PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.1, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1101

Mosaicos e ladrilhamentos com o uso do GeoGebra

Jhone Lima Santos   André Nagamine

Resumo

Este trabalho referencia a importância da contextualização histórica dos conteúdos de Matemática e a adequação do ensino com os atuais meios tecnológicos. Diante desse contexto, foram abordados aspectos de como mosaicos e ladrilhamentos foram criados e ressignificados ao longo do tempo. Tendo em vista a importância das tecnologias digitais na Matemática, foi utilizado o *software* GeoGebra para as construções dos ladrilhamentos. Fazendo uma aplicação dos conhecimentos trabalhados, aconteceu uma oficina em uma escola da rede pública da cidade de Salinas-MG. Nessa oficina foram vistos tópicos de geometria plana, aspectos históricos dos ladrilhamentos, bem como as suas construções. As conclusões obtidas alentam o desenvolvimento de novos trabalhos e pesquisas que busquem aprimorar o ensino de Matemática e possibilitar aulas mais dinâmicas, contextualizadas e significativas para aprendizagem.

Palavras-chave: Matemática; Ladrilhamentos; GeoGebra; Oficina.

Abstract

This study refers to the importance of the historical contextualization of mathematics contents and the adequacy of teaching with current technological means. In that context, aspects of how mosaics and tiling had been created were addressed, and re-signified over time. In view of importance of digital technologies in Mathematics, GeoGebra software has been used for the construction of tiling. Applying the knowledge worked on, a workshop was held at a public school in the city of Salinas, state of Minas Gerais, Brazil. In this workshop, topics of flat geometry, historical aspects of tiles were seen, as well as their constructions. The conclusions encourage the development of new works and research that seek to improve the teaching of Mathematics and enable more dynamic, contextualized and meaningful classes for learning.

Keywords: Mathematics; Tiling; GeoGebra; Workshop.

1. Introdução

A origem do nome mosaico vem do grego, *mosaicon*, que tem significado de "obra paciente", no sentido de algo construído com cautela. Em termos práticos, podemos definir um mosaico como a arte de preencher o plano (piso, parede etc.) com objetos/peças menores, de variados materiais. Muitas vezes é desejável que esses mosaicos criem algum padrão visual, de modo a elevar um tom artístico.

Esse intuito artístico está presente em todo contexto histórico da humanidade, sendo atribuídas às civilizações muito antigas papéis essenciais no que é construído hoje. De acordo com Dacol (2008)[5], dizer precisamente a origem dos mosaicos ainda é algo discutível. O que se pode constatar é que através do trabalho do arqueólogo Leonard Wooley[1], em escavações realizadas em torno de 1928, na antiga cidade de Ur, no Iraque, foram encontrados mosaicos sumerianos com idade estimada de 3500 a.C.. A Figura 1 mostra um desses mosaicos.

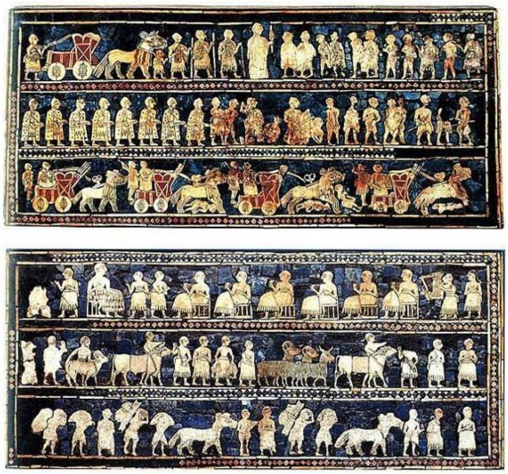

Figura 1: Estandarte de Ur. Exposto no Museu Britânico, em Londres [8]

Outra civilização que teve grande influência na criação de artes e mosaicos foram os egípcios, que usaram de técnicas avançadas de construções, tais quais geram ainda hoje debates de como realmente foram praticadas. Um dos principais marcos dos egípcios foi a construção das grandes pirâmides, por volta de 2700 a.C., que exigiu muita técnica e precisão. Através disso vieram também artes de decoração e complementos dessas construções. Essa civilização dominava o uso de tintas, e o mais importante, eram dotadas de criatividade. As próprias pirâmides são construídas com base na montagem de pedras, princípio básico dos mosaicos.

Essas pirâmides eram divididas em várias "salas" e compartimentos, com suas respectivas utilidades. Em seus interiores também foram encontradas formas de pinturas e montagens feitas nas paredes e pisos.

No decorrer dos milhares de anos tais mosaicos passaram por ideias de formulação, reformulação, evolução e estudos, nos quais a arte sempre foi vista como pilar fundamental.

Dando um salto no tempo, vale citar também a Europa (de onde originou parte da cultura brasileira), principalmente referindo-se a arte na Idade Média. Neste período ocorreu a construção de muitas igrejas e também a utilização de mosaicos em suas decorações. Outro marco da utilização dos mosaicos nessa época foram as confecções de retratos, utilizando peças de cerâmica em diversas cores. Na Figura 2 tem-se a Imperatriz Teodora[2], retratada com cores e adereços.

[1] Charles Leonard Woolley (1880-1960) foi um arqueólogo britânico conhecido e renomado por suas escavações em Ur e na Mesopotâmia.

[2] Teodora foi imperatriz do Império Bizantino, entre os anos 527 d.C. e 548 d.C.. Sua inteligência e entendimento político-social a tornou uma das mais relevantes mulheres da era bizantina influenciando nas decisões políticas de seu esposo Justiniano I.

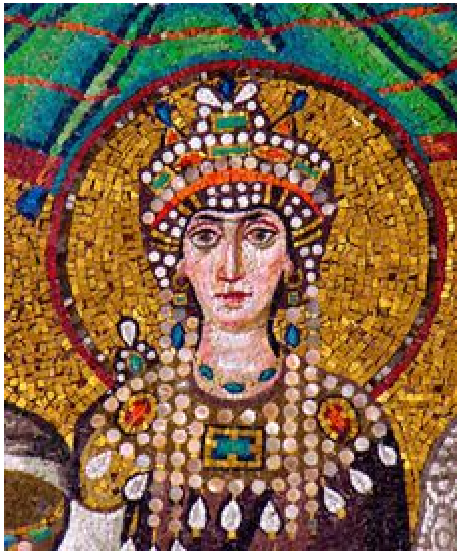

Figura 2: Imperatriz Teodora [13]

No século XX, com uma sociedade já estruturada no Brasil, foi possível observar essa cultura dos mosaicos refletida no país. Em um período de Revolução Industrial, a arte dos mosaicos começou a ser levada para objetos, roupas, entre outros utensílios usados pelos povos. O estilo artístico da época era o Impressionismo, que valorizava de forma diferenciada luzes e cores; este também seria o momento de ascendência das fotografias, que nasceram em meados do século XIX.

Em relação ao que mudou com estes milhares de anos na percepção dos mosaicos, pode-se destacar que essa mudança não se refere aos seus objetivos, pois ainda são os mesmos, no sentido de decorações e criação de artes. Para alguns especialistas no assunto, dentre eles, a mosaicista curitibana Bea Pereira (2006), o método de construção do mosaico não sofreu alterações significativas ao longo dos séculos, pois os mosaicistas ainda preparam tesselas[3], que são assentadas com algum tipo de adesivo. A grande mudança ocorrida desde o tempo dos romanos, dá-se com os materiais. O mosaico, inicialmente usado apenas na arquitetura, passou a revestir todo e qualquer tipo de objeto. Com a ampliação de possibilidades de suportes para mosaicos, consequentemente, ampliaram-se também os tipos de materiais, e hoje é possível fazer mosaicos em qualquer base: madeira, cimento, ferro, vidro. O que muda é o adesivo, ou seja, o tipo de cola que sustenta as tesselas (DACOL, 2008)[5].

Sendo assim, como os mosaicos perpetuaram-se pelos milênios das civilizações, hoje podem ser vistas, cotidianamente, diversas formas artísticas contendo essas técnicas. A Figura 3 abaixo, mostra um dos mosaicos mais famosos do Brasil, o calçadão da orla de Copacabana.

[3] Tesselas é o nome dado às pequenas peças que são usadas na montagem de um mosaico, isso se referia aos pequenos pedaços de pedra para realização desses trabalhos.

Figura 3: Orla de Copacabana [1]

Esse mosaico tem estilo de origem portuguesa e é um ponto turístico do Brasil. Além disso, essa montagem tenta também trazer harmonia em seu formato e cores. Outros mosaicos, que representam estilo europeu, estão presentes nas igrejas, museus e nas diversas obras de arquitetura contemporânea, além de objetos variados.

Essa contextualização dos mosaicos remete-nos a como seriam essas artes utilizando objetos da geometria, por exemplo, os polígonos. É o que será visto na próxima seção, onde essa arte com polígonos será definida como ladrilhamento.

2. Mosaicos e ladrilhamentos

2.1. Introdução aos ladrilhamentos

Um ladrilhamento pode ser tratado como uma pavimentação do plano, que, segundo Oliveira (2015, p. 28)[12], é "a divisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos, de modo que a união de todos esses polígonos constitui todo o plano, e a interseção de dois desses polígonos ou é vazia ou é um vértice ou está contida em uma linha poligonal." A criação de um ladrilhamento baseia-se em dois princípios: a montagem dos polígonos não pode deixar espaços vazios e não pode haver sobreposição entre os mesmos. Pode-se dizer ainda que uma configuração de polígonos no plano é um ladrilhamento se, e somente se, todo ponto deste plano pertencer a uma, e apenas uma figura geométrica, exceto pelos pontos que estão sobre as arestas e sobre os vértices dos polígonos, onde ocorre o encasamento dos mesmos.

Ladrilhamento é a arte de ladrilhar, ou seja, de montar peças de forma a preencher um plano. Os ladrilhos em sua construção história são peças de cerâmica, pedra, barro etc., as quais são usadas para cobrir pisos e paredes, com intuito estrutural de construções e também com visão artística. A arte de ladrilhar não é recente, além dos mosaicos feitos com diversas combinações, diferentes povos da antiguidade já dominavam o conhecimento geométrico e de suas formas,

> *Os antigos egípcios, por exemplo, desde 4.000 a.C. usavam ladrilhos decorativos na construção de templos e nas grandes pirâmides. Mais recentemente, os árabes criaram belíssimos* **ladrilhamentos** *como os encontrados em Alhambra, um conjunto de palácios da Espanha, construído por mouros e cristãos nos séculos XIII, XIV*

> *e XV. Tipos diferentes de ladrilhamentos foram criados e recriados por diversas civilizações, e eventualmente introduzidos nas Américas pelos próprios espanhóis.* (Dias e Sampaio, 2013, p.11)[6]

A Figura 4, a seguir, mostra um dos mosaicos geométricos do palácio de Alhambra, construído no século XIII, que também pode ser tratado como parte de um ladrilhamento, uma vez que faz o uso de polígonos em sua formação.

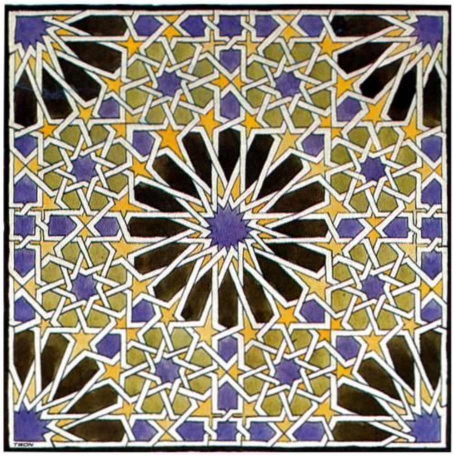

Figura 4: Mosaico de Alhambra [14]

O estudo dessas formas foi modernizado com o tempo, e um dos artistas mais influentes aos mosaicos e ladrilhamentos, o qual é imprescindível a menção, é conhecido como Escher[4]. De acordo com Dias e Sampaio (2013, p.70)[6],

> *Nenhum artista mergulhou tão fundo no infinito quanto Mauritius Cornelius Escher. Em suas viagens pelo mundo, descobriu a arte árabe de ladrilhar, especialmente quando conheceu os azulejos de Alhambra. Escher apaixonou-se pelas figuras geométricas que se repetiam e se refletiam, e começou a ladrilhar superfícies, substituindo as figuras geométricas, usadas pelos árabes, por imagens concretas. Seu caso de amor com o infindável encontrou um lar definitivo. O antigo palácio da rainha holandesa Emma, um charmoso casarão no centro de Haia, foi transformado [...] no Museu Escher.*

Os ladrilhamentos de Escher são baseados em vários princípios artísticos em suas construções, visando padrões sofisticados aos olhos. Um desses princípios a destacar-se é o uso de um padrão geométrico no preenchimento do plano, criado a partir das definições de um ladrilhamento. Outro fator importante a considerar-se é o uso de técnicas artísticas, que incluem transformações de figuras, posicionamento dos objetos do plano com efeito tridimensional, contraste, repetição de estruturas, similaridade, graduação de cores, entre outros.

[4] Maurits Cornelis Escher (1898-1972), nascido em Leeuwarden, foi um grande artista gráfico da Holanda, renomado pelas suas artes baseadas em xilogravuras, litografias e meios-tons (*mezzotints*). Parte do estilo de suas artes busca fazer a representação de construções "impossíveis", além de pensar no ladrilhamento do plano usando padrões geométricos "entrelaçados", que dão ao olhar a visão de formas diferenciadas. Outro conceito da geometria usado em suas obra foram as isometrias (transformações geométricas).

A partir dessas transformações, acrescidas de uma ou mais das técnicas citadas, Escher desenvolveu uma variedade de mosaicos e ladrilhamentos. Um deles é mostrado na Figura 5 abaixo.

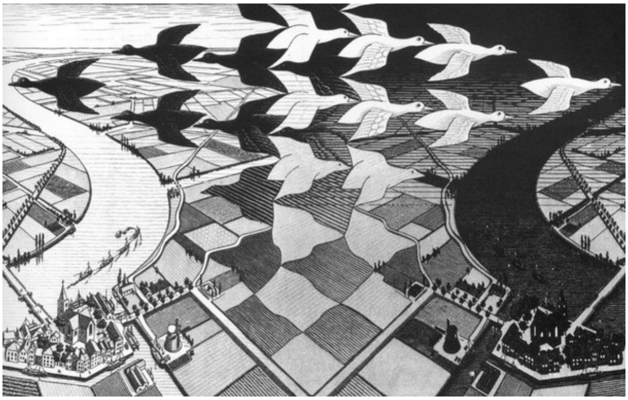

Figura 5: Mosaico de Escher [7]

As criações destes mosaicos tornou Escher renomado no assunto, e sua contribuição é vista em diversas construções e artes contemporâneas, além do Museu de Escher, já citado.

Abre-se aqui uma lacuna para análise das estruturas geométricas de onde partiram estas construções, e de como os ladrilhamentos foram tratados matematicamente em suas definições. Para uma melhor percepção dos princípios destas artes, é interessante o conhecimento dos tipos de ladrilhamentos.

2.2. Tipos de ladrilhamentos

Ao classificar os tipos de ladrilhamentos, uma diferenciação a ser considerada inicialmente é se o mesmo constitui-se apenas de polígonos regulares ou de polígonos quaisquer. Um ladrilhamento será aqui tratado como "irregular" quando é formado de polígonos diversificados, sem levar em consideração o seu número de lados, tampouco suas medidas de lados e ângulos. A Figura 6 a seguir mostra o Tangram[5], que em sua montagem estendida ao plano corresponde a um ladrilhamento irregular.

[5] O tangram é um jogo chinês, composto por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) que, juntas, formam um quadrado. Acredita-se que esse jogo foi inventado por um homem chamado Tan, quando quebrou em 7 pedaços uma telha quadrada e, ao tentar arrumá-la, formou com eles uma série de outras figuras (Dias e Sampaio, 2013, p. 14)[6].

Figura 6: Tangram (formação de um ladrilhamento irregular)

No estudo aqui adotado, será dado destaque aos ladrilhamentos definidos como "bem comportados", cuja construção deve obedecer três parâmetros, que, de acordo com Dias e Sampaio, (2013, p. 16)[6], são tratados como as condições de "bom comportamento".

1. Os ladrilhos usados são polígonos regulares, podendo ter todos a mesma quantidade de lados ou não.
2. O encontro de dois ladrilhos adjacentes sempre será entre seus vértices ou seus lados (o lado de um polígono nunca se encontra com o vértice de outro).
3. A configuração de polígonos em torno de um vértice é sempre a mesma (os polígonos usados em torno de todos os vértices são os mesmos, sendo relevante a ordem em que se dispõem).

A Figura 7 seguinte exemplifica as condições de um ladrilhamento bem comportado.

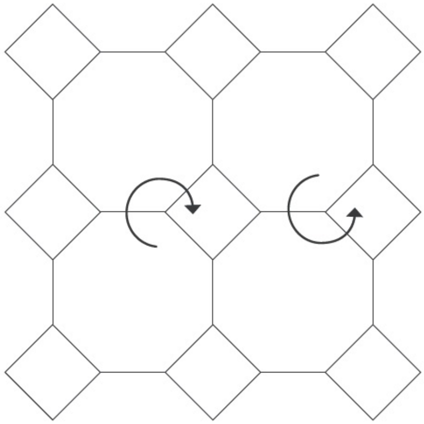

Figura 7: Exemplo de bom comportamento em um ladrilhamento [6]

Tal ladrilhamento obedece à condição 1, uma vez que é composto de quadrados e octógonos regulares, ambos de lados com mesma medida. A condição 2 também é satisfeita, uma vez que o encontro dos polígonos são sempre vértices ou lados. A condição 3 é mostrada pelas setas circulares em torno dos vértices, que indicam a sua formação. Se a observação for feita a partir de um polígono qualquer, não importa a direção de visualização, sempre será visto o mesmo padrão.

Para a descrição desse padrão é usada a notação com letras entre parênteses, que representam a quantidade de lados dos polígonos que se dispõem em torno de um vértice. Por exemplo, se temos um ladrilhamento com três polígonos em torno de cada vértice, podemos usar a notação $(\mathrm{k}, \mathrm{l}, \mathrm{m})$ para descrever o seu tipo, sendo que em torno de cada vértice existe um polígono de k lados, um polígono de l lados e um polígono de m lados. Vale ressaltar que as notações $(\mathrm{k}, \mathrm{l}, \mathrm{m})$, $(\mathrm{l}, \mathrm{m}, \mathrm{k})$ e $(\mathrm{m}, \mathrm{k}, \mathrm{l})$ descrevem o mesmo ladrilhamento, sendo apenas alterado o tipo de polígono ao qual é iniciada a observação. Caso seja alterado o sentido de visualização tem-se as notações $(\mathrm{k}, \mathrm{m}, \mathrm{l})$, $(\mathrm{m}, \mathrm{l}, \mathrm{k})$ e $(\mathrm{l}, \mathrm{k}, \mathrm{m})$ que também representam o mesmo ladrilhamento das três primeiras notações.

No caso da Figura 7, tem-se um ladrilhamento do tipo $(8, 8, 4)$, $(8, 4, 8)$ ou ainda $(4, 8, 8)$. As três disposições de números referem-se ao mesmo tipo de ladrilhamento, sem perca de informação, onde os números representam a quantidade de lados de cada polígono utilizado em torno de cada vértice.

A partir da definição de um ladrilhamento bem comportado no preenchimento do plano, podemos então subdividi-los em dois grupos, dadas as suas características.

Se um ladrilhamento bem comportado utiliza-se de apenas um tipo de polígono regular, então é chamado de ladrilhamento "regular", caso utilize mais de um tipo de polígono regular (todos os polígonos com lados de mesma medida), é denominado como um ladrilhamento "semirregular".

A Figura 8, abaixo, mostra um exemplo de ladrilhamento regular a partir dos favos de mel produzidos pelas abelhas, e a Figura 7 (anteriormente citada) mostra um ladrilhamento semirregular.

Figura 8: Favos de mel, forma de ladrilhamento regular [10]

Um ladrilhamento bem comportado obedece uma série de condições geométricas, o que permite, por meio de um raciocínio esquematizado, a descrição e construção desses tipos de ladrilhamentos. Um resultado importante a partir dos mesmos, que definirá o continuar do trabalho é o Teorema de Kepler[6] que, de acordo com Alves e Dalcim (1999, p.12)[2] enuncia:

Teorema de Kepler: Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente de polígonos regulares sujeitos às condições:

a) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou vértice comum;

b) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Na próxima seção serão descritos todos os ladrilhamentos bem comportados.

[6] Johannes Kepler (1571-1630) foi um matemático, astrônomo e astrólogo alemão, que fez parte de um processo revolucionário da ciência no século XVII. Ele fundamentou estudos e leis da física, que embasaram as teorias de Isaac Newton sobre a gravitação universal. Em parte de seus estudos matemáticos, Kepler descreveu o preenchimento do plano a partir de polígonos regulares.

2.3. Ladrilhamentos bem comportados

Definidas as condições do bom comportamento de um ladrilhamento, pode-se ter a catalogação[7] de seus onze tipos.

Todo ladrilhamento bem comportado pode ser representado na forma (k, l, m), (k, l, m, n), (k, l, m, n, p) ou (k, l, m, n, p, q), sendo k, l, m, n, p, q a quantidade de lados dos polígonos que compõem cada vértice.

O Quadro 1, a seguir, mostra todos os onze tipos possíveis de ladrilhamentos bem comportados.

Tipo de Vértice Classificação	Regular	Semirregular
(k, l, m)	$(6, 6, 6)$	$(3, 12, 12)$, $(4, 8, 8)$ e $(4, 6, 12)$
(k, l, m, n)	$(4, 4, 4, 4)$	$(3, 6, 3, 6)$ e $(3, 4, 6, 4)$
(k, l, m, n, p)		$(3, 3, 3, 6, 3)$, $(3, 3, 4, 4, 3)$ e $(3, 4, 3, 3, 4)$
(k, l, m, n, p, q)	$(3, 3, 3, 3, 3, 3)$	

Quadro 1: Tipos de ladrilhamentos bem comportados

Até aqui foram omitidas as construções dos ladrilhamentos encontrados. As mesmas serão feitas de uma forma interativa na próxima seção, usando o *software* GeoGebra.

3. Geogebra

3.1. Sobre o *software*

O *software* GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter[8] e produzido junto a outros pesquisadores, no intuito de proporcionar uma relação dinâmica entre Matemática e as TDICs. Em 2001 na University of Salzburg começaram o desenvolvimento de projetos para o aplicativo, o qual foi continuado posteriormente na Florida Atlantic University.

A grande utilização do GeoGebra fez com que tivesse ampla divulgação e chegasse a ser usado como ferramenta educacional, estando disponível para escolas e outros usuários. Esse aplicativo é de livre acesso e encontra-se disponível para *download* no *site* GeoGebra[9]. O aplicativo pode ser usado nos formatos compatíveis com Android, Windows Phone e IOS para *smartphone* e *tablet*, Windows, MAC OS X e Linux para computador. Outra maneira de utilizá-lo é através da extensão virtual, também disponível no *site*.

3.2. Uso do Geogebra na construção de ladrilhamentos

Aqui são apresentadas algumas possibilidades para construção dos ladrilhamentos bem comportados. Uma função do GeoGebra que simplifica as construções é a “criação de ferramentas”, a qual se baseia em transformar construções muito utilizadas em uma opção predefinida por comandos

[7] Deduções embasadas em Dias e Sampaio, 2013[6].

[8] Markus Hohenwarter é um matemático da Áustria e leciona na Universidade Johannes Kepler (JKU) Linz. Ele é presidente do Instituto de Educação Matemática e possui grande influência em pesquisas sobre as TDICs na educação matemática (CORDEIRO, 2014)[4].

reduzidos. Com essa função é possível criar os tipos de polígonos a serem trabalhados e torná-los fixos para utilização seguinte.

Será exemplificada a criação da ferramenta "triângulo equilátero"; para os demais polígonos regulares o processo é análogo. Essa construção dá-se pelos passos:

1. Escolher a opção "Polígono regular", na barra inicial de tarefas;
2. Selecionar dois pontos e digitar o número de vértices do polígono desejado (neste caso, três);
3. Acessar "Opções adicionais", "Ferramentas"e "Criar uma nova ferramenta";
4. Definir como objeto final o triângulo criado e como objetos iniciais, os pontos usados;
5. Salvar a nova ferramenta (é opcional, antes disso, modificar nome, comando de entrada e adicionar ícones à ferramenta criada).

Outras duas funcionalidades do GeoGebra a serem utilizadas são os comandos "Transladar" e "Sequência". O comando Transladar copia um objeto predefinido, dados distância e sentido por um vetor. Neste caso atribui-se a expressão:

$$\mathrm{Transladar}(<\mathrm{Objeto}>,<\mathrm{Vetor}>)$$

O comando Sequência faz uma lista de objetos a partir de uma expressão (neste estudo, a função Transladar), seguindo os parâmetros de uma variável com valores inicial/final e incremento, sendo usados na forma:

$$\mathrm{Sequência}(<\mathrm{Expressão}>,<\mathrm{Variável}>,<\mathrm{ValorInicial}>,<\mathrm{ValorFinal}>,<\mathrm{Incremento}>)$$

Em outras palavras, para o nosso propósito, o comando Sequência, faz sucessivas cópias da Translação de um polígono (ou uma lista de polígonos), no sentido e distância dos múltiplos de um vetor. Além disso, é possível transladar uma Sequência, tal como sequenciar essa nova translação, o que gera um padrão de preenchimento do plano. Esse padrão é uma lista de polígonos que pode ser editada com intuito visual, modificando cores e ocultando rótulos.

Pra construção do ladrilhamento $(6,6,6)$, inicialmente cria-se um controle deslizante inteiro k, tal que, $1 \leq \mathrm{k} \leq 30$ (para fins de visualização é um tamanho suficiente). A partir desse número k, define-se uma lista R de números inteiros, tal que:

$$\mathrm{R} = \mathrm{Sequência}\left((-1)^{\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{n}}{2} + \frac{(-1)^{\mathrm{n}} - 1}{4}\right), \mathrm{n}, 1, \mathrm{k}\right)$$

ou seja, $\mathrm{R} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$, gerando uma representação de inteiros com sinais alternados para cada valor k. Em seguida, utiliza-se a ferramenta "Hexágono Regular" (anteriormente criada com "Nova Ferramenta") para construir o polígono desejado (pol1), selecionando na janela de visualização dois pontos A e B. Usando a ferramenta "vetor"e os vértices do pol1, cria-se o vetor $\vec{\mathrm{u}}$, no sentido e módulo de AE, selecionando respectivamente os pontos A e E e o vetor $\vec{\mathrm{v}}$, com sentido e módulo de EC, selecionando respectivamente os pontos E e C. A Figura 9, mostra a construção requisitada para o ladrilhamento.

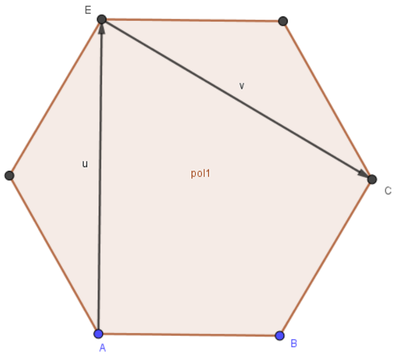

Figura 9: Hexágono regular - Elementos

Nessas condições, é atribuído no campo de entrada o comando

$$\text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{Sequência}(\text{Transladar}(\text{pol1}, \text{R}(\text{i})\text{u}), \text{i}, 0, \text{k}, 1), \text{R}(\text{j})\text{v}), \text{j}, 0, \text{k}, 1),$$

que faz uma sequência de translações do hexágono regular na direção dos múltiplos de $\vec{u}$ pela lista R e faz uma nova sequência desses polígonos transladados na direção dos múltiplos de $\vec{v}$ pela lista R, conforme variar o valor de k (pode-se variar manualmente ou selecionar a opção “animação” com o botão direito do *mouse* sobre o controle deslizante k), gerando assim uma lista de hexágonos congruentes ao primeiro, os quais fazem o preenchimento do plano. Os elementos iniciais podem ser ocultados, e a lista criada pode ser modificada em cores, transparência etc., a gosto de visualização. A Figura 10 mostra o resultado para o ladrilhamento $(6, 6, 6)$.

Figura 10: Ladrilhamento regular $(6, 6, 6)$

Para a elaboração dos próximos ladrilhamentos serão suprimidos alguns detalhes, cuja construção é análoga. O ladrilhamento $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ é um caso particular do ladrilhamento $(6, 6, 6)$ (e vice-versa), uma vez que cada hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. De certo modo, a construção através do comando sequência é análoga, com uma pequena diferença: o fato de os triângulos não possuírem lados paralelos faz com que sejam necessários, inicialmente, dois desses polígonos. A Figura 11 mostra os elementos iniciais do ladrilhamento $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

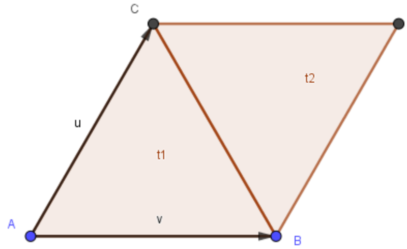

Figura 11: Triângulos equiláteros - Elementos

Em seguida, o comando Sequência é aplicado aos polígonos t1 e t2, no parâmetro

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(\{t1, t2\}, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1)}$$

que gera o ladrilhamento regular $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, como mostra a Figura 12.

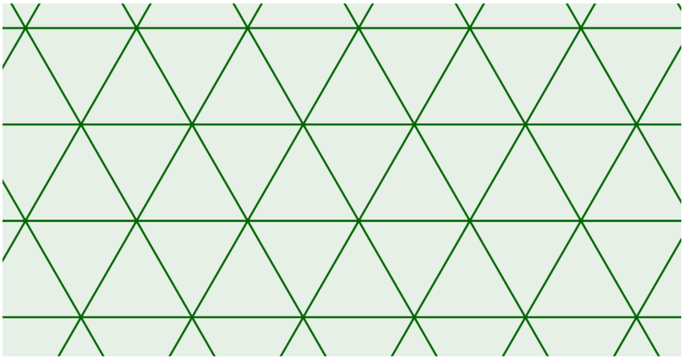

Figura 12: Ladrilhamento regular $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$

Os ladrilhamentos semirregulares utilizam mais de um tipo de polígono em sua formação, sendo assim, serão construídas duas listas (ou mais) de translações, afim de possibilitar a mudança de cores dos polígonos de diferentes tipos.

Para construir o ladrilhamento $(3, 12, 12)$, inicialmente são criados o controle deslizante de mesmo padrão anterior, um dodecágono regular (pol1) e dois triângulos equiláteros $(\mathrm{t1}, \mathrm{t2})$, juntamente com os vetores $\vec{\mathrm{u}}$ e $\vec{\mathrm{v}}$. A Figura 13 mostra essa construção inicial.

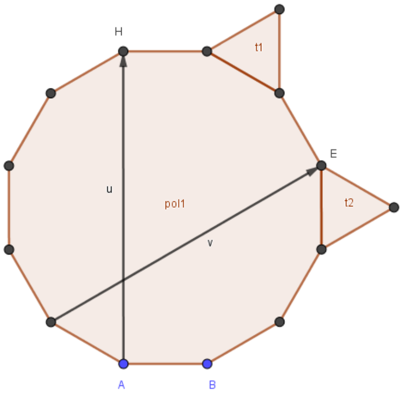

Figura 13: Dodecágono regular e triângulos equiláteros - Elementos

Aplica-se então o comando

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(pol1, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1)}$$

ao hexágono regular, e o comando

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(\{t1, t2\}, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1)}$$

aos dois triângulos equiláteros, gerando assim as duas listas citadas. Essas, portanto, geram o ladrilhamento $(3, 12, 12)$ exibido na Figura 14.

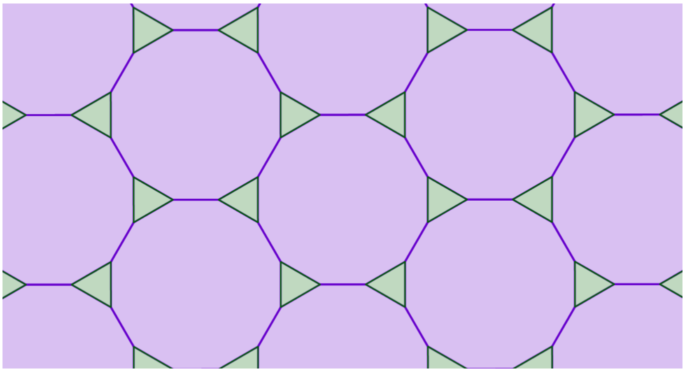

Figura 14: Ladrilhamento semirregular $(3, 12, 12)$

O último ladrilhamento do tipo $(\mathrm{k}, \mathrm{l}, \mathrm{m})$ a ser construído é o ladrilhamento semirregular $(4, 6, 12)$, composto por quadrados, hexágonos e dodecágonos regulares. A criação dos elementos para executar o comando, nesse caso, é "um pouco" mais elaborada, visto que são necessários um dodecágono regular, dois hexágonos e três quadrados, como visto na Figura 15.

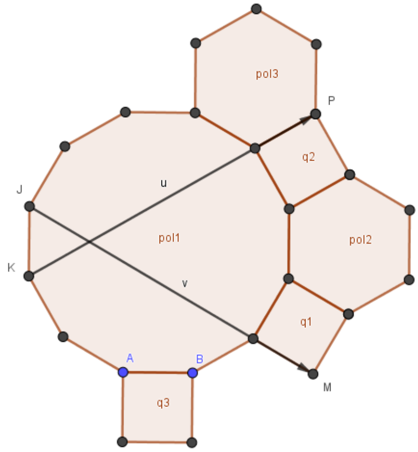

Figura 15: Dodecágono regular, hexágonos regulares e quadrados - Elementos

Dessa forma, usando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o controle deslizante k, pode-se desferir os comandos

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(pol1, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1)}$$

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(\{pol2, pol3\}, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1)}$$

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(\{q1, q2, q3\}, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1)}$$

respectivamente, transladando o dodecágono (pol1), hexágonos (pol2, pol3) e os quadrados (q1, q2, q3). A Figura 16 representa o ladrilhamento $(4, 6, 12)$ após realizados os processos de translação e modificação de padrões.

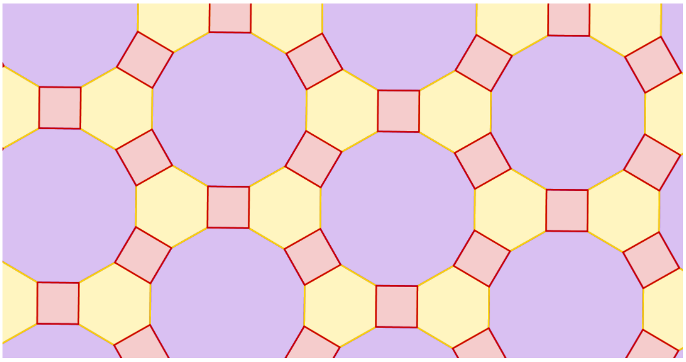

Figura 16: Ladrilhamento semirregular $(4, 6, 12)$

O último ladrilhamento da forma (k, l, m, n, p), e também o último dessas construções, possui vértices do tipo $(3, 4, 3, 3, 4)$, ou seja, é composto por quadrados e triângulos equiláteros.

Os elementos inciais necessários são dois quadrados (q1, q2) e quatro triângulos (t1, t2, t3, t4), juntamente com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, expostos na Figura 17.

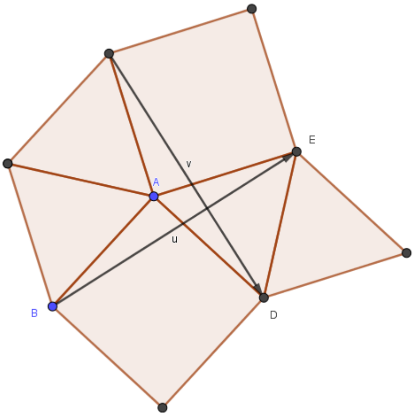

Figura 17: Quadrados e triângulos equiláteros - Elementos

Os comandos

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(\{q1, q2\}, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1)}$$

$$\mathrm{Sequência(Transladar(Sequência(Transladar(\{t1, t2, t3, t4\}, R(i)u), i, 0, k, 1), R(j)v), j, 0, k, 1),}$$

aplicados respectivamente aos quadrados e triângulos, sequenciam translações dos mesmos, formando, portanto, o ladrilhamento $(3, 4, 3, 3, 4)$, representado na Figura 18.

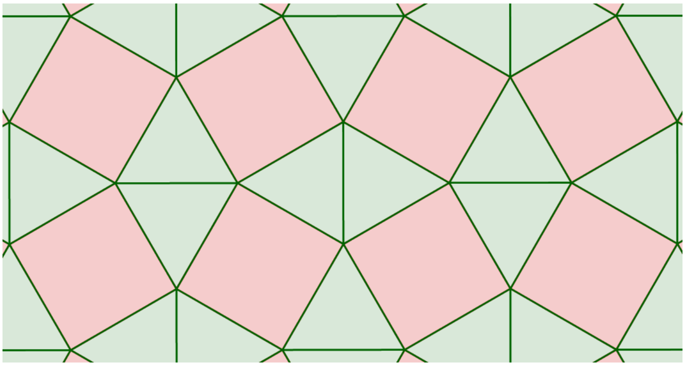

Figura 18: Ladrilhamento semirregular $(3, 4, 3, 3, 4)$

A seção seguinte faz uma abordagem prática, através de uma oficina realizada com alunos do Ensino Fundamental II (9º ano) de uma escola da rede pública, onde foram vistos conceitos e comandos básicos do GeoGebra, com intuito de construir ladrilhamentos bem comportados (e outros tipos).

4. Oficina

Para uma abordagem ativa dos conhecimentos adquiridos com o *software* GeoGebra, foi desenvolvida uma oficina junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental da Escola Estadual Professor Elídio Duque, na cidade de Salinas-MG. A oficina foi realizada em um único encontro, com duração de aproximadamente 04 horas em um laboratório de informática.

Em um primeiro instante foi apresentado o tema aos alunos, colocando os objetivos da oficina, fazendo uma abordagem conceitual e histórica sobre os mosaicos e ladrilhamentos e revisando alguns tópicos necessários de Geometria Plana.

A proposta de atividade aos alunos direcionou-se a estudar os ladrilhamentos bem comportados. Essa etapa da oficina foi um momento de estabelecer as propriedades de cada tipo de ladrilhamento a ser construído, e serem dadas as condições do que de fato seria um ladrilhamento bem comportado.

Nessa parte da oficina os alunos passariam a ter um papel ativo, onde usariam suas habilidades para realizar as montagens propostas. Para essa atividade, foram distribuídos moldes de polígonos regulares à turma. Esses moldes foram anteriormente montados no *software* GeoGebra e impressos em papel-cartão. Havia ali triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, entre outros polígonos regulares, com diferentes quantidades de lados, mas todos de lados com a mesma medida, para que fosse possível obedecer uma das condições de bem comportados.

A partir da distribuição dos moldes, foi proposto que inicialmente fizessem a montagem de ladrilhamentos regulares. De forma rápida, começaram as tentativas e logo construíram ladrilhamentos regulares e bem comportados, como exemplificados na Figura 19 a seguir.

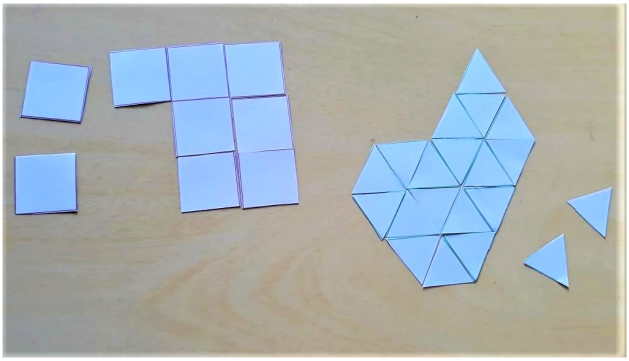

Figura 19: Ladrilhamentos $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ e $(4, 4, 4, 4)$ com moldes

Na tentativa de construírem um ladrilhamento regular usando pentágonos e heptágonos, alguns alunos fizeram investigações e tiveram algumas percepções. Os mesmos constataram que não é possível construir um ladrilhamento regular com esses polígonos, onde foi esclarecido a eles que o mesmo aconteceria com polígonos de número de lados maior que sete, uma vez que nenhum polígono com quantidade de lados maior que 6 tem medida do ângulo interno como um divisor de 360°. Essa mesma percepção vale para os pentágonos regulares, que têm como ângulo interno 108°, ou seja, um não divisor de 360°. Desse modo, haveria espaços não preenchidos, ou, na tentativa, sobreposição das peças. A Figura 20 mostra essas tentativas.

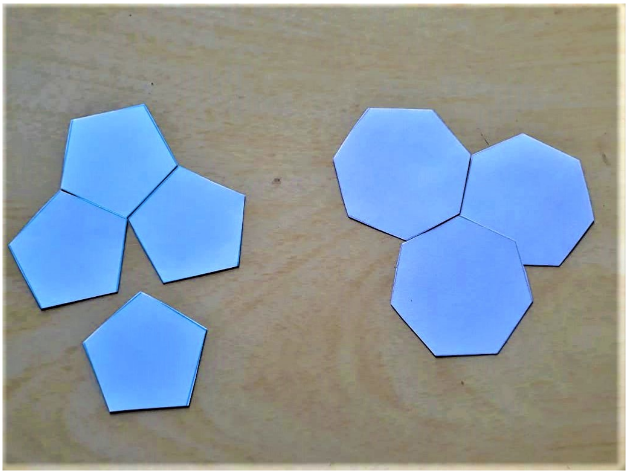

Figura 20: Tentativa de ladrilhamentos pentagonais e heptagonais com moldes

Após algumas considerações, foi proposto aos alunos que usassem agora polígonos com quantidade de lados diferentes, ou seja, que tentassem a montagem de ladrilhamentos semirregulares. Com um pouco de raciocínio e comparação das figuras, logo apresentaram algumas construções de ladrilhamentos bem comportados, como na Figura 21.

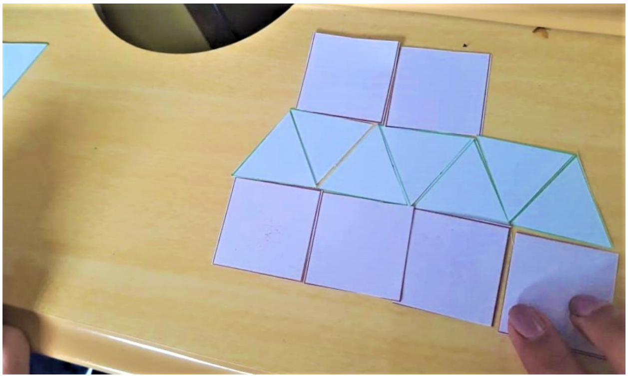

Figura 21: Ladrilhamento $(3, 3, 3, 4, 4)$ com moldes

Em conclusão desse momento foram recolhidos os moldes, onde a nova proposta era uma atividade digital, utilizando o GeoGebra. Inicialmente, o *software* foi apresentado à turma como uma ferramenta auxiliadora no ensino de Matemática.

Este momento das atividades foi usado para mostrar todos os tipos de ladrilhamentos bem comportados (não sendo trivial a percepção e visualização de todos) e propor que os alunos verificassem a construção dos mesmos, usando o programa nos computadores. Essas construções deram-se pelas ferramentas de criação de polígonos do GeoGebra, que proporcionam uma construção simplificada.

Alguns alunos tentaram construções simples e que até já haviam sido realizadas com os moldes. Por exemplo, os ladrilhamentos $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ e $(4, 4, 4, 4)$. Outros aceitaram a tarefa de construir os ladrilhamentos que utilizam diferentes polígonos. A Figura 22 mostra a construção do ladrilhamento $(6, 3, 3, 3, 3)$ utilizando hexágonos regulares e triângulos equiláteros.

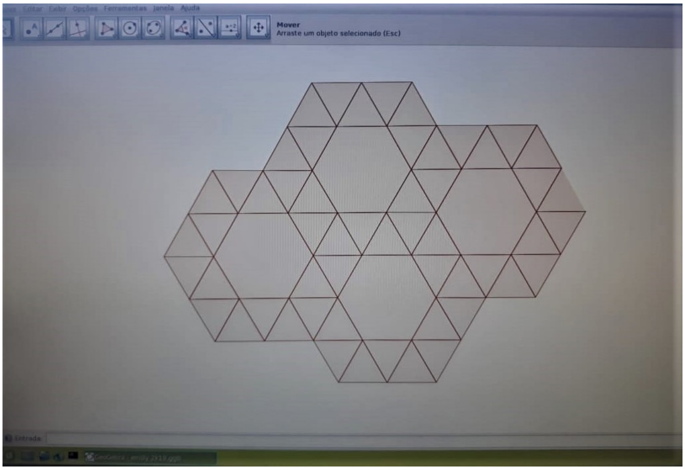

Figura 22: Ladrilhamento $(6, 3, 3, 3, 3)$ com GeoGebra

Outros alunos acessaram as configurações para colorir os polígonos e transformar o visual das construções. A Figura 23 mostra o ladrilhamento $(6, 4, 3, 4)$, que utiliza hexágonos regulares, quadrados e triângulos equiláteros.

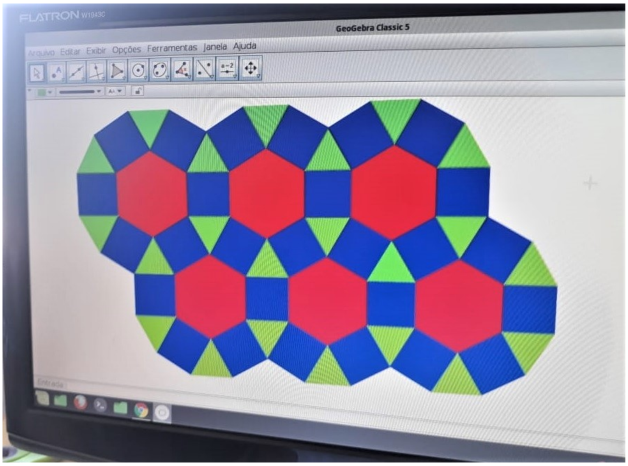

Figura 23: Ladrilhamento $(6, 4, 3, 4)$ com GeoGebra

Após a conclusão das atividades, os alunos foram questionados, por meio de discussões, a respeito de suas percepções sobre a oficina e o uso do *software* GeoGebra. Eles descreveram como algo diferente, mas que é uma ferramenta inovadora e eficiente no estudo de geometria.

Outra questão levantada foi a sensação dos alunos em estudar os polígonos através do *software* e dos moldes. Os principais comentários foram a respeito da facilidade da construção de diversos polígonos e a comparação com os moldes em material concreto. Para outros alunos, a oficina foi vista como uma aula diferente do que vivenciam em sala de aula, com quadro e papel, sendo um momento de usar as TDICs que tanto estão acostumados.

Por fim, os estudantes foram questionados sobre o uso de tecnologias digitais no estudo de Matemática. Os mesmos a consideraram como uma maneira diferente e interessante de estudar. É importante adequar as aulas e os estudos com a realidade tecnológica em que se vive, e essa utilização pode abrir novas possibilidades e mostrar novas perspectivas.

5. Considerações finais

A finalização deste trabalho permitiu trilhar novos caminhos e acessar diferentes possibilidades em sala de aula. A Matemática não existe apenas para satisfazer um mural de conteúdos, mas foi desenvolvida, ao longo do tempo, através da necessidade do homem em buscar melhores meios de sobrevivência e facilidade em suas atividades.

Grande parte dessas facilidades foram conquistadas com a formalização de conhecimentos geométricos, na qual houve sucessos em construções arquitetônicas e artísticas, no decorrer da história. Essa história é constituída de diferentes povos, diferentes lugares e diferentes épocas, mas o princípio geral é o mesmo, a busca por aprimoramentos através do conhecimento.

Mostrar isso aos alunos leva a eles significados acerca de um conteúdo, despertando entusiasmo e participação. A oficina realizada permitiu essa associação em diferentes etapas. A abordagem histórica dos mosaicos e ladrilhamentos, os leva a pensar no que também podem construir hoje e como sociedades passadas desenvolveram arte usando matemática e matemática usando arte.

Os alunos sempre utilizaram celular e computador, mas pouco o fizeram pra estudar geometria/matemática. Este trabalho foi então uma possibilidade de levar uma atividade diferenciada, mostrando possibilidades para que o uso feito do celular e computador, por parte dos alunos, pudesse ser associado ao estudo de Matemática . Este momento da oficina permitiu mostrar algumas das inúmeras funcionalidades do GeoGebra, onde os alunos usaram da criatividade pra construir os ladrilhamentos propostos. A interação já existente entre os estudantes e as tecnologias digitais fez com que rapidamente soubessem utilizar as ferramentas do GeoGebra e tivessem uma boa participação na oficina.

O ensino é uma atividade em que os professores devem ser mediadores e os alunos protagonistas. Construir um ensino significativo é uma tarefa modelada com o tempo. A finalização deste texto visa que outros professores também possam se conectar a essas ideias para inovação e ampliação do ensino, adequação das aulas ao desenvolvimento tecnológico e apresentação de significados do que se é trabalhado. Espera-se também que este trabalho seja continuado, uma vez que essa abordagem propicia novas pesquisas, no que diz respeito à Educação, História da Matemática e Tecnologias Digitais.

Referências

[1] Agência de turismo receptivo. Disponível em: https://s2rio.com.br/historia-das-pedras-portuguesas-do-calcadao-de-copacabana/. Acesso em 25 de janeiro de 2020.

[2] ALVES, Sérgio; DALCIN, Mário. Mosaicos no plano. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro-RJ, n.40, p.3-12, maio/agosto 1999.

[3] Ancient History Encyclopedia. Disponível em: https://www.ancient.eu/article/1095/tomb-robbing-in-ancient-egypt/ . Acesso em 20 de janeiro de 2020.

[4] CORDEIRO, Jean Carlo da Silva. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos Elipsógrafo**. 2014, 63f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa) - Rio de Janeiro: 2014.

[5] DACOL, M. R. **Caderno pedagógico: Abordagens do mosaico no ambiente escolar.** Curitiba: Secretaria do Estado do Paraná, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1539-6.pdf. Acesso em: 02 de fevereiro de 2020.

[6] DIAS, Cláudio Carlos; SAMPAIO, João Carlos Vieira. **Desafio Geométrico - Módulo I**. Cuiabá, MT: Central de texto, 2013.

[7] DINIZ, Luciana Nemer. **Experimentações com ladrilhamento de Escher no ensino de arquitetura.** XII international conference on graphics Engineering for arts ans design. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/anais/48711.pdf. Acesso em 28 de janeiro de 2020.

[8] DOMINGUES, Joelza Ester. Ensinar História. 09 de dezembro de 2014. Disponível em: https://ensinarhistoriajoelza.com.br/estandarte-de-ur/. Acesso em 15 de janeiro de 2020.

[9] GeoGebra. Disponível em: http://www.geogebra.org/. Acesso em 20 de janeiro de 2020.

[10] Nordeste Rural. Disponível em: https://nordesterural.com.br/e-possivel-oferecer-alimento-artificial-para-manter-atividade-das-abelhas-na-producao-de-mel/. Acesso em 25 de março de 2020.

[11] O GeoGebra. Disponível em: https://ogeogebra.com.br/site/textos/1.pdf. Acesso em 21 de janeiro de 2020.

[12] OLIVEIRA, J. F. M. **Pavimentações no Plano Euclidiano**. 2015. 80f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas-SP, 2015.

[13] STRICKLAND, Carol. **Arte Comentada: da Pré-História ao Pós-Moderno**. Rio de Janeiro: Ediouro, 2004.

[14] UFRGS. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/2009/modulo_I/complemento13.html. Acesso em 21 de janeiro de 2020.

Jhone Lima Santos
UESB - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
<jhonelimasantos@hotmail.com>

André Nagamine
UESB - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
<andnaga@uesb.edu.br>

Recebido: 29/03/2022
Publicado: 03/02/2023