Симплексный метод решения ЗЛП

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования, которая состоит в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) \end{cases}.$$

Основным методом решения таких задач является симплексный метод. Он основан на переходе от одного решения к другому, при котором значение целевой функции возрастает (при условии, что данная задача имеет оптимальное решение, и каждое ее решение является невырожденным). Указанный переход возможен, если известно какое-нибудь исходное решение.

Для существования какого-нибудь допустимого решения необходимо, чтобы система ограничений была совместна. Запишем систему ограничений в матричной форме:

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Допустим, что r=rankA≤m≤n. Тогда r базисных переменных могут быть выражены через (n-r) свободных.

Решение $X^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_n{}^0)$, которое соответствует нулевым значениям свободных переменных, называется *базисным (опорным) планом. Опорный план* называется *невырожденным*, если базисные переменные положительны, *вырожденным* – если среди базисных переменных хотя бы один ноль.

Система (6.2) определяет многогранник решений. Каждая из его вершин определяет опорный план. Двигаясь из одной вершины в другую в сторону увеличения значения целевой функции, мы получим решение задачи или установим неограниченность функции.

Пусть X^0 – невырожденный опорный план канонической ЗЛП:

$$X^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_r{}^0, 0, \dots, 0), x_i{}^0 > 0, i = \overline{1,r}.$$

Тогда целевая функция запишется через небазисные переменные так:

$$F = F_0 + \sum_{j=r+1}^{n} d_j x_j, \text{где } F_0 = F(X^0).$$

Если все d_j отрицательны, то план X^0 – оптимальный.

Пусть существуют положительные d_j. Выберем из них максимальное – d_k. Тогда вместо одной из базисных переменных будем вводить в базис переменную x_k. Выводить будем ту переменную, для которой выполняется условие: $min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}\right\}, \alpha_{ik} > 0$. Здесь через β_i, α_{ik} обозначены коэффициенты разложения небазисной переменной x_i через базисную x_k.

Пример 6.1. Найти минимум функции $F(x) = -x_1 + x_2 - 3x_3$ при условиях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Решение. Сначала приведем задачу к каноническому виду, заменив направление поиска и введя дополнительные переменные:

$$G(x) = -F(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to max$$

при условиях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Добьемся того, чтобы все свободные члены равенств-ограничений были положительными:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

В этой системе базисными будут векторы x_4, x_5, x_6, так как они линейно независимы. Опорный план задачи: $X^0 = (0{,}0{,}0{,}2{,}6{,}2)$. $F_0 = F(X^0) = F(0{,}0{,}0{,}2{,}6{,}2) = 0$.

Составим первую симплекс-таблицу.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	-1	2	1	1	0	0	2
x_5	1	3	1	0	1	0	6
x_6	1	1	-1	0	0	1	2
G	1	-1	**3**	0	0	0	0

В последней строке таблицы найдем самое большое положительное число. (Если таких чисел нет, то функция не ограничена) Это число 3, которое стоит в третьем столбце. Столбец, в котором оно стоит, называется разрешающим. Значит, вводить в новый базис мы будем переменную x_3. Определим, какую переменную будем выводить: для всех $\alpha_{ik} > 0$ $min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}\right\} == \left\{\frac{2}{1}, \frac{6}{1}\right\} = 2$ - соответствует переменной x_4.

Теперь следует преобразовать таблицу так, чтобы в разрешающем столбце в первой строке (соответствующей переменной x_4) осталась 1, а в остальных строках этого столбца получились 0. Для этого выполним матричные преобразования:

а) из второй строки вычтем первую;

б) к третьей строке прибавим первую;

в) из четвертой строки вычтем 3 первых.

Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	-1	2	1	1	0	0	2
x_5	2	1	0	-1	1	0	4
x_6	0	3	0	1	0	1	4
G	**4**	-7	0	-3	0	0	-6

В последней строке таблицы найдем самое большое положительное число. Это число 4, которое стоит в первом столбце. Значит, вводить в новый базис мы будем переменную x_1. Определим, какую переменную будем выводить: для всех $\alpha_{ik} > 0$ $min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}\right\} = \left\{\frac{4}{2}\right\} = 2$ – соответствует переменной x_5.

Теперь следует преобразовать таблицу так, чтобы в разрешающем столбце во второй строке (соответствующей переменной x_5) осталась 1, а в остальных строках этого столбца получились 0. Для этого выполним матричные преобразования:

а) вторую строку поделим на 2;

б) к первой прибавим преобразованную вторую;

в) из четвертой строки вычтем 4 преобразованных вторых.

Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	2,5	1	0,5	0,5	0	4
x_1	1	0,5	0	-0,5	0,5	0	2
x_6	0	3	0	1	0	1	4
G	0	-9	0	-1	-2	0	-14

Поскольку в последней строке нет положительных элементов, то решение задачи получено.

В итоговой симплексной таблице базисными оказались переменные x_1, x_3, x_6. Их значения стоят в столбце b: $x_1 = 2, x_3 = 4, x_6 = 4$. Основная переменная x_2 в базис не вошла, значит, $x_2 = 0$. Число -14, стоящее в последней клетке таблицы, есть значение целевой функции с обратным знаком, т.е. -G(x)=-14. Значит, F(x)=-14.

Ответ: $min\ F(x) = F(2,0,4) = -14.$•

Приведем пример реализации алгоритма в *Microsoft Excel*.

Запишем в ячейки A1:C1 нули – первоначальные значения переменных x_1, x_2, x_3.

В ячейку E1 введем формулу: *=-1*A1+B1-3*C1* – значение целевой функции в начальной точке.

Заполним диапазон A3:C5 элементами матрицы ограничений.

В ячейке D1 запишем формулу *=СУММПРОИЗВ($A$1:$C$1;A3:C3)*, тиражируем ее на две строки вниз. Таким образом, в ячейках D3:D5 лежат значения левых частей неравенств- ограничений в начальной точке.

Запишем в ячейках E3:E5 значения правых частей неравенств-ограничений (рис. 6.1).

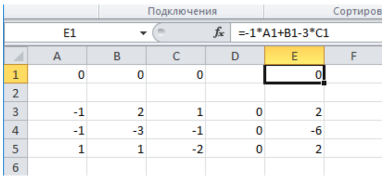


Рис. 6.1

Для удобства преобразуем второе ограничение-неравенство, умножив его на -1 (рис. 6.2).

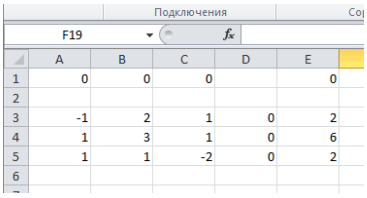


Рис. 6.2

Активизируем ячейку E1 и на вкладке *Данные* вызовем процедуру *Поиск решения*. Выставим следующие параметы.

Оптимизировать целевую функцию - $E$1.

До: *Минимум*.

В графе *Изменяя ячейки переменных* нужно указать адреса ячеек, в которых лежат первоначальные значения переменных x_1, x_2, x_3: *$A$1:$C$1*. Записать ограничения в окно *В соответствии с ограничениями* (рис. 6.3, 6.4).

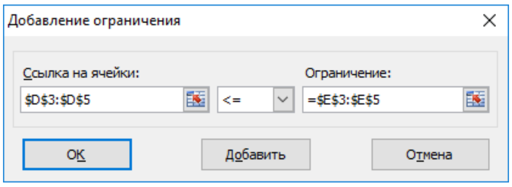


Рис. 6.3

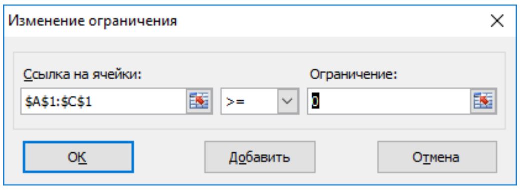


Рис. 6.4

Выбираем *метод решения*: *Поиск решения линейных задач симплекс-методом*, нажимаем кнопку *Найти решение*.

Выбираем опцию *Сохранить найденное решение* и нажимаем *ОК*. На рисунке 6.5 представлено полученное решение: в диапазоне A1:C1 – значения переменных x_1, x_2, x_3 – точка минимума, в ячейке E1 – минимальное значение функции.

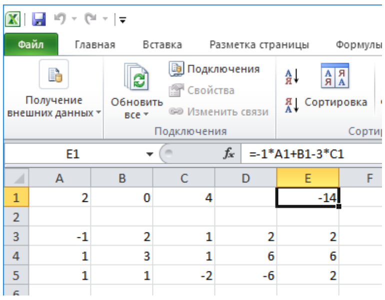


Рис. 6.5

Пример 6.2. Найти минимум функции $F(x) = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10. \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Решение 1. В этой системе базисными будут векторы x_2, x_4, так как они линейно независимы. Выведем эти векторы из целевой функции. Для этого из ограничений выразим x_2, x_4:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - x_1 + x_3 \\ x_4 = 10 + 2x_1 - 5x_3 \end{cases}.$$

Подставив полученные выражения в целевую функцию и выполнив преобразования, получим:

$$F(x) = -2x_1 - 7x_3 \to min.$$

Заменив направление поиска, получим задачу:

$$G(x) = -F(x) = 2x_1 + 7x_3 \to max$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10. \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Составим первую симплекс-таблицу.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	1	1	-1	0	4
x_4	-2	0	5	1	10
G	2	0	7	0	0

В последней строке таблицы найдем самое большое положительное число. Это число 7, которое стоит в третьем столбце. Значит, вводить в новый базис мы будем переменную x_3. Определим, какую переменную будем выводить: для всех $\alpha_{ik} > 0$ $min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}\right\} == \left\{\frac{10}{5}\right\} = 2$ - соответствует переменной x_4.

Теперь следует преобразовать таблицу так, чтобы в разрешающем столбце во второй строке (соответствующей переменной x_4) осталась 1, а в остальных строках этого столбца получились 0. Для этого выполним матричные преобразования:

а) поделим вторую строку на 5;

б) к первой строке прибавим преобразованную вторую;

в) из третьей строки вычтем 7 вторых.

Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0,6	1	0	0,2	6
x_3	-0,4	0	1	0,2	2
G	4,8	0	0	-1,4	-14

В последней строке таблицы найдем самое большое положительное число. Это число 4,8, которое стоит в первом столбце. Значит, вводить в новый базис мы будем переменную x_1. Определим, какую переменную будем выводить: для всех $\alpha_{ik} > 0$ $min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}\right\} = \left\{\frac{6}{0,6}\right\} = 10$ - соответствует переменной x_2.

Теперь следует преобразовать таблицу так, чтобы в разрешающем столбце в первой строке (соответствующей переменной x_1) осталась 1, а в остальных строках этого столбца получились 0. Для этого выполним матричные преобразования:

а) первую строку поделим на 0,6;

б) ко второй прибавим преобразованную первую, умноженную на 0,4;

в) из третьей строки вычтем преобразованную первую, умноженную на 4,8.
Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	10/6	0	2/6	10
x_3	0	4/6	1	1/3	6
G	0	-8	0	-3	-62

Поскольку в последней строке нет положительных элементов, то решение задачи получено.

В итоговой симплексной таблице базисными оказались переменные x_1, x_3. Их значения стоят в столюце b: $x_1 = 10, x_3 = 6$. Число -62, стоящее в последней клетке таблицы, есть значение целевой функции с обратным знаком, т.е. -G(x)=-62. Значит, F(x)=-62.

Ответ: $min\ F(x) = F(10,0,6,0) = -62$. •

*Решение 2***.** Заменим направление поиска, получим задачу:

$$G(x) = +11x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 2x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10. \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Для использования симплексного метода приведем ЗЛП к единичному базису, выразив базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные, получив таким образом, первое допустимое решение. Для этого воспользуемся методом Жордана-Гаусса. Составляем таблицу:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b
	1	1	-1	0	4
	-2	0	5	1	10
G	11	5	-8	-2	

Выберем в качестве базисной переменной x_4. Для этого избавимся от -2 в третьей строке таблицы, прибавив к ней вторую, умноженную на 2. Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b
	1	1	-1	0	4
x_4	-2	0	5	1	10
G	7	5	2	0	20

Выберем в качестве базисной переменной x_2. Для этого избавимся от 5 в третьей строке таблицы, вычтя из нее первую, умноженную на 5. Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	1	1	-1	0	4
x_4	-2	0	0	1	10
G	2	0	7	0	0

Получили первое допустимое решение X_1 = (0,4,0,10). Далее повторяем решение 1. •

Приведем пример реализации алгоритма в Microsoft Excel.

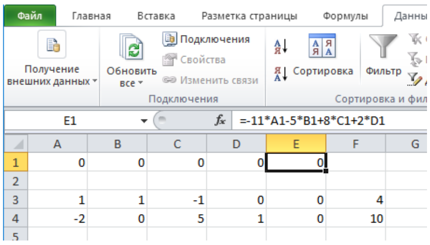
Запишем в ячейки A1:D1 нули – первоначальные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4.

В ячейку E1 введем формулу: *=-11*A1-5*B1+8*C1+2*D1* – значение целевой функции в начальной точке.

Заполним диапазон A3:D4 элементами матрицы ограничений.

В ячейке E1 запишем формулу *=суммпроизв($A$1:$D$1;A3:D3)*, тиражируем ее на строку вниз. Таким образом, в ячейках E3:E4 лежат значения левых частей ограничений в начальной точке.

Запишем в ячейках F3:F4 значения правых частей неравенств-ограничений (рис. 6.6).



	A	B	C	D	E	F	G
1	0	0	0	0	0		
2							
3	1	1	-1	0	0	4	
4	-2	0	5	1	0	10	
5							

Рис. 6.6

Активизируем ячейку E1 и на вкладке *Данные* вызовем процедуру *Поиск решения*. Выставим следующие параметры.

Оптимизировать целевую функцию - $E$1.

До: *Минимум*.

В графе *Изменяя ячейки переменных* нужно указать адреса ячеек, в которых лежат первоначальные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4: *$A$1:$D$1*. Записать ограничения в окно *В соответствии с ограничениями* (рис. 6.7, 6.8).

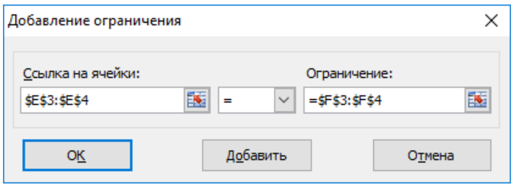


Рис. 6.7

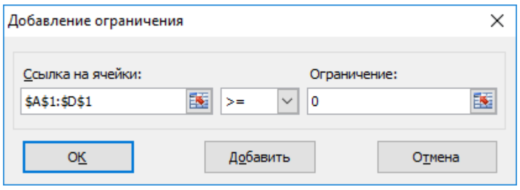
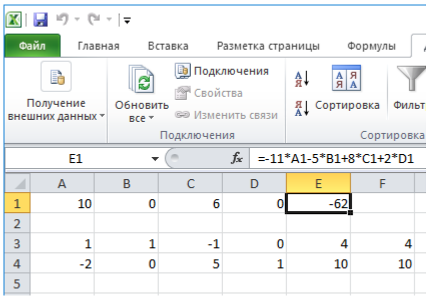


Рис. 6.8

Выбираем *метод решения*: *Поиск решения линейных задач симплекс-методом*, нажимаем кнопку *Найти решение*.

Выбираем опцию *Сохранить найденное решение* и нажимаем *ОК*. На рисунке 6.9 представлено полученное решение: в диапазоне A1:D1 – значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4 – точка минимума, в ячейке E1 – минимальное значение функции.



	A	B	C	D	E	F
1	10	0	6	0	-62	
2						
3	1	1	-1	0	4	4
4	-2	0	5	1	10	10
5						

Рис. 6.9

Пример 6.3. Найти максимум функции

$$F(x) = x_1 - 24x_2 + 12x_3$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 2. \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Сначала приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Для использования симплексного метода приведем ЗЛП к единичному базису, выразив базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные, получив таким образом, первое допустимое решение. Для этого воспользуемся методом Жордана-Гаусса. Составляем таблицу:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	-3	2	1	0	1
	-1	4	-1	0	-1	2
G	1	-24	12	0	0	0

Одна базисная переменная в плане есть – x_4. Выберем в качестве второй базисной переменной x_2. Для того, чтобы обнулить -24 в третьей строке, прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 6. Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	-3	2	1	0	1
	-1	4	-1	0	-1	2
G	-5	0	6	0	-6	12

Теперь во второй строке получим базисную единицы для переменной x_2. Для этого поделим на 4 вторую строку таблицы. Для того, чтобы обнулить -3 в первой строке, прибавим к первой строке измененную вторую, умноженную на 3. Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1/4	0	5/4	1	-3/4	5/2
x_2	-1/4	1	-1/4	0	-1/4	1/2
G	-5	0	6	0	-6	12

Получили первое допустимое решение

$$X_1 = (0,1/2,0,\ 5/2,0),\ F(X_1) = -12.$$

Поскольку в последней строке таблицы есть положительное число (6), наше решение не оптимально. Число 6 соответствует переменной x_3, значит, ее мы будем вводить в новый базис. Так как единственное $\alpha_{ik} = 5/4 > 0$ соответствует переменной x_4, то ее будем выводить.

Теперь следует преобразовать таблицу так, чтобы в разрешающем столбце в первой строке (соответствующей переменной x_4) осталась 1, а в остальных строках этого столбца получились 0. Для этого выполним матричные преобразования:

а) первую строку поделим на 5/4;

б) ко второй прибавим преобразованную первую, умноженную на 1/4;

в) из третьей строки вычтем преобразованную первую, умноженную на 6.

Получим:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	0,2	0	1	0,8	-0,6	2
x_2	-0,2	1	0	0,2	-0,4	1
G	-6,2	0	0	-4,8	-2,4	0

Получили второе допустимое решение.

$$X_2 = (0,1,2,\ 0,0),\ F(X_1) = 0.$$

Поскольку в последней строке нет положительных элементов, то найденное решение оптимально.

Ответ: $max\ F = F(0;1;2) = 0.$•

Задачи

Решить следующие задачи симплексным методом.

1.1. $\mathrm{F(x)} = 2\mathrm{x}_1 - 6\mathrm{x}_2 + 5\mathrm{x}_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}.$$

1.2. $F(x) = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}.$$

1.3. $F(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 + 4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}.$$

1.4. $F(x) = -6x_1 + 3x_2 + 3x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 18 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 \leq -9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}.$$

1.5. $F(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}.$$

1.6. $F(x) = -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$