CY TECH sciences et techniques

Analyse 3
L2 MI/MP
2024 – 2025

Devoir surveillé n° 1
Correction

Exercice 1.

1. A est un ouvert ssi $\forall a \in A$, $\exists r > 0$, $\mathscr{B}(a,r) \subset A$.
2. x est adhérent à A ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\mathscr{B}(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Exercice 2.

1. $\mathring{A} =]0,1[$ et $\overline{A} = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup [0,1]$.
2. On écrit $B = U \cup V$ avec $U := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy > 1\right\}$ et $V := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sin(x-y) < 0\right\}$. Posons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) := xy$ et $g(x,y) := \sin(x-y)$. Alors f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et $U = f^{-1}\big(]1,+\infty[\big)$ et $V = g^{-1}\big(]-\infty,0[\big)$, donc U et V sont ouverts comme images réciproques d'ouverts par des applications continues. Par conséquent, leur réunion B est un ouvert.

Exercice 3.

1. Soit $x_0 \in E$, montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta := \varepsilon/K$. Alors pour tout $x \in E$ tel que $\|x - x_0\|_E \leq \delta$, on a :
$$\|f(x) - f(x_0)\|_F \leq K\|x - x_0\|_E \leq K\delta \leq \varepsilon.$$
Ainsi, on a montré que f est continue en x_0.
2.
   - **a.** f est continue en 0_E ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in E$, $\|x - 0_E\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(0_E)\|_F \leq \varepsilon$.
   - **b.** On applique la définition précédente avec $\varepsilon = 1$, en utilisant le fait que $f(0_E) = 0_F$.
   - **c.** Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, alors $\|f(x)\|_F = 0 = \frac{1}{\delta}\|x\|_E$ et il n'y a rien à montrer. Supposons que $x \neq 0_E$. Alors le vecteur $u = \delta\frac{x}{\|x\|_E}$ a pour norme $\|u\| = \delta\frac{\|x\|_E}{\|x\|_E} = \delta$, donc d'après la question précédente, on a $\|f(u)\|_F \leq 1$.
   Par linéarité de f, on a $f(u) = \frac{\delta}{\|x\|_E}f(x)$, donc $\|f(u)\| = \frac{\delta}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F$. L'inégalité $\|f(u)\|_F \leq 1$ se réécrit alors $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E$.
   - **d.** Montrons que f est Lipschitzienne avec pour constante de Lipschitz $K = \frac{1}{\delta}$. Soient $x, y \in E$, par linéarité de f et d'après la question précédente, on a :
   $$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x - y\|_E.$$

Exercice 4.

1. Si A est ouvert et fermé, alors A^c est fermé, donc $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = A \cap A^c = \varnothing$.
Ou encore : si A est ouvert et fermé, alors $\mathring{A} = A = \overline{A}$, donc $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus A = \varnothing$.
2.
   - **a.** Puisque $s = \sup(A \cap [a,b])$, il existe une suite d'éléments de $A \cap [a,b]$ qui converge vers s. Ainsi, s est la limite d'une suite d'éléments de A, donc $s \in \overline{A}$.
   - **b.** Si $s = b \in A^c$, il n'y a rien à montrer. Si $s < b$, alors $]s,b]$ est un intervalle non vide inclus dans A^c (par définition du sup, tout élément supérieur à s n'appartient pas à A). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]s,b]$ qui converge vers s (par exemple : $x_n = (1 - \frac{1}{2^n})s + \frac{1}{2^n}b$). Alors s est la limite d'une suite d'éléments de A^c, donc $s \in \overline{A^c}$.
   - **c.** D'après les deux questions précédentes, $s \in \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$, donc ∂A est non vide.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $A \neq \mathbb{R}$ et $A \neq \varnothing$, alors A et A^c sont non vides, donc $\partial A \neq \varnothing$ d'après la question 2. Par conséquent, A n'est pas à la fois ouvert et fermé (question 1). Par contraposée, on a montré que si A est ouvert et fermé, alors $A = \mathbb{R}$ ou $A = \varnothing$.