2.2 第二次习题课

首先是作业，这几周的作业其实相对来说都比较简单，所以我就提几个常见的问题，大家以后注意就好了。

2.2.1 第二、三周作业常见问题

虽然只有四道题，但还是有不少同学写错。各种的计算错误就没什么提的必要了，值得一说的是以下几点：

- 最后一题（第二章第 7 题）是一道应用题，所以要结合实际生活来考虑，一些同学没有考虑到解必须均为正数，或者考虑过多，认为食品量必须是整数。以及甚至还有同学觉得三个未知数三个方程就一定有解，方程里的常数项不是 0，所以这里可不是齐次方程组啊！在后续的课程中会学到，必须满足系数矩阵的秩 (rank) 与增广矩阵的秩相等才会有解。
- 同时我改作业时发现大部分同学对于矩阵语言还不够熟悉，还是在用方程做变换代入消元的做法，这种做法本身肯定是没什么问题的，但是线性方程组只不过是线性代数一个小小的应用，是一个具象化的问题，而数学的核心便是一个从具体概括到抽象的过程。从线性方程组来引入矩阵的概念，是想让大家更好地理解“线性性”这一概念是如何产生的。在有了矩阵之后，我们便有了一个更高的视角，比如你可以发现，矩阵既可以用来表达一组线性方程组，也可以用来表示 n 维欧氏空间[2]中的一组向量，以及更多的满足所谓“线性性”的“向量空间”中的一组元素，于是这又引出了两个问题：“什么是线性性？”、“什么是向量？”$\cdots\cdots$ 这就是数学公理化要做的任务，在此不再赘述，感兴趣的同学可以自行学习。说了这么多也只是为了让大家多了解、熟悉并矩阵的语言，具体的过程可以参考第二、三周作业答案的解题过程。

2.2.2 第四周作业常见问题

- 怎么这么多人四面体体积不会算...... 系数是 $\frac{1}{6}$ 啊，有没乘系数的，还有乘 $\frac{1}{4}$ 的、$\frac{1}{3}$ 的或者 $\frac{1}{2}$ 的，以及怎么还有三角形面积不除以 2 的。另外有同学求出来是负数，我只是圈了出来，但给算对了，这种没明确说的话，应该要求的还是正常的体积而不是有向体积。
- 此外依然是很多的计算错误，代数余子式的符号是 -1 的脚标和次幂，如果算行列式的时候不是按第一行或第一列展开的话一定要注意符号啊，以及最好说清楚是按哪行或哪列展开。
- 第一题算具体数值的行列式，我看见了好几个同学硬展开的，这样真的不累吗？而且一不小心就算错了。可以先做做变换再求，既不容易算错也更简便。
- 由于作业不多且不难，具体讲解哪些作业题视到场同学需求决定。
- 还有个小细节是多元多项式如果对称的话，肯定化成一个对称的形式是最好的，同时也比较美观。

2.2.3 拓展内容

集合与映射

集合与映射之间存在着密切的联系，比如我们可以利用双射来定义有限集合与无限集合：（如果不从直观出发，如何去描述集合中元素是有限还是无限？或者说，什么叫有限/无限？这也是一个直观到抽象的过程）

定义 2.18 (有限集合与无限集合)

如果存在自然数 n，使得集合 A 与集合 $1, 2, \cdots, n$ 之间有一一对应（即双射），称 A 为有限集合；反之若这样的 n 不存在，则称 A 为无限集合，如自然数集 $\mathbb{N}$、整数集 $\mathbb{Z}$ 是熟知的无限集合。 ♣

自然数集 $\mathbb{N}$ 有一个有趣的性质，即 $\mathbb{N}$ 可以和它的每个无限子集一一对应，比如 $x \mapsto x/2$ 是偶数集到 $\mathbb{N}$ 的一个一一对应。通过自然数集我们可以定义可数集与不可数集：

[2]注意不是欧式空间，这看起来像是搞装修的 (雾)

定义 2.19 (基数与可数集合)

称两个集合 A,B 有相同的基数，是指存在 $A \to B$ 的一一对应。称集合 A 比集合 B 有更大的基数，是指存在 $A \to B$ 的满射，但不存在 A,B 之间的一一对应。一个与 $\mathbb{N}$ 有相同基数的集合称为可数集合。♣

思考：有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集合吗？

解 我们知道有理数是两个整数之比（分母不为 0），而我们知道整数集是可数的，那么我们可以任取整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个排列 $x_1, x_2, \cdots$，再取 $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 的任意一个排列 $y_1, y_2, \cdots$，记 $z_{ij} = x_i/y_j$，那么 z_{ij} 构成了全部的有理数。

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \cdots \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \cdots \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

沿着这个无穷矩阵的每一条对角线将元素进行排列可以得到：

$$z_{11} \to z_{21} \to z_{12} \to z_{31} \to z_{22} \to z_{13} \to \cdots$$

由此我们可以得到一个 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的满射（注意不是单射），同时很容易构造一个 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{N}$ 的满射（因为 $\mathbb{N}$ 包含在 $\mathbb{Q}$ 中），从而 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{N}$ 的基数相同，由此得到 $\mathbb{Q}$ 是一个可数集合。

笔记 利用同样的方法可以得到：可数个可数集合的并是可数集合。

思考：那么是否所有的无限集合都有相同的基数呢？直观上来看，我们会感觉实数集 $\mathbb{R}$ 的基数是要比 $\mathbb{N}$ 大的，幸运的是，这个直觉的确是对的。可以先来证明这样一个命题：

命题 2.5

不存在基数比 $\mathbb{N}$ 小的无限集合（任意无限集合 A 的基数大于或等于 $\mathbb{N}$）。♠

证明 考虑一个无限集合 A, 从中取一个元素 x_1, 再从 $A\backslash\{x_1\}$ 中取一个元素 x_2, 重复操作得到 A 中两两不同的一列元素 $x_1, x_2, \cdots$, 从而可以得到一个单射 $f : \mathbb{N} \to A$，由此定义 $g : A \to \mathbb{N}$ 如下：

$$\begin{cases} g(x) = f^{-1}(x), & x \in f(\mathbb{N}), \\ g(x) = 1, & x \notin f(\mathbb{N}). \end{cases}$$

从而 g 是 $A \to \mathbb{N}$ 的满射。如果存在 $A \to \mathbb{N}$ 的一一对应，那么 A 与 $\mathbb{N}$ 有相同的基数；如果不存在，那么 A 的基数大于 $\mathbb{N}$ 的基数，从而命题得证。

由此我们可以定义不可数集合：

定义 2.20 (不可数集合)

无限集合称为不可数集合，是指不存在它与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应，即它有比 $\mathbb{N}$ 更大的基数。♣

那么我们如何来说明 $\mathbb{R}$ 的基数比 $\mathbb{N}$ 大呢？先思考一下 $\mathbb{R}$ 中的元素都是什么：**十进制小数！**对于每一个十进制小数，它的小数点后的数位是可数的，那么我们能联想到什么？没错，就是直积（笛卡尔积）。

从下面这个命题的证明，我们就能得到 $\mathbb{R}$ 不可数的结论。

命题 2.6

可数个可数集合的直积是不可数集合。♠

证明 记 $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$，$A_n$ 均为可数集合，则存在满射 $f_n : A_n \to E_n$，其中 $E_1 = \mathbb{Z}, E_n = \{0, 1, \cdots, 9\} (n \geqslant 2)$，记 $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$，那么存在满射 $f : A \to E$，则 A 具有比 E 更大的基数。而容易看出 E 与 $\mathbb{R}$ 之间存在着一一对应：我们可以把 E 中元素写为十进制小数的形式，任取 E 中的元素，取其第一个分量作为整数部分，第 n 个分量作为小数点后第 $(n-1)$ 位 $(n \geqslant 2)$，由此便可得到一个实数，因此接下来只需证明 $\mathbb{R}$ 不可数。假设 $\mathbb{R}$ 可数，

那么我们可以把 $\mathbb{R}$ 中元素排成一列 $x_1, x_2, \cdots$，取 $x \in \mathbb{R}$ 满足其整数部分与 x_1 不同，小数点后第 n 位与 x_{n+1} 的小数点后第 n 位不同 $(n \geqslant 1)$，那么 x 和排列中的任一个元素都不相同，矛盾！从而 $\mathbb{R}$ 不可数，命题也得证。

接下来，关于课程讲义中提及的集合的一个运算规则（命题 1.7.2）：

命题 2.7 (De Morgan 律)

设 A_i 为某固定集合 U 的子集，则

$$\bigcap_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \quad \bigcup_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$$

这个性质是不难验证的，但值得一提的是，这里的下标集 I 可能是一个不可数集合，此时这族集合的交与并不能写成 $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ 或 $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ 的形式，因而我们才采取这种表示形式，来表明这个运算律对**任意交**、**任意并**都成立，而非仅在有限或可数次交或并运算下成立。

复数

¶ 扩充平面与复数的球面表示

我们知道复数可以和复平面上的点一一对应，从而可以通过复平面给出复数的一个几何表示。而 Riemann 首先引进了复数的球面表示。首先我们在复数域 $\mathbb{C}$ 中引进一个新的数 ∞，这个数的模是 ∞，辐角没有意义，其与其他复数的运算规则规定为：

$$z \pm \infty = \infty,\ z \cdot \infty = \infty (z \neq 0),\ \frac{z}{\infty} = 0,\ \frac{z}{0} = \infty (z \neq 0)$$

而 $0 \cdot \infty$ 和 $\infty \pm \infty$ 都不规定其意义。引入了 ∞ 的复数域记为 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，这个时候我们发现，在复平面上没有任何一点和 ∞ 对应，于是我们想象有一个无穷远点和 ∞ 对应，加上无穷远点的复平面称为**扩充平面**，但是我们会感觉这样的 ∞ 和其他复数在复平面上总是有些差别，于是便有了复数的球面表示：

设 $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$，即 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面，把 $\mathbb{C}$ 看作平面 $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$，固定 S 的北极点 $N = (0, 0, 1)$，在平面上任取一点 z，其与 N 相连的直线必与 S 交于一点 P，从而 z 与 P 相对应，而 ∞ 与 N 相对应，从而我们得到了一个 $\mathbb{C}_\infty$ 与 S 之间的一一对应，而且此时 ∞ 与其他复数地位对等。

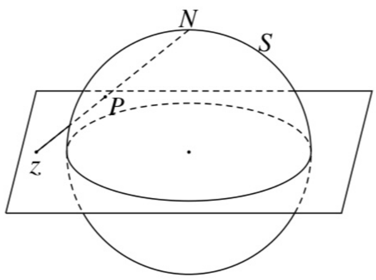

图 2.1: 球极投影

¶ 棣莫弗（De Moivre）公式与因式分解

利用棣莫弗（De Moivre）公式：$(re^{i\theta})^n = (r\cos(\theta) + ir\sin(\theta))^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ 我们可以将一些多项式分解为一次复系数因式的乘积，如：

习题（因式分解）

(1) $x^n - C_{2n}^2 x^{n-1} + C_{2n}^4 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n C_{2n}^{2n}$

(2) $x^{2n} + C_{2n}^2 x^{2n-2}(x^2-1) + C_{2n}^4 x^{2n-4}(x^2-1)^2 + \cdots + (x^2-1)^n$

(3) $x^{2n+1}+C_{2n+1}^2x^{2n-1}(x^2-1)+C_{2n+1}^4x^{2n-3}(x^2-1)^2+\cdots+x(x^2-1)^n$

解 (1) 在棣莫弗公式中将 r 取为 1，n 替换为 $2n$，两边取实部得：

$$\cos^{2n}(\theta)-C_{2n}^2\cos^{2n-2}(\theta)\sin^2(\theta)+\cdots+(-1)^n\cdot C_{2n}^{2n}\cdot\sin^{2n}(\theta)=\cos(2n\theta)$$

取 $\theta_k=\frac{k\pi+\pi/2}{2n},k=0,1,\cdots,n-1$,(易知 $\theta_k<\dfrac{\pi}{2}$), 此时上式右端为零，而 $\sin(\theta)\neq 0$, 故两端同时除以 $\sin^{2n}(\theta)$:

$$\cot^{2n}(\theta_k)-C_{2n}^2\cot^{2n-2}(\theta_k)+\cdots+(-1)^n\cdot C_{2n}^{2n}=0$$

即 $x_k=\cot^2(\theta_k)$ 是原式的根，又因为它们互不相同，故恰为原式的 n 个不同根，从而得到分解：

$$x^n-C_{2n}^2x^{n-1}+C_{2n}^4x^{n-2}+\cdots+(-1)^nC_{2n}^{2n}=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\cot^2(\frac{k\pi+\pi/2}{2n}))$$

(2) 将 $\sin^2(\theta_k)=1-\cos^2(\theta_k)$ 带入第 (1) 问第一个式子，可得 $x_k=\cos(\theta_k),\theta_k=\frac{k\pi+\pi/2}{2n},k=0,1,\cdots,2n-1$ 恰好是第 (2) 问原式的所有根. 从而得到分解：

$$x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}(x^2-1)+C_{2n}^4x^{2n-4}(x^2-1)^2+\cdots+(x^2-1)^n=\prod_{k=0}^{2n-1}(x-\cos(\frac{k\pi+\pi/2}{2n}))$$

(3) 在棣莫弗公式中将 r 取为 1，n 替换为 $2n+1$，两边取实部，类似 (1) (2) 中过程可得分解：

$$x^{2n+1}+C_{2n+1}^2x^{2n-1}(x^2-1)+C_{2n+1}^4x^{2n-3}(x^2-1)^2+\cdots+x(x^2-1)^n=\prod_{k=0}^{2n}(x-\cos(\frac{k\pi+\pi/2}{2n+1}))$$

行列式的几何意义

行列式在线性代数中有着很重要的地位，然而绝大部分教材对行列式的引入都是从代数视角出发，一串繁杂的代数式经常让初学者十分困惑：为什么是这样一个奇怪的计算方法，算出来的这个数到底有什么作用？其实这些都有着鲜明的几何直观：

命题 2.8 (行列式的几何意义)

对于 n 阶方阵 A，将其看作 n 个行向量（或列向量），以这 n 个向量构成一个新的坐标系中的 n 个基向量，则 A 的行列式即为这 n 个向量张成的高维立方体在 n 维空间中的有向体积（二维情形下即为面积）。

可是...... 这个命题看上去也奇奇怪怪的，难以理解，所以接下来我们先从简单的低维情形入手。

考虑二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

从这个我们能想到什么？我们把这个二阶方阵看成两个列向量 $\boldsymbol{x}=(a,c)^T,\boldsymbol{y}=(b,d)^T$，同时记单位向量 $\boldsymbol{i}=(1,0)^T,\boldsymbol{j}=(0,1)^T$，不妨先假设 $\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的逆时针方向，那么行列式的值便是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 围成的平行四边形的面积，如下图所示：

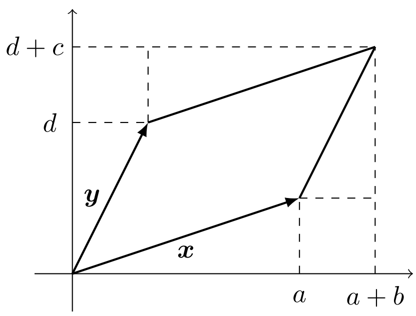

图 2.2: 平行四边形

平行四边形面积 $S=(a+b)(d+c)-ac-bd-2bc=ad-bc$. 为什么命题中说的是“有向体积”呢？这涉及到一个定向的问题，$\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{y}$ 的顺时针方向一侧时，这与 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 之间的相对位置关系是一样的，两组向量的叉乘 ($\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$与$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$) 方向垂直纸面向外，所以我们把它定为正向，而当 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的相对位置关系颠倒后，可以视为以 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 为基的新坐标系把纸面翻转到了背面，从而“体积（这里是面积）”便是负的了。

从上面的过程可以看出这便是二阶行列式交换两列后符号改变的原因，同理，将 $\boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{y}$ 变为原来的 λ 倍后，平行四边形沿着 $\boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{y}$ 的方向伸缩了 λ 倍，因此面积变为原来的 λ 倍。而将 $\boldsymbol{x}$ 的 λ 倍加到 $\boldsymbol{y}$ 后，相当于 $\boldsymbol{y}$ 沿着 $\boldsymbol{x}$ 的方向做了一个平移，平行四边形的面积自然不会发生改变。而在 $\boldsymbol{x}$ 基础上加一个向量 $\boldsymbol{z}$，那么 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 围成的平行四边形的面积加上 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 围成的平行四边形的面积就等于 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 围成的平行四边形的面积，也就得到了二阶行列式可将某列拆分的性质，如下图所示：

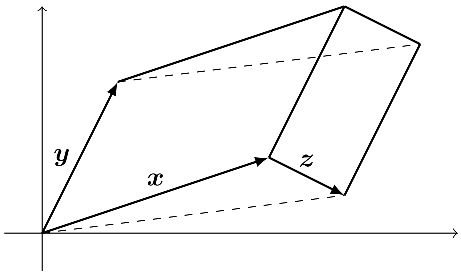

图 2.3: 二阶行列式可按某列拆分

以上也是一般的教科书中可能会给出的一个几何解释。

那么，这时候可能又会有同学问：“我觉得过程里这个 $S=(a+b)(d+c)-ac-bd-2bc=ad-bc$. 还是太‘代数’了，不够直观，并且如何来解释方阵转置后行列式不变呢？还有更高维的情形怎么办呢？”

这当然是个好问题，但想给出严谨的论述比较困难，可以从下面这个视角来看待，仍先考虑二维情形：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}$$

我们可以把这个看作是以 $(a,0)^T$ 与 $(0,d)^T$ 为边的长方形的有向面积加上以 $(0,c)^T$ 与 $(b,0)^T$ 为边的长方形的有向面积，或者再多分一步来看，先将 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 分别伸缩为原来的 a,d 倍，再将 $\boldsymbol{i}$ 沿 $\boldsymbol{j}$ 的方向平移 c 个单位、$\boldsymbol{j}$ 沿 $\boldsymbol{i}$ 的方向平移 b 个单位，$-bc$ 便是这两次偏移产生的影响。同样对于三维情形也有：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & c_2 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

可以看出这是六个长方体的有向体积和。一般地，取 n 维标准欧氏空间中的基向量 $\boldsymbol{e}_i$（仅第 i 个分量为 1，其余为 0），这 n 个向量有 $n!$ 个排列方式，我们把它们视为 $n!$ 个不同的“定向”，将排列 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 定为正向，对于 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，将行列式按如上方式拆分，可以得到 $n!$ 个高维长方体（各边两两正交）的有向体积和，同时也可以看作每个 $\boldsymbol{e}_i$ 先各自伸缩 a_{ii} 倍，再加上其他 $(n!-1)$ 个“定向”上的偏移的影响（影响可能有正有负，实际上这与排列的逆序数及偏移的正负有关）。而矩阵转置前后，对角线不变，仍然以列向量来看，这些偏移只是在列向量之间“转移”，其和仍是不变的，从而便有转置不改变行列式。

思考一下，你就会发现，其实这就是行列式的完全展开式。

笔记 由于助教水平有限，这段话实际上比较粗糙，只是提供一个相对直观的视角与看法而已。另一方面，其实几何直观在矩阵中的运用往往是用于猜测结论，而非严谨证明结论。

现在，通过以上的过程，我们就可以将结论推广到三维以及更高维度的情形，只需要把平行四边形改为平行六面体/高维平行立方体就可以了。那么行列式为 0 又是什么情形呢？平行四边形面积为 0，那么只有 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 共线了或都为 $\boldsymbol{0}$ 了，平行六面体的在三维空间中的体积为 0，只能是三个基向量共面或共线或都为 $\boldsymbol{0}$，更高维情况也类似，概括下来的话，当行列式里的向量线性相关时，这个空间就“降维”了。

笔记 另外，关于行列式的递推定义，其实可以通过将列向量投影到标准欧氏空间来理解，将 1 个 n 维平行立方体的一边在 n 个分量上作正交投影，于是便转化为了 n 个 $(n-1)$ 维平行立方体，实际上与上面的解释是一致的。

一个典型的错误例子 有位同学前几天问过我第三章的第 8 题他为什么证错了，下面我们一起来看一下这位同学写的过程，有了直观的几何理解后，我们很轻易就能发现错误之处。（这里没有针对该同学的意思，只是我感觉这个错误很多初学者都可能会犯）

习题（第三章第 8 题）

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 为 4 维数组向量，证明：$\det(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d},-\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{d})=5\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$.

证明 （错解）

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \det(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\\
&= \det(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d},2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{d}-2\boldsymbol{b})\\
&= \det(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d},2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})\\
&= \det(\frac{5}{2}\boldsymbol{a},2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d},2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}) = \frac{5}{2}\det(\boldsymbol{a},2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d},2\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\\
&= 10\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}).
\end{aligned}$$

哪里出了问题呢？显然是第二个等号错了，我们仔细地看这一步，记过程第一行四个向量为 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2,3,4)$，我们把 $\boldsymbol{v}_i$ 的常数倍加到 $\boldsymbol{v}_j$ 中时，可以看作是 $\boldsymbol{v}_j$ 沿着 $\boldsymbol{v}_i$ 方向作了一个平移，而第二个等号中，这位同学是把 $\boldsymbol{v}_2$ 加到 $\boldsymbol{v}_1$ 中，把 $\boldsymbol{v}_3$ 加到 $\boldsymbol{v}_2$ 中，把 $\boldsymbol{v}_4$ 加到 $\boldsymbol{v}_3$ 中，这三步都没问题，但是这时候第三个向量已经变成了 $\boldsymbol{v}_3'=2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，如果要想让行列式不变，我们只能把 $\boldsymbol{v}_4$ 沿着 $\boldsymbol{v}_3'$ 的方向作平移，但第二个等号后的第四个向量明显是 $\boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_3$ 的结果，即 $\boldsymbol{v}_4$ 沿着 $\boldsymbol{v}_3$ 方向的平移，正是这个错误导致了行列式的变化。

Cramer 法则的几何解释

有了上一部分的理解后，我们是不是也可以给 Cramer 法则一个好的几何解释呢？当然是可以的。这里只讨论二维情形，三维或更高维情形是同理的。

考虑一个二阶线性方程组：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 我们记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)^T,\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)^T,\boldsymbol{c}=(c_1,c_2)^T,\boldsymbol{x}=(x,y)^T$.

那么上述方程组可以改写为：$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，那么我们以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 作为基向量构成新坐标系，将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别伸缩为原来的 x,y 倍，从而可以得到 $\boldsymbol{c}$，如下图所示：

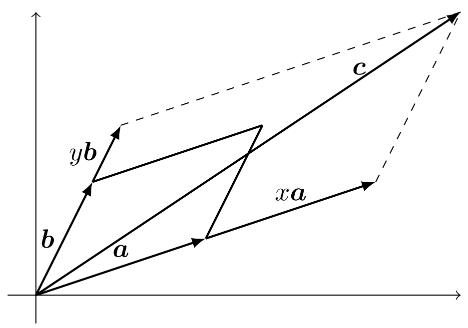

图 2.4: Cramer 法则的几何解释

利用面积比值关系，我们可以得到：$x=\dfrac{|\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}|}$, $y=\dfrac{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}|}$，这便是 Cramer 法则了。

说了这么多，希望大家对行列式能有一个新的认识，能发现线性代数这门学科的优美之处，而非仅仅只是知道了计算方法，把自己搞成了一个矩阵计算器（虽然这门课的考试确实比较偏计算，我也无能为力）。

2.2.4 补充题目

行列式在这门课的期中期末里都是必考题，一些常见的求解行列式的技巧很有必要掌握，所以这里给大家搞了一点点补充题。题目大多数摘录于本门课程的往年考试原题、课外资料中的题目等等。不过其中部分题目难度较高，仅作了解便可，不必深究（除非你有转入数学相关专业的打算 XD）。单看这门课的要求的话，掌握一些基本解题技巧、熟悉基本概念便足以拿到一个不错的成绩了。

笔记 由于我们现在还没学到第四章，所以其实能补充的题目并不是很多。

习题 2.1 (2022 秋期中)

行列式 $\begin{vmatrix} -3 & x & 7 & x \\ 1 & x & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -x & 1 \\ 2x & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的完全展开式中，x^4 项的系数为：________.

解 沿第一列展开，只有最后一项 $-2x\begin{vmatrix} x & 7 & x \\ x & 5 & -1 \\ 3 & -x & 1 \end{vmatrix}$ 能含有 x^4 项，而 $\begin{vmatrix} x & 7 & x \\ x & 5 & -1 \\ 3 & -x & 1 \end{vmatrix}$ 再沿第一列展开，只有第二项 $-x\begin{vmatrix} 7 & x \\ -x & 1 \end{vmatrix}$ 能含有 x^3 项，且系数为 -1，故原式中 x^4 项的系数为 $-2\times(-1)=2$.

习题 2.2

将 λ 作为变量，$a_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$ 作为常数，则：

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 λ 的多项式. 求这个多项式的 n 次项和 $n-1$ 次项系数

解 行列式只有 n 个对角元 $\lambda-a_{ii}$，各含有一个 λ，其余元素都不含 λ. 因此只有这 n 个对角元的乘积 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$ 才含 λ 的 n 次项，就是这个乘积的最高次项 λ^n. 因此 $f(\lambda)$ 的 n 次项为 λ^n，系数为 1。

同时行列式展开式 $f(\lambda)$ 中的 $n-1$ 项只能由 n 个对角元 $\lambda-a_{ii}$ 中的某 $n-1$ 个相乘产生。先选定了这 $n-1$ 个对角元之后，剩下的一列中能够与这 $n-1$ 个对角元相乘（与这 $n-1$ 个对角元位于不同的行）的也只能是对角元，这说明 $n-1$ 次项也只能含于 n 个对角元的乘积 $(\lambda-a_{11})\cdots(\lambda-a_{nn})$，等于这个乘积展开式的 $n-1$ 次项 $-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}$，系数为 $-(a_{11}+\cdots+a_{nn})$.

笔记 这个在后续会学到，$f(\lambda)$ 称为方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式，$a_{11}+\cdots+a_{nn}$ 称为 A 的迹 (trace)，如果你还想算一算这个多项式的常数项，你会发现它等于 $(-1)^n\det A$ (取$\lambda=0$).

习题 2.3 (2022 秋期中)

计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\neq 0$.

解 容易观察到行列式中每一列都含有一个向量 $(1,1,\cdots,1)^T$ 的常数倍，从而我们可以利用“加边法”求解。

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n \\ 1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = (-1)^n(1-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i})\prod_{i=1}^n a_i$$

其中倒数第二个等号是因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n \neq 0$，那么如果有某个 $a_i=0$ 呢？我们把上式结果换个形式写出来：

$$(-1)^n(1-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i})\prod_{i=1}^n a_i = (-1)^n(\prod_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n (x_i \prod_{j\neq i} a_j))$$

我们发现 a_i 并不作分母，其实这本应就是对的，因为我们可以把行列式看作关于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的多元函数，把 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 视为参数，这个多元函数一定是关于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的多元多项式，故显然连续，那么它在某个 a_i 为 0 时一定有意义。这个方法叫做“微扰法”或者“摄动法”，在后续课程中经常用于某些证明题。一般的过程是先考虑矩阵可逆情形，再通过多项式的连续性推广到一般情形，是一个很重要的思想与方法。

笔记 这道题的结果十分重要，很多求解行列式的题目其实都是这道题的一些特殊情况，比如下面的两个题目：

习题 2.4 (2023 秋期中)

$$A = \begin{pmatrix} 4+x & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3+x & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2+x & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}.x>0. \text{ 求 } \det A, A^{-1}.$$

解 （仅求解行列式）：A^T 符合习题2.3的形式，代入得到 $\det A = (1+\dfrac{10}{x})x^4 = x^4+10x^3$.

习题 2.5 (2015 秋期中)

设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$，求：(i) $\det A$; (ii) $\operatorname{rank} A$.

解 （仅求解行列式）：$A = \begin{pmatrix} b-(b-a) & b & \cdots & b \\ b & b-(b-a) & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b-(b-a) \end{pmatrix}$ 符合习题2.3的形式，代入得到 $\det A = (-1)^n(1-\dfrac{nb}{b-a})(b-a)^n = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$.

笔记 可以看到这两个题都是习题2.3的简化版，并且往年期中题里类似的题还有很多，就不再一一列举了。

从习题2.3可以看出“加边法”很好用，对吧，嘿嘿，那来看看下面这个题吧！

习题 2.6

已知 $n \geqslant 2, a_1, a_2, \cdots, a_n \neq 0$, 求 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 这题目一看就很容易让人想到是加边对吧，我们发现每行除了对角元之外，都含有一个 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的向量，同时也都含有一个 $(1, \cdots, 1)$ 的常数倍，但是无论我们用这两个里的哪个向量去加边，继续往下做还是无从下手，这个时候怎么办？那就全都要！记原行列式为 Δ，加两次边：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

这个时候是不是就好处理多了，不过稍微有点难算。

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{n}{2} & -\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i & 1-\dfrac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left[\left(1-\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)\right](-2)^n a_1 \cdots a_n$$

$$= (-1)^n 2^{n-2} a_1 \cdots a_n \left[(n-2)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)\right]$$

习题 2.7

证明：偶数阶斜对称方阵的行列式 $|A| = |a_{ij}|_{n\times n}$ 的所有元素的代数余子式 A_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 之和等于 0.

证明 将 A 扩充为 $n+1$ 阶斜对称方阵 $B = (b_{ij})_{n+1,n+1}$, 使它的第 1 行 $(b_{11}, \cdots, b_{1,n+1}) = (0, 1, \cdots, 1)$，第 1 列 $(b_{11}, \cdots, b_{n+1,1})^T = (0, -1, \cdots, -1)^T$，即 B 删去第 1 行和第 1 列得到 A，即

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由于 B 是奇数阶斜对称方阵，$\det B = \det B^T = (-1)^n \det B = -\det B \Rightarrow \det B = 0$. 另一方面，将 $|B|$ 按第 1 行展开，得到如下等式:

$$0 = |B| = \sum_{j=0}^{n} b_{1,j+1} B_{1,j+1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j+1} N_{1,j+1}$$

其中 $N_{1,j+1}$ 是 B 的第 $(1, j+1)$ 元素的余子式，$B_{1,j+1} = (-1)^{1+j+1} N_{1,j+1}$ 则是相应的代数余子式。余子式 $N_{1,j+1}$ 由 A 的行列式 $|A|$ 删去第 j 列再在左边添上全由 -1 组成的一列得到。将每个余子式

$$N_{1,j+1} = \begin{vmatrix} -1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开得到：

$$N_{1,j+1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)(-1)^{i+1} (N_{1,j+1})_{i1}$$

其中 $(N_{1,j+1})_{i1}$ 是 $N_{1,j+1}$ 的第 $(i,1)$ 元素的余子式，由 $N_{1,j+1}$ 删去第 i 行和第 1 列得到，也就是由 $|A|$ 删去第 i 行和第 j 列得到的 $n-1$ 阶行列式即 $|A|$ 的第 (i,j) 元素的余子式 M_{ij}. 因此等式上式可改写为：

$$N_{1,j+1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i M_{ij} \quad \text{从而有：} 0 = |B| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (-1)^j (-1)^i M_{ij}$$

其中 $(-1)^j(-1)^i M_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 就是 $|A|$ 的 (i,j) 元素的代数余子式 A_{ij}，从而命题成立。

笔记 这里有一个有用的小引理：奇数阶反对称方阵行列式为 0，所以我们通过加边把偶数阶升为奇数阶，剩下的操作就完全是代数变形了。

习题 2.8 (2019 秋期中)

计算 n 阶行列式 $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & & & \\ a & 1-a & -1 & & \\ & a & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1-a & -1 \\ & & & a & 1-a \end{vmatrix}$.

解 这种“三对角”方阵的行列式一般都是用二阶线性递推来做。(并且题上把它写成 Δ_n 也算是一种提示?)

$a \neq -1$ 时，沿第一行展开容易得到：

$$\Delta_n = (1-a)\Delta_{n-1} + a\Delta_{n-2}\text{，特征方程为 } x^2 + (a-1)x - a = 0\text{，解得 } x_1 = -a, x_2 = 1.$$

从而 $\Delta_n = A \times 1^n + B \times (-a)^n$，再由：

$$\Delta_1 = 1-a, \Delta_2 = (1-a)^2 + a = a^2 - a + 1\text{，解得} A = \frac{1}{a+1}, B = \frac{a}{a+1}.$$

从而 $\Delta_n = \dfrac{1}{a+1}(1-(-a)^{n+1})$. 而 $a = -1$ 时，利用习题2.3中的微扰法即可。

笔记 其实往年题做得多了就会发现，考试里求行列式的题用的方法基本就那么几种，像这种很经典的“三对角”矩阵，以及“爪型”矩阵、对角元相等的对称矩阵等等，老师的讲义中都详细地讲了。所以把老师这节的讲义吃透，考试时求行列式就没什么问题了。

行列式拆分的性质在一些习题中也经常会用到。当只有某一个元素不好处理时，就把这个元素改写，拆分成两个行列式的和分别处理，可能就会带来很大的方便，比如看下面的题目：

习题 2.9

计算 n 阶行列式：$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

解 观察发现我们可以把第一行加到其他行消去大部分的 $-a$，但第一列比较麻烦，那没关系，我们可以将第 1 行 $(x, a, \cdots, a)$ 拆分，记原行列式为 Δ_n，则有：

$$\Delta_n = D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

将 D_1 的第 1 行加到以下各行，得到 $D_1 = a(x+a)^{n-1}$.

将 D_2 按第 1 行展开，得到 $D_2 = (x-a)\Delta_{n-1}$. 于是 $\Delta_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)\Delta_{n-1}$. 这时候用数列的递推解起来还是稍显麻烦，但观察到这个矩阵有很好的对称性，所以我们可以在 Δ_n 中用 $-a$ 替换 a, 这样得到的是 Δ_n 的转置的行列式，与原行列式相等，所以有：

$$\Delta_n = \Delta_n^T = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)\Delta_{n-1}^T = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)\Delta_{n-1}$$

$$\text{则有 } \Delta_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)\Delta_{n-1} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)\Delta_{n-1}$$

当 $a \neq 0$ 时可解出：

$$\Delta_{n-1} = \frac{a(x+a)^{n-1} + a(x-a)^{n-1}}{(x+a)-(x-a)} = \frac{a(x+a)^{n-1} + a(x-a)^{n-1}}{2a} = \frac{(x+a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}}{2}$$

从而有：

$$\Delta_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}$$

当 $a = 0$ 时易见 $\Delta_n = x^n = \frac{(x+0)^n + (x-0)^n}{2}$，因此：

$$\Delta_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2} \text{ 对所有的 } a \text{ 成立}$$

习题 2.10 (2023 秋线性代数 (B2) 期中)

4 阶方阵 A 的第 3 行元素分别为 $-1, 0, 2, 8$，第 4 行元素对应的余子式依次是 $5, 10, a, 2$，则 $a =$________.

解 这题目乍一看非常简单啊，不就是剥蒜嘛，但实际上如果你把第 1,2,4 行的元素全设出来列方程硬求解是极其复杂的（9 个未知数），至少我去年在考场上是放弃了这个做法的。但实际上，只需要稍稍转变一下思路：

$$\text{记 } A = (a_{ij})_{4\times4},\ b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \text{ 则有 } \begin{cases} -2b_{24} + 8b_{23} = 5 \\ 2b_{12} - b_{23} = 2 \\ -b_{24} + 8b_{12} = a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{21}{2}$$

嗯，其实确实不难，虽然我去年没做出来（逃）。

另外老师讲义上提及的 Vandermonde 行列式也很重要，考试经常考。老师讲义上已经把好几种情况的处理办

法写得很详细了，我就不多写了（但后续还会有求这个矩阵的逆矩阵的题型）。不过我们可以通过 Vandermonde 行列式来求一些类似的矩阵的行列式。

习题 2.11

计算行列式：$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

记 $x_0 = 1$，则由 Vandermonde 行列式可知：

$$\text{原式} = 2\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) = 2\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$$

$$= 2\prod_{i=1}^{n} x_i \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)\right) - \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j) = \left(2\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)\right).$$

老师课上介绍过的 Laplace 展开在求解行列式的问题中也有着很广泛的应用，不过 Laplace 展开不是我们这门课程的考核要求内容，仅作补充了解即可，该定理的内容如下：

定理 2.1 (Laplace 展开定理)

取定行指标 $i_1, i_2, \cdots, i_p, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$. 遍取行列式 $\det A$ 中第 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行上的 p 阶子式，并分别乘以相应的代数余子式，其和即为 $\det A$。具体地说，有：

$$\det A = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 & \cdots & i_p \\ j_1\ j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}\left((-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+j_1+j_2+\cdots+j_p} A\begin{pmatrix} i_{p+1} & \cdots & i_n \\ j_{p+1} & \cdots & j_n \end{pmatrix}\right),$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_p i_{p+1} \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_p j_{p+1} \cdots j_n$ 都是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列, 并且 $1 \leqslant i_{p+1} < \cdots < i_n \leqslant n, 1 \leqslant j_{p+1} < \cdots < j_n \leqslant n$.

笔记 那么，思考一下，Laplace 展开定理有没有什么几何解释呢？当然是有的，如果说行列式的递推定义是 n 维空间到 $n-1$ 维空间的投影再求和，那么 Laplace 展开就是 n 维空间到 $n-p$ 维空间的投影再求和。这里不再过多叙述了。关于定理的严格证明，老师的讲义中有所提及，感兴趣的同学可以自行学习。

以下给出两个 Laplace 定理在解题中的应用：

习题 2.12

利用 Laplace 展开定理计算行列式：
$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ x_1 & c & b & \cdots & b & y_1 \\ x_2 & b & c & \cdots & b & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & b & b & \cdots & c & y_n \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

解 记原行列式为 $\det A$，观察发现这个行列式最外面一圈和里面格格不入，所以将行列式按第 1 列、第 $n+2$ 列作 Laplace 展开，得到：

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n+2} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ 1 & n+2 \end{pmatrix}\left((-1)^{i_1+i_2+1+(n+2)} A\begin{pmatrix} i_3 & i_4 & \cdots & i_{n+2} \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (-1)^{1+(n+2)+1+(n+2)}\begin{vmatrix} \lambda & a \\ a & \lambda \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ b & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & c \end{vmatrix} \\ &= \left(\lambda^2-a^2\right)\left(c+(n-1)\,b\right)(c-b)^{n-1}.\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号是因为包含第 1 行或最后一行的子式均为 0，最后一个等号用到了习题2.5的结论。

习题 2.13

计算 $2n$ 阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-1} & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\ & & & a_{nn} & b_{n1} & & & \\ & & & c_{1n} & d_{11} & & & \\ & & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n} & d_{n-1,1} & \cdots & d_{n-1,n-1} & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{vmatrix}$$

其中未写出的元素都是零。

解 不断对行列式第一列和最后一列进行 Laplace 展开，我们有：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(a_{11}d_{nn}-b_{1n}c_{n1}\right)\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \\ & & a_{nn} & b_{n1} & & \\ & & c_{1n} & d_{11} & & \\ & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n} & d_{n-1,1} & \cdots & d_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \\ &= \cdots = \prod_{k=1}^{n}\left(a_{kk}d_{n+1-k,n+1-k}-b_{k,n+1-k}c_{n+1-k,k}\right)\end{aligned}$$