

TD4 – Intégrales de fractions rationnelles

Exercice 1. Déterminer la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes (on ne demande pas de calculer les coefficients).

$$1. F_1(X) := \frac{X^3 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}.$$

$$2. F_2(X) := \frac{1}{(X+3)(X-2)^2}.$$

$$3. F_3(X) := \frac{1}{(X+3)^2(X-2)^2}.$$

$$4. F_4(X) := \frac{X^3 + 1}{(X^2 + 1)(X-3)}.$$

$$5. F_5(X) := \frac{X^2}{X^4 + 2X^3 - 2X - 1}.$$

$$6. F_6(X) := \frac{X^3 + 1}{(X^2 - 1)^2}.$$

$$7. F_7(X) := \frac{1}{(X^2 + X + 2)(X^2 + 2X + 1)}.$$

$$8. F_8(X) := \frac{X^3 + 1}{X^5 + X}.$$

Exercice 2. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes.

$$1. F_1(X) := \frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}.$$

$$3. F_3(X) := \frac{X^7 + 1}{X^2 + 1}.$$

$$5. F_5(X) := \frac{2X^3 + 3X^2 + 5}{X^2 + X + 1}.$$

$$2. F_2(X) := \frac{1}{X(X+1)^2}.$$

$$4. F_4(X) := \frac{X^2}{(X-1)^3}.$$

$$6. F_6(X) := \frac{1}{X^4 + X^2 + 1}.$$

Exercice 3. Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$1. f_1(x) := \frac{1}{x^2 - 4x + 2}$$

$$4. f_4(x) := \frac{2x - 3}{(x^2 - 1)(2x + 3)}$$

$$7. f_7(x) := \frac{x + 1}{x^4(x^2 + x + 1)}$$

$$2. f_2(x) := \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2}$$

$$5. f_5(x) := \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

$$8. f_8(x) := \frac{x}{(x-1)^5(x^2 + 1)}$$

$$3. f_3(x) := \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

$$6. f_6(x) := \frac{x^2(x^2 + 1)}{x^2 + 4}$$

$$9. f_9(x) := \frac{1}{x^6 - 1}$$

Exercice 4.

1. En développant $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$ et $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$, montrer que si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

2. À l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer les primitives des fonctions suivantes :

a. $f_1(x) := \frac{1}{\sin x}$

b. $f_2(x) := \frac{1}{1 + \cos x}$

c. $f_3(x) := \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

Remarque : des changements de variables plus simples sont parfois possibles, voir les règles de Bioche.