Stochastic Calculus - Homework
Stochastic Differential Equation

Yuri F. Saporito

No que segue, $(B_t)_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano.

1. No Cálculo de Newton e Leibniz, a exponencial, $f(t) = e^t$, é a única função com a propriedade extraordinária $f'(t) = f(t)$, que se traduz em $f(t) - f(s) = \int_s^t f(u)du$. Diremos que um processo X_t é uma exponencial de Itô se $X_t - X_s = \int_s^t X_u dB_u$. Mostre que $X_t = e^{B_t}$ não é uma exponencial de Itô e ache $a \in \mathbb{R}$ que torne $X_t = e^{B_t - at}$ uma exponencial de Itô.

2. Use a Fórmula de Itô para achar a EDE que $X_t = a(t)\left(X_0 + \int_0^t b(s)dB_s\right)$ satisfaz. Estamos assumindo que a é diferenciável e $a(0) = 1$. Resolva as seguintes EDEs:

   (a) $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$.

   (b) $dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t$.

   (c) $dX_t = -\dfrac{X_t}{1-t}dt + dB_t$.

3. Suponha que a função $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a Equação Diferencial Parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + q(x)u(t,x),$$

   para qualquer $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$, com $u(0,x) = f(x)$. Não iremos nos preocupar com as hipóteses sobre suavidade de μ, σ e f. Note que ao assumir que u é uma solução dessa EDP estamos implicitamente assumindo que $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Nessa questão, iremos verificar a *representação de Feynman-Kac* para a solução u:

$$u(s,x) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^s q(X_u)du\right\} f(X_s)\right],$$

   onde X é solução da EDE

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

   B é um movimento Browniano e $X_0 = x$. No que segue fixaremos $s > 0$.

   (a) Defina $U_t = u(s-t, X_t)$, para $0 \leq t \leq s$. Encontre dU_t.

   (b) Defina $I_t = \exp\left\{\int_0^t q(X_u)du\right\}$. Encontre dI_t (Dica: note que $Y_t = \int_0^t q(X_u)du$ satisfaz $dY_t = q(X_t)dt$).

   (c) Use a regra do produto para achar $d(U_t I_t)$.

   (d) Assumindo certas hipóteses, argumente que $M_t = U_t I_t$ é um martingal e encontre a representação de Feynman-Kac's para u.