Algèbre linéaire 1
L1 MIPI
2025 – 2026

Livret d'exercices

Les questions marquées par une étoile $\star$ sont des questions d'approfondissement.

1 Nombres complexes

1.1 Forme algébrique

Exercice 1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants, et donner leur partie réelle et imaginaire.

1. $z_1 := -4 + 7\mathrm{i} - (2 + 4\mathrm{i})$.
2. $z_2 := \mathrm{i}(3 + 2\mathrm{i}) - 1 + 3\mathrm{i}$.
3. $z_3 := (2 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$.
4. $z_4 := (2 - 5\mathrm{i})(-5 + 2\mathrm{i})$
5. $z_5 := (4 - 3\mathrm{i})^2$.
6. $z_6 := (2 - \mathrm{i})^3$.
7. $z_7 := (a + \mathrm{i}b)^2$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $z_8 := (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient a et b des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$.
2. Quel est la forme algébrique de l'inverse de i ?

Exercice 3. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 := \dfrac{2}{\mathrm{i}}$.
2. $z_2 := \dfrac{2 - \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}}$.
3. $z_3 := \left(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)^2$.
4. $z_4 := \dfrac{2 - 5\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} - \dfrac{2 + 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$.
5. $z_5 := \dfrac{2}{2 + \frac{1}{1+\mathrm{i}}}$
6. $z_6 := \dfrac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}$

Exercice 4.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2\mathrm{i}z + z + 1 = 2z - 4\mathrm{i} - 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 - \mathrm{i}z_2 = -2 - 3\mathrm{i} \\ 2z_1 + (1 - \mathrm{i})z_2 = 3 - 5\mathrm{i}. \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Calculer i^2, i^3 et i^4.
2. En déduire la valeur de i^n en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.
3. Calculer la somme :

$$S := \sum_{k=0}^{2025} \mathrm{i}^k.$$

Exercice 6. Calculer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := -3 + 4\mathrm{i}$,
2. $z_2 := \dfrac{1}{3} - \dfrac{\mathrm{i}}{6}$,
3. $z_3 := -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$,
4. $z_4 := \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$,
5. $z_5 := \sqrt{3} + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$,
6. $z_6 := \dfrac{1 - 3\mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}}$.

Exercice 7. Montrer que les nombres suivants sont réels sans calculer le produit des quatre facteurs :

1. $z := (2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$,

2. $w := (1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$.

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ et soit $Z := \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et soit $Z := \dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}$. On note $z = x + \mathrm{i}y$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble $E := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid Z \in \mathbb{R}\}$.

3. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble $F := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\}$.

Exercice 10. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions des équations ci-dessous.

1. $(1+2\mathrm{i})z - 3 + 5\mathrm{i} = 0$.

2. $2z + 3\overline{z} = 5$.

3. $\overline{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$.

4. $2z + 6\overline{z} = 3 + 2\mathrm{i}$.

5. $z^2 = |z|$.

6. $|z| = |1-z| = \frac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.

Exercice 11*.

1. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(z) \leq |\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ et $\mathfrak{Im}(z) \leq |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$.

2. Montrer que $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$.
Indication : on rappelle que $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.

3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$.

4. En déduire que $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| = |z| + |w| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z = \lambda w$ ou $w = \lambda z$.

Exercice 12*. Soient z et w des nombres complexes.

1. Montrer que $|z| \leq |z-w| + |w|$.

2. En déduire que $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

3. Soit $k \in \,]0,1[$. Montrez que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq k \implies 1 - k \leq |1+z| \leq 1+k$.

4. En faisant un dessin, déterminer les cas d'égalité.

Exercice 13.

1. Établir l'identité du parallélogramme :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big).$$

2*. Montrer la formule de polarisation :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad zw = \frac{1}{4}\Big(\big|z+\overline{w}\big|^2 - \big|z-\overline{w}\big|^2 + \mathrm{i}\big|z+\mathrm{i}\overline{w}\big|^2 - \mathrm{i}\big|z-\mathrm{i}\overline{w}\big|^2\Big).$$

Exercice 14. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := -7$.

2. $z_2 := 5 - 12\mathrm{i}$.

3. $z_3 := -3 - 4\mathrm{i}$.

4. $z_4 := 8\mathrm{i}$.

Exercice 15. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions des équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2. $z^2 + (4-6\mathrm{i})z = 5 + 14\mathrm{i}$.

3. $z^2 - 3(z-1) = \mathrm{i}$.

4. $z^4 = 1$.

5. $z^4 - (5-14\mathrm{i})z^2 - 2(5\mathrm{i}+12) = 0$.

6. $z^4 + z^2 - 1 + 3\mathrm{i} = 0$.

Exercice 16*. Déterminer et interpréter géométriquement l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{3z+4}{3z+8\mathrm{i}}\right| = 1.$
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
3. $z^2 - \overline{z} \in \mathbb{R}.$
4. $\dfrac{z-3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+2} \in \mathbb{R}.$

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^2 - 2\mathrm{i}}{z\overline{z}+1}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 4\mathrm{i}$.
3. En déduire que $f(z)$ est réel si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = \lambda + \frac{1}{\lambda}\mathrm{i}$.
4. Montrer que $f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda(1+\mathrm{i})$ ou $z = \lambda(1-\mathrm{i})$.

Exercice 18. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère le polynôme :

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

1. Exprimer en fonction de $y \in \mathbb{R}$ les parties réelles et imaginaires de $f(\mathrm{i}y)$.
2. En déduire les solutions imaginaires pures de l'équation $f(z) = 0$.
3. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = (z^2+9)(z^2+az+b)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 19*. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $4z^2 + 8|z| - 3 = 0.$
2. $z^2 + \overline{z} - 1 = 0.$
3. $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1).$

1.2 Forme trigonométrique

Exercice 20.

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
   - **a.** $z_1 := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
   - **b.** $z_2 := \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   - **c.** $|z_3| = 7$ et $\arg(z_3) \equiv \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
   - **a.** $z_1 := 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$
   - **b.** $z_2 := -4$
   - **c.** $z_3 := \mathrm{i} - 1$
   - **d.** $z_4 := 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}\sqrt{3}).$
   - **e.** $z_5 := \frac{-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$
   - **f*.** $z_6 := \sin(2) + \mathrm{i}\cos(2).$

Exercice 21. Mettez sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 := \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^8.$
2. $z_2 := \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^6.$
3. $z_3 := (-1+\mathrm{i})^{100}.$
4. $z_4 := \left(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\right)^{2025}.$

Exercice 22. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

1. $E_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+2\mathrm{i}| = 3\right\}.$
2. $E_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} \bmod \frac{\pi}{2}\right\}.$
3. $E_3 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 4\right\}.$
4. $E_4 := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-i|\right\}.$

Exercice 23. Soit $z_1 := 1+\mathrm{i}$ et $z_2 := \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1. Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.
2. Donner les formes algébrique et trigonométrique du produit $z_1 z_2$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, et les mettre sous forme trigonométrique.

1. $z := -e^{i\theta}$. **2.** $w := i\,e^{i\theta}$.

Exercice 25. Soit $z_1 := 2+2i\sqrt{3}$ et $z_2 := 2-2i\sqrt{3}$.

1. **a.** Déterminer la forme trigonométrique des nombres z_1 et z_2.
b. En déduire les racines carrées complexes de z_1 et de z_2 sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

2. **a.** Déterminer les nombres complexes Z qui sont solutions de l'équation $Z^2-4Z+16=0$.
b. En déduire les nombres complexes z qui sont solutions de l'équation $z^4-4z^2+16=0$.

Exercice 26. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :

a. $\cos^2(\theta)$. **c★.** $\sin^4(\theta)$.
b. $\sin^3(\theta)$. **d★.** $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$.

2. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

a. $\cos(2\theta)$. **c★.** $\cos(3\theta)\sin(4\theta)$.
b. $\sin(3\theta)$. **d★.** $\sin(6\theta)$.

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la somme $E_n := \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

2. En déduire la valeur des sommes :

a. $C_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$. **b.** $S_n := \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$. **c★.** $T_n := \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$.

Exercice 28. Soient $\theta, \varphi \in \left]-\pi,\pi\right[$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := 1+e^{i\theta}$. **2.** $z_2 := e^{i\theta}+e^{i\varphi}$. **c★.** $z_3 := i\,e^{i\theta}-e^{i\varphi}$.

Indication : factorisation de l'angle moitié.

Exercice 29. Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{U}$ tel que $zw \neq -1$, on a $\frac{z+w}{1+zw} \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que l'argument principal de z appartienne à $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$. Calculer le module et un argument de :

$$\frac{1+z^3}{z^2}.$$

Exercice 31. Soit $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Montrer que $\arg(1+z) \equiv \frac{\pi}{8}\ (2\pi)$.

2. Montrer que $|1+z| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

3. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

1.3 Racines n-ièmes

Exercice 32. Déterminer les racines cubiques et les racines 4es des nombres complexes suivants, sous forme exponentielle :

1. $z_1 := 1$. **2.** $z_2 := i$. **3.** $z_3 := -1+i$. **4.** $z_5 := \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 33. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les nombres $w \in \mathbb{C}$ qui sont solutions de l'équation $w^2-2\cos(\theta)w+1=0$.

2. En déduire les nombres $z \in \mathbb{C}$ qui sont solutions de l'équation $z^{2n}-2\cos(\theta)z^n+1=0$.

Exercice 34. Soit $\omega := e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Montrer que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$.

2. Montrer que $\omega+\omega^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\omega^2+\omega^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont solutions de l'équation $4x^2+2x-1=0$.

4. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 35. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

2⋆. Calculer $S := \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\omega^k$. *Indication : calculer $S-\omega S$.*

2 Systèmes linéaires

Exercice 36. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire :

$$\begin{cases} -3x-2y-z+2t=-1 \\ 4y+z-t=0 \\ z+t=0 \\ 2t=-4. \end{cases}$$

Exercice 37. On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} -x+4y-z+2t+s=-1 \\ -y+3z+3t=0 \\ -2z+3t=2 \end{cases}$$

1. Que vaut le rang de ce système ?

2. Déterminer une description paramétrique de l'ensemble des solutions du système.

Exercice 38. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants par la méthode du pivot du Gauss.

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{5}y=-1 \\ \frac{3}{5}x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{5}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+3y+z=4 \\ 3x+y+2z=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+y-2z=-3 \\ 2x+y-2z=-2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-3y-z=-2 \\ x+y-3z=-1 \\ -x+2y=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+6y-4z=1 \\ x+3y-2z=4 \\ 2x+y-3z=-7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+2z=4 \\ x-2y+3z=2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y+3z+2t=0 \\ -2x+3y-5z+t=0 \\ 3x-4y+7z-3t=-5 \\ 2x+3y+8z+2t=-6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+2y-z+3t=-1 \\ 3x+y+z+2t=6 \\ x-3y+3z-t=5 \\ 5x+5y-z+7t=5 \end{cases}$

Exercice 39. Résoudre l'équation $2y-z+3t=1$ dont les inconnues sont $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 40. Discuter l'existence et l'unicité des solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m+1). \end{cases}$

4. $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m+1. \end{cases}$

Exercice 41. Discuter selon $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ l'existence et l'unicité des solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + ay + bz = a \\ x + by + az = b \\ ax + y + bz = a \\ bx + y + az = b. \end{cases}$

Exercice 42. Résoudre le système de n équations suivant, d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 3x_n = 1 \\ \quad \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 1. \end{cases}$$

3 Espaces vectoriels

3.1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 43. Représenter les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants, puis déterminer ceux qui sont stables par addition, ceux qui sont stables par multiplication par un scalaire, et ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

1. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$

2. $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$

3. $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

4. $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

5. $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

6. $F := \mathbb{Z}^2$

Exercice 44. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 0\}$.

2. $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = 3\}$.

3. $C := \{(2\lambda,\ \lambda,\ -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. $D := \{(\lambda - \mu,\ 2\lambda,\ \lambda + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

5. $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$.

6. $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\}$.

Exercice 45. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. F^c est-il un sous-espace vectoriel de E ?

3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 46*. Parmi les ensembles suivants, établir lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $A := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$.

2. $B := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 3\}$.

3. $C := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0)f(1) = 0\}$.

4. $D := \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$.

5. $E := \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f' + 2f = 0\}$.

Exercice 47*. Dans l'espace vectoriel des suites réelles, déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. $A := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$.
2. $B := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}\}$.
3. $C := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n\}$.
4. $D := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$.
5. $E := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique}\}$.
6. $F := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ u_{n+1} = u_n\}$.

3.2 Familles libres

Exercice 48.

1. Montrer que la famille (u, v) est libre dans $\mathbb{R}^2$ si $u := (1,2)$ et $v := (2,3)$.
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec $u := (1,2,3)$ et $v := (2,3,4)$.
3. Montrer que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{R}^3$ si $u := (1,-1,2)$, $v := (1,1,1)$ et $w := (2,-2,1)$.

Exercice 49. Soient $u := (1,-1,4)$, $v := (2,5,-1)$ et $w := (3,0,-4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Dire si la famille (u, v, w) est libre ou liée.

Exercice 50. Soient $u := (1,2)$, $v := (1,3)$ et $w := (1,4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les vecteurs u, v, w sont deux-à-deux libres.
2. La famille (u, v, w) est-elle libre ?

Exercice 51. Dans $\mathbb{R}^3$, considère les vecteurs $u := (1,-2,2)$ et $v := (3,3,-1)$.

1. Justifier que les vecteurs u et v sont libres.
2. Déterminer si le vecteur $(-1,-7,5)$ est une combinaison linéaire de u et v.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y, z pour que $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(u, v)$.
4. En déduire une équation cartésienne du plan engendré par u et v.

Exercice 52. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E et posons $s_k := u_1 + \cdots + u_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Montrer que la famille $(s_1, \ldots, s_n)$ est libre si seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

Exercice 53. Soit (e_1, e_2, e_3, e_3) une famille libre d'un espace vectoriel E. Dire si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. $\mathscr{A} := (e_1,\ 2e_2,\ 3e_3)$.
2. $\mathscr{B} := (e_1,\ 2e_1 + e_4,\ e_3 + e_4)$.
3. $\mathscr{C} := (2e_1 + e_2,\ e_1 - 2e_2,\ e_4,\ 7e_1 - 4e_2)$.

Exercice 54. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 := (\lambda,1,2,2)$, $u_2 := (0,\lambda,1,1)$ et $u_3 := (1,0,\lambda,1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Exercice 55*. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre.
2. Montrer que la famille $(\cos, \sin, f)$ est liée, où $f(x) := \sin(x+1)$, et donner une relation de liaison.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre, où $f_k(x) := \mathrm{e}^{kx}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ est libre, où $g_k(x) := \cos(kx)$.
   Indication : faire une récurrence, et utiliser la dérivée seconde.

3.3 Bases et dimension

Exercice 56. Soit $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en déterminer une base.

Exercice 57. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants (on ne demande pas de montrer que ce sont des s.e.v.).

1. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + y + t = 0\}$.
3. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - z + 3t = 0\}$.

Exercice 58. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

Exercice 59. Dans chaque cas, montrer que les vecteurs (u_1, u_2, u_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer les coordonnées du vecteur $v := (1,-1,0)$ dans cette base.

1. $u_1 := (1,0,0)$, $u_2 := (0,1,0)$ et $u_3 := (0,0,1)$.
2. $u_1 := (1,0,0)$, $u_2 := (1,1,0)$ et $u_3 := (1,1,1)$.
3. $u_1 := (1,1,2)$, $u_2 := (-1,2,1)$ et $u_3 := (1,-1,-1)$.

Exercice 60. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 := (1,2,0,3)$ et $u_2 := (1,0,0,-1)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre.
2. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 61. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F := \mathrm{Vect}(u,v,w)$ où $u := (1,1,-1,1)$, $v := (0,2,-1,2)$ et $w := (-2,-3,1,-1)$, et soit H le sous-espace vectoriel :

$$H := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0\}.$$

1. Montrer que u, v et w sont linéairement indépendants.
2. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
3. En déduire que $F = H$.

Exercice 62*. Soit $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et soit F l'ensemble :

$$F := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soient $a_n := (-2)^n$ et $b_n := 3^n$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des vecteurs de F.
3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre.
4. L'objectif de cette question est de montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de F. Fixons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n := \lambda a_n + \mu b_n.$$
   a. Expliquer pourquoi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
   b. Montrer qu'il existe des valeurs de λ et μ pour lesquelles $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
   c. Pour ces valeurs de λ et μ, démontrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$.
   d. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice de F.
5. Quelle est la dimension de F ?
6. Déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Cette suite est-elle unique ?

3.4 Somme de sous-espaces, supplémentaires

Exercice 63. Dans $\mathbb{R}^4$, soit F le plan vectoriel dirigé par $u_1 := (2,3,0,1)$ et $u_2 := (-1,2,1,-2)$ et soit G le plan vectoriel dirigé par $v_1 := (4,-1,-2,5)$ et $v_2 := (1,0,0,0)$.

1. Déterminer une base de $F+G$.
2. La somme est-elle directe ?

Exercice 64. Dans $\mathbb{R}^3$, soient F le plan d'équation $x+y+z=0$ et G le plan d'équation $x+2y+3z=0$.

1. Montrer que $F+G=\mathbb{R}^3$.
2. Sans déterminer $F\cap G$, justifier si F et G sont supplémentaires.

Exercice 65. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F := \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \text{ et } z+t=0\}, \qquad G := \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y=0 \text{ et } z-t=0\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et de G.
2. Déterminer $F\cap G$.
3. En déduire que $F+G=\mathbb{R}^4$.

Exercice 66⋆. Soit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit F le sous-espace vectoriel :

$$F := \left\{ f\in E \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\},$$

et soit G le sous-espace vectoriel des fonctions constantes.

1. Vérifier que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 67. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $\dim(F)+\dim(G)>n$, alors F et G ne sont pas en somme directe.

Exercice 68. Soit E un espace vectoriel et soient F et G des s.e.v. de dimension finie de E. Notons $\mathscr{B}_F := (u_1,\dots,u_p)$ une base de F et $\mathscr{B}_G := (v_1,\dots,v_q)$ une base de G. Montrer que si $(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$ est libre, alors F et G sont en somme directe.

Exercice 69. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$, et soient $H_1,\dots,H_p$ des hyperplans de E. Démontrer par récurrence sur p que :

$$\forall p\in[\![1,n]\!], \quad \dim(H_1\cap\cdots\cap H_p)\geq n-p.$$

Exercice 70. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G, H des s.e.v. de E.

1. Montrer que $(F\cap G)+(F\cap H)\subset F\cap(G+H)$. A-t-on l'inclusion contraire en général ?
2. Montrer que :

$$\dim(F+G+H)\leq\dim(F)+\dim(G)+\dim(H)-\dim(F\cap G)-\dim(F\cap H)-\dim(G\cap H)+\dim(F\cap G\cap H).$$

Exercice 71⋆. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient V et W des sous-espaces vectoriels tels que $V\cap W=\{0_E\}$. Montrer que V admet un supplémentaire S tel que $W\subset S$.
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel F distinct de E est égal à l'intersection des hyperplans de E qui contiennent F.

Exercice 72⋆. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F_1 et F_2 des s.e.v. tels que $F_1+F_2=E$. Démontrer qu'il existe des s.e.v. $G_1\subset F_1$ et $G_2\subset F_2$ tels que $G_1\oplus G_2=E$.

3.5 Exercices tirés d'examens

Exercice 73 (Examen 2021-2022, session 1)**.** Soient F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x = 0 \text{ et } y = z\right\}, \quad G_m = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,0),(1,0,m,0)\big),$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Résoudre le système à quatre inconnues x, y, z, t : $\begin{cases} x = 0 \\ y = z. \end{cases}$
3. En déduire une base de F (en justifiant).
4. Donner la dimension de F.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que F et G_m soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 74 (Examen 2022-2023, session 1)**.** Soient $u_{\alpha,\beta} = (\alpha-\beta, \alpha+2\beta, \beta)$ et $v = (-2,7,3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, avec α et β des paramètres réels.

1. Écrire $u_{\alpha,\beta}$ comme une combinaison linéaire $\alpha w_1 + \beta w_2$, en précisant qui sont les vecteurs fixes w_1 et w_2 de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille (w_1, w_2) est-elle libre ?
3. Montrer que $(u_{\alpha,\beta}, v)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $3\alpha - \beta = 0$.
4. Montrer que la somme $\mathrm{Vect}(v) + \mathrm{Vect}(w_2)$ est directe. Que vaut $\dim \mathrm{Vect}(v, w_2)$?
5. Montrer que la somme $\mathrm{Vect}(v) + \mathrm{Vect}(w_1) + \mathrm{Vect}(w_2)$ n'est pas directe. Que vaut sa dimension ?

4 Applications linéaires

Exercice 75. Parmi les applications ci-dessous, déterminer lesquelles sont linéaires.

1. $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f_1(x,y) := (y,\ x+y)$.
2. $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_2(x,y,z) := (2y+z,\ x+z,\ -x+y+z)$.
3. $f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_3(x,y,z) := (y+1,\ x+y,\ z-x)$.
4. $f_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_4(x,y,z) := (y,\ x+y,\ x^2)$.
5. $f_5 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_5(x,y,z) := (x-2y+z,\ 2y,\ z-x,\ z-y)$.
6. $f_6 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f_6(x,y,z) := (x,\ x+y,\ xz)$.
7. $f_7 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_7(x) := \big(x\sin(2023),\ \frac{x}{\pi},\ x\sqrt{2}\big)$.

Exercice 76. Soient f et g les applications définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) := \overline{z}$ et $g(z) := \mathfrak{Re}(z)$. Les applications f et g sont-elles $\mathbb{R}$–linéaires ? $\mathbb{C}$–linéaires ?

Exercice 77*. Dans chaque cas, dire si l'application $f \colon E \to F$ est linéaire.

1. $E := \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := u(0)$.
2. $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $F := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et pour tout $u \in E$, $f(u) \colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := \displaystyle\max_{t\in[0,1]} u(t)$.
4. $E := \left\{u \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \,\middle|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$, $F := \mathbb{R}$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.
5. $E := \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F := \mathbb{R}^3$ et pour tout $u \in E$, $f(u) := \big(u(0), u'(0), \frac{1}{2}u''(0)\big)$.

Exercice 78. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + z + t = a \\ x + 2z - t = b \\ x + y + 3z - 3t = c. \end{cases} \tag{$\mathscr{S}_{a,b,c}$}$$

Posons $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) := (x - y + z + t,\ x + 2z - t,\ x + y + 3z - 3t).$$

1. Échelonner le système $(\mathscr{S}_{a,b,c})$ par la méthode du pivot de Gauss.
2. En déduire une base de $\ker f$. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que le système $(\mathscr{S}_{a,b,c})$ soit compatible.
4. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?
5. Vérifier la validité du théorème du rang sur cet exemple.

Exercice 79. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) := (x + 2y + 2t,\ -x + y + z,\ 2x + y + z + t).$$

1. À l'aide du théorème du rang, montrer sans calculs que f n'est pas injective.
2. Déterminer une base de $\ker f$.
3. En déduire que f est surjective.

Exercice 80*. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soient les $\mathbb{R}$–espaces vectoriels $E := \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $F := \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. On considère l'application $\mathscr{D} : E \to F$ qui à tout $f \in E$ associe sa dérivée $f' \in F$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker \mathscr{D}$. L'application $\mathscr{D}$ est-elle injective ?
3. Montrer que $\mathscr{D}$ est surjective.

Exercice 81.

1. Existe-t-il des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?
2. Existe-t-il des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer une condition nécessaire sur les entiers n et p pour qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ soit :

   a. injective. **b.** surjective. **c.** bijective.

Exercice 82. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) := (x - 2y + 3z,\ 4x + y + z,\ x + 2y - 2z).$$

Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 83 (Examen 2023-2024, session 2)**.** On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad f(x) = (-3x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4\,;\ x_1 - x_2 + 3x_4\,;\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4).$$

1. Soit $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}$. Échelonner le système linéaire suivant d'inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = y_1 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = y_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = y_3. \end{cases} \tag{$\mathscr{S}_y$}$$

2. En déduire une base de $\ker f$. Celle-ci sera formée de deux vecteurs qu'on notera u_1 et u_2.

3. En déduire que $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de celui-ci.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Montrer que $\operatorname{Im} f = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$.
6. **a.** Justifier, sans les calculer, qu'il existe $u_3, u_4 \in \mathbb{R}^4$ tels que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$.
   b. Déterminer des vecteurs u_3 et u_4 satisfaisant la proposition de la question précédente.
   c. On pose $S = \operatorname{Vect}(u_3, u_4)$. Montrer que S et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
   d. Notons $g \colon S \to \operatorname{Im} f$ la restriction de f à S, c'est-à-dire g est définie sur S par :
   $$\forall x \in S, \quad g(x) = f(x).$$
   Montrer que $\ker g = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, puis en déduire que g est un isomorphisme entre S et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 84. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.
2. Soit $f \colon E \to F$ un isomorphisme et soit $f^{-1} \colon F \to E$ son application réciproque. Montrer que f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Exercice 85*. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Si $g \in \mathscr{L}(G,E)$ est surjective, montrer que $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(f)$.
2. Si $h \in \mathscr{L}(F,G)$ est injective, montrer que $\operatorname{rg}(h \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

Exercice 86*. L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule de Grassmann à partir du théorème du rang.

1. Soient $(F, +_F, \cdot_F)$ et $(G, +_G, \cdot_G)$ des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels. On définit l'*espace vectoriel produit* de F et G comme l'ensemble $F \times G$ muni des lois $+$ (interne) et $\cdot$ (externe) définies ci-dessous :
   $$\forall (u,v),(u',v') \in F \times G, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (u,v) + (u',v') := (u +_F u', v +_G v') \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (u,v) := (\lambda \cdot_F u, \lambda \cdot_G v).$$
   a. On admet que $(F \times G, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel (le vérifier mentalement). Quel est son vecteur nul ?
   b. On suppose que F et G sont de dimensions finies. Montrer que $F \times G$ est de dimension finie et que $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie, et soient F et G des s.e.v. de E. On considère l'application :
   $$\begin{array}{rccc} f \colon & F \times G & \longrightarrow & E \\ & (u,v) & \longmapsto & u + v. \end{array}$$
   a. Vérifier que f est linéaire.
   b. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
   c. Montrer que $\ker f$ est isomorphe à $F \cap G$.
   d. Appliquer le théorème du rang et en déduire la formule de Grassmann.

Exercice 87*. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, où $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur associe le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
2. Montrer que $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ ou $[\dim(\ker f) = 2$ et $\operatorname{rg}(f) = 1]$.
3. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ et une forme linéaire $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \varphi(x)\, u$.

Exercice 88*. Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et soient f et g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

> ***Définition.*** *On dit qu'un s.e.v. F de E est stable par un endomorphisme f si $f(F) \subset F$.*

Démontrer que $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.