第七周作业答案

李浩哲

2024 年 10 月 23 日

[0]本文档使用 LaTeX 编写，如有错误或笔误欢迎指正

1 第四章习题 (习题三)

7. 计算下列方阵的 k 次方幂，k 为正整数.

$$(2)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad (5)\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

解：(2) 这题没有说 a,b 都是实数，严格来讲应该当做复数来算，但鉴于同学们都是默认用实数来做的，我们先给出 a,b 均为实数的答案 (按实数来做不会扣分)：

$a=b=0$ 时，$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k = O^k = O$

a,b 不同时为 0 时，$\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\right)^k \\ &= (a^2+b^2)^{k/2}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}^k \\ &= (a^2+b^2)^{k/2}\begin{pmatrix} cosk\theta & sink\theta \\ -sink\theta & cosk\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，最后一步用到了旋转矩阵的 k 次幂，即习题 7.(1).

更一般的，当 a,b 为复数时，应先对矩阵相似对角化，再求 k 次幂：(待补)

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，有 $A^k=\begin{pmatrix}1 & ka\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，故

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix}A & I\\ O & A\end{pmatrix}^k\\ &= \begin{pmatrix}A^k & kA^{k-1}\\ O & A^k\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & ka & k & k(k-1)a\\ 0 & 1 & 0 & k\\ 0 & 0 & 1 & ka\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2}$$

(4) 将矩阵拆为两部分：$\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}=I_{n\times n}+J_{n\times n}$，其中 $J_{n\times n}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$，

满足 $J^k=\begin{cases}\begin{pmatrix}O & I_{n-k}\\ O & O\end{pmatrix} & k<n\\ O & k\geq n\end{cases}$，则由二项式定理：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}^k=(I+J)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iJ^i=\begin{pmatrix}1 & C_k^1 & C_k^2 & \cdots & C_k^{n-1}\\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & C_k^2\\ & & & \ddots & C_k^1\\ & & & & 1\end{pmatrix} \tag{3}$$

在上式中，我们并没有讨论 k 和 n 的大小关系，而是使用了更广泛的组合数定义 $C_p^q=0,\forall q>p$ 来使结果简洁.

(5) 注意到 $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T(b_1, b_2, \cdots, b_n) \overset{def}{=} AB$，且 $BA = (b_1, b_2, \cdots, b_n)(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$，有

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}^k = (AB)^k = ABAB\cdots AB = A(BA)(BA)\cdots(BA)B$$

$$= A(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^{k-1}B = (\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^{k-1} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

8. 设 A, B 都是 n 阶对称方阵，且 $AB = BA$. 证明 AB 也是对称方阵.

证明：$(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$，即 AB 为对称方阵.

9. 证明：两个 n 阶上 (下) 三角方阵的乘积仍是上 (下) 三角.

证明：我们只证上三角阵，下三角阵同理.

设 A, B 为任意两个 n 阶上三角方阵，则 $\forall 1 \le j < i \le n$ 有 $A_{ij} = B_{ij} = 0$，令 $C = AB$，则 $\forall 1 \le j < i \le n$，有

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0 \tag{5}$$

即 C 为上三角阵.

注：上三角阵的等价表述是其行标大于列标的元素均为 0.

10. 证明：与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵.

证明：设 A 为与任意 n 阶方阵均乘法可交换的 n 阶方阵，考虑 A 与矩阵 E_{ij}(表示第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素均为 0 的 n 阶方阵) 的乘法，有：

$$AE_{ij} = E_{ij}A \implies a_{ii} = a_{jj}, \quad a_{pi} = a_{jq} = 0 \quad (\forall p \neq i, q \neq j) \tag{6}$$

其中 a_{st} 表示矩阵 A 的第 s 行第 t 列元素. 在式 (6) 中取 $i=1$, 令 j 遍历 1 到 n 可得: $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$ 且 $a_{st}=0\quad \forall s\neq t$. 即 A 为数量阵.

17. 求所有满足 $A^2=O, B^2=I, \overline{C}^TC=I$ 的 2 阶复方阵 A、B、C.

解: (1) 设 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 则由题得到方程组: $a^2+bc=b(a+d)=c(a+d)=bc+d^2=0$, 下面分类讨论:

当 $b=0$ 时 $a=d=0$, c 可取任意复数, 此时 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}$;

当 $b\neq 0$ 时 $a+d=0, bc=-a^2$, 此时 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ -a^2/b & -a\end{pmatrix}$.

(2) 设 $B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 则由题得到方程组: $a^2+bc=bc+d^2=1$, $b(a+d)=c(a+d)=0$, 下面分类讨论:

当 $b=0$ 时, $a=\pm1, d=\pm1$, 有 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ c & -1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$;

当 $b\neq 0$ 时, $a+d=0, c=\frac{1-a^2}{b}$, 即 $B=\begin{pmatrix} a & b\\ \frac{1-a^2}{b} & -a\end{pmatrix}$.

(3) 由 $\overline{C}^TC=I$ 易知 $C\overline{C}^T=I$. 设 $C=\begin{pmatrix} ae^{i\alpha_1} & be^{i\alpha_2}\\ ce^{i\alpha_3} & de^{i\alpha_4}\end{pmatrix}$ 其中 $a,b,c,d\geq 0$ 为模长. 由 $\overline{C}^TC=I$ 及 $C\overline{C}^T=I$ 可得 $a^2+b^2=a^2+c^2=c^2+d^2=b^2+d^2=1$, 设 $a=cos\theta\quad (\theta\in[0,\frac{\pi}{2}])$, 有 $b=c=sin\theta, d=cos\theta$. 下面分类讨论:

$\theta=0$ 时 $C=\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0\\ 0 & e^{i\alpha_4}\end{pmatrix}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $C=\begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha_2}\\ e^{i\alpha_3} & 0\end{pmatrix}$

$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时进一步由题有 $e^{i(\alpha_2-\alpha_1)}+e^{i(\alpha_4-\alpha_3)}=0$, 得 $\alpha_2=\alpha_1+\alpha_4-\alpha_3-\pi$, 故有 $C=\begin{pmatrix} cos\theta e^{i\alpha_1} & -sin\theta e^{i(\alpha_1+\alpha_4-\alpha_3)}\\ sin\theta e^{i\alpha_3} & cos\theta e^{i\alpha_4}\end{pmatrix}$, 这里将第一行第二列元素的辐角用其他三个角度表示是为了与二阶旋转矩阵形式统一, 特别地, 当四个辐角均取 0 时 C 即为旋转矩阵.

下面给出丘维声《高等代数》下册对本题的证法:

例 11 求出所有 2 级酉矩阵。

解 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

是酉矩阵，则 $A^{-1}=A^*$。于是有

$$\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{bmatrix}.$$

• 516 • 第 10 章 具有度量的线性空间

由此得出，$a_{22}=|A|\overline{a_{11}}$， $a_{12}=-|A|\overline{a_{21}}$。

由于 A 的列向量组是 $\mathbf{C}^2$ 的一个标准正交基，因此 $|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1$。从而 $(|a_{11}|, |a_{21}|)$ 是单位圆上的一个点且在第 1 象限或在 x 轴、y 轴的正半轴上，于是存在 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，使得 $|a_{11}|=\cos\theta$，$|a_{21}|=\sin\theta$。因此 $a_{11}=\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$a_{21}=\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，其中 $0\leqslant\theta_j<2\pi$，$j=1,2$。

据本套教材上册习题 4.6 第 18 题，酉矩阵 A 的行列式的模为 1，因此 $|A|=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}$，其中 $0\leqslant\theta_3<2\pi$，于是 $a_{22}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}\cos\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$，$a_{12}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$。从而

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} & -\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2} \\ \sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} & \cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} \end{bmatrix}. \tag{71}$$

直接验证知道，形如(71)的矩阵都是酉矩阵。于是(71)式给出了所有的 2 级酉矩阵，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta_j<2\pi$，$j=1,2,3$。

可以把(71)式的 A 写成下述形式：

$$A=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3} \end{bmatrix}. \tag{72}$$

更简单的做法是通过生成元来构造所有二阶酉矩阵：(待补)

30. 设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^3=I_n$. 计算 $\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024}$.

解:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024} &= \left(\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^2\right)^{1012} \\
&= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^{1012} \\
&= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^{1011}\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^3\right)^{337}\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I_{2n}\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7}
$$