6. Элементы теории поля

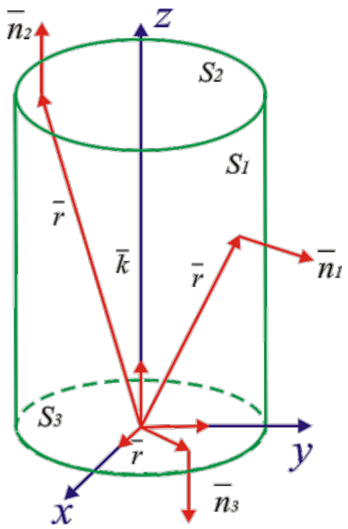
6.3. Дивергенция и ротор векторного поля

Возьмем в векторном поле $\vec{a}(P) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$ некоторую поверхность S и выберем на ней определенную сторону. Нормаль к поверхности в произвольной точке задана направляющими косинусами $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности:

$$K = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma \ .$$

Пример. Найти поток радиус-вектора $\vec{r}$ через боковую поверхность S_1, верхнее основание S_2 и нижнее основание S_3 прямого цилиндра радиуса R и высоты H в направлении внешней нормали.



Решение. Найдем потоки вектора $\vec{r}$ через поверхности $S_1,\ S_2$ и S_3, вычисляя скалярные произведения этого вектора на векторы единичных нормалей к этим поверхностям:

1. $S_1:\ \vec{n}_1 \cdot \vec{r} = \vec{r}_n = R,$

$$K_1 = \iint\limits_{S_1} R d\sigma = R \cdot 2\pi R H = 2\pi R^2 H \ ,$$

2. $S_2:\ \vec{n}_2 = \vec{k}, \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = \vec{r}_n = H,$

$$K_2 = \iint\limits_{S_2} H d\sigma = H \cdot \pi R^2 = \pi R^2 H \ ,$$

3. $S_3:\ \vec{n}_3 = -\vec{k}, \vec{n}_3 \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow K_3 = 0.$

Поток вектора через полную поверхность цилиндра:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = 2\pi R^2 H + \pi R^2 H = 3\pi R^2 H \ .$$

Если поверхность S замкнута и ограничивает некоторую пространственную область V, то в случае, когда берется внешняя нормаль, говорят о потоке изнутри поверхности S:

$$K = \oiint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma \ .$$

Рассмотрим некоторую точку $P(x,y,z)$ векторного поля $\vec{a}(P)$ и окружим ее замкнутой поверхностью S, целиком содержащейся в поле.

Предел отношения потока вектора $\vec{a}(P)$ через замкнутую поверхность S к объему V, ограниченному этой поверхностью, при ус… ?…ии, что вся поверхность стягивается в точку P, называется **дивергенцией** или **расходимостью**, векторного поля:

$$\mathrm{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}\cdot\vec{n}d\sigma}{V} \ .$$

Дивергенция характеризует мощность источника или стока поля в точке P и является скалярной величиной.

По формуле Остроградского:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}\cdot\vec{n}d\sigma = \oint\!\!\!\oint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV \ .$$

Тройной интеграл в правой части представим с помощью теоремы о среднем:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV = \left.\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\right|_{P_1} \cdot V \ , \qquad \text{где} \ \ P_1 \in V \ .$$

Если область V стягивается в точку P, то $P_1 > P$ и

$$\mathrm{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0} \frac{\left.\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\right|_{P_1} \cdot V}{V} = \lim_{P_1\to P} \left.\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\right|_{P_1} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \ .$$

Таким образом, дивергенция векторного поля выражается формулой:

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \ .$$

Пользуясь этим выражением, запишем теорему Остроградского в векторной форме:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}(P)\cdot\vec{n}d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}dV \ ,$$

то есть поток вектора изнутри замкнутой поверхности S равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

В поле текущей жидкости поток жидкости через поверхность равен суммарной мощности источников и стоков, расположенных внутри этой поверхности.

Возьмем в векторном поле:

$$\vec{a}(P) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

некоторую замкнутую линию L и выберем на ней определенное направление. Обозначим через $d\vec{s}$ вектор, имеющий направление касательной к линии и по модулю равный дифференциалу длины дуги:

$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \ .$$

Циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L называется криволинейный интеграл по этому контуру от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $d\vec{s}$ касательной к контуру

$$\Gamma = \oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s} = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz \ .$$

Если $\vec{a}(P)$ – поле скоростей текущей жидкости, то физический смысл циркуляции можно пояснить следующим примером. Пусть L – окружность, расположенная в некоторой плоскости, которую будем рассматривать как периферию колесика с радиальными лопатками, которое может вращаться относительно оси, перпендикулярной его плоскости. Если $\Gamma = 0$, то колесико в таком потоке остается неподвижным. Если $\Gamma \neq 0$, то колесико будет вращаться тем быстрее, чем больше величина циркуляции. Таким образом, циркуляция характеризует вращательные свойства векторного поля.

Рассмотрим точку $P(x,y,z)$ векторного поля $\vec{a}$, окружим ее плоским контуром L, ограничивающим область S. Вращательные свойства поля в точке будем характеризовать пределом отношения циркуляции $\vec{a}$ по контуру L к площади S, когда контур стягивается в точку P

$$\lim_{S\to 0} \frac{\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s}}{S} \ .$$

?

С помощью теоремы Стокса найдем

$$\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{s} = \oint\limits_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma\ .$$

Последний интеграл можно вычислить по теореме о среднем в точке P_1, которая стремится к P при стягивании контура L в точку. Тогда

$$\lim_{P_1\to P} \frac{\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{s}}{S} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\ .$$

Ротором (вихрем) векторного поля называется вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\ .$$

Проекция этого вектора на любое направление $\vec{n}$ дает:

$$\lim_{P_1\to P} \frac{\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{s}}{S}\ .$$

Этот предел будет наибольшим, если направление нормали $\vec{n}$ совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$.

С помощью определения ротора можно записать теорему Стокса в векторной форме:

$$\iint\limits_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\cdot\vec{n}d\sigma = \oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{s}\ ,$$

то есть поток ротора поля через поверхность S равен циркуляции вектора по границе этой поверхности.