

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И  
НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В. В. АЛЕКСЕЕВ, Л. И. МАКЛАКОВ**

# **КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

**ТОМ 1**

**МЕХАНИКА.  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Казань  
2013

УДК 530.1 (075)  
ББК 22.3; 22.313; 22.336  
А47

**Алексеев В. В., Маклаков Л. И.**

А47 Курс общей физики: учеб. Пособие – в 2-х томах. Т. 1. Механика. Электродинамика. Колебания и волны./ В.В.Алексеев, Л.И.Маклаков – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2013. – 126 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

ISBN 978-5-7829-0392-3

Учебное пособие содержит краткое изложение курса физики, состоящее из двух томов. В первом томе изложены разделы: кинематика, динамика, работа и энергия, электростатика, постоянный электрический ток, электромагнетизм, электромагнитное поле, колебания и волны.

В пособии приведены 67 иллюстраций и 3 таблицы.

Учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов инженерно-строительных и других инженерных специальностей.

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского национального исследовательского технологического университета

**В. А. Жихарев;**

Доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и электротехники Казанского государственного архитектурно-строительного университета

**Г. И. Захватов**

УДК 530.1 (075)  
ББК 22.3; 22.313; 22.336

© Казанский государственный  
архитектурно-строительный  
университет, 2013

ISBN 978-5-7829-0392-3

© Алексеев В. В., Маклаков Л. И.,  
2013

## ВВЕДЕНИЕ

**1. Предмет физики и другие естественные науки.** Физика — это наука о природе, изучающая наиболее общие свойства материи и законы движения материи. Для физика основной целью является познание окружающего мира. Физику можно назвать основной из естественных наук, поскольку она имеет дело с такими свойствами мира, как время, пространство, материя, электричество, свет. Она является основой для других наук.

Физика тесно связана с техникой. Из ряда разделов физики выделились целые области технических наук: теоретическая и техническая механика, сопротивление материалов, техническая термодинамика и т. д. Учение об электричестве и магнетизме породило электротехнику, радио- и телевизионную технику, вычислительные машины. В последнее столетие интенсивно развивалась область атомной физики, в результате чего решён вопрос о получении атомной энергии, что жизненно необходимо всему человечеству.

**2. Физика и профессия инженера.** Физические знания непосредственно не используются при строительстве новых зданий, прокладке тоннелей и дорог, создании самолётов и вертолётот, разработке химических производств, лечении болезней и т. д. И тем не менее во всех технических вузах физика изучается. Почему же физика столь важна и какую пользу она приносит?

- В системе образования физика, наряду с математикой, является фундаментом, на котором строятся все общенаучные и технические дисциплины. Следовательно, их изучение без знания физики невозможно.

- Современная техника развивается очень быстро, всё время меняются оборудование заводов, технологии, используются всё новые и новые приборы. Современный инженер должен осваивать всё новое, что появляется в технике. Такое освоение возможно лишь в том случае, если он обладает знаниями математики, физики, химии и ряда других общих дисциплин. Только фундаментальное образование позволяет специалисту быстро перестраиваться и совершенствоваться в нужном направлении.

- Инженер и каждый образованный человек должны иметь представление о физике, так как мы живём в техническом веке. В газетах и журналах печатаются статьи о ядерном оружии, о солнечной, ядерной и термоядерной энергии, о лазерах, о НЛЮ, ЭВМ, о контроле загрязнения окружающей среды, о новых достижениях в технике. Не зная физики, нельзя полностью понять их содержания.

**3. Модели, теории и законы в физике.** Пытаясь объяснить какое-то явление, учёные часто прибегают к моделям. *Модель* — это *некоторый мысленный образ явления, опирающийся на известные понятия и позволяющий построить полезную аналогию*. Так, например, была предложена планетарная модель атома, согласно которой электроны в атоме движутся вокруг ядра подобно планетам, обращающимся вокруг Солнца. Цель построения модели — получить мысленную, наглядную картину явления в тех случаях, когда мы лишены возможности непосредственного восприятия того, что происходит в этом явлении. На основе модели строится теория, которая рассматривает явление более детально. С её помощью пытаются решать ряд задач, входящих в данную область. *Законом* называют *некоторые краткие, общие утверждения относительно характера явлений природы*. Любой закон в физике должен выдержать экспериментальную проверку в широком классе наблюдаемых явлений. При этом необходимо знать, каковы его ограничения и область применимости.

**4. Единицы измерения в физике.** Физикам приходится иметь дело с измерением различных физических величин, таких как длина, объём, время, частота, температура, заряд и т. д. Измерение любой величины проводится по отношению к определённому стандарту или единице (например, расстояние соизмеряется с метром), и эти единицы должны приводиться вместе с численным значением результата. Таким образом, в физике оперируют с величинами, которые представляют собой некоторое число и единицу измерения (например, скорость автомобиля 60 км/ч). Если единица измерения не указана, то величина теряет смысл. Единица измерения в физике — неотъемлемая часть изучаемой величины.

Все физические величины разделены на два класса: основные и производные. Соответствующие им единицы измерения также называются основными и производными величинами. В физике существует семь независимых основных величин (т. е. их нельзя выразить друг через друга), через которые выражаются все остальные величины, встречающиеся в физике. В настоящее время существует несколько систем единиц измерения физических величин, но общепринятой является международная система единиц СИ (Система Интернациональная). Основные физические величины и их размерности в системе СИ следующие: длина — метр, время — секунда, масса — килограмм, сила тока — ампер, температура — Кельвин, количество вещества — моль, сила света — кандела. Все остальные физические ве-

личины является производными, т. е. определяются через основные величины. Так, скорость есть длина, делённая на время, т. е. м/с, объём —  $\text{м}^3$  и т. д.

## ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

*Всё, что существует в природе, называется **материей**. Любое изменение материи, любой процесс, происходящий в природе, называют **движением материи**. Простейшей формой движения материи является механическое движение. **Механическим движением** называется изменение взаимного расположения тел или частей одного и того же тела в пространстве с течением времени. Раздел физики, рассматривающий механическое движение, называют **механикой**. Основные законы механики в значительной мере были выяснены Галилеем и сформулированы Ньютоном. Механика Галилея — Ньютона называется **классической**. Она изучает законы движения макроскопических тел, движущихся со скоростями много меньшими скорости света. Движение тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, рассматривает релятивистская механика. Изучением микромира занимается квантовая механика. Классическая механика подразделяется на кинематику, динамику и статику. **Кинематика** изучает законы движения тел, не вникая в причины, обуславливающие это движение. **Динамика** рассматривает механическое движение с учётом причин, вызывающих его. **Статика** исследует условия равновесия тел.*

## ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

### § 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**1. Материальная точка.** При изучении физики часто пользуются абстрактными понятиями и моделями, облегчающими процесс познания. В частности, таким понятием является материальная точка. **Материальной точкой** (или **точечным телом**) называют тело, размерами которого можно пренебречь в данной задаче. Например, при изучении движения Земли вокруг Солнца размерами Земли можно пренебречь, так как её диаметр много меньше расстояния между ними. При рассмотрении же суточного вращения Земли этого сделать нельзя.

**2. Система отсчёта.** Механическое движение, как это следует из его определения, является относительным. Поэтому о движении тел можно говорить, если указана система отсчёта. Система отсчёта включает в себя:

1) тело отсчёта, т. е. тело, которое условно принимается за неподвижное и относительно которого рассматривается движение других тел. С телом

отсчёта связывают систему координат. Чаще всего используют декартову (прямоугольную) систему координат; 2) прибор для измерения времени.

**3. Радиус-вектор.** Положение материальной точки в пространстве определяется **радиус-вектором**  $\vec{r}$ , т. е. вектором, проведённым из начала координат в данную точку (рис. 1.1). Радиус-вектор обычно записывают через его проекции на координатные оси:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  — соответствующие координатные орты, т. е. векторы, направленные вдоль координатных осей, модули (длины) которых равны единице.

**4. Траектория движения.** Воображаемая линия, которую описывает материальная точка при движении, называется **траекторией**. В общем случае траектория — сложная трёхмерная кривая. В частности, она может быть и прямой линией. Тогда для описания движения необходима только одна координатная ось, направленная вдоль траектории движения. Следует иметь в виду, что форма траектории зависит от выбора системы отсчёта, т. е. форма траектории — понятие относительное. Так, траектория концов пропеллера относительно системы отсчёта, связанной с летящим самолётом, является окружностью, а в системе отсчёта, связанной с Землёй, — винтовой линией.

**5. Перемещение. Путь.** При описании движения тела надо уметь определять изменение его положения. С этой целью вводятся понятия перемещения тела и пути, пройденного им. **Перемещением** называется вектор, проведённый из начального положения материальной точки в конечное положение (вектор  $\Delta\vec{r}$  на рис. 1.2). Согласно правилу вычитания векторов,  $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ , где  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}$  — радиус-векторы начального и конечного положения материальной точки соответственно. Длину участка  $\Delta l$ , пройденного материальной точкой по траектории, называют **путём** или **длиной пути** (рис. 1.2). Нельзя путать эти понятия, так как перемещение — вектор, а путь — скаляр. Различие между модулем перемещения  $|\Delta\vec{r}|$  и путём  $\Delta l$  исчезают лишь в двух случаях: когда движение происходит прямолинейно в одну сторону и если

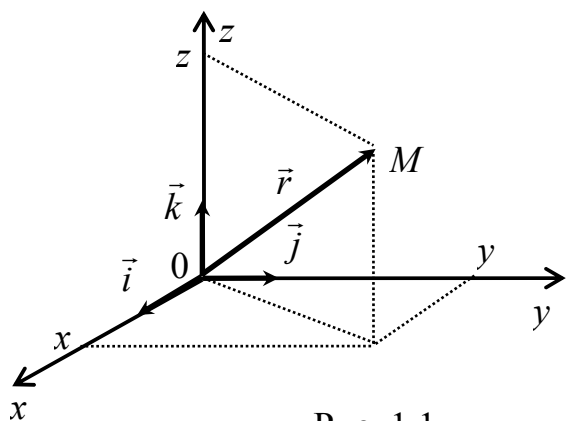


Рис. 1.1

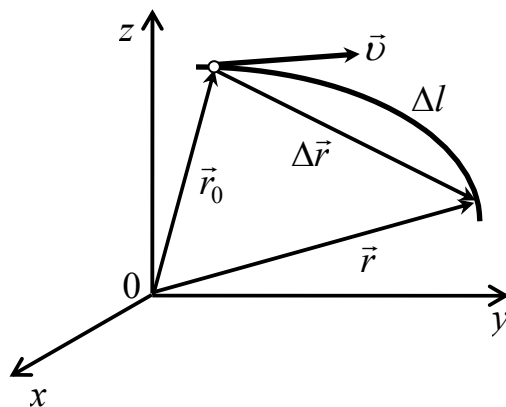


Рис. 1.2

перемещение столь мало, что практически невозможно отличить дугу от стягивающей её хорды. В таком случае будем обозначать такое перемещение через  $d\vec{r}$  и называть его элементарным, а стягивающую дугу через  $dl$ . Поскольку  $dl$  практически не отличается от  $|d\vec{r}|$ , а  $d\vec{r}$  — вектор, то и  $dl$  будем считать вектором, т. е. в этом случае

$$d\vec{r} = d\vec{l}. \quad (1.2)$$

**6. Скорость.** За равные промежутки времени перемещения материальной точки могут быть различными. Поэтому для характеристики быстроты движения вводят физическую величину, называемую **скоростью**. Выберем элементарный промежуток времени  $dt$ , в течение которого быстрота движения практически постоянна. Предположим, что за это время материальная точка совершила элементарное перемещение  $d\vec{r}$ . Тогда скоростью  $\vec{v}$  называют отношение

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.3)$$

т. е. *скорость — это перемещение, совершённое за единицу времени, при условии, что она остаётся неизменной. С точки зрения математики скорость является производной радиус-вектора по времени*, поскольку элементарное перемещение и элементарный промежуток времени можно рассматривать как дифференциалы радиус-вектора  $\vec{r}$  (функции) и аргумента  $t$ . В любой точке траектории скорость, которая является вектором, направлена по касательной к ней. Подставляя выражение (1.1) радиус-вектора  $\vec{r}$  в формулу (1.3) и учитывая, что производная от суммы равна сумме производных и что постоянную можно вынести за знак производной, получаем:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}, \quad (1.4)$$

где  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$  и  $v_z = \frac{dz}{dt}$  — проекции скорости  $\vec{v}$  на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Модуль  $v$  скорости равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (1.5)$$

так как составляющие скорости на координатные оси взаимно перпендикулярны. Модуль скорости можно найти и иначе, если известна зависимость пути от времени:

$$v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dl}{dt}, \quad (1.6)$$

Поскольку  $|d\vec{r}| = dl$ , т. е. *модуль скорости равен производной пути по времени*. В системе единиц СИ единицей скорости является 1 м/с.

**7. Ускорение.** Скорость материальной точки может изменяться со временем. Быстроту такого изменения характеризуют ускорением. Пусть в течение элементарного промежутка времени  $dt$  быстрота изменения скорости практически неизменна, а элементарное изменение скорости равно  $d\vec{v}$ . Тогда ускорение  $\vec{a}$  находим по формуле

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}. \quad (1.7)$$

Таким образом, **ускорение** — это *изменение скорости за единицу времени*. С точки зрения математики **ускорение** — производная скорости по времени. В системе единиц СИ единица ускорения —  $1 \text{ м/с}^2$ .

Из формул (1.7) и (1.4) найдём ускорение через его проекции на координатные оси:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \vec{k} = \\ &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  — проекции вектора ускорения на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Очевидно, модуль ускорения  $a$  равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.9)$$

Подставляя выражение (1.3) в (1.7), ускорение записываем в виде

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (1.10)$$

т. е. ускорение равно второй производной радиус-вектора по времени.

Таким образом, введены понятия перемещения, скорости и ускорения, которые могут быть использованы при изучении любых движений, как материальной точки, так и твёрдого тела. Однако при рассмотрении вращательного движения удобно использовать так называемые угловые величины. Рассмотрим некоторые из них.

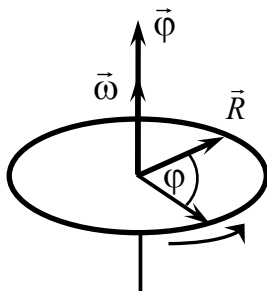


Рис. 1.3

**8. Вектор угла поворота.** Положение материальной точки, движущейся по окружности, удобно определять углом поворота  $\varphi$ , на который за время  $t$  повернулся радиус-вектор  $\vec{R}$ , проведённый из центра окружности (рис. 1.3). Если известна зависимость  $\varphi = \varphi(t)$ , то можно найти положение материальной точки в любой момент времени. В механике вращательное движение, как и поступательное, описывается с помощью векторов. Однако такие векторы определяются несколько



иначе. Введём вектор угла поворота  $\vec{\phi}$ , направленный вдоль оси вращения. Модуль этого вектора равен углу поворота  $\phi$ . Направление этого вектора определяется **правилом правого винта**: *при повороте винта в направлении вращения его поступательное движение даёт направление вектора  $\vec{\phi}$* . Векторы, направление которых связывают с направлением вращения, называются аксиальными. Они не имеют определённых точек приложения и откладываются из любой точки оси вращения. В общем случае положение оси вращения может меняться. Поэтому задание вектора угла поворота более удобно, так как позволяет определять ориентацию оси вращения, плоскость и направление вращения.

**9. Угловая скорость. Угловое ускорение.** Пусть материальная точка с постоянной по модулю скоростью вращается вокруг неподвижной оси. Для характеристики быстроты её вращения вводится угловая скорость. Если за время  $t$  точка повернулась на угол  $\phi$ , который заменим вектором угла поворота  $\vec{\phi}$ , то угловая скорость  $\vec{\omega}$  равна

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\phi}}{t}. \quad (1.11)$$

Вращение с постоянной угловой скоростью называется равномерным. Такое вращение характеризуется периодом обращения  $T$ , т. е. *временем, за которое тело делает один оборот* (поворачивается на угол  $2\pi$  радиан). Тогда, записывая (1.11) в скалярном виде, получаем:  $\omega = \phi/t = 2\pi/T$ . Откуда  $T = 2\pi/\omega$ . Число оборотов  $\nu$  в единицу времени равно  $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ . Следовательно,  $\omega = 2\pi\nu$ .

Если вращение неравномерное, то выбирают элементарный промежуток времени  $dt$ , в течение которого изменением угловой скорости можно пренебречь. За это время радиус-вектор, соединяющий тело с центром окружности, поворачивается на элементарный угол  $d\phi$ , который заменяем вектором угла поворота  $d\vec{\phi}$ . Тогда, согласно (1.11), угловая скорость равна

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}}, \quad (1.12)$$

т. е. *угловая скорость равна углу поворота, совершённого за единицу времени, или производной угла поворота по времени*. Из выражения (1.12) видно, что  $\vec{\omega}$  направлено так же, как и  $d\vec{\phi}$ , поскольку  $dt$  положительный скаляр. Следовательно, направление угловой скорости можно также находить по правилу правого винта. Она направлена вдоль оси вращения (рис. 1.3).

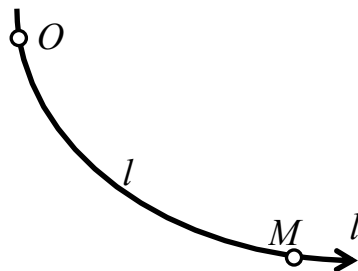


Рис. 1.4

Угловая скорость может изменяться со временем. *Быстроту её изменения характеризуют угловым ускорением.* Пусть за элементарный промежуток времени  $dt$  угловая скорость изменилась на величину  $d\vec{\omega}$ . При этом быстроту изменения угловой скорости можно считать постоянной. Тогда угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$  равно

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}, \quad (1.13)$$

т. е. **угловое ускорение** — изменение угловой скорости за единицу времени при условии, что быстрота изменения угловой скорости за это время остаётся постоянной. С точки зрения математического анализа **угловое ускорение** — производная угловой скорости по времени. Из (1.13) следует, что направления  $\vec{\varepsilon}$  и  $d\vec{\omega}$  совпадают. В случае неподвижной (закреплённой) оси вращения вектор  $\vec{\varepsilon}$  при ускоренном движении совпадает с вектором угловой скорости, а при замедленном — противоположен.

В системе единиц СИ единицей угловой скорости является 1 рад/с, а углового ускорения — 1 рад/с<sup>2</sup>.

**10. Уравнение движения.** Основной задачей кинематики является определение положения материальной точки в любой момент времени в выбранной системе отсчёта. Иначе говоря, необходимо найти зависимость её координат от времени:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (1.14)$$

или зависимость радиус-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.15)$$

Выражение (1.14) или (1.15) называется **уравнением движения**.

Задать движение можно и иным способом, если известна траектория движения в некоторой системе отсчёта. Выберем на ней произвольную точку  $O$ , которую примем за начало отсчёта (рис. 1.4). Установим на траектории положительное и отрицательное направления отсчёта. Тогда положение точки  $M$  определяется криволинейной координатой  $l$ , которая равна расстоянию от точки  $O$  до точки  $M$ , измеренному вдоль траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точки  $M$  меняется и расстояние  $l$ . Поэтому для нахождения положения материальной точки на траектории надо знать зависимость

$$l = l(t). \quad (1.16)$$

## § 2. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ. СВЯЗЬ УГЛОВЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Пусть тело (материальная точка) движется по окружности. Его положение определяем углом  $\varphi$ , который составляет радиус-вектор  $\vec{R}$  с осью

$Ox$  (рис. 2.1). Выразим радиус-вектор через его проекции на координатные оси. Из рис. 2.1 видно, что

$$\vec{R} = R \cdot \cos \varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \sin \varphi \cdot \vec{j}, \quad (2.1)$$

где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  — единичные векторы (орты) вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Воспользовавшись формулой (1.3), найдём скорость тела, которую называют линейной:  $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = -R \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{i} + R \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{j} = R\omega(-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j})$ ,

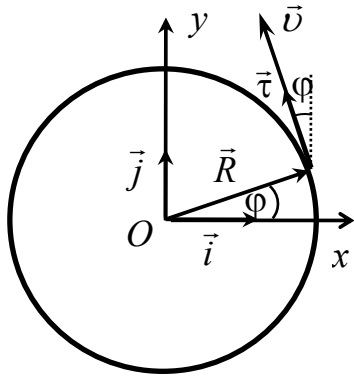


Рис. 2.1

поскольку  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  — модуль угловой скорости.

Введём орт  $\vec{\tau}$ , направленный по касательной к окружности в сторону вращения. Выразим его через проекции на координатные оси. Из рис. 2.1 видно, что

$$\vec{\tau} = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j} = \tau(-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j})$$

и

$$\vec{\tau} = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}, \quad (2.2)$$

так как  $\tau = 1$ . С учётом (2.2) из предыдущей формулы получаем

$$\vec{v} = R\omega \cdot \vec{\tau}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что вектор скорости направлен по касательной к траектории (окружности) и её модуль  $v$  равен

$$v = \omega R. \quad (2.4)$$

**2.** Найдём ускорение  $\vec{a}$ , которым обладает тело. Используя выражения (1.7) и (2.3), находим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega \cdot \vec{\tau}) = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\tau} + R\omega \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \quad (2.5)$$

так как производная от произведения равна сумме производных от каждого сомножителя. Однако  $R \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{dv}{dt}$  и  $R \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = R \cdot \frac{d}{dt}(-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}) = R(-\cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{i} - \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{j}) = -R\omega(\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) = -\omega \vec{R}$ , так как

$R(\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) = \vec{R}$  (см. (2.1)) и  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ . С учётом этого формула (2.5)

запишется как

$$\vec{a} = \frac{d(\omega R)}{dt} \cdot \vec{\tau} - \omega^2 \vec{R}. \quad (2.6)$$

Поскольку  $v = \omega R$  (см.(2.4)), то выражение (2.6) перепишется в виде:  $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} - \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$ . Здесь  $\frac{\vec{R}}{R}$  — единичный вектор (орт), совпадающий по направлению с вектором  $\vec{R}$ . Введя орт  $\vec{n}$ , направленный противоположно  $\frac{\vec{R}}{R}$ , т. е.  $\vec{n} = -\frac{\vec{R}}{R}$ , получаем, что

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}. \quad (2.7)$$

Вектор  $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$  направлен по касательной к окружности, т. е. по касательной к траектории движения. Поэтому его называют касательным ускорением. Он характеризует быстроту изменения модуля скорости. Вектор же  $\frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}$  направлен перпендикулярно к скорости и поэтому характеризует быстроту изменения направления скорости. Он называется нормальным ускорением. Выражение (2.7) запишем в ином виде:

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}, \quad (2.8)$$

где

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (2.9)$$

$$a_n = v^2 / R \quad (2.10)$$

— модуль касательного и нормального ускорения.

Соотношения (2.8) — (2.10) применимы не только при движении материальной точки по окружности, но и при криволинейном движении, поскольку любую кривую можно рассматривать как совокупность элементарных дуг окружностей различного радиуса.

Итак, в общем случае при неравномерном криволинейном движении ускорение составляет с вектором скорости  $\vec{v}$  произвольный угол  $\alpha$  (рис. 2.2). Из рис. 2.2 видно, что

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (2.11)$$

(согласно теореме Пифагора) и

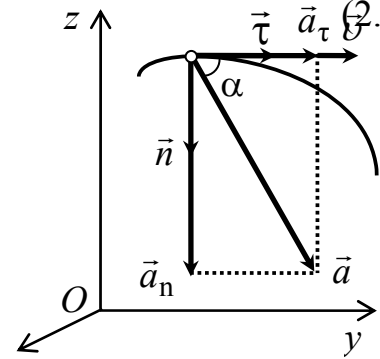


Рис. 2.2

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (2.12)$$

3. Выясним, какова связь между линейными и угловыми величинами при движении тела по окружности. Линейными величинами являются путь, скорость, касательное и нормальное ускорения, а угловыми величинами — угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение. Связь между модулями линейной и угловой скоростей материальной точки даётся соотношением (2.4). Продифференцируем его по времени  $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt}$ . Но, согласно формуле (2.9),  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ , а  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  — модуль углового ускорения (см. (1.13)). Поэтому

$$a_\tau = \varepsilon R. \quad (2.13)$$

Подставляя  $v = \omega R$  (см. (2.4)) в формулу (2.10), получаем для модуля нормального ускорения

$$a_n = \omega^2 R. \quad (2.14)$$

Таким образом, при движении материальной точки по окружности для описания её движения можно пользоваться как линейными, так и угловыми величинами. Однако при вращении твёрдого тела удобно использовать угловые величины, а не линейные, поскольку уравнения движения разных точек, выраженные в угловых величинах, одинаковы для всех точек тела, в то время как при пользовании линейными величинами они различны.

### § 3. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим некоторые случаи движения точечного тела, используя основные понятия кинематики.

**1. Равнопеременное криволинейное движение.** *Криволинейное движение, при котором модуль касательного ускорения остаётся постоянным*, называется **равнопеременным**, т. е.  $a_\tau = \text{const}$ . Найдём закон этого движения, если известно, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) скорость тела равна  $v_0$  и начальная координата  $l_0$ . Из формулы касательного ускорения (2.9) следует  $dv = a_\tau dt$ . Интегрируя это выражение, получаем:  $v = \int a_\tau \cdot dt = a_\tau \int dt = a_\tau t + C_1$ , где  $t$  — время движения тела,  $C_1$  — постоянная интегрирования. Значение  $C_1$  находится из начальных условий, подставляя  $t = 0$ :  $v_0 = a_\tau \cdot 0 + C_1 = C_1$ . Следовательно,

$$v = v_0 + a_\tau t. \quad (3.1)$$

Из формулы модуля скорости (см. (1.6)) находим  $dl = v \cdot dt$ . Интегрируя данное выражение и учитывая формулу (3.1), получаем:

$l = \int v \cdot dt = \int (v_0 + a_\tau t) dt = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} + C_2$ . Значение  $C_2$  вновь находим из начальных условий:  $C_2 = l_0$ . Тогда

$$l = l_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (3.2)$$

В случае прямолинейного движения радиус кривизны траектории  $R \rightarrow \infty$ . Поэтому нормальное ускорение  $a_n = v^2/R = 0$  и модуль касательного ускорения равен модулю ускорения  $a$  материальной точки (см. (2.11)). Для прямолинейного равноускоренного движения формулы скорости и координаты точечного тела получаются из уравнений (3.1) и (3.2) заменой  $a_\tau$  на  $a$  и  $l$  на  $x$ :

$$v = v_0 + at, \quad (3.3) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (3.4)$$

При этом предполагается, что материальная точка движется вдоль координатной оси  $x$ , направленной по траектории движения, и начальная координата точки равна  $x_0$ .

В случае равномерного движения, когда модуль скорости не меняется ( $v = \text{const}$ ), уравнение скорости и координаты тела находим из формул (3.1) — (3.4), полагая  $a_\tau = 0$  или  $a = 0$ :

$$v = v_0 = \text{const}, \quad l = l_0 + vt, \quad x = x_0 + vt. \quad (3.5)$$

## 2. Равнопеременное движение материальной точки по окружности.

Пусть точка движется по окружности вокруг неподвижной оси вращения. Тогда формулы (1.12) и (1.13) запишем в скалярном виде, поскольку векторы угловой скорости  $\vec{\omega}$  и углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  направлены вдоль оси вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.6) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (3.7)$$

В случае равнопеременного движения по окружности модуль углового ускорения  $\varepsilon = \text{const}$ , поскольку  $a_\tau = \text{const}$  (см. (2.13)). Найдём уравнение этого движения, если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) заданы начальный угол  $\varphi_0$  и модуль начальной угловой скорости  $\omega_0$ . Из формулы (3.7) следует:  $d\omega = \varepsilon \cdot dt$ . Интегрируя это выражение и учитывая начальное условие (при  $t = 0$   $\omega = \omega_0$ ), находим:

$$\omega = \int \varepsilon \cdot dt = \varepsilon t + C = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (3.8)$$

где  $t$  — время движения материальной точки. Из (3.6) получаем  $d\varphi = \omega \cdot dt$ . Интегрируя это дифференциальное уравнение с учётом выражения (3.8) и начальных условий (при  $t = 0$   $\varphi = \varphi_0$ ), получаем, что

$$\varphi = \int \omega \cdot dt = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (3.9)$$

Если точка движется с постоянной угловой скоростью ( $\omega = \text{const}$ ), то угловое ускорение  $\varepsilon = 0$ . Тогда соотношения (3.8) и (3.9) принимают вид:

$$\omega = \omega_0 = \text{const}, \quad (3.10)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (3.11)$$

## § 4. КИНЕМАТИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

До сих пор изучалось движение тел, которые можно было рассматривать как материальные точки. Рассмотрим теперь движение протяжённых тел. При этом будем считать тела абсолютно твёрдыми (твёрдыми). Под **твёрдым** телом в механике понимается тело, взаимное расположение частей которого в условиях данной задачи считается неизменным.

Существует два вида движения твёрдого тела: поступательное и вращательное. **Поступательным** называется движение, при котором прямая, соединяющая любые две точки тела, движется в пространстве параллельно самой себе. При **вращательном движении** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью вращения**. Любое сложное движение можно представить как результат сложения поступательного и вращательного движений. Пусть, например, тонкий стержень переходит из положения 1 в положение 2 (рис. 4.1). Из этого рисунка видно, что переход стержня можно представить как сумму двух движений: поступательного из положения 1 в 1' и поворота вокруг оси  $O$ , перпендикулярной к плоскости чертежа. Рассмотрим поступательное движение. При этом движении все точки тела проходят одинаковые пути. Поэтому они имеют одинаковые скорости и ускорения. Отсюда следует, что для описания такого движения тела достаточно выбрать на нём произвольную точку и использовать формулы кинематики материальной точки. Обычно выбирают его центр масс (см. § 9). При вращательном движении разные точки твёрдого тела проходят различные пути и, следовательно, обладают разными скоростями и ускорениями. Вследствие этого для характеристики такого движения надо выбирать такие величины, которые будут одинаковыми в данный момент времени для всех точек тела. Ими являются угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение.

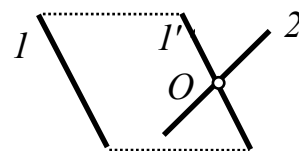


Рис. 4.1

## ГЛАВА 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Из главы 1 видно, что кинематика описывает движение и не рассматривает причины, его вызывающие. Однако именно этот вопрос важен с практической точки зрения. Изучением взаимосвязи движения и сил, действующих в механической системе, и занимается динамика. Основу динамики составляют три закона Ньютона, являющиеся обобщением большого числа опытных данных. Прежде чем перейти к их рассмотрению, введём понятия силы и массы тела.

### § 5. СИЛА. МАССА

1. В повседневной жизни нам постоянно приходится сталкиваться с различными взаимодействиями. Например, с притяжением тел к Земле, отталкиванием и притяжением магнитов и токов, текущих по проводам, отклонением электронных пучков в электронно-лучевых трубках при действии на них электрических и магнитных полей и т. д. *Для характеристики взаимодействия тел* и вводится понятие силы. В механике *сила*, действующая на тело, *является мерой его взаимодействия с окружающими телами*. Действие силы проявляется в деформации тела или в приобретении им ускорения. Сила — это вектор. Поэтому она характеризуется модулем, направлением и точкой приложения.

2. Как следует из опыта, *тела обладают способностью противодействовать изменению скорости*, которой они обладают, т. е. они *противодействуют приобретению ускорения*. Это свойство тел было названо **инертностью**. Для характеристики инертных свойств тел используют физическую величину, называемую **массой**. Чем больше масса тела, тем оно инертнее. Кроме того, вследствие гравитационных сил все тела притягиваются друг к другу. Модуль этих сил зависит от массы тел (7.7). Таким образом, масса характеризует и гравитационные свойства тел. Чем она больше, тем больше сила их гравитационного притяжения. Итак, *масса — это мера инертности тел при поступательном движении и мера их гравитационного взаимодействия*.

В системе единиц СИ масса измеряется в килограммах (кг).

### § 6. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА

За первый закон динамики поступательного движения Ньютон принял закон инерции, открытый Галилеем: *тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют силы или их действие скомпенсировано*.

Первый закон Ньютона выполняется не в любой системе отсчёта. Так, например, шар, лежащий на полу движущегося вагона, приходит в



движение относительно вагона при резком его торможении, хотя равнодействующая сила, действующая на шар, равна нулю. *Системы отсчёта, в которых применим первый закон Ньютона, называются **инерциальными***. Строго инерциальных систем отсчёта не существует. Однако опытным путём устанавливается, какие системы отсчёта можно считать инерциальными. Так, система отсчёта, связанная с Солнцем, с большой степенью точности является инерциальной. При решении многих задач инерциальной считают систему отсчёта, связанную с Землёй. Любая система отсчёта, которая движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, в свою очередь, является инерциальной.

## § 7. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

1. Пусть на одно и то же тело поочерёдно действуют разные силы. При этом оказывается, что ускорения, приобретаемые телом, будут различными. Однако отношение модуля  $F$  силы, приложенной к телу, к модулю ускорения  $a$ , которым обладает тело, является величиной постоянной для всех сил. Поэтому это отношение принимают за характеристику инертных свойств тела, т. е. оно равно массе тела. Обозначив его через  $m$ , получаем, что

$$m = \frac{F}{a}. \quad (7.1)$$

Сила и ускорение являются векторами. Поэтому выражение (7.1) перепишем в векторном виде:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}. \quad (7.2)$$

Соотношение (7.2) носит название **второго закона Ньютона: в инерциальных системах отсчёта ускорение, приобретаемое телом, пропорционально силе, действующей на него, обратно пропорционально массе тела и направлено в сторону действия силы.**

Если на тело действует несколько сил, то в формуле (7.2) под  $\vec{F}$  надо понимать равнодействующую этих сил, т. е.  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , где  $\vec{F}_i$  — отдельные силы, приложенные к телу.

Согласно специальной теории относительности, разработанной Эйнштейном, масса тела  $m$  зависит от скорости  $v$  его движения. Он установил, что

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.3)$$

где  $m_0$  — масса покоя тела (масса покоящегося тела),  $c$  — скорость света в вакууме.

Дадим иную формулировку второго закона Ньютона. Из уравнения (7.2) с учётом  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  (см. (1.7)) находим, что  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ . При скоростях движения, много меньших скорости света, как видно из формулы (7.3), масса тел является практически постоянной величиной. Поэтому её вносим под знак производной:  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ . Векторную величину  $\vec{p} = m\vec{v}$  называют **импульсом (количеством движения) тела**. Учитывая это, получаем:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}, \quad (7.4)$$

т. е. **равнодействующая сил, действующих на тело, равна производной импульса тела по времени или изменению импульса за единицу времени**. Это выражение является более общей формулировкой второго закона Ньютона, поскольку оно применимо и при движении тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света.

Запишем уравнение (7.1) в виде  $F = ma$ . Отсюда вводится единица силы ньютон (Н).  $1 \text{ Н}$  — сила, сообщаящая телу массой  $1 \text{ кг}$  ускорение  $1 \text{ м/с}^2$ , т. е.  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2$ .

2. Согласно (1.10),  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ . Тогда формула (7.2) запишется в виде

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (7.5)$$

Это выражение называется **дифференциальным уравнением** поступательного движения тела, поскольку оно содержит вторую производную  $\vec{r}$  по времени.

3. Взаимодействие тел определяется **третьим законом Ньютона: в инерциальных системах отсчёта силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю и противоположны по направлению**:

$$\boxed{\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}}, \quad (7.6)$$

где  $\vec{f}_{ik}$  и  $\vec{f}_{ki}$  — силы, действующие на  $i$ -е тело со стороны  $k$ -го тела и на  $k$ -ое со стороны  $i$ -го соответственно. Эти силы приложены к различным телам и всегда возникают попарно.

Надо чётко себе представлять, что законы Ньютона являются приближёнными, они имеют смысл только во всей совокупности. Однако огромное число механических задач, возникающих в процессе человеческой деятельности, решается с помощью этих законов, несмотря на их приближённость.

**4. Силы в природе.** До сих пор использовалось общее понятие силы, и не рассматривался вопрос о том, что эти силы собой представляют. Остановимся кратко на описании некоторых из них.

Несмотря на удивительное разнообразие сил, встречающихся в природе, их можно свести к четырём видам фундаментальных сил: гравитационные, электромагнитные, ядерные и слабые. Гравитационные силы возникают между любыми телами. Их действие надо учитывать лишь в мире больших тел. Электромагнитные силы действуют на заряды как неподвижные, так и движущиеся. Поскольку вещество построено из атомов, которые, в свою очередь, состоят из электрически заряженных частиц электронов и протонов, то большинство сил, с которыми мы встречаемся в жизни, это электромагнитные силы. Ими являются, например, силы упругости, возникающие при деформации тел, силы трения. Ядерные и слабые силы проявляют себя на расстояниях, не превышающих  $10^{-14}$  м. Поэтому эти силы заметны лишь в микромире. Необходимо отметить, что вся классическая физика, а вместе с ней и понятие силы не применимы к элементарным частицам. Характеризовать точным образом взаимодействие этих частиц с помощью сил нельзя. Единственно возможным здесь становится энергетическое описание. Тем не менее, и в атомной физике часто говорят о силах. В этом случае термин сила становится синонимом слова взаимодействие. Таким образом, в современной науке слово сила употребляется в двух смыслах: во-первых, в смысле механической силы, здесь она является точной количественной мерой взаимодействия, и, во-вторых, обозначает наличие взаимодействия определённого типа, точной количественной мерой которого может быть только энергия.

В механике рассматриваются три типа сил: гравитационные, упругие и силы трения. Кратко остановимся на них.

1. Все тела в природе притягиваются друг к другу. Об этом свидетельствует, например, движение планет, звёзд и т. д. относительно друг друга. Эти силы получили название гравитационных сил. Ньютон установил закон, называемый **законом всемирного тяготения: силы, с которыми притягиваются две материальные точки, пропорциональны произведению их масс, обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними и направлены вдоль прямой, соединяющей их**, т. е.

$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad (7.7)$$

где  $M$  и  $m$  — массы тел;  $r$  — расстояние между телами;  $\gamma$  — гравитационная постоянная. Знак минус указывает на то, что это сила притяжения.

Для вычисления гравитационной силы между двумя протяжёнными телами их надо мысленно разбить на элементарные части, которые можно

принять за материальные точки. Затем по формуле (7.7) найти силы притяжения между всеми попарно взятыми частями данных тел и их векторно сложить (проинтегрировать). Это является, в общем, сложной задачей. Такие расчёты показали, что два однородных шара притягиваются между собой так, как если бы их масса была сосредоточена в их центрах. Поэтому для вычисления силы притяжения между ними можно пользоваться формулой (7.7), беря расстояние между центрами шаров.

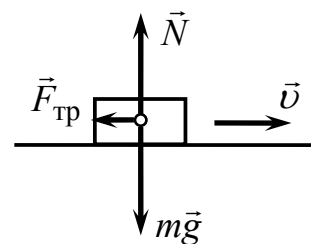


Рис. 7.1

Выясним физический смысл гравитационной постоянной. Из формулы (7.7) следует, что при  $m = M = 1 \text{ кг}$  и  $r = 1 \text{ м}$ ,  $\gamma = F$ , т. е. *гравитационная постоянная равна модулю силы притяжения материальных точек единичной массы, находящихся на единичном расстоянии друг от друга*. Впервые опытное доказательство закона всемирного тяготения проведено Кавендишем. Он сумел определить величину гравитационной постоянной. По современным данным  $\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ . Очень малая величина  $\gamma$  указывает на то, что сила гравитационного взаимодействия значительна только в случае тел с большими массами.

2. При упругих деформациях возникают силы упругости (упругие силы). Согласно закону Гука, модуль  $F_{\text{упр}}$  упругой силы пропорционален величине деформации  $x$ , т. е.

$$F_{\text{упр}} = -kx, \quad (7.8)$$

где  $k$  — коэффициент упругости. Знак минус отражает тот факт, что направления силы и деформации противоположны.

3. При перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друга возникают силы трения. Различают внутреннее (вязкое) и внешнее (сухое) трение. Трение между твёрдым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды, называют вязким.

**Внешним трением** называется такое явление, когда в месте контакта соприкасающихся твёрдых тел возникают силы, препятствующие взаимному перемещению этих тел. Если соприкасающиеся тела неподвижны, то между ними возникнет сила при попытке сдвинуть одно тело относительно другого. Она называется **силой трения покоя**. Сила трения покоя не является однозначно определённой величиной. Она изменяется от нуля до максимального значения силы, приложенной параллельно плоскости соприкосновения, при которой тело (брусек) начинает двигаться. Обычно силой трения покоя и называют эту максимальную силу трения. Модуль силы трения покоя  $F_{\text{пок}}$  пропорционален модулю силы нормального давления, который, согласно третьему закону Ньютона (7.6), равен модулю  $N$  силы реакции опоры, т. е.

$$F_{\text{пок}} = \mu_{\text{пок}} N, \quad (7.9)$$

где  $\mu_{\text{пок}}$  — коэффициент трения покоя. При движении тела по поверхности другого возникает сила трения скольжения (рис. 7.1). Опытным путём установлено, что модуль  $F_{\text{тр}}$  силы трения скольжения, так же как и силы трения покоя, пропорционален модулю силы нормального давления:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (7.10)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения. Установлено, что коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента трения покоя. Однако при решении многих задач их считают равными.

## § 8. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

*Совокупность тел, взаимодействующих между собой и рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой**. Силы, действующие в механической системе, подразделяются на две группы.*

1. **Внутренние силы**, т. е. *силы взаимодействия между телами, входящими в систему*. Согласно третьему закону Ньютона эти силы попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому их векторная сумма равна нулю.

2. **Внешние силы** — это *силы, действующие на тела системы со стороны тел, не принадлежащих ей*.

Если на механическую систему *внешние силы не действуют или их векторная сумма равна нулю*, то такую систему называют **замкнутой** (или **изолированной**).

Рассмотрим механическую систему, состоящую только из двух тел. Обозначим импульсы этих тел через  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ . Каждое тело данной системы движется под действием внутренних и внешних сил. Поэтому на основании второго закона Ньютона для каждого тела запишем:  $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{F}_1$ ,

$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{F}_2$ . Здесь  $\vec{f}_{12}$  и  $\vec{f}_{21}$  — внутренние силы, действующие на первое тело со стороны второго и на второе со стороны первого соответственно,  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  — равнодействующие внешних сил, приложенных к первому и второму телу. Складывая эти уравнения, получаем:

$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}) + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ . Согласно третьему закону Ньютона,  $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$ . Поэтому первая скобка равна нулю. Но  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$  — векторная сумма внешних сил, действующих на систему, и  $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ , так как сумма производных равна производной от

суммы. Величину  $\vec{p}$ , равную векторной сумме импульсов тел, входящих в механическую систему, называют **импульсом системы**, т. е.  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ . В случае механической системы, состоящей из двух тел,  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ . С учётом этого находим:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad (8.1)$$

Получили второй закон Ньютона для механической системы: **векторная сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна производной импульса системы по времени.**

В случае замкнутой механической системы  $\vec{F} = 0$ . Тогда из формулы (8.1) следует, что  $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$  и, следовательно,

$$\boxed{\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const},} \quad (8.2)$$

так как производная от постоянной величины равна нулю. Соотношение (8.2) называют **законом сохранения импульса: импульс замкнутой механической системы постоянен при любых взаимодействиях тел, происходящих в ней.**

Можно назвать много явлений, в основе которых лежит закон сохранения импульса — отдача орудий и огнестрельного оружия при выстреле, действие реактивных двигателей и т. д. В механике закон сохранения импульса является следствием законов Ньютона, являющихся основными законами динамики. Однако этот закон универсален и имеет место и в микромире, где законы Ньютона неприменимы.

## § 9. ЦЕНТР МАСС

Тела механической системы, например, Солнечной системы, движутся в пространстве по различным траекториям. В то же время Солнечная система сама находится в движении. Для суждения о перемещении механической системы в целом вводится понятие центра масс. **Центром масс** называют точку, в которой как бы сосредоточена вся масса системы. Это

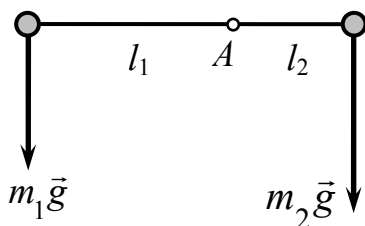


Рис. 9.1

понятие тесно связано с понятием центра тяжести, используемого при изучении поведения тела под действием сил притяжения к Земле. Необходимо отметить, что в механической системе, в которой ускорение свободного падения всюду одинаково центры масс и тяжести совпадают. Это имеет место, когда размеры системы

не слишком велики, например, тела, находящегося на Земле. В противном случае они не совпадают.

Центром тяжести двух материальных точек называют точку  $A$ , расположенную на прямой, соединяющей их, относительно которой моменты сил тяжести этих тел скомпенсированы, т. е.  $m_1gl_1 = m_2gl_2$ . Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — массы материальных точек,  $l_1$  и  $l_2$  — плечи сил тяжести этих материальных точек (рис. 9.1). Физически это означает, что если соединить рассматриваемые материальные точки жёстким стержнем, массой которого можно пренебречь, и в точку  $A$  поставить опору, то система будет находиться в равновесии. В этом случае масса системы как бы сосредоточена в этой точке и сила тяжести системы, проходя через центр тяжести, уравнивается силой реакции опоры. Обобщая сказанное на любое тело, можно ввести понятие *центра тяжести* тела как точки, в которой приложена сила тяжести тела. Относительно центра тяжести моменты сил отдельных частей, на которые мысленно разбивается тело, взаимно уравниваются. От рассмотрения понятия центра тяжести, связанного с силой тяжести, нетрудно перейти к более фундаментальному понятию центра масс, поскольку масса является неотъемлемым свойством любого тела.

*Центром масс* двух материальных точек, независимо от того, находятся ли они под действием силы тяжести или нет, называют точку, *делящую расстояние между ними обратно пропорционально их массам*, т. е.  $l_1/l_2 = m_2/m_1$ . Это следует из формулы  $m_1gl_1 = m_2gl_2$ , рассмотренной ранее. Центр масс трёх материальных точек делит расстояние между центром масс каких-либо двух из них и третьей материальной точкой обратно пропорционально отношению суммы первых двух масс к третьей массе (рис. 9.2). Таков же переход от трёх материальных точек к четырём и вообще к любому их числу.

Найдём формулу, по которой можно рассчитывать координаты центра масс механической системы. Пусть механическая система состоит из двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , координаты которых  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  соответственно. Будем рассматривать с начала лишь одну проекцию центра масс на координатную ось  $x$ , т. е.  $x_{C2}$ . Поскольку центр масс делит расстояние между этими точками обратно пропорционально их массам, то и отношение проекций этого расстояния на координатные оси также обратно пропорциональны их массам. Учитывая это, запишем:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{x_1 - x_{C2}}{x_{C2} - x_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Отсюда получаем координату центра масс двух материальных точек:  $x_{C2} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ . Аналогично най-

дим координату  $x_{C3}$  трёх точек:

$$\frac{x_{C2} - x_{C3}}{x_{C3} - x_3} = \frac{m_3}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad x_{C3} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

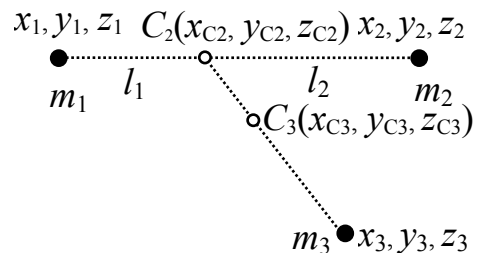


Рис. 9.2

Анализируя эти формулы, заключаем, что в случае механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , координата  $x_C$  центра масс  $C$  находится по формуле:  $x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{m}$ , где  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  — масса данной механической системы. Аналогичные выражения можно получить и для координат  $y_C$  и  $z_C$ :  $y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}$ ,  $z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$ . Если положение материальных точек характеризовать радиус-векторами  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ , то выражение радиус-вектора центра масс механической системы имеет вид:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (m_i x_i \vec{i} + m_i y_i \vec{j} + m_i z_i \vec{k}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (9.1)$$

В случае протяженных тел для нахождения радиус-вектора центра масс поступают следующим образом. Мысленно тело разбивают на элементарные участки массой  $\Delta m_i$ , которые можно принять за материальные точки. Определяют их радиус-векторы  $\vec{r}_i$ . Тогда, согласно (9.1),

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta m_i = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \cdot dm, \quad (9.2)$$

поскольку суммирование малых величин есть интегрирование, которое ведётся по всему объёму тела  $V$ .

Определённый таким образом центр масс обладает двумя важными свойствами. Выясним их. Продифференцируем (9.1) по времени и умножим обе части равенства на  $m$ . Получаем, что  $m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)$ , так как масса — величина постоянная и она вынесена из под знака производной, а производная от суммы равна сумме производных от каждого слагаемого. Согласно определению скорости (1.3), запишем:  $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$  и  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ , где  $\vec{v}_C$  и  $\vec{v}_i$  — скорости центра масс механической системы и отдельных материальных точек соответственно. С учётом этого имеем:  $m \vec{v}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ . Но  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{p}$  — импульс механической системы. Поэтому

$$\vec{p} = m \vec{v}_C. \quad (9.3)$$

Таким образом, импульс механической системы описывается такой же формулой, как и импульс материальной точки, но в этом случае рассматривается скорость центра масс этой системы.



Продифференцируем теперь (9.3) по времени:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_c)}{dt} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt}$ .

Согласно второму закону Ньютона (8.1), для механической системы  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  и по определению ускорения (1.7)  $\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{a}_c$ , где  $\vec{F}$  — векторная сумма внешних сил, приложенных к механической системе,  $\vec{a}_c$  — ускорение центра масс системы. Тогда

$$\vec{a}_c = \vec{F} / m, \quad (9.4)$$

т. е. *центр масс механической системы* движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила равна векторной сумме внешних сил.

Это иллюстрируется следующим примером. Неразорвавшаяся граната описывает в пространстве некоторую траекторию. Если во время полёта она разорвалась (под действием внутренних сил), то траектория полёта центра масс будет той же, в то время как осколки будут двигаться по самым разным траекториям. Если механическая система замкнутая, то  $\vec{F} = 0$ .

Тогда из выражения (9.4) следует  $\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0$  и  $\vec{v}_c = \text{const}$ , так как производная от постоянной величины равна нулю. Следовательно, центр масс замкнутой механической системы движется прямолинейно и равномерно, в то время как отдельные материальные точки системы или различные точки твёрдого тела могут двигаться по криволинейным траекториям, т. е. система может вращаться.

В силу того, что скорость центра масс замкнутой системы не меняется со временем, система отсчёта, связанная с ним, является инерциальной. При описании явлений в такой системе отсчёта исключаются усложнения, вносимые движением системы, и лучше выявляются свойства процессов, происходящих в ней.

### ГЛАВА 3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В природе и технике мы постоянно сталкиваемся с вращательным движением. Наряду с поступательным, оно является основным движением, поскольку любое движение может быть представлено как результат сложения этих движений (§ 4). При изучении динамики поступательного движения твёрдого тела использовались такие понятия, как масса, сила и импульс тела. Однако для вращательного движения этих понятий недостаточно. Действительно, знание только одной силы не даёт сведений о том, будет ли вращаться тело. Так, если направление силы проходит через ось вращения, то тело не вращается. Или при вращении симметричного тела

относительно оси симметрии импульс тела равен нулю. Это обусловлено тем, что импульсы одинаковых диаметрально расположенных частей тела равны по модулю, но противоположны по направлению. Из приведённых примеров следует, что для описания вращательного движения необходимы новые понятия. Ими являются моменты силы, импульса и инерции.

В данной главе будет рассмотрено лишь движение точечных тел относительно оси, перпендикулярной к плоскости орбиты, а также вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Наиболее общие случаи вращения рассматриваются в теоретической механике.

## § 10. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Основной закон динамики вращательного движения выводится с использованием второго и третьего законов Ньютона. Найдём его сначала для материальной точки.

**1. Основной закон динамики вращательного движения материальной точки.** Пусть материальная точка массой  $m$  движется в инерциальной системе отсчёта по окружности радиусом  $R$  под действием силы  $\vec{F}$ , которая расположена в плоскости окружности (рис. 10.1). Данное движение можно рассматривать как вращение точечного тела вокруг оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости орбиты. Положение материальной точки будем характеризовать радиус-вектором  $\vec{R}$ , проведённым из центра окружности  $O$ . Под действием касательной составляющей  $\vec{F}_\tau$  материальная точка приобретает касательное ускорение  $\vec{a}_\tau$ . Согласно второму закону Ньютона, модуль этого ускорения равен:

$$a_\tau = F_\tau / m. \quad (10.1)$$

При движении точечного тела по окружности удобнее использовать угловые величины (§ 2). Поэтому выразим (10.1) через угловые характеристики. Из выражения (2.13) имеем:  $a_\tau = \varepsilon R$ , где  $\varepsilon$  — модуль углового ускорения движущейся точки. С учётом этого получаем:  $\varepsilon = F_\tau / (mR)$ . Умножая числитель и знаменатель на радиус окружности  $R$ , находим, что

$$\varepsilon = RF_\tau / (mR^2). \quad (10.2)$$

Из рис. 10.1 видно, что  $F_\tau = F \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{R}$  и  $\vec{F}$ . Поэтому  $RF_\tau = RF \cdot \sin \alpha$ . Введём обозначения:

$$M_z = RF \cdot \sin \alpha, \quad (10.3) \quad I_z = mR^2. \quad (10.4)$$

Тогда уравнение (10.2) принимает вид:

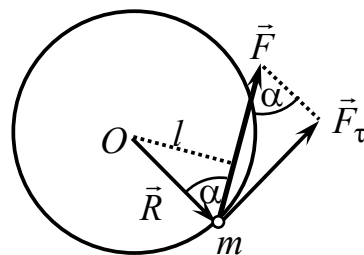


Рис. 10.1

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z}. \quad (10.5)$$

Однако угловое ускорение  $\varepsilon$  является вектором, а  $I_z$  — положительным скаляром, поскольку  $m$  и  $R$  — положительные величины. Поэтому  $M_z$  также будет вектором, направление которого совпадает с  $\vec{\varepsilon}$  (при делении вектора на положительный скаляр получаем вектор того же направления). В силу этого формулу (10.5) перепишем в векторном виде:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_z}{I_z}, \quad (10.6)$$

где  $\vec{M}_z$  и  $I_z$  называют моментом силы и моментом инерции материальной точки относительно оси соответственно. Соотношение (10.6) представляет собой **основной закон динамики вращательного движения материальной точки**.

Выясним физический смысл величины  $\vec{M}_z$ .

**2. Момент силы относительно оси и точки.** Как известно из векторной алгебры, выражение (10.3) представляет собой модуль векторного произведения векторов  $\vec{R}$  и  $\vec{F}$ . Учитывая это, формулу (10.3) запишем в векторном виде:

$$\vec{M}_z = [\vec{R} \cdot \vec{F}]. \quad (10.7)$$

Как следует из (10.6), момент силы относительно оси обуславливает угловое ускорение тела. Следовательно, *момент силы характеризует вращательную способность силы*. Выражение (10.7) можно рассматривать и как момент  $\vec{M}$  силы относительно точки  $O$ , вокруг которой движется тело, т. е.  $\vec{M} = \vec{M}_z$ .

Итак, **моментом  $\vec{M}$  силы относительно точки  $O$**  называется *векторное произведение радиус-вектора, проведённого из этой точки до точки приложения силы, на эту силу*. Вектор  $\vec{M}$  является аксиальным. Он перпендикулярен к плоскости, проведённой через векторы  $\vec{R}$  и  $\vec{F}$ . Его направление находится по правилу векторного произведения или по правилу **правого винта**: при вращении винта в направлении силы, его поступательное движение даёт направление момента силы (рис. 10.2). Модуль

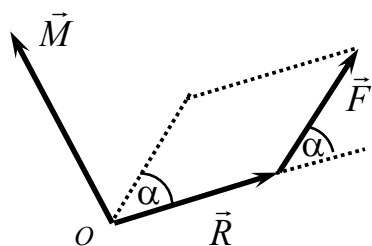


Рис. 10.2

момента силы (см. (10.3)) можно записать в ином виде, если учесть, что  $R \cdot \sin \alpha = l$  является длиной перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на направление силы (рис. 10.1). Это расстояние называют **плечом силы**. Тогда

$$M = M_z = F l, \quad (10.8)$$

т. е. модуль момента силы равен произведению модуля силы на плечо.

**3. Основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела.** Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг закрепленной оси  $z$ . Мысленно разобьём его на элементарные части массой  $\Delta m_i$ , которые принимаем за материальные точки. Поэтому тело можно рассматривать как механическую систему, состоящую из материальных точек. Эти точки движутся по окружностям с центрами, лежащими на оси вращения  $z$ . Согласно (10.6), для  $i$ -й части тела имеем:  $\vec{M}_{zi} = \vec{\epsilon} I_{zi}$ , где  $\vec{\epsilon}$  — угловое ускорение этой точки;  $\vec{M}_{zi}$  — результирующий момент внешних и внутренних сил, приложенных к этой части тела;  $I_{zi} = R_i^2 \Delta m_i$  — момент инерции  $i$ -й материальной точки относительно оси вращения;  $R_i$  — радиус окружности, по которой движется эта точка (10.4). Поэтому  $\vec{M}_{zi} = \vec{\epsilon} R_i^2 \Delta m_i$ . Аналогичные уравнения записываем для всех частей тела. Сложив все эти уравнения, получаем:

$$\sum_i \vec{M}_{zi} = \sum_i \vec{\epsilon} R_i^2 \Delta m_i. \quad (10.9)$$

Но  $\sum_i \vec{M}_{zi} = \vec{M}_z^{\text{внеш}} + \vec{M}_z^{\text{внутр}}$ , где  $\vec{M}_z^{\text{внеш}}$  и  $\vec{M}_z^{\text{внутр}}$  — равнодействующий момент внешних и внутренних сил, действующих на тело. Однако  $\vec{M}_z^{\text{внутр}} = 0$ . Это обусловлено тем, что силы взаимодействия любых двух частей тела, согласно третьему закону Ньютона, равны по модулю и противоположны по направлению, а плечи у них одинаковы (рис. 10.3). Преобразуем теперь правую часть равенства (10.9). Все точки твёрдого тела обладают одинаковым угловым ускорением  $\vec{\epsilon}$ . Поэтому выносим его за знак суммы:  $\sum_i \vec{\epsilon} R_i^2 \Delta m_i = \vec{\epsilon} \sum_i R_i^2 \Delta m_i$ . Учитывая, что суммирование малых величин представляет собой интегрирование, запишем:

$$I_z = \sum_i R_i^2 \Delta m_i = \int_V R^2 dm. \quad (10.10)$$

Здесь интеграл берётся по всему объёму тела  $V$ . Выражение (10.10) получило название **момента инерции тела**. Тогда (10.9) запишется в виде:

$$\boxed{\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}_z^{\text{внеш}}}{I_z}}, \quad (10.11)$$

т. е. **угловое ускорение, приобретаемое телом, пропорционально моменту внешних сил, приложенных к нему, относительно оси вращения, обратно пропорционально моменту инерции тела относительно той же оси**

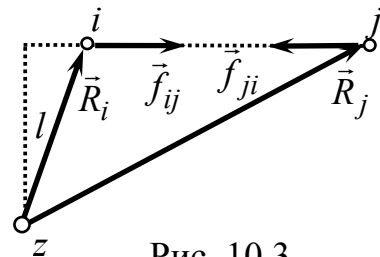


Рис. 10.3

и направлено в сторону равнодействующего момента сил.

Соотношение (10.11) называется **основным уравнением динамики вращательного движения твёрдого тела**.

**4. Момент инерции тела.** Из опытов следует, что *вращающиеся тела обладают способностью противодействовать изменению угловой скорости*, которой они обладают, т. е. *противодействуют приобретению углового ускорения*. Например, автомобильное колесо раскрутить труднее, чем велосипедное. Это свойство тел было названо **инертностью тела** при вращательном движении. Из соотношения (10.11) вытекает, что модуль углового ускорения  $\varepsilon$  обратно пропорционален величине  $I_z$ , т. е. чем больше  $I_z$ , тем меньше  $\varepsilon$  и тем больше тело противодействует изменению его угловой скорости. Следовательно, величина  $I_z = \int_V R^2 dm$ , названная **моментом**

**инерции тела**, характеризует *инертность тела* при его вращении. Момент инерции является важной характеристикой вращающегося тела. По-

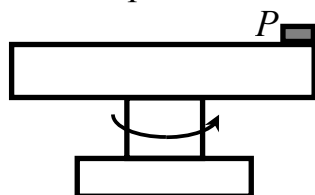


Рис. 10.4

этому надо уметь её рассчитывать. Анализируя (10.10), приходим к выводу, что инертность тела при вращательном движении зависит не только от его массы, но и её распределения относительно оси вращения. В этом легко убедиться на следующем примере. Пусть имеется горизонтальная платформа с грузом, способная вращаться вокруг вертикальной

оси (рис. 10.4). Оказывается, что под действием одного и того же момента сил раскрутить её тем труднее, чем дальше от оси вращения находится груз  $P$ , хотя масса системы остаётся неизменной.

Аналитическое вычисление интеграла (10.10) удаётся провести лишь для тел правильной формы — цилиндра, шара и некоторых других. Для тел неправильной формы такие интегралы находятся приближённо. Кроме того, моменты инерции тел можно определить опытным путём. В качестве примера

Таблица 10.1

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Шар радиусом $R$ и массой $m$	Ось симметрии	$\frac{2}{5}mR^2$
Сплошной цилиндр (диск) радиусом $R$ и массой $m$	Ось совпадает с геометрической осью цилиндра	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$ и массой $m$	Ось проходит через середину стержня перпендикулярно к ней	$\frac{1}{12}ml^2$

вычислим момент инерции тонкостенного обруча массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. В данном случае все элементарные массы  $dm$  находятся на одинаковом расстоянии  $R$  от оси вращения. Поэтому  $R^2$  можно вынести за знак интеграла:

$$I_z = \int_V R^2 dm = R^2 \int_V dm = mR^2, \text{ так как сумма всех масс}$$

элементарных частей равна массе тела.

В табл. 10.1 приводятся формулы, по которым рассчитываются моменты инерции некоторых тел относительно оси, проходящей через центр масс.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящих через центр масс  $C$ , то момент инерции тела относительно произвольной оси  $z$  находят, используя теорему Штейнера, которую приводим без доказательства: *момент инерции  $I_z$  тела относительно любой оси равен сумме момента  $I_c$  тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс  $C$ , и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $d$  между осями* (рис. 10.5), т. е.

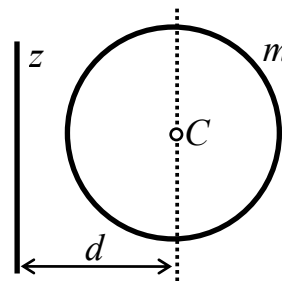


Рис. 10.5

$$I_z = I_c + md^2. \quad (10.12)$$

## § 11. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

**1. Момент импульса материальной точки.** По аналогии с моментом силы относительно точки вводится понятие момента импульса. **Моментом  $\vec{L}$  импульса точечного тела относительно точки** называется векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведённого из этой точки до точечного тела, на импульс  $\vec{p}$  этого тела:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}].} \quad (11.1)$$

Вектор  $\vec{L}$ , как и момент силы, является аксиальным. Он перпендикулярен к плоскости, проведённой через векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ . Его направление находится по правилу векторного произведения или по правилу **правого винта**:

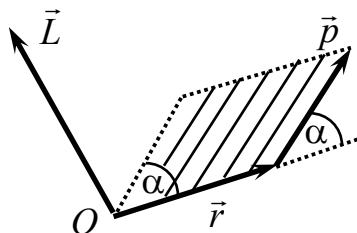


Рис. 11.1

**та:** при повороте винта в направлении импульса его поступательное движение даёт направление  $\vec{L}$  (рис. 11.1). Модуль  $L$  момента импульса равен

$$L = rp \cdot \sin \alpha, \quad (11.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ , т. е. площади заштрихованного параллелограмма.

Формула (11.1) пригодна и для расчёта мо-

мента импульса материальной точки, движущейся по произвольной траектории относительно некоторой точки  $O$ , принимаемой за начало координат. Однако необходимо особо отметить случай движения точечного тела по окружности. Согласно (11.2), модуль момента импульса относительно центра окружности равен

$$L = Rp = m\nu R, \quad (11.3)$$

где  $R$  — радиус окружности,  $m$  и  $\nu$  — масса и скорость данного тела. В этом случае  $\sin \alpha = 1$ , поскольку радиус окружности перпендикулярен к вектору скорости, направленному по касательной к окружности, и  $r = R$ . Движение точечного тела по окружности эквивалентно его вращению вокруг оси, перпендикулярной к плоскости окружности и проходящей через её центр. Пусть это будет ось  $z$ . Тогда момент импульса относительно оси вращения, учитывая (11.1), равен:

$$\vec{L}_z = [\vec{R}\vec{p}], \quad (11.4)$$

где  $\vec{R}$  — радиус-вектор, проведённый из точки пересечения оси с плоскостью окружности, по которой движется точечное тело. Направление  $\vec{L}_z$  также находится по правилу правого винта.

**2. Момент импульса твёрдого тела.** Пусть твёрдое тело вращается вокруг закреплённой оси  $z$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Для нахождения момента импульса тела рассматриваем его как механическую систему материальных точек. Мысленно разобьём тело на элементарные части массой  $\Delta m_i$ , которые можно принять за материальные точки. Очевидно, что момент импульса  $\vec{L}_z$  тела относительно оси равен векторной сумме моментов импульсов  $\Delta \vec{L}_{zi}$  отдельных элементарных частей тела относительно той же оси. При вращении тела все его точки движутся по окружностям различного радиуса  $R_i$ , плоскости которых перпендикулярны к оси вращения. Поэтому моменты импульсов  $\Delta \vec{L}_{zi}$  всех элементарных частей тела, согласно правилу правого винта, направлены в одну сторону вдоль оси вращения. Тогда векторное сложение заменяется скалярным, т. е.

$$L_z = \sum_i \Delta L_{zi}. \quad (11.5)$$

Используя формулу (11.3), имеем, что  $\Delta L_{zi} = R_i \nu_i \cdot \Delta m_i$ , где  $\nu_i$  — модуль линейной скорости  $i$ -й части. Но  $\nu_i = \omega R_i$  (см. (2.4)). Поэтому  $\Delta L_{zi} = \omega R_i^2 \cdot \Delta m_i$ , и с учётом выражения (11.5)  $L_z = \sum_i \omega R_i^2 \cdot \Delta m_i$ . Поскольку все точки тела обладают одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , то её выносим за знак суммы:  $L_z = \omega \sum_i R_i^2 \Delta m_i$ . Так как  $\sum_i R_i^2 \cdot \Delta m_i = I_z$  — момент инерции тела (10.10), то  $L_z = I_z \omega$ . Запишем это выражение в векторном виде:

$$\boxed{\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}.} \quad (11.6)$$

Итак, **момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения** равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на его угловую скорость. Из (11.6) следует, что направления  $\vec{L}_z$  и  $\vec{\omega}$  совпадают (при умножении вектора  $\vec{\omega}$  на положительный скаляр получаем вектор  $\vec{L}_z$  того же направления). Поэтому направление  $\vec{L}_z$ , как и направление  $\vec{\omega}$ , находят по правилу правого винта.

**3. Взаимосвязь момента силы и момента импульса.** Используя понятие момента импульса, основному закону динамики вращательного движения твёрдого тела придадим иной вид. Из выражения (10.11) следует, что  $\vec{M}_z^{\text{внеш}} = I_z \vec{\varepsilon}$ . Согласно формуле (1.13), угловое ускорение  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ . То-

гда  $\vec{M}_z^{\text{внеш}} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ . Поскольку момент инерции  $I_z$  твёрдого тела величина постоянная (тело не деформируется), то его вносим под знак производной:  $\vec{M}_z^{\text{внеш}} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt}$ . Учитывая (11.6), получаем:

$$\boxed{\vec{M}_z^{\text{внеш}} = \frac{d\vec{L}_z}{dt},} \quad (11.7)$$

т. е. **момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения равен производной по времени от момента импульса тела относительно той же оси.** Соотношение (11.7) является более общей записью основного закона динамики вращательного движения тела, так как оно оказывается справедливым и для тел, у которых момент инерции тела не является постоянной величиной.

**4. Закон сохранения момента импульса.** Пусть равнодействующий момент внешних сил, действующих на тело (систему материальных точек), равен нулю, т. е.  $\vec{M}_z^{\text{внеш}} = 0$ . Тогда из формулы (11.7) следует  $\frac{d\vec{L}_z}{dt} = 0$  и, следовательно,

$$\boxed{\vec{L}_z = \text{const},} \quad (11.8)$$

поскольку производная от постоянной величины равна нулю.

Таким образом, закон сохранения момента импульса заключается в следующем: **момент импульса замкнутой механической системы относительно оси или точки постоянен во времени.** Это означает, что моменты импульсов отдельных тел системы могут изменяться, однако их векторная сумма остаётся неизменной.



Справедливость рассмотренного закона можно продемонстрировать на опытах. Рассмотрим некоторые из них.

1. На горизонтальной платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси (рис. 10.4), стоит человек, который держит гантели на вытянутых руках, расставленных в противоположные стороны. Затем он прижимает гантели к телу, в результате чего угловая скорость возрастает. Это объясняется следующим образом. Момент внешних сил (сил тяжести платформы и человека) относительно оси вращения равен нулю. Тогда, согласно закону сохранения момента импульса, момент импульса системы платформа — человек относительно оси вращения должен оставаться постоянным. В данном случае направление момента импульса не меняется. Поэтому, учитывая (11.6), закон сохранения момента импульса запишем в скалярном виде:  $I_{z1}\omega_1 = I_{z2}\omega_2$ , где  $I_{z1}$  и  $I_{z2}$  — момент инерции, а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — модуль угловой скорости системы до и после прижатия рук, соответственно. Прижатие гантелей к телу приводит к уменьшению момента инерции системы относительно оси вращения ( $I_{z2} < I_{z1}$ ) и, следовательно, к возрастанию угловой скорости ( $\omega_2 > \omega_1$ ).

2. Человек стоит на той же платформе и держит над головой быстро вращающееся велосипедное колесо, насаженное на ось. Предположим, что момент импульса колеса равен  $\vec{L}_0$  и направлен вертикально вверх. Затем он переворачивает его, в результате чего момент импульса колеса становится равным  $-\vec{L}_0$  (знак минус означает, что момент импульса направлен вертикально вниз). Поскольку момент импульса должен оставаться неизменным, то система (платформа — человек) приходит во вращение в ту же сторону, в которую вращалось колесо, причём момент импульса системы платформа — человек будет равен  $2\vec{L}_0$  ( $\vec{L}_0 = -\vec{L}_0 + 2\vec{L}_0$ ).

## § 12. СВОБОДНЫЕ ОСИ. ГИРОСКОП

Пусть твёрдое тело, на которое не действуют внешние силы, вращается вокруг произвольной оси. В общем случае, чтобы ось вращения оставалась неподвижной, к ней надо прикладывать определённые силы. Однако у любого тела существуют такие оси, при вращении вокруг которых их положение в пространстве сохраняется неизменным без воздействия на него внешних сил. Эти оси получили название **свободных осей**. У любого тела имеется три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, которые являются свободными осями. Так, например, у однородного параллелепипеда свободными будут оси, прохо-

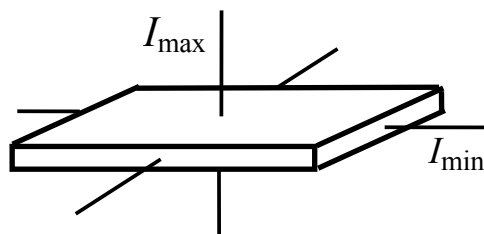


Рис. 12.1

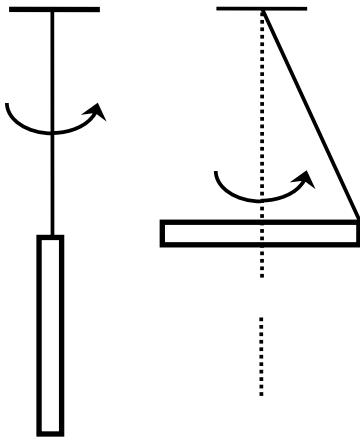


Рис. 12.2

дящие через центры противоположных граней (рис. 12.1), а у однородного шара — любые прямые, проходящие через его центр. Моменты инерции тела относительно свободных осей в общем случае различны. Устойчивость вращения зависит от того, какая из свободных осей является осью вращения. Так, если тело вращается под действием внешней силы, то устойчивым будет вращение только вокруг свободной оси с максимальным моментом инерции. В этом легко убедиться.

Тонкий стержень, подвешенный на нити, приведём во вращение за другой его конец вместе с нитью (рис. 12.2). При достаточно большой угловой скорости стержень будет вращаться относительно свободной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр, поскольку момент инерции стержня в этом случае наибольший.

При вращении тела вокруг свободной оси с наибольшим моментом инерции положение оси вращения остаётся постоянным, если на него не действует внешний момент сил. Это свойство используется в технике, например, в гироскопах. **Гироскоп** — это массивное симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии, являющейся свободной осью. Примером гироскопа является массивный металлический диск, через центр которого проходит ось. Другой пример — детский волчок. Вследствие закона сохранения момента импульса гироскоп обладает свойством сохранять положение оси вращения в пространстве. Это используется в навигационных приборах (гироскопас, курсовой гироскоп и т. д.), в устройствах для автоматического управления движением и стабилизации таких объектов, как самолёты, ракеты, морские суда и др. Рассмотрим движение вращающегося волчка (гироскопа) в поле силы тяжести, ось которого составляет некоторый угол  $\alpha$  с вертикалью (рис. 12.3). Момент импульса  $\vec{L}$  волчка направлен вдоль его оси симметрии. Его направление нахо-

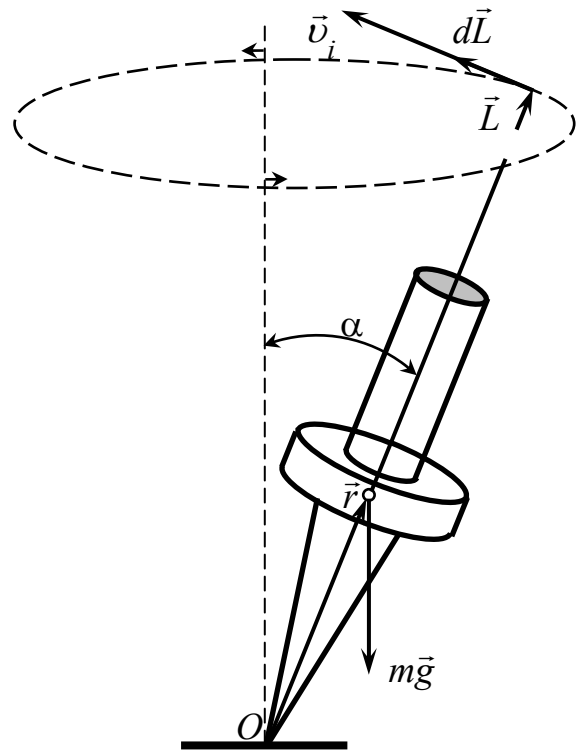


Рис. 12.3

дится по правилу правого винта. На волчок непрерывно действует момент сил  $\vec{M}$  относительно точки опоры  $O$  волчка, обусловленный силой тяжести  $mg$ , равный  $\vec{M} = [\vec{r} \cdot m\vec{g}]$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведённый из точки  $O$  до точки приложения силы тяжести (§ 10, п. 2). Применяя правило правого винта, находим, что он направлен перпендикулярно к плоскости, проведённой через вертикаль  $Oz$  и ось волчка. Следовательно, вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен к моменту импульса  $\vec{L}$ . Этот момент сил, согласно формуле (11.7), за элементарный промежуток времени  $dt$  сообщает волчку элементарный момент импульса  $d\vec{L}$ , равный  $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ . При этом направления  $d\vec{L}$  и  $d\vec{M}$  совпадают. Поскольку момент силы всё время перпендикулярен к  $\vec{L}$ , то момент импульса волчка будет изменяться только по направлению, оставаясь неизменным по модулю. Это возможно, если ось волчка и направленный вдоль оси вектор  $\vec{L}$ , вращаясь в направлении, показанном стрелками, описывает конус с вершиной в точке опоры  $O$ . Такое движение волчка называют прецессией.

## ГЛАВА 4. ЭНЕРГИЯ. РАБОТА

Как известно, существуют различные виды движения материи. При этом может происходить их взаимное превращение. Так, например, при движении тела в вязкой среде за счёт сил трения механическое движение переходит в тепловое движение молекул тела и окружающей среды. Для характеристики движения материи и её взаимного превращения, а также для характеристики взаимодействия тел, была введена физическая величина, названная *энергией*. Итак, **энергия** — это универсальная количественная мера различных форм движения и взаимодействия тел.

Рассмотрим сначала лишь механическое движение, мерой которого является механическая энергия. Под **механической энергией** понимается способность тела или системы тел совершать работу. При изменении механического движения, вызываемого силами, действующими на него со стороны других тел, происходит обмен энергией между взаимодействующими телами. Для характеристики процесса обмена энергией в механике вводят понятие **работы силы**, приложенной к телу, которое используется и в других разделах физики.

### § 13. РАБОТА СИЛЫ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ. МОЩНОСТЬ

1. Пусть тело (материальная точка) под действием постоянной силы  $\vec{F}$ , составляющей неизменный угол  $\alpha$  с направлением перемещения, движется прямолинейно в некоторой системе отсчёта и проходит путь  $l$ . То-

гда, как известно из школьного курса физики, работа  $A$  этой силы находится по формуле:

$$A = Fl \cdot \cos \alpha = F_l l, \quad (13.1)$$

где  $F_l$  — проекция силы на направление  $l$ . Рассмотрим теперь общий случай вычисления работы, когда тело движется поступательно по криволинейной траектории под действием переменной силы (рис. 13.1). На пути  $MN$  выделим малый участок  $\Delta l_i$ , в пределах которого можно считать силу  $\vec{F}_i$  и угол  $\alpha_i$  неизменными величинами, а сам участок — прямолинейным. Тогда работу  $\Delta A_i$  на этом участке найдём, используя формулу (13.1):  $\Delta A_i = F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos \alpha_i = F_{il} \cdot \Delta l_i$ , где  $F_{il}$  — проекция силы на перемещение  $\Delta \vec{l}_i$ , равная проекции силы на направление касательной. Работа  $A$  на всём пути равна сумме работ  $\Delta A_i$ , т. е.  $A = \sum_i F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos \alpha_i = \int_l F \cdot dl \cdot \cos \alpha = \int_l F_l \cdot dl$ , так как суммирование малых величин есть интегрирование. Значок  $l$  при интеграле означает, что интегрирование производится по всему пути  $l$ . Итак,

$$A = \int_l F \cdot dl \cdot \cos \alpha = \int_l F_l \cdot dl. \quad (13.2)$$

Формуле (13.2) можно придать иной вид, если воспользоваться скалярным произведением векторов. Тогда подынтегральное выражение  $dA$  запишется в виде:  $dA = F \cdot dl \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ , где  $d\vec{l}$  — вектор элементарного перемещения (см. (1.2)), и

$$A = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (13.3)$$

Из (13.1) видно, что работа является алгебраической величиной. Знак работы зависит от угла  $\alpha$ . Если угол  $\alpha$  острый, то  $\cos \alpha > 0$  и работа положительная, если же угол  $\alpha$  тупой — отрицательная.

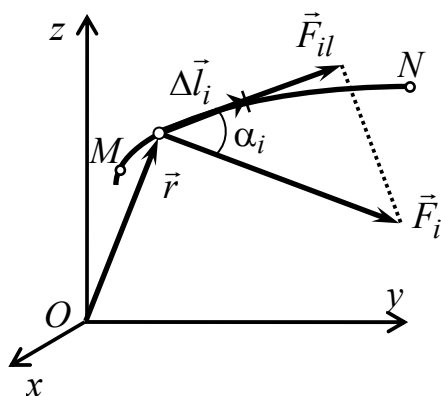


Рис. 13.1

Если угол  $\alpha$  острый, то  $\cos \alpha > 0$  и работа положительная, если же угол  $\alpha$  тупой — отрицательная.

В системе единиц СИ единицей работы является джоуль (Дж). Она вводится из формулы (13.1), в которой полагают  $\cos \alpha = 1$ . 1 Дж — это работа, которую совершает сила в 1 Н на пути 1 м при условии совпадения направлений силы и перемещения.

2. Рассмотрим твёрдое тело, которое под действием переменной силы  $\vec{F}$ , при-

ложенной в точке  $B$ , поворачивается вокруг оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости чертежа, на некоторый угол  $\varphi$ . Работу этой силы находим по формуле (13.2), приведя её к более удобному виду. В данном случае точка  $B$  движется по дуге окружности радиусом  $R$ . При повороте на элементарный угол  $d\varphi$  точка  $B$  пройдёт дугу длиной  $dl$  (рис.13.2). Но  $dl = R \cdot d\varphi$ , так как угол  $d\varphi$  центральный. Преобразуем подынтегральное выражение.

$$dA = F_l dl = F \cdot dl \cdot \sin \alpha = FR \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi = M_z d\varphi, \quad (13.4)$$

поскольку  $FR \cdot \sin \alpha = M_z$  — модуль момента силы относительно оси вращения (см. (10.3)). Интегрируя выражение (13.4), получаем:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \quad (13.5)$$

Работа будет положительной, если направление касательной составляющей силы совпадает с направлением вращения, и отрицательной — при их противоположном направлении.

3. Для характеристики *быстроты совершения работы* вводится понятие мощности, равной работе, совершённой в единицу времени. Если за время  $t$  с постоянной быстротой совершается работа  $A$ , то согласно определению мощность  $P$  равна

$$P = \frac{A}{t}. \quad (13.6)$$

Если быстрота совершения работы изменяется, то надо выбрать элементарный промежуток времени  $dt$ , в течение которого быстроту совершения работы можно считать неизменной, и найти элементарную работу  $dA$  за этот промежуток времени. Тогда, согласно (13.6), запишем

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (13.7)$$

В этом случае работа, совершенная за время  $t$ , равна сумме элементарных работ  $dA = P(t) \cdot dt$ , т. е. находится по формуле:

$$A = \int_0^t P(t) \cdot dt. \quad (13.8)$$

В системе единиц СИ мощность измеряется в ваттах (Вт). Как следует из (13.6),  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ с}$ , т. е. *1 Вт — это мощность, при которой за 1 с совершается работа 1 Дж.*

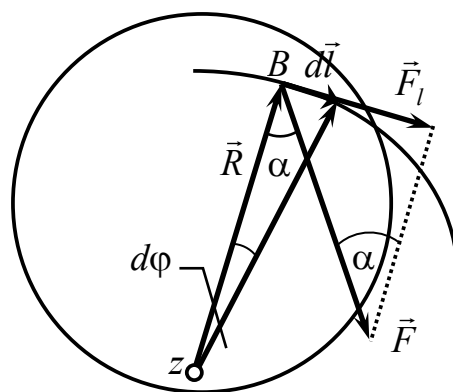


Рис. 13.2

Подставляя выражение (13.1) в формулу (13.7), получаем:  

$$P = \frac{d}{dt}(Fl \cdot \cos \alpha) = F \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \cos \alpha,$$
 где  $\alpha$  — угол между направлением силы и направлением движения. Но  $\frac{dl}{dt} = v$  — модуль скорости. Поэтому

$$P = Fv \cdot \cos \alpha. \quad (13.9)$$

## § 14. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Кинетической* называется энергия, обусловленная движением тела. Она измеряется работой, которую совершает равнодействующая сила, чтобы разогнать тело из состояния покоя до данной скорости.

1. Пусть тело массой  $m$  начинает двигаться под действием равнодействующей силы  $\vec{F}$ . Воспользовавшись формулой (13.2), найдём работу, которую совершает равнодействующая сила, чтобы разогнать тело из состояния покоя до данной скорости  $v$ :

$$A = \int_l F_l \cdot dl. \quad (14.1)$$

Составляющая  $\vec{F}_l$ , направленная по касательной к траектории, создаёт касательное ускорение, модуль которого равен  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ . По второму закону

Ньютона  $F_l = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}$ . Преобразуем подынтегральное выражение (14.1), учитывая, что, согласно (1.6),  $dl = v \cdot dt$ :

$$F_l dl = m \frac{dv}{dt} v \cdot dt = mv \cdot dv. \quad (14.2)$$

В результате получим, что  $A = \int_0^v mv \cdot dv = \frac{1}{2}mv^2$ . Согласно определению,  $W_k = A$ , поэтому

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (14.3)$$

Как видно из (14.3), кинетическая энергия не может быть отрицательной.

Если имеется механическая система, состоящая из  $n$  тел, движущихся только поступательно, то, очевидно, для её разгона необходимо разогнать каждое тело системы. Поэтому кинетическая энергия  $W_k$  механической системы равна сумме кинетических энергий  $W_{ki}$ , входящих в неё тел, т. е.

$$W_k = \sum_{i=1}^n W_{ki}. \quad (14.4)$$

При выводе формул (14.3) и (14.4) предполагалось, что движение тел происходит в какой-либо инерциальной системе отсчёта. Однако скорости тел в различных системах отсчёта различны. Поэтому и значение кинетической энергии зависит от выбора системы отсчёта.

2. Предположим, что тело с моментом инерции  $I_z$  относительно оси  $z$  под действием момента сил  $M_z$  относительно той же оси начинает вращаться вокруг этой оси. Найдём работу, которую совершает этот момент сил, чтобы разогнать его до угловой скорости  $\bar{\omega}$ , применяя формулу (13.5):

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \quad (14.5)$$

Используя соотношение (10.11), запишем, что  $\vec{M}_z = I_z \vec{\varepsilon}$ . Так как векторы момента силы  $\vec{M}_z$  и углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  совпадают, то последнее равенство запишем в скалярном виде:

$$M_z = I_z \varepsilon = I_z \frac{d\omega}{dt}, \quad (14.6)$$

где  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  — модуль углового ускорения (3.7). Преобразуем подынте-

гральное выражение (14.5) с учётом (14.6):  $M_z d\varphi = I_z \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi =$

$= I_z d\omega \cdot \frac{d\varphi}{dt} = I_z \omega \cdot d\omega$ , поскольку  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  — модуль угловой скорости (см.

(3.6)). Тогда  $A = \int_0^{\omega} I_z \omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ . По определению величина кинетической энергии равна вычисленной работе. Поэтому

$$W_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (14.7)$$

## § 15. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим тело, движущееся поступательно под действием различных сил, приложенных к нему. При этом скорость тела изменяется от  $\vec{v}_1$  до  $\vec{v}_2$ . Найдём связь работы равнодействующей приложенных сил и кинетической энергии тела. Работа  $A_{\text{пост}}$  с учётом (14.2) находится по формуле

$$A_{\text{пост}} = \int_l F_l dl = \int_{v_1}^{v_2} m v \cdot dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = (W_{k2})_{\text{пост}} - (W_{k1})_{\text{пост}}, \quad (15.1)$$

где  $(W_{k1})_{\text{пост}}$  и  $(W_{k2})_{\text{пост}}$  — кинетическая энергия поступательного движения тела в начальном и конечном состояниях.

Работу  $A_{\text{вр}}$  при вращении тела относительно оси находим аналогично тому, как это сделано в § 14, п. 2, учитывая, что модуль угловой скорости изменяется от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ :

$$A_{\text{вр}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z \omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_1^2 = (W_{k2})_{\text{вр}} - (W_{k1})_{\text{вр}}. \quad (15.2)$$

Здесь  $(W_{k1})_{\text{вр}}$  и  $(W_{k2})_{\text{вр}}$  — кинетическая энергия вращающегося тела в начальном и конечном состояниях.

Если тело совершает сложное движение, то его можно представить как сумму поступательного и вращательного движения (§ 4). Поэтому кинетическая энергия  $W_k$  тела будет равна сумме кинетической энергии  $(W_k)_{\text{пост}}$  поступательного и  $(W_{k2})_{\text{вр}}$  вращательного движений, т. е.  $W_k = (W_k)_{\text{пост}} + (W_k)_{\text{вр}}$ . Тогда, суммируя выражения (15.1) и (15.2), получаем, что  $A = [(W_{k2})_{\text{пост}} + (W_{k2})_{\text{вр}}] - [(W_{k1})_{\text{пост}} + (W_{k1})_{\text{вр}}] = W_{k2} - W_{k1}$ , где  $W_{k1}$  и  $W_{k2}$  — кинетическая энергия тела в начальном и конечном состояниях;  $A = A_{\text{пост}} + A_{\text{вр}}$  — работа, совершённая приложенными силами. Итак,

$$A = W_{k2} - W_{k1}, \quad (15.3)$$

т. е. *работа всех сил, действующих на тело, равна изменению его кинетической энергии.*

Можно показать, что для механической системы, состоящей из многих тел, имеет место аналогичное равенство, только под  $A$  надо понимать работу всех сил, приложенных к системе, а под  $W_{k2} - W_{k1}$  — изменение кинетической энергии механической системы. Поэтому равенство (15.3) формулируется так: *работа всех сил, действующих на тела механической системы, равна изменению кинетической энергии этой системы.* Соотношение (15.3) носит название **теоремы о кинетической энергии**.

## § 16. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Механическая система, кроме кинетической энергии, может обладать и потенциальной энергией. Для понимания её смысла рассмотрим сначала работу, которую совершают силы гравитации и упругости.

**1. Работа гравитационных сил.** Рассмотрим движение тела в гравитационном поле Земли. Положение тела в любой момент времени определяем радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведённым из центра  $O$  Земли (рис. 16.1). Пусть в начальный момент времени тело находится в точке  $I$ , характери-



зуемой радиус-вектором  $\vec{r}_1$ , а затем перемещается в точку 2 с радиус-вектором  $\vec{r}_2$  по произвольному пути. Работу  $A_p$ , совершаемую силой притяжения  $\vec{F}$ , находим по формуле  $A_p = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} \cdot \cos \alpha$  (13.2).

Из рис. 16.1 видно, что  $d\vec{l} \cdot \cos \alpha = dr$ , где  $dr$  — проекция  $d\vec{l}$  на направление радиус-вектора  $\vec{r}$ , т. е. элементарное приращение модуля радиус-вектора. С учётом этого

$$A_p = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr. \quad (16.1)$$

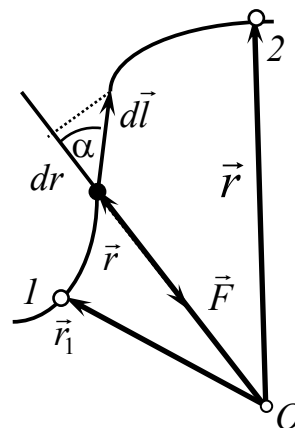


Рис. 16.1

Согласно закону всемирного тяготения, сила притяжения тела к Земле равна:  $F = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$ , где  $\gamma$  — гравитационная постоянная;  $M$  и  $m$  — масса Земли и тела соответственно;  $r$  — расстояние тела до центра Земли. Знак минус означает, что сила является силой притяжения. Подставляя это выражение в (16.1), находим:

$$A_p = -\gamma Mm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (16.2)$$

Получили, что работа гравитационной силы не зависит от пути переноса и определяется лишь начальным и конечным положением тела, а модуль силы зависит от расстояния между телами.

**2. Работа упругой силы.** Рассмотрим тело, прикрепленное к концу пружины, другой конец которой закреплён в шаровом шарнире. В этом случае пружина может поворачиваться в любом направлении относительно центра шарнира, который примем за начало координат  $O$ . Тогда положение тела характеризуем радиус-вектором  $\vec{r}$ , модуль которого равен длине  $r$  пружины в данный момент времени (рис. 16.2). Пусть тело находится сначала в точке 1, характеризуемой радиус-вектором  $\vec{r}_1$ , а затем переносится в точку 2 с радиус-вектором  $\vec{r}_2$  по произвольной траектории. Деформированная пружина действует на тело с силой  $\vec{F}$ , направление которой либо совпадает с  $\vec{r}$  (пружина сжата), либо противоположно (пружина растянута). Согласно закону Гука, модуль  $F$  упругой силы равен:

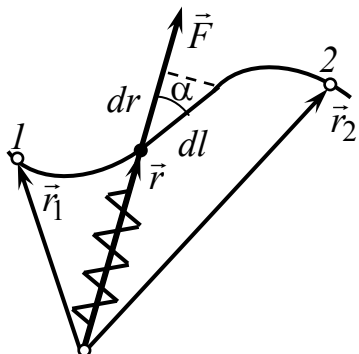


Рис. 16.2

$$F = -k(r - r_n), \quad (16.3)$$

где  $r_n$  — длина недеформированной пружины,  $(r - r_n)$  и  $k$  — удлинение и

коэффициент жёсткости пружины соответственно. Знак минус отражает тот факт, что направления силы и деформации противоположны. Поскольку сила  $\vec{F}$  направлена вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$ , как и в случае гравитационной силы, то работу  $A_p$ , совершаемую ею, находим по формуле (16.1), подставляя в неё (16.3):  $A_p = -k \int_{r_1}^{r_2} (r - r_H) dr = -k \int_{r_1}^{r_2} (r - r_H) d(r - r_H)$ , поскольку  $dr = d(r - r_H)$ , так как  $r_H$  — постоянная величина. Тогда

$$A_p = \frac{1}{2}k(r_1 - r_H)^2 - \frac{1}{2}k(r_2 - r_H)^2. \quad (16.4)$$

Таким образом, работа упругой силы не зависит от пути переноса и определяется только начальным и конечным положением тела, а модуль силы зависит лишь от удлинения пружины.

**3. Потенциальные и непотенциальные силы.** Рассмотрение работы гравитационных и упругих сил приводит к выводу: *работа этих сил зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит от пути перемещения*. Отсюда следует, что при движении тела по замкнутому пути (рис. 16.3) работа не совершается. Действительно, работа  $A$  на всём пути равна сумме работы  $A_{1B2}$ , совершаемой на пути  $1B2$ , и работы  $A_{2C1}$  на пути  $2C1$ , т. е.  $A = A_{1B2} + A_{2C1}$ . Но работа  $A_{2C1} = -A_{1C2}$ , так как движение происходит в противоположном направлении и  $A_{1B2} = A_{1C2}$ . Тогда  $A = A_{1B2} - A_{1C2} = 0$ , что и требовалось доказать. Равенство нулю работы по замкнутому пути можно записать в виде

$$A_p = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (16.5)$$

Значок "о" на интеграле означает, что интегрирование производится по замкнутой кривой длиной  $l$ . Этому равенству удовлетворяют только определённые силы, которые в физике называются **консервативными** или **потенциальными**. Иначе говоря, равенство (16.5) является математическим определением таких сил.

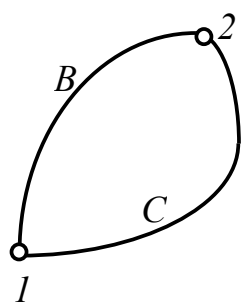


Рис. 16.3

В макромире имеется всего лишь три вида потенциальных сил — гравитационная, упругая и электростатическая силы. К не потенциальным силам относятся силы трения, называемые **диссипативными**. В этом случае направления силы  $\vec{F}$  и  $d\vec{l}$  всегда противоположны. Поэтому работа этих сил по любому пути отрицательная, вследствие чего тело непрерывно теряет кинетическую энергию.

Понятие силы тесно связано с понятием силового поля. Если на тело в каждой точке пространства действует какая-нибудь сила, то совокупность этих сил

называют **силовым полем** или просто **полем**. Существует два вида полей — потенциальные и вихревые (непотенциальные). В потенциальных полях действуют рассмотренные выше потенциальные (консервативные) силы. В непотенциальных полях действуют так называемые непотенциальные силы, примером которых являются силы трения. В случае диссипативных сил работа зависит от пройденного пути, и, следовательно, они не подчиняются условию (16.5).

**4. Потенциальная энергия.** Тела, находящиеся в потенциальном поле, обладают способностью в определённых условиях совершать работу. Например, тело, поднятое над Землёй, когда его отпускают, приходит в движение под действием гравитационной силы, совершая работу. Следовательно, тела в данном поле обладают энергией, которую называют потенциальной. Эта энергия зависит от расположения тел, создающих поле, и от положения тела в этом поле, т. е. она зависит от взаимного расположения взаимодействующих тел. Однако от взаимного расположения тел или частей одного и того же тела зависят силы взаимодействия между ними. Итак, **энергия, обусловленная взаимодействием тел или частей одного и того же тела, называется потенциальной.**

Величина потенциальной энергии тела может быть определена лишь с точностью до произвольной постоянной, значение которой зависит от выбора так называемого **нулевого уровня**, т. е. *положения тела, в котором потенциальную энергию условно принимают за ноль. Потенциальная энергия равна той работе, которую совершают силы поля, действующие на тело, при переносе его из данной точки на нулевой уровень.* Однако выбор нулевого уровня не отражается на физических законах, поскольку в них фигурирует либо разность потенциальной энергии тела, либо производная от этой энергии по координатам, которые не зависят от величины произвольной постоянной.

**5. Теорема о потенциальной энергии.** Работа  $A_p$ , совершаемая силами потенциального поля при переносе тела из положения 1 в положение 2, может быть выражена через потенциальные энергии  $W_{p1}$  и  $W_{p2}$  в этих положениях. Для этого предположим, что перенос осуществлён через нулевой уровень 0 (рис. 16.4), т. е. по пути 1–0–2. Поскольку в данном случае работа не зависит от пути переноса, то  $A_p = A_{102} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20}$ . По определению потенциальной энергии  $W_{p1} = A_{10}$  и  $W_{p2} = A_{20}$ . Поэтому

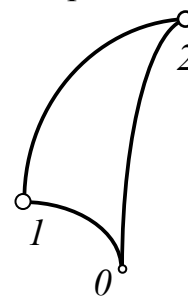


Рис. 16.4

$$A_p = W_{p1} - W_{p2} = -(W_{p2} - W_{p1}) = -\Delta W_p \quad (16.6)$$

т. е. **работа сил потенциального поля равна уменьшению потенциальной энергии перемещаемого тела или изменению потенциальной энергии тела, взятому с обратным знаком.**

6. Вычислим потенциальную энергию в некоторых простейших случаях.

**А.) Гравитационная потенциальная энергия.** Перепишем формулу

(16.2) в виде  $A_p = -\frac{\gamma Mm}{r_1} - \left( -\frac{\gamma Mm}{r_2} \right)$ . С учётом (16.6) запишем:

$$A_p = -\frac{\gamma Mm}{r_1} - \left( -\frac{\gamma Mm}{r_2} \right) = W_{p1} - W_{p2}, \text{ где } W_{p1} \text{ и } W_{p2} \text{ — потенциальная энер-$$

гия тела в гравитационном поле Земли на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от её центра или потенциальная энергия механической системы Земля — тело в начальном и конечном состояниях. Вспомним, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной. Следовательно,

$$W_p = -\frac{\gamma Mm}{r} + C, \quad (16.7)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Действительно, при подстановке (16.7) в предыдущую формулу константы взаимно уничтожаются. Примем за нулевой уровень состояние системы, когда тело находится на бесконечно большом расстоянии от Земли, т. е. при  $r \rightarrow \infty$   $W_p \rightarrow 0$ . Тогда из (16.7) следует, что  $C = 0$  и

$$W_p = -\frac{\gamma Mm}{r}. \quad (16.8)$$

Определим теперь потенциальную энергию тела в случае, если за нулевой уровень принимается поверхность Земли, т. е. при  $r = R$ , где  $R$  — радиус Земли,  $W_p = 0$ . В этом случае  $C = \frac{\gamma Mm}{R}$  и  $W_p = \gamma Mm \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$ . Придадим этой формуле иной вид, приведя к общему знаменателю и умножив и разделив правую часть на  $R$ :  $W_p = \frac{\gamma Mm}{R^2} \cdot \frac{R}{r} (r - R)$ . Но  $r - R = h$  — высота тела над поверхностью Земли, а  $\gamma M/R^2 = g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Действительно, согласно второму закону Ньютона, имеем

$$g_0 = \frac{F}{m} = \frac{\frac{\gamma Mm}{R^2}}{m} = \frac{\gamma M}{R^2}. \quad (16.9)$$

Поэтому

$$W_p = mg_0 h \frac{R}{r}. \quad (16.10)$$

Вблизи поверхности Земли  $R/r \approx 1$  и  $W_p = mg_0 h$ . Из формул (16.8) и (16.10) видим, что значение потенциальной энергии зависит от выбора нулевого уровня.

**Б.) Потенциальная энергия деформированной пружины.** Объединяя формулы (16.4) и (16.6), получаем:  $\frac{1}{2}k(r_1 - r_n)^2 - \frac{1}{2}k(r_2 - r_n)^2 = W_{p1} - W_{p2}$ , где  $W_{p1}$  и  $W_{p2}$  — потенциальная энергия пружины в начальном и конечном состояниях, соответственно. Из этого равенства следует, что  $W_p = \frac{1}{2}k(r - r_n)^2 + C$ . Таким образом, потенциальная энергия пружины также определяется с точностью до произвольной постоянной. Поэтому примем потенциальную энергию недеформированной пружины за ноль (при  $r - r_n = 0$   $W_p = 0$ ). Тогда  $C = 0$  и  $W_p = \frac{1}{2}k(r - r_n)^2$ . Обозначив удлинение пружины  $r - r_n$  через  $x$ , получим, что

$$W_p = \frac{1}{2}kx^2. \quad (16.11)$$

**7. Связь потенциальных сил с потенциальной энергией.** Пусть тело под действием потенциальной силы  $\vec{F}$  совершает элементарное перемещение  $d\vec{l}$ . Тогда эта сила производит элементарную работу  $dA$ , которую находим по формуле:

$$dA_p = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_l dl, \quad (16.12)$$

где  $F_l$  — проекция силы  $\vec{F}$  на направление  $\vec{r}_2$  (§ 13, п. 1). При совершении этой элементарной работы происходит элементарное изменение потенциальной энергии  $dW_p$  тела, находящегося в поле потенциальных сил. Согласно (16.6), запишем, что

$$dA_p = -dW_p. \quad (16.13)$$

Подставляя выражение (16.12) в (16.13), получаем:  $F_l dl = -dW_p$ . Отсюда

$$F_l = -\frac{dW_p}{dl}, \quad (16.14)$$

т. е. *проекция потенциальной силы на какое-либо направление равна производной от потенциальной энергии по данному направлению*. Выражение (16.14) справедливо для любого направления в пространстве, в том числе и для координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

**8. Закон сохранения механической энергии.** Предположим, что тело движется в гравитационном поле Земли. На него действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Тогда работа  $A$  при переходе тела из

одного положения в другое складывается из работы  $A_{\text{np}}$  силы сопротивления воздуха (непотенциальных сил) и работы  $A_p$  силы тяжести (потенциальных сил), т. е.  $A = A_{\text{np}} + A_p$ . Согласно теореме о кинетической энергии (15.3), запишем:

$$A = A_{\text{np}} + A_p = W_{k2} - W_{k1}, \quad (16.15)$$

где  $W_{p1}$  и  $W_{p2}$  — кинетическая энергия тела в начальном и конечном положениях соответственно. Но  $A_p = W_{p1} - W_{p2}$ , где  $W_{p1}$  и  $W_{p2}$  — потенциальная энергия тела в данном поле в начальном и конечном положении (16.6). Учитывая это, из формулы (16.15) получаем:  $A_{\text{np}} = (W_{k2} + W_{p2}) - (W_{k1} + W_{p1})$ . Величину  $W$ , равную сумме кинетической и потенциальной энергии тела, т. е.  $W = W_k + W_p$ , называют **полной механической энергией** или **механической энергией**. Тогда  $W_1 = W_{k1} + W_{p1}$  и  $W_2 = W_{k2} + W_{p2}$ , где  $W_1$  и  $W_2$  — механическая энергия тела в начальном и конечном положении. Итак,

$$\boxed{A_{\text{np}} = W_2 - W_1}, \quad (16.16)$$

т. е. **изменение механической энергии тела в силовом поле равно работе непотенциальных сил**. Тело, находящееся в силовом поле, можно рассматривать как механическую систему, состоящую из тел, создающих поле, и самого тела. Поэтому возможна и другая формулировка выражения (16.16): **изменение механической энергии системы равно работе непотенциальных сил**.

Если на механическую систему и внутри неё действуют только потенциальные силы, то  $A_{\text{np}} = 0$  и  $W_2 = W_1$ , т. е.

$$\boxed{W = W_k + W_p = \text{const.}} \quad (16.17)$$

Следовательно, **в механической системе, в которой действуют только потенциальные силы, механическая энергия — величина постоянная**. В этом и состоит закон сохранения механической энергии.

## § 17. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

Обработав данные по движению планет Солнечной системы, Кеплер установил три закона движения планет, названных его именем.

**Первый закон Кеплера.** Все планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых расположено Солнце.

**Второй закон Кеплера.** За равные промежутки времени радиус-вектор, проведённый от Солнца до планеты, описывает одинаковые площади. Из этого закона следует, что планеты движутся со скоростью, изменяющейся по модулю, ближе к Солнцу — быстрее, а удаляясь — медленнее.

**Третий закон Кеплера.** Квадраты периодов обращения  $T$  планет пропорциональны кубам больших полуосей  $a$  эллиптических орбит:  $T^2 \sim a^3$ .

Как выяснилось впоследствии, эти законы являются следствиями законов динамики и всемирного тяготения. Убедимся в этом.

Первый закон примем без доказательства. Смысл его ясен, вывод сложен и выходит за рамки нашего рассмотрения.

Второй закон выводится на основе законов вращательного движения. При изучении движения планет планеты и Солнце можно считать материальными точками, поскольку их размеры значительно меньше расстояний между ними. Примем Солнце за начало координат, и положение планет будем характеризовать радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 17.1). В определённом приближении эта система является замкнутой, так как притяжение с другими планетами можно не учитывать. В этом случае выполняется закон сохранения момента импульса (§ 11) планеты, движущейся относительно Солнца:  $\vec{L} = \text{const}$ .

Определим площадь  $dS$ , которую описывает радиус-вектор  $\vec{r}$  планеты при её движении со скоростью  $\vec{v}$  за элементарный промежуток времени  $dt$ . Как видно из рис. 17.1, эта площадь равна площади бесконечно узкого сектора, который можно считать треугольником. Тогда  $dS = (1/2)CA \cdot BD = (1/2)r \cdot dl \cdot \sin \alpha = (1/2)rv \cdot \sin \alpha \cdot dt$ , где  $dl = v \cdot dt$  — элементарный путь, проходимый планетой за время  $dt$ ,  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  или между  $\vec{r}$  и  $d\vec{l}$ , так как векторы  $\vec{v}$  и  $d\vec{l}$  совпадают. Выражение  $\sigma = \frac{dS}{dt}$  называют **секторной скоростью**. Она равна площади, описываемой радиус-вектором за единицу времени. Поэтому  $\sigma = \frac{1}{2}rv \cdot \sin \alpha$ . Умножив и разделив правую часть этого равенства на массу  $m$  планеты, получим:

$$\sigma = \frac{1}{2m} rmv \cdot \sin \alpha = \frac{L}{2m}, \quad (17.1)$$

поскольку  $rmv \cdot \sin \alpha = L$  — модуль момента импульса планеты (см. (11.2)). Из (17.1) следует, что  $\sigma = \text{const}$ , поскольку  $L = \text{const}$ . Это означает, что за равные промежутки времени радиус-вектор планеты будет описывать одинаковые площади, т. е. справедлив второй закон Кеплера.

Третий закон Кеплера. Для простоты будем считать орбиты не эллипсами, а окружностями (это вполне допустимо, так как истинные траектории планет мало отличаются от окружностей). При движении по окружности планета

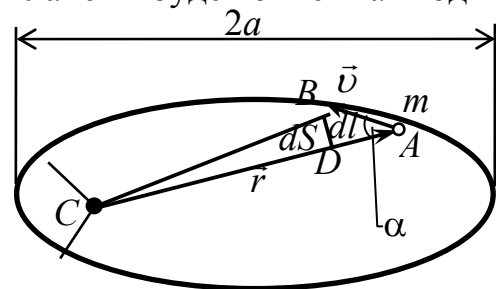


Рис. 17.1

обладает нормальным ускорением  $a_n$ , которое находим, используя второй

закон Ньютона:  $a_n = \frac{F}{m} = \frac{\frac{\gamma M m}{r^2}}{m} = \frac{\gamma M}{r^2}$ , где  $F$  — сила притяжения планеты к Солнцу,  $M$  и  $m$  — масса Солнца и планеты,  $r$  — расстояние между ними, т. е. радиус окружности. Из последнего равенства, учитывая, что  $a_n = v^2/r$ , где  $v$  — скорость движения планеты, получаем, что

$$v^2 = \frac{\gamma M}{r}. \quad (17.2)$$

Но скорость  $v$  планеты связана с периодом  $T$  её обращения вокруг Солнца соотношением:

$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}, \quad (17.3)$$

где  $l = 2\pi r$  — длина окружности орбиты. Подставляя формулу (17.4) в

(17.3), находим:  $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}$ . Поскольку  $\frac{4\pi^2}{\gamma M}$  — величина постоянная, то

$T^2 \sim r^3$ , т. е. квадрат периода обращения пропорционален кубу радиуса орбиты, а в случае эллиптической орбиты пропорционален кубу большой полуоси. Это и есть третий закон Кеплера применительно к круговым траекториям движения.

## § 18. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

Исследование и освоение космоса осуществляется космическими аппаратами, запускаемыми с Земли. Для их запуска в зависимости от их назначения им сообщают различные скорости, называемые космическими.

**Первой космической скоростью** называется скорость, которой должно обладать тело, чтобы двигаться по круговой орбите вокруг Земли. Обозначим её через  $v_1$ . Пусть тело массой  $m$  движется по окружности радиуса

$r$ . На него действует сила притяжения к Земле:  $F = \frac{\gamma M m}{r^2}$ , где  $M$  — масса

Земли. Эта сила сообщает телу нормальное ускорение  $a_n = v^2/r$ . Здесь  $v$  — орбитальная скорость. Используя второй закон Ньютона, получаем:

$$a_n = \frac{F}{m}, \quad \frac{v^2}{r} = \frac{\frac{\gamma M m}{r^2}}{m} = \frac{\gamma M}{r^2}. \quad \text{Отсюда}$$

$$v = v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}. \quad (18.1)$$



Но  $r = R + h$ , где  $R$  — радиус Земли и  $h$  — высота полёта спутника над Землёй. Поскольку радиус Земли ( $R \approx 6400$  км) намного больше высоты полёта спутника ( $h \approx 300$  м), можно считать, что  $r \approx R$ . С учётом этого из (18.1) следует, что

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^2} R} = \sqrt{g_0 R}, \quad (18.2)$$

поскольку  $g_0 = \frac{\gamma M}{R^2}$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли (см. (16.9)). Подставляя  $g_0 \approx 9,8$  м/с<sup>2</sup> и  $R \approx 6400$  км =  $6,4 \cdot 10^6$  м в формулу (18.2), находим, что  $v_1 \approx 8$  км/с.

**Второй космической скоростью**  $v_2$  называют минимальное значение скорости, при которой тело преодолевает земное притяжение, т. е. уходит за его пределы. Для выхода за пределы земного тяготения тело должно обладать достаточной кинетической энергией. Её можно найти, применяя теорему о кинетической энергии  $A = W_k - W_{k0}$ . Работу, совершаемую гравитационными силами, находим по формуле (16.2), учитывая, что  $r_1 = R$  ( $R$  — радиус Земли) и  $r_2 = \infty$ :  $A = \gamma M m \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -\gamma \frac{M m}{R} = -\gamma \frac{M}{R^2} m R = -m g_0 R$ , где  $g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли. На бесконечности скорость тела принимаем равной нулю, так как ищем минимальную скорость  $v_0 = v_2$ , которой должно обладать тело, чтобы покинуть Землю. Поэтому кинетическая энергия на бесконечности равна нулю, т. е.  $W_k = 0$ . С учётом этого имеем:  $-\frac{1}{2} m v_2^2 = -m g_0 R$ , где  $v_2$  — начальная скорость тела, равная второй космической скорости. Отсюда

$$v_2 = \sqrt{2 g_0 R}. \quad (18.3)$$

Используя выражение (18.2), запишем  $v_2 = v_1 \sqrt{2}$ . Поскольку  $v_1 \approx 8$  км/с, то  $v_2 \approx 11$  км/с. Тело, обладающее второй космической скоростью, покидает Землю и становится спутником Солнца, т. е. оно будет двигаться вокруг Солнца подобно планетам Солнечной системы.

Скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, называют **третьей космической скоростью**. Эта скорость зависит от направления выхода тела из зоны действия земного притяжения. При запуске тела вдоль экватора в направлении движения Земли по орбите  $v_3 \approx 17$  км/с.

## ЧАСТЬ 2. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

**Электродинамика** — это учение об электрических и магнитных явлениях. Электромагнитные взаимодействия, которые изучает электродинамика, ответственны за большинство явлений, например, за образование атомов и молекул, из которых состоят тела. С электромагнитными явлениями сталкиваются во многих разделах физики: в оптике, атомной и ядерной физике. Таким образом, можно сказать, что учение об электричестве имеет глубинную взаимосвязь со многими физическими процессами.

Электродинамику как раздел физики условно разделяют на три части: электростатику, учение об электрическом токе и электромагнетизм. Начнём изучение электродинамики с раздела электростатика.

### ГЛАВА 5. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

#### § 19. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА. ЗАКОН КУЛОНА

1. Известно, что разнородные тела, такие как кожа, стекло, эбонит и т. д., потёртые друг о друга, обладают свойством притягивать к себе лёгкие предметы, например, кусочки бумаги. Для объяснения такого взаимодействия, названного *электрическим*, и было введено понятие «электрический заряд». Заряженные тела могут как притягиваться, так и отталкиваться друг от друга. Этот факт можно объяснить, если ввести два типа заряда, условно названных положительным и отрицательным (плюс и минус). Как следует из опыта, заряды с одинаковыми знаками отталкиваются, а с разными — притягиваются. Сила взаимодействия заряженных тел может быть различной. Она зависит от величины зарядов, находящихся на них. Из этого следует вывод: *электрический заряд является количественной мерой способности тел к электрическим взаимодействиям.*

Тело, на котором оказывается избыток электронов по сравнению с протонами, заряжается отрицательно, если наоборот — положительно. Например, при электризации трением небольшая часть электронов с одного тела переходит на другое. Если теперь развести тела, то они окажутся заряженными — одно положительно, другое — отрицательно.

2. Из обобщения опытных данных установлен закон сохранения электрического заряда: *в любой замкнутой электрической системе алгебраическая сумма электрических зарядов является постоянной величиной при любых процессах, происходящих в ней.*

**Замкнутой** называется электрическая система, из которой не выходят и в которую не входят заряды. Так, при электризации тел трением заряды, возникающие на телах, равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Поэтому их алгебраическая сумма так же равна нулю, как и в случае незаряженных тел. 4. Рассмотрим вопрос о силе взаимодей-

ствия электрических зарядов, которая определяется законом Кулона, являющимся основным законом электростатики. Этот закон не выводится из других законов природы и устанавливается только опытным путём.

В общем случае сила взаимодействия между заряженными телами зависит от размеров и формы тел, а также от свойств среды, в которой находятся тела. Наиболее просто сила взаимодействия находится для так называемых точечных зарядов. **Точечным зарядом** называется заряженное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми оно взаимодействует. Закон взаимодействия точечных зарядов был открыт Кулоном и формулируется следующим образом: **модуль  $F$  силы взаимодействия между двумя неподвижными зарядами  $q$  и  $q_0$  пропорционален произведению этих зарядов, обратно пропорционален квадрату расстояния  $r$  между ними**, т. е.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2}, \quad (19.1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная, где фарад (Ф) — единица электроёмкости (см. § 29),  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость, характеризующая среду. Она показывает, во сколько раз напряжённость электрического поля в вакууме больше напряжённости того же поля в среде, т. е.

$$\epsilon = \frac{E_v}{E}. \quad (19.2)$$

Кулоновская сила направлена вдоль прямой линии, соединяющей заряды.

## § 20. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЁННОСТЬ ПОЛЯ

**1. Напряжённость.** Электрическое взаимодействие заряженных тел легко объясняется, если предположить, что вокруг заряженных тел существует электрическое поле. Электрическое поле, создаваемое одним заряженным телом, действует на другое заряженное тело и наоборот. Для характеристики электрического поля, как и в случае гравитационного поля, вводится физическая величина, называемая напряжённостью, которая является силовой характеристикой этого поля. Изучение электрического поля производится с помощью **пробного заряда**, т. е. положительного точечного заряда, при внесении которого исследуемое поле не искажается. Если в одну и ту же точку поля вносить различные пробные заряды, то на них будут действовать и различные силы. Однако отношение силы  $\vec{F}$ , действующей на заряд, к величине  $q_0$  этого заряда является постоянным для всех вносимых зарядов независимо от их величины. Поэтому это отношение принимают за характеристику электрического поля в данной точке. Её называют **напряжённостью** и обозначают через  $\vec{E}$ . Тогда

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}} \quad (20.1)$$

Поскольку  $q_0$  заряд положительный, то из выражения (2.1) вытекает, что напряжённость поля равна силе, которая действует со стороны поля на положительный единичный заряд и совпадает по направлению с направлением этой силы. В системе единиц СИ, как следует из (20.1), напряжённость измеряется в ньютонах/кулон (Н/Кл).  $1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ Н} / 1 \text{ Кл}$ , т. е.  $1 \text{ Н/Кл}$  — напряжённость в такой точке электрического поля, в которой на заряд в  $1 \text{ Кл}$  действует сила в  $1 \text{ Н}$ .

**2. Напряжённость поля точечного заряда.** Найдём модуль  $E$  напряжённости электростатического поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ , находящимся в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , в точке, отстоящей от него на расстоянии  $r$ . Мысленно поместим в эту точку пробный заряд  $q_0$ . Тогда согласно (20.1) и (19.1)

$$E = \frac{F}{q_0} \text{ и } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2}. \text{ Отсюда получаем, что}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}. \quad (20.2)$$

Таким образом, модуль напряжённости в любой точке электростатического поля, создаваемого точечным зарядом в вакууме, пропорционален величине заряда и обратно пропорционален квадрату расстояния от заряда до точки, в которой определяется напряжённость.

## § 21. СУПЕРПОЗИЦИЯ ПОЛЕЙ

Знание поля точечного заряда позволяет в принципе рассчитывать поля, создаваемые как совокупностью зарядов, так и протяженными заряженными телами. Для этого в физике используется простой, но очень важный принцип суперпозиции (наложения) полей, суть которого заключается в следующем.

Пусть имеется система точечных электрических зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Найдём напряжённость электрического поля, создаваемого этими зарядами, в произвольной точке. Мысленно поместим в эту точку пробный заряд  $q_0$ . Опытным путём установлено, что сила  $\vec{F}$ , с которой система зарядов действует на этот заряд, равна векторной сумме сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , с которыми действует на пробный заряд каждый из зарядов системы, т. е.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \text{ Разделим это равенство на заряд } q_0: \frac{\vec{F}}{q_0} =$$

$$= \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}. \text{ Согласно (20.1) } \frac{\vec{F}_1}{q_0} = \vec{E}_1, \quad \frac{\vec{F}_2}{q_0} = \vec{E}_2, \dots,$$

$$\frac{\vec{F}_n}{q_0} = \vec{E}_n \text{ — напряжённость электрических полей, создаваемых отдельными}$$

зарядами в данной точке, а  $\frac{\vec{F}}{q_0} = \vec{E}$  — напряжённость электрического поля системы зарядов в той же точке. Поэтому

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n,} \quad (21.1)$$

т. е. **напряжённость поля системы зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей, которые создаёт каждый заряд системы в отдельности**. Соотношение (21.1) называют **принципом суперпозиции полей**.

## § 22. ЛИНИИ НАПРЯЖЁННОСТИ

Очевидно, что напряжённость в каждой точке электрического поля имеет определённую величину и направление. Для наглядного изображения электрического поля пользуются **линиями напряжённости** или **силовыми линиями**, т. е. линиями, в каждой точке которых вектор напряжённости электрического поля направлен по касательной к ним. Наиболее просто это можно уяснить на примере **однородного электростатического поля**, т. е. поля, в каждой точке которого напряжённость одинакова по модулю и направлению. В этом случае линии напряжённости проводятся так, чтобы число линий  $\Phi_E$ , проходящих через единицу площади плоской площадки  $S$ , расположенной перпендикулярно к этим линиям, равнялось бы модулю  $E$  напряжённости этого поля, т. е.

$$E = \frac{\Phi_E}{S}. \quad (22.1)$$

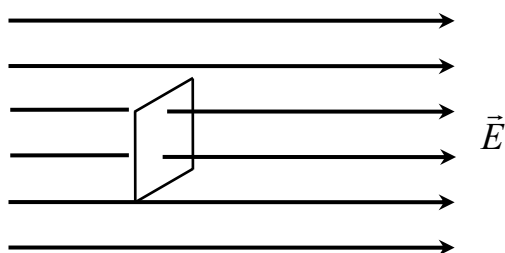


Рис. 22.1

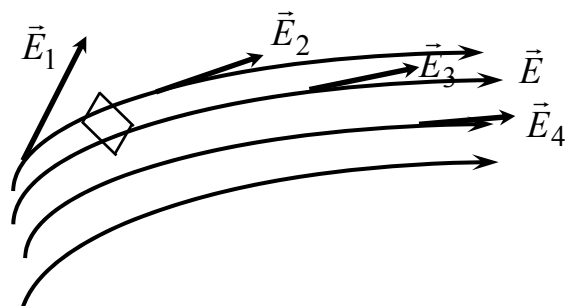


Рис. 22.2

Вид линий напряжённости однородного электростатического поля показан на рис. 22.1. Они представляют собой параллельные линии, отстоящие друг от друга на одинаковом расстоянии. Если поле неоднородное, то надо выбрать элементарную площадку  $dS$ , перпендикулярную к линиям напряжённости, в пределах которой напряжённость поля можно считать постоянной. Тогда, согласно (22.1), запишем:

$$E = \frac{d\Phi_E}{dS}, \quad (22.2)$$

где  $d\Phi_E$  — число линий напряжённости, пронизывающих эту площадку, т. е. модуль напряжённости электрического поля равен числу линий напряжённости, приходящихся на единицу площади площадки, перпендикулярной к ней. При таком способе построения по густоте линий напряжённости судят о модуле напряжённости электрического поля в различных точках поля. Там, где линии расположены гуще, модуль напряжённости поля больше. Следует отметить, что линии напряжённости никогда не пересекаются, поскольку их пересечение означало бы отсутствие определённого направления вектора  $\vec{E}$  в точках их пересечения. Картина линий напряжённости для неоднородного электростатического поля приведена на рис. 22.2. Из этого рисунка видно, что  $E_4 < E_3 < E_2 < E_1$ . Об этом можно судить по густоте линий. Условились считать, что линии напряжённости начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.

§ 23. ПОТОК НАПРЯЖЁННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

### ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. *Потоком напряжённости электрического поля* через какую-либо поверхность называют число линий напряжённости  $\Phi_E$ , пронизывающих её. В случае однородного электростатического поля, когда площадка  $S$  перпендикулярна к линиям напряжённости, поток  $\Phi_E$  напряжённости определяется из формулы (22.1) как

$$\Phi_E = ES. \quad (23.1)$$

Рассмотрим теперь случай, когда в однородном электростатическом поле находится плоская площадка, имеющая форму прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , площадь которой  $S = ab$ . Нормаль  $\vec{n}$  к площадке составляет угол  $\alpha$  с направлением поля, т. е. с вектором напряжённости  $\vec{E}$  (рис. 23.1а). Число линий напряжённости, проходящих через площадку  $S$  и её проекцию  $S_{\text{пр}}$  на плоскость, перпендикулярную к этим линиям, одинаково. Следовательно, поток  $\Phi_E$  напряжённости электрического поля через них одинаков. Используя выражение (6.1), находим, что  $\Phi = ES_{\text{пр}}$ . Из рис. 23.1 а видно, что  $S_{\text{пр}} = ab \cdot \cos \alpha = S \cos \alpha$ . Поэтому

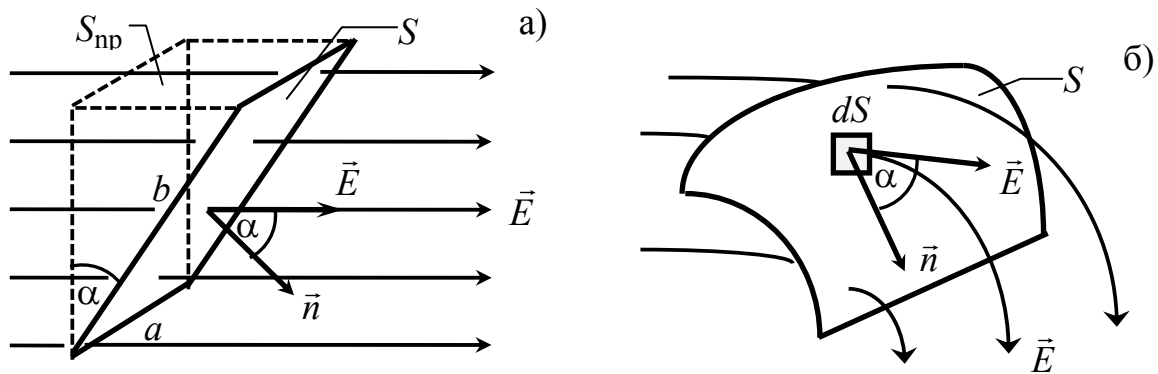


Рис. 23.1

$$\Phi_E = ES \cos \alpha = E_n S, \quad (23.2)$$

где  $E \cos \alpha = E_n$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке.

Для вычисления потока  $\Phi_E$  напряжённости электрического поля через произвольную поверхность  $S$ , помещённую в неоднородное электрическое поле (рис. 23.1б), надо мысленно разбить его на элементарные участки  $dS$ , чтобы площадку можно было бы считать плоской, а поле в её пределах однородным. Тогда согласно (22.2) элементарный поток  $d\Phi_E = E_n dS$ , а поток напряжённости электрического поля через всю поверхность равен сумме этих потоков  $d\Phi_E$ , т. е.

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}_n \cdot d\vec{S}, \quad (23.3)$$

поскольку суммирование бесконечно малых величин означает интегрирование.

Поток вектора  $\vec{E}$  является алгебраической величиной, его знак определяется углом между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$ . Если угол острый, то поток положительный, если же тупой — отрицательный. При  $\alpha = 90^\circ$  поток равен нулю, так как  $\cos 90^\circ = 0$  (см. (23.2)). Выбор направления нормали  $\vec{n}$  произволен. В случае же замкнутой поверхности проводится внешняя нормаль, т. е. нормаль, направленная в наружную область, охватываемую поверхностью. Тогда поток, входящий в объём, будет отрицательным, а выходящий — положительным.

2. Понятие потока напряжённости электрического поля используется в теореме Гаусса, которая широко применяется для расчёта напряжённостей электрических полей. Рассмотрим такой поток, создаваемый полем точечного заряда, через замкнутую поверхность, окружающую этот заряд. Мысленно проведём вокруг него сферу произвольного радиуса  $r$  с центром в точке расположения заряда (рис. 23.2, на котором приведено сечение сферы плоскостью чертежа — пунктирная линия). Найдём поток напряжённости электростатического поля через эту поверхность. В данном случае на-

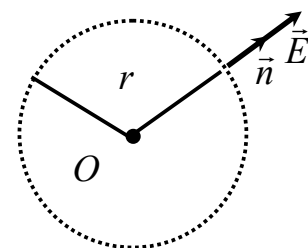


Рис. 23.2

правления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  в любой точке поверхности совпадают. Поэтому  $E_n = E \cos 0^\circ = E$ . Модуль напряжённости во всех точках на поверхности сферы одинаков и согласно (20.2) равен  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$ . С учётом этого из (23.3) полу-

чаем:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS = E \oint_S dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0\epsilon}, \quad (23.4)$$

где значок  $\oint$  на интеграле означает, что интегрирование производится по замкнутой поверхности.  $E$  вынесена за знак интеграла, поскольку она не зависит от  $S$ . Суммирование же всех площадей элементарных площадок даёт площадь  $S$  сферы, т. е.  $\oint_S dS = S = 4\pi r^2$ .

В теоретической физике доказывается, что соотношение (23.4) справедливо не только для сферы, но и для любой замкнутой поверхности. Если имеется система точечных зарядов, то очевидно, что полный поток  $\Phi_E$  напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность в силу принципа суперпозиции полей равен сумме потоков  $\Phi_{Ei}$ , создаваемых каждым зарядом  $q_i$  в отдельности, т. е.  $\Phi_E = \oint_S E_n dS = \sum_i \Phi_{Ei}$ . Но, как следует из (23.4),  $\Phi_{Ei} = q_i / (\epsilon_0\epsilon)$ . Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon} \sum_i q_i, \quad (23.5)$$

поскольку  $\epsilon_0$  и  $\epsilon$  постоянные величины, их вынесли за знак суммы. Таким образом, получен общий результат, названный теоремой Гаусса: *поток напряжённости электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри неё, делённой на электрическую постоянную и диэлектрическую проницаемость среды.*

3. Заряды в пространстве могут распределяться не только дискретно, но и непрерывно. В этом случае вводится понятие о плотности зарядов. При непрерывном распределении зарядов по поверхности вводят поверхностную плотность заряда. Пусть заряд  $q$  равномерно распределён по поверхности площадью  $S$ . Тогда поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  называется отношение  $\sigma = q/S$ . Если же распределение заряда неравномерное, то надо выделить на поверхности элементарный участок  $dS$ , в пределах которого заряд  $dq$ , находящийся на нём, можно считать равномерно распределённым. Тогда поверхностная плотность заряда будет равна



$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (23.6)$$

т. е. *поверхностной плотностью зарядов называется заряд, приходящийся на единицу площади*. Из (23.6) следует  $dq = \sigma \cdot dS$  и заряд  $q$  на некоторой поверхности  $S_0$  равен сумме элементарных зарядов  $dq$ , т. е.

$$q = \int_{S_0} \sigma \cdot dS, \quad (23.7)$$

где интегрирование производится по всей поверхности.

Аналогично вводится понятие объёмной плотности электрических зарядов. Объёмная плотность  $\rho$  заряда находится по формуле

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad (23.8)$$

т. е. *объёмная плотность зарядов равна заряду, приходящемуся на единицу объёма*. Используя (23.8), по аналогии с (23.7) можно найти заряд, расположенный в некотором объёме  $V$ :

$$q = \int_V \rho \cdot dV. \quad (23.9)$$

Здесь интегрирование производится по всему объёму  $V$ , по которому распределён заряд. Тогда при непрерывном распределении заряда на некоторой поверхности  $S_0$  теорема Гаусса записывается в виде

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \int_{S_0} \sigma \cdot dS. \quad (23.10)$$

В случае объёмного распределения

$$\Phi_E = \oint_V E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \int_V \rho \cdot dV. \quad (23.11)$$

Теорема Гаусса связывает между собой величину заряда и напряжённость поля, которое им создаётся. Этим и определяется значение данной теоремы в электростатике, поскольку она позволяет рассчитывать напряжённость, зная расположение зарядов в пространстве.

#### § 24. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ГАУССА К РАСЧЁТУ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

В различных электрических устройствах, таких как конденсаторы, антенны, волноводы и т. п., приходится сталкиваться с заряженными поверхностями. Наиболее часто в таких устройствах заряды распределены по плоским, цилиндрическим и сферическим поверхностям. Расчёт электростатических полей, создаваемых такими заряженными поверхностями, проводится с использованием теоремы Гаусса.

1. Рассмотрим только электростатическое поле бесконечной плоскости, заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$  (в реальных условиях это может быть тонкий металлический лист конечных размеров, если поле изучается в точках, отстоящих от него на расстояниях, много меньших размеров листа в центральной его части). Рассмотрение бесконечной плоскости позволяет не учитывать краевых эффектов, имеющих место при конечных размерах плоскости. Поскольку плоскость бесконечная и  $\sigma$  постоянная, то в силу симметрии вектор  $\vec{E}$  напряжённости поля перпендикулярен к плоскости и в точках, симметричных относительно плоскости, одинаков по модулю. Чтобы применить теорему Гаусса, надо мысленно выбрать произвольную замкнутую поверхность. В данном случае удобнее всего взять её в виде прямого цилиндра с осью, перпендикулярной к плоскости, и с основаниями площадью  $S_0$ , расположенными на одинаковом расстоянии от плоскости (рис. 24.1). Как видно из этого рисунка, линии напряжённости не пересекают боковую поверхность цилиндра. Поэтому поток напряжённости через неё равен нулю, и поток вектора  $\vec{E}$  сквозь замкнутую поверхность будет равен потоку через два основания, т. е.

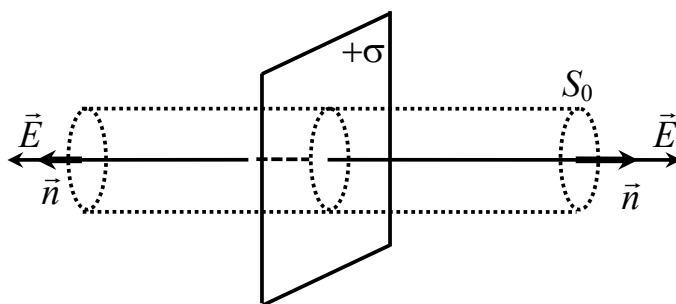


Рис. 24.1

$$\oint_S E_n dS = 2 \int_{S_0} E_n dS = 2 \int_{S_0} E \cdot dS,$$

так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  имеют одинаковое направление. Однако модуль напряжённости во всех точках основания одинаков. Поэтому, вынося его за знак интеграла, получаем, что

$$\oint_S E_n dS = 2E \int_{S_0} dS = 2ES_0. \quad (24.1)$$

Здесь учтено, что суммирование элементарных площадок, на которые мысленно разбито основание, даёт площадь основания.

Внутри данной поверхности заключён заряд, распределённый по площадке  $S_0$ , вырезаемый боковой поверхностью цилиндра на заряженной плоскости. Этот заряд находим по формуле (23.7)

$$q = \int_{S_0} \sigma \cdot dS = \sigma \int_{S_0} dS = \sigma S_0. \quad (24.2)$$

(Поскольку  $\sigma$  постоянна, то она вынесена из под знака интеграла.) Согласно теореме Гаусса,  $\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \int_{S_0} \sigma \cdot dS$  (см. (23.10)). Подставляя в эту фор-

мулу выражения (24.1) и (24.2), запишем:  $2ES_0 = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon} \sigma S_0$ . Отсюда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}. \quad (24.3)$$

Рассмотрен случай, когда плоскость была заряжена положительно. Для отрицательно заряженной плоскости результат будет таким же, но направление  $\vec{E}$  изменится на противоположное.

2. Поле двух разноимённо заряженных бесконечных параллельных плоскостей. Допустим, что плоскости равномерно заряжены разноимёнными зарядами с поверхностными плотностями  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Напряжённость электростатического поля, создаваемого этими плоскостями, находим, используя принцип суперпозиции полей (21.1). Обозначим напряжённость поля, созданную

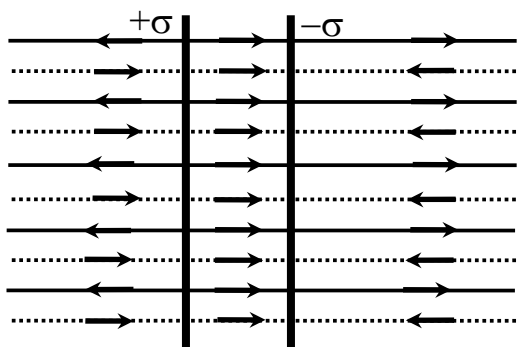


Рис. 24.2

положительно заряженной плоскостью, через  $\vec{E}_+$ , а отрицательно заряженной — через  $\vec{E}_-$ . Тогда  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ . Между плоскостями векторы  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  направлены в одну сторону (см. рис. 24.2, на котором сплошными линиями изображены линии напряжённости поля положительно заряженной плоскости, а пунктирными — отрицательно заряженной). Поэтому векторное равенство

можно заменить скалярным, т. е.  $E = E_+ + E_-$ . Но, согласно (24.3),

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}. \text{ Тогда}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}. \quad (24.4)$$

Вне плоскостей  $E = E_+ - E_- = 0$ . Таким образом, всё поле сосредоточено между плоскостями. Полученные результаты справедливы и в случае плоскостей конечных размеров, если расстояние между ними значительно меньше их линейных размеров (плоский конденсатор).

## § 25. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЗАРЯДА. ЦИРКУЛЯЦИЯ НАПРЯЖЁННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. При движении зарядов в электрическом поле силы, действующие на него со стороны поля, совершают работу. Найдём её при перемещении точечного заряда  $q_0$  в электростатическом поле, создаваемым другим точечным

зарядом  $q$ . Будем рассматривать движение в системе отсчёта, связанной с зарядом  $q$ . Тогда положение заряда  $q_0$  в любой момент времени определяем радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведённым из точки расположения заряда  $q$  (рис. 25.1). Пусть в начальный момент времени заряд находится в точке 1, определяемой радиус-вектором  $\vec{r}_1$ , а затем по произвольной траектории он перемещается в точку 2 с радиус-вектором  $\vec{r}_2$ . Работу  $A_{12}$ , совершаемую силой  $\vec{F}$ , находим по формуле  $A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  (см. § 16). В данном случае

на заряд  $q_0$  действует кулоновская сила  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2}$ . Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получаем:

$$A_{12} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (25.1)$$

Из полученного соотношения видно, что работа сил электростатического поля, создаваемого точечным зарядом, определяется только начальным и конечным положением заряда и, следовательно, не зависит от траектории движения. Оказывается, что этим свойством обладает любое электростатическое поле, а не только поле точечного заряда.

Ранее было показано, что существуют два вида полей — потенциальные и вихревые (§ 16). В потенциальных полях на тела, находящиеся в них, действуют силы, которые обладают тем свойством, что работа этих сил не зависит от пути переноса и определяется лишь начальным и конечным положением тела. Исходя из этого и учитывая полученный результат, приходим к выводу, что электростатическое поле является потенциальным.

2. Из выражения (25.1) следует также, что при переносе заряда по замкнутому пути, т. е. когда заряд возвращается в исходное положение,  $r_1 = r_2$  и  $A_{12} = 0$ . Тогда запишем

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{см. § 13}).$$

Значок  $\circ$  на интеграле означает, что

интегрирование производится по замкнутой кривой. Но сила  $\vec{F}$ , действующая на заряд  $q_0$ , равна  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ . Поэтому последнюю формулу перепишем в виде:

$$\oint_l q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Разделив обе части этого равенства на  $q_0$ , находим:

$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.} \quad (25.2)$$

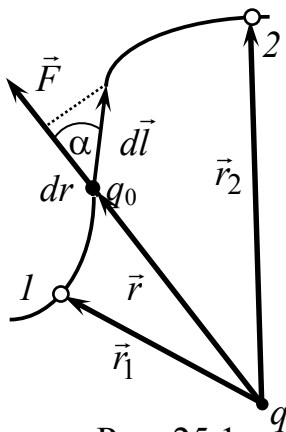


Рис. 25.1

Выражение вида  $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$  называется *циркуляцией напряжённости электрического поля*. Как указывалось, электростатическое поле потенциально. Для него циркуляция напряжённости равна нулю. Поэтому формулу (25.2) рассматривают как условие потенциальности поля.

## § 26. ПОТЕНЦИАЛ И РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Наряду с напряжённостью для характеристики электростатического поля вводят ещё одну физическую величину, называемую потенциалом, которая является энергетической характеристикой этого поля. Заряды, помещённые в электростатическое поле, обладают потенциальными энергиями. Если в одну и ту же точку поля вносить различные пробные заряды  $q_0$ , то они будут обладать различной потенциальной энергией  $W_p$  относительно некоторого нулевого уровня. Однако отношение  $W_p/q_0$  для всех зарядов будет оставаться одинаковым независимо от их величины. Поэтому его принимают за характеристику поля в данной точке. Обозначим это отношение через  $\phi$ . Тогда

$$\boxed{\phi = \frac{W_p}{q_0}}, \quad (26.1)$$

т. е. *потенциалом электростатического поля называется отношение потенциальной энергии, которой обладает заряд в некоторой точке поля, к величине этого заряда*.

2. Из механики известно, что работа перемещения тела из одной точки потенциального поля в другую равна уменьшению его потенциальной энергии (§ 16). Поэтому работа  $A_{12}$  по переносу заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2}, \quad (26.2)$$

где  $W_{p1}$  и  $W_{p2}$  — потенциальная энергия заряда в этих точках. Из (26.1) следует  $W_{p1} = q_0\phi_1$  и  $W_{p2} = q_0\phi_2$ , где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — потенциалы поля в указанных точках. С учётом этого из (26.2) получаем

$$A_{12} = q_0(\phi_1 - \phi_2). \quad (26.3)$$

Отсюда

$$\boxed{\phi_1 - \phi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}}, \quad (26.4)$$

т. е. разностью потенциалов электростатического поля называется отношение работы, совершаемой силами поля при перемещении заряда из одной точки поля в другую, к величине этого заряда.

Из формулы (26.4) можно дать и иное определение потенциала. Пусть заряд  $q_0$  переносится из произвольной точки поля с потенциалом  $\varphi$  в бесконечность, где потенциал условно принимается за ноль, так как электростатическое поле на большом расстоянии от зарядов, создающих поле, практически отсутствует, т. е.  $\varphi_1 = \varphi$  и  $\varphi_2 = 0$ . Тогда

$$\boxed{\varphi = \frac{A_{1\infty}}{q_0}}, \quad (26.5)$$

т. е. потенциал равен отношению работы, которую совершают силы электростатического поля при перемещении пробного заряда из данной точки в бесконечность, к величине этого заряда.

В системе единиц СИ разность потенциалов измеряется в вольтах (В).  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}$ , т. е.  $1 \text{ В}$  — разность потенциалов между двумя точками, при переносе между которыми заряда в  $1 \text{ Кл}$  совершается работа  $1 \text{ Дж}$ .

**3. Потенциал поля точечного заряда.** В случае поля, создаваемого точечным зарядом, согласно формулам (25.1) и (26.2), получаем:

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} \text{ и } A_{12} = W_{p1} - W_{p2}, \text{ где } W_{p1} \text{ и } W_{p2} \text{ — потенциальная}$$

энергия заряда  $q_0$  в точках  $1$  и  $2$ . Отсюда  $W_{p1} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} + C$  и

$$W_{p2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} + C. \text{ В данном случае выражения потенциальных энергий содержат}$$

некоторую константу  $C$ , поскольку, как известно (см. § 16), в общем случае потенциальная энергия определяется только с точностью до постоянной величины. При подстановке этих выражений в предыдущую формулу постоянная величина  $C$  взаимно уничтожается. Таким образом, потенциальная энергия заряда  $q_0$ , находящегося в электростатическом поле точечного

заряда  $q$ , записывается в виде  $W_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + C$ . Величина  $C$  выбирается таким

образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность ( $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия обращалась бы в ноль, т. е.  $W_p \rightarrow 0$ . Тогда  $C = 0$  и  $W_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ . Подставляя это

выражение в (26.1), получаем формулу, по которой рассчитывают потенциал в различных точках электростатического поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r}. \quad (26.6)$$

## § 27. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЁННОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

1. Электростатическое поле характеризуется двумя физическими величинами — напряжённостью и потенциалом. При этом напряжённость является вектором, а потенциал — скаляром. Очевидно, что между ними должна существовать определённая связь. Для её установления рассмотрим две точки, находящиеся на элементарном расстоянии  $dl$ , потенциалы которых равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 27.1). Найдём элементарную работу  $dA$ , совершаемую силами поля при перемещении пробного заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2. Эту работу можно вычислить двумя способами. Поскольку участок  $dl$  элементарный, то его считаем прямолинейным и изменением напряжённости  $\vec{E}$  поля, следовательно, и силы  $\vec{F}$ , действующей на заряд, пренебрегаем. Пусть направления  $d\vec{l}$  и  $\vec{E}$  составляют угол  $\alpha$ . По определению,  $dA = F \cdot dl \cdot \cos\alpha$  (см. § 13). Согласно (20.1),  $F = q_0 E$ . Тогда  $dA = q_0 E \cdot dl \cdot \cos\alpha$ . Но  $E \cdot \cos\alpha = E_l$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на направление  $d\vec{l}$ . Следовательно,

$$dA = q_0 E_l dl. \quad (27.1)$$

Но, согласно (26.3),  $dA = q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Поскольку точки близки, то потенциалы этих точек будут отличаться на элементарную величину  $d\varphi$ , т. е.  $\varphi_2 = \varphi_1 + d\varphi$ . Поэтому

$$dA = q_0 [\varphi_1 - (\varphi_1 + d\varphi)] = -q_0 d\varphi. \quad (27.2)$$

Сравнивая (27.1) и (27.2), получаем, что  $q_0 E_l dl = -q_0 d\varphi$ . Отсюда

$$d\varphi = -E_l dl \quad (27.3)$$

и

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (27.4)$$

Знак минус в выражении (27.4) указывает на то, что напряжённость в любой точке поля направлена в сторону убывания потенциала. Итак, проекция напряжённости на какое-либо направление в каждой точке поля равна производной потенциала по данному направлению

Из формулы (27.4) следует, что напряжённость

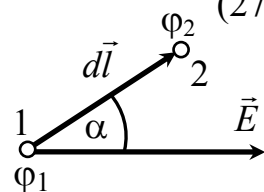


Рис. 27.1

измеряется в В/м, а не только в Н/Кл (см. (20.1)). Очевидно, что эти единицы одинаковые:  $\text{Н/Кл} = (\text{Н} \cdot \text{м}) / (\text{Кл} \cdot \text{м}) = (\text{Дж/Кл}) / \text{м} = \text{В/м}$ .

**2.** Найдём потенциал электростатического поля, создаваемого системой зарядов. Работа  $A$ , которую совершают силы поля по перемещению

пробного заряда  $q_0$  из данной точки в бесконечность, равна:  $A = \int_1^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ ,

где  $\vec{F}$  — равнодействующая сил, действующих на этот заряд со стороны отдельных зарядов системы, равная  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ . С учётом этого

получаем:  $A = \int_1^{\infty} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) d\vec{l} = \int_1^{\infty} \vec{F}_1 d\vec{l} + \int_1^{\infty} \vec{F}_2 d\vec{l} + \dots + \int_1^{\infty} \vec{F}_n d\vec{l} = A_1 + A_2 + \dots + A_n$

(интеграл от суммы равен сумме интегралов от каждого слагаемого), где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — работа, совершаемая отдельными силами по переносу заряда из данной точки в бесконечность. Разделим последнее равенство на величину пробного заряда  $q_0$ :  $A/q_0 = (A_1 + A_2 + \dots + A_n)/q_0 = A_1/q_0 + A_2/q_0 + \dots + A_n/q_0$ . Но, согласно (26.5),  $A_1/q_0 = \varphi_1, A_2/q_0 = \varphi_2$  и т. д. — потенциалы в данной точке, которые создают отдельные заряды системы, а  $A/q_0 = \varphi$  — потенциал электростатического поля системы зарядов в той же точке. Следовательно,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \quad (27.5)$$

т. е. *потенциал электростатического поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых отдельными зарядами системы. Знак потенциала совпадает со знаком заряда  $q_i$  отдельных зарядов системы.*

**3.** Для наглядного изображения электростатических полей наряду с линиями напряжённости поля используют эквипотенциальные поверхности. *Поверхности, во всех точках которых потенциалы одинаковы, называются эквипотенциальными.* Условились проводить их так, чтобы разность потенциалов между

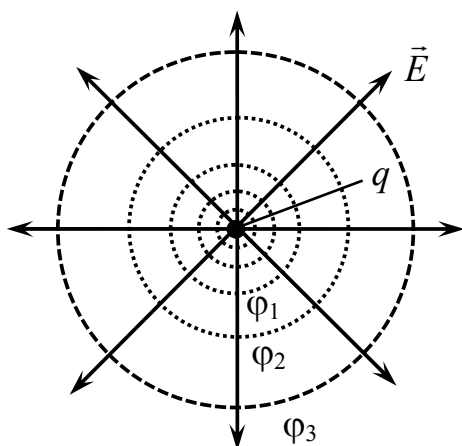


Рис. 27.2

любыми соседними поверхностями была одинаковой. Тогда по густоте этих поверхностей судят об электростатическом поле. Там, где они гуще, потенциал больше. Линии напряжённости электростатического поля и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны. Действительно, все точки эквипотенциальной поверхности обладают одинаковыми потенциалами. Поэтому работа  $A_{12}$  по переносу заряда по этой поверхности из одной точки в другую равна нулю:  $A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ , поскольку  $\varphi_1 = \varphi_2$



(см. (26.3)). Следовательно,  $A_{12} = F \cdot dl \cdot \cos\alpha = 0$ . Это возможно, если угол между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{l}$  равен  $90^\circ$ , т. е. сила перпендикулярна к траектории движения. Напряжённость  $\vec{E}$  также перпендикулярна к эквипотенциальной поверхности, так как направления векторов силы и напряжённости совпадают или противоположно направлены в зависимости от знака заряда. В качестве примера на рис. 27.2 приведён вид эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии) и линий напряжённости (сплошные линии) электростатического поля точечного заряда (показано сечение эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа). Из рис. 27.2 видно, что  $\varphi_3 < \varphi_2 < \varphi_1$ , так как густота поверхностей уменьшается по мере удаления от заряда.

## § 28. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Проводники** — это вещества, в которых заряженные частицы могут свободно перемещаться под действием электрического поля. Примерами проводников являются металлы и электролиты. В металлах свободными зарядами являются электроны, а в электролитах, т. е. растворах (или расплавах) солей, оснований и кислот, — ионы обоих знаков.

**1. Электростатическая индукция.** Если внести нейтральный проводник во внешнее электростатическое поле, то под влиянием сил, действующих на свободные заряды со стороны поля, они приходят в упорядоченное движение. При этом положительные заряды движутся в направлении поля, а отрицательные — в противоположном направлении. В результате этого на концах проводника возникают заряды, равные по величине, но противоположные по знаку. Их называют **индуцированными**. Индуцированные заряды создают собственное электростатическое поле напряжённостью  $\vec{E}_c$ , направленное навстречу внешнему полю (рис. 28.1). Очевидно, что движение зарядов прекратится в тот момент, когда это поле скомпенсирует внешнее поле напряжённостью  $\vec{E}_v$ , т. е. поле внутри проводника исчезает (его напряжённость  $E$  становится равной нулю).

*Явление перераспределения зарядов в проводнике под действием электростатического поля называют электростатической индукцией.*

Если в электростатическое поле поместить металлический ящик, то внутри него напряжённость поля также равна нулю. Это явление используется

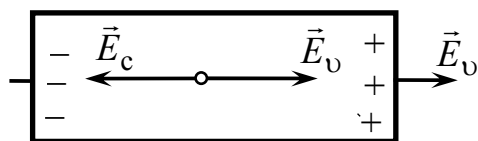


Рис. 28.1

при электростатической защите, т. е. защите различных электрических приборов и отдельных блоков электрических устройств от внешнего электростатического поля.

Для этого их окружают металлическим экраном, поскольку внутри этого экрана поле будет отсутствовать.

**2. Распределение зарядов на проводнике.** При зарядке диэлектрика избыточные заряды на нём остаются в тех местах, в которых они возникают. Поэтому распределение зарядов на диэлектрике может быть произвольным. Например, один конец стержня, изготовленного из диэлектрика, можно зарядить положительно, а другой — отрицательно. Совсем иначе обстоит дело в проводниках, в которых сообщённые им заряды могут свободно передвигаться по ним. Сообщим нейтральному проводнику некоторый избыточный заряд. Эти заряды, отталкиваясь друг от друга, будут двигаться до тех пор, пока не займут крайних возможных положений на проводнике, т. е. пока не достигнут его поверхности. Если проводник полый, то заряды располагаются по его внешней поверхности, так как в этом случае они отстоят дальше друг от друга. Итак, *в проводниках заряды в состоянии равновесия распределяются по их наружной поверхности.*

Поверхностная плотность распределения зарядов зависит от формы проводника. Так, у проводников шарообразной формы, удалённых от других тел, поверхностная плотность всюду одинакова. В случае проводника удлинённой формы наибольшая плотность оказывается на его концах, а наименьшая — в середине. Если на проводнике имеются выступы, то поверхностная плотность зарядов на них больше, чем на гладкой части поверхности. Заряды на проводнике создают вокруг него электростатическое поле. Внутри же проводника поле отсутствует. Если бы оно существовало, то под действием поля свободные заряды пришли бы в упорядоченное движение, т. е. существовал бы электрический ток, что опытом не подтверждается.

Отсутствие поля внутри проводника возможно лишь в том случае, когда разность потенциалов между любыми его точками равна нулю. Следовательно, *все точки проводника имеют одинаковые потенциалы, и по этому можно говорить о потенциале заряженного проводника.*

## § 29. КОНДЕНСАТОРЫ

**1.** Конденсаторы представляют собой два проводника, очень близко расположенные друг к другу и разделённые слоем диэлектрика. Если этим проводникам (обкладкам) сообщить одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды, то электрическое поле, возникающее между ними, будет практически полностью сосредоточено внутри конденсатора. Поэтому электроёмкость конденсатора мало зависит от расположения окружающих его тел.

Если сообщать конденсатору различные заряды, то и разность потенциалов между его обкладками будет различной. (Под зарядом конденсатора

понимается абсолютная величина заряда на одной из его обкладок.) Однако отношение заряда  $q$ , находящегося на конденсаторе, к разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , возникающей между его обкладками, остаётся постоянным независимо от величины заряда. Поэтому это отношение принимают за характеристику способности конденсатора накапливать на себе заряды. Его по аналогии с проводником называют электроёмкостью (или ёмкостью) конденсатора и обозначают той же буквой  $C$ . Итак,

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (29.1)$$

т. е. ёмкостью конденсатора называется физическая величина, равная отношению заряда конденсатора к разности потенциалов между его обкладками. Ёмкость конденсатора не зависит от величины заряда и разности потенциалов между его обкладками и определяется только размерами и формой обкладок конденсатора, а также диэлектрическими свойствами вещества, заполняющего его. Ёмкость конденсатора, как и ёмкость проводника, измеряется в фарадах (Ф):  $1 \text{ Ф}$  — это ёмкость такого конденсатора, при сообщении которому заряда в  $1 \text{ Кл}$ , разность потенциалов между его обкладками изменяется на  $1 \text{ В}$ .

**2. Ёмкость плоского конденсатора.** Рассмотрим плоский конденсатор, заполненный однородным изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , у которого площадь каждой обкладки  $S$  и расстояние между ними  $d$  (рис. 29.1, на котором показано сечение конденсатора плоскостью чертежа). Сообщим обкладкам заряды  $+q$  и  $-q$ . Этот заряд равномерно распределится по площади металлической пластины с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Пренебрегая краевыми эффектами, поле внутри конденсатора можно считать однородным ( $\vec{E} = \text{const}$ ). Найдём разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между обкладками конденсатора, которая возникает при сообщении ему заряда  $q$ . Для этого воспользуемся формулой связи напряжённости и потенциала электростатического поля:  $d\varphi = -E_l dl$ , где  $E_l$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на направление  $d\vec{l}$  (см. (27.3)). Введём ось  $Ol$ , перпендикулярную к обкладкам конденсатора. Поместим начало координат  $O$  на обкладке с потенциалом  $\varphi_1$ . Тогда координата другой обкладки равна  $d$ , так как расстояние между обкладками  $d$ . Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = - \int_0^d E_l dl = -E \int_0^d dl = -Ed, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -Ed,$$

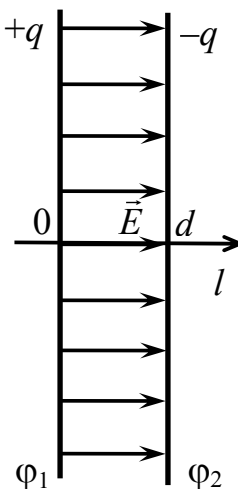


Рис. 29.1

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed. \quad (29.2)$$

В указанном интеграле  $E_l = E$ , поскольку вектор напряжённости направлен вдоль оси  $l$ , и  $E$  вынесена за знак интеграла, так как она постоянная. Согласно (24.4)  $E = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon) = q / (\epsilon_0 \epsilon S)$ , так как  $\sigma = q/S$ , где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего конденсатор. С учётом этого выражение (29.2) запишется  $\varphi_1 - \varphi_2 = qd / (\epsilon_0 \epsilon S)$ . Отсюда  $q / (\varphi_1 - \varphi_2) = \epsilon_0 \epsilon S / d$ . Учитывая (29.1), получаем, что

$$C = \epsilon_0 \epsilon S / d. \quad (29.3)$$

Из (29.3) следует, что для изготовления конденсаторов большой ёмкости надо увеличивать площадь обкладок и уменьшать расстояние между ними. Обычный бумажный конденсатор изготавливается из двух длинных полос алюминиевой фольги, изолированных друг от друга и от корпуса бумажными лентами, пропитанными парафином. Полосы и ленты сворачиваются, чем и достигается небольшой размер конденсатора.

**3.** Конденсаторы можно соединять в батареи. Существует два вида соединений — параллельное и последовательное соединение. Приведём без вывода формулы, по которым можно найти ёмкость батареи конденсаторов (вывод даётся в школьном курсе). При параллельном соединении она равна сумме ёмкостей отдельных конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n, \quad (29.4)$$

а при последовательном — находится из формулы

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (29.5)$$

### **§ 30. ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО КОНДЕНСАТОРА И УЕДИНЁННОГО ПРОВОДНИКА. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ**

**1.** Заряженный конденсатор при его разрядке способен совершить некоторую работу, следовательно, он обладает энергией. Например, за счёт этой энергии загорается лампа фотовспышки. Эта энергия запасена в конденсаторе в виде энергии электрического поля, создаваемого зарядами, находящимися на обкладках. Рассмотрим вопрос о том, как её можно подсчитать.

Процесс возникновения разноимённых зарядов на обкладках конденсатора можно представить так, что от одной обкладки отнимается некоторый заряд и передаётся другой. Пусть разность потенциалов между обкладками в какой-то момент времени равна. В

этом ризикуя эту поле. Это проще всего проделать для плоского случая  $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$ , где  $d$  — расстояние между обкладками, и  $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$ . Здесь  $\epsilon_0$  — электростатическая постоянная,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Тогда при перемещении элементарного заряда  $dq$  изменением этой разности потенциалов можно пренебречь, и элементарная работа  $dA$  по переносу данного заряда согласно (26.3) равна  $dA = (\varphi_1 - \varphi_2)dq$ . Полная работа, необходимая для сообщения конденсатору заряда

$q$ , находится по формуле  $A = \int_0^q (\varphi_1 - \varphi_2)dq$ . Используя формулу (29.1) ёмкости конденсатора, находим, что  $\varphi_1 - \varphi_2 = q/C$ , где  $C$  — ёмкость конденсатора. Тогда  $A = \int_0^q \frac{1}{C} q \cdot dq = \frac{q^2}{2C}$ . Очевидно, что электрическая энергия  $W_E$  заряженного конденсатора равна этой работе, т. е.

$$W_E = q^2/(2C). \quad (30.1)$$

Учитывая, что  $q = (\varphi_1 - \varphi_2)C$ , выражение (30.1) запишем в ином виде:

$$W_E = (1/2)C(\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (30.2)$$

**2.** Энергия заряженных проводников запасена в виде электрического поля. Поэтому целесообразно выразить её через напряжённость, характерную для конденсатора. Электрическая постоянная,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего конденсатор,  $S$  — площадь каждой обкладки. Подставляя эти выражения в (30.2), получаем

$$W_E = (1/2)\epsilon_0 \epsilon E^2 V. \quad (30.3)$$

Здесь  $V = Sd$  — объём, занимаемый полем, равный объёму конденсатора.

**3.** Введём понятие объёмной плотности энергии. Пусть энергия поля  $W_E$  равномерно распределена по объёму  $V$ . Тогда объёмная плотность  $w_E$  энергии равна

$$w_E = W_E/V, \quad (30.4)$$

т. е. **объёмная плотность энергии** — это энергия поля в единице объёма. Если энергия поля распределена неравномерно, то надо выбрать элементарный объём  $dV$ , в пределах которого распределение энергии можно считать равномерным, и определить энергию  $dW_E$  поля в этом объёме. Тогда согласно (30.4)

$$w_E = \frac{dW_E}{dV}. \quad (30.5)$$

В случае конденсатора, заполненного однородным изотропным диэлектриком, объёмная плотность энергии, как следует из (30.3) и (30.4), находится по формуле

$$w_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 \epsilon E^2. \quad (30.6)$$

В заключении отметим, что эта формула справедлива не только для конденсатора, но и для других электрических полей, в том числе и переменных.

## ГЛАВА 6. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

В разделе "Электростатика" (гл. 5) рассматривались свойства неподвижных зарядов и полей, создаваемых ими. Этот раздел представляет собой больше теоретический, чем практический интерес. В нём определяется ряд понятий, используемых в дальнейшем в науке об электричестве и магнетизме (электродинамике), — заряд, напряжённость, потенциал и т. д. В данной главе излагаются вопросы, связанные с электрическим током, значение которого в технике огромное.

### § 31. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. СИЛА И ПЛОТНОСТЬ ТОКА

**1. Электрическим током** называют любое упорядоченное движение электрических зарядов. Возможны различные виды тока. Наиболее важным является ток проводимости, который возникает внутри проводника, к которому приложено напряжение. Он представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц (носителей тока) под действием электрического поля, созданного внутри проводника.

**2.** Существует два вида проводников — металлы и электролиты. Электролиты представляют собой растворы солей, оснований и кислот в воде или расплавы солей. Опытным путём установлено, что носителями тока в электролитах являются положительные и отрицательные ионы, а в металлах — свободные электроны, называемые электронами проводимости. Исторически сложилось, что за направление электрического тока принимается направление движения положительно заряженных частиц (положительных зарядов). Поэтому, если ток обусловлен упорядоченным движением отрицательно заряженных частиц, то направление тока считается противоположно направленным движению этих частиц.

**3.** Электрический ток характеризуется силой тока, т. е. величиной заряда, протекшего через поперечное сечение проводника, за единицу времени. Пусть за промежуток времени  $t$  через поперечное сечение проводника протекает заряд  $q$ . Тогда для постоянного тока (тока, не изменяющегося со временем) сила тока согласно определению находится по формуле

$$I = q/t. \quad (31.1)$$

Если ток переменный, то надо взять элементарный промежуток времени  $dt$ , в течение которого изменением силы тока можно пренебречь, и тогда в соответствии с (31.1) сила тока равна

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (31.2)$$

где  $dq$  — элементарный заряд, протекший за время  $dt$ . Используя (31.2), находим заряд  $q$ , протекший за время  $t$ :  $dq = I(t) \cdot dt$ ,

$$q = \int_0^t I(t) \cdot dt. \quad (31.3)$$

В системе единиц СИ единицей силы тока является ампер (А). Из формулы (31.1) следует, что  $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл} / 1 \text{ с}$ .

4. Распределение силы тока по поперечному сечению проводника характеризуют плотностью тока. Если по поперечному сечению площадью  $S$  равномерно распределён ток силой  $I$ , то плотностью  $j$  тока называется отношение

$$j = I/S, \quad (31.4)$$

т. е. *плотность тока равна силе тока, протекающего через единицу поперечного сечения проводника, или плотность тока — величина заряда, переносимого в единицу времени через единицу поперечного сечения проводника.*

В случае неравномерного распределения тока необходимо выбрать элементарную площадку  $dS$ , в пределах которой распределение силы тока можно считать постоянным. Тогда, согласно (31.4) имеем:

$$\boxed{j = \frac{dI}{dS}}, \quad (31.5)$$

где  $dI$  — сила тока, проходящего через площадку  $dS$ , перпендикулярную к направлению движения зарядов. Сила тока  $I$ , текущего через поперечное сечение  $S$ , будет равна

$$I = \int_S j \cdot dS. \quad (31.6)$$

## § 32. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ. СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДНИКА. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Если к концам проводника прикладывать различные напряжения, то и сила тока, текущего в нём, будет различной. Однако отношение напряжения  $U$  к силе тока  $I$ , возникающего в проводнике, остаётся постоянным независимо от величины напряжения. Поэтому это отношение принимают за характеристику способности проводника препятствовать протеканию тока. Её называют *электрическим сопротивлением* (или *сопротивлением*) и обозначают через  $R$ . Итак,

$$R = \frac{U}{I}. \quad (32.1)$$

Сопротивление проводника зависит от его геометрических размеров и формы, а также от природы вещества, из которого он изготовлен. Для проводников с одинаковой площадью поперечного сечения сопротивление находится по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (32.2)$$

где  $l$  и  $S$  — длина и площадь поперечного сечения проводника,  $\rho$  — **удельное электрическое сопротивление** (или **удельное сопротивление**) проводника.

Обычно выражение (32.7) записывают в виде

$$I = \frac{U}{R}, \quad (32.3)$$

т. е. **сила тока в проводнике пропорциональна напряжению, приложенному к нему, и обратно пропорциональна его сопротивлению**. Соотношение (32.9) носит название **закона Ома для участка цепи**.

Закон Ома для однородного участка цепи записывают и в другом виде. Прделаем это. Как указывалось,  $U = El$ , так как поле однородное (см. (29.2)). Подставляя это выражение и формулу (32.8), получаем:  $I = \frac{1}{\rho} ES$ .

Но  $I = jS$ , где  $j$  — плотность тока в проводнике,  $S$  — площадь поперечного сечения проводника. С учётом этого

$$j = \frac{1}{\rho} E = \gamma E. \quad (32.4)$$

Здесь  $\frac{1}{\rho} = \gamma$  — удельная электропроводность проводника, т. е. электропроводность проводника единичной длины и единичного поперечного сечения. Соотношение (32.10) называют **законом Ома в дифференциальной форме**. Эта форма записи удобна тем, что связывает между собой плотность тока и напряжённость электрического поля в проводнике.

**4. Единицы сопротивления и удельного сопротивления.** Из формул (32.9) и (32.8) находим  $R = U/I$  и  $\rho = RI/S$ . Отсюда вводятся единицы измерения сопротивления (**ом**) и удельного сопротивления (**ом·метр**): **1 Ом** — сопротивление проводника, в котором течёт ток силой **1 А** при напряжении на нём **1 В** и **1 Ом·м** — сопротивление проводника длиной **1 м** и площадью поперечного сечения в **1 м<sup>2</sup>**, сопротивление которого равно **1 Ом**.

### § 33. ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

Возьмём два проводника, заряженные разноимёнными зарядами, и соединим их другим проводником. Тогда в этом проводнике за счёт разности потенциалов на его концах возникает электрическое поле, под дейст-



вием которого свободные заряды (носители тока) приходят в упорядоченное движение от положительного потенциала к отрицательному (имеется в виду движение положительных зарядов, поскольку за направление тока принимается движение именно этих зарядов), т. е. возникает электрический ток. Однако этот ток очень быстро прекращается в силу того, что протекание тока приводит к выравниванию потенциалов на концах проводника и к исчезновению внутри него электрического поля. Для непрерывного протекания тока по проводнику необходимо к его концам подключить устройство, которое бы отводило положительные заряды с конца, обладающего отрицательным потенциалом, к концу — с положительным потенциалом, производя разделение зарядов и поддерживая разность потенциалов (рис. 33.1). Такие устройства называются **источниками тока**. Указанное движение зарядов внутри источника тока (движение от точки 1 к точке 2) возможно лишь в том случае, если на них со стороны источника тока действуют силы не электростатического происхождения, направленные против сил электростатического поля. Их называют **сторонними силами**. Природа сторонних сил может быть различной. Так, в аккумуляторах они возникают вследствие химических реакций между электродами и электролитом.

Действие сторонних сил характеризуют физической величиной, называемой **электродвижущей силой** (э. д. с.). Она равна *работе, которую совершают сторонние силы по перемещению единичного заряда внутри источника тока*, т. е. в области, где действуют сторонние силы. Если при перемещении заряда  $q_0$  сторонние силы совершили работу  $A^{\text{стор}}$ , то по определению э. д. с.

$$E = A^{\text{стор}} / q_0. \quad (33.1)$$

Работу  $A^{\text{стор}}$  сторонних сил  $\vec{F}^{\text{стор}}$  можно найти по формуле механической работы:

$$A^{\text{стор}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}^{\text{стор}} d\vec{l}, \quad (33.2)$$

где  $F_l^{\text{стор}}$  — проекция сторонней силы на элементарное перемещение  $d\vec{l}$ . По аналогии с напряжённостью электростатического поля, т.е. напряжённостью кулоновских сил, действующих на заряды, находящиеся в этом поле, вводят понятие напряжённости  $\vec{E}^{\text{стор}}$  сторонних сил. Тогда, согласно определению напряжённости электрического поля, запишем, что  $\vec{E}^{\text{стор}} = \vec{F}^{\text{стор}} / q_0$ . Отсюда  $\vec{F}^{\text{стор}} = q_0 \vec{E}^{\text{стор}}$ .

Подставляя это выражение в (33.2) и вынося  $q_0$  за знак

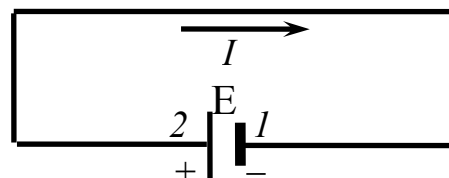


Рис. 33.1

интеграла, находим  $A^{\text{СТОП}} = q_0 \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{\text{СТОП}} d\vec{l}$ . Поделив обе части этого равен-

ства на  $q_0$  и учитывая (33.1), получаем  $E = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{\text{СТОП}} d\vec{l}$ . Если цепь, в которой

протекает ток, замкнутая (см. рис. 33.1), то работа сторонних сил по всей цепи равна работе этих сил внутри источника, поскольку вне источника сторонние силы не действуют. Тогда

$$E = \oint_l \vec{E}^{\text{СТОП}} d\vec{l} = \oint_l E_l^{\text{СТОП}} dl. \quad (33.3)$$

Таким образом, *электродвижущая сила равна циркуляции напряжённости сторонних сил.*

## § 34. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ — ЛЕНЦА

**1. *Работой электрического тока*** называется работа, которую совершают силы электрического поля, созданного в электрической цепи, при перемещении заряда по этой цепи. Пусть к концам проводника приложена постоянная разность потенциалов (напряжение)  $U = \phi_1 - \phi_2$ . Тогда согласно (26.3) работа, совершаемая электростатическим полем по переносу заряда  $q$  за некоторое время  $t$ , равна  $A = q(\phi_1 - \phi_2) = qU$ . Величину протекшего заряда найдём, используя силу тока  $I$ :  $q = It$  (31.1). С учётом этого получаем

$$A = IUt. \quad (34.1)$$

Применяя закон Ома для однородного участка цепи  $U = IR$  (см. (32.9)), где  $R$  — сопротивление проводника, выражение (34.1), запишем в виде

$$A = I^2 R t. \quad (34.2)$$

Если сила тока в цепи изменяется со временем, то для нахождения работы электрического тока надо выбрать элементарный промежуток времени  $dt$ , в течение которого изменением силы тока можно пренебречь. Тогда элементарная работа  $dA$ , согласно (34.2), находится по формуле  $dA = I^2 R dt$ . Работа  $A$ , совершённая за время  $t$ , будет равна сумме элементарных работ, т. е.

$$A = \int_0^t I^2(t) R \cdot dt. \quad (34.3)$$

По определению мощность электрического тока равна  $P = A/t$ . Учитывая (34.1), получаем, что

$$P = IU. \quad (34.4)$$

В системе единиц СИ работа и мощность электрического тока измеряются соответственно в джоулях и ваттах. Однако на практике часто используется внесистемная единица работы 1 кВт·ч, т. е. работа тока мощностью 1 кВт за время 1 ч ( $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 10^3 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ ).

Электроны, движущиеся в металле под действием электрического поля, непрерывно сталкиваются с ионами кристаллической решётки, передавая им свою кинетическую энергию упорядоченного движения. Это приводит к увеличению внутренней энергии металла, т. е. к его нагреванию. Согласно закону сохранения энергии, вся работа тока  $A$  идёт на выделение количества теплоты  $Q$ , т. е.  $Q = A$ . Используя (34.2), находим

$$\boxed{Q = I^2 R t.} \quad (34.5)$$

Соотношение (34.5) называют *законом Джоуля — Ленца*.

### § 35. ПРАВИЛА КИРХГОФА

При разработке электрических и радиотехнических схем приходится сталкиваться с очень сложными разветвлёнными электрическими цепями, и при этом необходимо знать, какие токи будут протекать в той или иной цепи. Для расчёта сил токов в различных участках таких цепей обычно составляется система линейных уравнений, в которые в качестве неизвестных входят силы токов в различных участках цепи. Решая такую систему, находят силы токов. Основой для составления уравнений являются правила Кирхгофа.

**Первое правило Кирхгофа.** *Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, т. е. в точке разветвления проводников, равна нулю:*

$$\sum_i I_i = 0. \quad (35.1)$$

Условно принято ток, приходящий к узлу, считать положительным, а уходящий — отрицательным. Например, для узла  $A$  (рис. 35.1) уравнение запишется:  $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ . Справедливость этого правила следует из закона сохранения заряда. Если бы количество заряда, входящего в узел, не равнялось бы величине заряда, покидающего его, т. е. если бы алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, не была равна нулю, то в узлах происходило бы накопление заряда, приводящего к изменению потенциалов узлов, следовательно, и изменение сил токов. Однако же ток в цепи остаётся постоянным. Поэтому должно выполняться первое правило Кирхгофа. Необходимо отметить, что число уравнений, которое можно составить для узлов, на единицу меньше общего числа узлов в разветвлённой цепи. Так, например, в электрической цепи, приведённой на рис. 35.1, всего два узла

—  $A$  и  $B$ . Поэтому можно составить только одно уравнение для узла  $A$  или  $B$ . Число неизвестных токов всегда больше числа уравнений, составленных для узлов. В силу этого для определения всех неизвестных величин необходимо составить дополнительные уравнения, используя второе правило Кирхгофа (правило для контуров).

**Второе правило Кирхгофа.** Алгебраическая сумма напряжений (произведений сил токов на сопротивления) в ветвях любого замкнутого контура равна алгебраической сумме э. д. с., встречающихся в этом контуре, т. е.

$$\sum_k U_k = \sum_j E_j \quad \text{или} \quad \sum_k I_k R_k = \sum_j E_j. \quad (35.2)$$

Необходимо отметить, что сопротивления  $R_k$  включают в себя и внутренние сопротивления источников тока. Так, замкнутым является контур  $ABE_3A$  (см. рис. 35.1).

Второе правило Кирхгофа является следствием закона сохранения и превращения энергии. При применении этого правила выбирают какое-нибудь направление обхода, например по часовой стрелке, и условливаются о правиле знаков:

а) если токи  $I_k$  текут в направлении обхода, то соответствующие произведения  $I_k R_k$  берутся со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус;

б) если в направлении обхода внутри источника происходит переход от отрицательного полюса к положительному полюсу, то э. д. с. берётся со знаком плюс, в противном случае — с минусом. Например, для замкнутого контура  $ABE_3A$  уравнение записывается в виде —  $I_2(R_2 + r_2) + I_3(R_3 + r_3) = E_3 - E_2$ .

Если после решения системы уравнений силы токов в каких-либо участках получаются отрицательными, то это означает, что в действительности направление этих токов противоположно направлению, выбранному при расчёте. Следует отметить, что число уравнений, которое возможно для контуров, на единицу меньше общего числа замкнутых контуров разветвлённой цепи. Так, в электрической схеме, показанной на рис. 35.1, число возможных замкнутых контуров три —  $AE_1BE_3A$ ,  $AE_1BE_2A$  и  $ABE_3A$ . Следовательно, можно составить лишь два уравнения для любых указанных контуров. При этом надо соста-

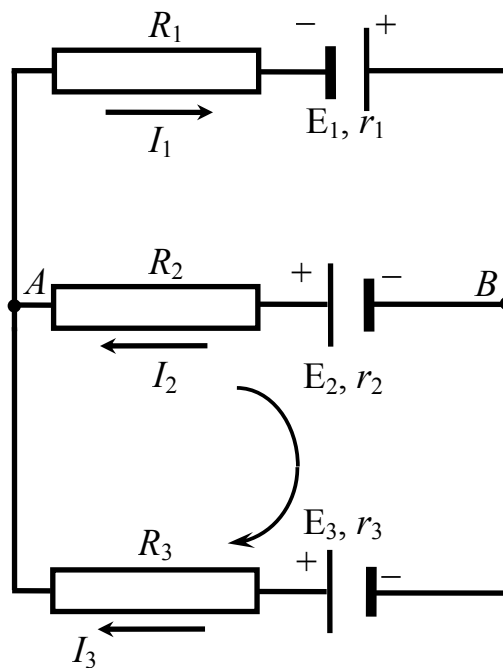


Рис. 35.1

вить столько уравнений для замкнутых контуров, чтобы в сумме с числом уравнений для узлов оно равнялось бы числу неизвестных токов, которые и нужно определить. Например, для указанной цепи (рис. 35.1) составляют одно уравнение для узла  $A$  и два для замкнутых контуров  $ABE_3A$  и  $AE_1BA$ :

$$\left. \begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0, \\ -I_2(R_2 + r_2) + I_3(R_3 + r_3) &= E_3 - E_2, \\ I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) &= E_2 + E_1. \end{aligned} \right\}$$

Зная величины сопротивлений и э. д. с., находят силы токов, решив эту систему уравнений.

Отметим, что можно выбрать и другие два из трёх указанных замкнутых контуров, как и другой узел ( $B$ ). Результат по расчёту сил токов и напряжений от этого не изменится.

## ГЛАВА 7. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### § 36. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1. Присоединим два гибких металлических проводника, укреплённых параллельно, к источнику тока, как показано на рис. 36.1 а. На проводниках появляются равномерно распределённые заряды противоположных знаков, которые создают вокруг себя электростатическое поле. В результате этого возникает сила электростатического притяжения. Если замкнуть

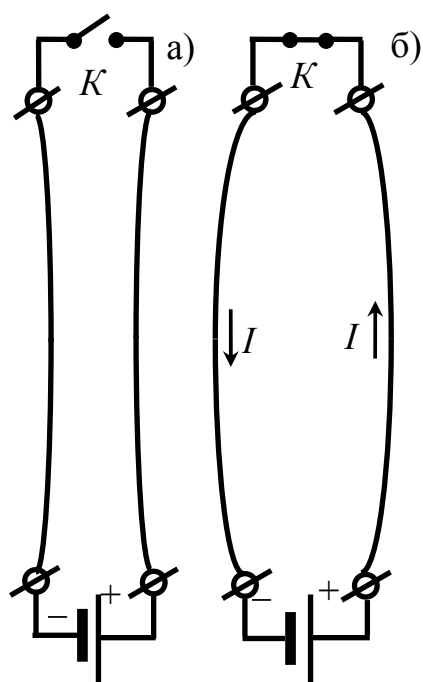


Рис. 36.1

ключ  $K$ , то по проводникам потечёт постоянный ток. При этом, несмотря на силы электростатического притяжения, проводники отталкиваются (рис. 36.1 б). Это свидетельствует о том, что между ними возникли силы не электростатического происхождения. Их появление можно объяснить, если предположить, что вокруг проводника с током, т. е. вокруг упорядоченно движущихся электрических зарядов, образуется поле, отличное от электростатического поля. Его назвали **магнитным полем**. Тогда взаимодействие токов объясняется следующим образом. Магнитное поле, создаваемое током, текущим по одному проводнику, действует на ток, проходящий по другому, и наоборот. Итак, приходим к выводу: *вокруг равномерно движущихся электрических зарядов возникает магнитное поле, которое обнаруживается по*

действию на другие движущиеся в этом поле заряды. Необходимо отметить, что электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся заряды, а магнитное — только на движущиеся.

**2. Индукция магнитного поля.** Подобно тому, как для изучения электрического поля используются пробные электрические заряды (§ 20), при исследовании магнитного поля применяются пробные контуры. **Пробными** называют замкнутые контуры, по которым течёт постоянный ток, внесение которых не искажает исследуемого поля. Вокруг контура существует магнитное поле, которое определяется так называемым **магнитным моментом**  $\vec{p}_m$ , который является вектором. Его модуль равен

$$p_m = IS, \quad (36.1)$$

где  $I$  — сила тока в контуре,  $S$  — площадь контура. Вектор  $\vec{p}_m$  направлен перпендикулярно к плоскости контура и связан с направлением тока правилом **правого винта**: при вращении винта в направлении тока его поступательное движение показывает направление магнитного момента контура (рис. 36.2). Из формулы (36.1) следует, что магнитный момент измеряется в ампер·метр<sup>2</sup> ( $A \cdot m^2$ ).

При внесении пробного контура в магнитное поле он устанавливается так, что его магнитный момент совпадает с направлением магнитного поля в данной точке поля. Если контур вывести из положения равновесия, то на него будет действовать момент сил, стремящийся вернуть его в положение равновесия. Этот момент сил будет наибольшим (максимальным), когда магнитный момент контура перпендикулярен к направлению поля. Пусть в одну и ту же точку магнитного поля вносятся различные пробные контуры. Тогда на них будут действовать и различные максимальные моменты сил. Однако отношение модуля максимального момента  $M_{\max}$  к модулю магнитного момента контура  $p_m$  остаётся постоянным независимо от модуля магнитного момента. Поэтому его принимают за характеристику поля в данной точке. Её называют индукцией магнитного поля и обозначают через  $B$ , т. е.

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}. \quad (36.2)$$

Таким образом, модуль индукции магнитного поля в некоторой точке равен отношению максимального момента сил, действующего на пробный контур, помещённый в эту точку, к его магнитному моменту, и направление индукции магнитного поля совпадает с направлением магнитного момента свободно ориентирующегося контура.

В системе единиц СИ индукция магнитного поля измеряется в теслах (Тл). Как следует из (36.2), 1 Тл —

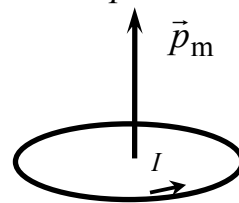


Рис. 36.2

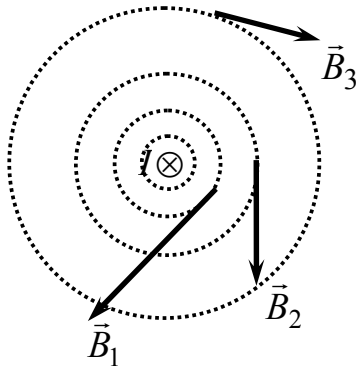


Рис. 36.3

это индукция в такой точке магнитного поля, при внесении в которую пробного контура с магнитным моментом  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$  на него действует максимальный момент сил, равный  $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Подсчитаем размерность тесла.

$$Tл = \frac{H \cdot м}{A \cdot м^2} = \frac{Дж}{A \cdot м^2} = \frac{Кл \cdot В}{A \cdot м^2} = \frac{A \cdot с \cdot В}{A \cdot м^2} = \frac{В \cdot с}{м^2}.$$

**3. Линии магнитной индукции.** Для наглядного изображения магнитного поля пользуются линиями магнитной индукции. *Линией магнитной индукции* называют такую линию, в каждой точке которой индукция магнитного поля (вектор  $\vec{B}$ ) направлена по касательной к кривой. Направление этих линий совпадает с направлением поля. Условились линии магнитной индукции проводить так, чтобы число этих линий, приходящихся на единицу площади площадки, перпендикулярной к ним, равнялось бы модулю индукции в данной области поля аналогично тому, как это делалось в случае электрического поля (§ 22). Тогда по густоте линий магнитной индукции судят о магнитном поле. Там, где линии гуще, модуль индукции магнитного поля больше. Так же, как и линии напряжённости электрического поля, они не пересекаются. *Линии магнитной индукции всегда замкнуты* в отличие от *линий напряжённости электростатического поля*, которые разомкнуты (начинаются и заканчиваются на зарядах). Направление линий магнитной индукции находится по правилу правого винта: *если поступательное движение винта совпадает с направлением тока, то его вращение происходит в направлении линий магнитной индукции*. В качестве примера приведём картину линий магнитной индукции прямого тока, текущего перпендикулярно к плоскости чертежа от нас за чертёж (рис. 36.3).

**4. Закон Ампера.** Установлено, что на проводник с током, помещённый в магнитное поле, действует сила. Ампер установил, что модуль  $dF$  силы находится по формуле

$$F = B \cdot I \cdot dl \cdot \sin \alpha, \quad (36.3)$$

где  $I$  — сила тока, проходящего по проводнику;  $B$  — модуль индукции магнитного поля в месте расположения участка длиной  $dl$ ;  $\alpha$  — угол между направлениями тока и вектора  $\vec{B}$ . Направление этой силы, получившей название силы Ампера, определяется по правилу левой руки: *если руку расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, четыре вытянутых пальца совпадали с направлением тока, то отогнутый на  $90^\circ$  большой палец даёт направление силы*. Сила Ампера перпендикулярна к плоскости, проведённой через  $dl$  и  $\vec{B}$ . В случае прямолинейного проводника длиной  $l$ , находящегося в однородном магнитном поле, формула (36.3) запишется как

$$F = BIl \cdot \sin \alpha. \quad (36.4)$$

**5. Сила Лоренца.** Опытным путём установлено, что на заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила. Эту силу называют *силой Лоренца*. Модуль  $F_L$  силы находится по формуле

$$F_L = B \cdot q \cdot v \cdot \sin \alpha. \quad (36.5)$$

Здесь  $B$  — модуль индукции магнитного поля, в котором движется заряд;  $q$  и  $v$  — абсолютная величина заряда и его скорость,  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Эта сила перпендикулярна к векторам  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Направление этой силы находится по **правилу левой руки**: если руку расположить так, чтобы четыре вытянутых пальца совпадали с направлением движения положительного заряда, линии индукции магнитного поля входили в ладонь, то отставленный на  $90^\circ$  большой палец показывает направление силы. В случае отрицательной частицы направление силы противоположное (рис. 36.4).

## § 37. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

1. Введём сначала понятие циркуляции индукции магнитного поля. В § 25 было введено понятие циркуляции напряжённости электрического поля и показано, что циркуляция напряжённости электростатического поля вдоль произвольного замкнутого контура  $l$  равна нулю, т. е.  $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , что свидетельствует о потенциальности электростатического

поля. Аналогичная величина вводится и при рассмотрении магнитного поля. **Циркуляцией индукции магнитного поля** называют интеграл  $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l}$ , (37.1)

где  $d\vec{l}$  — элементарный вектор длины контура, направленный в сторону обхода контура,  $B_l = B \cdot \cos \alpha$  — проекция вектора  $\vec{B}$  на направление  $d\vec{l}$ ,  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ .

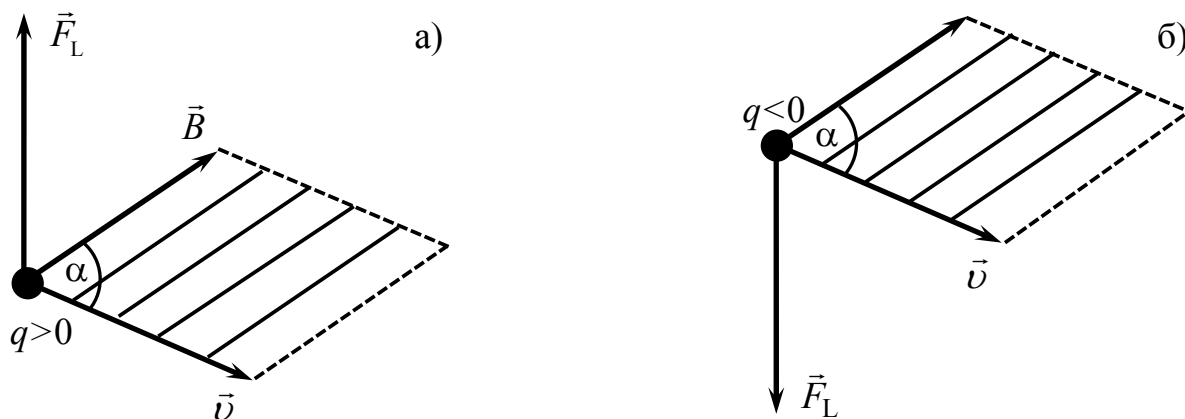


Рис. 36.4



2. Найдём циркуляцию индукции магнитного поля по окружности произвольного радиуса  $a$ , совпадающей с линией магнитной индукции. Поле создаётся током силой  $I$ , текущим по бесконечно длинному проводнику, расположенному перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 37.1, на котором приведено поперечное сечение проводника плоскостью чертежа, линия магнитной индукции изображена пунктиром). Индукция магнитного поля  $\vec{B}$  направлена по касательной к линии магнитной индукции. Преобразуем выражение  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl \cdot \cos \alpha = B \cdot dl$ , так как  $\alpha = 0$  и  $\cos \alpha = 1$ . Индукция  $B$  магнитного поля, создаваемого током силой  $I$ , текущим по бесконечно длинному проводнику, вычисляется по формуле  $B = \mu_0 \mu I / (2\pi a)$ . Здесь  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $a$  — расстояние от проводника до точки, в которой определяется индукция магнитного поля,  $\mu$  — магнитная проницаемость, характеризующая среду. Она показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в среде отличается от индукции того же поля в вакууме, т. е.

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \quad (37.2)$$

Тогда  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a} \cdot dl$ . Циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по данному контуру находим по формуле (37.1):  $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a} \cdot dl = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a} \cdot \oint_l dl = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a} \cdot l = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a} \cdot 2\pi a = \mu_0 \mu I$ , так как  $\oint_l dl = l = 2\pi a$  — длина окружности. Итак,

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu I. \quad (37.3)$$

Можно показать, что соотношение (37.3) справедливо для контура произвольной формы, охватывающего проводник с током. Если магнитное поле создано системой токов  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , то индукция  $\vec{B}$  этого поля в соответствии с принципом суперпозиции полей равна векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых отдельными токами, т. е.  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$ . С учётом этого для

циркуляции  $\vec{B}$  имеем

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n) \cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \oint_l \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \oint_l \vec{B}_n \cdot d\vec{l}. \quad \text{Согласно}$$

(37.3)  $\oint_l \vec{B}_k \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu I_k$ , где  $k$  — принимает значения от 1 до  $n$ . Поэтому

$$\boxed{\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu I_1 + \mu_0 \mu I_2 + \dots + \mu_0 \mu I_n = \mu_0 \mu \sum_{k=1}^n I_k.} \quad (37.4)$$

Необходимо отметить, что в выражении (37.4) суммирование сил токов алгебраическое. Знак силы тока зависит от направления обхода и определяется правилом **правого винта**: если направление тока совпадает с поступательным движением винта, вращающегося по направлению обхода контура, то он положительный; ток противоположного направления считают отрицательным.

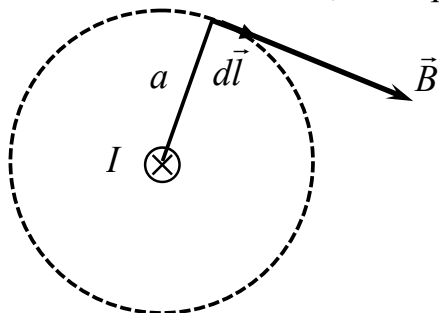


Рис. 37.1

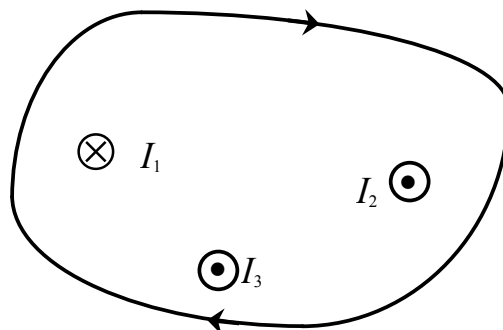


Рис. 37.2

Например, для системы токов, приведённых на рис. 37.2, на котором показано их сечение плоскостью чертежа,  $\sum_{k=1}^n I_k = I_1 - I_2 - I_3$ . Соотноше-

ние (37.4) и является законом полного тока: **циркуляция индукции магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной, магнитной проницаемости на алгебраическую сумму сил токов, охватываемых этим контуром.**

Силу тока можно найти, используя плотность тока  $j$  (см. (31.6)):  $I = \int_S j \cdot dS$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения проводника. Тогда закон полного тока записывается в виде

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu \int_S j \cdot dS. \quad (37.5)$$

Подводя итог, отметим, что на основании рассмотрения циркуляции напряжённости (индукции)  $\vec{G}$  какого-то поля в физике определяют два типа полей.

1. Если  $\oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$ , то поле называют потенциальным. Таковыми являются электростатические и гравитационные поля.

2. Если  $\oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l} \neq 0$ , то поле называется вихревым. К нему относится в первую очередь постоянное магнитное поле и, как будет показано, переменное электрическое поле.

## § 38. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО СОЛЕНОИДА

В качестве примера применения закона полного тока рассчитаем магнитное поле бесконечно длинного соленоида, по которому течёт электрический ток (рис. 38.1). (Бесконечно длинным можно считать соленоид, диаметр которого много меньше его длины.) Опытным путём установлено, что магнитное поле внутри бесконечно длинного соленоида однородное ( $\vec{B} = \text{const}$ ), а вне его оно настолько слабо, что им можно пренебречь. Внутри соленоида поле направлено вдоль его оси. Для нахождения модуля вектора  $\vec{B}$  воспользуемся законом полного тока. Мысленно проведём замкнутый контур в виде прямоугольника  $ab\epsilon z$ . Тогда интеграл по замкнутому контуру можно представить как сумму интегралов по отдельным сторонам этого прямоугольника, т. е.  $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{b\epsilon} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\epsilon z} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{za} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ . Интегралы по  $b\epsilon$  и  $za$  равны нулю, поскольку внутри соленоида  $\vec{B}$  перпендикулярно к  $d\vec{l}$  и  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl \cdot \cos 90^\circ = 0$ . Интеграл по  $\epsilon z$  также равен нулю, так как  $B = 0$ . На участке  $ab$  направления  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  совпадают и  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl$ . Поэтому  $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B \cdot dl = B \int_{ab} dl = Bl_0$ , где  $l_0$  — длина отрезка  $ab$ . Величина  $B$  вынесена за знак интеграла, так как  $\vec{B} = \text{const}$ , а суммирование элементарных участков на отрезке  $ab$  даёт длину этого участка. Итак,

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl_0 \quad (38.1)$$

Пусть число витков на единицу длины соленоида равно  $n$ . Тогда общее число витков  $N$  на отрезке соленоида длиной  $l_0$  равно  $N = nl_0$ , а число токов, охватываемых контуром,

$$\sum_{i=1}^N I_i = NI = nl_0 I. \quad (38.2)$$

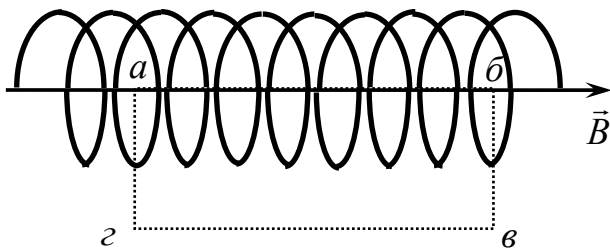


Рис. 38.1

Подставляя (38.1) и (38.2) в закон полного тока (37.3), получаем  $Bl_0 = \mu_0 \mu n l_0 I$ . Отсюда

$$B = \mu_0 \mu n I.$$

Из формулы (38.3) следует, что для создания магнитного поля в соленоиде с большей индукцией поля необходимо увеличивать число витков на единицу (плотность намотки) и силу тока в соленоиде.

## ГЛАВА 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### § 39. МАГНИТНЫЙ ПОТОК. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. По аналогии с потоком напряжённости электрического поля (см. § 23, п. 1) вводится поток индукции магнитного поля или магнитный поток. **Магнитным потоком через некоторую поверхность** называют число линий магнитной индукции, пронизывающих её. Пусть в неоднородном магнитном поле находится поверхность площадью  $S$ . Для нахождения магнитного потока через неё мысленно разделим поверхность на элементарные участки площадью  $dS$ , которые можно считать плоскими, а поле в их пределах однородным (рис. 39.1). Тогда элементарный магнитный поток  $d\Phi_B$  через эту поверхность равен:  $d\Phi_B = B \cdot dS \cdot \cos \alpha = B_n dS$ , где  $B$  — модуль индукции магнитного поля в месте расположения площадки,  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{B}$  и нормалью  $\vec{n}$  к площадке,  $B_n = B \cdot \cos \alpha$  — проекция индукции магнитного поля на направление нормали. Магнитный поток  $\Phi_B$  через всю поверхность равен сумме этих потоков  $d\Phi_B$ , т. е.

$$\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int_S B_n dS, \quad (39.1)$$

поскольку суммирование бесконечно малых величин — это интегрирование.

Если плоская площадка площадью  $S$  расположена в однородном магнитном поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции, то  $B_n = B$  ( $\alpha = 0$  и  $\cos \alpha = 1$ ). Из (39.1) получаем:

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = B \int_S dS = BS, \quad (39.2)$$

вследствие того, что  $B$  постоянная величина, а суммирование  $dS$  даёт площадь площадки.

В системе единиц СИ магнитный поток измеряется в веберах (Вб). Из (39.2) следует, что  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ , т. е.  $1 \text{ Вб}$  — это магнитный поток через площадку в  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно к линиям магнитной индукции в однородном магнитном поле с индукцией  $1 \text{ Тл}$ . Найдём размерность вебера.  $\text{Вб} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{B \cdot c}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^2 = B \cdot c$ .

2. В электродинамике доказывается следующая теорема: **магнитный поток, пронизывающий произвольную замкнутую поверхность, равен нулю**, т. е.

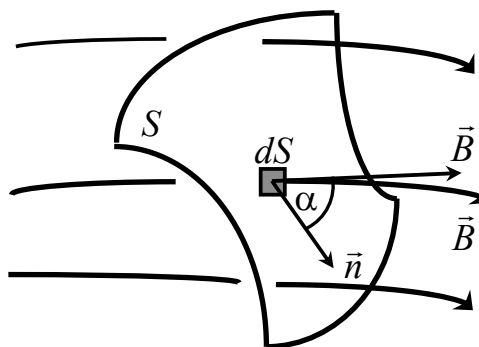


Рис. 39.1

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (39.3)$$

Это соотношение получило название *теоремы Гаусса* для магнитного поля. Эта теорема является следствием того, что в природе не существует «магнитных зарядов» (в отличие от электрических) и что линии магнитной индукции всегда замкнуты (в отличие от линий напряжённости электростатического поля, которые начинаются и заканчиваются на электрических зарядах).

## § 40. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Известно, что на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера (§ 36, п. 4). Если проводник перемещается, то при его движении эта сила совершает работу. Определим её для частного случая. Рассмотрим электрическую цепь, один из участков  $DC$  которой может скользить (без трения) по контактам. При этом цепь образует плоский контур. Этот контур находится в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , перпендикулярной к плоскости контура, направленного на нас (рис. 40.1). На участок  $DC$  действует сила Ампера, определяемая формулой (36.4):

$$F = BIl, \quad (40.1)$$

где  $l$  — длина участка,  $I$  — сила тока, текущего по проводнику. (В данном случае  $\alpha = 90^\circ$  и  $\sin \alpha = 1$ .) Направление силы находим по правилу левой руки. При перемещении участка  $DC$  на элементарное расстояние  $dx$  совершается элементарная работа  $dA$ , равная  $dA = F \cdot dx$ . Учитывая (40.1), получаем:

$$dA = BIl \cdot dx = IB \cdot dS = I \cdot d\Phi_B, \quad (40.2)$$

поскольку  $dS = l \cdot dx$  — площадь, описываемая проводником при своём движении,  $d\Phi_B = B \cdot dS$  — магнитный поток через эту площадь или изменение магнитного потока через площадь плоского замкнутого контура. Выражение (40.2) справедливо и для неоднородного магнитного поля.

Работа перемещения замкнутого контура, по которому течёт постоянный ток, на конечное расстояние находится интегрированием уравнения (40.2):

$$A = \int_{\Phi_{B1}}^{\Phi_{B2}} I \cdot d\Phi_B = \int_{\Phi_{B1}}^{\Phi_{B2}} d\Phi_B = I(\Phi_{B2} - \Phi_{B1}),$$

где  $\Phi_{B1}$  и  $\Phi_{B2}$  — магнитный

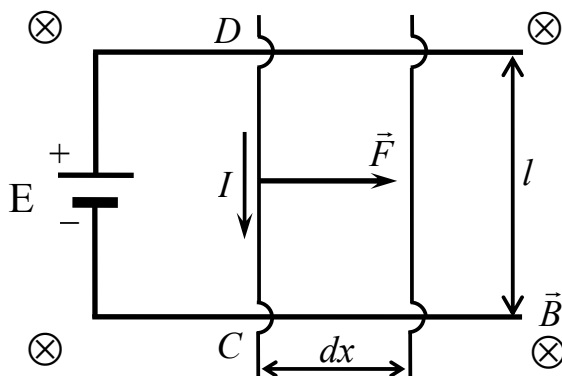


Рис. 40.1

поток, пронизывающий площадь контура в начальном и конечном положении соответственно. Итак,

$$A = I(\Phi_{B2} - \Phi_{B1}), \quad (40.3)$$

т. е. *работа по перемещению замкнутого контура с постоянным током в магнитном поле равна произведению силы тока на изменение магнитного потока через площадь этого контура.*

## § 41. ЯВЛЕНИЕ И ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ПРАВИЛО ЛЕНЦА

1. Ранее было показано (§ 36, п.1), что электрические токи создают магнитное поле. Естественно возникает вопрос: возможно ли появление электрического тока с помощью магнитного поля? Эту проблему решил Фарадей, открывший явление электромагнитной индукции, которое заключается в следующем: *при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего площадь, охватываемую проводящим контуром, в нём возникает электродвижущая сила.* Её называют *э. д. с. индукции*. Если контур замкнут, то под действием э. д. с. появляется электрический ток, названный *индукционным*.

Рассмотрим один из опытов, проведённых Фарадеем, по обнаружению индукционного тока, следовательно, и э. д. с. индукции. Если в соленоид, замкнутый на очень чувствительный электроизмерительный прибор (гальванометр) (рис. 41.1), вдвигать или выдвигать магнит, то при движении магнита наблюдается отклонение стрелки гальванометра, свидетельствующее о возникновении индукционного тока. То же самое наблюдается при движении соленоида относительно магнита. Если же магнит и соленоид неподвижны относительно друг друга, то и индукционный ток не возникает. Таким образом, при взаимном движении указанных тел происходит изменение магнитного потока, создаваемого магнитным полем магнита, через витки соленоида, что и приводит к появлению индукционного тока, вызванного возникающей э. д. с. индукции.

2. Направление индукционного тока определяется *правилом Ленца*: *индукционный ток всегда имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, которое вызывает этот ток.* Из этого следует, что при возрастании магнитного потока возникающий индукционный ток будет иметь такое направление, чтобы порождаемое им магнитное поле было направлено против внешнего

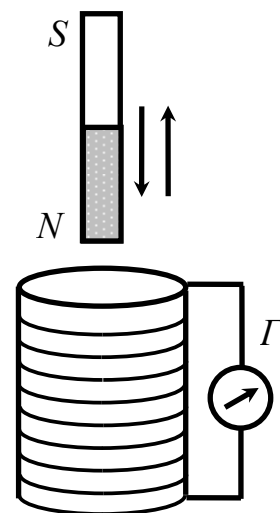


Рис. 41.1

поля противодействуя увеличению магнитного потока. Уменьшение магнитного потока, наоборот, приводит к появлению индукционного тока, создающего магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем.

Пусть, например, в однородном магнитном поле находится квадратная рамка, изготовленная из металла и пронизываемая магнитным полем (рис. 41.2). Предположим, что магнитное поле возрастает. Это приводит к увеличению магнитного потока через площадь рамки. Согласно правилу Ленца, магнитное поле возникающего индукционного тока будет направлено против внешнего поля, т. е. вектор  $\vec{B}_i$  этого поля противоположен вектору  $\vec{B}$ . Применяя правило правого винта (если винт вращать так, чтобы его поступательное движение совпадало с направлением магнитного поля, то его вращательное движение даёт направление тока), находим направление индукционного тока  $I_i$ .

**3. Закон электромагнитной индукции, определяющий возникающую э. д. с., был открыт Фарадеем опытным путём. Однако его можно получить исходя из закона сохранения энергии.**

Вернёмся к электрической цепи, приведённой на рис. 40.1, помещённой в магнитное поле. Найдём работу, совершаемую источником тока с э. д. с.  $E$ , при перемещении зарядов по цепи за элементарный промежуток времени  $dt$ . Из определения э. д. с. (см. (33.1)) работа  $dA^{\text{стор}}$  сторонних сил равна:  $dA^{\text{стор}} = E \cdot dq$ , где  $dq$  — величина заряда, протекающего по цепи за время  $dt$ . Но  $dq = I \cdot dt$ , где  $I$  — сила тока в цепи (см. (31.2)). Тогда

$$dA^{\text{стор}} = E \cdot I \cdot dt. \quad (41.1)$$

Работа источника тока расходуется на выделение некоторого количества теплоты  $dQ$  и на работу  $dA$  по перемещению проводника  $DC$  в магнитном поле. Согласно закону сохранения энергии должно выполняться равенство

$$dA^{\text{стор}} = dQ + dA. \quad (41.2)$$

Из закона Джоуля — Ленца запишем:

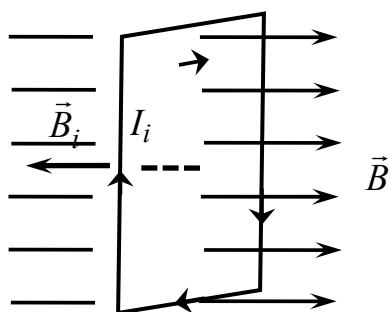


Рис. 41.2

$$dQ = I^2 R \cdot dt,$$

где  $R$  — полное сопротивление данной цепи (см. (34.2)), а из выражения (40.2)

$$dA = I \cdot d\Phi_B.$$

Здесь  $d\Phi_B$  — изменение магнитного потока через площадь замкнутого контура при движении проводника. Подставляя выражения (41.1), (41.3) и (41.4) в формулу (41.2) после сокращения на  $I$ , получаем  $E \cdot dt = IR \cdot dt + d\Phi_B$ . Разделив

обе части этого равенства на  $dt$ , находим:  $I = (E - \frac{d\Phi_B}{dt})/R$ . Из этого выражения следует вывод, что в цепи, кроме э. д. с.  $E$ , действует ещё какая-то электродвижущая сила  $E_i$ , равная

$$\boxed{E_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}} \quad (41.5)$$

и обусловленная изменением магнитного потока, пронизывающего площадь контура. Эта э. д. с. и является э. д. с. электромагнитной индукции или коротко э. д. с. индукции. Соотношение (41.5) представляет собой **закон электромагнитной индукции**. Его формулировка: *э. д. с. индукции в контуре равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего площадь, охватываемую этим контуром*. Знак минус в формуле (41.5) является математическим выражением правила Ленца. Известно, что магнитный поток является алгебраической величиной. Примем магнитный поток, пронизывающий площадь контура, положительным. При увеличении этого потока ( $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$ ) возникает э. д. с. индукции  $E_i < 0$ , под действием которой появляется индукционный ток, создающий собственное магнитное поле, направленное навстречу внешнему полю, т. е. магнитный поток индукционного тока отрицателен. Если же поток, пронизывающий площадь контура, уменьшается ( $\frac{d\Phi_B}{dt} < 0$ ), то  $E_i > 0$ , т. е. направление магнитного поля индукционного тока совпадает с внешним полем.

Явление электромагнитной индукции получило широкое применение: промышленное получение электроэнергии на электростанциях, трансформаторы и т. д.

## § 42. ЯВЛЕНИЕ САМОИНДУКЦИИ

**1. Индуктивность.** Пусть по замкнутому контуру течёт постоянный ток силой  $I$ . Этот ток создаёт вокруг себя магнитное поле, которое пронизывает площадь, охватываемую проводником, создавая магнитный поток. Известно, что магнитный поток  $\Phi_B$  пропорционален модулю индукции магнитного поля  $B$ , а модуль индукции магнитного поля, возникающего вокруг проводника с током, пропорционален силе тока  $I$  (см. (39.2) и (38.10)). Из этого следует  $\Phi_B \sim B \sim I$ , т. е.

$$\Phi_B = LI. \quad (42.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока и магнитным потоком, создаваемым этим током через площадь, ограниченную проводником, называют **индуктивностью проводника**.



В системе единиц СИ индуктивность измеряется в генри (Гн). Из (42.1) следует:  $L = \Phi_B / I$  и  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб} / 1 \text{ А}$ , т. е.  $1 \text{ Гн}$  — индуктивность такого проводника, при протекании по которому тока силой  $1 \text{ А}$  возникает магнитный поток, пронизывающий площадь, охватываемую проводником, равный  $1 \text{ Вб}$ .

**2. Индуктивность соленоида.** Найдём индуктивность соленоида длиной  $l$ , с поперечным сечением  $S$  и с общим числом витков  $N$ , заполненного веществом с магнитной проницаемостью  $\mu$ . При этом возьмём соленоид такой длины, чтобы его можно было рассматривать как бесконечно длинный. При протекании по нему тока силой  $I$  внутри него создаётся однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно к плоскостям витков. Модуль магнитной индукции этого поля находится по формуле (38.3)

$$B = \mu_0 \mu n I, \quad (42.2)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $n$  — число витков на единице длины соленоида. Магнитный поток  $\Phi_B$  через любой виток соленоида равен  $\Phi_B = BS$  (см. (39.2)), а полный  $\Psi$  поток через все витки соленоида будет равен сумме магнитных потоков через каждый виток, т. е.  $\Psi = N\Phi_B = NBS$ . Учитывая (42.2) и что  $N = nl$ , получаем:  $\Psi = \mu_0 \mu n^2 l S I = \mu_0 \mu n^2 V I$ , так как  $l S = V$  — объём соленоида. Сравнивая эту формулу с (42.1), приходим к выводу, что индуктивность соленоида равна

$$L = \mu \mu_0 n^2 V. \quad (42.3)$$

Из этой формулы следует, что индуктивность соленоида зависит от его геометрических размеров и от магнитных свойств вещества, находящегося внутри него. Зависимость индуктивности от их геометрических размеров и от магнитных свойств вещества наблюдается для проводников любой формы. Необходимо отметить, что если магнитная проницаемость среды, окружающей проводник, не зависит от индукции магнитного поля, создаваемого током, текущим по проводнику, то индуктивность данного проводника является постоянной величиной при любой силе тока, идущего в нём. Это имеет место, когда проводник находится в среде с диамагнитными или парамагнитными свойствами. В случае ферромагнетиков индуктивность может зависеть от силы тока, проходящего по проводнику.

**3. Явление самоиндукции.** Явление возникновения э. д. с. в том же проводнике, по которому течёт переменный ток, называют **самоиндукцией**, а саму э. д. с. — **э. д. с. самоиндукции**. Возникновение э. д. с. самоиндукции объясняется следующим. Переменный ток, проходящий по проводнику, порождает вокруг себя переменное магнитное поле, которое в свою очередь создаёт магнитный поток, изменяющийся со временем, через площадь, ограниченную проводником. Согласно явлению электромагнитной индукции это изменение магнитного потока и приводит к появлению э. д. с. Значение э. д. с. самоиндукции найдём, подставляя выражение

(42.1) в закон электромагнитной индукции (41.5) и полагая, что  $L = \text{const}$ :  

$$E_s = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \text{ Итак,}$$

$$\boxed{E_s = -L \frac{dI}{dt}.} \quad (42.4)$$

Итак, *э. д. с. самоиндукции в проводнике прямо пропорциональна скорости изменения силы тока, текущего по нему.*

Под действием э. д. с. самоиндукции создаётся индукционный ток, называемый *током самоиндукции*. Этот ток согласно правилу Ленца противодействует изменению силы тока в цепи, замедляя его возрастание или убывание.

### § 43. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть в электрической цепи (рис. 43.1) протекает постоянный ток силой  $I$ . Если отключить источник тока и замкнуть цепь (переключатель  $\Pi$  перевести в положение 2), то в ней некоторое время будет течь убывающий ток, обусловленный э. д. с. самоиндукции  $E_s$ , равной  $E_s = -L \frac{dI(t)}{dt}$  (см. (42.4)). Элементарная работа, совершаемая э. д. с. самоиндукции по переносу по цепи элементарного заряда  $dq = I \cdot dt$  (см. (31.2)), равна  $dA = E_s dq = -L \frac{dI}{dt} I(t) \cdot dt = -LI(t) \cdot dI$ . Сила тока изменяется от  $I$  до 0. Поэтому, интегрируя это выражение в указанных пределах, получаем работу, совершаемую э. д. с. самоиндукции за время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:  $A = \int_I^0 -LI(t) \cdot dI = LI^2/2$ . Эта работа расходуется на увеличение внутренней энергии проводников, т. е. на их нагревание. Совершение этой работы сопровождается также исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало вокруг проводника. Поскольку никаких других изменений в окружающей среде не происходит, то можно заключить, что магнитное поле обладает энергией, за счёт которой и совершается работа. Итак, энергия магнитного поля, существующего вокруг проводников с током, равна

$$W_B = LI^2/2. \quad (43.1)$$

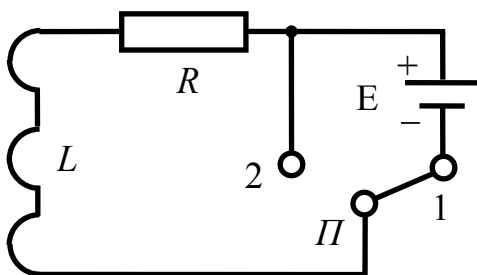


Рис. 43.1

Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие само поле. Проведем это на примере соленоида. Для соленоида  $I = B/(\mu\mu_0 n)$  и  $L = \mu\mu_0 n^2 V$  (см. (38.3) и (42.3)). Подставляя эти выражения в (43.1), получаем, что

$$W_B = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \cdot V. \quad (43.2)$$

Магнитное поле внутри соленоида однородное ( $\vec{B} = \text{const}$ ). Поэтому объёмная плотность энергии  $w_B$  магнитного поля, т. е. энергия единицы объёма поля, внутри соленоида равна

$$w_B = W_B/V = B^2/(2\mu_0\mu). \quad (43.3)$$

Эта формула справедлива и в случае неоднородных статических и переменных магнитных полей.

## ГЛАВА 9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Анализируя законы электромагнетизма и явления электромагнитной индукции, Максвелл выдвинул две гипотезы, позволившие ему создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория не только сумела объяснить все известные до него опытные законы, но и предсказала существование электромагнитного поля и электромагнитных волн. Теория Максвелла в дальнейшем получила блестящее подтверждение в опытах Герца, Попова и других и явилась новым этапом в развитии естествознания. Рассмотрим гипотезы Максвелла о существовании вихревого электрического поля и тока смещения.

### § 44. ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Из закона Фарадея для электромагнитной индукции (см. (41.5))

$$E_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (44.1)$$

следует, что *при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего площадь, охватываемую проводником, в нём возникает э. д. с. индукции*, под действием которой в проводнике появляется индукционный ток, если проводник замкнутый. Однако э. д. с. в любой цепи возникает лишь в том случае, когда в ней на носители тока действуют сторонние силы, т. е. силы не электростатического происхождения (§ 33). Поэтому правомерен вопрос о природе сторонних сил, создающих э. д. с. индукции.

Для объяснения э. д. с. индукции Максвелл выдвинул гипотезу, что *переменное магнитное поле создаёт в окружающем пространстве электрическое поле*. Это поле действует на свободные заряды проводника, приводя их в упорядоченное движение, т. е. создавая индукционный ток. Таким образом, замкнутый проводящий контур является своеобразным индикатором, с помощью которого и обнаруживается данное электрическое поле. Обозначим напряжённость этого поля через  $\vec{E}$ . Тогда э. д. с. индукции

$$E_i = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (44.2)$$

(см. (33.3)). Объединяя соотношения (44.1) и (44.2), получаем

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (44.3)$$

Из электростатики (см. (25.2)) известно, что циркуляция напряжённости  $\vec{E}_q$  электростатического поля равна нулю, т. е.  $\oint_l \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = 0$ , где  $\vec{E}_q$  — напряжённость электростатического поля. Это соотношение является условием потенциальности электростатического поля. Однако из (44.3) следует, что  $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ . Следовательно, *электрическое поле, возбуждаемое изменяющимся со временем магнитным полем, является вихревым (не потенциальным)*.

Следует отметить, что линии напряжённости электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах, создающих поле, а линии напряжённости вихревого электрического поля всегда замкнутые.

## § 45. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Как указывалось (см. § 44), Максвелл высказал гипотезу, что переменное магнитное поле создаёт вихревое электрическое поле. Он сделал и обратное предположение: *переменное электрическое поле должно вызывать возникновение магнитного поля*. В дальнейшем обе эти гипотезы получили экспериментальное подтверждение в опытах Герца. Появление магнитного поля при изменении электрического поля можно трактовать так, как будто бы в пространстве возникает электрический ток. Этот ток был назван Максвеллом **током смещения**. Ток смещения в отличие от тока проводимости в металлах не связан с движением электрических зарядов, а обусловлен переменным электрическим полем. В действительности никакого тока нет, а есть лишь изменяющееся со временем электрическое поле, которое и создаёт магнитное поле. Однако использование этого термина удобно.

Выясним, от чего зависит ток смещения на простом примере. Рассмотрим плоский конденсатор, на обкладках которого имеются заряды  $q$  противоположного знака, равномерно распределённые по обкладкам с поверхностной плотностью, равной  $\sigma = q/S$ , где  $S$  — площадь обкладки. Внутри конденсатора возникает электрическое поле. Напряжённость этого поля равна

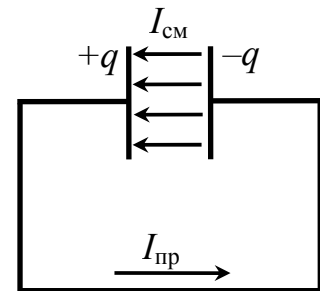


Рис. 45.1

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S} \quad (45.1)$$

(см. (24.4)). Замкнём обкладки конденсатора проводником (рис. 45.1). Это приводит к возникновению тока проводимости в проводнике, приводящего к уменьшению заряда на обкладках конденсатора, следовательно, и к ослаблению электрического поля внутри конденсатора. Изменение электрического поля вызывает появление магнитного поля между пластинами конденсатора, обусловленного как бы током смещения силой  $I_{\text{см}}$ , текущего внутри конденсатора. Сила этого тока должна равняться силе тока проводимости  $I_{\text{пр}}$ , поскольку электрическая цепь не имеет разветвлений. Поэтому  $I_{\text{см}} = I_{\text{пр}}$ . Силу тока проводимости согласно (31.2) находим по формуле:

$I_{\text{пр}} = \frac{dq}{dt}$ . Подставляя в это выражение  $q$ , найденное из (45.1), и вынося постоянные за знак производной, получаем силу тока смещения:  $I_{\text{см}} = \epsilon_0 \epsilon \frac{dE}{dt} S$ . Плотность тока смещения будет равна

$$j_{\text{см}} = \epsilon_0 \epsilon \frac{dE}{dt}. \quad (45.2)$$

В общем случае напряжённость электрического поля может зависеть от координат и времени. Поэтому в выражении (45.2) производную  $\frac{dE}{dt}$  надо заменить частной производной  $\frac{\partial E}{\partial t}$ . Тогда

$$j_{\text{см}} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (45.3)$$

и сила тока смещения через площадку  $S$ , перпендикулярную к направлению этого тока, равна

$$I_{\text{см}} = \int_S j_{\text{см}} \cdot dS \quad (45.4)$$

(см. (31.6)). Ток смещения может возникать не только в вакууме или диэлектрике, но и в проводниках, по которым течёт переменный ток. Однако в этом случае он пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

Максвелл ввёл понятие полного тока. Сила  $I$  полного тока равна сумме сил  $I_{\text{пр}}$  и  $I_{\text{см}}$  токов проводимости и смещения, т. е.  $I = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}$ . Используя (31.6) и (45.4), получаем:

$$I = \int_S j_{\text{пр}} \cdot dS + \int_S j_{\text{см}} \cdot dS = \int_S (j_{\text{пр}} + j_{\text{см}}) dS, \quad (45.5)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения проводника.

## § 46. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Введение двух гипотез о существовании вихревого электрического поля и тока смещения позволили Максвеллу создать единую теорию электромагнетизма. В основе этой теории находятся четыре уравнения, названные уравнениями Максвелла, которые играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в классической механике. Рассмотрим эти уравнения.

**1. Первое уравнение.** Согласно (44.3), циркуляция напряжённости вихревого электрического поля равна

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (46.1)$$

Используя (39.1), запишем  $\Phi_B = \int_S B_n dS$ . Тогда  $\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_S B_n dS \right) = \int_S \left( \frac{dB}{dt} \right)_n dS$ , где  $\left( \frac{dB}{dt} \right)_n$  — проекция производной по времени индукции  $\vec{B}$  магнитного поля на направление нормали  $\vec{n}$  к площади контура. Поскольку в общем случае индукция магнитного поля зависит от координат и времени, то  $\frac{dB}{dt}$  надо заменить частной производной  $\frac{\partial B}{\partial t}$ . С учётом этого уравнение (46.1) запишется

$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_n dS.} \quad (46.2)$$

Из этого уравнения следует, что источником электрического поля является изменяющееся со временем магнитное поле.

**2. Второе уравнение.** Максвелл обобщил закон полного тока (37.5), введя в её правую часть полный ток  $I = \int_S (j_{\text{пр}} + j_{\text{см}}) dS$  (45.5), где  $S$  — площадь замкнутого контура длиной  $l$ . Учитывая это, закон полного тока запишется

$$\boxed{\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu \int_S \left( j + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) dS,} \quad (46.3)$$

поскольку  $j_{\text{см}} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$  (см. (45.3)). Это уравнение показывает, что магнитное поле может создаваться как движущимися зарядами (электрическим током), так и переменным электрическим полем.

**3. В качестве третьего и четвертого уравнений** Максвелл взял теорему Гаусса для электростатического и магнитного полей (23.11) и (39.3):

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \int_V \rho \cdot dV, \quad (46.4)$$

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (46.5)$$

Соотношение (46.4) свидетельствует о том, что линии напряжённости электростатического поля начинаются и кончаются на электрических зарядах, а из (46.5) следует, что линии магнитной индукции всегда замкнуты, т. е. в природе не существует магнитных зарядов. Необходимо отметить, что нумерация уравнений Максвелла произвольная.

Из уравнений (46.2) и (46.3) вытекает, что переменное магнитное поле всегда связано с создаваемым им электрическим полем, и наоборот, переменное электрическое поле связано с создаваемым им магнитным полем. Таким образом, эти поля взаимосвязаны и образуют единое электромагнитное поле. Поэтому отдельное рассмотрение электрических и магнитных полей носит относительный характер. Так, например, если электрическое поле создаётся неподвижными зарядами в одной системе отсчёта, то относительно другой они могут двигаться, и, следовательно, порождают одновременно и электрическое и магнитное поля. Уравнения Максвелла являются основой единой теории электрических и магнитных явлений.

### ЧАСТЬ 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**Колебаниями** называются процессы, характеризуемые определённой повторяемостью со временем. Процесс распространения колебаний в пространстве называют **волной**. Можно без преувеличения сказать, что мы живём в мире колебаний и волн. Действительно, живой организм существует благодаря периодическому биению сердца, наши лёгкие колеблются при дыхании. Человек слышит и разговаривает вследствие колебаний его барабанных перепонок и голосовых связок. Световые волны (колебания электрических и магнитных полей) позволяют нам видеть. Современная техника также чрезвычайно широко использует колебательные процессы. Достаточно сказать, что многие двигатели связаны с колебаниями: периодическое движение поршней в двигателях внутреннего сгорания, движение клапанов и т. д. Другими важными примерами являются переменный ток, электромагнитные колебания в колебательном контуре, радиоволны и т. д. Как видно из приведённых примеров, природа колебаний различна. Однако они могут быть сведены к двум типам — механическим и электромагнитным колебаниям. Оказалось, что, несмотря на различие физической природы колебаний, они описываются одинаковыми математическими уравнениями. Это и позволяет выделить в качестве одного из разделов физики учение о колебаниях и волнах, в котором осуществляется единый подход к изучению колебаний различной физической природы.

## ГЛАВА 10. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### § 47. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Любая система, способная колебаться или в которой могут происходить колебания, называется **колебательной**. Колебания, происходящие в колебательной системе, выведенной из состояния равновесия и предоставленной самой себе, называют **свободными колебаниями**. Свободные колебания являются затухающими, так как энергия, сообщённая колебательной системе, постоянно убывает. Это уменьшение энергии в зависимости от физической природы колебания обусловлено различными причинами. Так, например, при механических колебаниях механическая энергия превращается в теплоту из-за наличия сил трения, а при электромагнитных колебаниях, происходящих в колебательном контуре, электромагнитная энергия уменьшается вследствие превращения её во внутреннюю энергию проводника, поскольку при протекании по нему тока происходит его нагревание. Однако, если силы трения или сопротивление колебательного контура очень малы, то колебания в таких системах происходят достаточно долго. В связи с этим рассмотрим сначала колебания, полностью пренебрегая причинами, приводящими к убыванию энергии. Поскольку механические и электромагнитные колебания описываются одинаковыми по виду математическими уравнениями, то в дальнейшем они будут рассматриваться параллельно.

**1. Пружинный маятник.** Пружинный маятник (рис. 47.1) представляет собой тело массой  $m$ , связанное с упором посредством пружины с коэффициентом жёсткости  $k$ . Массой пружины и силами трения пренебрегаем. Выведем тело из положения равновесия. На него будет действовать сила упругости  $F_{\text{упр}}$  пружины, которая, согласно закону Гука, пропорциональна смещению  $x$  от положения равновесия, т. е.

$$F_{\text{упр}} = -kx. \quad (47.1)$$

Для составления уравнения движения тела применим второй закон Ньютона.

$$a_x = F_{\text{упр}} / m, \quad (47.2)$$

где  $m$  — масса тела,  $a_x$  — ускорение, приобретаемое телом под действием силы упругости. Но

$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$  (см. § 1, п. 7). С учётом этого и формулы (47.1) из уравнения (47.2) находим дифференциальное уравнение

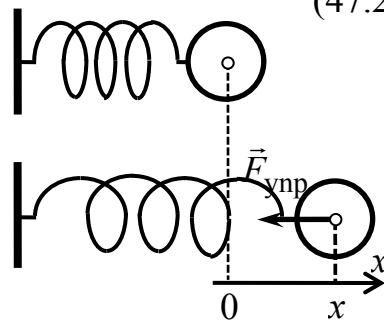


Рис. 47.1



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (47.3)$$

описывающее движение тела пружинного маятника.

**2. Колебательный контур.** Электрическую цепь, состоящую из индуктивности и ёмкости, называют **колебательным контуром** (рис. 47.2). Электрическим сопротивлением контура пренебрегаем ( $R = 0$ ). Для установления характера процессов, возникающих в контуре после зарядки конденсатора, надо составить дифференциальное уравнение, используя второе правило Кирхгофа (см. § 35). Согласно этому правилу запишем  $E_s = u_c$  ( $E_s$  — э. д. с. самоиндукции,  $u_c$  — напряжение на конденсаторе). Но  $u_c = q/C$ , где  $q$  и  $C$  — заряд и ёмкость конденсатора, а  $E_s = -L \frac{di}{dt}$ . Здесь  $L$  — индуктивность соленоида,  $i$  — сила тока в контуре. С учётом этого  $-L \frac{di}{dt} = q/C$  и  $L \frac{di}{dt} + q/C = 0$ . Но  $i = \frac{dq}{dt}$ , (см. (31.2))  $\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dq}{dt} \right) = \frac{d^2q}{dt^2}$ . Учтя это и разделив обе части последнего уравнения на  $L$ , получим, что

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (47.4)$$

Решив это уравнение, находим аналитическую зависимость  $q$  от  $t$ .

**3.** С точки зрения математики уравнения (47.3) и (47.4) одинаковые. Их можно записать в виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2\xi = 0, \quad (47.5)$$

где в случае пружинного маятника  $\xi = x$  и  $\omega_0^2 = k/m$ , а для колебательного контура  $\xi = q$  и  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ . Коэффициенты  $k/m$  и  $1/(LC)$  обозначены через  $\omega_0^2$ , поскольку они всегда положительные.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения надо составить характеристическое уравнение и решить его:

$$r^2 + \omega_0^2 = 0. \quad \text{Отсюда} \quad r^2 = -\omega_0^2 \quad \text{и}$$

$r = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm \omega_0 \sqrt{-1} = \pm i\omega_0$ , где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Поскольку корни характеристического уравнения мнимые, решением этого дифференциального урав-

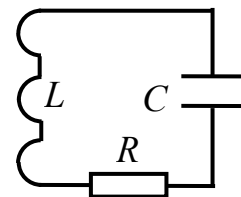


Рис. 47.2

нения будет выражение:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (47.6)$$

где  $A$  и  $\alpha$  — некоторые постоянные. Из уравнения (47.6) следует, что величина  $\xi$  периодически изменяется со временем в интервале от  $-A$  до  $+A$ , поскольку косинус — периодическая функция, принимающая значения от  $-1$  до  $+1$ .

**4. Гармонические колебания.** Колебания, при которых какая-либо физическая величина, описывающая какой-нибудь процесс, изменяется со временем по закону косинуса или синуса, называются *гармоническими*. Следовательно, выражение (47.6) является уравнением гармонических колебаний. Выясним физический смысл постоянных  $A$ ,  $\omega_0$  и  $\alpha$ , входящих в это уравнение.

Константа  $A$  называется амплитудой колебаний. *Амплитуда* — это наибольшее значение, которое может принимать колеблющаяся величина. Согласно определению, она всегда положительна. Выражение  $\omega_0 t + \alpha$ , стоящее под знаком косинуса, называют *фазой колебания*. Она определяет значение колеблющейся величины в любой момент времени. Постоянная  $\alpha$  представляет собой значение фазы в момент времени  $t = 0$  и поэтому называется *начальной фазой колебания*. Значение начальной фазы определяется выбором начала отсчёта времени. Величина  $\omega_0$  получила название циклической частоты, физический смысл которой связан с понятием периода и частоты колебаний. *Периодом незатухающих колебаний* называют время одного полного колебания. Число колебаний, совершаемых за единицу времени, называется *частотой колебаний*. Частота  $\nu$  связана с периодом  $T$  колебаний соотношением

$$\nu = 1/T. \quad (47.7)$$

Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). *1 Гц — частота периодического процесса, при котором за 1 с происходит одно колебание.*

Найдём связь между частотой и циклической частотой колебания. Используя (47.6), находим значения колеблющейся величины в моменты времени  $t = t_1$  и  $t = t_2 = t_1 + T$ , где  $T$  — период колебания:

$$\xi(t_1) = A \cos(\omega_0 t_1 + \alpha), \quad \xi(t_2) = A \cos[\omega_0 (t_1 + T) + \alpha] = A \cos(\omega_0 t_1 + \alpha + \omega_0 T).$$

По истечении периода колебаний колеблющаяся величина принимает первоначальное значение. Поэтому  $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ . Это возможно, если  $\omega_0 T = 2\pi$ , поскольку косинус — периодическая функция с периодом  $2\pi$  радиан. Отсюда

$$\omega_0 = 2\pi / T. \quad (47.8)$$

Подставляя выражение (47.7) в (47.8), получаем, что

$$\omega_0 = 2\pi \nu. \quad (47.9)$$

Из этого соотношения следует физический смысл циклической частоты. Она показывает, сколько колебаний совершается за  $2\pi$  секунд.

**5. Скорость гармонических механических колебаний.** Рассмотрим механические колебания, например, колебания пружинного маятника. В этом случае уравнение движения маятника имеет вид

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (47.10)$$

где  $X_m$  — амплитуда колебания,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — циклическая частота колебания,  $\alpha$  — начальная фаза колебания. Это выражение получается из (47.6) заменой  $\xi$  на  $x$  и  $A$  на  $X_m$ , учитывая, что  $\omega_0^2 = k/m$ . Найдём скорость колеблющегося тела. Согласно определению, скорость тела при движении вдоль координатной оси  $x$  равна  $v = \frac{dx}{dt}$ . Тогда скорость тела, совершающего гармонические колебания по закону (47.10), находим по формуле

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[X_m \cos(\omega_0 t + \alpha)] = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (47.11)$$

используя правила дифференцирования сложной функции. Воспользовавшись формулой приведения  $\cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2) = -\sin(\omega_0 t + \alpha)$  и введя обозначение  $\omega_0 X_m = v_m$ , выражение (47.11) приводим к виду:

$$v = v_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2), \quad (47.12)$$

где  $v_m$  — амплитуда скорости. Из уравнения видно, что скорость колебания изменяется с той же циклической частотой и по фазе она опережает смещение  $x$  на  $\pi/2$ . Это означает, что когда скорость максимальная, то смещение равно нулю и наоборот. Используя соотношение  $\omega_0 = 2\pi/T$  (см. (47.8)), выражения (47.10) и (47.12) можно записать в виде

$$x(t) = X_m \cdot \cos(2\pi t/T + \alpha), \quad v = v_m \cdot \cos(2\pi t/T + \alpha + \pi/2). \quad (47.13)$$

**6. Сила тока и напряжение в колебательном контуре.** Рассмотрим теперь электромагнитные колебания, происходящие в колебательном контуре. Запишем уравнение (47.6) применительно к данным колебаниям:

$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (47.14)$$

где  $q_m$  — амплитуда колебания заряда на конденсаторе,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — циклическая частота колебаний. Отсюда следует известная формула Томсона для периода электромагнитных колебаний в колебательном контуре  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ . Найдём зависимость напряжения между обкладками кон-

денсатора и силы тока в контуре от времени. Из формулы ёмкости конденсатора находим напряжение  $u_c$  на его обкладках, которое равно  $u_c = q/C$ , где  $C$  — ёмкость конденсатора. Подставляя в это выражение (47.14), получаем:

$$u_c = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_{cm} \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (47.15)$$

где  $U_{cm} = q_m / C$  — амплитуда напряжения на конденсаторе. Сила тока  $i$  в контуре находится дифференцированием соотношения (47.14) по времени:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)] = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (47.16)$$

Воспользовавшись формулой приведения (см. п. 5 данного параграфа), последнему выражению придадим вид:

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \alpha + \pi/2). \quad (47.17)$$

Здесь  $I_m = \omega_0 q_m$  — амплитуда силы тока в контуре. Из формул (47.15) и (47.17) следует, что сила тока, текущего через ёмкость, совершает гармонические колебания той же циклической частоты и по фазе опережает напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ . Следовательно, когда напряжение на ёмкости максимальное, сила тока, протекающего через него, равна нулю, и наоборот.

С использованием периода колебания  $T$  выражения (47.15) и (47.17) переписываются в виде:

$$u_c = U_m \cdot \cos(2\pi t/T + \alpha), \quad i = I_m \cdot \cos(2\pi t/T + \alpha + \pi/2). \quad (47.18)$$

Графики зависимости смещения  $x$  и скорости  $v$  тела, описываемые уравнениями (47.13), а также напряжения  $u_c$  на конденсаторе и силы тока  $i$ , текущего через него, описываемые уравнениями (47.18), полагая, что  $\alpha = 0$ , приведены на рис. 47.3а ( $x$  и  $u_c$  — сплошная линия,  $v$  и  $i$  — пунктирная).

7. Выясним более детально характер процессов, происходящих в пружинном маятнике и колебательном контуре. Выведем тело из состояния равновесия, например, сжав пружину (рис. 47.3б). В этом положении его смещение от положения равновесия будет максимальным ( $x = X_m$ ) и на него действует максимальная сила упругости, направленная к положению равновесия (см. (47.1)). Отпустим тело. Под действием этой силы оно приходит в движение. В момент времени  $t = (1/4)T$ , где  $T$  — период колебания, тело проходит положение равновесия ( $x = 0$ ), и скорость тела достигает максимального значения  $-v_m$  (знак минус означает, что тело движется в направлении, противоположном направлению оси  $x$ ), а сила упругости обращается в ноль. По инерции тело продолжает двигаться. Это приводит к растяжению пружины и к появлению силы упругости, направленной противоположно направлению движения, под действием которой тело

тормозится, и затем в момент времени  $t = (1/2)T$  останавливается. В этот момент

скорость  $v = 0$ , и смещение  $x$  будет максимальным ( $|x| = X_m$ ). Далее тело начинает двигаться в обратном направлении, и процессы повторяются. Таким образом, тело будет колебаться около положения равновесия. Колебание пружинного маятника сопровождается взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника. При этом потенциальная энергия достигает максимального значения в те моменты времени, когда отклонение тела от положения равновесия наибольшее, а кинетическая энергия максимальная в моменты прохождения телом положения равновесия. Обратимся теперь к колебательному контуру.

Пусть в начальный момент времени ( $t = 0$ ) тока в колебательном контуре нет ( $i = 0$ ). В этом состоянии напряжение  $u_c$  на конденсаторе бу-

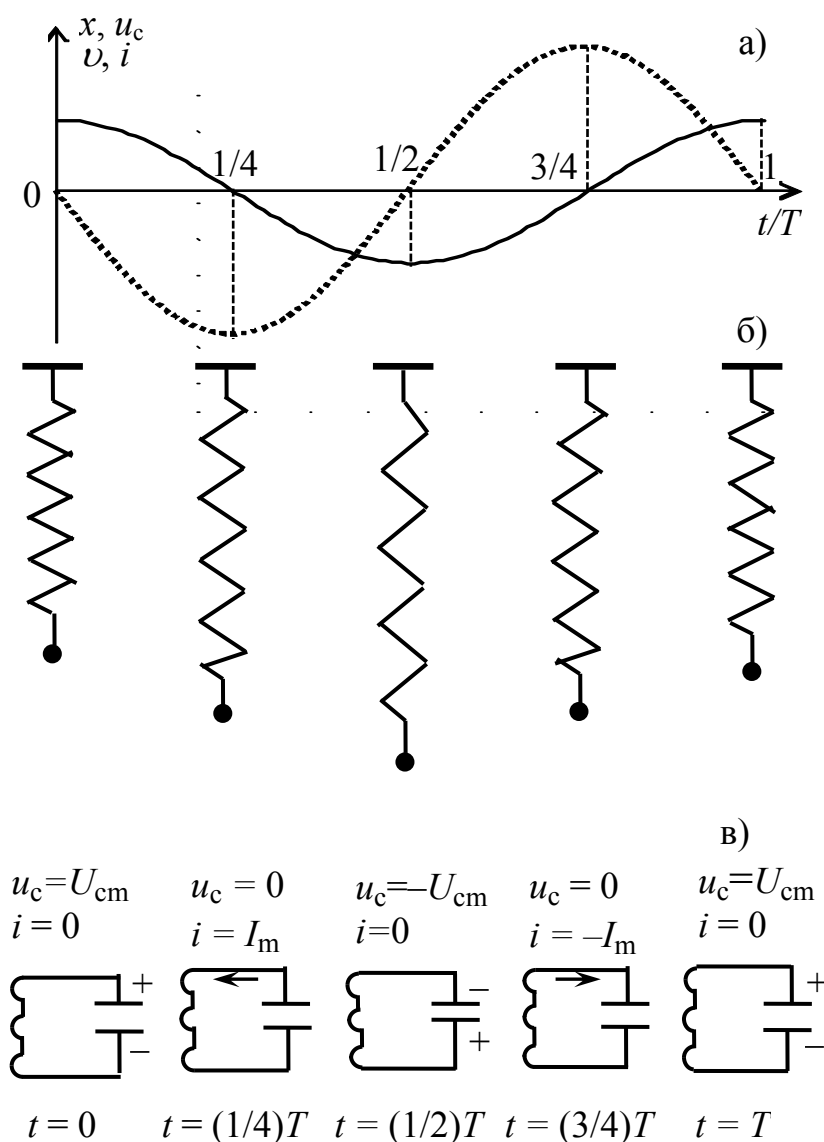


Рис. 47.3

дет наибольшим ( $u_c = U_{cm}$ ) (рис. 47.3 в). Под действием этого напряжения в цепи возникает электрический ток, текущий от положительно заряженной обкладки к отрицательной (имеется в виду движение положительных зарядов). Появление тока, текущего в индуктивности, приводит к возникновению э. д. с. самоиндукции  $e_s$ , препятствующей протеканию тока. Поэтому возрастание силы тока происходит не мгновенно. Протекание тока приводит к разрядке конденсатора и уменьшению его напряжения. В момент времени  $t = (1/4)T$   $u_c = 0$ , а сила тока  $i$  достигает максимального значения. Заряды, двигаясь по инерции, вновь заряжают конденсатор. При этом на его обкладках появляется напряжение, противодействующее протеканию тока. В результате этого сила тока уменьшается, что приводит к появлению э. д. с. самоиндукции, поддерживающей ток. Поэтому убывание силы тока происходит постепенно. В момент времени  $t = (1/2)T$ , когда конденсатор полностью перезарядится, напряжение  $|u_c| = U_{cm}$ , а сила тока становится равной нулю. Затем процессы повторяются, и через промежуток времени, равный периоду колебаний, колебательный контур возвращается в исходное состояние. При колебаниях, происходящих в контуре, наблюдается превращение энергии магнитного поля в энергию электрического поля, и наоборот. Поэтому эти колебания называют *электромагнитными*.

Электромагнитные колебания в колебательном контуре можно сопоставить с механическими колебаниями пружинного маятника (рис. 47.3). В данном случае энергия электрического поля конденсатора аналогична потенциальной энергии упруго деформированной пружины, энергия магнитного поля — кинетической энергии, сила тока в контуре — скорости движения тела. Индуктивность играет роль массы.

## § 48. ЭНЕРГИЯ СВОБОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

1. Рассмотрим теперь превращения энергии, происходящие в описанных ранее колебаниях. Начнём с механических колебаний. Уравнение колебаний пружинного маятника имеет вид:

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (48.1)$$

где  $X_m$  и  $\omega_0$  — амплитуда колебания и циклическая частота колебания (см. (47.10)). Полная механическая энергия  $W$  пружинного маятника представляет собой сумму кинетической энергии  $W_k$  тела и потенциальной энергии  $W_p$  деформированной пружины, т. е.

$$W = W_k + W_p. \quad (48.2)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины находится по формуле  $W_p = kx^2 / 2$ , где  $k$  — коэффициент упругости,  $x$  — величина удли

нения пружины (см. § 16), равная отклонению тела от положения равновесия. С учётом (48.1) получаем:

$$W_p = \frac{1}{2} k X_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (48.3)$$

так как  $k = m\omega_0^2$ . Кинетическая энергия тела равна  $W_k = (1/2)m\nu^2$ . Но, согласно (47.11),  $\nu = -\nu_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$ , где  $\nu_m = \omega_0 X_m$  — амплитуда скорости тела. Учитывая это, находим, что

$$W_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (48.4)$$

Подставляя (48.3) и (48.4) в (48.2), находим

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 = \text{const}, \quad (48.5)$$

поскольку  $\sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = 1$ . Таким образом, как следует из (48.5), полная механическая энергия при свободных гармонических колебаниях не зависит от времени, т. е. остаётся величиной постоянной. Из соотношений же (48.3) и (48.4) вытекает, что потенциальная и кинетическая энергии изменяются со временем пропорционально  $\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$  и  $\sin^2(\omega_0 t + \alpha)$  соответственно. Поэтому, когда одна из них увеличивается, другая уменьшается. Следовательно, в процессе механических колебаний происходит периодический переход потенциальной энергии в кинетическую энергию и обратно. Важно отметить, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды колебаний (см. (48.5)).

**2.** Рассмотрим теперь электромагнитные колебания в колебательном контуре. Уравнение колебаний заряда  $q$  на конденсаторе записывается в виде:

$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (48.6)$$

где  $q_m$  — амплитуда колебания заряда,  $\omega_0$  — циклическая частота колебаний (см. (47.14)).

Энергия  $W$  колебательного контура складывается из энергии  $W_E$  электрического поля конденсатора и энергии  $W_B$  магнитного поля индуктивности, т. е.

$$W = W_E + W_B. \quad (48.7)$$

Но  $W_E = q^2/(2C)$ , где  $q$  — величина заряда на конденсаторе,  $C$  — ёмкость конденсатора (см. (30.1)). Учитывая (48.6), получаем, что

$$W_E = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (48.8)$$

Энергия магнитного поля находится по формуле  $W_B = Li^2/2$ . Здесь  $L$  — индуктивность проводника,  $i$  — сила тока, проходящего через проводник (см. (43.1)). Согласно (47.16)  $i = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$ . Тогда

$W_B = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$ . Поскольку  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , то

$$W_B = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (48.9)$$

Подставляя (48.8) и (48.9) в (48.7), находим

$$W = \frac{q_m^2}{2C} = \text{const}, \quad (48.10)$$

т. е. энергия электромагнитного поля при свободных электромагнитных гармонических колебаниях сохраняется. Из выражений же (48.8) и (48.9) следует, что со временем происходят периодические изменения энергии электрического и магнитного поля. При этом наблюдается периодический переход энергии электрического поля в энергию магнитного и наоборот, причём сумма этих энергий остаётся постоянной.

## § 49. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

До сих пор были рассмотрены идеализированные незатухающие колебания, которые возникали в колебательной системе, когда не происходит потери энергии. Однако такие потери всегда есть вследствие наличия сил трения при механических колебаниях и нагревания проводников в колебательном контуре. Рассмотрим теперь реальные колебательные системы, в которых наблюдается убывание энергии, сообщённой ей. Уравнение колебаний в этом случае записывается в виде:

$$\xi(t) = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad (49.1)$$

где введено обозначение  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Здесь  $\omega$  представляет собой циклическую частоту затухающих колебаний, а  $\omega_0$  — собственную циклическую частоту, в отсутствии потерь энергии при колебаниях. График зависимости (49.1) показан на рис. 49.1. Из графика видно, что величина  $\xi$  периодически достигает максимума и минимума. В этом смысле процессы, описываемые уравнением (49.1), можно считать колебательными. Их называют **затухающими колебаниями**. Наименьший промежуток времени  $T$ , через который повторяются максимумы (или минимумы), называют **периодом затухающих колебаний**. Выражение



$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (49.2)$$

стоящее перед периодической функцией  $\cos(\omega t + \alpha)$  в формуле (49.1), рассматривают как амплитуду затухающих колебаний. Она экспоненциально убывает со временем (см. пунктирную кривую на рис. 49.1). Величина  $A_0$  представляет собой амплитуду колебания в момент времени  $t = 0$ , т. е. это начальная амплитуда затухающих колебаний. Величина  $\beta$ , от которой зависит убывание амплитуды, называется **коэффициентом затухания**. Чем больше коэффициент затухания, тем колебания быстрее прекращаются.

Рассмотрим характеристики затухающих колебаний. Из выражения (49.2) теоретически следует, что амплитуда затухающих колебаний становится равной нулю при  $t \rightarrow \infty$ . В связи с этим трудно охарактеризовать быстроту затухания. Поэтому вводят промежуток времени  $\tau$ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз ( $e \approx 2,718$  — основание натуральных логарифмов), т. е.  $A(t)/A(t + \tau) = e$ . Подставляя (49.2) в это выражение, получаем:  $\frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+\tau)}} = e$ ,  $e^{\beta\tau} = e$ . Отсюда  $\beta\tau = 1$  и  $\beta = 1/\tau$ , т. е. коэффициент затухания обратно пропорционален времени, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Наряду с коэффициентом затухания используется также понятие логарифмического декремента затухания. **Логарифмическим декрементом затухания** называют натуральный логарифм от отношения амплитуд затухающих колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период колебания, т. е.

$$d = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)}. \quad (49.3)$$

Выясним его физический смысл. Используя выражение (49.2), из (49.3)

находим: 
$$d = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Но  $\beta = 1/\tau$  и  $\tau = N_e T$ , где  $N_e$  — число колебаний за время  $\tau$ . Тогда  $d = T/\tau = T/(N_e T) = 1/N_e$ , т. е. логарифмический декремент затухания обратно пропорционален числу колебаний, по истечении которых амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз.

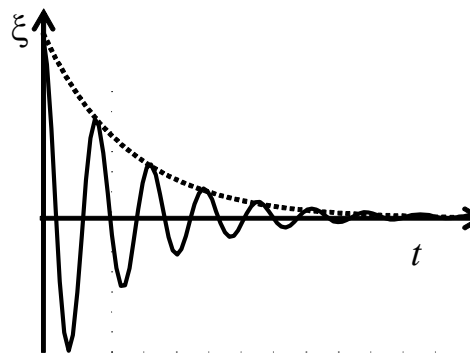


Рис. 49.1

## § 50. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

Свободные колебания колебательной системы являются затухающими. Однако на практике возникает потребность в создании незатухающих колебаний, когда потери энергии в колебательной системе компенсируются за счёт внешних источников энергии. В этом случае в колебательной системе возникают вынужденные колебания. **Вынужденными** называют колебания, происходящие под действием периодически изменяющегося воздействия, а сами воздействия — **вынуждающими**.

Вынужденные колебания происходят с частотой, равной частоте вынуждающих воздействий. В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания пружинного маятника. В этом случае на тело, кроме силы упругости и трения, действует вынуждающая сила  $F$ , изменяющаяся со временем по закону  $F = F_m \cdot \cos \Omega t$ , где  $F_m$  и  $\Omega$  — амплитуда и циклическая частота колебания. Пусть циклическая частота вынуждающей силы меньше собственной частоты  $\omega_0$  пружинного маятника, равной  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

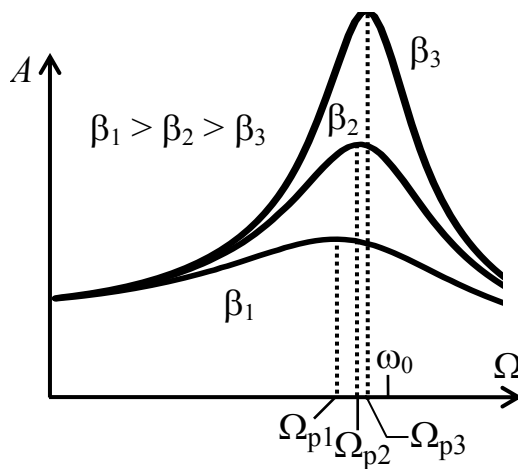


Рис. 50.1

В этом случае маятник совершает гармонические колебания с некоторой амплитудой  $A_B$ . Затем начинаем плавно увеличивать частоту вынуждающей силы. При этом амплитуда вынужденных колебаний возрастает. При частоте  $\Omega \approx \omega_0$  амплитуда этих колебаний становится максимальной и при дальнейшем увеличении частоты амплитуда вынужденных колебаний снова уменьшается (рис. 50.1). Аналогичная зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты наблюдается при электромагнитных колебаниях, происходящих в колебательном контуре. *Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынуждающих воздействий примерно равна собственной частоте колебательной системы, называется резонансом.*

Явление резонанса широко используется в технике. Оно может быть как полезным, так и вредным. Так, например, явление электрического резонанса играет полезную роль при настройке радиоприёмника на нужную радиостанцию. Изменяя величины индуктивности и ёмкости, можно добиться того, что собственная частота колебательного контура совпадёт с частотой электромагнитных волн, излучаемых какой-либо радиостанцией. В результате этого в контуре возникнут резонансные колебания данной частоты, амплитуды же колебаний, создаваемых другими станциями, будут малы. Это приводит к настройке радиоприёмника на нужную станцию.

С возможностью резонанса приходится считаться при сооружении мостов, производственных зданий, дымовых труб, высотных зданий и т.д. С целью ограничения разрушающего действия резонанса в производственных зданиях под агрегаты (источники вибрации) устанавливаются виброизоляторы. При расчёте высоких и гибких сооружений (дымовые трубы, висячие мосты и т.п.) на ветровую нагрузку предусматривают мероприятия по устройству обтекателей, виброгасителей. Для ограничения передачи колебаний от источника вибраций сооружениям через грунт, в грунте копают глубокие траншеи и наполняют их керамзитом, хорошо поглощающим энергию колебаний.

## **§ 51. СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ИНЖЕНЕРНЫЕ СООРУЖЕНИЯ И КОЛЕБАНИЯ**

При строительстве различных инженерных сооружений и зданий приходится часто сталкиваться с вопросами колебаний, которые во многих случаях вредны. Поэтому с ними необходимо бороться. Можно выделить три основные причины появления вредных колебаний.

1. Колебания вследствие периодической вынуждающей силы. К ним можно отнести вибрацию зданий под действием находящихся в них работающих моторов, которые вследствие колебательных движений поршней или несцентрированности осей вращения валов всегда дают вибрацию.

2. Самовозбуждение колебаний (автоколебания). Здесь отсутствует внешняя периодическая сила, но существует какой-то источник энергии, приводящий к появлению колебаний. Можно выделить большой класс самовозбуждения колебаний, причиной которых является трение. Так, струна скрипки колеблется и издаёт звук вследствие трения смычка о струну. Линии электропередачи, радиомачты, телевизионные башни, висячие мосты совершают колебания под действием постоянно дующего ветра. Такие колебания могут приводить к разрушению конструкций.

3. Колебания под действием одного или нескольких ударов. Это, прежде всего, колебания под воздействием землетрясений и взрывов.

Наибольшую опасность возникающие вредные колебания представляют в том случае, когда их частота близка к собственной частоте какой-нибудь конструкции, т. е. при резонансе. Так, например, крылья самолёта имеют свою собственную частоту колебаний, и если эта частота совпадёт с частотой колебания, возникающей вследствие трения о воздух (явления

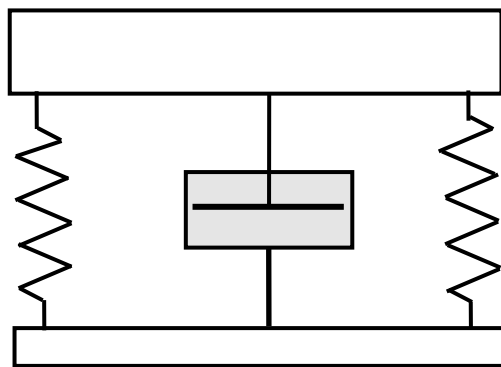


Рис. 51.1

«флаттера»)), то это может привести к разрушению крыла. Поэтому необходима такая конструкция, чтобы упомянутые частоты сильно отличались друг от друга при любой скорости движения самолёта. В этом заключается первый способ борьбы с последствиями вредных колебаний. Его называют отстройкой от резонанса. Он используется при создании любых конструкций, в которых имеются или могут появиться вредные колебания.

Второй широко применяемый способ — демпфирование (гашение) колебаний. Простейшим демпфером колебаний является резина. Именно поэтому весь автотранспорт имеет резиновые колёса: тряска, которая возникает из-за неровностей дорог, в значительной мере снижается вследствие упругих свойств резины. Схема специального, более совершенного демпфирующего устройства изображена на рис. 51.1. Устройство включает пружины и поршень, движущийся в вязком масле. Такое сочетание упругих и вязкостных свойств системы приводит к хорошему гашению колебаний: колебания, совершаемые нижней плитой, гасятся и плохо передаются верхней плите. Такие демпферы используются для гашения колебаний заводских труб, радиомачт, висячих мостов и т. д. Их включают в растяжки, которыми крепятся упомянутые конструкции к земле. С помощью демпферов гасятся колебания вибрирующих устройств, расположенных внутри зданий. Отметим, что автомобильные амортизаторы основаны на том же принципе.

В заключение следует отметить полезную роль колебаний и их использование в строительных технологиях. Остановимся в основном на использовании так называемых вибромашин. Основной их частью является виброисточник, в котором генерируются нужные для создания колебаний силы. Вибротехнические процессы весьма эффективны, и можно привести неполный перечень их использования:

1. Увеличение скорости движения загрузки вниз по наклонным жёлобам.
2. Ускоренное опорожнение бункеров, содержащих сыпучие материалы.
3. Измельчение твёрдых тел в вибромельницах.
4. Связывание множества отдельных частиц в прочное целое.
5. Перемешивание смесей и их разделение.

Особо следует остановиться на вибропогружении свай для создания фундаментов зданий. Сваи обычно забивают тяжёлым грузом («бабой») аналогично тому, как забивают в стенку гвоздь молотком (кстати, это тоже периодический, т. е. колебательный процесс). В настоящее время можно встретить погружения свай в грунт с помощью вибраций. Наверху сваи ставят вибровозбудитель. Он создаёт колебания сваи. За счёт этого резко снижается сила трения между землёй и свайей и последняя под действием своей тяжести погружается в землю. Скорость погружения может быть весьма значительной: 3 — 4 метра в минуту. С помощью вибровозбудителя

можно извлекать свай из земли.

Очевидно, что в данном случае перечень использования колебательных процессов неполный, возможности их не ограничены и применение их во многом зависит от изобретательности человеческого ума.

## § 52. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

К разряду колебательных процессов, широко используемых в нашей жизни, относятся колебания переменного электрического тока. Переменным током в общем смысле называют электрический ток, изменяющийся со временем. В данном случае под переменным током будет пониматься ток, сила которого изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Такой ток часто называют *синусоидальным*.

**1. Условие квазистационарности.** Условие квазистационарности состоит в том, что период  $T$  изменения силы тока должен быть значительно больше времени  $\tau$ , в течение которого электромагнитное возбуждение распространяется между наиболее удаленными точками цепи, т. е.  $T \gg \tau$ . Здесь  $\tau = l/c$ , где  $l$  — длина цепи,  $c$  — скорость распространения электромагнитного поля по цепи. Для переменного тока промышленной частоты ( $\nu = 50$  Гц) условие квазистационарности достаточно хорошо выполняется для цепей до 100 км. При соблюдении этого условия мгновенные значения силы тока можно считать одинаковыми во всех поперечных сечениях цепи. Поэтому применимы законы Ома и правила Кирхгофа, выведенные для постоянного тока.

**2. Получение переменного тока.** Принципиальная схема получения переменного тока проста и может быть пояснена на примере плоской проводящей рамки, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле (рис. 52.1). Магнитный поток  $\Phi_B$ , пронизывающий площадь  $S$  рамки в любой момент времени  $t$  согласно (39.1) находится по формуле:

$$\Phi_B = BS \cdot \cos \alpha = BS \cdot \cos \omega t, \quad (52.1)$$

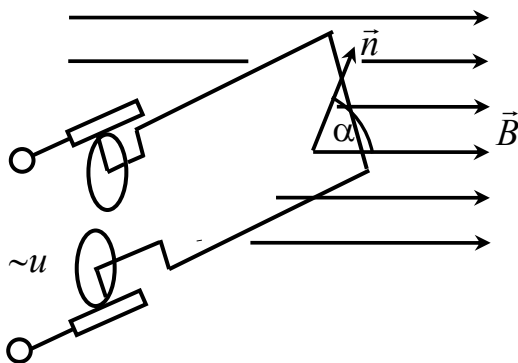


Рис. 52.1

где  $\alpha = \omega t$  — угол поворота рамки в момент времени  $t$  (начало отсчёта времени выбрано так, чтобы при  $t = 0$   $\alpha = 0$ ). При вращении рамки возникает э. д. с. индукции (см. (41.5))  $e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ . Отсюда, учитывая (52.1), получаем  $e = \omega BS \cdot \sin \omega t$ . При  $\sin \omega t = 1$   $e$  максимальна, т. е.  $E_m = \omega BS$ . Тогда запишем

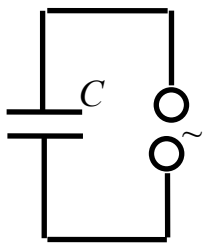


Рис. 52.3

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (52.2)$$

Таким образом, при равномерном вращении рамки, находящейся в однородном магнитном поле, в ней появляется переменная э. д. с., изменяющаяся по закону синуса или косинуса. Переменное напряжение  $u$  снимается с вращающегося витка с помощью щёток, схематически показанных на рис. 52.1. В генераторе переменного тока для получения достаточно большой э. д. с. применяются сильные магнитные поля, увеличивают число витков (рамок), соединённых последовательно, которые имеют как можно большую площадь.

**3. Цепь переменного тока, состоящая только из резистора.** Рассмотрим цепь переменного тока, состоящую из одного резистора (рис. 52.2). Пусть сила тока, текущего через него, изменяется по закону:

$$i = I_m \cdot \cos \omega t, \quad (52.3)$$

где  $I_m$  и  $\omega$  — амплитуда и циклическая частота колебания силы тока. Тогда, согласно закону Ома для участка цепи, напряжение  $u_R$ , которое обуславливает этот ток, находится по формуле:

$$u_R = Ri = RI_m \cdot \cos \omega t = U_{Rm} \cdot \cos \omega t, \quad (52.4)$$

где

$$U_{Rm} = I_m R \quad (52.5)$$

— амплитудное значение напряжения переменного тока на резисторе. Сравнивая выражения (52.3) и (52.4), приходим к выводу, что фазы напряжения и силы переменного тока одинаковые. Из этого следует, что напряжение и сила тока одновременно достигают своих максимальных значений.

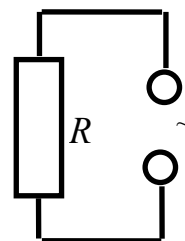


Рис. 52.2

**4. Цепь переменного тока, состоящая только из конденсатора.** Рассмотрим теперь цепь переменного тока, состоящую из одного конденсатора (рис. 52.3). Пусть сила тока изменяется по закону (52.3). Тогда заряд, находящийся на обкладках конденсатора, находится по формуле

$$q = \int_0^t i(t) \cdot dt = \int_0^t I_m \cos \omega t \cdot dt = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t. \text{ С учётом этого напряжение на ёмкости}$$

$$\text{равно } u_C = \frac{q}{C} = \frac{I_m}{\omega C} \cdot \sin \omega t.$$

Из тригонометрии известно, что  $\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$ , так как косинус чётная функция. Используя это соотношение и полагая  $\alpha = \omega t$ , запишем:  $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ . Тогда  $u_C = \frac{I_m}{\omega C} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ . Величина

$U_{cm} = \frac{1}{\omega C} I_m$  — постоянная. Поэтому её можно рассматривать как амплитуду колебаний напряжения, т. е.

$$U_{cm} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (52.6)$$

С учётом этого получаем

$$u_C = U_{cm} \cdot \cos(\omega t - \pi/2). \quad (52.7)$$

Из сравнения формул (52.5) и (52.6) приходим к выводу, что величина

$$R_C = 1/(\omega C) \quad (52.8)$$

играет роль сопротивления, оказываемого ёмкостью при протекании по ней переменного тока. Поэтому её называют **ёмкостным сопротивлением**. Из этого соотношения следует, что для постоянного тока ( $\omega = 0$ ) ёмкостное сопротивление равно бесконечности, т.е. постоянный ток через ёмкость не течёт. Из сравнения выражений (52.3) и (52.7) следует, что фаза напряжения на ёмкости отстаёт от фазы силы тока, текущего в ней, на  $\pi/2$ , т. е. максимальные значения силы тока и напряжения на ёмкости достигаются не одновременно, когда сила тока максимальная, напряжение равно нулю, и наоборот.

**5. Цепь переменного тока, состоящая только из индуктивности.** Рассмотрим цепь переменного тока лишь с индуктивностью (рис. 52.4). Пусть через индуктивность течёт переменный ток, изменяющийся со временем по закону (52.3). Найдём напряжение, вызывающее этот ток. Согласно закону самоиндукции, при протекании по индуктивности переменного тока в ней возникает э. д. с. самоиндукции  $E_s = -L \frac{di}{dt}$ . Напряжение на

индуктивности равно  $u_L = -E_s$ . Поэтому  $u_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cdot \sin \omega t$ . Из тригонометрии известно, что  $-\sin \alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$ . Тогда  $u_L = \omega L I_m \cos(\omega t + \pi/2)$ .  
Выражение

$$U_{Lm} = \omega L I_m. \quad (52.9)$$

постоянно. Поэтому его можно рассматривать как амплитуду переменного напряжения на индуктивности. С учётом этого получаем

$$u_L = U_{Lm} \cdot \cos(\omega t + \pi/2). \quad (52.10)$$

Сравнивая выражения (52.5) и (52.9), приходим к выводу, что величина

$$R_L = \omega L \quad (52.11)$$

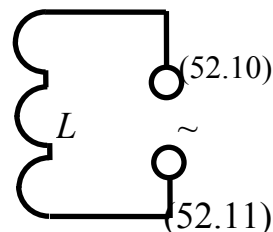


Рис. 52.4

играет роль сопротивления, оказываемого индуктивностью при протекании по ней переменного тока. Поэтому её называют **индуктивным сопротивлением**. Из этого соотношения следует, что для постоянного тока ( $\omega = 0$ ) индуктивное сопротивление равно нулю. Из сравнения выражений (52.4) и (52.10) вытекает, что фаза напряжения на индуктивности опережает фазу силы тока, текущего через неё, на  $\pi/2$ . Поэтому максимальные значения силы тока и напряжения на индуктивности достигаются не одновременно, когда сила тока максимальная, напряжение равно нулю, и наоборот.

**6. Цепь переменного тока, состоящая только из резистора, ёмкости и индуктивности, соединённых последовательно.** Рассмотрим цепь переменного тока, показанную на (рис. 52.5). Поскольку цепь неразветвлённая, то сила тока  $i$  в любой момент времени одинакова во всей цепи. Предположим, что сила тока изменяется со временем по закону:

$$i(t) = I_m \cos \omega t, \quad (52.12)$$

где  $I_m$  — амплитудное значение силы тока,  $\omega$  — циклическая частота изменения силы тока. Найдём напряжение, существующее на этой цепи. Протекание тока в отдельных участках цепи обусловлено напряжением  $u_R$  на резисторе,  $u_L$  на индуктивности и  $u_C$  на ёмкости. Эти напряжения находятся по формулам (52.4), (52.7) и (52.10):  $u_R = U_{Rm} \cdot \cos \omega t$ ,  $u_L = U_{Lm} \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$  и  $u_C = U_{Cm} \cdot \cos(\omega t - \pi/2)$ .

Так как цепь последовательная, то сумма напряжений  $u_R$ ,  $u_L$  и  $u_C$  равна напряжению  $u$  на этой цепи, т. е.  $u = u_R + u_L + u_C = U_{Rm} \cdot \cos \omega t + U_{Lm} \cdot \cos(\omega t + \pi/2) + U_{Cm} \cdot \cos(\omega t - \pi/2)$ . Поскольку складываемые напряжения изменяются по закону косинуса, то и суммарное напряжение  $u$  также изменяется по этому закону. При этом фаза колебания в общем случае будет отличаться от фазы силы тока на некоторую величину  $\varphi$ . Её называют **сдвигом фаз**. Поэтому

$$u = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

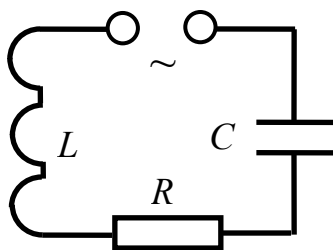


Рис. 52.5

С учётом этого запишем:

$$U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = U_{Rm} \cdot \cos \omega t + U_{Lm} \cdot \cos(\omega t + \pi/2) + U_{Cm} \cdot \cos(\omega t - \pi/2).$$

Данное выражение должно выполняться для любого момента времени. Запишем его для двух моментов времени:  $t = 0$  и  $t = \pi/(2\omega)$ , находимого из условия  $\omega t = \pi/2$ .

$$U_m \cdot \cos \varphi = U_{Rm} \quad \text{и} \quad U_m \cdot \sin \varphi = U_{Lm} - U_{Cm}, \quad (52.14)$$

так как  $\cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin \varphi$ ,  $\cos(\pi/2 + \pi/2) = -1$  и  $\cos(\pi/2 - \pi/2) = 1$ . Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получаем:  $U_m^2 = U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2$  и



$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2}. \quad (52.15)$$

$\omega L > 1/(\omega C)$ , то напряжение Поделив равенства (52.14), находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{Lm} - U_{Cm}}{U_{Rm}} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_{Lm} - U_{Cm}}{U_{Rm}}. \quad (52.16)$$

Но  $U_{Rm} = I_m R$ ,  $U_{Lm} = \omega L I_m$  и  $U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}$  (см. формулы (52.5), (52.8) и (52.11)). Учитывая это, формулы (52.15) и (52.16) перепишем в виде:

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (52.17)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (52.18)$$

Выражение

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (52.19)$$

называют **общим (полным) сопротивлением цепи**.

Таким образом, протекание переменного тока, изменяющегося со временем по закону  $i(t) = I_m \cos \omega t$ , через последовательно соединённые резистор, индуктивность и ёмкость приводит к появлению в цепи напряжения  $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ . При этом разность фаз  $\varphi$  между напряжением и силой тока, называемая **сдвигом фаз**, находится по формуле  $\varphi = \operatorname{arctg}[(\omega L - 1/(\omega C))/R]$ . Если опережает по фазе силу тока, если  $R_L < R_C$ , то отстаёт. Амплитудные значения напряжения и силы тока связаны соотношением  $U_m = I_m Z$ , где

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  — общее сопротивление цепи.

## § 53. МОЩНОСТЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

1. Мгновенная мощность переменного тока, согласно (34.4), равна произведению мгновенных значений напряжения и силы тока  $P(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos \omega t$ , где  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ ;  $i(t) = I_m \cos \omega t$  (см. формулы (52.13) и (52.12)). Практическое значение имеет средняя мощность, выделяемая в цепи за конечный промежуток времени, значительно больший периода колебания силы тока. Для нахождения средней мощности  $P$  преобразуем выражение для  $P(t)$ , используя соотношение

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = (1/2)[\cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \alpha)]$ . Полагая  $\omega t = \alpha$  и  $\omega t + \varphi = \beta$ , получаем, что  $P = \langle (1/2)U_m I_m [\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] \rangle$ . Среднее значение  $\cos(2\omega t + \varphi)$  равно нулю, так как половину периода функция положительная, а другую половину — отрицательная. Поэтому

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi. \quad (53.1)$$

Введём так называемые действующие значения силы тока и напряжения по формулам

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (53.2)$$

Тогда

$$P = UI \cos \varphi, \quad (53.3)$$

где  $\cos\varphi$  называют коэффициентом мощности.

2. Выясним физический смысл действующих значений силы тока и напряжения. Пусть цепь переменного тока состоит только из резистора (активного сопротивления). Если в цепи не совершается работа, то вся мощность расходуется на увеличение внутренней энергии проводников, составляющих цепь, т. е. на выделение количества теплоты  $Q$  в резисторе за некоторое время  $t$ . С учётом (53.1)  $Q = Pt = (1/2)U_m I_m t \cos\varphi$ . Согласно формуле (52.18),

$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 0$ , так как  $R_L = \omega L = 0$  и  $R_C = 1/(\omega C) = 0$ , поскольку индуктивное и ёмкостное сопротивления отсутствуют. Тогда  $\cos\varphi = 1$  и  $U_m = I_m Z = I_m R$  (см. (52.19)). С учётом этого  $Q = (1/2)I_m^2 R t = I^2 R t$ , где  $I$  — действующее значение силы тока. Полученная формула тождественна закону Джоуля — Ленца для постоянного тока. Отсюда становится ясным физический смысл действующих значений. *Действующее значение силы переменного тока (или переменного напряжения) равно такой силе (или величине напряжения) постоянного тока, тепловое действие которого одинаково с тепловым действием переменного тока.*

3. Коэффициент мощности  $\cos\varphi$  играет важную роль в электротехнике. Найдём,

от чего он зависит. Из выражения (52.16) следует, что  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ . Из тригонометрии

известно, что  $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \text{ Если } \omega L = 1/(\omega C), \text{ то } \cos\varphi = 1 \text{ и}$$

$P = IU$ , а при чисто реактивном сопротивлении ( $R = 0$ ) средняя мощность равна нулю, какими бы большими не были сила тока и напряжение. Если  $\cos\varphi$  имеет значения, существенно меньшие единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении необходимо увеличивать силу тока. Это приводит к возрастанию потерь, обусловленных нагреванием проводов. Поэтому на практике всегда стремятся путём подбора индуктивности и ёмкости цепи увеличить коэффициент мощности. Для промышленных установок наименьшее допустимое значение  $\cos\varphi$  составляет примерно 0,85.

## ГЛАВА 11. ВОЛНЫ

Представление о волнах пронизывает нашу жизнь и всю современную технику: волны на море и сейсмические волны в земле, звуковые волны, электромагнитные волны (радиоволны, свет, рентгеновское излучение) и т. д. Выявление общих волновых закономерностей представляется очень важным, так как способствует пониманию волновых явлений, имеющих различную физическую природу. **Волна** — это *процесс распространения колебаний (возмущения) в пространстве*. Проще всего уяснить сущность волнового процесса на обычном шнуре. Если дернуть вверх конец горизонтально расположенного шнура, то по нему побежит «горб» (волновой импульс). Это происходит потому, что рука тянет конец шнура вверх, а конец связан с соседними участками, которым передаётся сила действующая вверх. Один за другим последовательные участки шнура поднимаются вверх, что и приводит к появлению бегущего «горба». Такое движение называется бегущей волной (или волной). Таким образом, источником распространяющегося волнового импульса является возмущение, а условием существования волны — наличие упругой среды, в данном случае шнура. В общем случае возмущением может быть или изменение давления в каком-либо месте упругой среды, или отклонение какого-либо элемента натянутой струны от положения равновесия, или изменение напряжённости электрического ( $E$ ), или изменение индукции магнитного ( $B$ ) поля в любой точке пространства. Любое колебание приводит к его распространению в пространстве, т. е. к появлению волны. *Область пространства, внутри которой происходят колебания, называется **волновым полем***. *Поверхность, отделяющую волновое поле от области, где колебаний ещё нет, называют **фронтом волны***. Все точки фронта волны колеблются в одинаковых фазах, поскольку колебания в них начинаются одновременно. Форма фронта волны может быть различной. Простейшими являются плоский и сферический фронты. *Линии, вдоль которых происходит распространение волны, называются **лучами***. В однородных изотропных средах лучи перпендикулярны к фронту волны. Частицы среды не переносятся волной, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия.

Обозначим любое возмущение буквой  $\xi$ . В общем случае величина возмущения зависит от времени и от координат  $\xi = (t, x, y, z)$ . Независимо от фронта волны различают волны продольные и поперечные. В продольной волне колебания происходят вдоль направления распространения волны; а в поперечной — перпендикулярно к направлению распространения. В жидких и газообразных средах возбуждаются лишь продольные механические волны (чередующиеся сжатие и растяжение среды). В твёрдых телах могут возникать как продольные, так и поперечные волны.

## § 54. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Пусть в точке  $O$ , которую примем за начало координат, находится источник колебаний, колеблющийся по закону  $\xi = A \cdot \cos \omega t$ . Здесь  $\xi$  — мгновенное значение колеблющейся величины,  $A$  — амплитуда,  $\omega$  — циклическая частота. Рассмотрим процесс распространения колебаний, например, вдоль координатной оси  $Ox$ . Обозначим скорость распространения волны, т.е. скорость передвижения фронта волны, через  $\nu$ . Очевидно, что колебания в точке с координатой  $x$  начинаются через промежуток времени  $\tau = x/\nu$ , который необходим, чтобы колебания достигли этой точки. Тогда колебания, происходящие в данной точке, описываются уравнением  $\xi = A \cdot \cos \omega(t - \tau)$ . Подставляя в это выражение значение  $\tau$ , получаем:

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos[\omega(t - x/\nu)]. \quad (54.1)$$

Обычно это уравнение записывают в ином виде. Для этого преобразуем аргумент косинуса:  $\omega(t - x/\nu) = \omega t - x\omega/\nu = \omega t - 2\pi x/(\nu T)$ , так как  $\omega = 2\pi/T$ . Расстояние, на которое распространяется волна за период колебания, называется **длиной волны**. Обозначим её через  $\lambda$ .

С учётом этого уравнение (54.1) запишем:

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}). \quad (54.2)$$

Уравнение (54.1) или (54.2) называется **уравнением плоской монохроматической волны**. В этом уравнении  $A$  и  $\omega$  — амплитуда и циклическая частота волны, равная амплитуде и циклической частоте колебаний, происходящих в разных точках волны;  $\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}$  — фаза волны.

Уравнение волны (54.2) можно записать ещё в одном виде, зная, что  $\omega = 2\pi/T$ :

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}). \quad (54.3)$$

Уравнения (54.2) и (54.3) описывают волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ .

Как видно из выражения (54.3), уравнение волны является периодической функцией, как относительно времени, так и координат. Действительно, в моменты времени  $t + nT$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) функция принимает одинаковые значения в фиксированной точке с координатой  $x$ , а в точках с координатами  $x + n\lambda$  она одинакова для фиксированного момента времени  $t$ .

## § 55. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

Звук представляет собой колебания воздуха или другой упругой среды, воспринимаемые нашими органами слуха. Звуковые колебания, воспринимаемые человеческим ухом, имеют частоты, лежащие в пределах от 20 до 20000 Гц. Колебания с частотами меньше 20 Гц называются *инфразвуковыми*, а больше 20 кГц — *ультразвуковыми*.

**1. Скорость звука.** Установлено, что скорость распространения звука в газе определяется по формуле:

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (55.1)$$

где  $\gamma$  — отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  и  $\mu$  — абсолютная температура и молярная масса газа. Значение скорости звука в воздухе, рассчитанное по этой формуле, хорошо согласуется с опытом.

При распространении звука в твёрдых средах возникают как продольные, так и поперечные волны. В жидкостях и газах возможны только продольные волны. Продольные волны обуславливаются упругой деформацией сжатия и растяжения, которая зависит от модуля Юнга  $E$ , а поперечные — упругой деформацией сдвига, характеризуемой модулем сдвига  $G$ . Скорость  $\nu_{\text{пр}}$  продольной и  $\nu_{\text{п}}$  поперечной звуковой волны находятся по формулам:

$$\nu_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \nu_{\text{п}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (55.2)$$

где  $\rho$  — плотность среды.

В твёрдых телах одновременно возникают продольные и поперечные волны. Поскольку скорость распространения продольной волны больше скорости поперечной, то по разности скоростей этих волн определяют места землетрясения.

**2. Характеристики звука.** Звук у нас ассоциируется с его слуховым восприятием, с ощущениями, которые возникают в сознании человека. В связи с этим выделяют три его основные характеристики: высота, тембр и громкость звука.

**а) Высота и тембр звука.** Физической величиной, характеризующей высоту звука, является *частота колебаний* звуковой волны. Чем меньше

частота, тем ниже звук, а чем больше частота, тем выше звук. Звук, издаваемый при полёте жука, имеет частоту несколько десятков герц, тогда как писк комара — частоту, приближающуюся к 20000 Гц. Когда мы слышим музыкальный звук, то, кроме высоты и громкости, мы воспринимаем его тембр. Звучание одной и той же ноты на скрипке и трубе чётко различаются на слух. Тембр звука определяется наличием обертонов, их числом и амплитудами. У различных музыкальных инструментов число обертонов и их амплитуды оказываются различными. Именно это придаёт звуку каждого инструмента определённый тембр. Другой тип звука — шум, который имеет место, например, при ударе двух камней друг о друга, ударе по всем клавишам рояля и т.д. Шум характеризуется большим числом частот, которые слабо связаны или не связаны друг с другом.

**б) Громкость звука.** Громкость звука связана с физически измеряемой величиной — интенсивностью волны. *Интенсивность* равна энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению её распространения. Интенсивность звуковых волн очень низка. Она изменяется от  $10^{-12}$  (порог слышимости) до  $10 \text{ Вт/м}^2$  (болевые ощущения). Так, энергия рёва большой толпы футбольных болельщиков, приветствующих гол, приблизительно равна внутренней энергии чашки кофе при температуре  $\sim 45^\circ\text{C}$ .

Человеческое ухо воспринимает невероятно широкий диапазон интенсивностей, крайние его значения различаются в  $10^{13}$  раз. Установлено, что величина, которую мы воспринимаем как громкость, не прямо пропорциональна интенсивности. Уровень громкости  $L$  вычисляется через интенсивность данного звука  $I$  по формуле:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (55.3)$$

где за  $I_0$  принимается величина порога слышимости, причём используется десятичный логарифм. Уровень громкости измеряется в белах (Б). Однако оказалось удобнее использовать величину в 10 раз меньшую — децибел. Значение в этом случае записывается:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}. \quad (55.4)$$

Отметим, что отношение двух любых интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  также можно выразить в децибелах

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (55.5)$$

По этой же формуле можно определить затухание. Например, затухание в 30 дБ означает уменьшение интенсивности звука в 1000 раз.

Для примера приведём сравнительную таблицу уровней громкости (табл. 55.1).

Таблица 55.1

Характер звука	$L$ , дБ
Тихий шёпот	30
Обычная речь	60 — 70
Шум оживлённой улицы	90
Реактивный самолёт (на расстоянии 30 м)	130

**3. Отражение и преломление звуковых волн.** Когда звуковая волна падает на препятствие (стену), то часть её отражается, а часть уходит в препятствие (рис. 55.1). При этом действуют два хорошо известных из оптики закона:

1) **закон отражения**, который гласит, что *угол отражения волны равен углу падения*:

$$\boxed{\beta = \alpha;} \quad (55.6)$$

2) **закон преломления**: *отношение синуса угла падения к синусу угла преломления — величина постоянная, равная отношению скоростей волн  $v_1$  и  $v_2$  в данных средах*, т. е.

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.} \quad (55.7)$$

**4. Резонансные явления для звуковых волн (акустический резонанс).** Поскольку звуковые волны связаны с колебаниями частиц среды, то в ряде случаев при их падении на какое-то препятствие может проявиться явление резонанса. Допустим, что звуковая волна некоторой частоты падает на упругий лист металла или фанеры, который имеет такую же собственную частоту колебаний. В этом случае вследствие резонанса лист начнёт совершать колебания и таким образом сильно поглощать энергию. При этом отражение волны будет небольшим, и лист можно рассматривать как звукопоглощающее устройство.

Другим интересным примером проявления акустического резонанса является резонатор Гельмгольца, который представляет собой некоторый сосуд с жёсткими стенками, сообщающийся через горловину с окружающим пространством (например, обыкновенная бутылка). Воздух, находящийся в таком сосуде, имеет некоторую резонансную частоту колебаний, приближённо рассчитываемую по формуле:

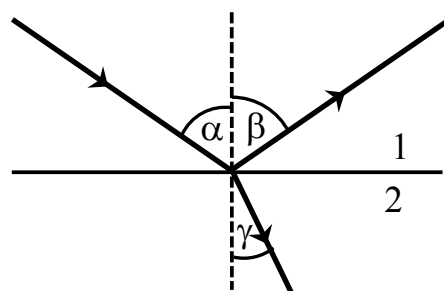


Рис. 55.1

$$v_{\text{рез}} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{V}}, \quad (55.8)$$

где  $d$  — диаметр горловины,  $V$  — объём резонатора. При попадании в резонатор звуковой волны, с частотой близкой к указанной частоте, возникает резонанс. За счёт этого звук усиливается. Резонаторы подобного типа использовались древнерусскими архитекторами при строительстве храмов. В их стены замуровывались глиняные сосуды разных размеров (для усиления звуковых волн разных частот) и за счёт этого происходило усиление звучания голоса священника или церковного хора.

Аналогия с оптикой распространяется и на отражение звуковых волн от сферической поверхности. Рассмотрим это явление, поскольку оно важно для архитектурной акустики. Пусть имеется сферическая поверхность с радиусом кривизны  $R$ , и на её оси, на расстоянии  $d$  от неё располагается источник звука  $S$ . Звук, отразившись от этого «акустического» зеркала, сходится в точке  $A$  на расстоянии  $f$  от поверхности (рис. 55.3). Величины  $f$ ,  $d$  и  $R$  связаны между собой известной из оптики формулой для отражения света от сферического зеркала:

$$1/d + 1/f = 2/R, \quad (55.9)$$

где  $R$  — радиус кривизны поверхности. Эта формула позволяет оценить точку схождения звуковых волн при их отражении от сферической поверхности при проектировании купольных зданий и сцен сферической формы.

**5. Поглощение звуковой волны.** При распространении волны в любой среде волна постепенно ослабляется за счёт перехода энергии колебаний в другие виды энергии, в частности, в тепловую энергию частиц среды. Оказывается, что поглощение звуковой энергии связано с внутренним трением (вязкостью) и теплопроводностью среды.

Уменьшение интенсивности звука  $dI$  при распространении волны на участке длиной  $dx$  пропорционально самой интенсивности  $I$  и длине пути  $dx$ , т. е.  $dI = -kI \cdot dx$  или  $\frac{dI}{I} = -k \cdot dx$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональ-

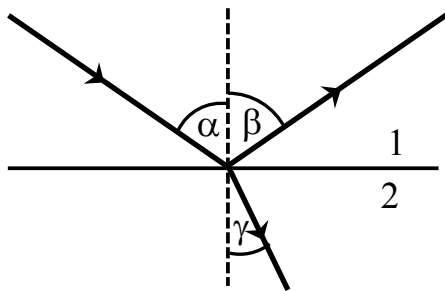


Рис. 55.2

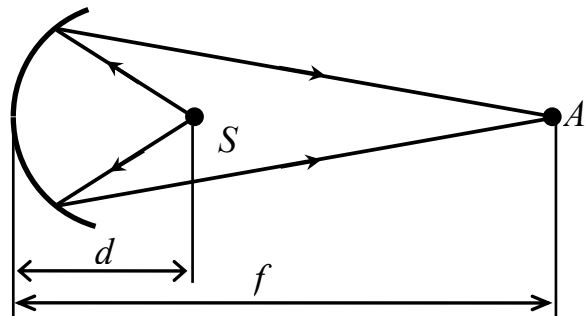


Рис. 55.3



ности. Интегрируя, получаем:  $\ln I = -kx + \ln \text{const} = \ln e^{-kx} + \ln \text{const} = \ln(\text{const} \cdot e^{-kx})$ ,  $I = \text{const} \cdot e^{-kx}$ . Задавая при  $x = 0$   $I = I_0$ , окончательно находим, что

$$I = I_0 e^{-kx}. \quad (55.10)$$

Постоянная  $k$  называется коэффициентом поглощения звука, и она характерна для каждой определённой среды. Однако следует учесть, что  $k$  зависит от частоты, причём она возрастает с увеличением частоты звука, поэтому низкие звуки распространяются дальше высоких звуков. Соотношение (55.10) справедливо для волн любой природы.

Таблица 55.2

Материал	Коэффициент затухания, 1/м
Бетон	0,015
Оштукатуренная кирпичная стена	0,025
Известь на деревянной обрешётке	0,034
Ковёр	0,20
Войлок	0,78

В табл. 55.2 приведены значения коэффициентов поглощения некоторых строительных материалов и покрытий, используемых в помещениях для частоты 512 Гц. Хорошей поглощательной способностью обладают пористые материалы (войлок, бархат, поролон, пенобетон, вспененные полимерные материалы), поскольку в них имеется огромное количество пор неправильной формы. При звуковых колебаниях эти отдельные объёмы воздуха испытывают сильное трение о стенки пор, происходит интенсивное поглощение звуковой энергии.

**6. Ультразвук и его применение.** Ультразвуки имеют частоты колебаний свыше 20000 Гц, поэтому длина ультразвуковых волн мала, а скорости и ускорения колеблющихся частиц среды и возникающие избыточные давления — велики. Интенсивность ультразвукового излучения может достигать миллионов ватт на квадратный метр. Для получения ультразвуковых волн используются в основном два явления: обратный пьезоэлектрический эффект и магнитострикция. Суть обратного пьезоэлектрического эффекта заключается в том, что пластинки некоторых кристаллов (пьезоэлектриков — кварца, сегнетовой соли и др.) под действием электрического поля деформируются. Если такую пластинку поместить между металлическими обкладками, на которые подаётся переменное напряжение ультразвуковой частоты, то появляются механические колебания пластинки, создающие ультразвуковую волну в окружающей среде. Колебания особенно интенсив-

ны, если частота прикладываемого напряжения совпадает с собственной частотой колебания кристаллической пластинки, т. е. возникает резонанс.

**Магнитострикция** — это явление деформации ферромагнитных веществ (железо, никель и др.) под действием магнитного поля. Поместив ферромагнетик в переменное магнитное поле ультразвуковой частоты, можно вызвать его механические колебания, которые и приведут к появлению ультразвуковой волны в окружающей среде. Поскольку длина волны ультразвука достаточно мала по сравнению со звуковой волной, то удаётся получить направленные пучки ультразвуковых волн. Это позволяет использовать ультразвук в целях локации.

В настоящее время хорошо разработаны методы излучения, приёма, измерения интенсивности и скорости ультразвуковых волн, что позволило использовать их для решения многих научных и технических (в том числе строительных) задач. Приведём некоторые применения ультразвука.

1. Использование ультразвука в целях локации в воде для обнаружения айсбергов ночью, косяков рыб, подводных лодок, измерения глубины моря.

2. Изучение физических свойств различных твёрдых, жидких и газообразных веществ по скорости распространения, коэффициентам поглощения и т. д.

3. Воздействие на различные физико-химические процессы: диффузию, образование эмульсий, кристаллизацию и т. д.

4. Использование в медицинских целях: обнаружение камней в почках, печени, изучение уплотнения тканей при некоторых видах заболеваний.

5. С помощью ультразвука проводится механическая обработка очень твёрдых или хрупких тел. Ультразвук используется и в строительном деле; в частности, обрабатывая ультразвуком бетон, гипс и другие материалы, можно существенно изменять их физические свойства. Другое важное применение ультразвуковых волн — использование их для дефектоскопии строительных изделий. Схема такого дефектоскопа, работающего по теневому методу, приведена на рис. 55.4. На

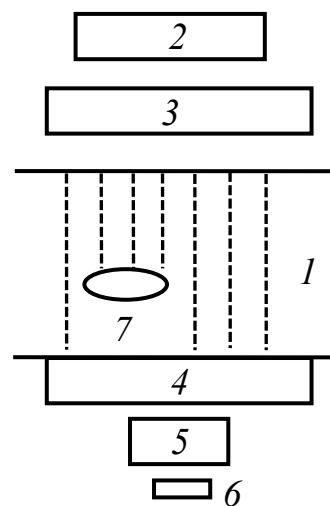


Рис. 55.4

этом рисунке: 1 — контролируемое изделие (например, железобетонная плита); 2 — генератор, питающий ультразвуковой излучатель 3; 4 — приёмная пластина, выполненная из пьезоэлектрика; 5 — усилитель электрических сигналов; 6 — индикатор. Если изделие однородно, то ультразвук проходит любую часть одинаково. Если встречается раковина 7, то ультразвук через неё проходит плохо, что и улавливает индикатор. Дефектоскоп ис-

пользуется для обнаружения трещин и раковин в крупногабаритных изделиях и конструкциях. Прибор уверенно обнаруживает полости площадью 8 — 10 см<sup>2</sup>.

Отметим, что некоторые животные и насекомые испускают и воспринимают ультразвуковые волны на различных частотах: дельфины до 50 кГц, пчёлы до 22 кГц, летучие мыши до 100 кГц. Последние используют ультразвук для локации: испуская очень короткие импульсы ( $10^{-3}$  с) и воспринимая их отражение, они определяют наличие препятствий в темноте и таким образом определяют себе путь.

В заключение скажем несколько слов об инфразвуке, т. е. о волнах с частотой колебаний ниже 20 Гц. Инфразвук, как и ультразвук, имеет такую же физическую природу, что и обычный звук. Инфразвуковые колебания чаще всего возникают в результате вибрации тяжёлых станков. Они вредны для человеческого организма вследствие того, что может возникнуть резонанс с колебаниями внутренних органов тела. Кроме того, инфразвук может вызвать у человека чувство неосознанного страха и дискомфорта.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валишев М. Г., Повзнер А. А. Курс общей физики. — СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. — 573 с.
2. Ивлиев А. Д. Физика. — СПб.; М., Краснодар: Лань, 2009. — 671 с.
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики. — М.: Высшая школа, 2002. — 718 с.
4. Трофимова Т. И. Курс физики. — М.: Академия, 2007. — 560 с.
5. Грабовский Р. И. Курс физики. — СПб.: Лань, 2007. — 608 с.
6. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
7. Ойр Дж. Физика. — Т. 1. — М.: Мир, 1981. — 386 с.
8. Ойр Дж. Физика. — Т. 2. М.: Мир, 1981. — 622 с.
9. Джанколи Д. Физика. — Т. 1. — М.: Мир, 1989. — 656 с.
10. Джанколи Д. Физика. — Т. 2. — М.: Мир, 1989. — 667 с.
11. Телеснин Р. В. Молекулярная физика. — М.: Высшая школа, 1973. — 360 с.
12. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. — М.: Наука, 1985. — 382 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
<b>ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ</b>	<b>5</b>
Глава 1. Элементы кинематики	5
§ 1. Основные понятия кинематики материальной точки . . . . .	5
§ 2. Движение материальной точки по окружности. Связь угловых и линейных величин . . . . .	10
§3. Некоторые случаи движения материальной точки . . . . .	13
§4. Кинематика твёрдого тела . . . . .	15
Глава 2. Динамика поступательного движения . . . . .	16
§5. Сила. Масса . . . . .	16
§6. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчёта . . . . .	16
§7. Второй и третий законы Ньютона . . . . .	17
§8. Второй закон Ньютона для механической системы. Закон сохранения импульса . . . . .	21
§9. Центр масс . . . . .	22
Глава 3. Динамика вращательного движения . . . . .	25
§10. Основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела . . . . .	26
§11. Закон сохранения момента импульса . . . . .	30
§12. Свободные оси. Гироскоп . . . . .	33
Глава 4. Энергия. Работа . . . . .	35
§13. Работа силы при поступательном и вращательном движении. Мощность . . . . .	35
§14. Кинетическая энергия поступательного и вращательного движения . . . . .	38
§15. Теорема о кинетической энергии . . . . .	39
§16. Закон сохранения механической энергии . . . . .	40
§17. Законы Кеплера . . . . .	46
§18.. Космические скорости. . . . .	48
<b>ЧАСТЬ 2. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА</b>	<b>50</b>
Глава 5. Электростатика . . . . .	50
§ 19. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона . . . . .	50
§ 20. Электрическое поле. Напряжённость поля . . . . .	51
§ 21. Суперпозиция полей . . . . .	52
§ 22. Линии напряжённости . . . . .	53
§ 23. Поток напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса для электростатического поля . . . . .	54
§ 24. Применения теоремы Гаусса к расчёту электростатического поля равномерно заряженной плоскости . . . . .	57
§ 25. Работа сил электростатического поля при перемещении заряда. Циркуляция напряжённости электрического поля . . . . .	59
§ 26. Потенциал и разность потенциалов электростатического поля . . . . .	61
§ 27. Связь между напряжённостью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности . . . . .	63
§ 28. Проводники в электростатическом поле . . . . .	65

§ 29. Конденсаторы . . . . .	66
§ 30. Энергия заряженного конденсатора и уединённого проводника. Энергия электрического поля . . . . .	68
Глава 6. Постоянный электрический ток . . . . .	70
§ 31. Электрический ток. Сила и плотность тока . . . . .	70
§ 32. Закон Ома для однородного участка цепи. Сопротивление проводника. Закон Ома в дифференциальной форме . . . . .	71
§ 33. Источники электрического тока. Электродвижущая сила . . . . .	72
§ 34. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля – Ленца . . . . .	74
§ 35. Правила Кирхгофа . . . . .	75
Глава 7. Электромагнетизм . . . . .	77
§ 36. Магнитное поле . . . . .	77
§ 37. Закон полного тока . . . . .	80
§ 38. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида . . . . .	83
Глава 8. Электромагнитная индукция . . . . .	84
§ 39. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля . . . . .	84
§ 40. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле . . . . .	85
§ 41. Явление и закон электромагнитной индукции. Правило Ленца . . . . .	86
§ 42. Явление самоиндукции . . . . .	88
§ 43. Энергия магнитного поля. . . . .	90
Глава 9. Электромагнитное поле . . . . .	91
§ 44. Вихревое электрическое поле . . . . .	91
§ 45. Ток смещения . . . . .	92
§ 46. Уравнения Максвелла . . . . .	94
<b>ЧАСТЬ 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ</b>	<b>95</b>
Глава 10. Механические и электромагнитные колебания	96
§ 47. Свободные гармонические колебания . . . . .	96
§ 48. Энергия свободных гармонических колебаний . . . . .	102
§ 49. Затухающие колебания . . . . .	104
§ 50. Вынужденные колебания. Явление резонанса . . . . .	106
§ 51. Строительные конструкции, инженерные сооружения и колебания . . . . .	107
§ 52. Переменный ток . . . . .	109
§ 53. Мощность переменного тока . . . . .	113
0, Глава 11. Волны	115
§ 54. Уравнение плоской монохроматической волны . . . . .	116
§ 55. Звуковые волны . . . . .	117
Список использованной литературы . . . . .	123
Оглавление . . . . .	124

Алексеев Вадим Васильевич  
Маклаков Лев Иванович

Курс общей физики  
Том 1

Механика. Электродинамика.  
Колебания и волны.

Учебное пособие