МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тульский государственный университет»

Интернет-институт

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Математика»

Семестр 3

Вариант 3

Выполнил: студент гр. ИБ262521-ф

Артемов Александр Евгеньевич

Проверил: д.ф.-м.н., проф. Христич Д.В.

Тула 2023

1. Определить тип и решить дифференциальное уравнение: $(x+4)dy-xydx=0$

Решение:

$(x+4)dy-xydx=0$, разделим на $(x+4)y\neq0$

$\frac{dy}{y}-\frac{xdx}{x+4}=0$ - дифференциальное уравнение **(ДУ) с разделяющимися переменными**.

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{xdx}{x+4}=lnC$$

$$\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+C$$

$$\int\frac{xdx}{x+4}=\int(\frac{x+4-4}{x+4})dx=\int dx-4\int\frac{d(x+4)}{x+4}=x-4\ln|x+4|+C$$

$$\ln|y|-x+4\ln|x+4|=lnC$$

$$\ln\left|y(x+4)^4\right|-\ln e^x=lnC$$

$$\ln\left|\frac{y(x+4)^4}{e^x}\right|=lnC$$

$$\frac{y(x+4)^4}{e^x}=C$$

$$y=\frac{Ce^x}{(x+4)^4}$$

Рассмотрим случай, где $(x+4)y=0$, следовательно, $y=0$ или $(x+4)=0$.

При $(x+4)=0$ решения не существует, так как $(x+4)$ находится в знаменателе решения.

При $y=0$: $\frac{Ce^x}{(x+4)^4}=0$, $Ce^x=0$, $e^x>0$ всегда, значит $C=0$.

Таким образом, $y=0$ входит в решение при $C=0$.

Ответ: ДУ с разделяющимися переменными, $y=\frac{Ce^x}{(x+4)^4}$ **,** $y=0$ при $C=0$.

2. Определить тип и решить дифференциальное уравнение: $(y+\sqrt{xy})dx = xdy$

Решение:

$(y+\sqrt{xy})dx = xdy$

$ydx+\sqrt{xy}dx = xdy$, разделим на $x\neq 0$

$\frac{y}{x}dx+\frac{\sqrt{xy}}{x}dx = dy$

$(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}})dx = dy$

$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} = y'$ - **однородное ДУ** $y' = \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ (1)

Пусть $U = \frac{y}{x}$, откуда $y = Ux$. Продифференцируем левую и правую части по x:

$y' = U'x+U$. Приравняем к (1):

$U'x+U = \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$. Заменим $\frac{y}{x}$ на U :

$U'x+U = U+\sqrt{U}$, откуда $U'x = \sqrt{U}$. Представим U' как $\frac{dU}{dx}$:

$x\frac{dU}{dx} = \sqrt{U}$ - умножим обе части на dx :

$xdU = \sqrt{U}dx \Rightarrow xdU-\sqrt{U}dx = 0$ - разделим обе части на $x\sqrt{U}\neq 0$ (1):

$\frac{dU}{\sqrt{U}}-\frac{dx}{x} = 0$ - интегрируем обе части:

$\int\frac{dU}{\sqrt{U}}-\int\frac{dx}{x} = C \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{U}-\ln|x| = C$. Выполним обратную подстановку:

$2\sqrt{\frac{y}{x}}-\ln|x| = C \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln|x|+C$. Возведем обе части в квадрат:

$\frac{4y}{x} = \ln^2|x|+2C\ln|x|+C^2 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{x(\ln^2|x|+2C\ln|x|+C^2)}{4}$ (2)

При делении (1) потеряны решения $y = 0$ и $x = 0$, так как обе переменные оказываются в знаменателе, однако при подстановке в решение (2) дают верное тождество.

Ответ: однородное ДУ, $y = \frac{x(\ln^2|x|+2C\ln|x|+C^2)}{4}$, $y = 0$, $x = 0$.

3. Определить тип и решить дифференциальное уравнение:

$$(10xy-\frac{1}{\sin y})dx+(5x^2+\frac{x\cdot\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3)dy=0 \quad (1)$$

Решение:

Пусть $P(x,y)=10xy-\frac{1}{\sin y}$, а $Q(x,y)=5x^2+\frac{x\cdot\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3$.

Тогда ДУ примет вид: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

Если $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то ДУ (1) является **ДУ в полных дифференциалах.**

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(10xy-\frac{1}{\sin y})'_y=10x+\frac{\cos y}{\sin^2 y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(5x^2+\frac{x\cdot\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3)'_x=10x+\frac{\cos y}{\sin^2 y}$$

Возьмем $M(x_0,y_0)$ из области определения $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, например, $x_0=0$ и $y_0=\frac{\pi}{2}$, тогда $\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$. Рассмотрим по частям:

$$\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx=\int\limits_{0}^{x}(10x\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}})dx=\int\limits_{0}^{x}(5\pi x-1)dx=\frac{5\pi x^2}{2}-x\Big|_0^x=\frac{5\pi x^2}{2}-x$$

$\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}(5x^2+\frac{x\cdot\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3)dy$ - рассмотрим интеграл по частям:

$$\int\frac{x\cdot\cos y}{\sin^2 y}dy=x\int\frac{d(\sin y)}{\sin^2 y}=x\frac{\sin^{-1}y}{-1}=-\frac{x}{\sin y}+C$$

$$\int y^2\sin y^3dy=\frac{1}{3}\int\sin y^3d(y^3)=-\frac{1}{3}\cos y^3+C$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}(5x^2+\frac{x\cdot\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3)dy=5x^2y-\frac{x}{\sin y}+\frac{\cos y^3}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{y}=5x^2y-\frac{x}{\sin y}+\frac{\cos y^3}{3}-(\frac{5\pi x^2}{2}-x+\frac{\cos(\frac{\pi^3}{8})}{3})$$

$$\int\limits_{0}^{x}(5\pi x-1)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y}(5x^2+\frac{x\cdot\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3)dy=$$

$$=\frac{5\pi x^2}{2}-x+5x^2y-\frac{x}{\sin y}+\frac{\cos y^3}{3}-(\frac{5\pi x^2}{2}-x+\frac{\cos(\frac{\pi^3}{8})}{3})=5x^2y-\frac{x}{\sin y}+\frac{\cos y^3}{3}+0{,}247=C$$

$$5x^2y-\frac{x}{\sin y}+\frac{\cos y^3}{3}=C-0{,}247=C$$

Ответ: ДУ в полных дифференциалах, $5x^2y-\frac{x}{\sin y}+\frac{\cos y^3}{3}=C$

4. Найти решение задачи Коши: $8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3,\ y(1)=\sqrt{2}$

Решение:

$8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3$ - разделим обе части на $8x$

$$y'-\frac{3y}{2x}=-\frac{(5x^2+3)y^3}{8x}$$

Пусть $P(x)=-\frac{3y}{2x}$, $Q(x)=-\frac{(5x^2+3)}{8x}$ и $\alpha=3$, тогда ДУ примет вид:

(1) $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ - **уравнение Бернулли.**

Пусть $Z=y^{1-\alpha}$, тогда $Z=y^{1-3}=\frac{1}{y^2}$, откуда $y^2=\frac{1}{Z}$.

$$Z'=(y^{1-\alpha})'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'$$

Умножим (1) на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'+(1-\alpha)P(x)y^{1-\alpha}=(1-\alpha)Q(x) \ .$$

Выполним замену $Z=y^{1-\alpha}$ и $Z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'$:

$$Z'+(1-\alpha)P(x)Z=(1-\alpha)Q(x) \ .$$

Выполним замену $P(x)=-\frac{3y}{2x}$, $Q(x)=-\frac{(5x^2+3)}{8x}$ и $\alpha=3$:

$$Z'+(1-3)(-\frac{3y}{2x})Z=(1-3)(-\frac{(5x^2+3)}{8x})$$

$Z'+(\frac{3}{x})Z=\frac{(5x^2+3)}{4x}$ - линейное ДУ 1-го порядка.

Выполним подстановку: $Z=U\cdot V \quad\Rightarrow\quad Z'=U'\cdot V+U\cdot V'$

$$U'\cdot V+U\cdot V'+(\frac{3}{x})U\cdot V=\frac{(5x^2+3)}{4x} \quad\Rightarrow\quad U'\cdot V+U(V'+(\frac{3}{x})V)=\frac{(5x^2+3)}{4x}$$

Пусть $V'+(\frac{3}{x})V=0$, тогда $\frac{dV}{dx}+\frac{3V}{x}=0$ - умножим на $\frac{dx}{V}$:

$\frac{dV}{V}+\frac{3dx}{x}=0$ - интегрируем: $\int\frac{dV}{V}+\int\frac{3dx}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dV}{V}=-\int\frac{3dx}{x} \quad\Rightarrow$

$$\ln|V|=-3\ln|x| \quad\Rightarrow\quad V=x^{-3} \ .$$

Если $V'+(\frac{3}{x})V=0$, то $U'\cdot V=\frac{(5x^2+3)}{4x} \quad\Rightarrow\quad U'x^{-3}=\frac{(5x^2+3)}{4x} \quad\Rightarrow\quad U'=\frac{5}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2$

$$U=\int(\frac{5}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2)dx=\frac{x^5}{4}+\frac{x^3}{4}+C$$

$$Z=U\cdot V=(\frac{x^5}{4}+\frac{x^3}{4}+C)\cdot x^{-3}=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{C}{x^3}$$

$$y^2 = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{C}{x^3}}$$

При $y(1) = \sqrt{2}$ получаем $(\sqrt{2})^2 = \dfrac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + C}$ $\Rightarrow$ $C = 0$

При $C = 0$ $y^2 = \dfrac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

Ответ: $y^2 = \dfrac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

5. Найти решение задачи Коши: $y'''+3y''+2y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=2$

Решение:

$y'''+3y''+2y'=0$

Характеристическое уравнение (ХУ): $\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+3\lambda+2)=0$

$\lambda_1=0$ (1-ой кратности) $\Rightarrow$ $y=e^{\lambda x}=e^0=1$.

Решим квадратное уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$:

$D=9-4\cdot1\cdot2=9-8=1$

$\lambda_2=\frac{-3+1}{2}=-1$, $\lambda_3=\frac{-3-1}{2}=-2$

Общее решение $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}$

Найдем производные 1-го и 2-го порядков от общего решения:

$y'=-C_2e^{-x}-2C_3e^{-2x}$

$y''=C_2e^{-x}+4C_3e^{-2x}$

Составим систему уравнений из общего решения и его производных 1-го и 2-го порядков, подставив $x=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=2$ из условия:

$$\begin{cases}0=C_1+C_2+C_3\\0=-C_2-2C_3\\2=C_2+4C_3\end{cases}\quad\begin{cases}0=C_1+C_2+C_3\\C_2=-2C_3\\2=-2C_3+4C_3\end{cases}\quad\begin{cases}0=C_1-2+1\\C_2=-2\\C_3=1\end{cases}\quad\begin{cases}C_1=1\\C_2=-2\\C_3=1\end{cases}$$

Подставим константы в общее решение:

$y=C-2e^{-x}+e^{-2x}$

Ответ: $y=C-2e^{-x}+e^{-2x}$

6. Запишите вид частного решения уравнения $y''+2y'+y=f(x)$ если:

1) $f(x)=\cos x$ 2) $f(x)=e^{-x}\sin x$ 3) $f(x)=e^{-x}(x-5)$ 4) $f(x)=e^{x}$ 5) $f(x)=x^{2}$

Решение:

Решим однородное ДУ $y''+2y'+y=0$

ХУ: $\lambda^2+2\lambda+1=0$ - кратность $k=2$, $D=4-4\cdot 1\cdot 1=0$, $\lambda=\dfrac{-2}{2}=-1$

Общее решение $\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

1) $f(x)=\cos x$

$y*=A\cdot\cos x+B\cdot\sin x$, $y*'=-A\cdot\sin x+B\cdot\cos x$, $y*''=-A\cdot\cos x-B\cdot\sin x$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$-A\cdot\cos x-B\cdot\sin x-2A\cdot\sin x+2B\cdot\cos x+A\cdot\cos x+B\cdot\sin x=\cos x$

$2B\cdot\cos x-2A\cdot\sin x=\cos x$

Сравнив коэффициенты перед косинусом и и синусом в левой и правой частях получим:

$$\begin{cases}2B=1\\-2A=0\end{cases}\quad\begin{cases}B=1/2\\A=0\end{cases}$$

Подставив A и B в $y*=A\cdot\cos x+B\cdot\sin x$ получим $\boldsymbol{y*=\dfrac{\sin x}{2}}$.

2) $f(x)=e^{-x}\sin x$

$y*=x^k e^{mx}(A\cdot\cos nx+B\cdot\sin nx)$, $m=-1$, $n=1$: $m\pm ni=i-1\neq-1\Rightarrow k=0$

$y*=e^{-x}(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)$

$y*'=-e^{-x}(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)+e^{-x}(-A\cdot\sin x+B\cdot\cos x)=e^{-x}((B-A)\cos x-(A+B)\sin x)$

$y*''=-e^{-x}((B-A)\cos x-(A+B)\sin x)+e^{-x}((A-B)\sin x-(A+B)\cos x)=$

$=e^{-x}(2A\sin x-2B\cos x)$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$e^{-x}(2A\sin x-2B\cos x)+2e^{-x}((B-A)\cos x-(A+B)\sin x)+e^{-x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-x}\sin x$

$-A\cos x-B\sin x=\sin x$

Сравнив коэффициенты перед косинусом и и синусом в левой и правой частях получим:

$$\begin{cases}-B=1\\-A=0\end{cases}\quad\begin{cases}B=-1\\A=0\end{cases}$$

Подставив A и B в $y*=e^{-x}(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)$ получим $\boldsymbol{y*=e^{-x}(-\sin x)}$.

3) $f(x)=e^{-x}(x-5)$

$y*=x^k e^{mx}(Ax+B)$, $m=-1$, $n=0$: $m\pm ni=-1=\lambda\Rightarrow k=2$ - кратность ХУ:

$y*=x^2e^{-x}(Ax+B)=\dfrac{x^2(Ax+B)}{e^x}$

$$y*' = \frac{(2x(Ax+B)+Ax^2)e^x - e^x x^2(Ax+B)}{e^{2x}} = \frac{-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx}{e^x}$$

$$y*'' = \frac{(-3Ax^2+2(3A-B)x+2B)e^x - e^x(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{3Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B}{e^x}$$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$$\frac{3Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B+2(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)+x^2(Ax+B)}{e^x} = e^{-x}(x-5)$$

$$3Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B+2(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)+x^2(Ax+B) = x-5$$

$$6Ax+2B = x-5$$

Сравнив коэффициенты в левой и правой частях получим:

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1/6 \\ B = -5/2 \end{cases}$$

Подставив A и B в $y* = \frac{x^2(Ax+B)}{e^x}$ получим $\boldsymbol{y* = \frac{x^2(\frac{x}{6}-\frac{5}{2})}{e^x}}$.

4) $f(x) = e^x$

$$y* = x^k e^{mx}(Bx+A) \quad , \quad m=1 \quad , \quad n=0 \quad , \quad B=0 \quad : \quad m \pm ni = 1 \neq \lambda \;\Rightarrow\; k=0 \quad :$$

$$y* = Ae^x \quad , \quad y*' = Ae^x \quad , \quad y*'' = Ae^x$$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$$Ae^x+2Ae^x+Ae^x = e^x$$

$$4A = 1 \qquad A = \frac{1}{4}$$

Подставив A в $y* = Ae^x$ получим $\boldsymbol{y* = \frac{e^x}{4}}$

5) $f(x) = x^2$

$$y* = x^k e^{mx}(Ax^2+Bx+C) \quad , \quad m=0 \quad , \quad n=0 \quad : \quad m \pm ni = 0 \neq \lambda \;\Rightarrow\; k=0 \quad :$$

$$y* = Ax^2+Bx+C \quad , \quad y*' = 2Ax+B \quad , \quad y*'' = 2A$$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y : $2A+2(2Ax+B)+Ax^2+Bx+C = x^2$

$$Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B+C) = x^2$$

Сравнив коэффициенты в левой и правой частях получим:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 4A+B = 0 \\ 2A+2B+C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \\ C = 6 \end{cases}$$

Подставив A, B и C в $y* = Ax^2+Bx+C$ получим $\boldsymbol{y* = x^2-4x+6}$.

Ответ: 1) $y* = \frac{\sin x}{2}$; 2) $y* = e^{-x}(-\sin x)$; 3) $y* = \frac{x^2(\frac{x}{6} - \frac{5}{2})}{e^x}$;

4) $y* = \frac{e^x}{4}$; 5) $y* = x^2 - 4x + 6$.

7. Найти общее решение уравнения: $y''-10y'+25y=e^{5x}$.

Решение:

Общее решение ДУ: $y=\tilde{y}+y*$

Решим однородное ДУ $y''-10y'+25y=0$

ХУ: $\lambda^2-10\lambda+25=0$ - кратность $k=2$, $D=100-4\cdot1\cdot25=0$, $\lambda=-\frac{-10}{2}=5$

Общее решение однородного ДУ $\boldsymbol{\tilde{y}=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}}$

Найдем частное решение:

$y*=x^ke^{mx}(Bx+A)$, $m=5$, $n=0$, $B=0$: $m\pm ni=5=\lambda \Rightarrow k=2$: - кратность ХУ:

$y*=Ax^2e^{5x}$

$y*'=2Axe^{5x}+5Ax^2e^{5x}=e^{5x}(5Ax^2+2Ax)$

$y*''=5e^{5x}(5Ax^2+2Ax)+e^{5x}(10Ax+2A)=e^{5x}(25Ax^2+20Ax+2A)$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$y''-10y'+25y=e^{5x}(25Ax^2+20Ax+2A)-10e^{5x}(5Ax^2+2Ax)+25Ax^2e^{5x}=e^{5x}$

$2Ae^{5x}=e^{5x}$, $2A=1$, $A=1/2$

$$\boldsymbol{y*=\frac{x^2e^{5x}}{2}}$$

$$\boldsymbol{y=\tilde{y}+y*=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}+\frac{x^2e^{5x}}{2}}$$

Ответ: $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}+\frac{x^2e^{5x}}{2}$ **.**

8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Решение:

$y' = x \quad \Rightarrow \quad x = y'$ - дифференцируем обе части:

$x' = y'' \quad \Rightarrow \quad y = y'' \quad \Rightarrow \quad y'' - y = 0$

ХУ: $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, кратность $k = 1$

$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$

Так как $x = y'$, находим $x = y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$.

$$\begin{cases} x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}$.

9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\frac{\pi}{3^n}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $y=(2x+1)tg\frac{\pi}{3^x}$ - непрерывна и монотонно убывает при $x\geq 1$, тогда исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{\infty}(2x+1)tg\frac{\pi}{3^x}dx$.

Найдем площадь фигуры под графиком функции $y=(2x+1)tg\frac{\pi}{3^x}$ на интервале $[1,-\infty)$ путем сложения площадей прямоугольников. Площадь прямоугольников вычислим с шагом 1 с точностью не более 0,0000001. Результаты вычисления приведены в таблице:

x	$tg\frac{\pi}{3^x}$	$(2x+1)tg\frac{\pi}{3^x}$
1	1,732050808	5,196152423
2	0,363970234	1,819851171
3	0,116883237	0,818182657
4	0,038804554	0,349240987
5	0,012929085	0,142219937
6	0,004309482	0,056023261
7	0,001436486	0,021547290
8	0,000478828	0,008140082
9	0,000159609	0,003032579
10	0,000053203	0,001117266
11	0,000017734	0,000407891
12	0,000005911	0,000147787
13	0,000001970	0,000053203
14	0,000000657	0,000019048
15	0,000000219	0,000006787
16	0,000000073	0,000002408
17	0,000000024	0,000000851
18	0,000000008	0,000000300
19	0,000000003	0,000000105
20	0,000000001	0,000000037

При $x=20$ $y=0{,}000000037<0{,}0000001$.

Сумма значений функции $y=(2x+1)tg\frac{\pi}{3^x}$ при x от 1 до 20 равна 8,41614607 и при возрастании x изменяется на не более чем 0,0000001.

Следовательно, интеграл $\int_{1}^{\infty}(2x+1)tg\frac{\pi}{3^x}dx \approx 8{,}41614607$ - является сходящимся.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\frac{\pi}{3^n}$ так же является сходящимся.

Ответ: является сходящимся.

10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$.

Решение:

Применим радикальный принцип Коши, для это вычислим $q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1$ - ряд сходится.

Ответ: является сходящимся.

11. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

Решение:

Рассмотрим $|U_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}\right| = \frac{1}{\ln n}$:

если $\ln n < n$, тогда $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ так же расходится, согласно признака сравнения. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$ не обладает абсолютной сходимостью.

Рассмотрим знакочередующийся ряд $U_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$:

1) элементы ряда: $\infty > \frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \ldots$;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$.

Следовательно, согласно признака Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$ обладает условной сходимостью.

Ответ: не сходится абсолютно, сходится условно.

12. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение:

Согласно признака Д’Аламбера $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|<1$, откуда $|x|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

$$|x|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{(n+1)}}\right|} \quad \Rightarrow \quad |x|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2n+2}\right|} \quad \Rightarrow \quad |x|<2$$

Проверим граничные значения:

$x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - ряд расходится, значит, $x=2$ не входит в область сходимости;

$x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)}{n}$ - ряд сходится, значит, $x=-2$ входит в область сходимости.

Ответ: $[-2;2)$

13. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \sin x^2$.

Решение:

Ряд Маклорена:

$$y=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Пусть $x_0=0$.

$y(0) = 0$

$y' = 2x\cdot\cos x^2$ $\qquad$ $y'(0) = 0$

$y'' = 2\cdot\cos x^2-4x^2\cdot\sin x^2$ $\qquad$ $y''(0) = 2$

$y''' = -12\cdot\sin x^2-8x^3\cdot\cos x^2$ $\qquad$ $y'''(0) = 0$

$y^{(4)} = 16x^4\cdot\sin x^2-12\sin x^2-48x^2\cdot\cos x^2$ $\qquad$ $y^{(4)}(0) = 0$

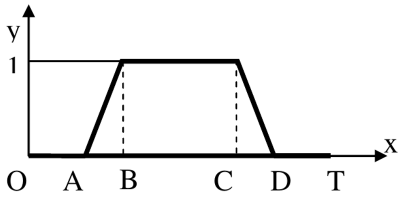
$y^{(5)} = 160x^3\cdot\sin x^2+(32x^5-120x)\cos x^2$ $\qquad$ $y^{(5)}(0) = 0$

$y^{(6)} = (720x^2-64x^6)\sin x^2+480x^2\cdot\cos x^2-120\cos x^2$ $\qquad$ $y^{(6)}(0) = -120$

$$\sin x^2 = \frac{2x^2}{2!}-\frac{120x^6}{6!}+O(x^7)$$

Ответ: $\sin x^2 = \frac{2x^2}{2!}-\frac{120x^6}{6!}+O(x^7)$

14. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на полупериоде $[0;T]$ графиком, приведенном на рисунке, если даны значения $A=1$, $B=1{,}5$, $C=2{,}5$, $D=3$, $T=4$, и функция нечетная. Построить графики первых трех гармонических приближений функции.



Решение:

Представим функцию как $\begin{cases} 0,\ 0\leqslant x<1 \\ 2x-2,\ 1\leqslant x<1{,}5 \\ 1,\ 1{,}5\leqslant x<2{,}5 \\ 6-2x,\ 2{,}5\leqslant x<3 \\ 0,\ 3\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$

$L=4$

Так как функция нечетная, то $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\frac{\pi n x}{L}$, где $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}dx$.

$$b_n=\frac{1}{2}\left(0+\int_1^{1,5}(2x-2)\sin\frac{\pi n x}{4}dx+\int_{1,5}^{2,5}\sin\frac{\pi n x}{4}dx+\int_{2,5}^{3}(6-2x)\sin\frac{\pi n x}{4}dx+0\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{32\sin\frac{3\pi n}{8}}{\pi^2 n^2}-\frac{4\cos\frac{3\pi n}{8}}{\pi n}-\frac{32\sin\frac{\pi n}{4}}{\pi^2 n^2}-\frac{32\sin\frac{3\pi n}{4}}{\pi^2 n^2}+\frac{32\sin\frac{5\pi n}{8}}{\pi^2 n^2}+\frac{4\cos\frac{5\pi n}{8}}{\pi n}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{4\cos\frac{3\pi n}{8}}{\pi n}-\frac{4\cos\frac{5\pi n}{8}}{\pi n}\right)=\frac{16}{\pi^2 n^2}\left(\sin\frac{5\pi n}{8}+\sin\frac{3\pi n}{8}-\sin\frac{3\pi n}{4}-\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

$n=1$: $f_1(x)=\frac{16}{\pi^2}\left(\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi x}{4}$

$n=2$: $f_2(x)=\frac{4}{\pi^2}(0)\sin\frac{\pi x}{2}=0$

$n=3$: $f_3(x)=\frac{16}{9\pi^2}\left(\sin\frac{15\pi}{8}+\sin\frac{9\pi}{8}-\sin\frac{9\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}\right)\sin\frac{3\pi x}{4}$

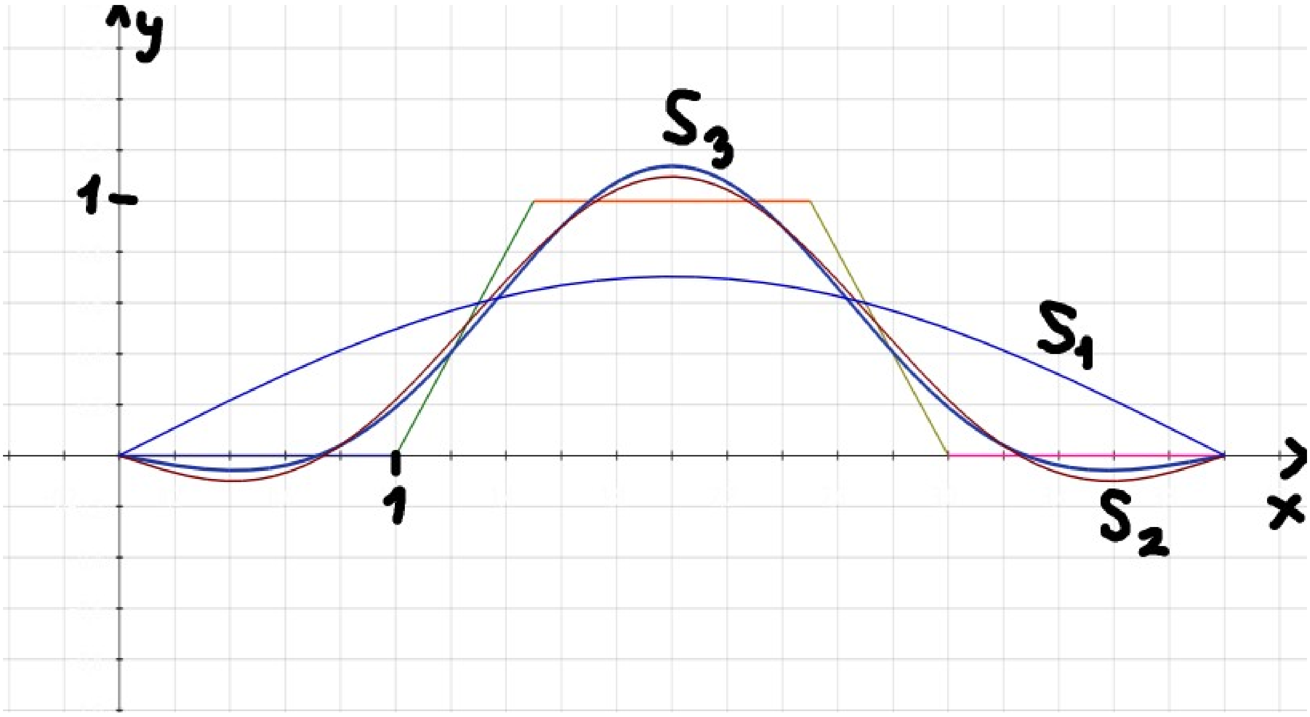
$n=4$: $f_4(x)=\frac{1}{\pi^2}(0)\sin\pi x=0$

$n=5$: $f_5(x)=\frac{16}{25\pi^2}\left(\sin\frac{25\pi}{8}+\sin\frac{15\pi}{8}-\sin\frac{15\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}\right)\sin\frac{5\pi x}{4}$

$S_1(x)=f_1(x)$

$S_2(x)=f_1(x)+f_3(x)$

$S_3(x)=f_1(x)+f_3(x)+f_5(x)$



y
1
1
x
S_3
S_1
S_2