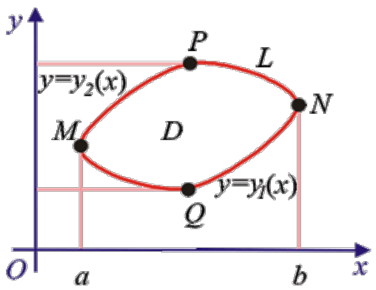
3. Криволинейные интегралы

3.3. Формула Грина

Установим связь между двойным интегралом по некоторой плоской области D и криволинейным интегралом по границе L этой области. Пусть в плоскости Oxy задана область D, правильная в отношении осей Ox и Oy и ограниченная снизу кривой $y = y_1(x)$, а сверху кривой $y = y_2(x)$, $a \leq x \leq b$. В совокупности обе эти кривые составляют замкнутый контур L.



Пусть в области D заданы две непрерывные функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные.

Рассмотрим интеграл $\iint\limits_D \dfrac{\partial X(x,y)}{\partial y} dx\, dy$.

Представляя его в виде двукратного, получим $\iint\limits_D \dfrac{\partial X(x,y)}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \dfrac{\partial X}{\partial y} dy = \int\limits_a^b X(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx$.

Заметим, что

$$\int\limits_a^b X(x, y_2(x))dx = \int\limits_{MPN} X(x,y)dx \ ,$$

$$\int\limits_a^b X(x, y_1(x))dx = \int\limits_{MQN} X(x,y)dx = -\int\limits_{NQM} X(x,y)dx \ .$$

Тогда

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_{MPN} X dx + \int\limits_{NQM} X dx = \int\limits_{MPNQM} X(x,y)dx \ . \tag{4}$$

Аналогично найдем

$$\iint\limits_D \frac{\partial Y}{\partial x} dx\, dy = -\int\limits_{MPNQM} Y(x,y)dy \ . \tag{5}$$

Вычитая из (4) выражение (5), получим

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\, dy = \int\limits_{MPNQM} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

или

$$\iint\limits_D \left(\frac{\frac{\partial Y}{\partial x} - \partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy \ , \tag{6}$$

где обход контура L совершается против часовой стрелки.

Формула (6) носит название формулы Грина.

?