Analyse 3
L2 MI/MP
2024 – 2025

Devoir surveillé n° 2

2 mai 2025

Consignes :

- Écrire son nom et son numéro d'étudiant sur la copie.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- La calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 1 heure (tiers temps : 1 heure 20 minutes).
Barème : 20 points.

Exercice 1 (4 pts)**.** *Questions de cours.*

1. Soit K une partie d'un espace vectoriel normé E. Donner la définition de « K est compact ».
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Donner la définition de « (f_n) converge uniformément vers f sur A ».
3. Énoncer le théorème du cours sur la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Exercice 2 (9 pts)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on considère la fonction $f_n(x) := \dfrac{(-1)^n}{nx+1}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note f sa somme.
2. Montrer que la série ne converge normalement sur aucun intervalle non vide $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que la série converge uniformément sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
4. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que :
$$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t.$$
Indication : on pourra calculer $\int_0^1 t^{nx}\,\mathrm{d}t$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 3 (7 pts)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Si A est une partie de E et $x \in E$, on note $d(x, A)$ la distance de x à A :

$$d(x, A) := \inf_{y\in A} \|x - y\|.$$

1. Soient $x, x' \in E$. Montrer que $d(x, A) \le \|x - x'\| + d(x', A)$, puis que $\left|d(x, A) - d(x', A)\right| \le \|x - x'\|$.
2. En déduire que l'application $d_A \colon E \to \mathbb{R}$ définie par $d_A(x) = d(x, A)$ est continue.
3. On suppose à présent que A est un fermé.
   - **a.** Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.
     Indication : considérer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $\|x - a_n\| \to d(x, A)$.
   - **b.** Soit K un compact disjoint de A. Déduire des questions précédentes qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in K$, $\forall a \in A$, $\|x - a\| \ge \delta$.
     Indication : on pourra étudier l'application d_A sur K.