6. Элементы теории поля

6.1. Скалярное поле. Поверхности уровня. Градиент

Пусть в каждой точке $P(x,y,z)$ области D задано значение некоторой скалярной физической величины, т.е. величины, характеризующейся только своим числовым значением. Такую величину называют скалярной функцией точки $u(P)$ и говорят, что в области D задано скалярное поле $u(P)$ или $u(x,y,z)$.

Примерами скалярных полей являются: температурное поле в неравномерно нагретом теле, плотность распределения электрических зарядов в наэлектризованном изолированном теле и т.д.

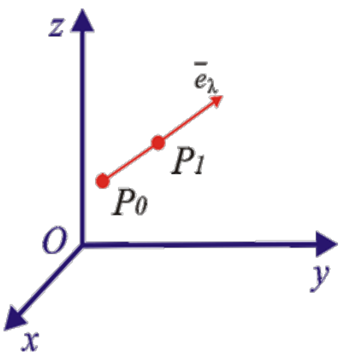
Скалярное поле называют стационарным, если величина $u(P)$ не зависит от времени t, и нестационарным, когда $u(P,t)$.

Поверхностью уровня скалярного поля называется **геометрическое место точек**, в которых функция $u(x,y,z)$ принимает постоянное значение, т.е.

$$u(x,y,z) = C\ .$$

В физике такие поверхности называют **эквипотенциальными поверхностями**.

Если скалярное поле плоское, то геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $u(x,y)=C$, называют **линиями уровня** функции $u(x,y)$ (изотермы, изобары).



Важной характеристикой скалярного поля является скорость изменения поля в заданном направлении, которая определяется как производная функции по направлению луча l:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \lim_{P_1 \to P_0} \frac{u(P_1)-u(P_0)}{P_1P_0}\ ,$$

$$u'_\lambda = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ .$$

Здесь $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы луча l.

Вектор, проекциями которого служат значения частных производных от функции $u(x,y,z)$, называют **градиентом функции** и обозначают

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Тогда производную по направлению можно представить как скалярное произведение градиента функции на единичный вектор $\vec{e}_\lambda$ этого направления

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u \cdot \vec{e}_\lambda$$

и рассматривать ее как проекцию вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$ на направление луча l.

Модуль вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$ равен наибольшему возможному значению производной $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, а направление этого вектора характеризует направление наискорейшего возрастания функции, поскольку скалярное произведение векторов является наибольшим, если эти векторы имеют одинаковое направление. Таким образом, градиентом скалярной величины u называется вектор, который по численному значению и по направлению характеризует наибольшую скорость изменения величины u.

Направление градиента функции $u(x, y, z)$ совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

◄ Вопросы преподавателю

Перейти на...

8. Теория вероятностей и математическая статистика ►

?