CY TECH sciences et techniques

**Algèbre linéaire 1**
L1 MIPI 2023-2024

# TD 4 : applications linéaires

Les exercices marqués d'une étoile $\star$ sont des exercices d'approfondissement, ils ne sont pas au programme du cours.

**Exercice 1.** Parmi les applications ci-dessous, déterminer lesquelles sont linéaires.

1. $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par $f_1(x,y) := (y,\ x+y)$.
2. $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f_2(x,y,z) := (2y+z,\ x+z,\ -x+y+z)$.
3. $f_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f_3(x,y,z) := (y+1,\ x+y,\ z-x)$.
4. $f_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f_4(x,y,z) := (y,\ x+y,\ x^2)$.
5. $f_5\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f_5(x,y,z) := (x-2y+z,\ 2y,\ z-x,\ z-y)$.
6. $f_6\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f_6(x,y,z) := (x,\ x+y,\ xz)$.
7. $f_7\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f_7(x) := \big(x\sin(2023),\ \frac{x}{\pi},\ x\sqrt{2}\big)$.

**Exercice 2.** Soit $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ l'application définie pour tout $z\in\mathbb{C}$ par $f(z) := \overline{z}$.

1. Montrer que $f$ est $\mathbb{R}$–linéaire.
2. Montrer que $f$ n'est pas $\mathbb{C}$–linéaire.

**Exercice 3$^\star$.** Dans chaque cas, dire si l'application $f\colon E\to F$ est linéaire.

1. $E := \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u\in E$, $f(u) := u(0)$.
2. $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $F := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et pour tout $u\in E$, $f(u)\colon x\mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u\in E$, $f(u) := \displaystyle\max_{t\in[0,1]} u(t)$.
4. $E := \big\{u\in\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \,\big|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\big\}$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u\in E$, $f(u) := \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.
5. $E := \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}^3$ et pour tout $u\in E$, $f(u) := \big(u(0), u'(0), \frac{1}{2}u''(0)\big)$.

**Exercice 4.** Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$, on considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x-y+\ \ z+\ \ t = a\\ x \qquad +2z-\ \ t = b\\ x+y+3z-3t = c. \end{cases} \tag{$\mathscr{S}_{a,b,c}$}$$

Posons $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ par :

$$f(x,y,z,t) := (x-y+z+t,\ x+2z-t,\ x+y+3z-3t).$$

1. Échelonner le système $(\mathscr{S}_{a,b,c})$ par la méthode du pivot de Gauss.
2. En déduire une base de $\ker f$. L'application $f$ est-elle injective ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a,b,c$ pour que le système $(\mathscr{S}_{a,b,c})$ soit compatible.
4. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$. L'application $f$ est-elle surjective ?
5. Vérifier la validité du théorème du rang sur cet exemple.

**Exercice 5.** Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x,y,z,t) := (x+2y+2t,\ -x+y+z,\ 2x+y+z+t).$$

1. À l'aide du théorème du rang, montrer sans calculs que $f$ n'est pas injective.
2. Déterminer une base de $\ker f$.
3. En déduire que $f$ est surjective.

**Exercice 6$^\star$.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soient les $\mathbb{R}$–espaces vectoriels $E := \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $F := \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On considère l'application $\mathscr{D}\colon E \to F$ qui à tout $f \in E$ associe sa dérivée $f' \in F$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker \mathscr{D}$. L'application $\mathscr{D}$ est-elle injective ?
3. Montrer que $\mathscr{D}$ est surjective.

**Exercice 7.**

1. Existe-t-il des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ?
2. Existe-t-il des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ?
3. Donner une condition nécessaire sur les entiers $n$ et $p$ pour qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ soit :

   **a.** injective. **b.** surjective. **c.** bijective.

**Exercice 8.** Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) := (x-2y+3z,\ 4x+y+z,\ x+2y-2z).$$

Montrer que $f$ est un isomorphisme.

**Exercice 9** (Examen 2021-2022, session 2)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) := (-y+z,\ 2x+y+z,\ x+y).$$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire.
2. Calculer le noyau de $f$ et en donner une base.
3. L'application $f$ est-elle injective ?
4. Calculer le rang de $f$. L'application $f$ est-elle surjective ?
5. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ formée de 3 vecteurs. Cette famille est-elle une base de $\operatorname{Im} f$ ?
6. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

**Exercice 10.** Soient $E$, $F$ et $G$ des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de $E$ dans $G$.
2. Soit $f\colon E \to F$ un isomorphisme et soit $f^{-1}\colon F \to E$ son application réciproque. Montrer que $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ dans $E$.

**Exercice 11.** Soient $E$, $F$ et $G$ des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Si $g \in \mathscr{L}(G,E)$ est surjective, montrer que $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(f)$.
2. Si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ est injective, montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

**Exercice 12.** Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, où $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur associe le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
2. Montrer que $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ ou $(\dim(\ker f) = 2$ et $\operatorname{rg}(f) = 1)$.
3. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ et une forme linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \varphi(x)\,u$.

**Exercice 13$^\star$.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et soient $f$ et $g$ des endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

> ***Définition.*** *On dit qu'un s.e.v. $F$ de $E$ est stable par un endomorphisme $f$ si $f(F) \subset F$.*

Démontrer que $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par $f$.