МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Тульский государственный университет»

Интернет-институт

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Математика»

Семестр 3

Вариант 3

Выполнил: студент гр. ИБ262521-ф

Артемов Александр Евгеньевич

Проверил: д.ф.-м.н., проф. Христич Д.В.

Тула 2023

1. Определить тип и решить дифференциальное уравнение: $(x+4)dy-xydx=0$

Решение:

$(x+4)dy-xydx=0$, разделим на $(x+4)y\neq0$

$\frac{dy}{y}-\frac{xdx}{x+4}=0$ - дифференциальное уравнение **(ДУ) с разделяющимися переменными**.

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{xdx}{x+4}=lnC$$

$$\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+C$$

$$\int\frac{xdx}{x+4}=\int(\frac{x+4-4}{x+4})dx=\int dx-4\int\frac{d(x+4)}{x+4}=x-4\ln|x+4|+C$$

$$\ln|y|-x+4\ln|x+4|=lnC$$

$$\ln\left|y(x+4)^4\right|-\ln e^x=lnC$$

$$\ln\left|\frac{y(x+4)^4}{e^x}\right|=lnC$$

$$\frac{y(x+4)^4}{e^x}=C$$

$$y=\frac{Ce^x}{(x+4)^4}$$

Рассмотрим случай, где $(x+4)y=0$, следовательно, $y=0$ или $(x+4)=0$.

При $(x+4)=0$ решения не существует, так как $(x+4)$ находится в знаменателе решения.

При $y=0$: $\frac{Ce^x}{(x+4)^4}=0$, $Ce^x=0$, $e^x>0$ всегда, значит $C=0$.

Таким образом, $y=0$ входит в решение при $C=0$.

Ответ: ДУ с разделяющимися переменными, $y=\frac{Ce^x}{(x+4)^4}$ **,** $y=0$ при $C=0$.

2. Определить тип и решить дифференциальное уравнение: $(y+\sqrt{xy})dx = xdy$

Решение:

$$(y+\sqrt{xy})dx = xdy$$

$ydx+\sqrt{xy}\,dx = xdy$, разделим на $x\neq 0$

$$\frac{y}{x}dx+\frac{\sqrt{xy}}{x}dx = dy$$

$$(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}})dx = dy$$

$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} = y'$ - **однородное ДУ** $y' = \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ (1)

Пусть $U = \frac{y}{x}$, откуда $y = Ux$. Продифференцируем левую и правую части по x:

$y' = U'x+U$. Приравняем к (1):

$U'x+U = \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$. Заменим $\frac{y}{x}$ на U :

$U'x+U = U+\sqrt{U}$, откуда $U'x = \sqrt{U}$. Представим U' как $\frac{dU}{dx}$:

$x\frac{dU}{dx} = \sqrt{U}$ - умножим обе части на dx :

$xdU = \sqrt{U}\,dx \Rightarrow xdU-\sqrt{U}\,dx = 0$ - разделим обе части на $x\sqrt{U}\neq 0$ (1):

$\frac{dU}{\sqrt{U}}-\frac{dx}{x} = 0$ - интегрируем обе части:

$\int\frac{dU}{\sqrt{U}}-\int\frac{dx}{x} = C \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{U}-\ln|x| = C$. Выполним обратную подстановку:

$2\sqrt{\frac{y}{x}}-\ln|x| = C \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln|x|+C$. Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{4y}{x} = \ln^2|x|+2C\ln|x|+C^2 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{x(\ln^2|x|+2C\ln|x|+C^2)}{4} \quad (2)$$

При делении (1) потеряны решения $y = 0$ и $x = 0$, так как обе переменные оказываются в знаменателе, однако при подстановке в решение (2) дают верное тождество.

Ответ: однородное ДУ, $y = \frac{x(\ln^2|x|+2C\ln|x|+C^2)}{4}$, $y = 0$, $x = 0$.

3. Определить тип и решить дифференциальное уравнение:

$$(10xy - \frac{1}{\sin y})dx + (5x^2 + \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3)dy = 0 \quad (1)$$

Решение:

Пусть $P(x,y) = 10xy - \frac{1}{\sin y}$, а $Q(x,y) = 5x^2 + \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3$.

Тогда ДУ примет вид: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то ДУ (1) является **ДУ в полных дифференциалах.**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (10xy - \frac{1}{\sin y})'_y = 10x + \frac{\cos y}{\sin^2 y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (5x^2 + \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3)'_x = 10x + \frac{\cos y}{\sin^2 y}$$

Возьмем $M(x_0, y_0)$ из области определения $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, например, $x_0 = 0$ и $y_0 = \frac{\pi}{2}$, тогда $\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$. Рассмотрим по частям:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx = \int_{0}^{x} (10x\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}})dx = \int_{0}^{x} (5\pi x - 1)dx = \frac{5\pi x^2}{2} - x\Big|_0^x = \frac{5\pi x^2}{2} - x$$

$\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} (5x^2 + \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3)dy$ - рассмотрим интеграл по частям:

$$\int \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} dy = x \int \frac{d(\sin y)}{\sin^2 y} = x\frac{\sin^{-1} y}{-1} = -\frac{x}{\sin y} + C$$

$$\int y^2 \sin y^3 dy = \frac{1}{3}\int \sin y^3 d(y^3) = -\frac{1}{3}\cos y^3 + C$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{y} (5x^2 + \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3)dy = 5x^2 y - \frac{x}{\sin y} + \frac{\cos y^3}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{y} = 5x^2 y - \frac{x}{\sin y} + \frac{\cos y^3}{3} - (\frac{5\pi x^2}{2} - x + \frac{\cos(\frac{\pi^3}{8})}{3})$$

$$\int_{0}^{x} (5\pi x - 1)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} (5x^2 + \frac{x \cdot \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3)dy =$$

$$= \frac{5\pi x^2}{2} - x + 5x^2 y - \frac{x}{\sin y} + \frac{\cos y^3}{3} - (\frac{5\pi x^2}{2} - x + \frac{\cos(\frac{\pi^3}{8})}{3}) = 5x^2 y - \frac{x}{\sin y} + \frac{\cos y^3}{3} + 0{,}247 = C$$

$$5x^2 y - \frac{x}{\sin y} + \frac{\cos y^3}{3} = C - 0{,}247 = C$$

Ответ: ДУ в полных дифференциалах, $5x^2 y - \frac{x}{\sin y} + \frac{\cos y^3}{3} = C$

4. Найти решение задачи Коши: $8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3$, $y(1)=\sqrt{2}$

Решение:

$8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3$ - разделим обе части на $8x$

$$y'-\frac{3y}{2x}=-\frac{(5x^2+3)y^3}{8x}$$

Пусть $P(x)=-\frac{3y}{2x}$, $Q(x)=-\frac{(5x^2+3)}{8x}$ и $\alpha=3$, тогда ДУ примет вид:

(1) $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ - **уравнение Бернулли.**

Пусть $Z=y^{1-\alpha}$, тогда $Z=y^{1-3}=\frac{1}{y^2}$, откуда $y^2=\frac{1}{Z}$.

$$Z'=(y^{1-\alpha})'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'$$

Умножим (1) на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'+(1-\alpha)P(x)y^{1-\alpha}=(1-\alpha)Q(x) \quad .$$

Выполним замену $Z=y^{1-\alpha}$ и $Z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'$:

$$Z'+(1-\alpha)P(x)Z=(1-\alpha)Q(x) \quad .$$

Выполним замену $P(x)=-\frac{3y}{2x}$, $Q(x)=-\frac{(5x^2+3)}{8x}$ и $\alpha=3$:

$$Z'+(1-3)(-\frac{3y}{2x})Z=(1-3)(-\frac{(5x^2+3)}{8x})$$

$Z'+(\frac{3}{x})Z=\frac{(5x^2+3)}{4x}$ - линейное ДУ 1-го порядка.

Выполним подстановку: $Z=U\cdot V \quad \Rightarrow \quad Z'=U'\cdot V+U\cdot V'$

$$U'\cdot V+U\cdot V'+(\frac{3}{x})U\cdot V=\frac{(5x^2+3)}{4x} \quad \Rightarrow \quad U'\cdot V+U(V'+(\frac{3}{x})V)=\frac{(5x^2+3)}{4x}$$

Пусть $V'+(\frac{3}{x})V=0$, тогда $\frac{dV}{dx}+\frac{3V}{x}=0$ - умножим на $\frac{dx}{V}$:

$\frac{dV}{V}+\frac{3dx}{x}=0$ - интегрируем: $\int\frac{dV}{V}+\int\frac{3dx}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dV}{V}=-\int\frac{3dx}{x} \quad \Rightarrow$

$$\ln|V|=-3\ln|x| \quad \Rightarrow \quad V=x^{-3} \ .$$

Если $V'+(\frac{3}{x})V=0$, то $U'\cdot V=\frac{(5x^2+3)}{4x} \quad \Rightarrow \quad U'x^{-3}=\frac{(5x^2+3)}{4x} \quad \Rightarrow \quad U'=\frac{5}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2$

$$U=\int(\frac{5}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2)dx=\frac{x^5}{4}+\frac{x^3}{4}+C$$

$$Z=U\cdot V=(\frac{x^5}{4}+\frac{x^3}{4}+C)\cdot x^{-3}=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{C}{x^3}$$

$$y^2 = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{C}{x^3}}$$

При $y(1) = \sqrt{2}$ получаем $(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + C}$ $\Rightarrow$ $C = 0$

При $C = 0$ $y^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

Ответ: $y^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

5. Найти решение задачи Коши: $y'''+3y''+2y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=2$

Решение:

$y'''+3y''+2y'=0$

Характеристическое уравнение (ХУ): $\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+3\lambda+2)=0$

$\lambda_1=0$ (1-ой кратности) $\Rightarrow$ $y=e^{\lambda x}=e^0=1$.

Решим квадратное уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$:

$D=9-4\cdot1\cdot2=9-8=1$

$\lambda_2=\dfrac{-3+1}{2}=-1$, $\lambda_3=\dfrac{-3-1}{2}=-2$

Общее решение $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}$

Найдем производные 1-го и 2-го порядков от общего решения:

$y'=-C_2e^{-x}-2C_3e^{-2x}$

$y''=C_2e^{-x}+4C_3e^{-2x}$

Составим систему уравнений из общего решения и его производных 1-го и 2-го порядков, подставив $x=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=2$ из условия:

$$\begin{cases}0=C_1+C_2+C_3\\0=-C_2-2C_3\\2=C_2+4C_3\end{cases}\quad\begin{cases}0=C_1+C_2+C_3\\C_2=-2C_3\\2=-2C_3+4C_3\end{cases}\quad\begin{cases}0=C_1-2+1\\C_2=-2\\C_3=1\end{cases}\quad\begin{cases}C_1=1\\C_2=-2\\C_3=1\end{cases}$$

Подставим константы в общее решение:

$y=C-2e^{-x}+e^{-2x}$

Ответ: $y=C-2e^{-x}+e^{-2x}$

6. Запишите вид частного решения уравнения $y''+2y'+y=f(x)$ если:

1) $f(x)=\cos x$ 2) $f(x)=e^{-x}\sin x$ 3) $f(x)=e^{-x}(x-5)$ 4) $f(x)=e^{x}$ 5) $f(x)=x^2$

Решение:

Решим однородное ДУ $y''+2y'+y=0$

ХУ: $\lambda^2+2\lambda+1=0$ - кратность $k=2$, $D=4-4\cdot1\cdot1=0$, $\lambda=\dfrac{-2}{2}=-1$

Общее решение $\widetilde{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

1) $f(x)=\cos x$

$y*=A\cdot\cos x+B\cdot\sin x$, $y*'=-A\cdot\sin x+B\cdot\cos x$, $y*''=-A\cdot\cos x-B\cdot\sin x$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$-A\cdot\cos x-B\cdot\sin x-2A\cdot\sin x+2B\cdot\cos x+A\cdot\cos x+B\cdot\sin x=\cos x$

$2B\cdot\cos x-2A\cdot\sin x=\cos x$

Сравнив коэффициенты перед косинусом и и синусом в левой и правой частях получим:

$\begin{cases}2B=1\\-2A=0\end{cases}\quad\begin{cases}B=1/2\\A=0\end{cases}$

Подставив A и B в $y*=A\cdot\cos x+B\cdot\sin x$ получим $\boldsymbol{y*=\dfrac{\sin x}{2}}$.

2) $f(x)=e^{-x}\sin x$

$y*=x^k e^{mx}(A\cdot\cos nx+B\cdot\sin nx)$, $m=-1$, $n=1$: $m\pm ni=i-1\neq-1\ \Rightarrow\ k=0$

$y*=e^{-x}(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)$

$y*'=-e^{-x}(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)+e^{-x}(-A\cdot\sin x+B\cdot\cos x)=e^{-x}((B-A)\cos x-(A+B)\sin x)$

$y*''=-e^{-x}((B-A)\cos x-(A+B)\sin x)+e^{-x}((A-B)\sin x-(A+B)\cos x)=$

$=e^{-x}(2A\sin x-2B\cos x)$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$e^{-x}(2A\sin x-2B\cos x)+2e^{-x}((B-A)\cos x-(A+B)\sin x)+e^{-x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-x}\sin x$

$-A\cos x-B\sin x=\sin x$

Сравнив коэффициенты перед косинусом и и синусом в левой и правой частях получим:

$\begin{cases}-B=1\\-A=0\end{cases}\quad\begin{cases}B=-1\\A=0\end{cases}$

Подставив A и B в $y*=e^{-x}(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)$ получим $\boldsymbol{y*=e^{-x}(-\sin x)}$.

3) $f(x)=e^{-x}(x-5)$

$y*=x^k e^{mx}(Ax+B)$, $m=-1$, $n=0$: $m\pm ni=-1=\lambda\ \Rightarrow\ k=2$ - кратность ХУ:

$y*=x^2e^{-x}(Ax+B)=\dfrac{x^2(Ax+B)}{e^x}$

$$y*' = \frac{(2x(Ax+B)+Ax^2)e^x - e^x x^2(Ax+B)}{e^{2x}} = \frac{-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx}{e^x}$$

$$y*'' = \frac{(-3Ax^2+2(3A-B)x+2B)e^x - e^x(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{3Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B}{e^x}$$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$$\frac{3Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B+2(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)+x^2(Ax+B)}{e^x} = e^{-x}(x-5)$$

$$3Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B+2(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)+x^2(Ax+B) = x-5$$

$$6Ax+2B = x-5$$

Сравнив коэффициенты в левой и правой частях получим:

$$\begin{cases} 6A=1 \\ 2B=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/6 \\ B=-5/2 \end{cases}$$

Подставив A и B в $y* = \frac{x^2(Ax+B)}{e^x}$ получим $\boldsymbol{y* = \frac{x^2(\frac{x}{6}-\frac{5}{2})}{e^x}}$.

4) $f(x) = e^x$

$y* = x^k e^{mx}(Bx+A)$, $m=1$, $n=0$, $B=0$: $m \pm ni = 1 \neq \lambda \Rightarrow k=0$:

$y* = Ae^x$, $y*' = Ae^x$, $y*'' = Ae^x$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$$Ae^x+2Ae^x+Ae^x = e^x$$

$$4A=1 \qquad A=\frac{1}{4}$$

Подставив A в $y* = Ae^x$ получим $\boldsymbol{y* = \frac{e^x}{4}}$

5) $f(x) = x^2$

$y* = x^k e^{mx}(Ax^2+Bx+C)$, $m=0$, $n=0$: $m \pm ni = 0 \neq \lambda \Rightarrow k=0$:

$y* = Ax^2+Bx+C$, $y*' = 2Ax+B$, $y*'' = 2A$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y : $2A+2(2Ax+B)+Ax^2+Bx+C = x^2$

$$Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B+C) = x^2$$

Сравнив коэффициенты в левой и правой частях получим:

$$\begin{cases} A=1 \\ 4A+B=0 \\ 2A+2B+C=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-4 \\ C=6 \end{cases}$$

Подставив A, B и C в $y* = Ax^2+Bx+C$ получим $\boldsymbol{y* = x^2-4x+6}$.

Ответ: 1) $y* = \frac{\sin x}{2}$; 2) $y* = e^{-x}(-\sin x)$; 3) $y* = \frac{x^2(\frac{x}{6} - \frac{5}{2})}{e^x}$;

4) $y* = \frac{e^x}{4}$; 5) $y* = x^2 - 4x + 6$.

7. Найти общее решение уравнения: $y''-10y'+25y=e^{5x}$.

Решение:

Общее решение ДУ: $y=\tilde{y}+y*$

Решим однородное ДУ $y''-10y'+25y=0$

ХУ: $\lambda^2-10\lambda+25=0$ - кратность $k=2$, $D=100-4\cdot1\cdot25=0$, $\lambda=-\frac{-10}{2}=5$

Общее решение однородного ДУ $\boldsymbol{\tilde{y}=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}}$

Найдем частное решение:

$y*=x^k e^{mx}(Bx+A)$, $m=5$, $n=0$, $B=0$: $m\pm ni=5=\lambda \Rightarrow k=2$: - кратность ХУ:

$y*=Ax^2e^{5x}$

$y*'=2Axe^{5x}+5Ax^2e^{5x}=e^{5x}(5Ax^2+2Ax)$

$y*''=5e^{5x}(5Ax^2+2Ax)+e^{5x}(10Ax+2A)=e^{5x}(25Ax^2+20Ax+2A)$

Подставим производные в исходное ДУ вместо y :

$y''-10y'+25y=e^{5x}(25Ax^2+20Ax+2A)-10e^{5x}(5Ax^2+2Ax)+25Ax^2e^{5x}=e^{5x}$

$2Ae^{5x}=e^{5x}$, $2A=1$, $A=1/2$

$$\boldsymbol{y*=\frac{x^2e^{5x}}{2}}$$

$$\boldsymbol{y=\tilde{y}+y*=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}+\frac{x^2e^{5x}}{2}}$$

Ответ: $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}+\frac{x^2e^{5x}}{2}$ **.**

8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Решение:

$y' = x \quad \Rightarrow \quad x = y'$ - дифференцируем обе части:

$x' = y'' \quad \Rightarrow \quad y = y'' \quad \Rightarrow \quad y'' - y = 0$

ХУ: $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, кратность $k = 1$

$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$

Так как $x = y'$, находим $x = y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$.

$$\begin{cases} x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases}$.

9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\frac{\pi}{3^n}$.

Решение:

Применим принцип Д’Аламбера, для это вычислим $q=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot tg\frac{\pi}{3^{n+1}}}{(2n+1)\cdot tg\frac{\pi}{3^n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot tg\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2n\cdot tg\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{3^{n+1}}}{tg\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\frac{\pi}{3^n}$ является сходящимся.

Ответ: является сходящимся.

10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2})^n$.

Решение:

Применим радикальный принцип Коши, для это вычислим $q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2})^n}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1$ - ряд сходится.

Ответ: является сходящимся.

11. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

Решение:

Рассмотрим $|U_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}\right| = \frac{1}{\ln n}$:

если $\ln n < n$, тогда $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ так же расходится, согласно признака сравнения. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$ не обладает абсолютной сходимостью.

Рассмотрим знакочередующийся ряд $U_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$:

1) элементы ряда: $\infty > \frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \dots$;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$.

Следовательно, согласно признака Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$ обладает условной сходимостью.

Ответ: не сходится абсолютно, сходится условно.

12. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

Решение:

Согласно признака Д'Аламбера $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| < 1$, откуда $|x| < \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$.

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left| \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{(n+1)}} \right|} \quad \Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{2n+2} \right|} \quad \Rightarrow \quad |x| < 2$$

Проверим граничные значения:

$x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - ряд расходится, значит, $x = 2$ не входит в область сходимости;

$x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1^n) 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1^n)}{n}$ - ряд сходится, значит, $x = -2$ входит в область сходимости.

Ответ: $[-2; 2)$

13. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \sin x^2$.

Решение:

Ряд Маклорена:

$$y=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Пусть $x_0=0$.

$y(0)=0$

$y' = 2x\cdot\cos x^2$ $\qquad$ $y'(0)=0$

$y'' = 2\cdot\cos x^2-4x^2\cdot\sin x^2$ $\qquad$ $y''(0)=2$

$y''' = -12\cdot\sin x^2-8x^3\cdot\cos x^2$ $\qquad$ $y'''(0)=0$

$y^{(4)} = 16x^4\cdot\sin x^2-12\sin x^2-48x^2\cdot\cos x^2$ $\qquad$ $y^{(4)}(0)=0$

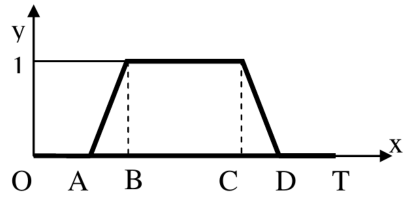
$y^{(5)} = 160x^3\cdot\sin x^2+(32x^5-120x)\cos x^2$ $\qquad$ $y^{(5)}(0)=0$

$y^{(6)} = (720x^2-64x^6)\sin x^2+480x^2\cdot\cos x^2-120\cos x^2$ $\qquad$ $y^{(6)}(0)=-120$

$$\sin x^2 = \frac{2x^2}{2!}-\frac{120x^6}{6!}+\ldots = x^2-\frac{x^6}{6}+\ldots+\frac{(-1)^n(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Ответ: $\sin x^2 = x^2-\frac{x^6}{6}+\ldots+\frac{(-1)^n(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$

14. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на полупериоде $[0;T]$ графиком, приведенном на рисунке, если даны значения $A=1$, $B=1{,}5$, $C=2{,}5$, $D=3$, $T=4$, и функция нечетная. Построить графики первых трех гармонических приближений функции.



Решение:

Представим функцию как $\begin{cases} 0,\ 0\le x<1 \\ 2x-2,\ 1\le x<1{,}5 \\ 1,\ 1{,}5\le x<2{,}5 \\ 6-2x,\ 2{,}5\le x<3 \\ 0,\ 3\le x\le 4 \end{cases}$

$L=4$

Так как функция нечетная, то $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\frac{\pi n x}{L}$, где $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}dx$.

$$b_n=\frac{1}{2}\left(0+\int_1^{1,5}(2x-2)\sin\frac{\pi n x}{4}dx+\int_{1,5}^{2,5}\sin\frac{\pi n x}{4}dx+\int_{2,5}^{3}(6-2x)\sin\frac{\pi n x}{4}dx+0\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{32\sin\frac{3\pi n}{8}}{\pi^2 n^2}-\frac{4\cos\frac{3\pi n}{8}}{\pi n}-\frac{32\sin\frac{\pi n}{4}}{\pi^2 n^2}-\frac{32\sin\frac{3\pi n}{4}}{\pi^2 n^2}+\frac{32\sin\frac{5\pi n}{8}}{\pi^2 n^2}+\frac{4\cos\frac{5\pi n}{8}}{\pi n}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{4\cos\frac{3\pi n}{8}}{\pi n}-\frac{4\cos\frac{5\pi n}{8}}{\pi n}\right)=\frac{16}{\pi^2 n^2}\left(\sin\frac{5\pi n}{8}+\sin\frac{3\pi n}{8}-\sin\frac{3\pi n}{4}-\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

$n=1$: $f_1(x)=\frac{16}{\pi^2}\left(\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi x}{4}$

$n=2$: $f_2(x)=\frac{4}{\pi^2}(0)\sin\frac{\pi x}{2}=0$

$n=3$: $f_3(x)=\frac{16}{9\pi^2}\left(\sin\frac{15\pi}{8}+\sin\frac{9\pi}{8}-\sin\frac{9\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}\right)\sin\frac{3\pi x}{4}$

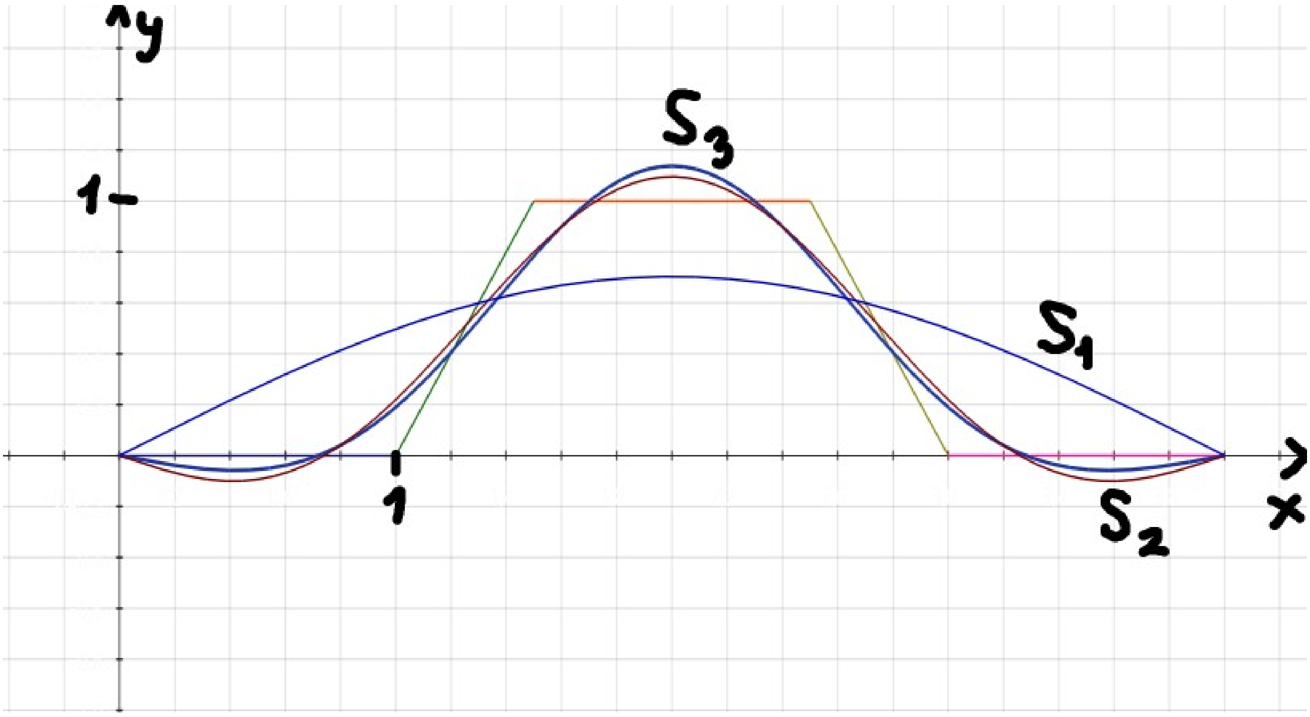
$n=4$: $f_4(x)=\frac{1}{\pi^2}(0)\sin\pi x=0$

$n=5$: $f_5(x)=\frac{16}{25\pi^2}\left(\sin\frac{25\pi}{8}+\sin\frac{15\pi}{8}-\sin\frac{15\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}\right)\sin\frac{5\pi x}{4}$

$S_1(x)=f_1(x)$

$S_2(x)=f_1(x)+f_3(x)$

$S_3(x)=f_1(x)+f_3(x)+f_5(x)$



y
1
1
x
S3
S1
S2