Probabilités
L2 M/MI/MP
2025 – 2026

Livret d'exercices

1 Dénombrement

Exercice 1. Combien de nombres distincts à 4 chiffres peut-on former en utilisant les chiffres 2, 4, 5, 7, 8 ? Même question avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4 (attention : un nombre à 4 chiffres ne peut pas commencer par zéro).

Exercice 2. Un groupe de n amis ($n \geq 2$) décident de trinquer au nouvel an. Si chacun trinque une fois avec tous les autres, combien de tintements de verres y a-t-il eu ?

Exercice 3. Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de façon de choisir 3 cartes qui soient :

1. des as ?

2. de même hauteur ?

3. des cœurs ?

4. de hauteurs deux à deux différentes ?

Exercice 4. Un gang de 5 voleurs a dérobé 3 diamants. Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre de partages possibles du butin.

1. Les diamants sont différents et attribués à 3 voleurs différents.

2. Les diamants sont différents et chaque voleur peut en recevoir plusieurs (ou zéro).

3. Les diamants sont identiques et attribués à 3 voleurs différents.

4. Les diamants sont identiques et chaque voleur peut en recevoir plusieurs (ou zéro).

Exercice 5. On considère un cadenas à 5 roues comportant chacune les chiffres de 0 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien y a-t-il de codes comportant exactement 3 fois le chiffres 8 ?

3. Combien y a-t-il de combinaisons contenant au moins une fois le chiffre 8 ?

Exercice 6. À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis, qui contiennent autant de filles que de garçons.

Exercice 7. On considère un jeu de 52 cartes. Compter le nombre de mains de 5 cartes qui sont :

1. une quinte flush.

2. un carré.

3. un full.

4. une couleur.

5. une suite.

6. un brelan.

7. une double paire.

8. une paire.

9. une carte simple.

Attention : une couleur ne doit pas être une quinte flush, un brelan ne doit pas être un carré, etc.

Exercice 8.

1. Combien y a-t-il d'applications injectives de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,m\}$?

2. Combien y a-t-il d'application strictement croissante de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,m\}$?

3. Combien y a-t-il d'application surjective de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}$?

Exercice 9. Sur un quadrillage $[\![0,n]\!]^2$, on s'intéresse aux chemins allant de $(0,0)$ à (n,n) tels qu'à chaque étape, le chemin se déplace d'une unité vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de tels chemins ?
2. Combien y a-t-il de tels chemins passant par le point $(k,n-k)$, où $k\in[\![0,n]\!]$?
3. En déduire que $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Exercice 10. Soit $S_{m,n}$ l'ensemble des surjections de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note A_i l'ensemble des applications de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ pour lesquelles i n'a pas d'antécédent.

1. Exprimer $S_{m,n}$ en fonction des A_i.
2. Calculer $\mathrm{Card}(A_i)$.
3. Soit $k\in\{1,\dots,m\}$. Montrer que pour tous $i_1,\dots,i_k$ distincts, $\mathrm{Card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=(n-k)^m$.
4. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathrm{Card}(S_{m,n})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m.$$

Exercice 11. Soient $n,p\in\mathbb{N}$ avec $p\leq n$.

1. Montrer que $\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}$.
2. En déduire que $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 12. Soient $n,p\in\mathbb{N}$ avec $p\leq n$.

1. Soit $k\in[\![0,p]\!]$. Montrer par un argument combinatoire que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}$.

Exercice 13. Soit E un ensemble à n éléments.

1. Rappeler le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.
2. Rappeler le cardinal de $\mathscr{P}_k(E)$, l'ensemble des parties de E à k éléments.
3. Montrer que le cardinal de $\left\{(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2\;\middle|\;A\subset B\right\}$ est 3^n.
   Indication : pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on pourra dénombrer les $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$ tels que $A\subset B$ et $\#B=k$.

Exercice 14. À l'aide de la fonction $f\colon x\mapsto(1+x)^n$, calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
2. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.
3. $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.
4. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 15. Soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont $a_{i,j}=\binom{i-1}{j-1}$ si $i\geq j$ et 0 sinon. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré $n-1$ à coefficients réels et on note $\mathscr{B}=(X^0,X^1,X^2,\dots,X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit f l'endomorphisme :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X]\\ P(X) & \longmapsto & P(X+1).\end{array}$$

1. Montrer que f est bijective et donner son inverse f^{-1}.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Déduire des questions précédentes que A est inversible et expliciter son inverse A^{-1}.
4. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : pour tous $(x_0,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ et $(y_0,\dots,y_{n-1})\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ y_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_i\quad\Longleftrightarrow\quad\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ x_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_i.$$

5. Application : dénombrement du nombre $s_{m,n}$ de surjections de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, où $m\geq n$.
   a. Dénombrer le nombre d'applications de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
   b. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, dénombrer le nombre d'applications de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ dont exactement k éléments dans l'ensemble d'arrivée ont au moins un antécédent. On exprimera le résultat en fonction de $s_{m,k}$.
   c. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n^m=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_{m,k}$.
   d. Calculer $s_{m,n}$ à l'aide de la formule d'inversion de Pascal.

2 Espaces de probabilité finis

Exercice 16. Soit P une probabilité sur un univers Ω fini non vide. Soient A, B et C trois évènements. On suppose que $P(A) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}2$, $P(B \cap C) = 0{,}1$, $P(A \cap C) = 0{,}1$ et $P(A \cap B \cap C) = 0{,}05$.

1. Calculer la probabilité des évènements $E_1 = A \cup (B \cap C)$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$.
2. Si de plus $P(B) = 0{,}4$, calculer la probabilité que ni A ni B ne se réalisent.

Exercice 17. On lance 4 dés cubiques équilibrés.

1. Décrire un espace de probabilité associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité que les 4 dés aient le même résultat.
3. Calculer la probabilité que les résultats des dés soient deux à deux distincts.

Exercice 18. Lors d'une loterie, 300 billets sont vendus aux enfants d'une école. Quatre billets sont gagnants. Si on achète 10 billets, quelle est la probabilité de gagner au moins un lot ? On répondra en proposant un espace de probabilité et un évènement décrivant la situation.

Exercice 19. Une urne contient n_1 boules rouges et n_2 boules blanches, les boules étant indiscernables. On tire au hasard et sans remise $k_1 + k_2$ boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir k_1 boules rouges et k_2 boules blanches.

Exercice 20. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n boules de l'urne ($1 \leq n \leq N$).

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ de sorte que P soit la probabilité uniforme. Quel est le cardinal de Ω ?
2. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges (avec $M < N$) et celles de $M+1$ à N sont blanche. Notons A_k l'évènement « la k-ième boule est rouge ».
   a. Calculer $P(A_k)$.
   b. Calculer $P(A_k \cap A_\ell)$.

Exercice 21. On considère un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. On définit la différence symétrique $A \Delta B$ de deux évènements A et B par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Donner une interprétation de l'évènement $A \Delta B$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Exprimer $P(A \Delta B)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

Exercice 22. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité et soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements.

1. Montrer que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.
2. En déduire que $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i)$.

Exercice 23. On considère une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ pour lequel P est uniforme, et donner le cardinal de Ω.
2. Calculer la probabilité de tirer la boule 1 avant la boule 2.
3. Calculer la probabilité de tirer les boules impaires dans l'ordre croissant (mais pas nécessairement consécutivement).
4. Calculer la probabilité de tirer les boules impaires dans l'ordre et consécutivement.

Exercice 24.

1. Soit $E = \{1, \dots, n\}$. On appelle *dérangement* de E une permutation de E sans point fixe (c.-à-d. une bijection $\sigma\colon E \to E$ telle que $\forall i \in E, \sigma(i) \neq i$). On note d_n le nombre de dérangements de E.
   - **a.** Rappeler la formule du crible (ou formule de Poincaré).
   - **b.** Pour tout $i \in E$, on note A_i l'ensemble des permutations σ de E telles que $\sigma(i) = i$. Écrire l'ensemble des dérangements de E en fonctions des A_i.
   - **c.** Montrer que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
2. À une soirée, n invités ont déposé leur parapluie dans l'entrée. En repartant, les invités un peu distraits emportent un parapluie au hasard.
   - **a.** Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. On le choisira de sorte que P soit uniforme.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'aucun invité ne reparte avec son parapluie.
   - **c.** Montrer que la probabilité qu'exactement r invités repartent avec leur parapluie est $\frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 25. On lance deux fois un même dé équilibré. Soient les évènements A : « le 1$^{\text{er}}$ jet est impair », B : « le 2$^{\text{e}}$ jet est impair » et C : « la somme des points est impaire ». Les évènements A, B et C sont-ils indépendants deux à deux ? Sont-ils indépendants dans leur ensemble ?

Exercice 26. On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On considère les évènements A : « le 1$^{\text{er}}$ lancer donne face », B : « le 2$^{\text{e}}$ lancer donne face » et C : « on obtient aucun pile après avoir obtenu une face ». Montrer que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 27. On dispose de deux urnes A et B. Dans A, il y a 3 boules rouges et 2 boules noires, et dans B, il y a 4 boules rouges et 3 boules noires. On choisit au hasard une urne, puis une boule de cette urne. La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne A ?

Exercice 28. On considère une urne qui contient trois pièces de monnaie. Deux de ces pièces sont équilibrées, mais la troisième est truquée : la probabilité qu'elle tombe sur face est 0,6. On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire uniformément au hasard une pièce de l'urne, et on la lance. Si la pièce est tombée sur face, quelle est la probabilité qu'elle soit truquée ?

Exercice 29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un entier uniformément au hasard entre 1 et n. On note $S_n = \left\{k \in [\![1, n]\!] \,\middle|\, \mathrm{pgcd}(k, n) = 1\right\}$ et $\varphi(n)$ le cardinal de S_n (φ est appelée la fonction indicatrice d'Euler).

1. Déterminer S_n et calculer $\varphi(n)$ pour tout $n \in [\![2, 10]\!]$.
2. On considère les évènements A : « l'entier choisi est un multiple de 2 » et B : « l'entier choisi est un multiple de 5 ». Calculer $P(A)$ et $P(B)$ pour $n = 100$, et pour $n = 101$.
3. On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où $\alpha_i \geq 1$. On note A_i l'évènement « l'entier choisi est divisible par p_i ».
   - **a.** Soit A l'évènement « l'entier choisi est premier avec n ». Calculer $P(A)$ en fonction de n et $\varphi(n)$.
   - **b.** Montrer que $P(A_i) = \frac{1}{p_i}$.
   - **c.** Montrer que $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}$ est l'évènement « l'entier choisi est divisible par $p_{i_1} \cdots p_{i_r}$ ».
   - **d.** Montrer que les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants.
   - **e.** Exprimer l'évènement A en fonction de $A_1, \dots, A_n$, puis en déduire que $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

3 Variables aléatoires finies

Exercice 30. Une urne contient 2 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard n boules une à une, avec remise. On note B_n la variables aléatoire qui modélise le nombre de boules blanches obtenues lors de n tirages.

1. Déterminer la loi de B_n.
2. Combien de boules faut-il tirer pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 31. On choisit au hasard trois ampoules dans un lot de 15, dont 5 sont défectueuses. On note X le nombre d'ampoules défectueuses tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - A : « les 3 ampoules sont défectueuses » ;
   - B : « exactement une ampoule est défectueuse » ;
   - C : « au moins une ampoule est défectueuse ».

Exercice 32. On considère une urne qui contient n boules, dont r boules rouges et $n-r$ boules blanches. On tire successivement et sans remise les boules de l'urne. On note X le rang du tirage auquel on obtient la dernière boules rouge.

1. Déterminer un espace de probabilité décrivant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 33. On considère une urne contenant n boules blanches et 6 boules rouges. On tire simultanément au hasard 2 boules de l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la valeur de n pour que $\mathbb{E}[X] = \frac{4}{3}$.

Exercice 34. On tire au hasard une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On note X le nombre de rois obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire la probabilité que la main contienne exactement 1 paire de rois.

Exercice 35 (Examen 2022–2023)**.** Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, $a \in [0,1]$ un réel à déterminer et $X\colon \Omega \to [\![-3,3]\!]$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_X(\{x\})$	0,10	0,10	0,25	0,15	0,15	0,15	a

1. Quelle valeur faut-il donner à a pour que P_X corresponde bien à une probabilité sur $[\![-3,3]\!]$?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. Déterminer la loi de X^2.
4. Que vaut la variance de X ?
5. Que vaut la variance de $2X^2+1$?

Exercice 36 (Examen 2024–2025)**.** On jette un dé équilibré 900 fois et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où 1 est apparu.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Montrer que $\mathbb{P}(125 < X < 175) \geq 0{,}8$.

Exercice 37. On effectue un sondage pour connaitre l'avis de la population sur un candidat à une élection. On note p la proportion de la population favorable au candidat. On tire au hasard et avec remise n personnes, et on note S_n le nombre de personnes favorables au candidat parmi les sondés.

1. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
3. Combien de personnes faut-il interroger pour qu'avec une probabilité d'au moins 95 %, la fréquence de réponses positives diffère de p d'au plus 8 points de pourcentage ?

Exercice 38. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par :

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 39. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{4}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(2X + 3Y)$.

Exercice 40. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n, p)$. On considère une variable aléatoire Y dont la loi conditionnelle sachant $\{X = k\}$ est $\mathscr{B}(k, q)$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, k]\!], \quad P(Y = j \mid X = k) = \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j}.$$

Déterminer la loi de Y.
Indication : on pourra montrer l'identité $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$.

Exercice 41 (Examen 2021 – 2022)**.** Soient $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Soient $Y_i = X_i + X_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et $\overline{Y}_n = S_n / n$.

1. Quelle est la loi de Y_i ? Que valent $\mathbb{E}[Y_i]$ et $\mathrm{Var}(Y_i)$?
2. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et en déduire $\mathbb{E}[\overline{Y}_n]$.
3. Montrer que $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p(1-p)$. Les variables Y_i et Y_{i+1} sont-elles indépendantes ?
4. Que vaut $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ si $|i - j| > 1$?
5. Montrer que $\mathrm{Var}(Y_i + Y_{i+1}) = 6p(1-p)$.
6. Montrer que $\mathrm{Var}(S_n) = (4n-2)p(1-p)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{Var}(\overline{Y}_n)$.

Exercice 42.

1. On lance 2 dés équilibrés à 6 faces. On modélise cette expérience aléatoire par l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ où $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et P est la probabilité uniforme. Soient X_1 et X_2 les résultats du premier et du second dé, respectivement. On note $M = \max(X_1, X_2)$.
   a. Que peut-on dire des variables aléatoires X_1 et X_2 ?
   b. Donner la fonction répartition de X_1.
   c. Calculer la fonction de répartition de M en fonction de celle de X_1.
   d. En déduire la loi et l'espérance de M.
2. On lance à présent un dé équilibré à 36 faces et on note Y la racine carrée du résultat, arrondie à l'entier supérieur. En notant $\Omega = [\![1,36]\!]$ l'univers de cette expérience, la variable aléatoire Y est définie par :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \lceil \sqrt{\omega} \rceil,$$
   où $\lceil \cdot \rceil$ est la partie entière supérieure.
   a. Déterminer l'image de l'application Y.
   b. Calculer la fonction de répartition de Y.
   c. Que peut-on dire de Y et M ?

Exercice 43. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité. Soit A un évènement et posons $p = P(A)$. On note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_A$? Quelle est son espérance et sa variance ?
2. Soient X et Y des variables aléatoires de variances respectives σ_X^2 et σ_Y^2.
   a. On suppose que $\sigma_X > 0$ et $\sigma_Y > 0$. Développer $\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$ et $\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$, et en déduire que $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$.
   b. Montrer que cette dernière inégalité est encore vraie si $\sigma_X = 0$ ou $\sigma_Y = 0$.
3. Soient A et B des évènements, et notons $X = \mathbf{1}_A$ et $Y = \mathbf{1}_B$ leurs fonctions indicatrices.
   a. Exprimer $\mathrm{Cov}(X,Y)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
   b. Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.
   Indication : on déterminera le maximum sur $[0,1]$ *de la fonction* $x \mapsto x(1-x)$.

Exercice 44. L'objectif de cet exercice est de calculer l'espérance et la variance de la loi hypergéométrique. On considère une urne contenant N boules, dont m boules blanches et $N - m$ boules noires. On tire successivement au hasard et sans remise n boules de l'urne. On note $p = \frac{m}{N}$ la proportion initiale de boules blanches dans l'urne. Soit A_i l'évènement « la i-ième boule blanche a été tirée », et soient $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$ et $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$ des variables aléatoires.

1. Quelle est la loi de S ? de X_i ?
2. En déduire l'espérance de S.
3. Montrer que pour tous $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{n}{N^2} \times \frac{N-n}{N-1}$.
4. En déduire que $\mathrm{Var}(S) = np(1-p) \times \frac{N-n}{N-1}$.

Exercice 45. Soit X_N une variable aléatoire de loi hypergéométrique $\mathscr{H}(n, m_N, N - m_N)$. On suppose que $m_N \sim pN$ lorsque $N \to +\infty$, avec $p \in]0,1[$. Soit Y une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

1. Montrer que $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\frac{N!}{(N-\ell)!} \sim N^\ell$ lorsque $N \to +\infty$.
2. Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X_N = k) \xrightarrow[N \to +\infty]{} P(Y = k)$.
   Remarque : on dit que la suite $(X_N)_{N \geq 1}$ *converge en loi vers* Y.
3. Interpréter ce résultat.

Exercice 46. Dans une urne, on a n boules noires et n boules blanches. On les tire indépendamment et uniformément sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus des boules d'une seule couleur, et on note X ce nombre de boules restantes.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{2 \times \binom{2n-k-1}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$.
2. Montrer que $\binom{2n}{n}\mathbb{E}[2n - X] = 2n\binom{2n}{n+1}$.
   Indication : on rappelle la formule d'itération de Pascal $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, *cf TD1 exercice 11.*
3. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X]$.
4. Quel est l'ordre de grandeur de $\mathbb{E}[X]$: $O(1)$, $O(\log n)$, $O(\sqrt{n})$ ou $O(n)$?

Exercice 47. On lance indépendamment 2 dés cubiques truqués. On note respectivement X et Y le résultat du premier et du second dé, et on note $p_i = P(X = i)$ et $q_i = P(Y = i)$ pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$. L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il est impossible de choisir les p_i et les q_i de sorte que $X + Y$ suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. Supposons par l'absurde que $X + Y \sim \mathscr{U}([\![2, 12]\!])$.

1. Montrer que $p_6 \neq 0$ et $q_6 \neq 0$.
2. Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle *fonction génératrice* de Z la fonction $G_Z(t) = \mathbb{E}[t^Z]$. Si Z est une v.a. finie, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ (sinon, elle est toujours définie au moins sur $]-1, 1]$, voir cours de séries).
   a. Calculer $G_Z(t)$ si $Z \sim \mathscr{U}([\![2, 12]\!])$.
   b. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$.
   c. En déduire que :
   $$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{11} \times \frac{1 - t^{11}}{1 - t} = \left(\sum_{k=0}^{5} p_{k+1} t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} q_{k+1} t^k\right). \qquad (*)$$
3. Justifier que les polynômes du membre de droite de $(*)$ admettent au moins une racine dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. Conclure à une contradiction.

4 Lois géométrique et loi de Poisson

Exercice 48. On lance plusieurs fois de suite un dé cubique équilibré, les lancers étant indépendants.

1. Calculer la probabilité que le premier 4 soit obtenu au 3e lancer.
2. En moyenne, au bout de combien de lancers obtient-on le premier 4 ?

Exercice 49. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On note $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calculer $P(X_1 > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $P(Y > k)$ en fonction de $P(X_1 > k)$.
3. En déduire la loi de Y.

Exercice 50. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit la loi de X est sans mémoire si :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$

1. Montrer que la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ est sans mémoire.
2. Réciproquement, on veut montrer que si la loi de X est sans mémoire sur $\mathbb{N}^*$, alors X suit une loi géométrique. On note $u_n = P(X > n)$.
   a. Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = u_n \times u_k$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, en précisant sa raison q et son terme initial u_0.
   c. En déduire que X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p = 1 - q$.

Exercice 51 (loi des évènements rares)**.**

1. Soit X_n une variables aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ avec $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ lorsque $n \to +\infty$, où $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit Y de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(Y = k).$$
Remarque : on dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Y.
2. Une machine usine des pièces. Chaque pièce a 0,5 % de chance d'être défectueuse, indépendamment des autres. On note X le nombre de pièce défectueuses dans un lot de 500 pièces.
   - **a.** Quelle est la loi exacte de X ?
   - **b.** Par quelle loi peut-on l'approcher ? On utilisera cette loi dans la question suivante.
   - **c.** Calculer $P(X \geq 3)$.

Exercice 52. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle moment factoriel d'ordre $r \in \mathbb{N}$ la quantité $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$, à condition que cette dernière soit finie.

1. Calculer les moments factoriels de $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Mêmes questions si $X \sim \mathscr{G}(p)$, $p \in]0,1]$.
Indication : exprimer les moments factoriels en fonction des dérivées d'une série entière.

Exercice 53. Un insecte pond des œufs. On suppose que le nombre N d'œufs pondus suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf pondu a une probabilité p d'éclore, indépendamment des autres œufs, et indépendamment de N. On note X le nombre d'œufs qui ont éclos.

1. Conditionnellement à l'évènement $\{N = n\}$, quelle est la loi de X ? En déduire $P(X = k \mid N = n)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi de X.
3. Quelle est l'espérance et la variance de X ?

Exercice 54. On considère une expériences de Bernoulli de probabilité de succès $p \in]0,1]$ et on note $q = 1-p$ la probabilité d'un échec. On répète indépendamment l'expérience jusqu'à obtenir n succès et on note X le nombre d'échecs obtenus avant le n-ième succès. La loi de X est appelée *loi binomiale négative* de paramètres n et p, notée $\mathrm{BN}(n,p)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$.
Indication : si $X = k$, combien y a-t-il eu d'expériences ? de succès ? d'échecs ?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle coefficient binomiale généralisé le nombre $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k.$$
3. Notons T_k le nombre d'échecs entre le $(k-1)$-ième et le k-ième succès. Quelle la loi de T_k ?
4. Exprimer X en fonction des variables $(T_k)_{k\geq 1}$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 55. Une marque place dans chacun de ses paquets de céréales une vignette à collectionner. Il existe n vignettes distinctes, et chaque paquet contient l'une d'elles au hasard (uniforme). On se demande combien de paquet il faut ouvrir en moyenne pour obtenir toutes les vignettes. On note X_n le nombre de paquets ouverts jusqu'à obtenir toutes les vignettes, on note $T_1 = 1$, et pour $k \in [\![2, n]\!]$ on note T_k le nombre de paquets ouverts pour obtenir k vignettes différentes après avoir obtenu $k-1$ vignettes différentes.

1. Quelle est la loi de T_k ?
2. Exprimer X_n en fonction des $(T_k)_{1\leq k\leq n}$.
3. En déduire l'espérance de X_n et en donnant un équivalent lorsque $n \to +\infty$.
4. On admet que les $(T_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes. Calculer la variance de X_n et montrer que :
$$\mathrm{Var}(X_n) \leq C\,n^2,$$
avec $C > 0$ une constante.