TD 1 : nombres complexes

Les questions marquées par une étoile ⋆ sont plus difficiles.

1 Forme algébrique

Exercice 1. On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 := 2-5\mathrm{i}, \qquad z_2 := \frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{4}, \qquad z_3 := \pi - \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}, \qquad z_4 := \frac{2}{3}-\frac{\mathrm{i}}{6}, \qquad z_5 := -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

1. Déterminer la forme algébrique des sommes des nombres z_i avec $w_1 := \frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{3}$.
2. Déterminer la forme algébrique des produits des nombres z_i avec $w_2 := 1+3\mathrm{i}$.
3. Soit $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Montrer que $\frac{1}{z} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$.
4. En déduire la forme algébrique de l'inverse des nombres z_i.

Exercice 2. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := 3+2\mathrm{i}-1+3\mathrm{i}$.
2. $z_2 := -4+7\mathrm{i}-(2+4\mathrm{i})$.
3. $z_3 := (2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$.
4. $z_4 := (4-3\mathrm{i})^2$.

Exercice 3. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 := \dfrac{2}{\mathrm{i}}$.
2. $z_2 := \dfrac{2-\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$.
3. $z_3 := \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$.
4. $z_4 := \dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.
5. $z_5 := \dfrac{2}{2+\frac{1}{1+\mathrm{i}}}$
6. $z_6 := \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

Exercice 4.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2\mathrm{i}z+z+1 = 2z-4\mathrm{i}-1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 - \mathrm{i}z_2 = -2-3\mathrm{i} \\ 2z_1 + (1-\mathrm{i})z_2 = 3-5\mathrm{i}. \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Calculer i^2, i^3 et i^4.
2. En déduire la valeur de i^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer la somme : $S := \sum_{k=0}^{2023} \mathrm{i}^k$.

Exercice 6.

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :
   - $z_1 := -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$,
   - $z_2 := \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$,
   - $z_3 := 3-4\mathrm{i}$,
   - $z_4 := \dfrac{1}{3}-\dfrac{\mathrm{i}}{6}$,
   - $z_5 := \sqrt{3}-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$,
   - $z_6 := \dfrac{1-3\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$.

2. Montrer que les nombres suivants sont réels sans calculer le produit des quatre facteurs.

- $w_1 := (2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$,
- $w_2 := (1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ et soit $Z := \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et soit $Z := \dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}$. On note $z = x+\mathrm{i}y$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble $E := \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid Z \in \mathbb{R}\right\}$.

3. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble $F := \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 9. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions des équations ci-dessous.

1. $(1+2\mathrm{i})z - 3 + 5\mathrm{i} = 0$.

2. $2z + 3\overline{z} = 5$.

3. $\overline{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$.

4. $2z + 6\overline{z} = 3 + 2\mathrm{i}$.

5***.** $z^2 = |z|$.

6***.** $|z| = |1-z| = \frac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.

Exercice 10***.**

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(z) \leq |\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ et $\mathfrak{Im}(z) \leq |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$.

2. Établir l'identité du parallélogramme :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big).$$

3. Montrer la formule de polarisation :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad zw = \frac{1}{4}\Big(\big|z+\overline{w}\big|^2 - \big|z-\overline{w}\big|^2 + \mathrm{i}\big|z+\mathrm{i}\,\overline{w}\big|^2 - \mathrm{i}\big|z-\mathrm{i}\,\overline{w}\big|^2\Big).$$

Exercice 11. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := -7$. **2.** $z_2 := 8\mathrm{i}$. **3.** $z_3 := -2\mathrm{i}$. **4.** $z_4 := 5 - 12\mathrm{i}$. **5.** $z_5 := -3 - 4\mathrm{i}$.

Exercice 12. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions des équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2. $z^2 + (4-6\mathrm{i})z - 5 - 14\mathrm{i} = 0$.

3. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

4***.** $z^4 = 1$.

5***.** $z^4 - (5-14\mathrm{i})z^2 - 2(5\mathrm{i}+12) = 0$.

6***.** $z^4 + z^2 - 1 + 3\mathrm{i} = 0$.

Indication : pour les équations étoilées, faire un changement de variable.

2 Forme trigonométrique

Exercice 13.

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a. $z_1 := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ **b.** $z_2 := \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **c.** $|z_3| = 7$ et $\arg(z_3) \equiv \frac{\pi}{6} \ (2\pi)$

2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a. $z_1 := 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$

b. $z_2 := -4$

c. $z_3 := \mathrm{i} - 1$

d. $z_4 := 2\mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.

e. $z_5 := \frac{-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

f***.** $z_6 := \sin(2) + \mathrm{i}\cos(2)$.

Exercice 14. Mettez sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 := (-1+\mathrm{i})^{100}$.

2. $z_2 := \left(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\right)^{200}$.

3. $z_3 := \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{8}$.

4. $z_4 := \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^{6}$.

Exercice 15★. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

1. $E_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+2\mathrm{i}| = 3\}$.

2. $E_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} \bmod \pi\}$.

3. $E_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 4\}$.

4. $E_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-i|\}$.

Exercice 16. Soit $z_1 := 1+\mathrm{i}$ et $z_2 := \sqrt{3}-\mathrm{i}$.

1. Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.

2. Donner les formes algébrique et trigonométrique du produit $z_1 z_2$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 17. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, et les mettre sous forme trigonométrique.

1. $z := -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. $w_\pm := \pm\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Exercice 18. Soit $z_1 := 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 := 2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. **a.** Déterminer la forme trigonométrique des nombres z_1 et z_2.

b. En déduire les racines carrées complexes de z_1 et de z_2 sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

2. **a.** Déterminer les nombres complexes Z qui sont solutions de l'équation $Z^2-4Z+16=0$.

b. En déduire les nombres complexes z qui sont solutions de l'équation $z^4-4z^2+16=0$.

Exercice 19. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

a. $\cos(2\theta)$.

b. $\sin(3\theta)$.

c★. $\cos(3\theta)\sin(4\theta)$.

d★. $\sin(6\theta)$.

2. Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :

a. $\cos^2(\theta)$.

b. $\sin^3(\theta)$.

c★. $\sin^4(\theta)$.

d★. $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la somme $E_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+k\theta)}$.

2. En déduire la valeur des sommes :

a. $C_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\varphi+k\theta)$.

b. $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(\varphi+k\theta)$.

c★. $T_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(\varphi+k\theta)$.

Exercice 21. Soient $\theta, \varphi \in]-\pi, \pi[$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. $z_2 := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

3. $z_3 := \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Exercice 22. Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{U}$ tel que $zw \neq -1$, on a :

$$\frac{z+w}{1+zw} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23. Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que l'argument principal de z appartienne à $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$. Calculer le module et un argument de :

$$\frac{1+z^3}{z^2}.$$

3 Racines n-ièmes

Exercice 24. Déterminer les racines quatrièmes et sixièmes des nombres complexes suivants :

1. $z_1 := 1$.

2. $z_2 := -1$.

3. $z_3 := -\mathrm{i}$.

4. $z_4 := 1+\mathrm{i}$.

5★. $z_5 := \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.

Exercice 25. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les nombres $w \in \mathbb{C}$ qui sont solutions de l'équation $w^2 - 2\sin(\theta)\,w + 1 = 0$.

2. En déduire les nombres $z \in \mathbb{C}$ qui sont solutions de l'équation $z^{2n} - 2\sin(\theta)z^n + 1 = 0$.

Exercice 26. Soit $\omega := \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\omega + \omega^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\omega^2 + \omega^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

2. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

4. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 27. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

2★. Calculer $S := \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\omega^k$. *Indication : calculer $S - \omega S$.*