$ – при вращательном пропорциональны деформации:

$F_У = c \cdot x_У$, $M_У = c \cdot \varphi_У$, где $x_У$ и $\varphi_У$ – соответственно линейная и угловая деформации: $x_У = x_1 - x_2$ и $\varphi_У = \varphi_1 - \varphi_2$, где x_1, x_2 – линейные перемещения узлов дискретизации 1 и 2 (или выделенных сосредоточенных масс), а φ_1, φ_2 – угловые перемещения.

Выразив перемещения x и φ через фазовые переменные v и ω, компонентные уравнения упругих элементов можно записать в интегральной или дифференциальной формах:

при поступательном движении:

$F_У = c \int v_У dt$ или $\frac{dF_У}{dt} = c v_У$ (10);

при вращательном движении:

$M_У = c \int \omega_У dt$ или $\frac{dM_У}{dt} = c\,\omega_У$ (11),

где $F_У$, $M_У$ – соответственно сила и момент упругих элементов, а $v_У$ и $\omega_У$ – скорости деформации упругих элементов.

Упругие и диссипативные элементы в динамической модели соединяют между собой сосредоточенные массы. В этой связи скорости этих элементов представляют собой относительные скорости соединяемых ими сосредоточенных масс:

$v_{yj} = v_i - v_{i+1}$; $v_{\partial k} = v_i - v_{i+1}$,

где – v_{yj} скорость деформации *j*-го упругого элемента;

$v_{\partial k}$ – скорость *k*-го диссипативного элемента;

v_i, v_{i+1} – скорости *i*-ой и *(i+1)*-ой сосредоточенных масс, соединяемых *j*-ым упругим и *k*-ым диссипативным элементами.

Скорости упругих и диссипативных элементов при вращательном движении твердых тел определяются аналогичными выражениями.

Силы $F_И$, $F_У$, $F_Д$ и моменты $M_И$, $M_У$, $M_Д$ инерционных, упругих и диссипативных элементов характеризуют их взаимодействия в динамической модели. Они представляют собой внутренние потенциалы системы.

При движении системы под действием приложенных к ней внешних сил и моментов происходит изменение ее кинетической и потенциальной энергий, а часть энергии затрачивается на преодоление сил трения. Инерционные элементы динамической модели отображают свойство системы накапливать кинетическую энергию, упругие элементы – свойство накапливать потенциальную энергию, а диссипативные – рассеивать энергию потерь на трение путем превращения механической энергии в тепловую.

Топологические уравнения

Первое топологическое уравнение является уравнением равновесия. Оно выражает принцип Даламбера: геометрическая сумма всех сил, приложенных к твердому телу, включая силу инерции, равна нулю:

$\sum_i \vec{F}_i = 0$ (12).

Уравнение 12 соответствует поступательному движению твердого тела. При вращательном движении используется уравнение $\sum_i \vec{M}_i = 0$ (13).

Второе топологическое уравнение определяет условие непрерывности фазовых координат типа потока. Оно выражает принцип сложения скоростей при сложном движении твердого тела: геометрическая сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю. При поступательном движении $\sum_i \vec{v_i} = 0$; при вращательном движении $\sum_i \vec{\omega_i} = 0$.

Количество составляемых топологических уравнений вида 12 и 13 равно числу степеней свободы моделируемой системы.

Если компонентные уравнения 6 – 11 записать в векторной форме, то в правых частях необходимо поставить знак минус. Это обусловлено тем, что сила инерции $\overrightarrow{F_И}$ и инерционный момент $\overrightarrow{M_И}$ направлены противоположно соответствующим ускорениям $\frac{d\overrightarrow{v_И}}{dt}$ и $\frac{d\overrightarrow{\omega_И}}{dt}$, сила $\overrightarrow{F_Д}$ и момент трения $\overrightarrow{M_Д}$ противоположны относительным скоростям сосредоточенных масс $\overrightarrow{v_Д}$ и $\overrightarrow{\omega_Д}$, а сила и момент упругих элементов $\overrightarrow{F_У}$ и $\overrightarrow{M_У}$ противоположны векторам деформаций $\overrightarrow{v_У}$ и $\overrightarrow{\omega_У}$. Однако компонентные уравнения при использовании метода сосредоточенных масс следует записывать без учета знаков фазовых координат, а их знаки необходимо учитывать лишь в топологических уравнениях.

Заключение

Компонентные и топологические уравнения играют ключевую роль в моделировании и анализе механических систем. Они позволяют описать как поведение отдельных элементов системы (компонентные уравнения), так и взаимосвязи между ними (топологические уравнения).

Компонентные уравнения описывают физические законы, которым подчиняются отдельные элементы системы (пружины, демпферы, массы и т.д.). Топологические уравнения отражают структуру системы и связи между её элементами,включают уравнения баланса сил, моментов и кинематические связи, а так же позволяют объединить компонентные уравнения в единую математическую модель системы.

Используя эти уравнения, можно составить дифференциальные уравнения, описывающие динамику системы, проводить анализ устойчивости системы и расчет реакции системы на внешние воздействия, а так же оптимизировать параметры системы для достижения желаемого поведения.

Таким образом, компонентные и топологические уравнения являются основой для моделирования, анализа и проектирования механических систем.

Список источников

1. Математические модели технических систем на макроуровне https://tulsu.ru/sdoii/pluginfile.php/277479/mod_resource/content/1/lex/lex_7/lex_7_4.html
2. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов. Минск: Издательство «Дизайн ПРО», 2004. — 640 с.
3. Сафронов А.И. Математическое моделирование технических устройств, механизмов и систем: Учебное пособие. Минск: БНТУ, 2005. — 112 с.