

Modélisation des risques financiers –TP 2015/2016

Enzo FIORENTINO - Fearnley MARTIN

Préambule

Le présent document constitue le rapport écrit du TP, contenant les commentaires et réponses aux questions du TP ainsi que les graphiques permettant d'étayer les réponses.

Tous les codes demandés ont été réalisés sur Python (Ils se trouvent dans le fichier .py envoyé avec ce rapport et prêt à être exécuté)

Nous utiliserons par ailleurs toujours $S_0=100$, $K=100$, $r=0.01$, $\sigma = 0.25$ et $T=1$ sauf lorsque cela est précisé dans le début de la réponse.

Certaines formules du polycopié de cours sont rappelées pour appuyer les réponses par moment.

1) Formule de Black et Scholes

Le prix d'un call européen est donné par la formule de Black-Scholes suivante :

$$C_t = S_t F(d_1) - K e^{-r(T-t)} F(d_2)$$

Avec les notations standards habituelles,

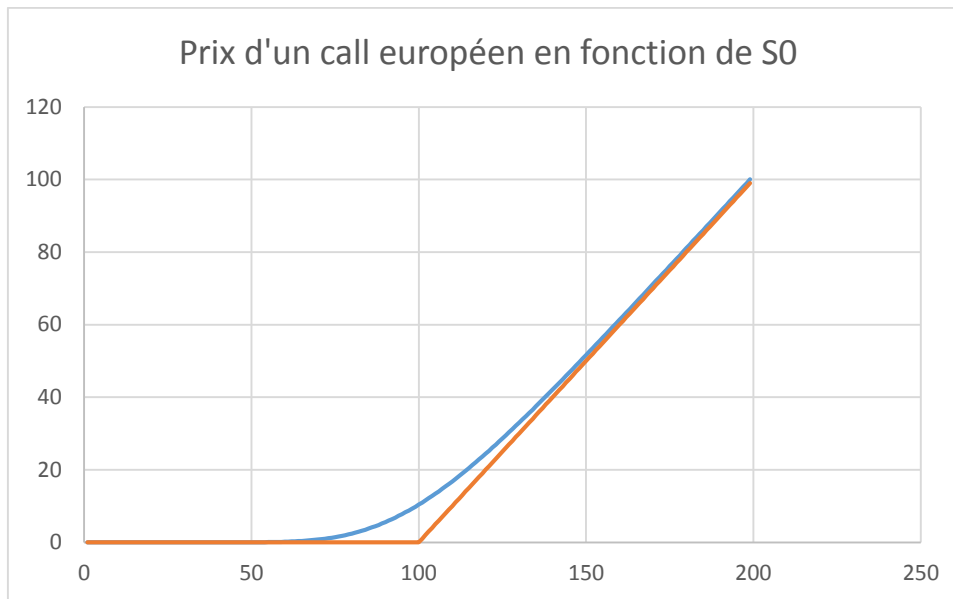
$$F(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^d e^{-\frac{q^2}{2}} dq$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \cdot \ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T-t)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

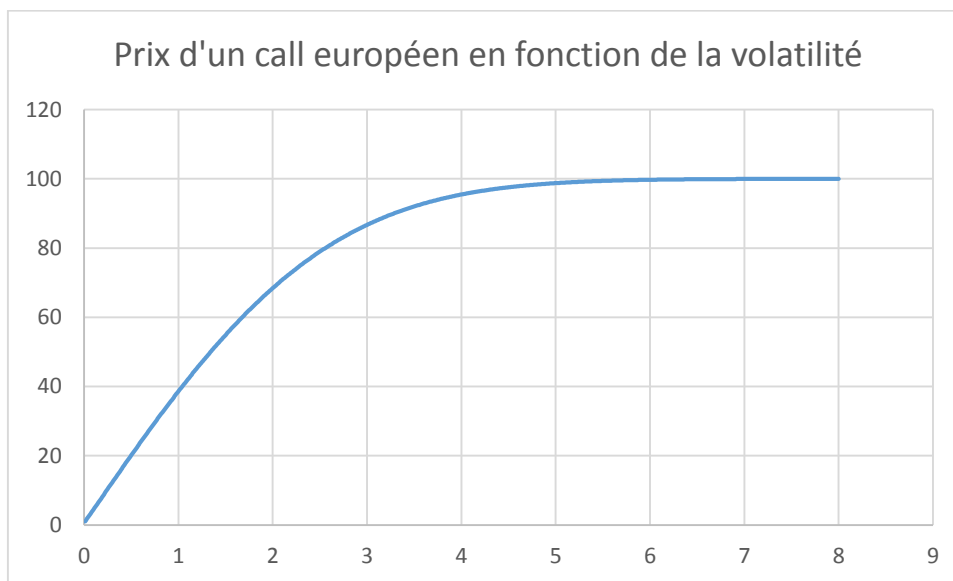
Et les données de l'énoncé : $S_0=100$; $K=100$ $T=1$, $\sigma=0.25$ et $r=0.01$

Ce qui nous donne la courbe suivante :



On s'aperçoit que, comme prévu, le prix du call (en bleu) se situe toujours au-dessus du payoff $(S_0 - K)^+$ (en orange ci-dessus), (ceci étant dû au fait que le call européen ne peut jamais rapporter moins de 0 et peut rapporter théoriquement jusqu'à $+\infty$).

Ceci explique aussi que la courbe du prix du call européen, en fonction du sous-jacent, tend vers la courbe du payoff $(S_0 - K)^+$ quand le sous-jacent tend vers $+\infty$.



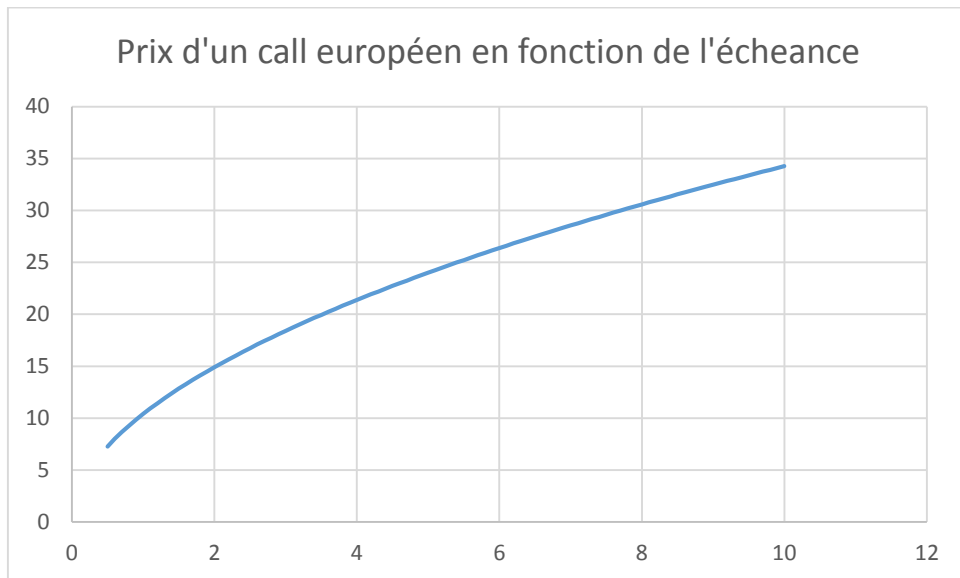
Après un premier passage linéaire, le prix du call ne dépend plus de la volatilité pour sigma supérieur à 4 et le prix devient celui du strike.

La fonction part bien de l'origine car si la volatilité est nulle, le payoff est nul (car $S = S_0 = K$) et donc le prix du call aussi.

La croissance de la fonction s'explique par le fait que plus la volatilité est grande, plus le gain le plus important possible est élevé alors que le gain minimum, lui, est toujours de 0. Donc le gain moyen potentiel est plus élevé et par conséquent, le prix également.

Pour une forte volatilité, on peut penser que le prix sera celui du strike, c'est-à-dire celui du sous-jacent en 0 car une trop forte volatilité ne conduit pas à un marché stable et la valeur terminale du sous-jacent S est donc totalement aléatoire en cas de trop forte volatilité. Ainsi,

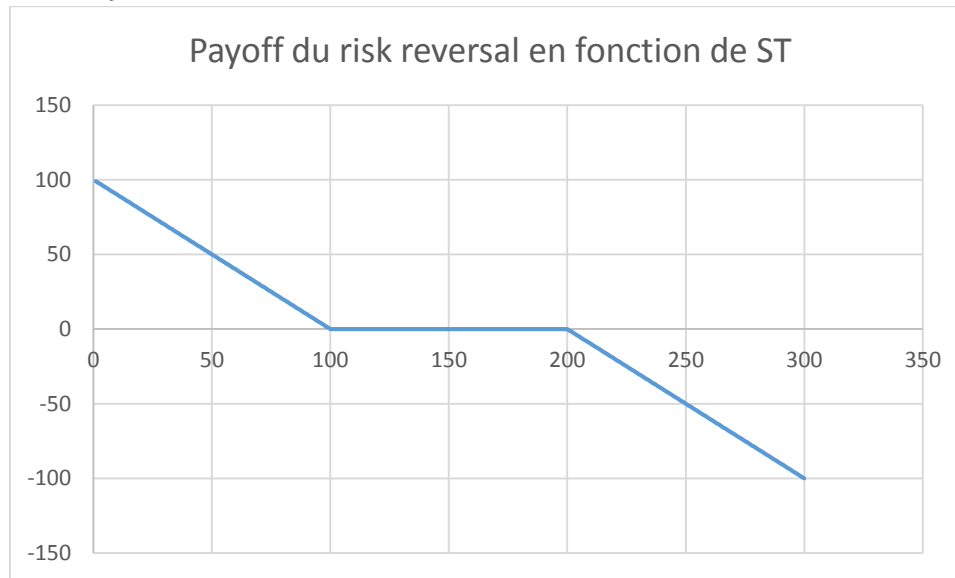
par souci d'absence d'opportunité d'arbitrage, il est normal que le prix de l'option soit égal au prix payé par la banque pour acheter l'action à $t=0$.



Quand l'échéance varie, on obtient une courbe croissante à nouveau car plus la date d'échéance T est éloignée plus les gains potentiels sont élevés (car le gain ne peut descendre sous 0 et plus l'échéance est éloignée plus le sous-jacent a 'le temps' de prendre de la valeur) et donc le prix de l'option aussi. De plus, on peut voir que la courbe croît moins fortement lorsque le temps augmente, ceci étant dû au fait que plus le temps est grand moins une unité de temps de plus ou moins apporte quelque chose sur le gain potentiel.

2) Grecques d'un risk-reversal

Un risk-reversal est la différence entre un put de strike K1 et un call de strike K2 avec K2>K1. Voici, ci-dessous, le graphique du payoff d'une telle option en fonction de la valeur terminale du sous-jacent.



Par définition des grecques on a :

$$\Delta_C = \frac{\partial C_t}{\partial S} \quad \Gamma_C = \frac{\partial^2 C_t}{\partial S^2} \quad V_C = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} \quad \Theta_C = \frac{\partial C_t}{\partial T}$$

L'opérateur dérivation étant linéaire, nous pouvons donc calculer séparément les grecques du put et du call puis soustraire aux grecques du put celles du call pour obtenir les grecques du risk-reversal.

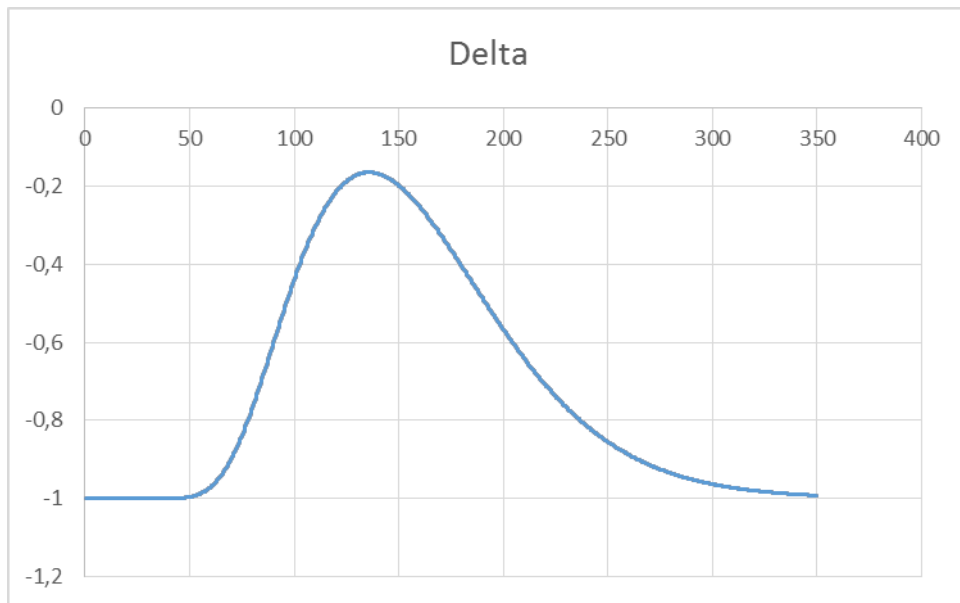
Sachant que nous pouvons facilement calculer les grecques d'un put et d'un call d'après les formules du polycopié que nous rappelons et dans lesquelles F , d_1 et d_2 sont ceux définis à la question 1.

Nous prenons les paramètres suivants :

K1= 100 ; K2= 200 et encore une fois $S_0=100$, $r=0.01$ et $\sigma = 0.25$

Delta :

$$\text{Pour un call} \quad \Delta_C = \frac{\partial C_t}{\partial S} = F(d_1) > 0 \quad \text{Pour un put} \quad \Delta_p = F(d_1) - 1 < 0$$

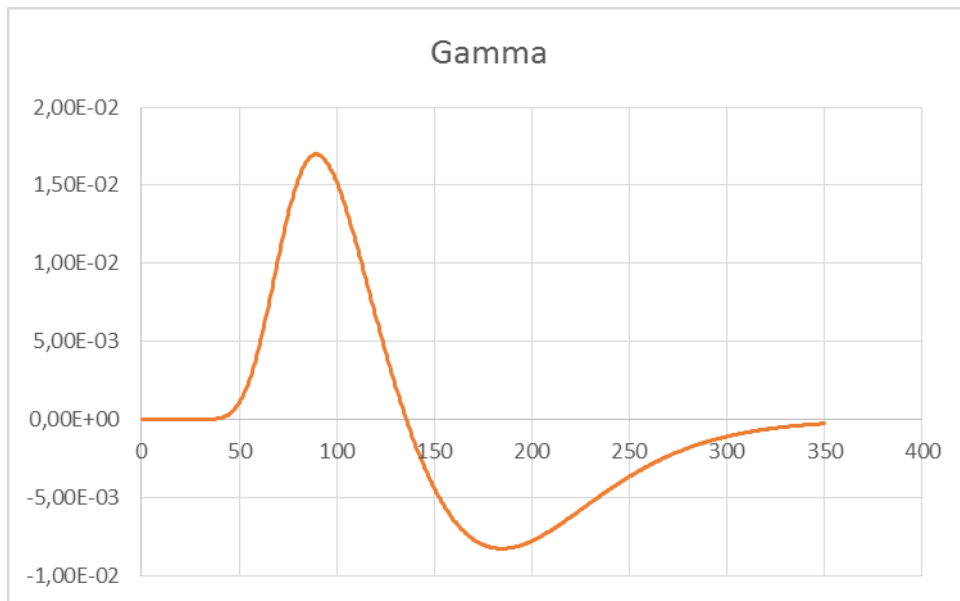


Nous observons que le delta est toujours négatif quel que soit S_0 . Son maximum est atteint vers $S_0 = 140$. Ce qui était attendu car le payoff du risk-reversal est décroissant avec la valeur du sous-jacent, donc son prix aussi et donc la dérivée du prix est négative.

De plus, vers le milieu de K_1 et K_2 , on observe que le prix ne change pas tellement car le payoff est identique dans la plage $[K_1 ; K_2]$ d'où la faible valeur de la dérivée en valeur absolue. De plus, le fait que delta tend vers -1 en 0 et en $+\infty$ appuie le constat précédent que le prix, pour S tend vers 0 et S tend vers $+\infty$, est bien celui du payoff $(K_1 - S)^+$ et celui de $-(S - K_2)^+$.

Gamma :

$$\text{Pour un call} \quad \Gamma_C = \frac{\partial^2 C_t}{\partial S^2} = \frac{F'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} > 0 \quad \text{Pour un put} \quad \Gamma_P = \frac{g(d_1)}{S \sigma \sqrt{T-t}} > 0$$



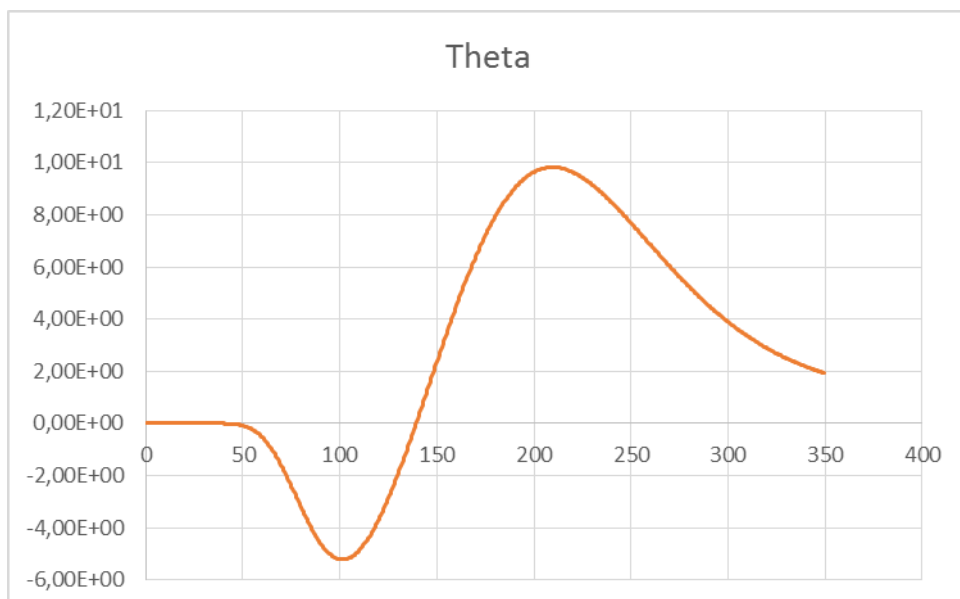
Nous observons comme prévu que le gamma devient négatif vers 140 c'est-à-dire là où le delta est maximal (le gamma étant la dérivée du delta). De plus, nous voyons que gamma est bien positif lorsque delta croît, c'est-à-dire que sur toute la partie découlant principalement du put, la courbe donnant le prix du put est bien convexe, puis, lorsque la partie call reprend le dessus (S environ supérieur à $0.5(K_1 + K_2)$), la courbe du prix sera bien concave (car ici c'est l'opposé du call). La convergence de delta entraîne la convergence de gamma vers 0 en $+\infty$ et en 0.

Theta :

Pour un call
$$\Theta_C = \frac{\partial C_t}{\partial T} = F'(d_1) \frac{S_t \sigma}{2\sqrt{T-t}} + rK e^{-r(T-t)} F(d_2) > 0$$

$$\Theta_p = g(d_1) \frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rK e^{-r(T-t)} (F(d_2) - 1)$$

Pour un put



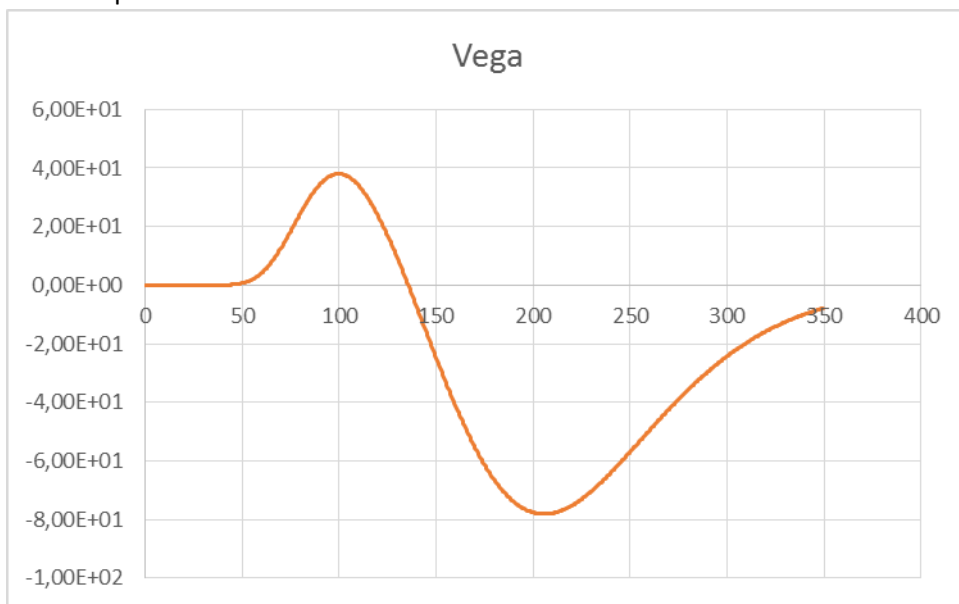
Theta est négatif au départ ce qui était attendu car le risk-reversal ressemble fortement à un put classique si S_0 est très petit devant K_2 et que la volatilité n'est pas gigantesque. L'argument est symétrique pour la partie positive de theta pour une forte valeur de S_0 . Comme pour les autres courbes le « poids » du call semble devenir prépondérant par rapport à celui du put vers $S_0=140$.

Véga :

Pour un call $V_C = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = F'(d_1) S_t \sqrt{T-t} > 0$

$$V_p = e^{-r(T-t)} g(d_1) S \sqrt{T-t} > 0$$

Pour un put



Nous observons comme prévu que le Véga passe négatif quand le delta est maximal aux alentours de $S_0=140$. Ce qui traduit à nouveau que l'effet dominant devient celui de l'opposé du call, de plus le vega tend bien vers 0 en $+\infty$ car au bout d'une certaine valeur de S_0 , même si la volatilité n'est pas nulle, il devient très peu probable de se trouver dans un autre morceau de la fonction payoff lorsque l'on sera à maturité.

De plus, le vega est bien de signe opposé au theta ce qui est classique pour une combinaison linéaire de call.

3) Arbre binomial

Nous prenons les même valeurs que lors de la question 1, c'est-à-dire $S_0=100$, $K=100$, $T=1$, $\sigma=0.25$ et $r=0.01$

Call européen :

La fonction payoff ne dépend que de la valeur terminale du sous-jacent à la date T lors d'une option européenne comme démontré en cours.

Le prix d'un tel actif lors du modèle binomial est donné par

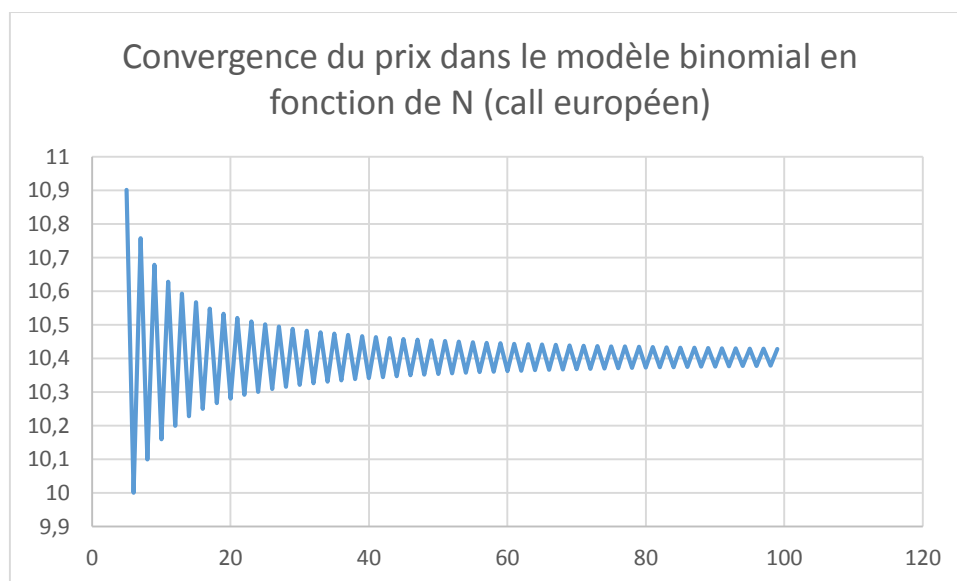
$$\Pi^{h(S_1)} = \frac{q \cdot (S_0(1+a)) + (1-q) \cdot (S_0(1+b))}{1+r}$$

Avec q la probabilité que S_0 passe à $S_0(1+a)$ et $1-q$ la probabilité que S_0 passe à $S_0(1+b)$ en $T=1$. r étant le taux sans risque qui vient actualiser le prix.

Ici, nous appliquons la méthode du cours qui consiste à prendre les coefficients a_N et b_N suivants avec N le nombre de périodes.

$$\begin{aligned} 1 + a_N &= u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \\ 1 + b_N &= d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \\ 1 + r_N &= e^{\frac{rT}{N}} \\ q_N &= \frac{r_N - b_N}{a_N - b_N} = \frac{(1 + r_N) - d}{u - d} \end{aligned}$$

Ceci nous donne le graphique suivant :



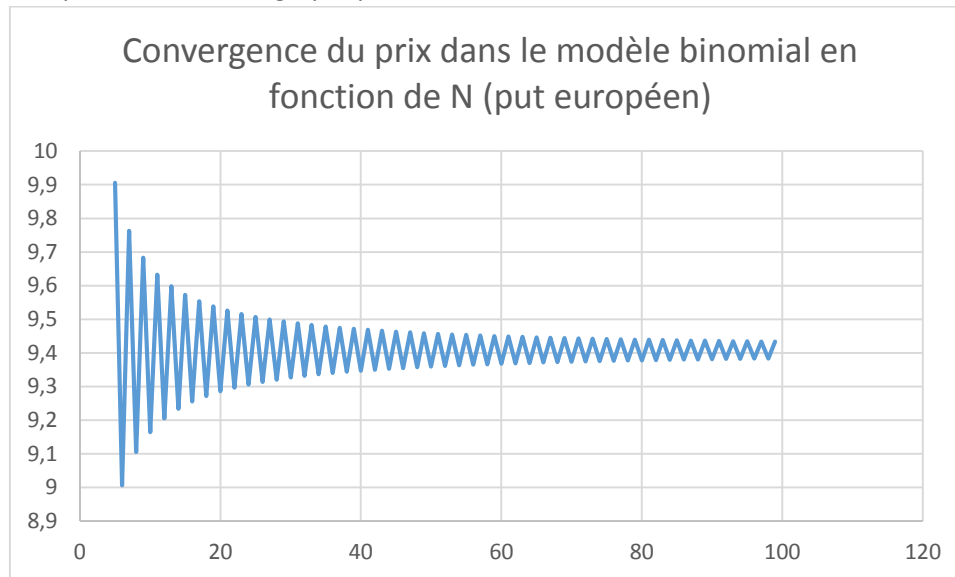
Le prix de B&S est de 10,404 alors que celui donné par l'arbre binomial est de 10,281 avec l'arbre binomial d'une profondeur de 20. De plus, on voit en regardant le graphique que le prix trouvé par le modèle binomial semble converger vers celui de B&S lorsque N tend vers $+\infty$.

Put européen :

La méthode pour trouver le prix du put européen est très similaire au call européen.

Il suffit de remplacer dans le code python le $(S-K)^+$ en $(K-S)^+$.

Ce qui nous donne le graphique suivant :



Pour un arbre d'une profondeur de 20, on trouve un prix de 9,286 quand le prix donné par B&S pour un put européen de même caractéristique donne 9,408.

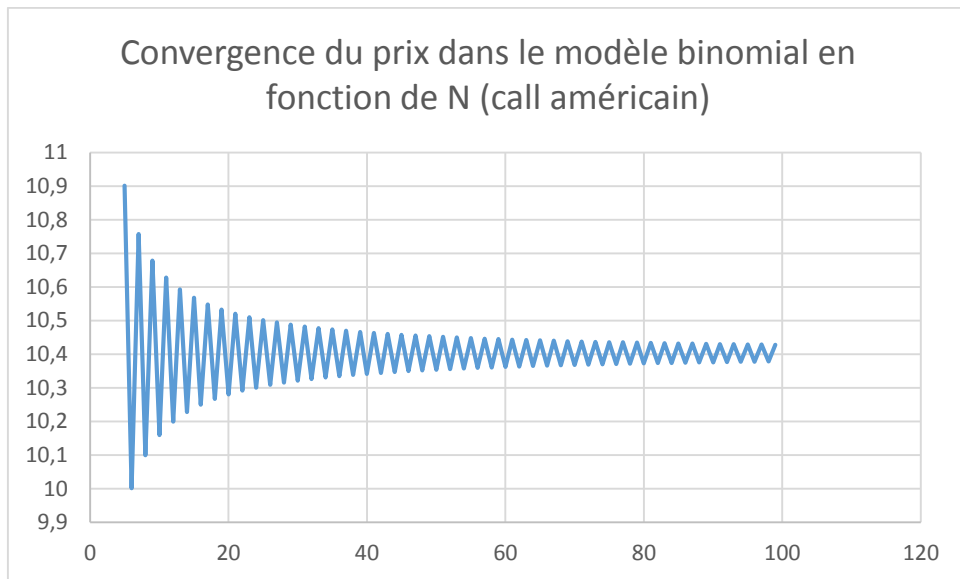
Ce qui donne une bonne estimation du prix, nous voyons que le prix converge vers celui donné par le modèle de B&S lorsque la profondeur de l'arbre tend vers $+\infty$.

Call américain :

Pour le call américain, on applique une méthode identique, mis à part le fait qu'on peut exercer l'option à tout moment.

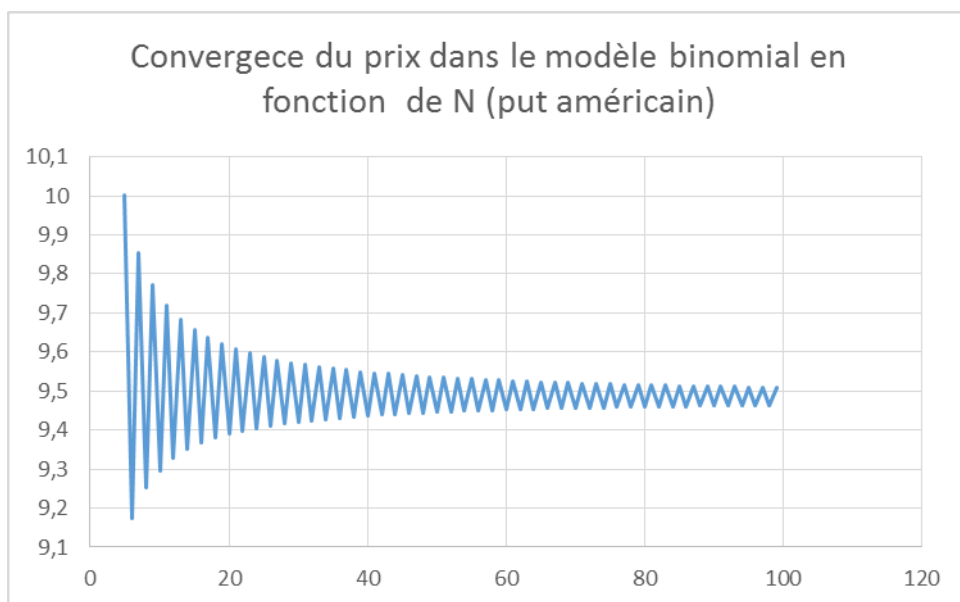
Le prix du call américain d'après l'arbre après 20 nœuds est de 10,281

Et nous obtenons le graphique suivant :



Put américain :

Méthode identique au put européen, on rajoute le fait que l'on peut exercer l'option à tout moment. Ce qui nous donne le graphique suivant :



Après une profondeur de 20, nous trouvons que le prix d'un put américain est de 9,5111. Ce prix est bien supérieur au put européen pour une même profondeur.

Comparaison des prix des options européennes et américaines

Lorsque nous comparons les graphiques donnant les prix d'un call européen et américain en fonction de la profondeur de l'arbre, nous pouvons voir que ces derniers sont très similaires et ont la même allure, on peut supposer que le prix converge à la même vitesse.

Ceci est dû au fait qu'en l'absence de dividendes, il n'est jamais optimal d'exercer le call américain avant l'échéance, et le prix du call américain est donc égal au prix du call européen.

En effet à cause de la parité call-put, on a $(S_t - K)^+ < \text{Call}_t(T, K)$ or $\text{CallAméricain}_t(T, K) \geq \text{Call}_t(T, K)$

Donc il est normal qu'un call européen est le même prix qu'un call américain.

Nous pouvons noter que les prix d'un put américain est plus élevé que celui d'un put européen ce qui est normal puisqu'une option américaine peut s'exercer à n'importe quel moment, ce qui constitue un avantage par rapport à une option européenne, son prix est donc plus élevé.

Bizarrement, les prix d'un call européen et américain sont identiques alors que la possibilité d'exercer l'option à tout moment apporte un gain potentiel plus important pour le call américain.

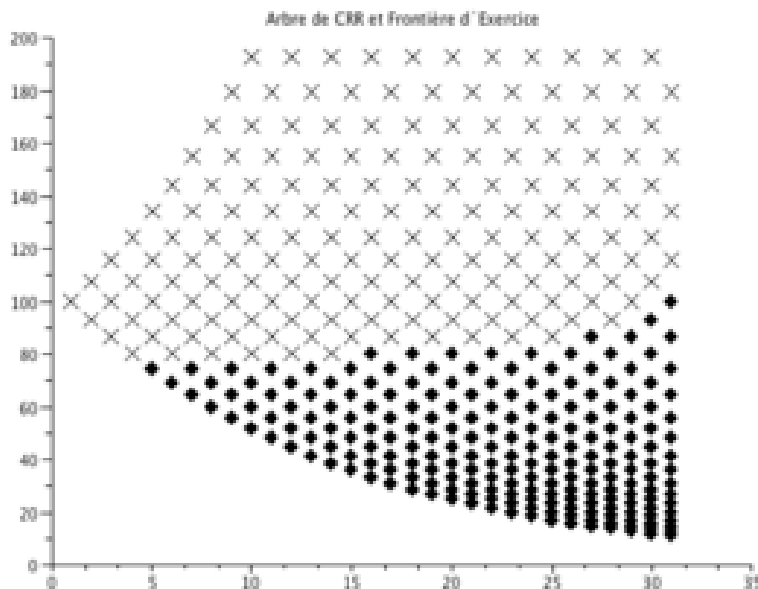
Frontière d'exercice d'une option américaine :

Pour un call on a vu plus haut qu'on exerce jamais l'option américaine avant maturité en l'absence de dividendes.

Pour le put, on peut penser que le détenteur de l'option va l'exercer lorsque son gain au temps t est plus élevé que l'espérance des gains à chaque période futur sachant la situation au temps t .

Il suffit donc dans le modèle binomial de comparer la valeur de l'option au nœud (i', j') par rapport aux espérances des valeurs aux nœuds (i, j) $i' \leq j \leq i$ et le faire pour tout i entre i' et n .

NB : notre implémentation ne donnant pas les résultats attendu graphiquement, nous avons pour illustrer la frontière d'exercice d'un put américain, pris le graphique sur <https://ensiwiki.ensimag.fr>, posté par l'utilisateur Auriola, (nom de la photo : frontière.png)



En ordonnée nous avons la valeur du sous-jacent ($S_0=K=100$), en abscisse la profondeur de l'arbre.

Les points en forme de losange noir étant les points où l'on exerce le put américain. Sont marqués par une croix les points où l'on préfère ne pas exercer tout de suite.

Nous nous apercevons que comme nous aurions pu le prévoir, seul la partie basse du graphique correspond à des nœuds où l'on doit exercer l'option avant maturité car le gain du put est proche de 0 dans la partie haute donc on peut se permettre d'attendre avant de l'exercer en espérant que le prix du sous-jacent va baisser. Alors que lorsque le sous-jacent est bas, le gain ne pouvant dépasser K , on a tout intérêt à exercer avant que le prix du sous-jacent remonte.

De même, plus on se rapproche de la date d'échéance, plus le nombre de nœuds où il est utile d'exercer augmente car le prix du sous-jacent a de moins en moins de probabilité d'évoluer significativement avant l'échéance.

4) Calcul du Delta :

Par définition du delta d'un call européen :

$$\Delta_C = \frac{\partial C_t}{\partial S}$$

Par B&S nous avons :

$$\Delta_C = \frac{\partial C_t}{\partial S} = F(d_1) > 0 \quad \text{avec } F \text{ et } d_1 \text{ identiques aux notations précédentes.}$$

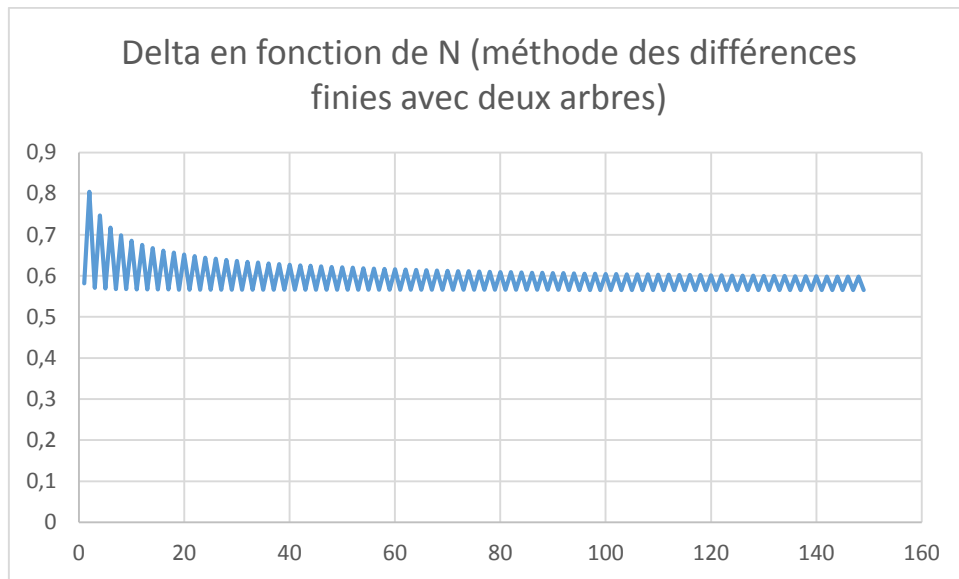
Ce qui donne $\Delta_C = 0.5655280089719352$

Ce que nous pouvons approcher par différences finies par

$$\Delta = \frac{C(S_0 + \epsilon) - C(S_0)}{\epsilon} \quad \text{Ainsi nous calculons facilement } C(S_0 + \epsilon) \text{ et } C(S_0) \text{ comme nous l'avons fait en question 3 avec les arbres binomiaux.}$$

Voici, sur le graphe suivant, les valeurs approchées de delta en fonction de N la profondeur de l'arbre.

Pour $\epsilon = 1$



Delta par méthode des différences finies avec deux arbres (N=1000) : 0.577953705059036

Ainsi on remarque que le delta, trouvé par différence finie, converge vers celui donné par B&S, qui est de 0.5655280089719352.

Et semble même converger en $1/N$.

Cette convergence est usuelle car la méthode numérique des différences finies a une convergence linéaire comme vu dans les cours d'EDP de première année.

5) Monte-Carlo :

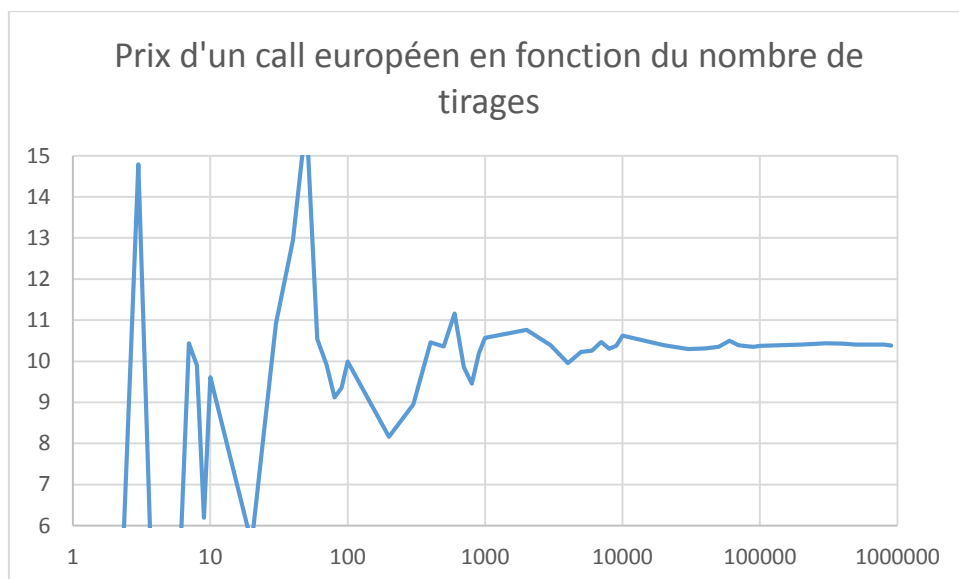
Pour calculer le prix d'un call européen et regarder sa convergence vers le prix théorique grâce à une simulation de Monte-Carlo, nous allons nous servir de la formule de B&S, cette dernière s'écrivant :

$S_t = S_0 * \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma * t^{1/2} * W]$ où W suit une loi gaussienne centrée réduite car est le fruit du mouvement brownien de l'équation stochastique de B&S.

Ainsi, en appliquant la méthode de Monte-Carlo, on simule N valeurs du sous-jacent S_T à l'aide de la formule précédente.

De plus le prix du call européen avec la méthode de Monte Carlo (loi des grands nombres) est donné par :

$$C_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_T(i) - K)_+$$



Le graphique ci-dessus donne donc bien le prix en fonction du nombre de tirages. On voit qu'il faut à peu près 100 000 tirages pour que la valeur se stabilise vers celle donnée par le modèle de B&S, c'est-à-dire 10,404 alors qu'après 1 million de tirages, nous obtenons 10.40311 par MC.

Nous voyons de plus qu'au début, le prix est instable ce qui est normal car il faut un nombre élevé de tirages pour que l'effet statistique fasse son effet.

De plus, après avoir simulé 20 fois cette méthode de MC nous nous apercevons que, même si le début de la courbe change évidemment beaucoup d'une simulation à une autre, nous avons toujours après $N > 10\,000$ le même profil de courbe qui converge vers une valeur proche de celle théorique de B&S.

Notons que, grâce au théorème central limite, nous pouvons estimer la vitesse de convergence de la méthode MC vers le prix théorique du call selon B&S.

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

Ainsi, comme ici $m=0$ et $\sigma=1$, la vitesse de convergence est en racine de n .

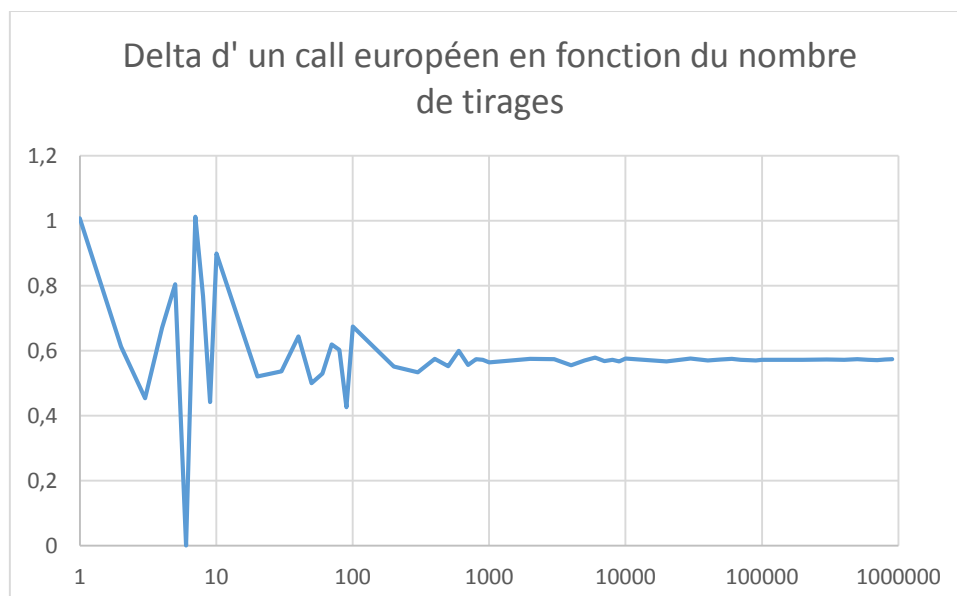
Ce qui n'est pas très bon car pour être dix fois plus précis, il faudra 100 fois plus de tirages.

Pour le delta, on applique à nouveau la méthode de Monte-Carlo :

$$\Delta = \frac{\partial C_{CM}}{\partial S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial C_i}{\partial S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i$$

Avec Δ_i calculé grâce à la méthode des différences finies comme en question 4.

Avec cette fois-ci, $\epsilon = 0.1$



On s'aperçoit ici que le delta du call tend vers sa valeur théorique du modèle de B&S, car après 1 million de tirages, on obtient pour Delta : 0,573294547422571, or celui théorique de B&S est de 0.5655280089719352.

Là encore, grâce au théorème central limite, nous voyons que la vitesse de convergence est en racine de n , alors que lors de la question 4, elle était linéaire en n .

Ce qui explique que la méthode de Monte-Carlo nécessite un nombre impressionnant de tirages pour arriver à un résultat convenable. En effet, pour être dix fois plus précis, cela nécessite 100 fois plus de tirages et pour être 100 fois plus précis, il en faut 10 000 fois plus.

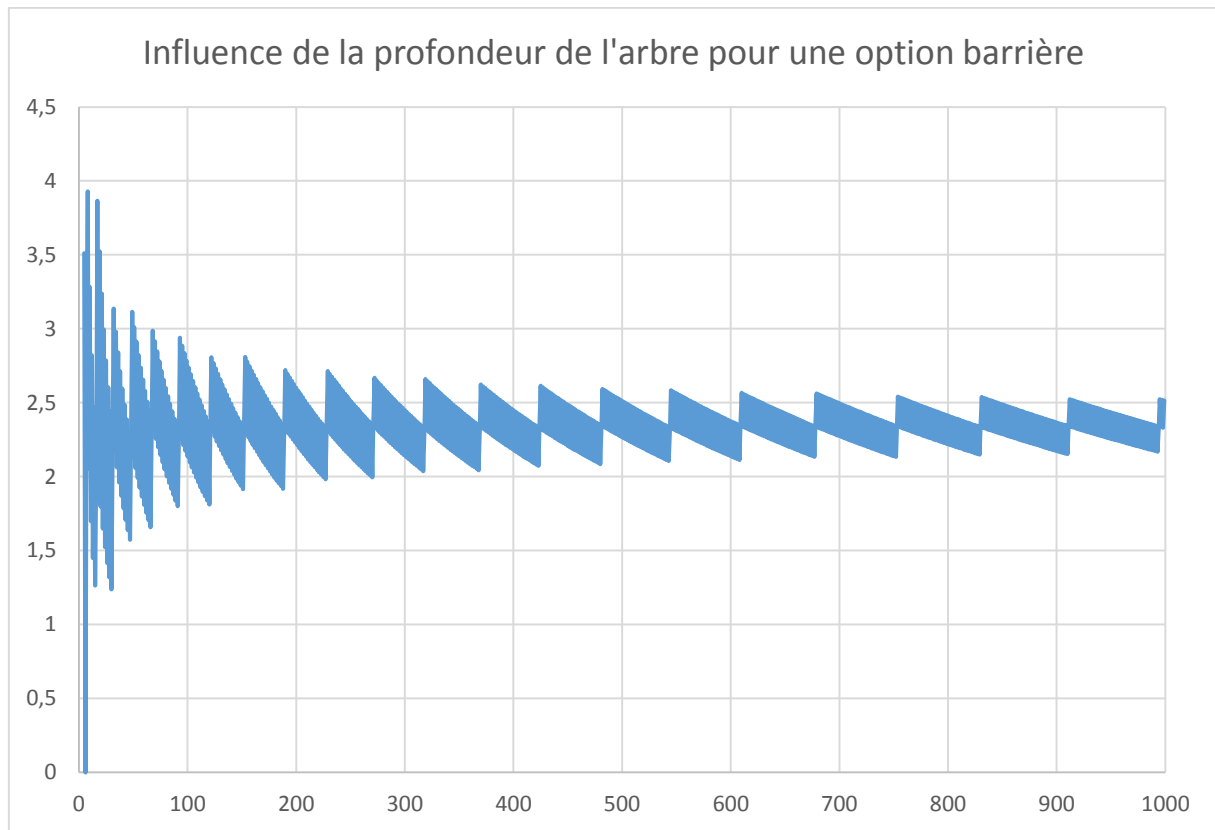
6) Option barrière :

Dans cette question on rajoute une barrière européenne désactivante de niveau $B=120$. C'est-à-dire que si le spot est supérieur à 120 en T , l'option ne peut pas être activée et son payoff est nul.

On faisant un arbre binomial dont la méthode est la même que pour le call classique avec juste une condition désactivante sur le payoff en $t=T$, on obtient un prix de 2.3275599690271 pour une profondeur de 1 000. Ce qui semble cohérent car ce prix doit évidemment se situer sous le prix du call européen classique, l'acheteur ayant un gain cette fois-ci borné par 20.

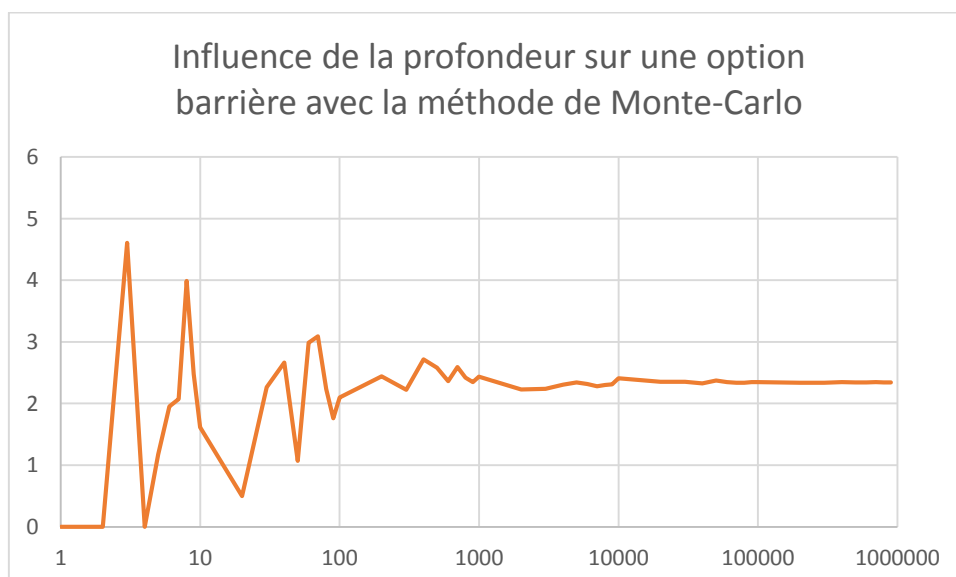
On remarque qu'il faut une profondeur d'arbre importante cette fois-ci pour avoir un début de convergence (de l'ordre de 300).

On obtient par ailleurs le graphique suivant en faisant varier la profondeur de l'arbre



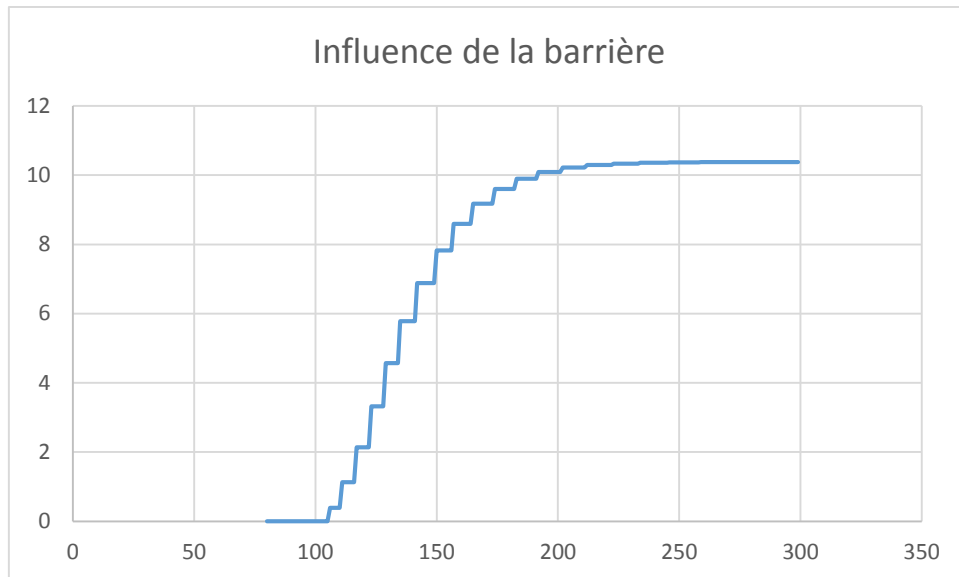
Par Monte-Carlo, on obtient un prix du call européen avec une barrière à 120 de : 2.335271960716 après 1 millions de tirages. La convergence se fait à nouveau en racine de n , où n est le nombre de tirages.

On peut regarder l'influence du nombre de tirages sur l'option à barrière. On voit que, pour une fois, le prix converge assez vite car, avec seulement 10 000 tirages, on semble être proche du résultat.



Les deux simulations donnent donc des résultats très proches, encore une fois. Cependant, la méthode de Monte-Carlo nécessite un nombre de tirages très important pour avoir un résultat satisfaisant.

L'influence de la barrière est primordiale ici. En la faisant varier de 80 à 300, on obtient le graphique suivant :



On se doutait bien que, pour B variant de 80 à 100, le prix du call serait nul car le strike est de 100. Donc l'option ne s'exerce pas si $S_T < 100$. De plus, logiquement aussi, le prix de l'option augmente avec la barrière, jusqu'à tendre vers le prix du call européen classique lorsque la barrière tend vers $+\infty$.

On voit même que, pour une barrière valant deux fois le spot initial et avec une volatilité raisonnable (25%), le prix est déjà quasiment identique au call européen sans barrière. Personne n'envisageant une valeur terminale du sous-jacent de 200 en T avec cette volatilité.

NB : la volatilité a aussi une influence très importante sur un call européen à barrière car si la volatilité est élevée, on risque plus fortement d'atteindre la barrière désactivante.