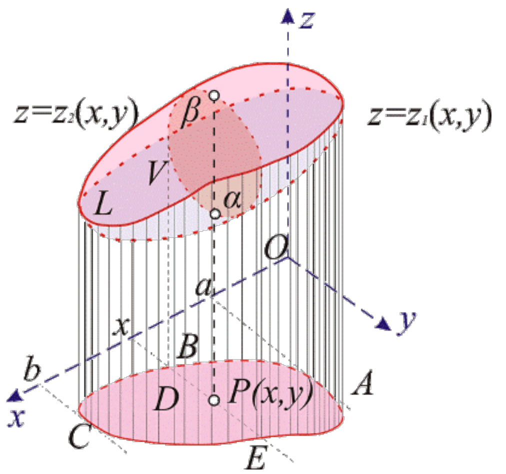
1. Кратные интегралы

1.5. Вычисление тройных интегралов

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к вычислению повторного интеграла.

Опишем около тела V цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Oz. Она касается тела V вдоль некоторой линии L, которая делит поверхность этого тела на две части: нижнюю с уравнением $z = z_1(x, y)$ и верхнюю с уравнением $z = z_2(x, y)$. Построенная цилиндрическая поверхность высекает на плоскости Oxy область D, которая является ортогональной проекцией тела V в плоскость Oxy, а линия L проектируется в границу области D.

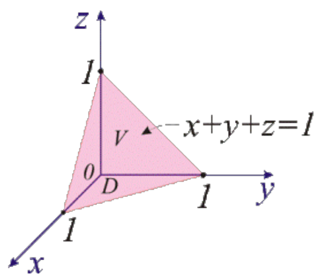


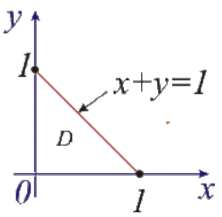
Вычисление тройного интеграла сводится к трем последовательным интегрированиям по переменным $z,\ y,\ x$:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \tag{8}$$

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \dfrac{dV}{(x+y+z+1)^3}$ по области V, ограниченной поверхностями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1.$

Решение. Заданное тело ограничено координатными плоскостями и наклонной плоскостью:





$$\iiint\limits_V \frac{dV}{(x+y+z+1)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[\frac{1}{-2(x+y+z+1)^2}\right]_0^{1-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2}\right) dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{y}{4} + \frac{1}{x+y+1}\right]_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{x}{2} - \ln|1+x|\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{8} + \ln 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} - \ln 2\right)\,.$$

?