1.8 第十周作业

习题 1.56 (第五章第 19 题)

求下列向量组的极大无关组与秩：

(1) $\boldsymbol{a}_1 = (3, -2, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (27, -18, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 5, 8)$.

(2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, -1, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_5 = (2, 1, 5, 6)$.

(3) $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, 3, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_5 = (6, 5, 4, 3)$.

解 (1) 假设 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 = 0$，其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 3 & 27 & -1 \\ -2 & -18 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{进行初等行变换，得} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 秩为 2，且有 $\boldsymbol{a}_2 = 9\boldsymbol{a}_1$，则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ 或 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 构成向量组的极大无关组。

(2) 假设 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 + k_4\boldsymbol{a}_4 + k_5\boldsymbol{a}_5 = 0$，其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{进行初等行变换，得} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ 秩为 3，且 $\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$，则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ 可构成向量组的极大无关组。

(3) 假设 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 + k_4\boldsymbol{a}_4 + k_5\boldsymbol{a}_5 = 0$，其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{进行初等行变换，得} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ 秩为 2，且五个向量中任意两个都线性无关，故任意两个向量均可构成向量组的极大无关组。

习题 1.57 (第五章第 25 题)

求下列矩阵的秩，并求出它的行空间、列空间及零空间的一组基。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

解 在两问中均记矩阵为 A，其四个行向量为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$，四个列向量为 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$

(1) 进行初等行变换（不交换行）得：$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，矩阵秩为 3，则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 可作为行空间的一组基。

进行初等列变换（不交换列）得：$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 可作为列空间的一组基。

利用行变换后的结果可得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集为 $(8,30,49,36)^Tt, t\in\mathbb{R}$，则 $(8,30,49,36)^T$ 可作为零空间的一组基。

(2) 进行初等行变换（不交换行）得：$\begin{pmatrix}0&3&-2&2\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，矩阵秩为 2，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 可作为行空间的一组基。

进行初等列变换（不交换列）得：$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-1&0&0&0\\4&0&1&0\\5&0&3&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3$ 可作为列空间的一组基。

利用行变换后的结果可得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集为 $(-5,2,3,0)^Tt+(-1,-2,0,3)^Ts$，其中 $t,s\in\mathbb{R}$，则 $(-5,2,3,0)^T$ 与 $(-1,-2,0,3)^T$ 可作为零空间的一组基。

习题 1.58 (第五章第 28 题)

证明：n 阶方阵 A 可逆 $\iff \operatorname{rank}(A)=n \iff A$ 的行向量线性无关 $\iff A$ 的列向量线性无关

证明 n 阶方阵 A 可逆 $\iff \det(A)\neq 0 \iff \operatorname{rank}(A)=n$，同时由于矩阵的秩 = 行秩 = 列秩，则 $\operatorname{rank}(A)=n \iff A$ 的行向量线性无关 $\iff A$ 的列向量线性无关，命题得证。

习题 1.59 (第五章第 29 题)

设矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 的秩为 r，则 A 的不等于零的 r 阶子式所在行 (列) 构成 A 的行 (列) 向量的极大无关组。

证明 由对称性，仅考虑行向量情形即可。通过交换行的位置，可以将不为 0 的 r 阶子式所在的行调整到前 r 行，故不妨设 $A=\begin{pmatrix}A_r&B\\C&D\end{pmatrix}$，其中 $\det(A_r)\neq 0$，则 A_r 中 r 个 r 维行向量线性无关，则 $(A_r\ \ B)$ 作为其加长向量组也线性无关，再由矩阵的秩为 r，可知前 r 行即为行向量的极大无关组。

习题 1.60 (第五章第 31 题)

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基，向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 有关系式

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)T.$$

证明：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基当且仅当 T 为可逆方阵。

证明 设 $T=(t_{ij})_{n\times n}$，则 $\boldsymbol{b}_j=\sum\limits_{i=1}^n t_{ij}\boldsymbol{a}_i$，而 $(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基当且仅当它们线性无关，即 $\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j\boldsymbol{b}_j=0$ 只有零解，也即 $\sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{i=1}^n\lambda_j t_{ij}\boldsymbol{a}_i=\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j t_{ij}\right)\boldsymbol{a}_i=0$ 只有零解，由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是基，则 $\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j t_{ij}\right)\boldsymbol{a}_i=0$ 只有 $\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j t_{ij}=0, i=1,\cdots,n$，即 $T\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T$，其只有零解当且仅当 T 可逆，命题得证。