# Projeto Final

Felipe Matheus Oliveira Silva
IME-Ciência da Computação
USP

8 de agosto de 2022

## 1 Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é resolver uma equação do tipo:

$$(-p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \text{ em } (0,1), u(0) = u(1) = 0$$

onde $p(x) > 0, q(x) \geq 0, p(x) \in C^1[0,1], q(x), f(x) \in C[0,1]$. Uma solução clássica desta equação é uma função

$$u(x) \in V_0 = \{v \in C^2[0,1] : v(0) = v(1) = 0\}.$$

**Teorema 1.1.** *Seja $p \in C^1[0,1]$, $q, f \in C[0,1]$, e $p(x) \geq \delta > 0$, $q(x) \geq 0$, para $0 \leq x \leq 1$. A função $y \in C_0^2[0,1]$ é a unica solução para a equação diferencial*

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq 1$$

*se, e somente se, $y$ é a única função em $C_0^2[0,1]$ que minimiza a integral*

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\}dx.$$

O método de Rayleigh-Ritz aproxima a solução $y$ minimizando a integral, não sobre todas as funções em $C_0^2[0,1]$, mas sobre um conjunto menor de funções formado pela combinação linear de uma base de funções $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Tais funções são linearmente independentes e satisfazem

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0 \text{ para cada } i = 1, \ldots, m.$$

Neste trabalho, consideraremos o espaço vetorial das funções contínuas em $[0,1]$ denotado por $U_0 = C[0,1]$. Dada $u \in U_0$, nossa estratégia será procurar aproximar $u$ em um subespaço vetorial de dimensão finita.

Considere o intervalo $[0,1]$ e o espaço dos splines lineares

$$S^0_{2,m}[0,1] = \{s(x) \in C[0,1] : s(0) = s(1) = 0 \text{ e } s|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\},$$

relativo à partição do intervalo $[0,1]$ definida por $m$ sub-intervalos de mesmo comprimento, tomando os pontos igualmente espaçados $x_i = ih$, onde $h = \frac{1}{m+1}$, para $i = 0,\ldots,m+1$. Tomando $\{\phi_1,\ldots,\phi_m\}$ sendo uma base para $S^0_{2,m}[0,1]$, onde:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h, & x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ (x_{i+1} - x)/h, & x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, \ \text{Caso contrário} \end{cases}$$

para $i = 1,\ldots,m$.

As seguintes equações normais produzem um sistema $Ac = d$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_0^1 \left\{ p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x) \right\} dx \right] c_i - \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx.$$

Para cada $j = 1,\ldots,m$.

Uma vez resolvido o sistema $Ac = d$, obtemos a função $\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$ que melhor aproxima a função $u$ no sentido de mínimos quadrados.

O programa foi implementado utilizando a linguagem C++, compilado com compilador GNU (g++ v10.2.1-6) e flag de otimização -O3.

## 2 Teste 1

Para este teste implementamos as funções $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $f(x) = 12x(1-x) - 2$. Neste caso a solução exata de para este problema é a função $u(x) = x^2(x-1)^2$.

A tabela a seguir demonstra os erros e os tempos de execução obtidos na execução do programa: Neste teste foi possível notar que a medida que aumentamos o número de $m$ o

Tabela 1: Erro e Tempo de execução

| $m$ | Erro | Tempo de execução |
|---|---|---|
| 15 | $7.25322e^{-09}$ | $3m6.045s$ |
| 31 | $2.0807e^{-09}$ | $6m32.363s$ |
| 63 | $4.35322e^{-10}$ | $24m1.650s$ |
| 127 | $8.15175e^{-10}$ | $49m59.701s$ |
| 255 | $7.9559e^{-10}$ | $67m8.522s$ |

tamanho do erro diminui. Entretanto, o menor erro é atingido com $m = 63$.

## 3 Teste 2 - Equilíbrio sem forçantes e difusão constante

Para este teste tomaremos $f(x) = 0$ e $p(x) = \mu$, onde $\mu$ é a constante de difusão. Tomando soluto de Monóxido de Carbono assumimos $\mu = 2.03$.

Uma vez tomados os parâmetros introduzidos neste teste, obtivemos apenas o solução trivial para a resolução do sistema $Ac = d$.

## 4 Teste 3 - Equilíbrio com forçantes

Supondo o caso do teste anterior, mas agora considerando que há um despejo constante de poluentes no centro do domínio, de tal forma que

$$F(x) = \begin{cases} f_0, & \text{se } x \in (1/2 - d, 1/2 + d); \\ 0, & \text{Caso contrário .} \end{cases}$$

onde $0 < d < 1/2$ define o tamanho da região de despejo de poluente e $f_0$ define a quantidade de poluente é inserida no sistema constantemente ao longo do tempo.

A tabela a seguir demonstra os erros e os tempos de execução obtidos na execução do programa para $f_0 = 5.0$ e $d = 0.2$:

Tabela 2: Erro e Tempo de execução

| $m$ | Erro | Tempo de execução |
|---|---|---|
| 15 | 0.123153 | $4m1.639s$ |
| 31 | 0.138547 | $8m40.980s$ |

Erros e os tempos de execução obtidos na execução do programa para $f_0 = 0.1$ e $d = 0.2$:

Tabela 3: Erro e Tempo de execução

| $m$ | Erro | Tempo de execução |
|---|---|---|
| 15 | 0.00394089 | $4m15.270s$ |
| 31 | 0.00394089 | $11m41.388s$ |

Erros e os tempos de execução obtidos na execução do programa para $f_0 = 0.1$ e $d = 0.1$:

Tabela 4: Erro e Tempo de execução

| $m$ | Erro | Tempo de execução |
|---|---|---|
| 15 | 0.00232451 | $4m23.724s$ |
| 31 | 0.00221675 | $10m28.257s$ |

Através das Tabelas 2, 3 e 4 podemos notar que para os parâmetros $f_0$ e $d$ definidos nos 3 testes obtivemos erros de baixa ordem. Mas, para $f_0$ e $d$ menores observamos o erro diminuir.

# 5 Teste 4 - Equilíbrio com variação de coeficiente difusão

Supondo agora que há uma variação de temperatura no reservatório (ou, analogamente, no estado de difusão turbulenta do reservatório), de tal forma que a difusão seja maior no meio do reservatório do que mais próximo dos seus extremos. Adote, por exemplo, que

$$\mu(x) = \mu_0 \text{ e }^{-(x-1/2)^2/\sigma^2}$$

com $\mu_0$ constante indicando o máximo de difusão permitida no sistema e $\sigma$ controlando o quão rápido a difusão se reduz do centro do domínio para o extremo. Se $\sigma$ for muito pequeno, podemos ter uma difusão no extremo do domínio muito reduzida.

Testamos para diferentes valores de $\mu_0$ e $\sigma$ e não obtivemos solução numérica para este teste. Foram tomados $\mu_0 = 0.1, 1, 5$ $\sigma = 0.2, 0.02, 0.002$.

# 6 Teste 5 - Exemplo BurdenFaires 11.5

Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x)$$

para $0 \leq x \leq 1$, com $y(0) = y(1) = 0$. Tomando $h_i = h = 0.1$, tal que $x_i = 0.1i$, para cada $i = 0, 1, \ldots, m$.

A tabela a seguir demonstra os erros e os tempos de execução obtidos na execução do programa:

Tabela 5: Erro e Tempo de execução

| $m$ | Erro | Tempo de execução |
|---|---|---|
| 15 | 0.00160593 | $0m0.001s$ |
| 31 | 0.00040168 | $0m0.001s$ |
| 63 | 0.000100433 | $0m0.001s$ |
| 127 | $2.51142e^{-05}$ | $0m0.001s$ |
| 255 | $6.28036e^{-06}$ | $0m0.002s$ |

Para este teste obtivemos um resultado parecido com o Teste 1 em relação a convergência. A medida que o número de $m$ cresce, o erro da solução tende a diminuir. Outro fato a ser observado é que, tomando $q(x) \neq 0$, ou seja, $q(x) = \pi^2$ o tempo de execução se tornou bem menor.

# 7 Condições de fronteira não homogêneas

Para as condições de fronteira $u(0) = a$ e $u(1) = b$. Pode-se reduzir este problema ao caso homogêneo resolvendo-se a equação

$$L(v(x)) = f(x) + (b-a)k'(x) - q(x)(a + (b-a)x) = \tilde{f}(x)\ ,\ v(0) = v(1) = 0.$$

Neste caso $u(x) = v(x) + a + (b-a)x$ é a solução da equação com condições de fronteira $u(0) = a$ e $u(1) = b$.

Seja $v(x) = u(x) - (a + (b-a)x)$. Assim, tomando

$$\begin{aligned}
L(v(x)) &= L(u(x) - (a + (b-a)x)) \\
&= L(u(x)) - L((a + (b-a)x)) \\
&= L(u(x)) - ((-k(x)(b-a))' + q(x)(a + (b-a))x) \\
&= L(u(x)) - (-k(x)'(b-a) + q(x)(a + (b-a))x) \\
&= f(x) + k(x)'(b-a) - q(x)(a + (b-a))x = \tilde{f}(x).
\end{aligned}$$