Prova 2 - Módulo de Probabilidade e Estatística (PEDS Itaú)

Fellipe Premazzi Rego

02/10/2019

1 - Séries temporais e previsão

Modelar cada um dos cinco intervalos da série temporal do número de movimentações planejadas de aeronaves no aeroporto de Congonhas

In [107]:
```
library(forecast)
library(TTR)
library(stats)
library(seasonal)
library(timeDate)
library(tseries)
library(moments)
library(nortest)
library(AnalyzeTS)
library(ggplot2)
library(rugarch)
require(gridExtra)
```

executed in 126ms, finished 12:07:06 2019-10-02

In [115]:
```
movimentacoes <- read.table("dados.csv",sep = ";" , header = TRUE)
names(movimentacoes) = c("data", "total")
movimentacoes$data <- as.Date(movimentacoes$data, '%d/%m/%y')
head(movimentacoes)
```

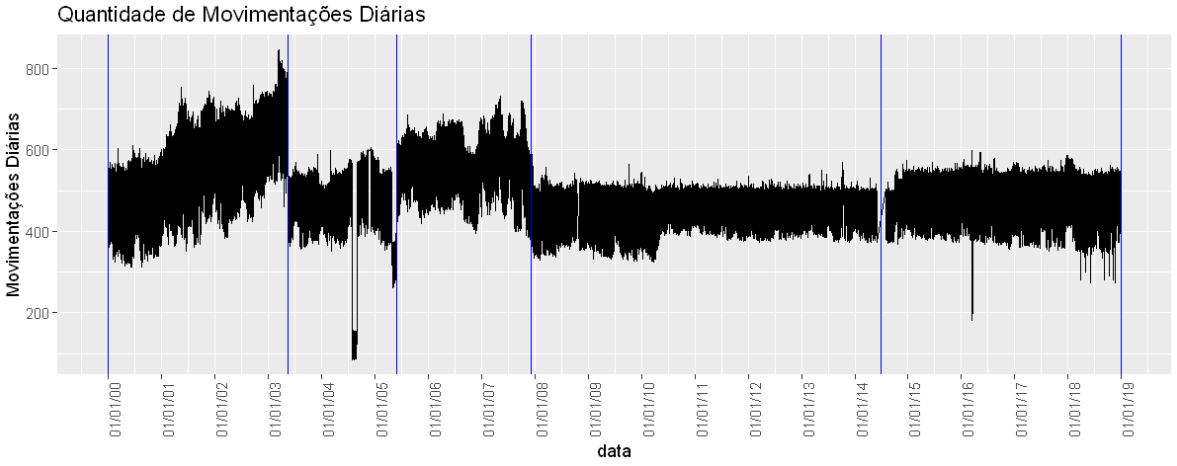
executed in 95ms, finished 12:10:19 2019-10-02

data	total
2000-01-01	356
2000-01-02	483
2000-01-03	568
2000-01-04	559
2000-01-05	552
2000-01-06	543

In [116]:

```
ggplot(movimentacoes, aes(data, total)) + geom_line() +
    scale_x_date(date_labels = "%d/%m/%y", date_breaks = "1 year") +
    ylab("Movimentações Diárias") +
    theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, hjust = 1)) +
    ggtitle("Quantidade de Movimentações Diárias") +
    geom_vline(xintercept = as.numeric(as.Date("2000-01-01")), color = "blue"
    geom_vline(xintercept = as.numeric(as.Date("2003-05-15")), color = "blue"
    geom_vline(xintercept = as.numeric(as.Date("2005-06-01")), color = "blue"
    geom_vline(xintercept = as.numeric(as.Date("2007-12-10")), color = "blue"
    geom_vline(xintercept = as.numeric(as.Date("2014-07-01")), color = "blue"
    geom_vline(xintercept = as.numeric(as.Date("2019-01-01")), color = "blue"
options(repr.plot.width=10, repr.plot.height=4)
```

executed in 638ms, finished 12:10:33 2019-10-02



Os dados foram separados em 5 janelas, sendo essas:

- 1ª Janela - A partir de 01/01/2000 até 15/05/2003 (exclusivo)
- 2ª Janela - A partir de 15/05/2003 até 01/06/2005 (exclusivo)
- 3ª Janela - A partir de 01/06/2005 até 10/12/2007 (exclusivo)
- 4ª Janela - A partir de 10/12/2007 até 01/07/2014 (exclusivo)
- 5ª Janela - A partir de 01/07/2014 até 01/01/2019 (inclusivo)

In [4]:

```
mov1 <- subset(movimentacoes, data < as.Date("2003-05-15"))
mov2 <- subset(movimentacoes,
               as.Date("2003-05-15") <= data & data < as.Date("2005-06-01"))
mov3 <- subset(movimentacoes,
               as.Date("2005-06-01") <= data & data < as.Date("2007-12-10"))
mov4 <- subset(movimentacoes,
               as.Date("2007-12-10") <= data & data < as.Date("2014-07-01"))
mov5 <- subset(movimentacoes,
               as.Date("2014-07-01") <= data)
```

executed in 4.16s, finished 09:53:30 2019-10-02

Particionamento de treino e teste

In [5]:
```
freq = 7
```
executed in 4.17s, finished 09:53:30 2019-10-02

O parâmetro da frequência que foi utilizada para gerar todas as times series foi valor de 7, pois, de acordo com a documentação da biblioteca **stats** , ele informa que para dados diarios o valor correto do parâmetro frequencia é 7, conforme mostrado abaixo:

Proof *The value of argument frequency is used when the series is sampled an integral number of times in each unit time interval. For example, one could use a value of 7 for frequency when the data are sampled daily, and the natural time period is a week, or 12 when the data are sampled monthly and the natural time period is a year.* ■

- **1ª janela**

In [117]:
```
mov1.ts = ts(mov1$total, frequency = freq)

w1 = nrow(mov1[trunc(nrow(mov1)*0.9+1):nrow(mov1),])

mov1.treino.ts = head(mov1.ts, round(length(mov1.ts)*0.9))
mov1.teste.ts = tail(mov1.ts, w1)
```
executed in 2.90s, finished 12:10:57 2019-10-02

- **2ª janela**

In [7]:
```
mov2.ts = ts(mov2$total, frequency = freq)

w2 = nrow(mov2[trunc(nrow(mov2)*0.9+1):nrow(mov2),])

mov2.treino.ts = head(mov2.ts, round(length(mov2.ts)*0.9))
mov2.teste.ts = tail(mov2.ts, w2)
```
executed in 4.22s, finished 09:53:30 2019-10-02

- **3ª janela**

In [8]:
```
mov3.ts = ts(mov3$total, frequency = freq)

w3 = nrow(mov3[trunc(nrow(mov3)*0.9+1):nrow(mov3),])

mov3.treino.ts = head(mov3.ts, round(length(mov3.ts)*0.9))
mov3.teste.ts = tail(mov3.ts, w3)
```
executed in 4.25s, finished 09:53:30 2019-10-02

- **4ª janela**

In [9]:
```
mov4.ts = ts(mov4$total, frequency = freq)

w4 = nrow(mov4[trunc(nrow(mov4)*0.9+1):nrow(mov4),])

mov4.treino.ts = head(mov4.ts, round(length(mov4.ts)*0.9))
mov4.teste.ts = tail(mov4.ts, w4)
```

executed in 4.28s, finished 09:53:30 2019-10-02

- **5ª janela**

In [10]:
```
mov5.ts = ts(mov5$total, frequency = freq)

w5 = nrow(mov5[trunc(nrow(mov5)*0.9+1):nrow(mov5),])

mov5.treino.ts = head(mov5.ts, round(length(mov5.ts)*0.9))
mov5.teste.ts = tail(mov5.ts, w5)
```

executed in 4.30s, finished 09:53:30 2019-10-02

1) Holt-Winters

O algoritmo Holt-Winters é uma das técnicas de previsão mais populares para séries temporais. Apesar de existir há décadas, ele ainda é muito utilizado em aplicativos voltados para fins de detecção de anomalias e, especialmente, na previsão de tempo.

Esse modelo é uma extensão do modelo de Holt (suavização exponencial dupla), desenvolvido por Winter. A sua capacidade de previsão é simples, mas muito poderosa. Ele pode lidar com muitos padrões sazonais complicados, simplesmente encontrando o valor central e adicionando os efeitos de inclinação e sazonalidade.

Método de Holt-Winters para série com tendência e sazonalidade

Quando a série temporal apresenta tendência para a projeção deve ser utilizada uma técnica que considere essa componente. Nesse moedelo, além do coeficiente de amortecimento α, um coeficiente representando a tendência β é adicionado.

Em primeiro lugar, é necessário escolher um α respeitando o intervalo [0,1]. Então, calcula-se N_t, nível da série no instante t, conforme a equação abaixo:

$$N_t = \alpha(N_{t-1} + T_{t-1}) + (1 - \alpha)y_t, onde\ 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

Calcudo o N_t, é possível então prosseguri para o cálculo do T_t:

$$T_t = \beta.T_{t-1} + (1 - \beta)(N_t - N_{t-1}), onde\ 0 < \beta < 1 \quad (2)$$

Por fim, realiza-se a previsão $\hat{y}_{n+h}$ em h períodos à frente da previsão:

$$\hat{y}_{n+h} = N_n + hT_n,\ com\ h = 1, 2, 3, 4..H \quad (3)$$

Sendo:

- N_t ... nível da série no instante "t"
- α ... coeficiente de amortecimento para flutuações aleatórias
- T_t ... tendência da série no instante "t"
- y_t ... valor da série no instante "t"
- β ... coeficiente associado à tendência
- h ... períodos à frente para obter a previsão
- $\hat{y}_{n+h}$ ... previsão h períodos
- n ... número de observações da série

Método de Holt-Winters para série com tendência sem sazonalidade

Quando a série temporal apresenta tendência e sazonalidade, o método de Holt-Winters para série comtendência e sazonalidade é miuto adequado (quando se dispõe de séries compoucos valores). Para realizar, uma para a tendência e uma oara a sazonalidade. Essas equações são apresentadas a seguir.

- Multiplicativo

Em primeiro lugar, é necessário escolher um α, β, γ respeitando o intervalo [0,1]. Então, calcula-se N_s, nível da série no instante t, conforme a equação abaixo:

$$N_s = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} y_i \tag{4}$$

Calcudo o N_s, é possível então prosseguri para o cálculo do T_s:

$$T_s = \frac{1}{s}\left[\frac{y_{s+1} - y_1}{s} + \frac{y_{s+2} - y_2}{s} + \ldots + \frac{y_{2s} - y_s}{s}\right] \tag{5}$$

Calcudo o T_s, é possível então prosseguir para o cálculo do S_i:

$$S_i = \frac{y_i}{N_s}, \quad i = 1, \ldots, s \tag{6}$$

Cáculo para $t > s$:

$$N_t = (1-\alpha)(N_{t-1} + T_{t-1}) + \alpha\left(\frac{y_t}{S_{t-s}}\right), \ com\ 0 < \alpha < 1 \tag{7}$$

Calcudo o N_t, é possível então prosseguri para o cálculo do T_t:

$$T_t = (1-\beta)T_{t-1} + \beta(N_t - N_{t-1}), \ com\ 0 < \beta < 1 \tag{8}$$

Então, a sazonalidade (S_t) no instante t é calculada por:

$$S_t = (1-\gamma)S_{t-1} + \gamma\left(\frac{y_t}{N_t}\right),\ com\ 0 < \gamma < 1 \tag{9}$$

Para concluir, é construída a previsão, onde S é a variação sazonal, s é o número de períodos e γ é o coeficiente de sazonalidade.

$$\hat{y}_{n+h} = (N_n + hT_n)S_{n+h-s},\ com\ h = 1, 2, 3, 4..., s \tag{10}$$

Sendo:

- N_t ... nível da série no instante "t"
- α ... coeficiente de amortecimento para flutuações aleatórias
- T_t ... tendência da série no instante "t"
- y_t ... valor da série no instante "t"
- β ... coeficiente associado à tendência
- S_t ... fator de sazonalidade
- γ ... coeficiente associado a sazonalidade
- s ... número de períodos da série (dados trimestrais s=4, anuais s=12)
- h ... períodos à frente para obter a previsão
- $\hat{y}_{n+h}$ ... previsão h períodos
- n ... número de observações da série

- Aditivo

Em primeiro lugar, é necessário escolher um α, β, γ respeitando o intervalo [0,1]. Então, calcula-se N_s, nível da série no instante t, conforme a equação abaixo:

$$N_s = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} y_i \tag{11}$$

Calcudo o N_s, é possível então prosseguri para o cálculo do T_s:

$$T_s = \frac{1}{s}\left[\frac{y_{s+1} - y_1}{s} + \frac{y_{s+2} - y_2}{s} + \ldots + \frac{y_{2s} - y_s}{s}\right] \tag{12}$$

Calcudo o T_s, é possível então prosseguir para o cálculo do S_i:

$$S_i = y_i - N_s,\quad i = 1, \ldots, s \tag{13}$$

Cáculo para $t > s$:

$$N_t = (1-\alpha)(N_{t-1} + T_{t-1}) + \alpha\left(y_t - S_{t-s}\right),\ com\ 0 < \alpha < 1 \tag{14}$$

Calcudo o N_t, é possível então prosseguri para o cálculo do T_t:

$$T_t = (1-\beta)T_{t-1} + \beta(N_t - N_{t-1}),\ com\ 0 < \beta < 1 \tag{15}$$

Então, a sazonalidade (S_t) no instante t é calculada por:

$$S_t = (1-\gamma)S_{t-s} + \gamma\left(y_t - N_t\right),\ com\ 0 < \gamma < 1 \tag{16}$$

Para concluir, é construída a previsão, onde S é a variação sazonal, s é o número de períodos e γ é o coeficiente de sazonalidade.

$$\hat{y}_{n+h} = N_n + hT_n + S_{n+h-s},\ com\ h = 1, 2, 3, 4..., s \tag{17}$$

Sendo:

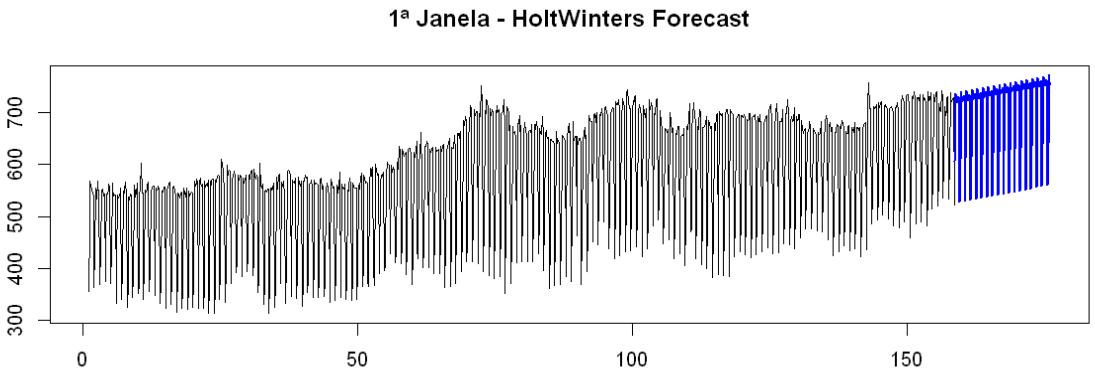
- N_t ... nível da série no instante "t"
- α ... coeficiente de amortecimento para flutuações aleatórias
- T_t ... tendência da série no instante "t"
- y_t ... valor da série no instante "t"
- β ... coeficiente associado à tendência
- S_t ... fator de sazonalidade
- γ ... coeficiente associado a sazonalidade
- s ... número de períodos da série (dados trimestrais s=4, anuais s=12)
- h ... períodos à frente para obter a previsão
- $\hat{y}_{n+h}$ ... previsão h períodos
- n ... número de observações da série

- **1ª janela**

In [11]:
```
hw.mov1.forecast = HoltWinters(mov1.treino.ts)
```
executed in 3.84s, finished 09:53:30 2019-10-02

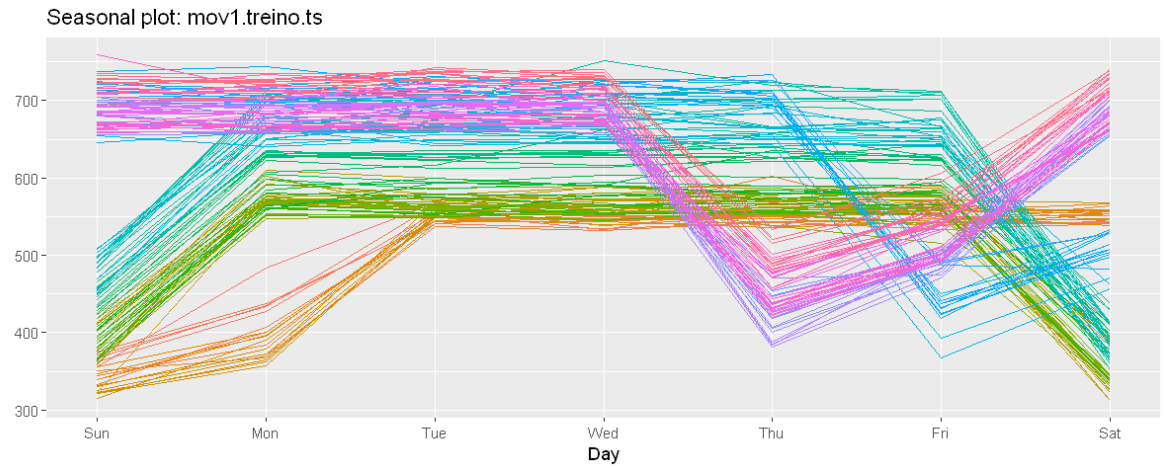
In [12]:
```
hw.mov1.predict <- forecast(hw.mov1.forecast,h = w1)
```
executed in 4.17s, finished 09:53:31 2019-10-02

In [13]:
```
plot(hw.mov1.predict, main = "1ª Janela - HoltWinters Forecast", PI=F)
```
executed in 4.28s, finished 09:53:31 2019-10-02



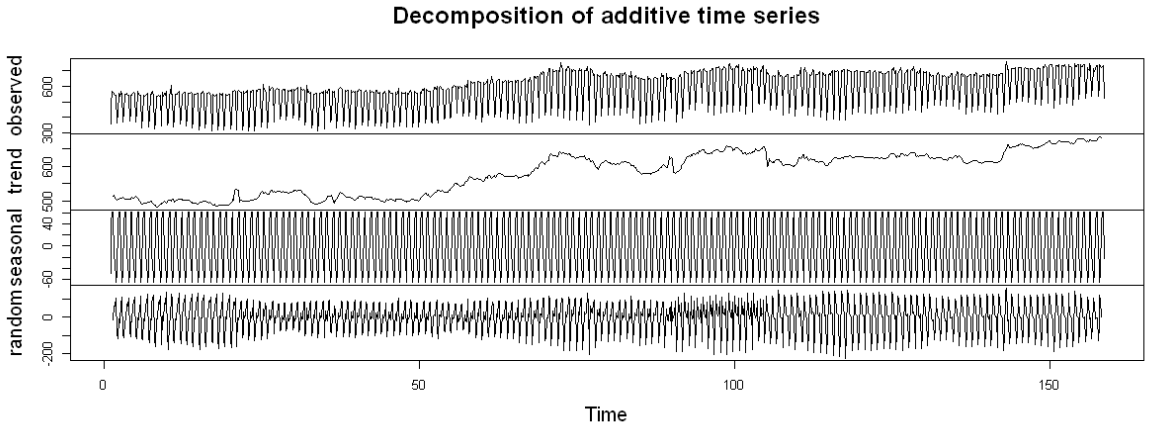
In [14]:
```
ggseasonplot(mov1.treino.ts) + theme(legend.position = "none")
```

executed in 4.87s, finished 09:53:31 2019-10-02



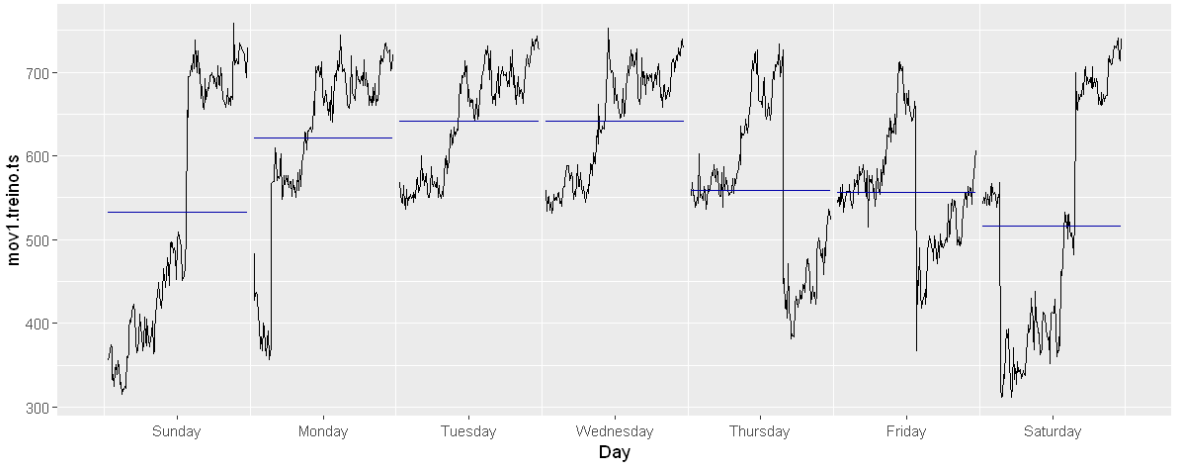
In [15]:
```
plot(decompose(mov1.treino.ts))
```

executed in 5.08s, finished 09:53:32 2019-10-02



In [16]:
```
ggsubseriesplot(mov1.treino.ts)
```

executed in 5.44s, finished 09:53:32 2019-10-02



In [17]:
```
accuracy(hw.mov1.predict, mov1.teste.ts)
```
executed in 5.48s, finished 09:53:32 2019-10-02

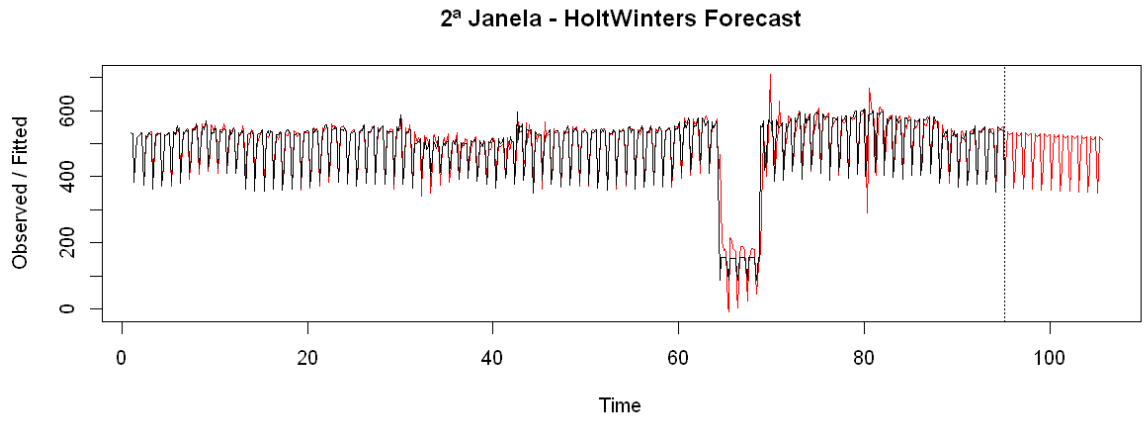
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	1.004348	24.13730	14.14988	0.07035205	2.635675	0.9828047	0.2014666	NA
Test set	8.380564	38.26821	28.02631	0.62369195	3.987654	1.9466166	0.6471415	0.3284734

- **2ª janela**

In [18]:
```
hw.mov2.forecast = HoltWinters(mov2.treino.ts)
```
executed in 5.51s, finished 09:53:32 2019-10-02

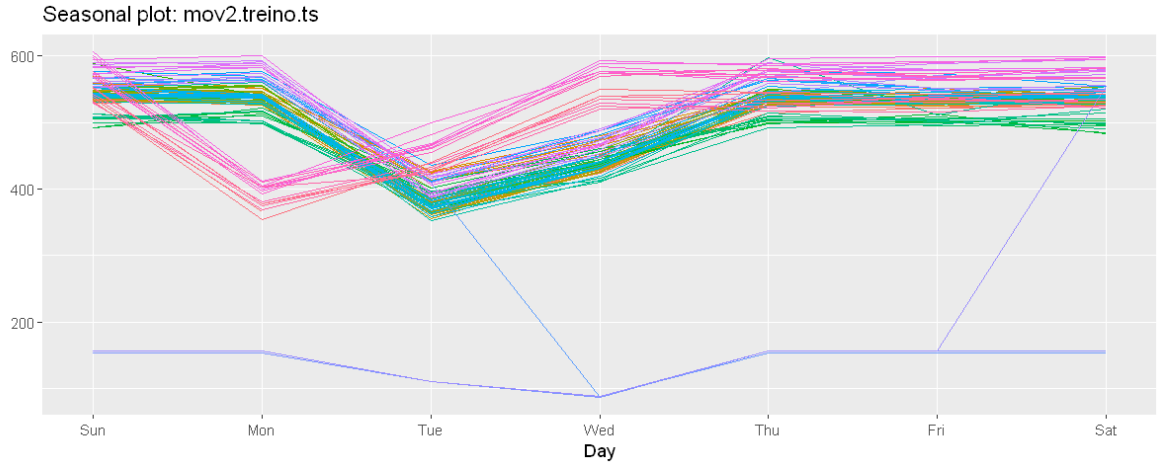
In [19]:
```
hw.mov2.predict = predict(hw.mov2.forecast,n.ahead = w2)
```
executed in 5.54s, finished 09:53:32 2019-10-02

In [20]:
```
plot(hw.mov2.forecast, hw.mov2.predict, main = "2ª Janela - HoltWinters Forec
```
executed in 5.65s, finished 09:53:32 2019-10-02



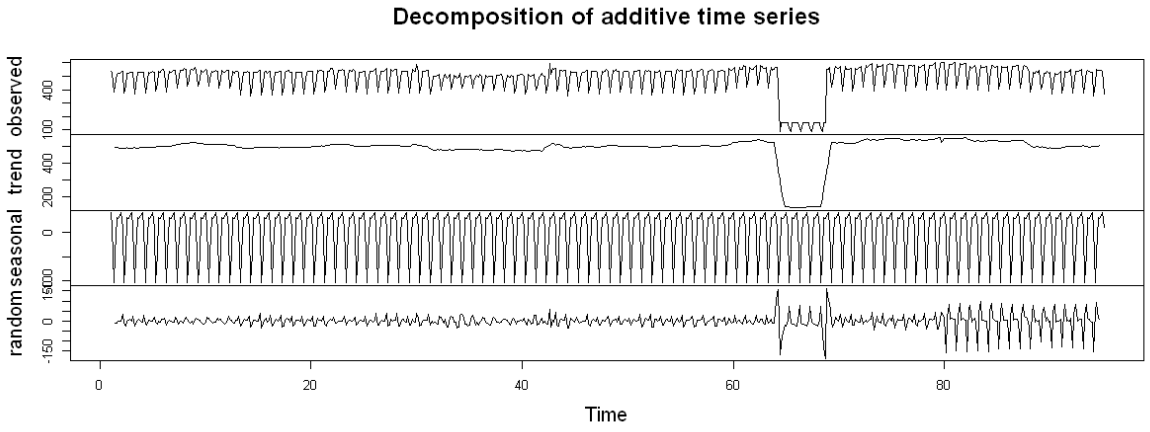
In [21]:
```
ggseasonplot(mov2.treino.ts) + theme(legend.position = "none")
```

executed in 6.13s, finished 09:53:33 2019-10-02



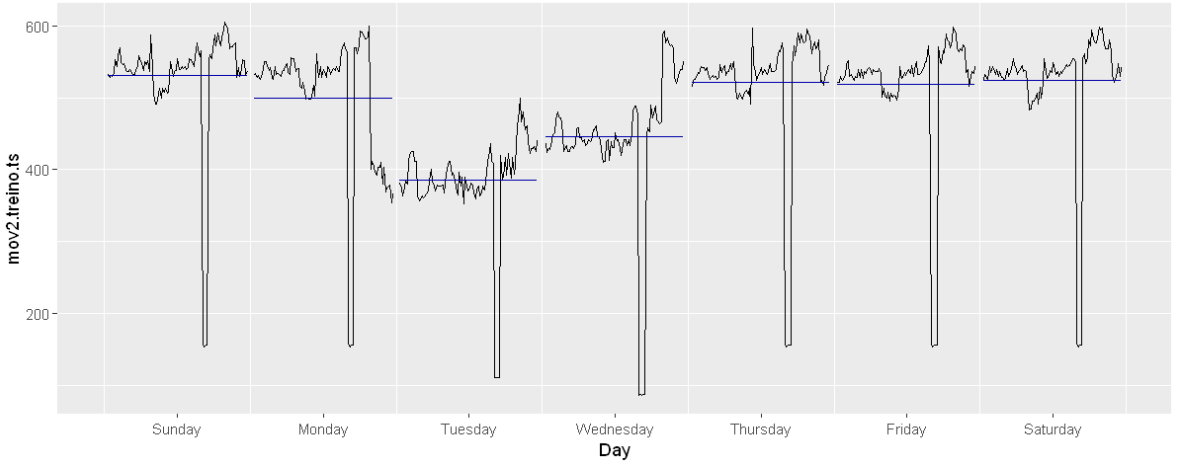
In [22]:
```
plot(decompose(mov2.treino.ts))
```

executed in 6.31s, finished 09:53:33 2019-10-02



In [23]:
```
ggsubseriesplot(mov2.treino.ts)
```

executed in 6.78s, finished 09:53:33 2019-10-02



In [24]:
```
accuracy(hw.mov2.predict, mov2.teste.ts)
```
executed in 6.82s, finished 09:53:33 2019-10-02

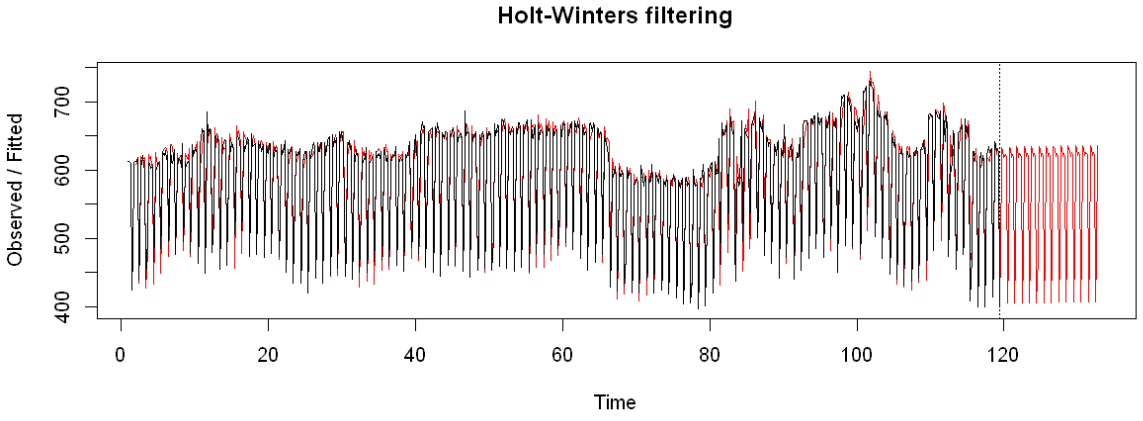
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	-51.13775	92.3236	66.46005	-15.60363	18.57117	0.8923238	1.661269

- **3ª janela**

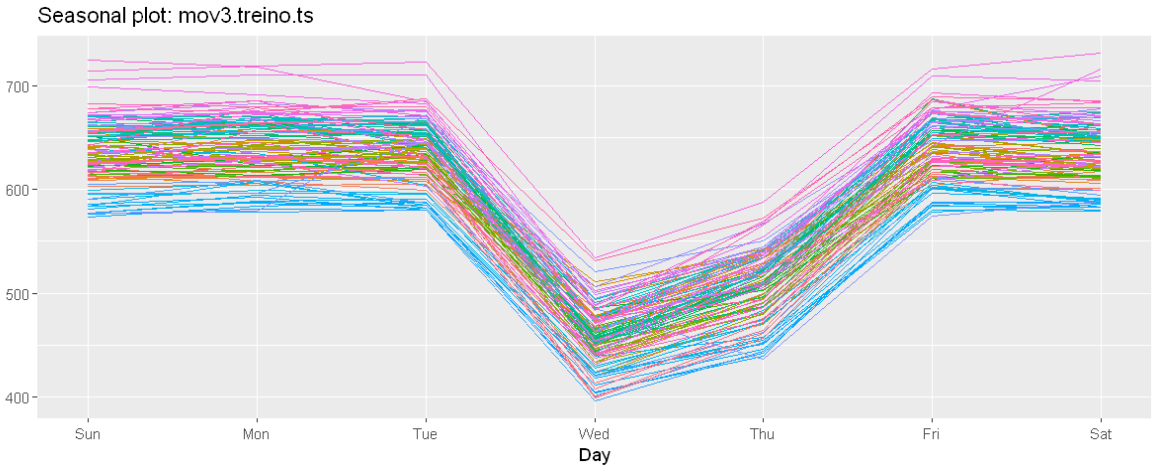
In [25]:
```
hw.mov3.forecast = HoltWinters(mov3.treino.ts)
```
executed in 6.85s, finished 09:53:33 2019-10-02

In [26]:
```
hw.mov3.predict <- predict(hw.mov3.forecast,n.ahead = w3)
```
executed in 6.89s, finished 09:53:34 2019-10-02

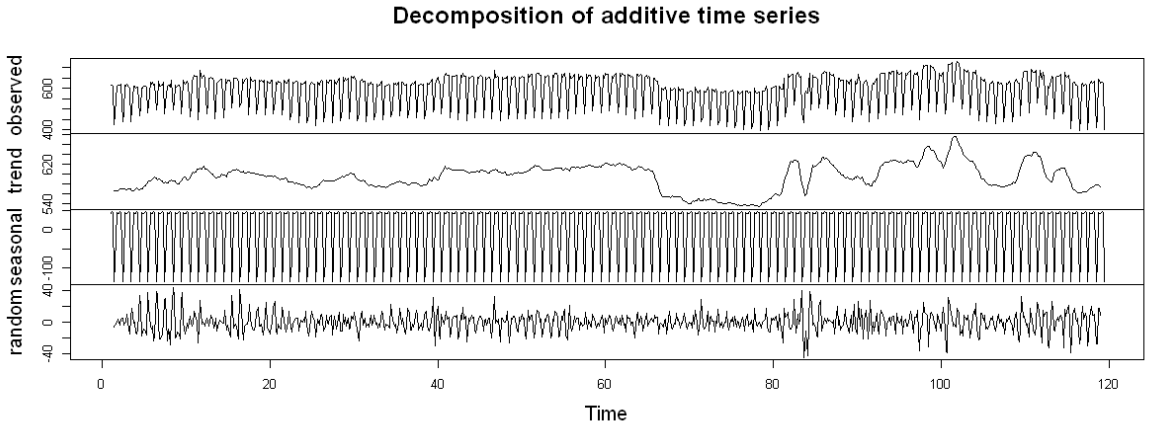
In [27]:
```
plot(hw.mov3.forecast, hw.mov3.predict)
```
executed in 7.02s, finished 09:53:34 2019-10-02



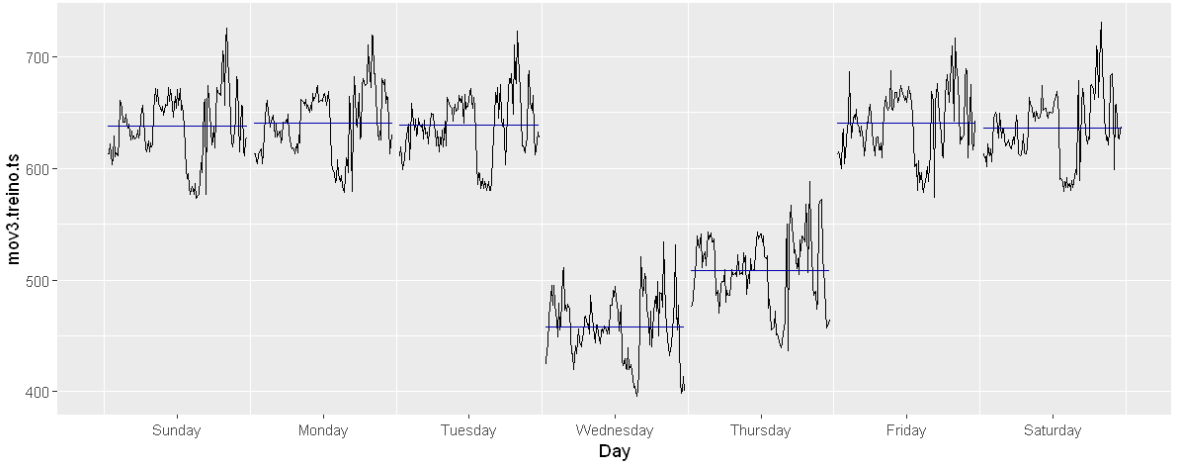
In [28]:
```
ggseasonplot(mov3.treino.ts) + theme(legend.position = "none")
```
executed in 7.47s, finished 09:53:34 2019-10-02



In [29]:
```
plot(decompose(mov3.treino.ts))
```
executed in 7.77s, finished 09:53:34 2019-10-02



In [30]:
```
ggsubseriesplot(mov3.treino.ts)
```
executed in 8.28s, finished 09:53:35 2019-10-02



In [31]:
```
accuracy(hw.mov3.predict, mov3.teste.ts)
```
executed in 8.32s, finished 09:53:35 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	7.112904	42.86289	31.91398	0.7595466	5.341229	0.8994641	0.3683247

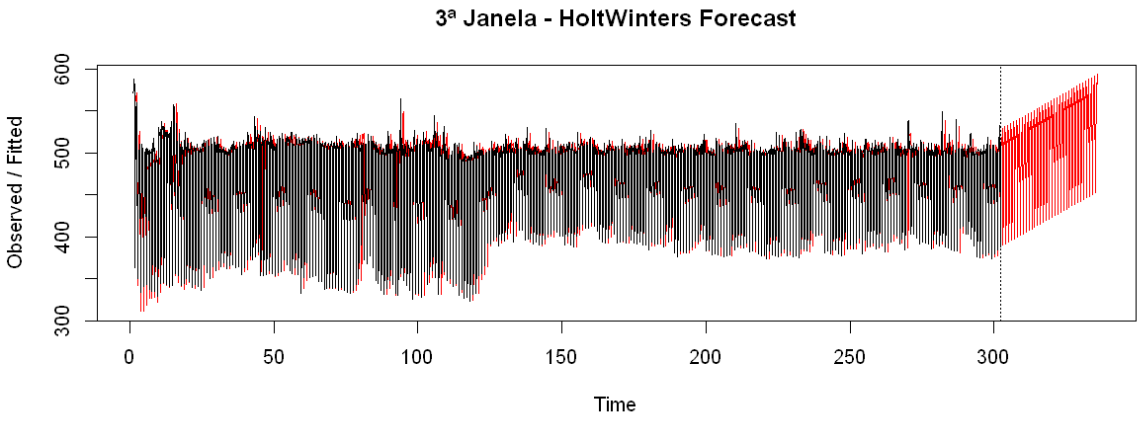
- **4ª janela**

In [32]:
```
hw.mov4.forecast = HoltWinters(mov4.treino.ts)
```
executed in 8.35s, finished 09:53:35 2019-10-02

In [33]:
```
hw.mov4.predict <- predict(hw.mov4.forecast,n.ahead = w4)
```
executed in 8.38s, finished 09:53:35 2019-10-02

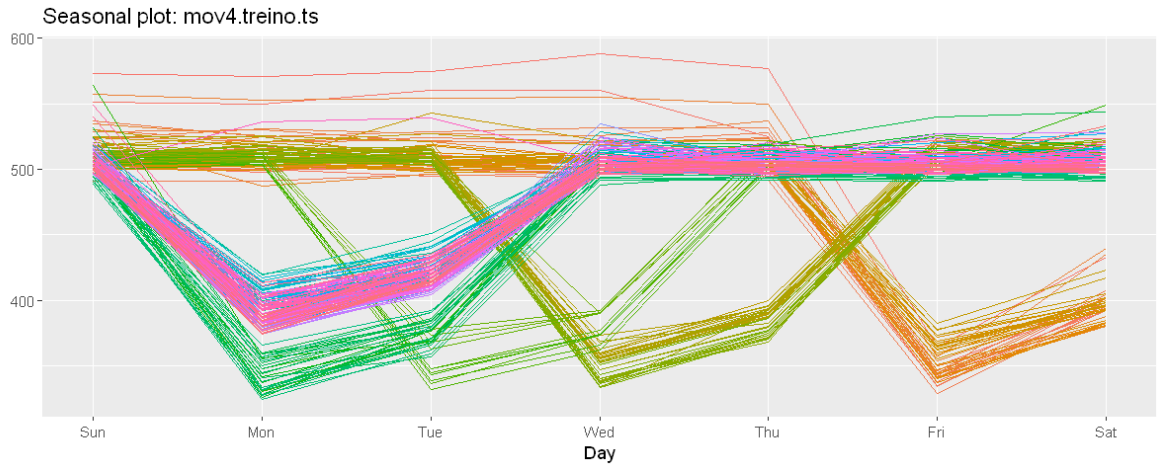
In [34]:
```
plot(hw.mov4.forecast, hw.mov4.predict, main = "3ª Janela - HoltWinters Forec
```

executed in 8.56s, finished 09:53:35 2019-10-02



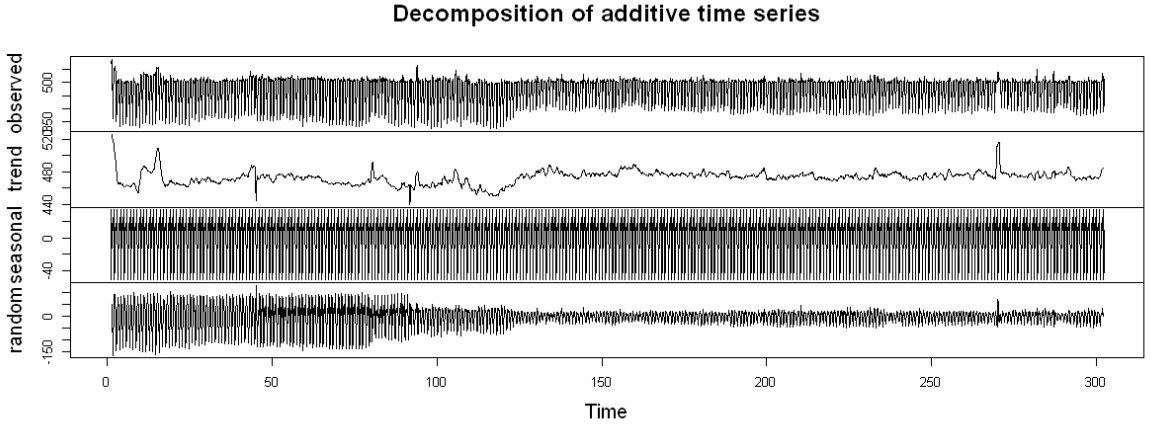
In [35]:
```
ggseasonplot(mov4.treino.ts) + theme(legend.position = "none")
```

executed in 9.30s, finished 09:53:36 2019-10-02



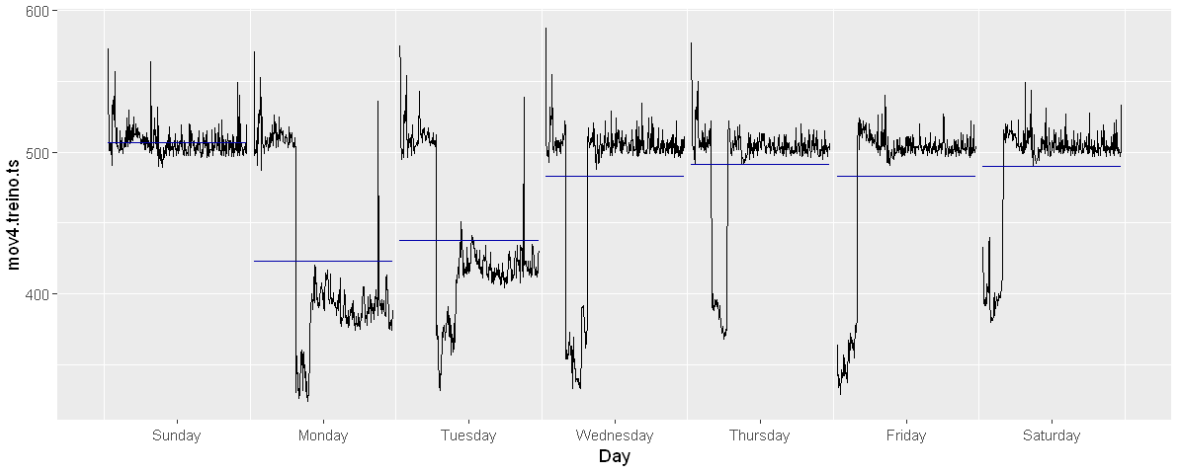
In [36]:
```
plot(decompose(mov4.treino.ts))
```

executed in 9.57s, finished 09:53:36 2019-10-02



In [37]:
```
ggsubseriesplot(mov4.treino.ts)
```

executed in 10.1s, finished 09:53:37 2019-10-02



In [38]:
```
accuracy(hw.mov4.predict, mov4.teste.ts, main = "4ª Janela - HoltWinters Fore
```

executed in 10.2s, finished 09:53:37 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	-41.95736	75.19909	57.11429	-9.801775	12.79738	0.2199266	1.253422

- **5ª janela**

In [39]:
```
hw.mov5.forecast = HoltWinters(mov5.treino.ts)
```

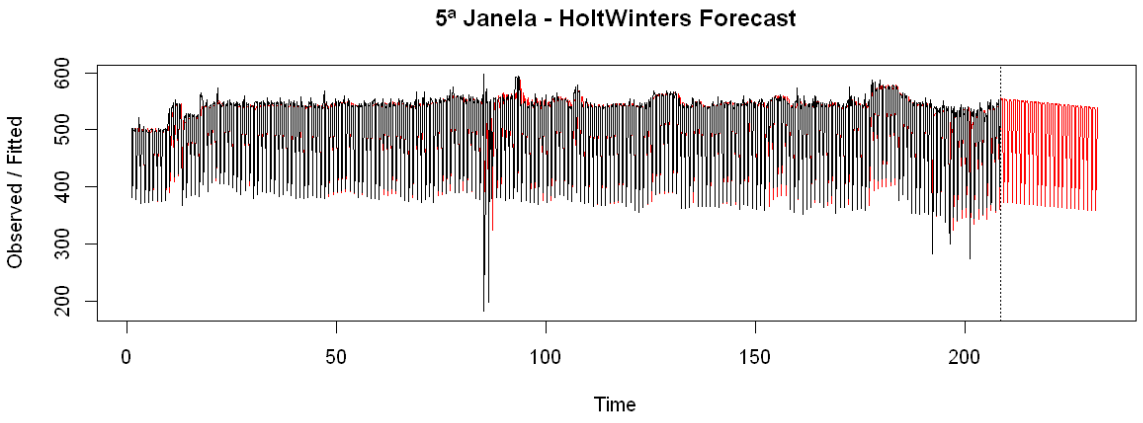
executed in 10.2s, finished 09:53:37 2019-10-02

In [40]:
```
hw.mov5.predict <- predict(hw.mov5.forecast,n.ahead = w5)
```

executed in 10.3s, finished 09:53:37 2019-10-02

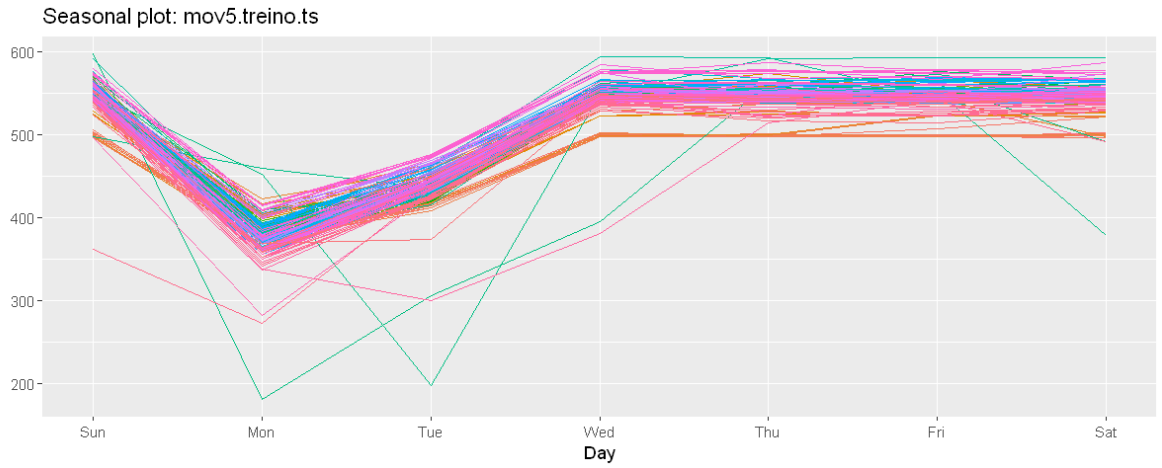
In [41]:
```
plot(hw.mov5.forecast, hw.mov5.predict, main = "5ª Janela - HoltWinters Forec
```

executed in 10.7s, finished 09:53:37 2019-10-02



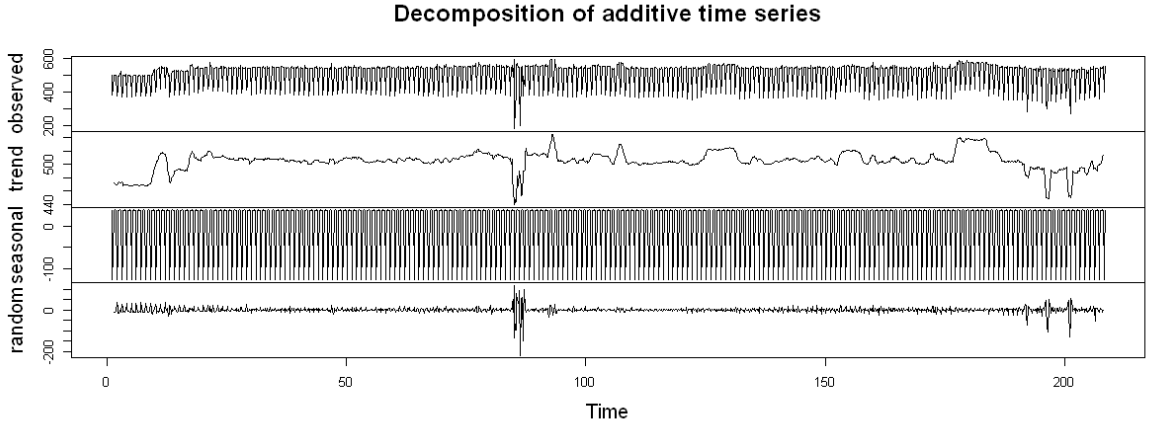
In [42]:
```
ggseasonplot(mov5.treino.ts) + theme(legend.position = "none")
```

executed in 11.2s, finished 09:53:38 2019-10-02

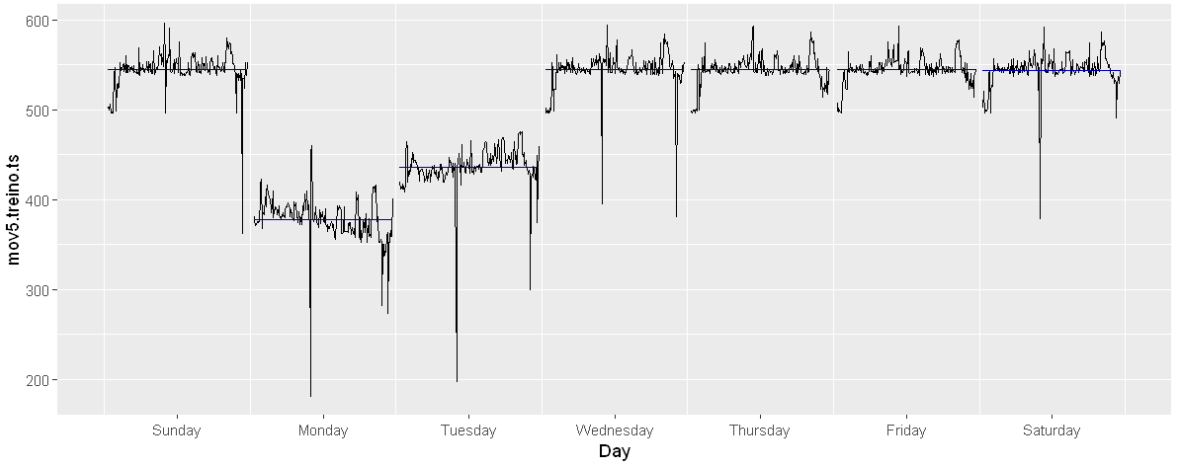


In [43]:
```
plot(decompose(mov5.treino.ts))
```

executed in 11.4s, finished 09:53:38 2019-10-02



In [44]:
```
ggsubseriesplot(mov5.treino.ts)
```
executed in 11.9s, finished 09:53:39 2019-10-02



In [45]:
```
accuracy(hw.mov5.predict, mov5.teste.ts)
```
executed in 11.9s, finished 09:53:39 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	-10.14494	24.373	15.43534	-2.46575	3.614663	0.4746629	0.2652275

2) NAIVE

O modelo de naive como diz o nome é um dos mais simples e é calculado através dos valores anteriores da série de tempo.

$$y_t = y_{t-1} \tag{18}$$

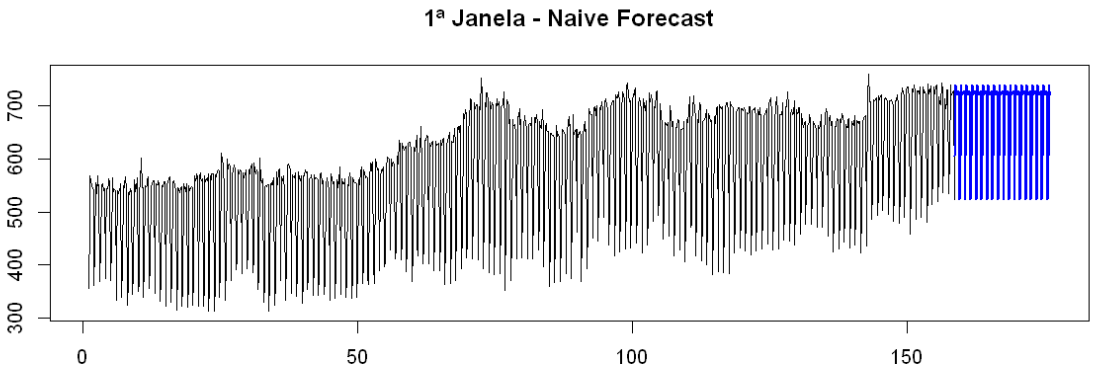
- **1ª janela**

In [46]:
```
naive.mov1.forecast = snaive(mov1.treino.ts, h = w1)
```
executed in 11.9s, finished 09:53:39 2019-10-02

In [47]:
```
nv.mov1.predict <- forecast(naive.mov1.forecast)
```
executed in 12.0s, finished 09:53:39 2019-10-02

In [48]:
```
plot(nv.mov1.predict, main = "1ª Janela - Naive Forecast", PI = F)
```

executed in 12.1s, finished 09:53:39 2019-10-02



In [49]:
```
accuracy(nv.mov1.predict, mov1.teste.ts)
```

executed in 12.2s, finished 09:53:39 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	1.066545	24.36961	14.39745	0.0633754	2.666826	1.000000	0.2318399	NA
Test set	26.016260	47.38272	35.98374	3.1724103	4.867819	2.499314	0.6919824	0.3827986

- **2ª janela**

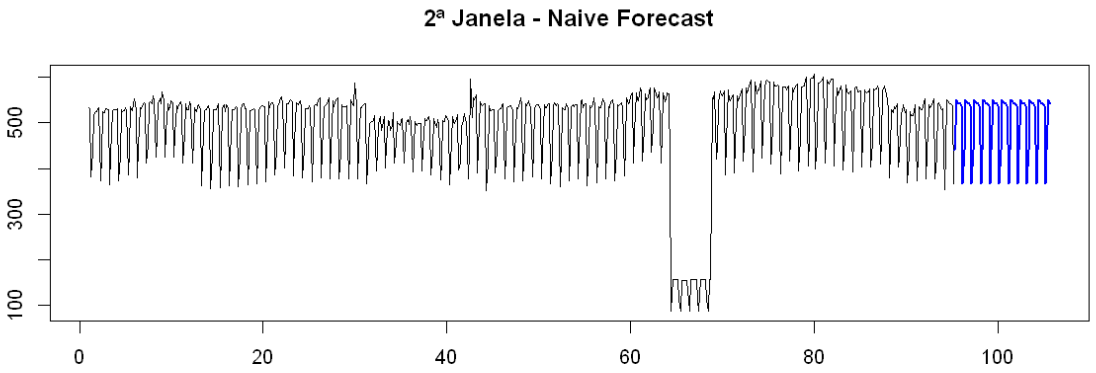
In [50]:
```
naive.mov2.forecast = snaive(mov2.treino.ts, h = w2)
```

executed in 12.2s, finished 09:53:39 2019-10-02

In [51]:
```
nv.mov2.predict <- forecast(naive.mov2.forecast)
```

executed in 12.2s, finished 09:53:39 2019-10-02

In [52]:
```
plot(nv.mov2.predict, main = "2ª Janela - Naive Forecast", PI = F)
```
executed in 12.4s, finished 09:53:39 2019-10-02



In [53]:
```
accuracy(nv.mov2.predict, mov2.teste.ts)
```
executed in 12.4s, finished 09:53:39 2019-10-02

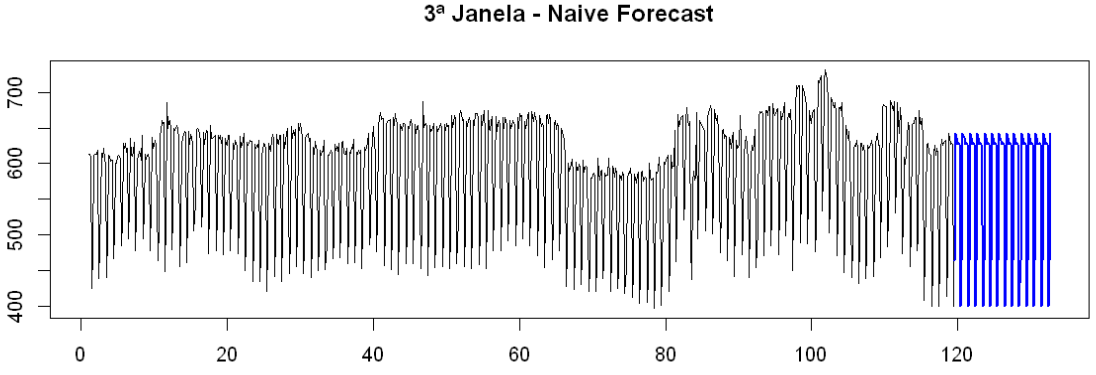
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	0.1225115	58.82965	18.10413	-2.309467	5.88805	1.000000	0.8085104	NA
Test set	-68.3424658	105.95172	71.79452	-19.789333	20.47523	3.965642	0.8908873	1.913534

- **3ª janela**

In [54]:
```
naive.mov3.forecast = snaive(mov3.treino.ts, h = w3)
```
executed in 12.4s, finished 09:53:39 2019-10-02

In [55]:
```
nv.mov3.predict <- forecast(naive.mov3.forecast)
```
executed in 12.4s, finished 09:53:39 2019-10-02

In [56]:
```
plot(nv.mov3.predict, main = "3ª Janela - Naive Forecast", PI = F)
```
executed in 12.5s, finished 09:53:39 2019-10-02



In [57]:
```
accuracy(nv.mov3.predict, mov3.teste.ts)
```
executed in 12.6s, finished 09:53:39 2019-10-02

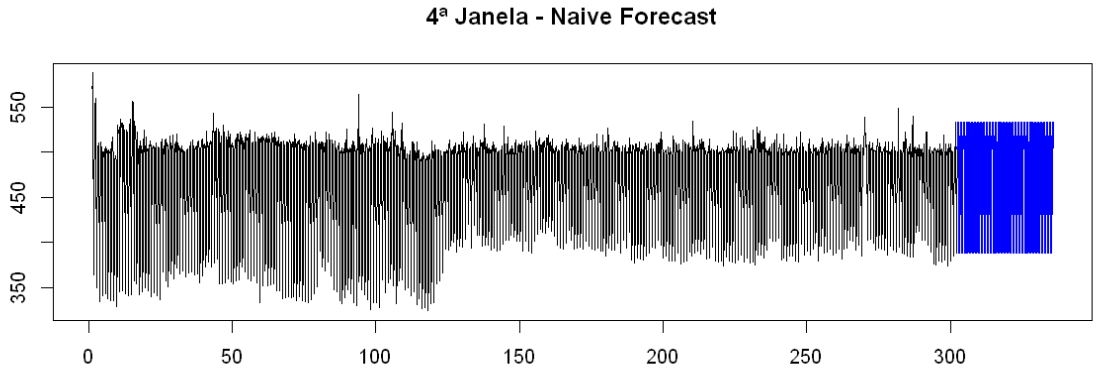
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	0.07897934	21.53623	14.46294	-0.05966062	2.474925	1.000000	0.6570665	NA
Test set	4.81521739	42.29516	31.48913	0.52167429	5.276146	2.177229	0.8909018	0.3662274

- **4ª janela**

In [58]:
```
naive.mov4.forecast = snaive(mov4.treino.ts, h = w4)
```
executed in 12.6s, finished 09:53:40 2019-10-02

In [59]:
```
nv.mov4.predict <- forecast(naive.mov4.forecast)
```
executed in 12.6s, finished 09:53:40 2019-10-02

In [60]:
```
plot(nv.mov4.predict, main = "4ª Janela - Naive Forecast", PI = F)
```
executed in 12.8s, finished 09:53:40 2019-10-02



In [61]:
```
accuracy(nv.mov4.predict, mov4.teste.ts)
```
executed in 12.8s, finished 09:53:40 2019-10-02

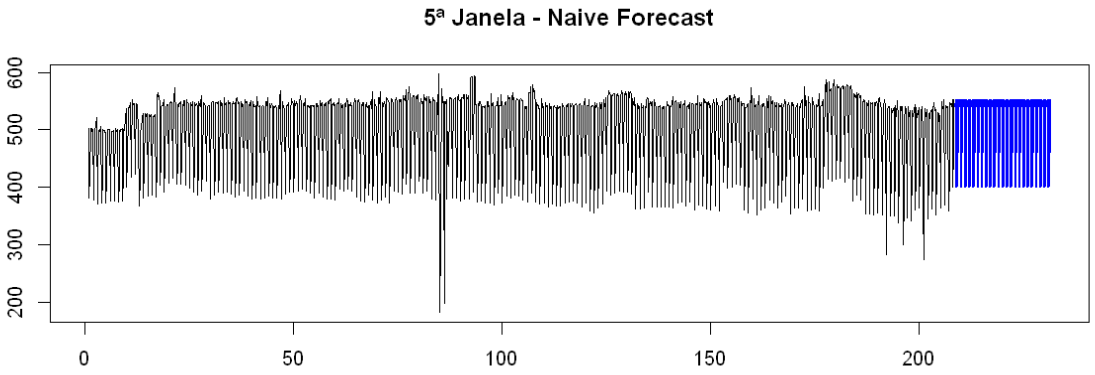
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	-0.1378327	13.97373	7.147338	-0.07207024	1.539337	1.000000	0.33751398	NA
Test set	-8.7659574	58.91256	39.931915	-2.71088004	9.132050	5.586963	0.09412392	1.018593

- **5ª janela**

In [62]:
```
naive.mov5.forecast = snaive(mov5.treino.ts, h = w5)
```
executed in 12.8s, finished 09:53:40 2019-10-02

In [63]:
```
nv.mov5.predict <- forecast(naive.mov5.forecast)
```
executed in 12.9s, finished 09:53:40 2019-10-02

In [64]:
```
plot(nv.mov5.predict, main = "5ª Janela - Naive Forecast", PI = F)
```
executed in 13.0s, finished 09:53:40 2019-10-02



In [65]:
```
accuracy(nv.mov5.predict, mov5.teste.ts)
```
executed in 13.0s, finished 09:53:40 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	0.1998617	21.67471	9.415629	-0.119890	2.057028	1.000000	0.2535636	NA
Test set	-19.2422360	32.98108	20.881988	-4.834027	5.140042	2.217801	0.4517023	0.3725247

3) ARIMA

Na análise de modelos paramétricos, existe o método de Box & Jenkins, que consiste em ajustar modelos autorregressivos integrados médias móveis (ARIMA) a um conjunto de dados. Sua estratégia para a construção do modelo é baseada em um ciclo iterativo (a escolha do modelo é baseada nos próprios dados), cujos estágios são:

Especificação – uma classe geral de modelos é considerada para análise (ARIMA, no caso); Identificação de um modelo com base na análise de autocorrelações e autocorrelações parciais; Estimação dos parâmetros do modelo identificado (as estimativas preliminares encontradas na fase de identificação serão usadas como valores iniciais nesse procedimento); Verificação do modelo ajustado através de uma análise de resíduos (menor erro quadrático médio) para saber se este é adequado para os fins (no caso, de previsão).

Caso o modelo não seja adequado, o ciclo é repetido. O procedimento de identificação para determinar os valores de p, d e q do modelo ARIMA(p,d,q) envolve: verificar se precisa de transformação não linear (como a transformação Box-Cox, que muda a série exponencial para

linear), eventualmente tomar diferenças para deixar a série estacionária (valor d) e encontrar o ARMA (valores p e q).

O modelo ARIMA é dado em função de p, q e d:

$$(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i L^i)(1 - L)^d X_t = (1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i L^i)\varepsilon_t \tag{19}$$

Onde:

- p ... número de termos autorregressivos;
- d ... número de diferenças;
- q ... número de termos da média móvel;
- L ... operador defasagem;
- Φ ... polinômio ligado ao operador autorregressivo de ordem p;
- θ ... polinômio ligado ao operador de média móveis de ordem q;
- ε_t ... ruído branco (sinal discreto cujas amostras são vistas como uma sequência de variáveis aleatórias não auto-correlacionadas com média zero e variância finita).

- **1ª janela**

In [66]:
```
mov1.treino.arima <- auto.arima(mov1.treino.ts)
summary(mov1.treino.arima)
```

executed in 13.4s, finished 09:53:40 2019-10-02

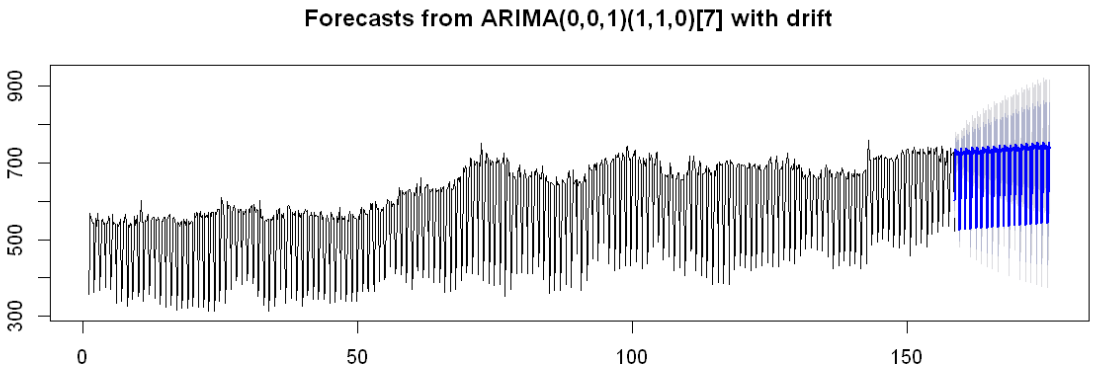
```
Series: mov1.treino.ts
ARIMA(0,0,1)(1,1,0)[7] with drift

Coefficients:
         ma1     sar1   drift
      0.2433  -0.1501  0.1525
s.e.  0.0292   0.0299  0.1092

sigma^2 estimated as 549:  log likelihood=-5015.2
AIC=10038.4   AICc=10038.43   BIC=10058.4

Training set error measures:
                      ME     RMSE      MAE        MPE     MAPE      MASE
Training set -0.005746297 23.32491 13.27693 -0.1233741 2.487304 0.9221726
                     ACF1
Training set -0.000723109
```

In [67]:
```
arima.mov1.predict <- forecast(mov1.treino.arima, h=w1)
```

executed in 13.5s, finished 09:53:41 2019-10-02

In [68]:
```
plot(arima.mov1.predict)
```

executed in 13.6s, finished 09:53:41 2019-10-02



In [69]:
```
accuracy(arima.mov1.predict, mov1.teste.ts)
```

executed in 13.6s, finished 09:53:41 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	-0.005746297	23.32491	13.27693	-0.1233741	2.487304	0.9221726	-0.000723109	N.
Test set	17.701843671	41.67477	30.87515	1.9736216	4.238654	2.1444876	0.670218278	0.343155

- **2ª janela**

In [70]:
```
mov2.treino.arima <- auto.arima(mov2.treino.ts)
summary(mov2.treino.arima)
```

executed in 14.6s, finished 09:53:42 2019-10-02

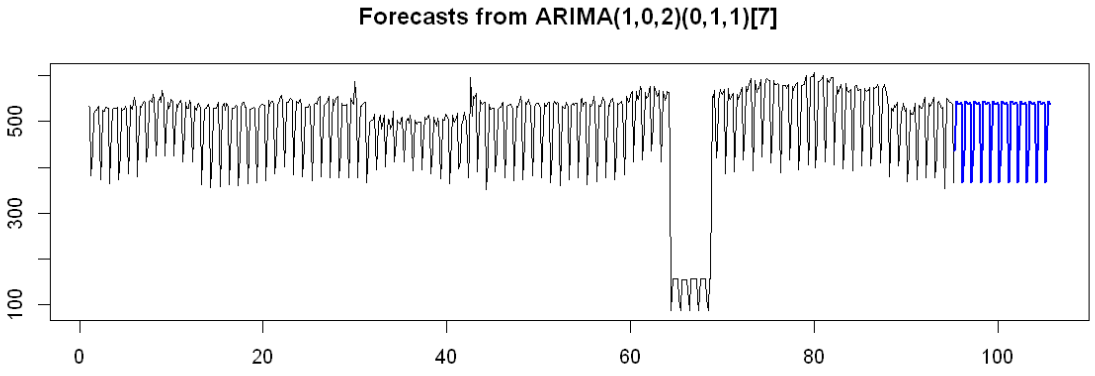
```
Series: mov2.treino.ts
ARIMA(1,0,2)(0,1,1)[7]

Coefficients:
         ar1      ma1      ma2     sma1
      0.9138  -0.0906  -0.0829  -0.4948
s.e.  0.0203   0.0447   0.0394   0.0389

sigma^2 estimated as 993.1:  log likelihood=-3179.12
AIC=6368.23   AICc=6368.32   BIC=6390.64

Training set error measures:
                     ME     RMSE      MAE        MPE     MAPE      MASE
Training set 0.02626189 31.25023 13.09558 -0.5700421 3.875761 0.7233474
                     ACF1
Training set -0.0007980883
```

In [71]:
```
arima.mov2.predict <- forecast(mov2.treino.arima, h=w2)
```

executed in 14.7s, finished 09:53:42 2019-10-02

In [72]:
```
plot(arima.mov2.predict, PI=F)
```

executed in 14.8s, finished 09:53:42 2019-10-02



In [73]:
```
accuracy(arima.mov2.predict, mov2.teste.ts)
```

executed in 14.8s, finished 09:53:42 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil
Training set	0.02626189	31.25023	13.09558	-0.5700421	3.875761	0.7233474	-0.0007980883	
Test set	-65.55764190	103.95143	69.83340	-19.1296675	19.970630	3.8573177	0.8935584924	1.8

- **3ª janela**

In [74]:
```
mov3.treino.arima <- auto.arima(mov3.treino.ts)
summary(mov3.treino.arima)
```

executed in 22.9s, finished 09:53:50 2019-10-02

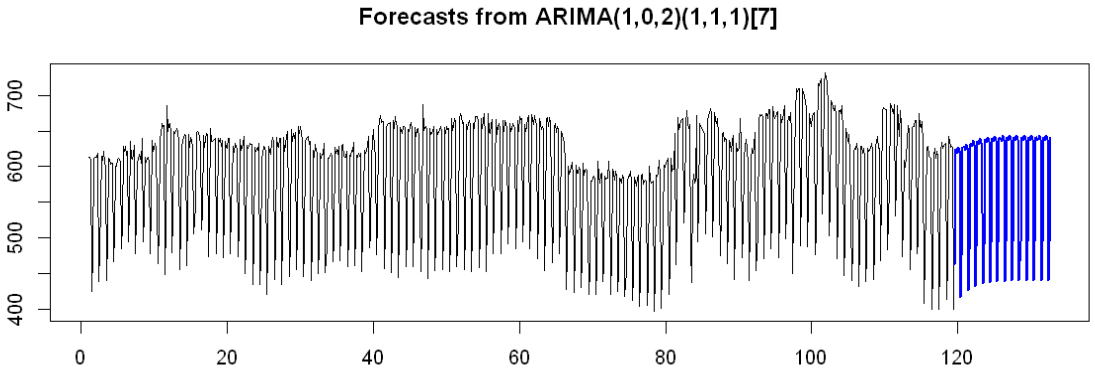
```
Series: mov3.treino.ts
ARIMA(1,0,2)(1,1,1)[7]

Coefficients:
         ar1      ma1      ma2    sar1     sma1
      0.9215  -0.2293  -0.1895  0.2996  -0.9120
s.e.  0.0214   0.0411   0.0410  0.0503   0.0297

sigma^2 estimated as 194.4:  log likelihood=-3338.27
AIC=6688.54   AICc=6688.64   BIC=6716.81

Training set error measures:
                     ME     RMSE      MAE          MPE     MAPE      MASE
Training set 0.1681344 13.84256 9.918336 -0.04537043 1.737131 0.6857759
                     ACF1
Training set -0.0007959404
```

In [75]:
```
arima.mov3.predict <- forecast(mov3.treino.arima, h=w3)
```

executed in 22.9s, finished 09:53:50 2019-10-02

In [76]:
```
plot(arima.mov3.predict, PI=F)
```

executed in 23.1s, finished 09:53:50 2019-10-02



In [77]:
```
accuracy(arima.mov3.predict, mov3.teste.ts)
```

executed in 23.1s, finished 09:53:50 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	0.1681344	13.84256	9.918336	-0.04537043	1.737131	0.6857759	-0.0007959404	N
Test set	-6.8722532	44.20810	36.365451	-1.97085276	6.419053	2.5143885	0.8864085955	0.401798

- **4ª janela**

In [78]:
```
mov4.treino.arima <- auto.arima(mov4.treino.ts)
summary(mov4.treino.arima)
```

executed in 33.2s, finished 09:54:00 2019-10-02

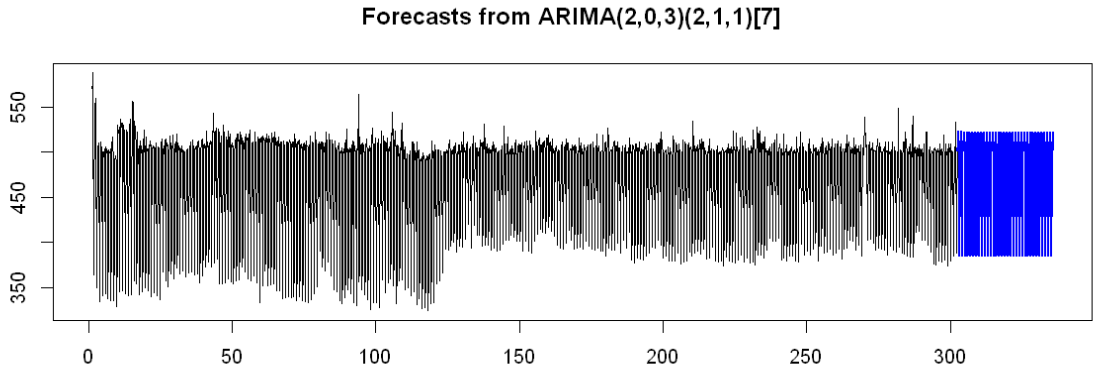
```
Series: mov4.treino.ts
ARIMA(2,0,3)(2,1,1)[7]

Coefficients:
          ar1      ar2     ma1     ma2     ma3    sar1    sar2     sma1
      -0.4458  -0.8056  0.8747  0.9053  0.3034  0.1252  0.0137  -0.4430
s.e.   0.0678   0.0769  0.0732  0.0884  0.0532  0.1568  0.0546   0.1567

sigma^2 estimated as 152.9:  log likelihood=-8273.43
AIC=16564.86   AICc=16564.95   BIC=16615.73

Training set error measures:
                     ME     RMSE      MAE         MPE     MAPE     MASE
Training set -0.1589206 12.32257 6.563058 -0.07274091 1.423743 0.918252
                    ACF1
Training set 0.006268421
```

In [79]:
```
arima.mov4.predict <- forecast(mov4.treino.arima, h=w4)
```

executed in 33.3s, finished 09:54:00 2019-10-02

In [80]:
```
plot(arima.mov4.predict, PI=F)
```

executed in 33.4s, finished 09:54:01 2019-10-02



In [81]:
```
accuracy(arima.mov4.predict, mov4.teste.ts)
```

executed in 33.5s, finished 09:54:01 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	-0.1589206	12.32257	6.563058	-0.07274091	1.423743	0.918252	0.006268421	NA
Test set	-4.9591019	57.16895	38.086272	-1.88850817	8.728897	5.328735	0.062760904	0.9954339

- **5ª janela**

In [82]:
```
mov5.treino.arima <- auto.arima(mov5.treino.ts)
summary(mov5.treino.arima)
```

executed in 56.6s, finished 09:54:24 2019-10-02

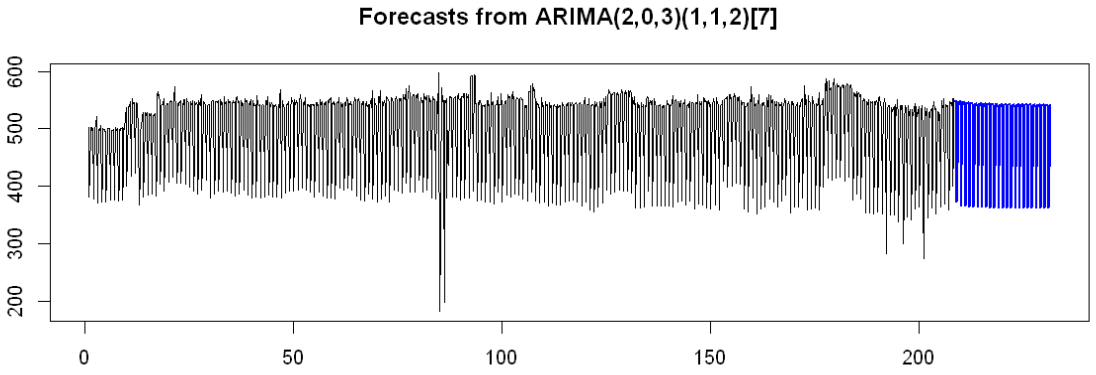
```
Series: mov5.treino.ts
ARIMA(2,0,3)(1,1,2)[7]

Coefficients:
         ar1     ar2     ma1      ma2      ma3     sar1     sma1     sma2
      0.0433  0.8935  0.3352  -0.7057  -0.3008  -0.3735  -0.4129  -0.4814
s.e.  0.0228  0.0214  0.0341   0.0314   0.0283   0.1189   0.1096   0.0994

sigma^2 estimated as 243.9:  log likelihood=-6028.08
AIC=12074.16   AICc=12074.28   BIC=12121.65

Training set error measures:
                    ME     RMSE      MAE        MPE     MAPE      MASE
Training set 0.3124877 15.53505 7.425399 -0.1316733 1.665294 0.7886249
                     ACF1
Training set -0.003222908
```

In [83]:
```
arima.mov5.predict <- forecast(mov5.treino.arima, h=w5)
```

executed in 56.6s, finished 09:54:24 2019-10-02

In [84]:
```
plot(arima.mov5.predict, PI=F)
```

executed in 56.9s, finished 09:54:24 2019-10-02



In [85]:
```
accuracy(arima.mov5.predict, mov5.teste.ts)
```

executed in 57.0s, finished 09:54:24 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1	Theil's U
Training set	0.3124877	15.53505	7.425399	-0.1316733	1.665294	0.7886249	-0.003222908	NA
Test set	-7.5342744	22.91357	12.988323	-1.9284974	3.094362	1.3794429	0.446952331	0.2506087

4) ARIMA-GARCH

Os Modelos GARCH (*generalized ARCH*) são uma generalização dos modelos ARCH, proposto por Bollerslev (1986). A diferença entre os modelos é uma componente adicional, referente à varância condicional nos instantes anteriores. O modelo GARCH tem a vantagem de que ele pode ser utilizado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH. As equações abaixo são utilizadas para definir o modelo.

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t},\ onde\ \eta_t\ é\ i.i.d\ entre\ 0\ e\ 1 \tag{20}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{r} \beta_j h_{t-j},\ onde\ \alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \beta_j \geq 0 \tag{21}$$

$$\sum_{q}^{i=1} (\alpha_i + \beta_j) q = max(r,\ s) \tag{22}$$

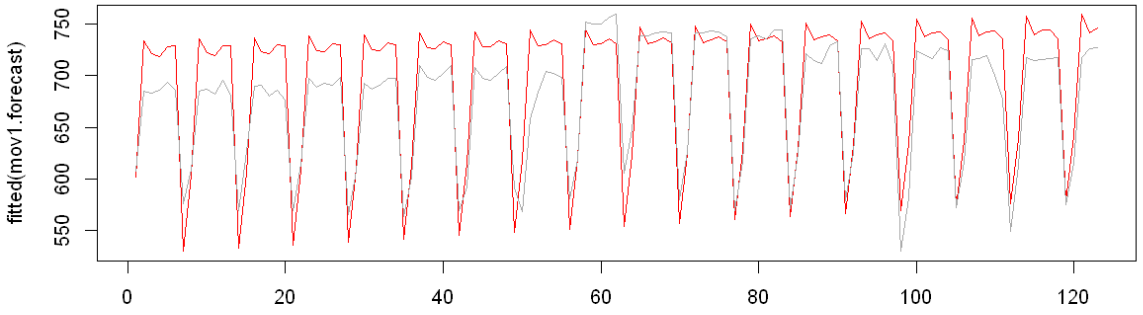
De modo a utilizarmos o modelo ARIMA-GARCH, será necessário executar a diferença entre os logaritmos para linearizar as tendências conforme equação abaixo, onde A representa a série temporal e t o instante de tempo.

$$A = ln(A_t) - ln(A_{t-1}) \tag{23}$$

- **1ª janela**

In [86]:
```
mov1.ug.spec <- rugarch::ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(7, 7)),
                                    variance.model = list(model = 'sGARCH',
                                                          garchOrder = c(1, 1),
                                                          submodel = NULL,
                                                          external.regressors = NULL
                                                          variance.targeting = FALSE
mov1.fit <- rugarch::ugarchfit(spec = mov1.ug.spec, data = mov1.treino.ts)

mov1.forecast = ugarchforecast(mov1.fit, n.ahead = w1)
plot(fitted(mov1.forecast), type='l', col='red',xlab = '')
par(new=TRUE)
plot(mov1.teste.ts, col = 'darkgrey',ylab = '',xlab = '', xaxt='n', yaxt='n')
mov1.ft = fitted(mov1.forecast)
```

executed in 59.6s, finished 09:54:27 2019-10-02



In [87]:
```
print(mov1.teste.ts)
```
executed in 59.6s, finished 09:54:27 2019-10-02

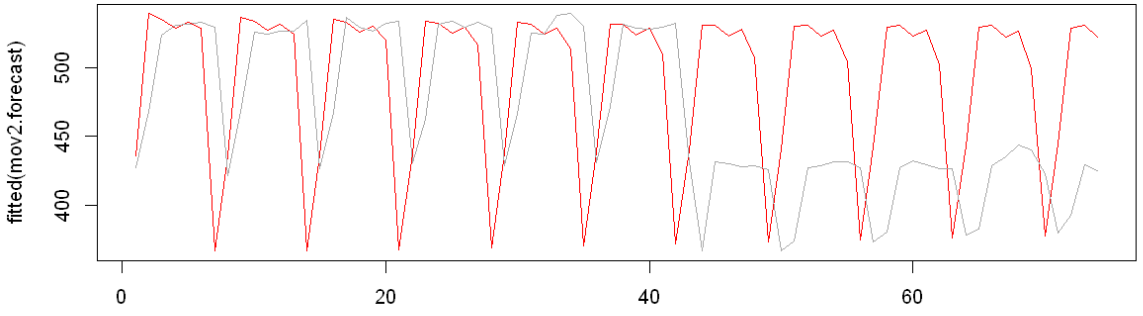
```
Time Series:
Start = c(158, 6)
End = c(176, 2)
Frequency = 7
  [1] 590 720 717 721 735 721 537 593 720 723 715 737 714 527 622 728 729 712
 [19] 722 705 527 602 740 727 732 729 743 520 591 732 723 729 741 740 516 580
 [37] 761 743 738 749 761 526 565 758 741 737 749 760 563 524 675 719 752 749
 [55] 743 545 609 832 829 828 840 844 587 657 810 809 814 816 814 544 620 815
 [73] 815 817 816 808 526 607 804 809 805 819 819 530 619 781 770 764 793 800
 [91] 543 621 789 789 770 796 762 460 547 786 779 772 791 786 531 605 771 773
[109] 777 745 707 493 600 775 769 771 773 774 536 603 775 788 791
```

In [88]:
```
mov1.ft.ts = ts(as.data.frame(mov1.ft)[,1], start=c(158,6) , frequency = 7)
accuracy(mov1.ft.ts, mov1.teste.ts)
```
executed in 59.7s, finished 09:54:27 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	14.77674	44.58799	33.96256	1.377801	4.79092	0.574896	0.3707872

- **2ª janela**

In [89]:
```
mov2.ug.spec <- rugarch::ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(7, 7)),
                                    variance.model = list(model = 'sGARCH',
                                                          garchOrder = c(0,1),
                                                          submodel = NULL,
                                                          external.regressors = NULL
                                                          variance.targeting = FALSE
mov2.fit <- rugarch::ugarchfit(spec = mov2.ug.spec, data = mov2.treino.ts)

mov2.forecast = ugarchforecast(mov2.fit, n.ahead = w2)
plot(fitted(mov2.forecast), type='l', col='red',xlab = '')
par(new=TRUE)
plot(mov2.teste.ts, col = 'darkgrey',ylab = '',xlab = '', xaxt='n', yaxt='n')
mov2.ft = fitted(mov2.forecast)
```
executed in 1m 0.49s, finished 09:54:28 2019-10-02



In [90]:
```
print(mov2.teste.ts)
```
executed in 1m 0.54s, finished 09:54:28 2019-10-02

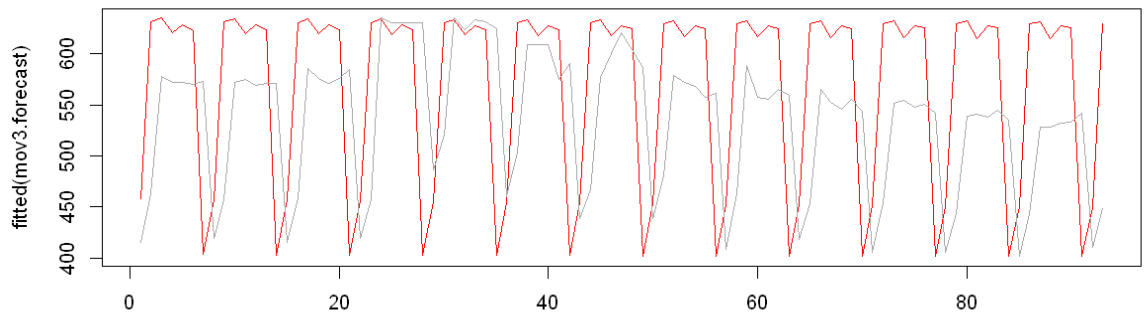
```
Time Series:
Start = c(95, 2)
End = c(105, 5)
Frequency = 7
 [1] 366 436 532 544 545 548 541 356 436 535 533 537 536 550 365 435 554 541
537
[20] 546 549 372 427 545 549 541 547 540 369 434 534 533 556 558 543 372 443
545
[39] 540 539 541 546 374 262 373 371 368 369 364 263 275 366 369 374 374 366
274
[58] 286 366 375 370 365 365 282 290 369 380 394 389 359 285 307 370 363
```

In [91]:
```
mov2.ft.ts = ts(as.data.frame(mov2.ft)[,1], start=c(95,2) , frequency = 7)
accuracy(mov2.ft.ts, mov2.teste.ts)
```
executed in 1m 0.58s, finished 09:54:28 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	-58.15913	122.5707	96.61007	-19.26041	26.31216	0.5100196	2.132527

- **3ª janela**

In [92]:
```
mov3.ug.spec <- rugarch::ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(7, 7)),
                                    variance.model = list(model = 'sGARCH',
                                                          garchOrder = c(1, 1),
                                                          submodel = NULL,
                                                          external.regressors = NULL
                                                          variance.targeting = FALSE
mov3.fit <- rugarch::ugarchfit(spec = mov3.ug.spec, data = mov3.treino.ts)

mov3.forecast = ugarchforecast(mov3.fit, n.ahead = w3)
plot(fitted(mov3.forecast), type='l', col='red',xlab = '')
par(new=TRUE)
plot(mov3.teste.ts, col = 'darkgrey',ylab = '',xlab = '', xaxt='n', yaxt='n')
mov3.ft = fitted(mov3.forecast)
```
executed in 1m 2.36s, finished 09:54:30 2019-10-02



In [93]:
```
print(mov3.teste.ts)
```

executed in 1m 2.39s, finished 09:54:30 2019-10-02

```
Time Series:
Start = c(119, 4)
End = c(132, 5)
Frequency = 7
 [1] 400 470 637 629 628 626 630 406 461 628 633 625 627 627 401 463 648 634
627
[20] 634 647 406 461 720 714 713 713 714 504 553 720 703 718 715 705 466 529
682
[39] 682 683 633 655 434 475 636 669 700 676 650 435 496 639 629 623 608 613
390
[58] 470 652 608 604 619 610 405 456 619 600 591 605 588 386 457 599 603 593
597
[77] 584 387 442 580 583 579 589 575 380 441 565 565 571 572 585 394 448
```

In [94]:
```
mov3.ft.ts = ts(as.data.frame(mov3.ft)[,1], start=c(119, 4) , frequency = 7)
accuracy(mov3.ft.ts, mov3.teste.ts)
```

executed in 1m 2.44s, finished 09:54:30 2019-10-02

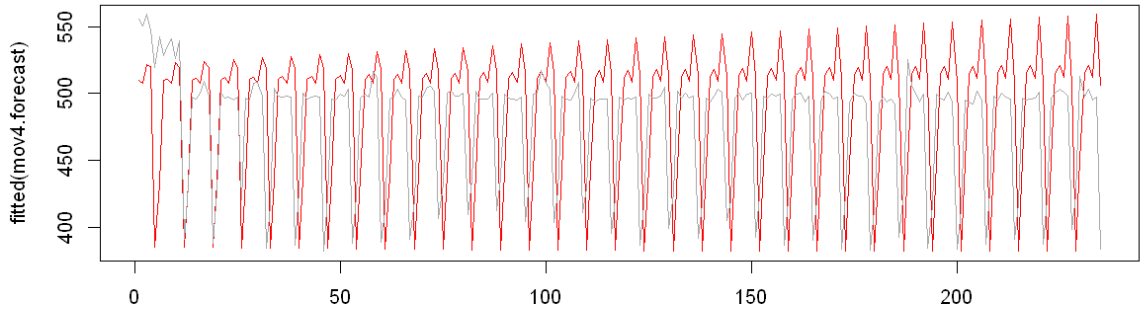
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	7.496486	113.7034	82.41731	-1.042983	14.92013	0.1001223	1.107574

- **4ª janela**

In [95]:

```
mov4.ug.spec <- rugarch::ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(7, 7)),
                                    variance.model = list(model = 'sGARCH',
                                                          garchOrder = c(1, 1),
                                                          submodel = NULL,
                                                          external.regressors = NULL
                                                          variance.targeting = FALSE
mov4.fit <- rugarch::ugarchfit(spec = mov4.ug.spec, data = mov4.treino.ts)

mov4.forecast = ugarchforecast(mov4.fit, n.ahead = w4)
plot(fitted(mov4.forecast), type='l', col='red',xlab = '')
par(new=TRUE)
plot(mov4.teste.ts, col = 'darkgrey',ylab = '',xlab = '', xaxt='n', yaxt='n')
mov4.ft = fitted(mov4.forecast)
```

executed in 1m 5.30s, finished 09:54:33 2019-10-02



In [96]:

```
print(mov4.teste.ts)
```

executed in 1m 5.33s, finished 09:54:33 2019-10-02

```
Time Series:
Start = c(302, 5)
End = c(336, 1)
Frequency = 7
  [1] 564 559 568 555 524 550 534 542 548 532 546 382 426 500 498 503 513 501
 [19] 379 421 503 499 500 497 500 415 499 497 511 512 501 375 410 507 501 500
 [37] 501 500 377 421 503 498 500 501 500 372 417 498 497 502 501 506 379 417
 [55] 499 502 500 521 516 380 405 498 500 506 500 497 382 414 501 500 507 509
 [73] 505 399 428 503 505 501 501 503 403 431 505 498 498 498 503 406 433 502
 [91] 499 498 497 500 397 429 502 503 522 511 506 396 421 501 498 497 503 512
[109] 404 424 499 496 498 498 498 387 416 500 497 499 498 500 377 411 502 499
[127] 499 501 508 391 420 505 499 503 499 501 383 412 499 496 501 506 504 398
[145] 414 499 503 497 502 503 384 418 501 499 502 501 502 377 414 498 502 503
[163] 496 501 381 415 496 505 502 498 500 374 419 496 503 501 501 495 373 406
[181] 495 500 496 498 494 384 422 531 510 503 496 502 375 410 502 499 497 504
[199] 496 374 407 497 496 494 505 497 378 421 501 497 503 500 498 382 412 499
[217] 497 498 499 504 378 415 499 503 506 504 501 390 419 517 501 506 497 500
[235] 374
```

In [97]:
```
mov4.ft.ts = ts(as.data.frame(mov4.ft)[,1], start=c(302, 5) , frequency = 7)
accuracy(mov4.ft.ts, mov4.teste.ts)
```

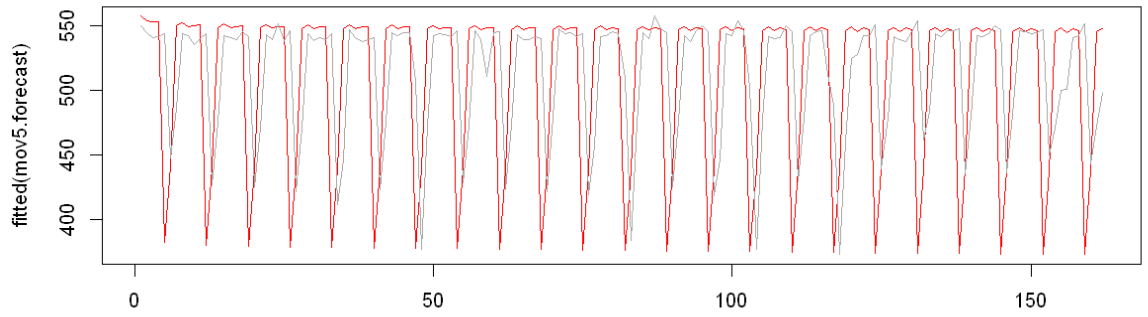
executed in 1m 5.39s, finished 09:54:33 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	-12.74335	57.0703	41.59292	-3.4327	9.449424	0.122559	0.9802772

- **5ª janela**

In [98]:
```
mov5.ug.spec <- rugarch::ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(9,9)),
                                    variance.model = list(model = 'sGARCH',
                                                          garchOrder = c(1, 1),
                                                          submodel = NULL,
                                                          external.regressors = NULL
                                                          variance.targeting = FALSE
mov5.fit <- rugarch::ugarchfit(spec = mov5.ug.spec, data = mov5.treino.ts)

mov5.forecast = ugarchforecast(mov5.fit, n.ahead = w5)
plot(fitted(mov5.forecast), type='l', col='red',xlab = '')
par(new=TRUE)
plot(mov5.teste.ts, col = 'darkgrey',ylab = '',xlab = '', xaxt='n', yaxt='n')
mov5.ft = fitted(mov5.forecast)
```

executed in 1m 9.13s, finished 09:54:37 2019-10-02



In [99]:
```
print(mov5.teste.ts)
```

executed in 1m 9.16s, finished 09:54:37 2019-10-02

```
Time Series:
Start = c(208, 4)
End = c(231, 4)
Frequency = 7
  [1] 552 543 537 538 542 391 451 542 539 528 536 542 358 434 540 537 535 544
 [19] 538 356 427 541 535 554 533 546 350 427 542 533 537 535 542 334 388 547
 [37] 537 532 534 537 352 434 543 539 543 543 485 280 430 539 542 541 538 546
 [55] 360 429 545 534 490 543 544 352 431 541 535 534 538 536 350 440 548 542
 [73] 543 538 542 346 405 538 539 544 542 487 290 433 543 536 563 548 543 356
 [91] 435 539 532 546 551 544 345 388 542 540 558 546 476 280 437 538 536 537
[109] 552 544 362 439 540 544 545 492 455 273 410 512 517 540 540 553 377 439
[127] 538 534 532 544 558 413 447 542 538 545 545 548 372 441 540 538 542 552
[145] 547 373 443 545 544 542 543 547 394 427 473 474 537 540 554 384 430 469
```

In [100]:
```
mov5.ft.ts = ts(as.data.frame(mov5.ft)[,1], start=c(208, 4) , frequency = 7)
accuracy(mov5.ft.ts, mov5.teste.ts)
```

executed in 1m 9.21s, finished 09:54:37 2019-10-02

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Test set	-13.57512	84.31368	58.57981	-4.859578	13.24331	-0.04746128	0.9684206

5) MAPE e TIC

- **Mean Absolute Percentage Error (MAPE):**

O MAPE representa, em média, quanto estamos errando no nível de agregação de cálculo, sem compensar erros negativos com erros positivos. E, é calculado pela formula abaixo:

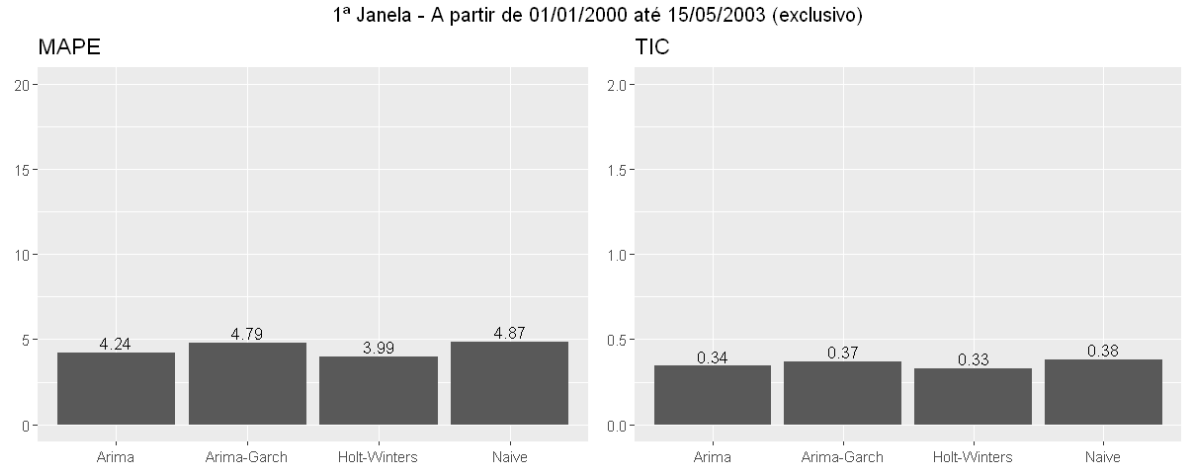
$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)}{Y_t} .100 \right|}{n} \tag{24}$$

- **Theil's Inequality Coefficient (TIC)**

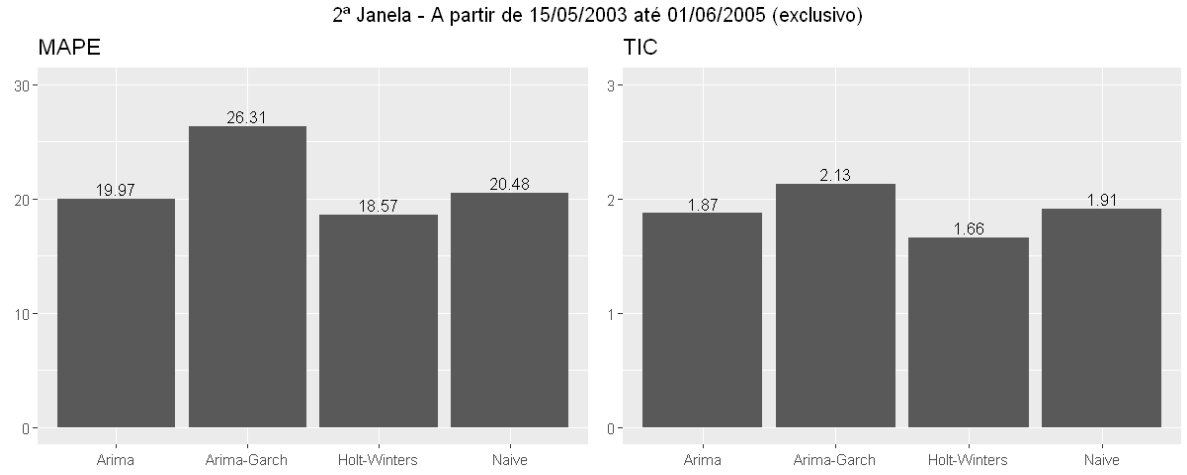
Em uma previsão perfeita, o valor de TIC é igual a zero. O valor 1 representa um limite em que a precisão da previsão é equivalente a uma previsão naive ou sem alteração. Portanto, valores menores que 1 indicam um desempenho melhor que a previsão ingênua.

$$TIC = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sum_{t=1}^{n-1} f_{t+1} - y_{t+1}}{y_t} \right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\sum_{t=1}^{n-1} y_{t+1} - y_t}{y_t} \right)^2}} \tag{25}$$

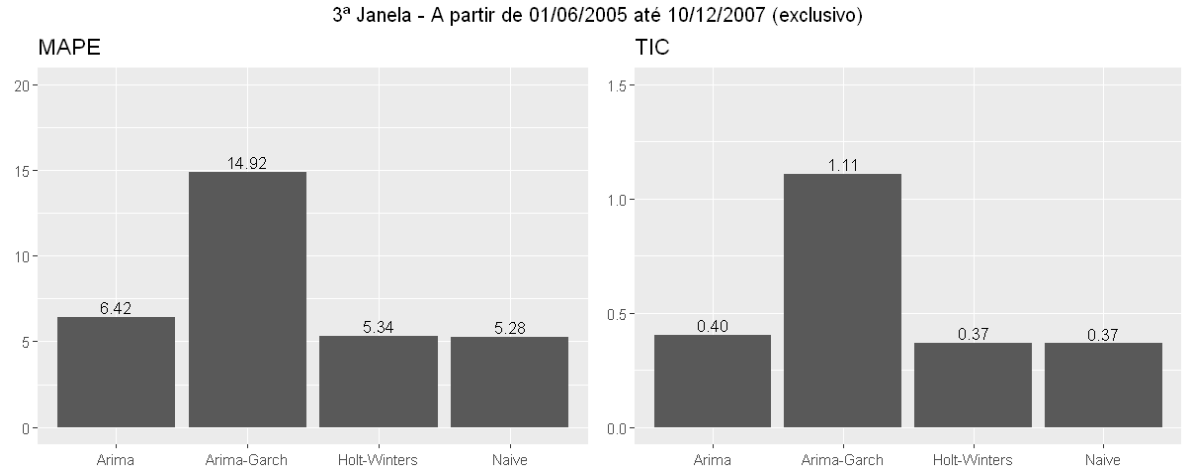
6) Conlcusoes



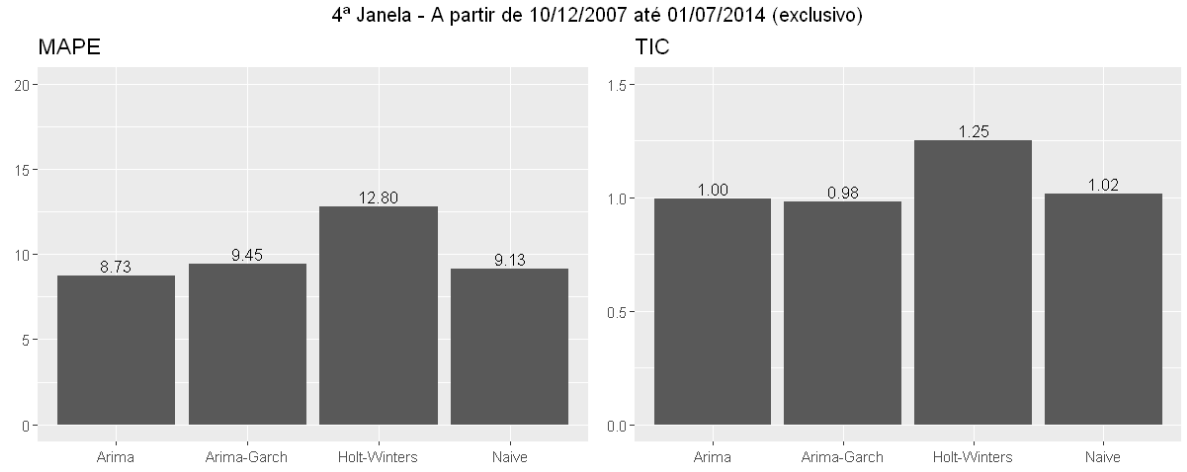
Para a caso da 1ª janela, ficou claro que o melhor dentre os 4 modelos foi o de **Holt-Winters**, em que ele errou em apenas 3,99% dos dados com um ajuste bem próximo de zero (0,33).



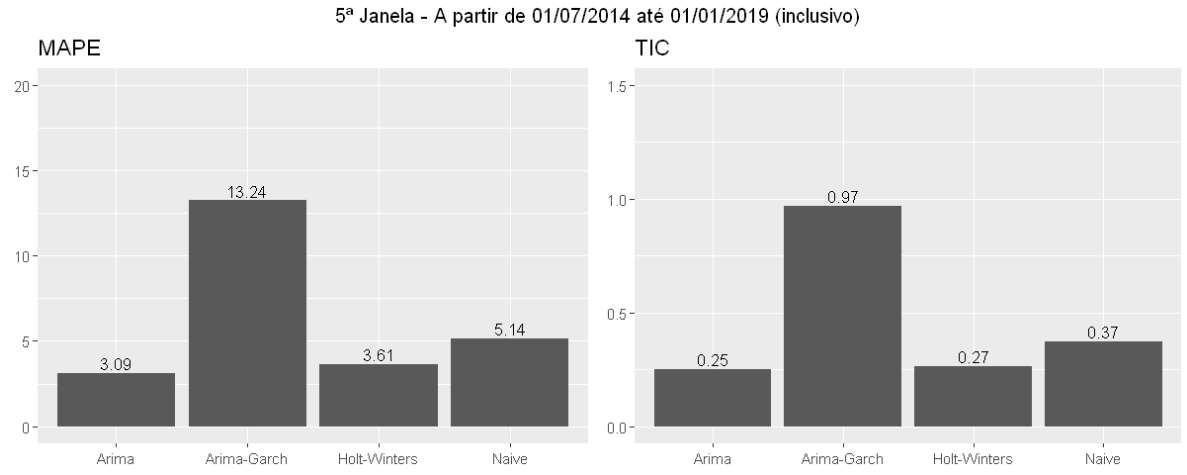
Para o caso da 2ª janela, nenhum dos modelos se saiu muito bem com os dados fornecidos, podendo se tratar do fato de ter uma quantidade reduzida de dados quando em comparação com as outras janelas de dados, além de ter um período com uma concentração de outliers. O melhor modelo para esse trecho da serie temporal foi o modelo **Holt-Winter** errando 18,57% dos dados com um ajuste de 1,66.



Para a caso da 3ª janela, ficou claro que o melhor dentre os 4 modelos foi o de **Naive**, em que ele errou em apenas 5,28% dos dados com um ajuste bem próximo de zero (0,37).



Para a caso da 4ª janela, o melhor dentre os 4 modelos foi o de **ARIMA**, em que ele errou em apenas 8,73% dos dados com um ajuste de aproximadamente 1,0.



Para a caso da 5ª janela, ficou claro que o melhor dentre os 4 modelos foi o de **ARIMA**, em que ele errou em apenas 3,09% dos dados com um ajuste bem próximo de zero (0,25).