TD3 – Variables aléatoires finies

Exercice 1. Une urne contient 2 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard n boules une à une, avec remise. On note B_n la variables aléatoire qui modélise le nombre de boules blanches obtenues lors de n tirages.

1. Déterminer la loi de B_n.
2. Combien de boules faut-il tirer pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 2. On choisit au hasard trois ampoules dans un lot de 15, dont 5 sont défectueuses. On note X le nombre d'ampoules défectueuses tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - A : « les 3 ampoules sont défectueuses » ;
   - B : « exactement une ampoule est défectueuse » ;
   - C : « au moins une ampoule est défectueuse ».

Exercice 3. On considère une urne qui contient n boules, dont r boules rouges et $n-r$ boules blanches. On tire successivement et sans remise les boules de l'urne. On note X le rang du tirage auquel on obtient la dernière boules rouge.

1. Déterminer un espace de probabilité décrivant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 4. On considère une urne contenant n boules blanches et 6 boules rouges. On tire simultanément au hasard 2 boules de l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la valeur de n pour que $\mathbb{E}[X] = \frac{4}{3}$.

Exercice 5. On tire au hasard une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On note X le nombre de rois obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire la probabilité que la main contienne exactement 1 paire de rois.

Exercice 6. Soit X une variables aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{-1, 0, 1, 2\}$. On suppose que :

$$P(X=0) = \frac{1}{6}, \quad P(X=1) = \frac{1}{6}, \quad P(X=2) = \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X - X^2$. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 7 (Examen 2022 – 2023)**.** Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, $a \in [0,1]$ un réel à déterminer et $X : \Omega \to [\![-3, 3]\!]$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_X(\{x\})$	0,10	0,10	0,25	0,15	0,15	0,15	a

1. Quelle valeur faut-il donner à a pour que P_X corresponde bien à une probabilité sur $[\![-3,3]\!]$?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. Déterminer la loi de X^2.
4. Que vaut la variance de X ?
5. Que vaut la variance de $2X^2+1$?

Exercice 8. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par :

X \ Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

1. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par :

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{4}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

1. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(2X+3Y)$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$. On considère une variable aléatoire Y dont la loi conditionnelle sachant $\{X=k\}$ est $\mathscr{B}(k,q)$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \forall j \in [\![1,k]\!], \quad P(Y=j \mid X=k) = \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j}.$$

Déterminer la loi de Y.
Indication : on pourra montrer l'identité $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-k}{n-j}$.

Exercice 11 (Examen 2021−2022)**.** Soient $n \geq 1$ et $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Soient $Y_i = X_i + X_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et $\overline{Y}_n = S_n/n$.

1. Quelle est la loi de Y_i ? Que valent $\mathbb{E}[Y_i]$ et $\mathrm{Var}(Y_i)$?
2. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et en déduire $\mathbb{E}[\overline{Y}_n]$.
3. Montrer que $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p(1-p)$. Les variables Y_i et Y_{i+1} sont-elles indépendantes ?
4. Que vaut $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ si $|i-j| > 1$?
5. Montrer que $\mathrm{Var}(Y_i + Y_{i+1}) = 6p(1-p)$.
6. Montrer que $\mathrm{Var}(S_n) = (4n-2)p(1-p)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{Var}(\overline{Y}_n)$.

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité. Soit A un évènement et posons $p = P(A)$. On note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_A$? Quelle est son espérance et sa variance ?
2. Soient X et Y des variables aléatoires de variances respectives σ_X^2 et σ_Y^2.
   - **a.** On suppose que $\sigma_X > 0$ et $\sigma_Y > 0$. Développer $\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$ et $\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$, et en déduire que $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$.
   - **b.** Montrer que cette dernière inégalité est encore vraie si $\sigma_X = 0$ ou $\sigma_Y = 0$.
3. Soient A et B des évènements, et notons $X = \mathbf{1}_A$ et $Y = \mathbf{1}_B$ leurs fonctions indicatrices.
   - **a.** Exprimer $\mathrm{Cov}(X,Y)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
   - **b.** Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.
     Indication : on déterminera le maximum sur $[0,1]$ *de la fonction* $x \mapsto x(1-x)$.

Exercice 13. L'objectif de cet exercice est de calculer l'espérance et la variance de la loi hypergéométrique. On considère une urne contenant N boules, dont m boules blanches et $N - m$ boules noires. On tire successivement au hasard et sans remise n boules de l'urne. On note $p = \frac{m}{N}$ la proportion initiale de boules blanches dans l'urne. Soit A_i l'évènement « la i-ième boule blanche a été tirée », et soient $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$ et $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$ des variables aléatoires.

1. Quelle est la loi de S ? de X_i ?
2. En déduire l'espérance de S.
3. Montrer que pour tous $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{n}{N^2} \times \frac{N-n}{N-1}$.
4. En déduire que $\mathrm{Var}(S) = np(1-p) \times \frac{N-n}{N-1}$.

Exercice 14.

1. On lance 2 dés équilibrés à 6 faces. On modélise cette expérience aléatoire par l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ où $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et P est la probabilité uniforme. Soient X_1 et X_2 les résultats du premier et du second dé, respectivement. On note $M = \max(X_1, X_2)$.
   - **a.** Que peut-on dire des variables aléatoires X_1 et X_2 ?
   - **b.** Donner la fonction répartition de X_1.
   - **c.** Calculer la fonction de répartition de M en fonction de celle de X_1.
   - **d.** En déduire la loi et l'espérance de M.
2. On lance à présent un dé équilibré à 36 faces et on note Y la racine carrée du résultat, arrondie à l'entier supérieur. En notant $\Omega = [\![1,36]\!]$ l'univers de cette expérience, la variable aléatoire Y est définie par :
   $$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \left\lceil \sqrt{\omega} \right\rceil,$$
   où $\lceil \cdot \rceil$ est la partie entière supérieure.
   - **a.** Déterminer l'image de l'application Y.
   - **b.** Calculer la fonction de répartition de Y.
   - **c.** Que peut-on dire de Y et M ?

Exercice 15. Soit X_N une variable aléatoire de loi hypergéométrique $\mathscr{H}(n, m_N, N - m_N)$. On suppose que $m_N \sim pN$ lorsque $N \to +\infty$, avec $p \in]0,1[$. Soit Y une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

1. Montrer que $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\frac{N!}{(N-\ell)!} \sim N^\ell$ lorsque $N \to +\infty$.
2. Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X_N = k) \xrightarrow[N \to +\infty]{} P(Y = k)$.
   Remarque : on dit que la suite $(X_N)_{N \geq 1}$ *converge en loi vers* Y.
3. Interpréter ce résultat.

Exercice 16. On effectue un sondage pour connaitre l'avis de la population sur un candidat à une élection. On note p la proportion de la population favorable au candidat. On tire au hasard et avec remise n personnes, et on note S_n le nombre de personnes favorables au candidat parmi les sondés.

1. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
3. Combien de personnes faut-il interroger pour qu'avec une probabilité d'au moins 95 %, la fréquence de réponses positives diffère de p d'au plus 8 points de pourcentage ?

Exercice 17*. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[-1,1]$ et d'espérances nulles. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in [-1,1]$, $\mathrm{e}^{\lambda x} \leq \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{\lambda}$.
2. En déduire que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X_i}] \leq \frac{\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}}{2} =: \mathrm{ch}(\lambda)$ *(cosinus hyperbolique).*
3. En comparant les développements en série entière de $\mathrm{ch}(\lambda)$ et $\mathrm{e}^{\lambda^2/2}$, montrer que $\mathrm{ch}(\lambda) \leq \mathrm{e}^{\lambda^2/2}$.
4. Montrer que $\forall t \geq 0$, $P(S_n \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda S_n}]}{\mathrm{e}^{\lambda t}}$.
5. En déduire que $\forall t \geq 0$, $P(S_n \geq t) \leq \mathrm{e}^{\frac{n\lambda^2}{2} - \lambda t}$.
6. Déterminer la valeur λ qui minimise le membre de droite, et en déduire que $\forall t \geq 0$, $P(S_n \geq t) \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}}$.
7. En déduire l'inégalité de Chernoff :
$$\forall t \geq 0, \quad P(|S_n| \geq t) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

Exercice 18*. On lance indépendamment 2 dés cubiques truquées. On note respectivement X et Y le résultat du premier et du second dé, et on note $p_i = P(X=i)$ et $q_i = P(Y=i)$ pour tout $i \in [\![1,6]\!]$. L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il est impossible de choisir les p_i et les q_i de sorte que $X+Y$ suive la loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. Supposons par l'absurde que $X+Y \sim \mathscr{U}([\![2,12]\!])$.

1. Montrer que $p_6 \neq 0$ et $q_6 \neq 0$.
2. Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle *fonction génératrice* de Z la fonction $G_Z(t) = \mathbb{E}[t^Z]$. Si Z est une v.a. finie, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ (sinon, elle est toujours définie au moins sur $]-1,1]$, voir cours de séries).
   - **a.** Calculer $G_Z(t)$ si $Z \sim \mathscr{U}([\![2,12]\!])$.
   - **b.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$.
   - **c.** En déduire que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{11} \times \frac{1-t^{11}}{1-t} = \left(\sum_{k=0}^{5} p_{k+1} t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} q_{k+1} t^k\right). \qquad (*)$$
3. Justifier que les polynômes du membre de droite de $(*)$ admettent au moins une racine dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. Conclure à une contradiction.