



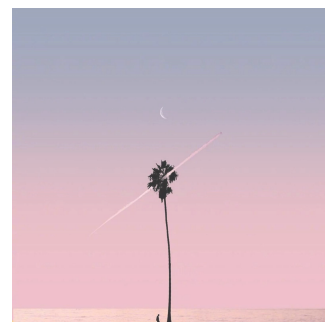
# 线性代数 (B1)

## 习题课讲义

作者：助教-刘玉涵

时间：2024 年秋季学期

版本：1.1



我看见极光撕开夜空，星星从间隙里洒下，洒在我的怀里，洒满我的眼底。

# 前言

## 内容介绍

本讲义是 2024 年秋季学期叶郁老师线性代数 (B1) 班级习题课讲义，由课程助教制作，由于助教水平有限，可能有所疏漏，若发现讲义中的错误与不足之处，欢迎与助教联系交流<sup>1</sup>。

线性代数 (B1) 作为一门基础的数学类通修课程，历来饱受科大学子诟病，原因多集中于其教材编写较差、所授内容不足以满足部分专业后续的学习需求等等，因此也导致许多人认为线性代数仅仅是套公式与概念的暴力计算，但实际上线性代数是一门非常优美的学科，许多概念都可以从良好的几何直观出发，再推广到一般意义下。故本份讲义力求在合适范围内补充一些深入且实用的内容，同时尽可能从几何直观角度对一些概念进行解释，以求加深同学们对线性代数本质与作用的理解。

## 关于课外资料

### (1) 《线性代数》——李尚志

本书为助教修读线性代数 (B2) 课程时陈发来老师班级所采用的教材。此教材内容充实，我们的课程内容可被该教材真包含，且大部分内容叙述清晰、例题丰富，比较适合数学专业初学者学习，可以作为较好的课外补充，学有余力者可以参考。此外该教材有一本配套的《线性代数学习指导》，内含该教材的全部课后习题答案。

### (2) 《线性代数》——李炯生


本书为助教修读线性代数 (B2) 课程时陈洪佳老师班级所采用的教材，本书难度较大，号称“亚洲第一难书”，整本书大部分采用形式化叙述，几乎没有具体数值算例，部分课后习题颇有难度，因此可能不适合初学者学习。此外在网上可以找到一部分该教材课后习题的解答。

### (3) 《线性代数的本质》系列视频——3Blue1Brown

该系列视频制作精良，从几何直观角度对线性代数中各个重要的基本概念作出了阐释，非常有利于初学者对线性代数构建一个初步的认知体系，且视频并不长，闲暇时间便可看完（同时也推荐 3Blue1Brown 的其他视频）。

### (4) 《线性代数与解析几何》——陈发来等

本书为 2023 秋之前线性代数 (B1) 课程所用教材，该教材编写较差，内容与现行讲义基本一致，但其实个人认为对于非数学专业或仅考虑应试的同学，这本书还是足够用的。

 **笔记** 上述相关课外资料已经上传至课程群，大家可以自行查阅

---

<sup>1</sup> 邮箱:liuyh594@mail.ustc.edu.cn    QQ:1820635673

# 目录

第 1 章 作业答案	1
1.1 第二、三周作业 . . . . .	1

# 第1章 作业答案

## 1.1 第二、三周作业

### 习题 1.1 (第二章第 2 题)

当  $a$  为何值时, 下列线性方程组有解? 有解时求出它的通解.

$$(1) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

解 (1). 
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1 \rightarrow r_2, -ar_1 \rightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & a-2 & 2a+2 & 3a+6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2-a)r_2 \rightarrow r_3]{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3a+24}{5} & \frac{4a+52}{5} \end{pmatrix}.$$

故当  $\frac{3a+24}{5} = 0$  且  $\frac{4a+52}{5} = 0$ , 或  $\frac{3a+24}{5} \neq 0$  时, 方程组有解, 易知前者不成立. 故  $\frac{3a+24}{5} \neq 0$ , 即  $a \neq -8$ , 此时:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3a+24}{5} & \frac{4a+52}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{7}{5}r_3 \rightarrow r_2, 2r_3 \rightarrow r_1]{\frac{5}{3a+24}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{-a+32}{3a+24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-20}{3a+24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+52}{3a+24} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{a+8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-20}{3a+24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+52}{3a+24} \end{pmatrix}.$$

故方程组的解为  $X = (x_1, x_2, x_3)^T = (\frac{4}{a+8}, \frac{a-20}{3a+24}, \frac{4a+52}{3a+24})^T$  ( $a \neq -8$ ).

$$(2). \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1 \rightarrow r_3]{r_1 \rightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 \rightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

故只有  $a+1=0$  即  $a=-1$  时, 方程组有解, 此时原方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{令 } x_2 = t, \text{ 解得: } \begin{cases} x_1 = 18t - 5 \\ x_2 = t \\ x_3 = -7t + 2 \end{cases}$$

故方程组的解为  $X = (x_1, x_2, x_3)^T = (18t - 5, t, -7t + 2)^T$  ( $t \in \mathbb{F}$ ).

### 习题 1.2 (第二章第 4 题)

求三次多项式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , 使  $y = f(x)$  的图象经过以下 4 个点:

$$A(1, 2), B(-1, 3), C(3, 0), D(0, 2).$$

解 将四个点代入  $y = f(x)$ , 可得:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2 \\ -a + b - c + d = 3 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + b - c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = -2 \\ d = 2 \end{cases}$$

故解以  $a, b, c$  为未知数的方程组即可

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-27r_1 \rightarrow r_3]{r_1 \rightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_2, -\frac{1}{24}r_3]{9r_2 \rightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_3 \rightarrow r_1]{-r_2 \rightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } f(x) = -\frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x + 2.$$

## 习题 1.3 (第二章第 5 题)

求三次多项式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  满足

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 1, f'(1) = -1.$$

**解** 由  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ , 将四个点代入可得:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2 \\ 3a + 2b + c = -1 \end{cases} \quad \text{及 } c = d = 1 \quad \text{即} \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = -2 \end{cases} \quad \text{及 } c = d = 1$$

故解以  $a, b$  为未知数的方程组即可, 易见  $a = -2, b = 2$ , 故  $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

## 习题 1.4 (第二章第 7 题)

兽医建议某宠物的食谱每天要包含 100 单位的蛋白质, 200 单位的糖, 50 单位的脂肪. 某宠物商店出售四种食品 A, B, C, D. 这四种食物每千克含蛋白质、糖、脂肪的含量 (单位) 如下:

食物	蛋白质	糖	脂肪
A	5	20	2
B	4	25	2
C	7	10	10
D	10	5	6

问是否可以适量配备上述四种食品, 满足兽医的建议.

**解** 根据题意设配置四种食物 A, B, C, D 的份量分别为  $x_1, x_2, x_3, x_4$  千克, 则考虑如下方程组:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 100 \\ 20x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 50 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 10 & 100 \\ 20 & 25 & 10 & 5 & 200 \\ 2 & 2 & 10 & 6 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow[-20r_1 \rightarrow r_2, -5r_1 \rightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_3, \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 5 & -90 & -55 & -300 \\ 0 & -1 & -18 & -5 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \rightarrow r_3]{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & -18 & -11 & -60 \\ 0 & 0 & -36 & -16 & -85 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[18r_3 \rightarrow r_2, -5r_3 \rightarrow r_1]{-\frac{1}{36}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{475}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{85}{36} \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 \rightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{34}{9} & \frac{1105}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{85}{36} \end{pmatrix}.$$

令  $x_4 = t$ , 代入原方程可解得:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{34}{9}t + \frac{1105}{36}, 3t - \frac{35}{2}, -\frac{4}{9}t + \frac{85}{36}, t)$

而由题意可知  $x_i \geq 0, (i = 1, 2, 3, 4)$ , 故  $t \leq \frac{1105}{136}, t \geq \frac{35}{6}, t \leq \frac{85}{16}, t \geq 0$ , 矛盾, 故满足问题的解不存在.