

CM Algèbre 2

Cycle pré-ingénieur 1

Mohamed Ali DEBYAOUI Florian DUSSAP Thi Hien NGUYEN



2023-2024

Vous aurez 4 notes :

- **DS1** (25 %) : 1h en TD, semaine du 04/03/2024.
- **DS2** (25 %) : 1h en TD, semaine du 01/04/2024.
- **Examen** (40 %) : 2h, semaine du 03/06/2024.
- **TD** (10 %) : au cours du semestre.

On calcule une moyenne pondérée M de ces notes :

$$M = 0,25 (DS1 + DS2) + 0,4 E + 0,1 TD.$$

La note finale NF est le maximum entre la moyenne M et l'examen E :

$$NF = \max(M, E).$$

- 1 Groupes et morphismes
- 2 Systèmes linéaires
- 3 Espaces vectoriels
- 4 Applications linéaires
- 5 Matrices et inverses de matrices
- 6 Déterminants
- 7 Représentation matricielle et changements de bases

Groupes et morphismes

- 1 Groupes et morphismes
 - Lois de composition interne
 - Groupes
 - Morphismes

- 1 Groupes et morphismes
 - Lois de composition interne
 - Groupes
 - Morphismes

Définition

Soit E un ensemble. Une **loi de composition interne** sur E est une application :

$$\begin{aligned} *: E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x * y. \end{aligned}$$

On appelle **magma** tout couple $(E, *)$ formé d'un ensemble E et d'une loi de composition interne $*$ sur E .

Questions

- 1 Sur \mathbb{R} , les opérations $+$, $-$, \times , \div sont-elles des lois de composition interne ?
- 2 La soustraction est-elle une loi de composition interne sur \mathbb{N} ? sur \mathbb{Z} ? sur \mathbb{Q} ? sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?
- 3 Donner une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, E)$ des applications d'un ensemble E dans lui-même.

Réponses

- 1 Les opérations $+$, $-$ et \times sont des lois de compositions internes sur \mathbb{R} , mais pas \div . En revanche, \div est une loi de composition interne sur \mathbb{R}^* .
- 2 La soustraction n'est pas une loi de composition interne sur \mathbb{N} . C'est une loi de composition interne sur \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} .
- 3 La composition \circ est une loi de composition interne sur $\mathcal{F}(E, E)$.

Définition

Soit $(E, *)$ un magma.

- On dit que $*$ est **associative** si $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$.
- On dit que $*$ est **commutative** si $\forall x, y \in E, x * y = y * x$.

Exemple

- Sur \mathbb{R} , l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives.
- Sur \mathbb{R} , la soustraction n'est ni associative ni commutative.
- Sur $\mathcal{F}(E, E)$, la composition d'applications est associative :

$$\forall f, g, h \in \mathcal{F}(E, E), \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

mais pas commutative (sauf si $\text{Card}(E) \leq 1$) :

$$f \circ g \neq g \circ f \quad \text{en général.}$$

Définition

Soit E un ensemble et soient $*$ et Δ deux lois de composition interne sur E .

- On dit que $*$ est **distributive à gauche** par rapport à Δ si :

$$\forall x, y, z \in E, \quad x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z).$$

- On dit que $*$ est **distributive à droite** par rapport à Δ si :

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x \Delta y) * z = (x * z) \Delta (y * z).$$

- On dit que $*$ est **distributive** par rapport à Δ si elle est distributive à gauche et à droite par rapport à Δ .

Exemple

- Dans \mathbb{R} , la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- Soit E un ensemble. Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E , l'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad \begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{cases}$$

La réunion est également distributive par rapport à l'intersection :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{cases}$$

Définition

Soit $(E, *)$ un magma et soit $e \in E$. On dit que e est un **élément neutre** pour $*$ si :

$$\forall x \in E, \quad x * e = e * x = x.$$

Exemple

- Dans $(\mathbb{N}, +)$, l'élément neutre est 0.
- Dans (\mathbb{R}, \times) , l'élément neutre est 1.
- Dans $(2\mathbb{Z}, \times)$, il n'y a pas d'élément neutre.
- Dans $(\mathcal{F}(E, E), \circ)$, l'élément neutre est id_E .

Proposition (unicité de l'élément neutre)

*Soit $(E, *)$ un magma. Si $*$ possède un élément neutre, alors il est unique.*

Démonstration.

Soient e et e' des éléments neutres de $(E, *)$. Puisque e est neutre pour $*$, on a :

$$e * e' = e'.$$

Mais puisque e' est aussi neutre pour $*$, on a :

$$e * e' = e.$$

Par conséquent, on a $e = e'$.



Définition

Soit $(E, *)$ un magma possédant un élément neutre e et soit $x \in E$.

- On dit que x admet un **symétrique à droite** s'il existe $x' \in E$ tel que $x * x' = e$.
- On dit que x admet un **symétrique à gauche** s'il existe $x' \in E$ tel que $x' * x = e$.
- On dit que x est **symétrisable** s'il existe $x' \in E$ qui est à la fois symétrique à droite et à gauche.

Vocabulaire. On emploie aussi le terme « inversible » à la place de « symétrisable ».

Exemple

- Dans $(\mathbb{R}, +)$, le symétrique d'un nombre x est son opposé $-x$.
- Dans (\mathbb{R}, \times) , un nombre x est symétrisable si et seulement si $x \neq 0$. Dans ce cas, le symétrique de x est son inverse $\frac{1}{x}$.
- Dans $(\mathcal{F}(E, E), \circ)$, une application f est symétrisable si et seulement si f est bijective. Dans ce cas, le symétrique de f est son application réciproque f^{-1} .

Symétrique d'un élément

Proposition (unicité du symétrique)

Soit $(E, *)$ un magma **associatif** possédant un élément neutre et soit $x \in E$.

- ① Si x' est un symétrique à droite et si x'' est un symétrique à gauche de x , alors $x' = x''$.
- ② Si x est symétrisable, alors son symétrique est unique.

Démonstration.

Soit $x \in E$ et soient x', x'' les symétriques à droite et à gauche de x , c.-à-d. $x * x' = e$ et $x'' * x = e$ où e est l'élément neutre de $(E, *)$. Par associativité de $*$, on a :

$$x' = e * x' = (x'' * x) * x' = x'' * (x * x') = x'' * e = x''.$$



Symétrique d'un produit

Proposition

*Soit $(E, *)$ un magma associatif possédant un élément neutre. Si $x, y \in E$ sont symétrisables de symétriques x^{-1} et y^{-1} , alors $x * y$ est symétrisable de symétrique :*

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Remarque. Si $*$ n'est pas commutative, l'ordre des symétriques ci-dessus est important.

Démonstration.

Notons e l'élément neutre de $(E, *)$. On a par associativité de $*$:

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * (y * y^{-1}) * x^{-1} = x * e * x^{-1} = x * x^{-1} = e,$$

donc $y^{-1} * x^{-1}$ est le symétrique à droite de $x * y$. On procède de même pour montrer que c'est le symétrique à gauche. □

Simplification par un élément symétrisable

Proposition

Soit $(E, *)$ un magma associatif possédant un élément neutre et soit $x \in E$. Si x est symétrisable, alors :

$$\forall y, z \in E, \quad x * y = x * z \implies y = z$$

$$\forall y, z \in E, \quad y * x = z * x \implies y = z.$$

Attention !

Ces implications sont fausses en général si x n'est pas inversible. Par exemple, dans le magma $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \cup)$, on a :

$$[0, 1] \cup [0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2] \quad \text{mais} \quad [0, 2] \neq [1, 2].$$

Un autre contre-exemple important est le produit matriciel, cf. chapitre 5.

Définition

Soit $(E, *)$ un magma associatif possédant un élément neutre e . Si $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note x^n l'itéré n -ième de x qu'on définit par récurrence par :

$$\begin{cases} x^0 = e \\ x^n = x * x^{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Autrement dit, si $n \geq 1$ alors :

$$x^n = \underbrace{x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque. Pour une loi additive $+$, l'élément neutre se note 0_E et l'itéré n -ième de x se note nx .

Proposition

*Soit $(E, *)$ un magma associatif possédant un élément neutre e . Si $x \in E$ possède un symétrique x^{-1} , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, x^n est symétrisable et :*

$$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

Dans ce cas, on note x^{-n} le symétrique de x^n . On définit ainsi x^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque. Pour une loi additive $+$, le symétrique de x se note $-x$. La proposition précédente s'écrit $-(nx) = n(-x)$. On note $-nx$ le symétrique de nx , ce qui permet de définir kx pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Itérés d'un élément

Exemple

On considère le magma $(\mathcal{F}(E, E), \circ)$. L'itéré n -ième d'une application f est définie par :

$$f^n = \begin{cases} \text{id}_E & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Si f est bijective, alors on note f^{-n} l'itéré n -ième de f^{-1} .

Attention !

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors f^2 peut avoir un sens différent selon le contexte :

- f^2 peut désigner l'itéré 2^e de f , c'est-à-dire l'application $x \mapsto f(f(x))$.
- f^2 peut désigner le carré de f , c'est-à-dire l'application $x \mapsto f(x)^2$.

Proposition

Soit E et F des ensembles non vides et soit $*$ une loi de composition interne sur F . On définit la loi de composition interne \circledast sur $\mathcal{F}(E, F)$ par :

$$\forall x \in E, \quad (f \circledast g)(x) = f(x) * g(x).$$

De plus :

- ❶ si $*$ est associative ou commutative, \circledast l'est aussi.
- ❷ si e est l'élément neutre pour $*$, alors l'application constante égale à e est l'élément neutre pour \circledast .

En pratique, on note aussi $+$ la loi de $\mathcal{F}(E, F)$. C'est ainsi qu'on définit la somme et le produit de fonctions à valeurs réelles :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

1 Groupes et morphismes

- Lois de composition interne
- Groupes
- Morphismes

Définition

Soit $(G, *)$ un magma. On dit que $(G, *)$ est un **groupe** si :

- ❶ la loi $*$ est associative ;
- ❷ la loi $*$ admet un élément neutre ;
- ❸ tout élément de G est symétrisable pour $*$.

Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un **groupe commutatif** (ou abélien).

Exemple

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens.
- (\mathbb{Q}^*, \times) , (\mathbb{R}^*, \times) et (\mathbb{C}^*, \times) sont des groupes abéliens.
- $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{Z}^*, \times) et (\mathbb{R}, \times) ne sont pas des groupes.
- Soit E un ensemble et soit $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des applications bijectives de E dans E . Alors $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe, non abélien si E possède au moins trois éléments. Ce groupe est appelé **groupe symétrique** de E , ou groupe des permutations de E .

Définition

Soient $(E_1, *_1), \dots, (E_n, *_n)$ des magmas. On définit sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$ une loi de composition interne $*$ appelée **loi produit** par :

$$\begin{aligned} \forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \forall (y_1, \dots, y_n) \in E, \\ (x_1, \dots, x_n) * (y_1, \dots, y_n) = (x_1 *_1 y_1, \dots, x_n *_n y_n). \end{aligned}$$

Proposition (à faire chez vous)

*Soient $(G_1, *_1), \dots, (G_n, *_n)$ des groupes d'éléments neutres e_1, \dots, e_n . Alors $G = G_1 \times \dots \times G_n$ est un groupe pour la loi produit, d'élément neutre (e_1, \dots, e_n) . De plus, le symétrique d'un élément $(x_1, \dots, x_n) \in G$ est l'élément $(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$ où x_i^{-1} est le symétrique de x_i dans $(G_i, *_i)$.*

Définition

Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie de G . On dit que H est un **sous-groupe** de G si $(H, *)$ un groupe.

Exemple

Pour tout groupe G d'élément neutre e , les parties $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de G . Un sous-groupe de G différent de $\{e\}$ et G est appelé **sous-groupe propre** de G .

Lemme

*Soient $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e et H un sous-groupe de G . Alors :*

- ❶ *e est l'élément neutre de $(H, *)$.*
- ❷ *H est stable par passage à l'inverse : $\forall h \in H, \quad h^{-1} \in H$.*

Démonstration.

- ❶ Soit H un sous-groupe de $(G, *)$. Alors $(H, *)$ est un groupe, notons e_H son élément neutre. Alors on a $e_H * e_H = e_H$ et $e_H * e = e_H$, donc $e_H * e_H = e_H * e$. En simplifiant à gauche par e_H , on obtient $e_H = e$.
- ❷ Soit $h \in H$, soit $h' \in H$ son inverse dans H et soit h^{-1} son inverse dans G . Alors on a :

$$h' = e * h' = (h^{-1} * h) * h' = h^{-1} * (h * h') = h^{-1} * e = h^{-1}.$$

Donc $h^{-1} \in H$.



Proposition

*Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie de G . Alors H est un sous-groupe de G si et seulement si :*

- ❶ H est non vide ;
- ❷ H est stable par produit et passage à l'inverse :

$$\forall x, y \in H, \quad x * y^{-1} \in H.$$

En pratique, pour vérifier que H est non vide, on regarde si l'élément neutre e de G appartient à H :

- si $e \in H$, alors H est non vide. Il reste à vérifier la propriété de stabilité pour montrer que H est un sous-groupe.
- si $e \notin H$, alors H n'est pas un sous-groupe.

Démonstration.

Ces conditions sont évidemment nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes.

- Puisque H est non vide, soit $x \in H$. Par stabilité, on a $e = x * x^{-1} \in H$. Puisque e est neutre pour $*$ dans G , il l'est aussi dans H .
- Si $x \in H$, alors par stabilité $x^{-1} = e * x^{-1} \in H$. Donc le symétrique de x pour $*$ appartient à H .
- Si $x, y \in H$, alors $y^{-1} \in H$ d'après le point précédent, donc par stabilité on a $x * y = x * (y^{-1})^{-1} \in H$. Ainsi, H est stable par $*$.
- La loi $*$ étant associative sur G , elle l'est à fortiori sur H .

On a montré que $*$ est une loi de composition interne associative sur H , possède un élément neutre dans H et que tout élément de H possède un symétrique dans H . Donc H est un sous-groupe de $(G, *)$. □

Exemple

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$, qui est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, qui est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
- Montrons que (\mathbb{U}, \times) est groupe. Pour ce faire, on montre que c'est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) :
 - ❶ On a bien $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$.
 - ❷ \mathbb{U} est non vide car $1 \in \mathbb{U}$.
 - ❸ Pour tous $z, w \in \mathbb{U}$, on a :

$$|zw^{-1}| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{1}{1} = 1,$$

donc $zw^{-1} \in \mathbb{U}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (\mathbb{U}_n, \times) est un sous-groupe de \mathbb{U} (le vérifier!).

- 1 Groupes et morphismes
 - Lois de composition interne
 - Groupes
 - Morphismes

Définition

Soient $(E, *)$ et (F, Δ) deux magmas et f une application de E dans F . On dit que f est un **morphisme** (ou homomorphisme) de $(E, *)$ dans (F, Δ) si :

$$\forall x, y \in E, \quad f(x * y) = f(x) \Delta f(y).$$

Si $(E, *)$ et (F, Δ) sont des groupes, on dit que f est un **morphisme de groupes**.

Un peu de vocabulaire :

- Un morphisme de $(E, *)$ dans lui-même est appelé un **endomorphisme**.
- Un morphisme bijectif est appelé un **isomorphisme**.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme**.

Exemple

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda x, \end{aligned}$$

est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$. Si $\lambda \neq 0$, c'est un automorphisme.

- L'exponentielle est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{R}_+^*, \times) . En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y),$$

donc \exp est un morphisme de groupe, et on sait que l'exponentielle est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* .

Proposition

La composée de deux morphismes est un morphisme.

Démonstration.

Soient $(E, *)$, (F, Δ) et (G, \heartsuit) des magmas, et soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ des morphismes. Alors pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x * y) &= g(f(x * y)) \\ &= g(f(x) \Delta f(y)) \\ &= g(f(x)) \heartsuit g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) \heartsuit (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

Par conséquent, $g \circ f$ est un morphisme de $(E, *)$ dans (G, \heartsuit) . □

Application réciproque d'un isomorphisme

Proposition

L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Démonstration.

Soient $(E, *)$ et (F, Δ) des magmas et soit $f: E \rightarrow F$ un isomorphisme. L'application f est bijective, donc elle possède une application réciproque $f^{-1}: F \rightarrow E$ également bijective. Montrons que f^{-1} est un morphisme. Pour tous $x, y \in F$, on a :

$$f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) \Delta f(f^{-1}(y)) = x \Delta y,$$

donc $f^{-1}(x) * f^{-1}(y) = f^{-1}(x \Delta y)$. Par conséquent, f^{-1} est un isomorphisme. □

Proposition

*Soient $(G, *)$ et (G', Δ) deux groupes d'éléments neutres respectifs $e \in G$ et $e' \in G'$. Si $f: G \rightarrow G'$ est un morphisme, alors :*

- ❶ $f(e) = e'$.
- ❷ $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
- ❸ $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, f(x^n) = f(x)^n$.

Démonstration.

- ❶ On a $e = e * e$, donc :

$$\begin{aligned} f(e) = f(e * e) &\implies f(e) = f(e) \triangle f(e) \\ &\implies f(e) \triangle f(e)^{-1} = f(e) \triangle f(e) \triangle f(e)^{-1} \\ &\implies e' = f(e). \end{aligned}$$

- ❷ Soit $x \in G$, alors on a :

$$e' = f(e) = f(x * x^{-1}) = f(x) \triangle f(x^{-1}).$$

Par conséquent, $f(x^{-1})$ est le symétrique de $f(x)$.

- ❸ Par récurrence (à faire chez soi). □

Proposition

*Soient $(G, *)$ et (G', Δ) deux groupes et soit $f: G \rightarrow G'$ un morphisme.*

- ① Si H est un sous-groupe de $(G, *)$, alors $f(H)$ est un sous-groupe de (G', Δ) .*
- ② Si H' est un sous-groupe de (G', Δ) , alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G, *)$.*

Image directe/réciproque d'un sous-groupe

Démonstration de 1.

L'ensemble $f(H)$ est non vide car H est non vide. Soient $y_1, y_2 \in f(H)$, alors il existe $x_1, x_2 \in H$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Montrons que $y_1 \Delta y_2^{-1} \in f(H)$. On a :

$$y_1 \Delta y_2^{-1} = f(x_1) \Delta f(x_2)^{-1} = f(x_1 * x_2^{-1}).$$

Or, $x_1 * x_2^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe de $(G, *)$, donc $y_1 \Delta y_2^{-1} \in f(H)$. Ainsi, on a montré que $f(H)$ est un sous-groupe de (G', Δ) . □

Démonstration de 2.

On a $f(e) = e' \in H'$, donc $e \in f^{-1}(H')$. Par conséquent, $f^{-1}(H')$ est non vide. Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(H')$, montrons que $x_1 * x_2^{-1} \in f^{-1}(H')$. On a :

$$f(x_1 * x_2^{-1}) = f(x_1) \Delta f(x_2)^{-1} \in H',$$

car $f(x_1) \in H'$, $f(x_2) \in H'$ et H' est un sous-groupe de (G', Δ) . Par conséquent, $x_1 * x_2^{-1} \in f^{-1}(H')$. Ainsi, on a montré que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G, *)$. □

Noyau et image d'un morphisme de groupes

Définition

Soient $(G, *)$ et (G', Δ) deux groupes et soit $f: G \rightarrow G'$ un morphisme. On note e' l'élément neutre de G' .

- $f(G)$ est appelé l'**image** de f et on le note $\text{Im } f$.
- $f^{-1}(\{e'\})$ est appelé le **noyau** de f et on le note $\ker f$.

Proposition

Si $f: G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupe, alors $\ker f$ est un sous-groupe de G et $\text{Im } f$ est un sous-groupe de G' .

C'est la conséquence de la proposition précédente.

Injectivité d'un morphisme de groupes

Lemme

Soient $(G, *)$ et (G', Δ) deux groupes et soit $f: G \rightarrow G'$ un morphisme. Pour tous $x, y \in G$, on a l'équivalence :

$$f(x) = f(y) \iff x * y^{-1} \in \ker f.$$

Démonstration.

Soit e' l'élément neutre de G' et soient $x, y \in G$. Alors on a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff f(x) \Delta f(y)^{-1} = e' \\ &\iff f(x * y^{-1}) = e' && (f \text{ est un morphisme}) \\ &\iff x * y^{-1} \in \ker f. \end{aligned}$$



Injectivité d'un morphisme de groupes

Théorème

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e et soit (G', Δ) un groupe. Alors un morphisme $f: G \rightarrow G'$ est injectif si et seulement si $\ker f = \{e\}$.

Démonstration.

On procède par double implication.

(\implies) Supposons que f est injective. Soit $x \in \ker f$, alors on a :

$$f(x) = e' = f(e),$$

donc $x = e$ par injectivité de f . Par conséquent, $\ker f = \{e\}$.

(\impliedby) Supposons que $\ker f = \{e\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, alors d'après le lemme précédent, on a $x * y^{-1} \in \ker f$. Puisque $\ker f = \{e\}$, alors $x * y^{-1} = e$, c'est-à-dire $x = y$. Par conséquent, f est injective. \square

Systemes lineaires

2 Systèmes linéaires

- Définitions
- Systèmes équivalents
- Algorithme de Gauss
- Résolution d'un système linéaire

2 Systèmes linéaires

- Définitions
- Systèmes équivalents
- Algorithme de Gauss
- Résolution d'un système linéaire

Système d'équations linéaires

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne l'ensemble \mathbb{R} ou l'ensemble \mathbb{C} , et n et p sont des entiers naturels non nuls.

Définition

On appelle **système de n équations linéaires à p inconnues** x_1, \dots, x_p un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,p} x_p = b_n, \end{cases}$$

où les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont les **coefficients du système** et les $b_i \in \mathbb{K}$ sont le **second membre**. Une solution de ce système est un vecteur $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant simultanément chaque équation du système. Si tous les b_i sont nuls, on dit que le système est **homogène**.

Matrice associée à un système

Définition

Soit (\mathcal{S}) un système linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,p} x_p = b_n. \end{cases}$$

On appelle **matrice** associée au système (\mathcal{S}) le tableau de nombres :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Définition

Soit (\mathcal{S}) un système linéaire de matrice A et notons B le vecteur colonne formé par le second membre :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On appelle **matrice augmentée** du système (\mathcal{S}) la matrice obtenue en juxtaposant A et B :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right).$$

Exemple

Soit le système de 5 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 \quad \quad + 2x_3 = -4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 \quad \quad = \frac{3}{2} \\ \quad \quad 3x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$$

La matrice associée A et la matrice augmentée M sont :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right).$$

2 Systèmes linéaires

- Définitions
- Systèmes équivalents
- Algorithme de Gauss
- Résolution d'un système linéaire

Définition

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** d'un système (ou d'une matrice) l'une des opérations suivantes :

- 1 $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger les lignes L_i et L_j .
- 2 $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$) : multiplication de la ligne L_i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- 3 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($i \neq j$) : ajouter λL_j à la ligne L_i .

Remarque. Les opérations élémentaires sont inversibles :

- 1 $L_i \leftrightarrow L_j$ est son propre inverse.
- 2 L'inverse de $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$.
- 3 L'inverse de $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$.

Définition

- On dit que deux systèmes sont **équivalents** si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
- On dit que deux matrices M et M' sont **équivalentes en lignes** si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Dans ce cas, on note : $M \underset{L}{\sim} M'$.

Remarques.

- ① Si on passe d'un système (\mathcal{S}_1) à un système (\mathcal{S}_2) par une suite d'opérations élémentaires O_1, O_2, \dots, O_m , alors on passe de (\mathcal{S}_2) à (\mathcal{S}_1) par la suite $O_m^{-1}, \dots, O_2^{-1}, O_1^{-1}$. Ainsi, si (\mathcal{S}_1) est équivalent à (\mathcal{S}_2) , alors (\mathcal{S}_2) est équivalent à (\mathcal{S}_1) . L'équivalence en lignes est une relation d'équivalence.
- ② Effectuer des opérations élémentaires sur un système revient à les effectuer sur sa matrice augmentée.

Lemme

Si (S_1) est un système linéaire et (S_2) est le système obtenu à partir de (S_1) après une opération élémentaire, alors les solutions de (S_1) sont des solutions de (S_2) .

Démonstration.

Soit $s = (s_1, \dots, s_p)$ une solution de (S_1) .

- Si l'opération élémentaire pour passer à (S_2) est un échange de lignes ou la multiplication d'une ligne par une constante non nulle, il est évident que s est solution de (S_2) .
- Si l'opération élémentaire est $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, alors puisque s est solution de L_i et de L_j , il est aussi solution de λL_j et de $L_i + \lambda L_j$, donc s est solution de (S_2) . □

Proposition

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Démonstration.

Soient (\mathcal{S}_1) et (\mathcal{S}_2) des systèmes linéaires équivalents. Puisqu'on passe de (\mathcal{S}_1) à (\mathcal{S}_2) par des opérations élémentaires, les solutions de (\mathcal{S}_1) sont des solutions de (\mathcal{S}_2) d'après le lemme précédent. Réciproquement, des opérations élémentaires permettent de passer de (\mathcal{S}_2) à (\mathcal{S}_1) , donc les solutions de (\mathcal{S}_2) sont aussi des solutions de (\mathcal{S}_1) . Les systèmes (\mathcal{S}_1) et (\mathcal{S}_2) ont donc les mêmes solutions. □

2 Systèmes linéaires

- Définitions
- Systèmes équivalents
- Algorithme de Gauss
- Résolution d'un système linéaire

Définition

Une matrice est **échelonnée en lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1 Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
- 2 À partir de la 2^e ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul (à partir de la gauche) est situé strictement à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Matrice échelonnée en lignes

Exemple

❶ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes.

❷ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes.

❸ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes.

❹ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes.

Définition

Dans une matrice échelonnée en lignes, on appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.

Exemple

Dans la matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les pivots sont dans l'ordre : 2, 1, -3, -2.

Proposition (admise)

Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée en lignes.

- La démonstration repose sur l'algorithme du pivot de Gauss, qui consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice pour mettre à zéro petit à petit des coefficients jusqu'à obtenir une matrice échelonnée équivalente.
- Le système associé à une matrice échelonnée en lignes peut ensuite être résolu facilement par « remontée ».

Exemple

On considère le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 15x_4 = 19 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 14 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

La matrice augmentée de (\mathcal{S}) est :

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 3 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right).$$

On commence par échanger les lignes 1 et 3 car il est plus facile d'effectuer les calculs avec un pivot qui vaut 1 ou -1 .

$$\begin{aligned}
M &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & 19 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_3 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{array} \right) L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3
\end{aligned}$$

Le système (\mathcal{S}) est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases} \quad (\mathcal{S}')$$

On passe l'inconnue x_4 dans le second membre et on la traite comme un paramètre. Le système est alors triangulaire en x_1, x_2, x_3 , on le résout par « remontée » : la dernière équation donne la valeur de x_3 , ce qui permet de trouver la valeur de x_2 dans la 2^e équation, ce qui permet de trouver la valeur de x_1 dans la 1^{re} équation.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 - 3x_4 \\ x_2 + x_3 = 1 - x_4 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 - 3x_4 \\ x_2 = -2 + x_4 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 + x_4 \\ x_3 = 3 - 2x_4. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient une description **paramétrique** des solutions du système : on a exprimé les inconnues x_1, x_2, x_3 en fonction de l'inconnue x_4 qui n'est pas contrainte et peut prendre n'importe quelle valeur dans \mathbb{R} . Les solutions de (S) sont donc tous les vecteurs de la forme :

$$(0, -2 + x_4, 3 - 2x_4, x_4),$$

avec $x_4 \in \mathbb{R}$ une variable libre. L'ensemble des solutions s'écrit :

$$S = \{(0, -2 + x_4, 3 - 2x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque. Géométriquement, on interprète S comme la droite dans un espace à 4 dimensions (!) passant par le point de coordonnées $(0, -2, 3, 0)$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $(0, 1, -2, 1)$.

Soit M la matrice augmentée échelonnée en lignes d'un système linéaire.

- Les lignes entièrement nulle de M correspondent à des équations « $0 = 0$ ». Elles peuvent être supprimées du système sans changer les solutions.
- Après avoir enlever les lignes nulles, si le pivot de la dernière lignes est dans la dernière colonne, alors le système contient une équation de la forme « $0 = b$ » avec $b \neq 0$ le pivot. Dans ce cas, le système n'a pas de solutions.

2 Systèmes linéaires

- Définitions
- Systèmes équivalents
- Algorithme de Gauss
- Résolution d'un système linéaire

Rang d'une matrice/d'un système linéaire

Proposition (admise)

Soient M_1 et M_2 deux matrices échelonnées en lignes. Si M_1 et M_2 sont équivalentes en lignes, alors le nombre de pivots de M_1 est égal au nombre de pivots de M_2 .

Cette proposition implique que peu importe la façon d'échelonner en lignes une matrice, le nombre de pivots est toujours le même.

Définition

- On appelle **rang d'une matrice** M , et on note $\text{rg}(M)$, le nombre de pivots obtenus après avoir échelonné en lignes M .
- On appelle **rang d'un système linéaire** le rang de sa matrice associée.

Remarque. Le rang est toujours plus petit que le nombre de lignes et le nombre de colonnes de la matrice.

Définition

Soit (\mathcal{S}) un système linéaire à p inconnues, de rang r et dont la matrice associée est échelonnée en lignes.

- On appelle **inconnues principales** les r inconnues correspondant aux colonnes contenant les pivots.
- On appelle **inconnues secondaires** les $p - r$ inconnues restantes.

Définition

- On dit qu'un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution.
- On dit qu'il est **compatible** s'il admet au moins une solution.

Exemple

Soit $(\mathcal{S}_{\alpha,\beta})$ le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = \alpha \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = \beta \end{cases} \quad (\mathcal{S}_{\alpha,\beta})$$

Exemple

Sa matrice augmentée est :

$$M_{\alpha,\beta} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & \alpha \\ 4 & -5 & 6 & \beta \end{array} \right).$$

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient la matrice échelonnée :

$$M'_{\alpha,\beta} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 5 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 9 \end{array} \right).$$

Le système est compatible si et seulement si $\alpha = -5$ et $\beta = -9$. Dans ce cas, le système est de rang 2, les inconnues principales sont x_1, x_2 et l'inconnue secondaire est x_3 .

Existence et unicité des solutions en fonction du rang

Proposition

Soit un système de n équations à p inconnues, de rang r , et soit $(A \mid B)$ sa matrice augmentée.

- *Si $r = n$, alors le système est compatible quel que soit B .*
- *Si $r < n$, toute forme échelonnée de A contient $n - r$ lignes nulles. Le système est compatible ssi ces lignes sont entièrement nulles dans la forme échelonnée de la matrice augmentée.*

Dans le cas où le système est compatible :

- *Si $r = p$, alors le système admet une unique solution.*
- *Si $r < p$, alors le système admet une infinité de solutions dépendant de $p - r$ paramètres.*

Corollaire

Si $r = n = p$, alors quel que soit B , le système admet une unique solution.

Proposition (admise)

Les solutions d'un système linéaire s'obtiennent en faisant la somme d'une solution particulière du système avec toutes les solutions du système homogène associé.

$$\begin{pmatrix} \text{solution générale} \\ \text{du système} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{une solution} \\ \text{particulière du système} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{solution générale} \\ \text{du sys. homogène} \end{pmatrix}$$

Remarque. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel, voir chapitre suivant.

Exemple

Soit un système linéaire à 5 inconnues, compatible et de rang 3. Supposons qu'après résolution (et après suppression des lignes « $0 = 0$ »), on obtienne le système :

$$\begin{cases} x_2 = 3 + 2x_1 + x_3 \\ x_4 = 2 + x_1 + 2x_3 \\ x_5 = -2 + 2x_1 - x_3. \end{cases}$$

On a 3 inconnues principales : x_2 , x_4 et x_5 , et 2 inconnues secondaires : x_1 et x_3 . L'ensemble des solutions s'écrit :

$$S = \{(x_1, 3 + 2x_1 + x_3, x_3, 2 + x_1 + 2x_3, -2 + 2x_1 - x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Tout élément $s \in S$ peut s'écrire :

$$s = \underbrace{(0, 3, 0, 2, -2)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{x_1(1, 2, 0, 1, 2) + x_3(0, 1, 1, 2, -1)}_{\text{solution générale du sys. homogène}}, \quad \text{avec } x_1, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Espaces vectoriels

3 Espaces vectoriels

- Espaces et sous-espaces vectoriels
- Familles de vecteurs
- Dimension d'un espace vectoriel

3 Espaces vectoriels

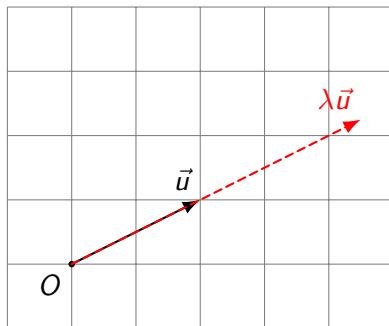
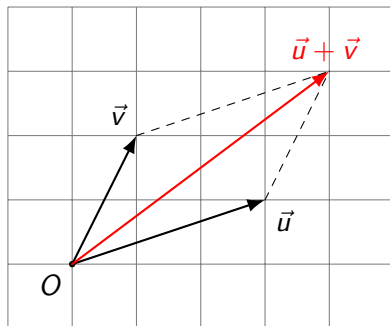
- Espaces et sous-espaces vectoriels
- Familles de vecteurs
- Dimension d'un espace vectoriel

Vecteurs géométriques (rappels de lycée)

Dans le plan ou l'espace, on définit deux opérations sur les vecteurs :

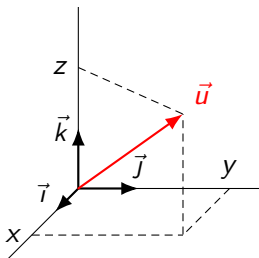
- ➊ l'addition vectorielle ;
- ➋ la multiplication par un scalaire.

Pour additionner deux vecteurs de même origine, on utilise la règle du parallélogramme.



Vecteurs géométriques (rappels de lycée)

- Fixons un repère de l'espace. On associe à tout vecteur un triplet (x, y, z) de nombres réels appelés coordonnées du vecteur.



- Si \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') , alors $\vec{u} + \vec{v}$ et $\lambda \vec{u}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$) ont pour coordonnées :

$$(x + x', y + y', z + z') \quad \text{et} \quad (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

- On définit ainsi deux opérations sur \mathbb{R}^3 :
 - ▶ une loi de composition interne $+$ (addition vectorielle) ;
 - ▶ une loi de composition externe \cdot (multiplication par un scalaire).

Généralisons les opérations $+$ et \cdot précédentes à \mathbb{R}^n et étudions leurs propriétés algébriques.

Définition

Sur \mathbb{R}^n , on définit une loi de composition interne $+$ par :

$$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Proposition (à vérifier chez vous)

$(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $\vec{0} = (0, \dots, 0)$, et le symétrique d'un n -uplet (x_1, \dots, x_n) est le n -uplet $(-x_1, \dots, -x_n)$.

Remarque. On définit l'addition de la même façon sur \mathbb{C}^n , avec les mêmes propriétés.

Définition

Sur \mathbb{R}^n , on définit une loi de composition externe \cdot (application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n) par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

En pratique, le symbole de la multiplication est omis : on note $\lambda \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.

Proposition (à vérifier chez vous)

La loi \cdot de \mathbb{R}^n vérifie :

- ❶ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, 1\vec{x} = \vec{x}$.
- ❷ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$.
- ❸ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$.
- ❹ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, (\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$.

Remarque. On définit la multiplication par un nombre complexe de la même façon sur \mathbb{C}^n , avec les mêmes propriétés.

D'autres exemples de « vecteurs »

On connaît d'autres objets mathématiques pour lesquels des opérations d'addition et de multiplication par un nombre sont définies et vérifient les mêmes propriétés que dans \mathbb{R}^n . Par exemple :

- les fonctions définies sur un même intervalle $[a, b]$;
- les polynômes à coefficients réels ;
- les suites numériques réelles ;
- ... (cherchez si vous connaissez d'autres exemples).

Les ensembles \mathbb{R}^n , $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, etc, sont des exemples d'**espaces vectoriels (réels)**.

Plus généralement, on appelle espace vectoriel n'importe quel ensemble dans lequel sont définies des lois $+$ et \cdot satisfaisant les mêmes propriétés algébriques que dans \mathbb{R}^n .

Jusqu'à présent, on a toujours utilisé les nombres réels comme scalaires dans le calcul vectoriel, mais rien n'empêche d'utiliser les nombres complexes à la place.

Définition

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} . Les éléments de \mathbb{K} sont appelés les **scalaires**.

Remarque. Plus généralement, dans la plupart des énoncés de ce cours, \mathbb{K} peut être n'importe quel corps.

Définition

On appelle **\mathbb{K} -espace vectoriel** (\mathbb{K} -e.v.) un ensemble E dont les éléments sont appelés **vecteurs**, muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe \cdot (application de $\mathbb{K} \times E$ dans E) telles que :

- ❶ $(E, +)$ est un groupe commutatif. De plus :
 - ▶ l'élément neutre est noté 0_E et est appelé **vecteur nul** de E .
 - ▶ le symétrique d'un vecteur u est noté $-u$ et est appelé **vecteur opposé** de u .
- ❷ La loi de composition externe vérifie :
 - ❶ $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$.
 - ❷ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$.
 - ❸ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$.
 - ❹ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois utilisées, on note simplement E l'espace vectoriel, sinon on le note $(E, +, \cdot)$.

Remarque. Dans un espace vectoriel, le vecteur nul est unique et l'opposé d'un vecteur est unique.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour tout $u \in E$, on a :

- ❶ $0 \cdot u = 0_E$.
- ❷ $(-1) \cdot u = -u$.

Démonstration.

Soit $u \in E$.

- ❶ $0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = (0 \cdot u) + (0 \cdot u)$, donc en ajoutant $-(0 \cdot u)$ à chaque membre, on obtient $0_E = 0 \cdot u$.
- ❷ $u + ((-1) \cdot u) = (1 \cdot u) + ((-1) \cdot u) = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0_E$, donc $(-1) \cdot u = -u$ par unicité du vecteur opposé de u . □

Notation. À partir de maintenant, on note $\lambda u + v$ le vecteur $(\lambda \cdot u) + v$.

Exemple

- \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 sont des \mathbb{R} -e.v.
- Plus généralement, \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -e.v. Le vecteur nul de \mathbb{K}^n est le n -uplet $(0, \dots, 0)$.
- \mathbb{C} est à la fois un \mathbb{R} -e.v. et un \mathbb{C} -e.v. Le vecteur nul de \mathbb{C} est le nombre 0.
- $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}(X)$ sont des \mathbb{K} -e.v. Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ et de $\mathbb{K}(X)$ est le polynôme nul.
- Si A est un ensemble, alors $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -e.v. pour les opérations d'addition d'applications et de multiplication d'une application par un scalaire. Le vecteur nul de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est l'application nulle (application constante égale à 0). En particulier :
 - ▶ l'ensemble des fonctions définies sur un même intervalle est un \mathbb{K} -e.v.
 - ▶ l'ensemble des suites numériques (réelles ou complexes) est un \mathbb{K} -e.v.

Proposition (à vérifier chez vous)

Soient $(E_1, +_1, \cdot_1), \dots, (E_n, +_n, \cdot_n)$ des \mathbb{K} -e.v. et soit $E = E_1 \times \dots \times E_n$.
On définit sur E :

- une loi de composition interne $+$ par (loi produit) :

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 +_1 v_1, \dots, u_n +_n v_n);$$

- une loi de composition externe \cdot par :

$$\lambda \cdot (u_1, \dots, u_n) = (\lambda \cdot_1 u_1, \dots, \lambda \cdot_n u_n);$$

où $u_i, v_i \in E_i$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -e.v.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle **famille finie de vecteurs** de E tout n -uplet $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

Remarque. Une famille peut comporter plusieurs fois le même vecteur et l'ordre des vecteurs dans la famille est important.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs. On dit que $u \in E$ est une **combinaison linéaire** de la famille (u_1, \dots, u_n) s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Cette écriture est appelée **décomposition** de u sur la famille (u_1, \dots, u_n) .

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 , soient $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (3, 1, 1)$ et $\vec{u}_3 = (-1, -3, -1)$. Alors le vecteur $\vec{v} = (5, 3, 2)$ est combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. En effet, on a par exemple $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$, ou encore $\vec{v} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3$.

Remarque. La décomposition d'un vecteur sur une famille n'est pas unique en général.

Proposition (combinaison linéaire de combinaisons linéaires)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs. Si $v_1, \dots, v_p \in E$ sont des combinaisons linéaires de (u_1, \dots, u_n) , alors toute combinaison linéaire de (v_1, \dots, v_p) est une combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_n) .

Démonstration.

Par hypothèse, il existe des scalaires $\lambda_{i,k} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad v_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k} u_k.$$

Soit $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i$ une combinaison linéaire de (v_1, \dots, v_p) . Alors on a :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{i,k} u_k \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \alpha_i \lambda_{i,k} u_k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_{i,k} u_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_{i,k} \right) u_k = \sum_{k=1}^n \beta_k u_k, \end{aligned}$$

où $\beta_k = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_{i,k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. □

Définition

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de E si :

- 1 $F \subset E$;
- 2 $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Exemple

Dans un espace vectoriel E , les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E .

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- ❶ $0_E \in F$;
- ❷ F est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda u + \mu v \in F.$$

Remarques.

- Noter la ressemblance avec le critère pour montrer qu'un ensemble est un sous-groupe (cf. chapitre 1).
- Si $0_E \notin F$, alors F ne peut pas être un sous-espace vectoriel (tout s.e.v. de E contient nécessairement le vecteur nul).
- En général, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on montre que c'est un s.e.v. d'un espace vectoriel E connu.

Exemple

Montrons que $D = \{(\textcolor{red}{x}, \textcolor{blue}{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\textcolor{red}{x} - \textcolor{blue}{y} = 0\}$ est un s.e.v. de \mathbb{R}^2 .

- 1 $(2 \times \textcolor{red}{0}) - \textcolor{blue}{0} = 0$ donc $(\textcolor{red}{0}, \textcolor{blue}{0}) \in D$.
- 2 Soient $\vec{u} = (\textcolor{red}{x}, \textcolor{blue}{y}) \in D$, $\vec{v} = (\textcolor{red}{x}', \textcolor{blue}{y}') \in D$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors x, y, x', y' vérifient $2\textcolor{red}{x} - \textcolor{blue}{y} = 0$ et $2\textcolor{red}{x}' - \textcolor{blue}{y}' = 0$.

Montrons que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in D$. Les composantes de ce vecteur sont $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda\textcolor{red}{x} + \mu\textcolor{red}{x}', \lambda\textcolor{blue}{y} + \mu\textcolor{blue}{y}')$. Calculons :

$$2(\lambda\textcolor{red}{x} + \mu\textcolor{red}{x}') - (\lambda\textcolor{blue}{y} + \mu\textcolor{blue}{y}') = \lambda \underbrace{(2\textcolor{red}{x} - \textcolor{blue}{y})}_{=0} + \mu \underbrace{(2\textcolor{red}{x}' - \textcolor{blue}{y}')}_{=0} = 0,$$

donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in D$.

Par conséquent D est un s.e.v. de \mathbb{R}^2 .

Remarque. Géométriquement, D est une droite passant par l'origine du repère. Plus généralement, toutes les droites et les plans passant par l'origine sont des s.e.v. de \mathbb{R}^3 .

Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition

L'intersection de deux s.e.v. d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un s.e.v. de E .

Démonstration.

Soient F et G des s.e.v. d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

- ① $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des s.e.v. de E , donc $0_E \in F \cap G$.
- ② Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in F \cap G$:
 - ▶ $\lambda u + \mu v \in F$ par stabilité de F par combinaisons linéaires.
 - ▶ $\lambda u + \mu v \in G$ par stabilité de G par combinaisons linéaires.

Donc $\lambda u + \mu v \in F \cap G$.

Par conséquent, $F \cap G$ est un s.e.v. de E . □

Proposition

Toute intersection (finie ou infinie) de s.e.v. d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un s.e.v. de E .

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est un s.e.v. de E , appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille (u_1, \dots, u_n) . On note cet ensemble $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration.

Notons $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

- ① On a $0_E = 0u_1 + \dots + 0u_n$ donc $0_E \in F$.
- ② Si $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda u + \mu v \in F$ d'après une proposition précédente (combinaison linéaire de combinaisons linéaires).

Par conséquent, F est un s.e.v. de E . □

Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs. Alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs u_1, \dots, u_n . On a alors :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v. de } E \\ u_1, \dots, u_n \in F}} F.$$

Démonstration.

Soit F un s.e.v. de E contenant les vecteurs u_1, \dots, u_n . Montrons que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset F$.

Soit $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Puisque $u_1, \dots, u_n \in F$ et que F est un s.e.v., on a $u \in F$ (stabilité par combinaisons linéaires). Par conséquent, on a montré que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset F$. □

Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E . L'intersection de tous les sous-espaces de E qui contiennent A est un sous-espace vectoriel de E . On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par A et on le note $\text{Vect}(A)$.

Remarque. Si $A = \{u_1, \dots, u_n\}$, alors $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Proposition

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E . Alors $\text{Vect}(A)$ est le plus petit s.e.v. de E contenant A .

Démonstration.

Par définition, $\text{Vect}(A)$ est un s.e.v. de E . De plus, si F est un s.e.v. qui contient A , alors $\text{Vect}(A) \subset F$ puisque $\text{Vect}(A)$ est l'intersection de F avec d'autres sous-espaces. □

Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient A et B des parties de E . Si $A \subset B$ alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Démonstration.

On a $A \subset B \subset \text{Vect}(B)$. Ainsi, $\text{Vect}(B)$ est un espace vectoriel qui contient A , donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$. □

Somme de sous-espaces vectoriels

Si F et G sont des s.e.v. d'un espace vectoriel E , alors $F \cup G$ n'est pas un s.e.v. en général (il n'est pas stable pour l'addition).

Exemple

Dans \mathbb{R}^2 , soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Alors F et G sont des s.e.v. de \mathbb{R}^2 , mais pas $F \cup G$: on a $\vec{u} = (1, 0) \in F \cup G$ et $\vec{v} = (0, 1) \in F \cup G$, mais $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1) \notin F \cup G$.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soient F et G des s.e.v. de E . L'ensemble :

$$F + G = \{u + v : u \in F \text{ et } v \in G\},$$

est le plus petit s.e.v. qui contient $F \cup G$. Ce sous-espace est appelé la **somme** des sous-espaces F et G .

Remarque. Autrement dit, on a $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

Démonstration.

Notons $S = F + G$. Montrons que S est un s.e.v. de E .

- 1 On a $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E \in S$.
- 2 Soient $w, w' \in S$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors il existe $u, u' \in F$ et $v, v' \in G$ tels que $w = u + v$ et $w' = u' + v'$. Alors :

$$\lambda w + \mu w' = \lambda(u + v) + \mu(u' + v') = \underbrace{\lambda u + \mu u'}_{\in F} + \underbrace{\lambda v + \mu v'}_{\in G} \in S.$$

Ainsi, on a montré que S est un s.e.v. de E .

Montrons à présent que $F + G$ est le plus petit s.e.v. contenant $F \cup G$, c'est-à-dire que $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$. On procède par double inclusion :

- On a clairement $F + G \subset \text{Vect}(F \cup G)$.
- Puisque $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a $F \cup G \subset F + G$. Ainsi, $F + G$ est un espace vectoriel qui contient $F \cup G$, donc $\text{Vect}(F \cup G) \subset F + G$.

Par conséquent, $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$. □

Sous-espaces vectoriels en somme directe

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soient F et G des s.e.v. de E . On dit que F et G sont en **somme directe** si tout élément de $F + G$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . Dans ce cas, on note $F \oplus G$ la somme de F et de G .

Exemple (contre-exemple)

Dans \mathbb{R}^3 , soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$. Le vecteur $\vec{u} = (1, 3, 2)$ se décompose de 2 façons différentes sur $F + G$:

$$\vec{u} = (1, 1, 0) + (0, 2, 2) = (2, 2, 1) + (-1, 1, 1).$$

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soient F et G des s.e.v. de E . Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

On démontre la proposition par double implication.

Démonstration (\Rightarrow).

Supposons que F et G sont en somme directe. Soit $u \in F \cap G$, alors on a les décompositions :

$$u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G}.$$

Par unicité de la décomposition, on a $u = 0_E$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$. □

Démonstration (\Leftarrow).

Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $u \in F + G$, montrons que la décomposition de u comme somme de vecteurs de F et G est unique. Soient $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$ tels que $u = v + w = v' + w'$. Alors :

$$\underbrace{v - v'}_{\in F} = \underbrace{w' - w}_{\in G},$$

donc $v - v'$ et $w' - w$ appartiennent à $F \cap G = \{0_E\}$. Par conséquent, $v - v' = 0_E$ et $w' - w = 0_E$, c'est-à-dire $v = v'$ et $w = w'$. Ainsi, la décomposition de u est unique. □

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soient F et G des s.e.v. de E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\forall u \in E, \quad \exists!(v, w) \in F \times G, \quad u = v + w.$$

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soient F et G des s.e.v. de E . Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si :

- ① $F + G = E$;
- ② F et G sont en somme directe.

Dans ce cas, on note $F \oplus G = E$.

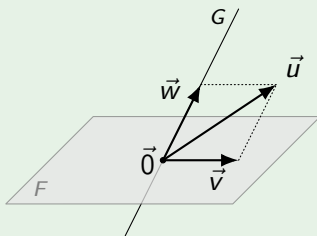
Sous-espaces supplémentaires

Démonstration.

Le point 1 est équivalent à l'existence d'une décomposition des vecteurs de E comme somme de vecteurs de F et de G , et le point 2 est équivalent à l'unicité d'une telle décomposition. \square

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 , tout plan F passant par $(0,0,0)$ et toute droite G non contenue dans F passant par $(0,0,0)$ sont supplémentaires.



3 Espaces vectoriels

- Espaces et sous-espaces vectoriels
- Familles de vecteurs
- Dimension d'un espace vectoriel

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E . On dit que (u_1, \dots, u_n) est une **famille génératrice** de E (ou que u_1, \dots, u_n **engendrent** E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs u_1, \dots, u_n , c'est-à-dire si $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = E$.

Exemple

Les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ engendrent \mathbb{R}^3 , de même que les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice.

Démonstration.

Si un vecteur est combinaison linéaire d'une famille (u_1, \dots, u_n) , il est à fortiori combinaison linéaire de la famille $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p})$. \square

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une famille génératrice de E . Alors $(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E si et seulement si $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_n)$.

Démonstration.

On procède par double implication.

(\implies) Supposons que $(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_n)$ est génératrice. Puisque $u_p \in E$, alors u_p est combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_n)$ par définition d'une famille génératrice.

(\impliedby) Supposons que u_p est combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_n)$. Les vecteurs u_1, \dots, u_n sont combinaisons linéaires de $(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_n)$, donc toute combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_n) , c.-à-d. tout élément de E , est combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_n)$ d'après une proposition précédente (combinaison linéaire de combinaisons linéaires). □

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① L'un des vecteurs u_i est combinaison linéaire des autres.
- ② Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$.

Dans ce cas, on dit que la famille (u_1, \dots, u_n) est **liée**.

Remarques.

- ① Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- ② Une famille (u, v) est liée si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration de $(1 \implies 2)$.

Supposons que $u_{i_0} \in \text{Vect}(\{u_i : i \neq i_0\})$. Alors il existe des scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i u_i.$$

Par conséquent :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{i_0-1} u_{i_0-1} + (-1) u_{i_0} + \lambda_{i_0+1} u_{i_0+1} + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E. \quad \square$$

Démonstration de $(2 \implies 1)$.

Supposons qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Soit i_0 tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, alors on a :

$$\lambda_{i_0} u_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n (-\lambda_i) u_i, \quad \text{donc} \quad u_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \right) u_i.$$



Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E . On dit que la famille est **libre** si elle n'est pas liée. On dit alors que les vecteurs u_1, \dots, u_n sont **linéairement indépendants**.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ❶ *La famille (u_1, \dots, u_n) est libre.*
- ❷ *Aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.*
- ❸ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0).$

Démonstration.

Prendre la négation des assertions de la proposition précédente.



Exemple

Dans \mathbb{R}^4 , soient $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, -2, 1)$ et $\vec{u}_3 = (2, 0, -1, 1)$. Cherchons si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0}.$$

Cette égalité est équivalente au système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système (p. ex. pivot de Gauss), on trouve que l'unique solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

Proposition (à faire chez vous)

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une famille libre. Soit $u \in E$, alors la famille (u_1, \dots, u_n, u) est libre si et seulement si $u \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration.

On procède par double implication.

- (\implies) Par contraposée, si $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors la famille (u_1, \dots, u_n, u) est liée.
- (\impliedby) Par contraposée, supposons que (u_1, \dots, u_n, u) est liée. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda u = 0_E. \quad (*)$$

Si on avait $\lambda = 0$, alors $(*)$ serait une combinaison linéaire nulle de la famille (u_1, \dots, u_n) , donc par liberté de cette famille, tous les λ_i seraient nuls, contradiction. Par conséquent, $\lambda \neq 0$ et on a :

$$u = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) u_i \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$



Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E . On dit que (u_1, \dots, u_n) est une base de E si c'est famille à la fois libre et génératrice.

Exemple

- ❶ Dans \mathbb{K}^n , les vecteurs :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1),$$

forment une base appelée la **base canonique** de \mathbb{K}^n .

- ❷ Dans $\mathbb{K}_n[X]$, les polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n$ forment une base appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Si $a \in \mathbb{K}$, alors les polynômes $1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n$ forment également une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (formule de Taylor).

Exemple

Dans \mathbb{R}^4 , soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + 3t = 0\}$. Alors F est un s.e.v. de \mathbb{R}^4 . Cherchons une base de F . Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \in F &\iff 2x - y + z + 3t = 0 \\ &\iff y = 2x + z + 3t \\ &\iff \vec{u} = (x, 2x + z + 3t, z, t) \\ &\iff \vec{u} = x\vec{u}_1 + z\vec{u}_2 + t\vec{u}_3,\end{aligned}$$

avec $\vec{u}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 3, 0, 1)$. Ainsi, on a $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, c.-à-d. la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est génératrice de F . On vérifie facilement qu'elle est libre (le vérifier !), donc c'est une base de F .

Théorème

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit (u_1, \dots, u_n) une base de E . Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_n) :

$$\forall u \in E, \quad \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

*Cet unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé les **coordonnées** de u dans la base (u_1, \dots, u_n) .*

Démonstration.

Une base est une famille génératrice, donc tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_n) . Il reste à montrer l'unicité de cette combinaison. Soit $u \in E$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n.$$

Alors on a $(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = 0_E$. Puisque la famille (u_1, \dots, u_n) est libre, tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls, c.-à-d. $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i , d'où l'unicité. □

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v.

- Une **famille infinie de vecteurs** de E est une famille $(u_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble infini.
- On dit qu'un vecteur $u \in E$ est combinaison linéaire de $(u_i)_{i \in I}$ si u est combinaison linéaire d'une sous-famille **finie** de $(u_i)_{i \in I}$, c.-à-d. s'il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que u est combinaison linéaire de $(u_{i_1}, \dots, u_{i_n})$.

Attention !

En algèbre linéaire, on ne manipule que des sommes **finies** de vecteurs.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille infinie de vecteurs de E .

- On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $(u_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire si :

$$\forall u \in E, \quad \exists i_1, \dots, i_n \in I, \quad u \in \text{Vect}(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}).$$

- On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre si toute sous-famille finie de $(u_i)_{i \in I}$ est libre, c'est-à-dire si :

$$\forall i_1, \dots, i_n \in I, \quad (u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \text{ est libre.}$$

Exemple

Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre et génératrice : c'est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée la **base de canonique** de $\mathbb{K}[X]$.

3 Espaces vectoriels

- Espaces et sous-espaces vectoriels
- Familles de vecteurs
- Dimension d'un espace vectoriel

Espace vectoriel de dimension finie

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. On dit que E est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie de E . Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

Lemme (admis)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. Si E possède une famille libre de p vecteurs et une famille génératrice de m vecteurs, alors $p \leq m$ (la taille d'une famille libre est toujours inférieure à la taille d'une famille génératrice).

Exemple

- 1 \mathbb{K}^n est dimension finie.
- 2 $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie.
- 3 $\mathbb{K}[X]$ est dimension infinie (car il possède une famille libre infinie, donc aucune famille génératrice ne peut être finie d'après le lemme).

Théorème (de la base incomplète)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Si (u_1, \dots, u_p) est une famille libre et si $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice (finie ou infinie) de E , alors il existe une base de E de la forme :

$$(u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_n}),$$

(avec $n = 0$ si (u_1, \dots, u_p) est déjà une base de E).

Corollaire

Soit E un \mathbb{K} -e.v. non nul de dimension finie.

- ❶ *Il existe une base de E .*
- ❷ *De toute famille génératrice $(v_i)_{i \in I}$ de E , on peut extraire une base $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$.*

Démonstration du théorème de la base incomplète.

On construit par récurrence une suite de familles libres par ajouts successifs de vecteurs de la famille $(v_i)_{i \in I}$, en s'arrêtant quand on obtient une base.

- Posons $\mathcal{L}_0 = (u_1, \dots, u_p)$. C'est une famille libre par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{L}_n = (u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ est libre. Si \mathcal{L}_n est génératrice, alors c'est une base ; le théorème est démontré. Sinon, il existe $i_{n+1} \in I$ tel que $v_{i_{n+1}} \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$. Posons $\mathcal{L}_{n+1} = (u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_n}, v_{i_{n+1}})$. Cette famille est libre d'après une proposition précédente.

Montrons qu'il existe n tel que \mathcal{L}_n soit une base de E . Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, on aurait une suite $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de familles libres de tailles strictement croissantes. Or d'après le lemme précédent, la taille d'une famille libre est toujours inférieure à la taille d'une famille génératrice de E . Puisque E est de dimension finie, la taille des familles libres est majorée, donc elle ne peut pas croître indéfiniment ; contradiction. □

Théorème

*Si E est un \mathbb{K} -e.v. non nul de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la **dimension** de E et on le note $\dim(E)$. Si $E = \{0_E\}$, on convient que $\dim(E) = 0$.*

Démonstration.

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , de tailles respectives n et n' . Puisque \mathcal{B} est une famille libre et que \mathcal{B}' est une famille génératrice, on a $n \leq n'$. En échangeant les rôles de \mathcal{B} et \mathcal{B}' , on obtient l'inégalité contraire $n' \leq n$. Par conséquent, $n = n'$. □

Dimension d'un espace vectoriel

Exemple

- ① $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- ② $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.
- ③ $\dim(\mathbb{C}) = 2$ si \mathbb{C} est vu comme un \mathbb{R} -e.v. mais $\dim(\mathbb{C}) = 1$ si \mathbb{C} est vu comme un \mathbb{C} -e.v.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n et soit \mathcal{F} une famille de p vecteurs de E .

- ① *Si \mathcal{F} est libre alors $p \leq n$, avec égalité si et seulement si \mathcal{F} est une base de E .*
- ② *Si \mathcal{F} est génératrice alors $p \geq n$, avec égalité si et seulement si \mathcal{F} est une base de E .*

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition (admis)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Si F est un s.e.v. de E , alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n et soit F un s.e.v. de E .

- Si $\dim(F) = 1$, on dit que F est une **droite vectorielle** de E .
- Si $\dim(F) = 2$, on dit que F est un **plan vectoriel** de E .
- Si $\dim(F) = n - 1$, on dit que F est un **hyperplan vectoriel** de E .

Exemple

Dans \mathbb{R}^4 , soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + 3t = 0\}$. On a vu précédemment que F possède une base de 3 vecteurs, donc $\dim(F) = 3$.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. et soient (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs. On appelle **rang** de (u_1, \dots, u_n) , et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$, la dimension (finie) du s.e.v. $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Remarque. Le rang d'une famille est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants de cette famille.

Théorème (formule de Grassmann)

Soient F et G des s.e.v. de dimensions finies d'un \mathbb{K} -e.v. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Corollaire

Soient F et G des s.e.v. de dimensions finies d'un \mathbb{K} -e.v. Alors :

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G),$$

avec égalité si et seulement si F et G sont somme directe.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie et soient F et G des s.e.v. de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ❶ $E = F \oplus G$ (c.-à-d. F et G sont supplémentaires dans E).
- ❷ $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- ❸ $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $E = F + G$.

Démonstration.

On montre que $1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$.

(1 \implies 2) Si $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ d'après la formule de Grassmann. De plus, F et G sont en somme directe donc $F \cap G = \{0_E\}$.

(2 \implies 3) Si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$, alors d'après la formule de Grassmann, on a $\dim(E) = \dim(F + G)$, donc $E = F + G$.

(3 \implies 1) Si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $E = F + G$, alors d'après la formule de Grassmann, on a $\dim(F \cap G) = 0$, donc $F \cap G = \{0_E\}$. Par conséquent F et G sont en somme directe, d'où $E = F \oplus G$. □

Existence de supplémentaires

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie et soit F un s.e.v. de E . Alors il existe un s.e.v. G tel que F et G sont supplémentaires dans E .

Démonstration.

Posons $n = \dim(E)$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F , que l'on complète avec des vecteurs e_{p+1}, \dots, e_n tels que (e_1, \dots, e_n) soit une base de E . Posons $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On a donc $\dim(F) = p$ et $\dim(G) = n - p$, d'où $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Enfin, pour tout vecteur $u \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}_{\in F} + \underbrace{\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n}_{\in G},$$

donc $E = F + G$. D'après la proposition précédente, $E = F \oplus G$. □