Algèbre linéaire 1
L1 MIPI 2023-2024

TD 3 : espaces vectoriels

Les exercices marqués d'une étoile $\star$ sont des exercices d'approfondissement, ils ne sont pas au programme du cours.

1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Soit $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$. Vérifier que H est stable pour l'addition. Montrer que H n'est pas un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Exercice 2. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 0\}$.
2. $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 3\}$.
3. $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 - z = 0\}$.
4. $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 3y^2 - z^2 = 0\}$.
5. $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + 4z = 0\}$.
6. $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$.
7. $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\}$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Dans cette question seulement, on prend $E = \mathbb{R}^2$, F est la droite d'équation $x + y = 0$ et G la droite d'équation $x - 2y = 0$. Représenter F, G, $F \cup G$ et $F \cap G$.
2. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 4*. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. Montrer que $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes pairs (c.-à-d. tous les coefficients impairs sont nuls) est un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il en va de même pour l'ensemble $\mathscr{I}$ des polynômes impairs si l'on convient que le polynôme nul en fait partie.

Exercice 5*. Parmi les ensembles suivants, établir lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $A := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$.
2. $B := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 3\}$.
3. $C := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0)f(1) = 0\}$.
4. $D := \left\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$.
5. $E := \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' + 2f = 0\}$.

Exercice 6*. Dans l'espace vectoriel E des suites réelles, déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. L'ensemble des suites convergentes.
2. L'ensemble des suites divergentes.
3. L'ensemble des suites croissantes.
4. L'ensemble des suites géométriques.
5. L'ensemble des suites ayant un nombre infini de termes non nuls.
6. L'ensemble des suites ayant un nombre fini de termes non nuls.
7. L'ensemble des suites stationnaires (c.-à-d. constantes à partir d'un certain rang).

2 Familles libres, familles génératrices

Exercice 7.

1. Montrer que la famille (u,v) est libre dans $\mathbb{R}^2$ si $u := (1,2)$ et $v := (2,3)$.
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec $u := (1,2,3)$ et $v := (2,3,4)$.
3. Montrer que la famille (u,v,w) est libre dans $\mathbb{R}^3$ si $u := (1,-1,2)$, $v := (1,1,1)$ et $w := (2,-2,1)$.

Exercice 8. Soient $u := (2,3)$, $v := (-1,4)$, $w := (5,3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la famille (u,v,w) est liée et déterminer une relation de liaison.
2. Montrer que la famille (u,v,w) est génératrice.

Exercice 9. Soient $u := (1,-1,4)$, $v := (2,5,-1)$ et $w := (3,0,-4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Dire si la famille (u,v,w) est libre ou liée.

Exercice 10. Soient $u := (1,2)$, $v := (1,3)$ et $w := (1,4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les vecteurs u, v, w sont deux-à-deux libres.
2. La famille (u,v,w) est-elle libre ?

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$, considère les vecteurs $u := (1,-2,2)$ et $v := (3,3,-1)$.

1. Justifier que les vecteurs u et v sont libres.
2. Déterminer si le vecteur $(-1,-7,5)$ est une combinaison linéaire de u et v.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y, z pour que $(x,y,z) \in \mathrm{Vect}(u,v)$.
4. En déduire une équation cartésienne du plan engendré par u et v.

Exercice 12. Soit (u_1,u_2,u_3) une famille libre d'un espace vectoriel E. Déterminer si la famille (v_1,v_2,v_3) est libre, où $v_1 := u_1+u_2$, $v_2 := u_2+u_3$ et $v_3 := u_1+u_2+u_3$.

Exercice 13*. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(\cos,\sin)$ est libre.
2. Montrer que la famille $(\cos,\sin,f)$ est liée, où $f(x) := \sin(x+1)$, et donner une relation de liaison.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0,f_1,\dots,f_n)$ est libre, où $f_n(x) := \cos(nx)$.

Exercice 14*. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on considère des polynômes $P_0,\dots,P_n$ tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Montrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est libre.
Indication : regarder le coefficient de plus haut degré de $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$.

3 Bases et dimension

Exercice 15. Soit $F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x-2y+z=0\right\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en déterminer une base.

Exercice 16. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants (on ne demande pas de montrer que ce sont des s.e.v.).

1. $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+2y+3z+4t=0\right\}$.
2. $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+y=0 \text{ et } x+y+t=0\right\}$.
3. $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+y+z+t=0 \text{ et } x+2y-z+3t=0\right\}$.

Exercice 17. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1+\cdots+x_n=0$.

Exercice 18. Dans chaque cas, montrer que les vecteurs (u_1,u_2,u_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer les coordonnées du vecteur $v := (1,-1,0)$ dans cette base.

1. $u_1 := (1,0,0)$, $u_2 := (0,1,0)$ et $u_3 := (0,0,1)$.

2. $u_1 := (1,0,0)$, $u_2 := (1,1,0)$ et $u_3 := (1,1,1)$.

3. $u_1 := (1,1,2)$, $u_2 := (-1,2,1)$ et $u_3 := (1,-1,-1)$.

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 := (1,2,0,3)$ et $u_2 := (1,0,0,-1)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre.

2. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 20. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F := \mathrm{Vect}(u, v, w)$ où $u := (1,1,-1,1)$, $v := (0,2,-1,2)$ et $w := (-2,-3,1,-1)$, et soit H le sous-espace vectoriel :

$$H := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 2x - y + 4z + 3t = 0\right\}.$$

1. Montrer que u, v et w sont linéairement indépendants.

2. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

3. En déduire que $F = H$.

Exercice 21*. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes et $F = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Quel est sa dimension ?

2. On considère les polynômes $P_0(X) := \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1(X) := -X(X-2)$ et $P_2(X) := \frac{1}{2}X(X-1)$. Pour tout polynôme $P := \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, calculer $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ en fonction de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.

3. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre.

4. En déduire que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5. Déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

Exercice 22*. Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles et soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soient $a_n := (-2)^n$ et $b_n := 3^n$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de F.

3. L'objectif de cette question est de montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de F. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n := \lambda a_n + \mu b_n.$$

- **a.** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
- **b.** Montrer qu'il existe des valeurs de λ et μ pour lesquelles $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
- **c.** Pour ces valeurs de λ et μ, démontrer par récurrence double que $v_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **d.** En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de F.

4. Quel est la dimension de F ?

5. Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

4 Somme de sous-espaces, supplémentaires

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^4$, soit F le plan vectoriel dirigé par $u_1 := (2,3,0,1)$ et $u_2 := (-1,2,1,-2)$ et soit G le plan vectoriel dirigé par $v_1 := (4,-1,-2,5)$ et $v_2 := (1,0,0,0)$.

1. Déterminer une base de $F + G$.

2. La somme est-elle directe ?

Exercice 24. Dans $\mathbb{R}^3$, soient F le plan d'équation $x + y + z = 0$ et G le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

2. Sans déterminer $F \cap G$, justifier si F et G sont supplémentaires.

Exercice 25. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}, \qquad G := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et de G.

2. Déterminer $F \cap G$.

3. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 26⋆. Soit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit F le sous-espace vectoriel :

$$F := \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\},$$

et soit G le sous-espace vectoriel des fonctions constantes.

1. Vérifier que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 27⋆. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F_1 et F_2 des s.e.v. tels que $F_1 + F_2 = E$. Démontrer qu'il existe des s.e.v. $G_1 \subset F_1$ et $G_2 \subset F_2$ tels que $G_1 \oplus G_2 = E$.

Exercice 28. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E. Démontrer par récurrence sur p que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geq n - p.$$

Exercice 29. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G, H des s.e.v. de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. A-t-on l'inclusion contraire en général ?

2. Montrer que :

$$\dim(F+G+H) \leq \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).$$

5 Exercices tirés d'examens

Exercice 30 (Examen 2021-2022, session 1)**.** Soient F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0 \text{ et } y = z\}, \quad G_m = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,0), (1,0,m,0)\big),$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Résoudre le système à quatre inconnues x, y, z, t : $\begin{cases} x = 0 \\ y = z. \end{cases}$

3. En déduire une base de F (en justifiant).

4. Donner la dimension de F.

5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que F et G_m soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 31 (Examen 2022-2023, session 1)**.** Soient $u_{\alpha,\beta} = (\alpha - \beta, \alpha + 2\beta, \beta)$ et $v = (-2, 7, 3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, avec α et β des paramètres réels.

1. Écrire $u_{\alpha,\beta}$ comme une combinaison linéaire $\alpha w_1 + \beta w_2$, en précisant qui sont les vecteurs fixes w_1 et w_2 de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille (w_1, w_2) est-elle libre ?

3. Montrer que $(u_{\alpha,\beta}, v)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $3\alpha - \beta = 0$.

4. Montrer que la somme $\mathrm{Vect}(v) + \mathrm{Vect}(w_2)$ est directe. Que vaut $\dim \mathrm{Vect}(v, w_2)$?

5. Montrer que la somme $\mathrm{Vect}(v) + \mathrm{Vect}(w_1) + \mathrm{Vect}(w_2)$ n'est pas directe. Que vaut sa dimension ?