

## 1.12 第十四周作业

## 习题 1.86 (第六章第 13 题 (2)(4)(6))

求下列矩阵的全部特征值和特征向量

$$(2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

解 (2) 矩阵的特征方程写为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 0 \quad (1.71)$$

解得  $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$ . $\sin\theta = 0$  时矩阵为  $\pm I$ , 对应的特征值分别为  $\pm 1$ , 对应的特征向量为所有非零向量; $\sin\theta \neq 0$  时:对于  $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ , 设特征向量为  $(x_1, x_2)^T$ , 有

$$\begin{cases} i\sin\theta x_1 + \sin\theta x_2 = 0 \\ -\sin\theta x_1 + i\sin\theta x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.72)$$

解得  $x_2 = -ix_1$ . 即  $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$  对应的特征向量为  $c_1(1, -i)^T, c_1 \neq 0$ ;对于  $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$ , 同理解得  $x_2 = ix_1$ , 对应的特征向量为  $c_2(1, i)^T, c_2 \neq 0$ .

(4) 矩阵的特征方程写为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3 = 0 \quad (1.73)$$

解得  $\lambda = 2$ , 为三重根.设特征向量为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ , 有  $A(x_1, x_2, x_3)^T = 2(x_1, x_2, x_3)^T$ , 即

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad (1.74)$$

解得特征向量  $c_1(2, 1, 0)^T + c_2(-1, 0, 1)^T$ .

(6) 矩阵的特征方程写为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 2) = 0 \quad (1.75)$$

解得  $\lambda = 2, \pm\sqrt{2}$ , 其中 2 为二重根.对于  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ , 列方程解得对应的特征向量为  $c_1(1, 0, 1, 0)^T + c_2(1, 0, 0, 1)^T, c_1, c_2 \neq 0$ ;对于  $\lambda_3 = \sqrt{2}$ , 特征向量为  $c_3(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} + 1, 1)^T, c_3 \neq 0$ ;对于  $\lambda_4 = -\sqrt{2}$ , 特征向量为  $c_4(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1, 1)^T, c_4 \neq 0$ .

## 习题 1.87 (第六章第 14 题)

给定  $\mathbb{R}^2$  上的线性变换  $\mathcal{A}(x, y)^T = (3x + 2y, 2x + y)^T$ .  $\mathcal{A}$  将单位圆  $C$  映射为椭圆  $C'$ . 求椭圆  $C'$  的长短半轴方向与长度, 以及椭圆的面积.解 易知线性变换对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求得其特征值为  $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$ , 对应的特征向量分别

为  $\alpha = (1, \frac{\sqrt{5}-1}{2})^T, \beta = (1, -\frac{\sqrt{5}+1}{2})^T$ . 可以看到  $\alpha \perp \beta$ , 则变换相当于沿这两个方向进行伸缩: 在  $\alpha$  方向拉伸为原来的  $2 + \sqrt{5}$  倍, 即长半轴方向沿  $\alpha$ , 长半轴长度  $a = 2 + \sqrt{5}$ ; 在  $\beta$  方向反向压缩为原来的  $\sqrt{5} - 2$  倍, 即短半轴方向沿  $\beta$ , 短半轴长度  $b = \sqrt{5} - 2$ . 椭圆面积为  $S = \pi ab = \pi$ .

下面直接给出这个线性变换的图示, 以便于更好地理解线性变换与特征值, 特征向量的联系:

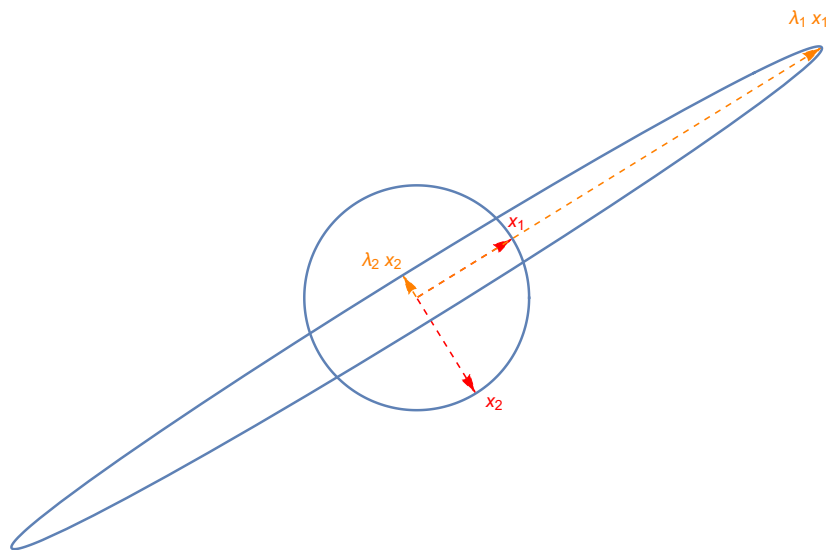


图 1.1: 一般的二维伸缩变换: 由两个垂直的特征向量及其特征值可完全确定变换得到的椭圆

#### 习题 1.88 (第六章第 15 题)

设  $A$  是可逆方阵. 证明: 若  $\lambda$  是  $A$  的一个特征值, 则  $\lambda^{-1}$  是  $A^{-1}$  的特征值, 且对应的特征向量相同.

**证明** 由于  $A$  可逆, 故  $\det A = \prod_i \lambda_i \neq 0$ , 即  $A$  的特征值均不为零.

设  $\alpha$  为  $A$  关于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则有

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \lambda^{-1}A\alpha = \alpha \quad (1.76)$$

两边同时左乘  $A^{-1}$ , 得到

$$\lambda^{-1}\alpha = A^{-1}\alpha \quad (1.77)$$

则命题成立.

#### 习题 1.89 (第六章第 17 题)

设三阶方阵  $A$  的特征多项式为  $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ . 求方阵  $3A + 2I$  的特征值与行列式.

**解** 由特征多项式得  $A$  的三个特征值:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ , 由于单位阵  $I$  的特征向量为所有非零向量, 故  $3A + 2I$  的特征向量与  $A$  的特征向量相同, 对应地, 特征值变为  $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 3 \times 1 + 2 = 5, \lambda'_3 = 3 \times 2 + 2 = 8$ . 行列式为  $\det(3A + 2I) = \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 = 200$ .

**注** 事实上, 同学们可以自行证明以下性质:

若  $\alpha$  为可逆矩阵  $A$  属于  $\lambda$  的特征向量, 则  $\alpha$  也是  $kA, A^2, aA + bI, A^m, f(A), A^{-1}, A^*$  分别属于  $k\lambda, \lambda^2, a\lambda + b, \lambda^m, f(\lambda), \lambda^{-1}, \frac{|A|}{\lambda}$  的特征向量.

## 习题 1.90 (第六章第 18 题)

- (1) 若  $A^2 = I$ , 证明:  $A$  的特征值只能是  $\pm 1$ ;  
 (2) 设  $n$  阶实方阵  $A$  满足  $A^T = -A$ , 证明  $A$  的特征值为零或纯虚数.

**证明** (1) 设  $A$  的特征值为  $\lambda$ , 其对应的特征向量为  $\alpha$ , 则有

$$A^2\alpha = A\lambda\alpha = \lambda^2\alpha \quad (1.78)$$

而由  $A^2 = I$  得

$$A^2\alpha = I\alpha = \alpha \quad (1.79)$$

故  $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ .

(2) 设  $A$  的特征值为  $\lambda$ , 其对应的特征向量为  $\alpha$ . 对特征向量做共轭转置得到  $\bar{\alpha}^T$ , 将其作用在  $A\alpha = \lambda\alpha$  两端, 得到

$$\bar{\alpha}^T A\alpha = \lambda \bar{\alpha}^T \alpha = \lambda |\alpha|^2 \quad (1.80)$$

将上式两边同时求共轭转置, 由于  $A$  为实方阵, 其共轭转置就是转置:

$$\bar{\alpha}^T A^T \alpha = \bar{\lambda} |\alpha|^2 \Rightarrow -\bar{\alpha}^T A\alpha = \bar{\lambda} |\alpha|^2 \quad (1.81)$$

将两式相加得

$$(\lambda + \bar{\lambda}) |\alpha|^2 = 0 \quad (1.82)$$

由于  $\alpha$  为特征向量, 故  $|\alpha|^2 \neq 0$ , 故  $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ , 命题成立.

## 习题 1.91 (第六章第 26 题)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  有三个线性无关的特征向量, 求  $x$  和  $y$  应满足的条件.

**解**  $A$  的特征方程写为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0 \quad (1.83)$$

即  $A$  的三个特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , 其中 1 为二重根, 则命题等价于求特征值 1 对应的特征子空间维数为 2 的条件, 即令矩阵  $(I-A)$  的秩为 1, 下面对其进行线性变换:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

易见令其秩为 1 等价于  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -x & -y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0$ .

## 习题 1.92 (第六章第 27 题)

设矩阵  $A$  和  $B$  相似, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

- (1) 求  $x$  和  $y$  的值;

(2) 求可逆矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT = B$ .

解 (1)  $A \sim B \Rightarrow f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$ . 即

$$\lambda^3 + (1-x)\lambda^2 + (-x-4)\lambda + 2x - 4 = \lambda^3 + (-1-y)\lambda^2 + (y-2)\lambda + 2y \quad (1.85)$$

解得  $x = 0, y = -2$ .

(2) 三个特征值为  $-1, 2, -2$ , 分别求得对应的三个特征向量  $(0, 2, -1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, -1)^T$ , 则  $T$  可取为 (结果不唯一):

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### 习题 1.93 (第二章第 28 题)

设  $n$  阶方阵  $A \neq 0$ , 满足  $A^m = 0$ , 其中  $m \geq 2$  为正整数.

(1) 求  $A$  的特征值;

(2) 证明:  $A$  不能相似于对角阵;

(3) 证明:  $|I + A| = 1$ .

解 (1) 设  $A$  特征值为  $\lambda$ , 其对应的特征向量为  $\alpha$ , 则有

$$A^m \alpha = \lambda A^{m-1} \alpha = \cdots = \lambda^m \alpha \quad (1.86)$$

而由题有  $A^m \alpha = 0, \alpha \neq 0$ , 故  $\lambda = 0$ .

(2) 用反证法, 若  $A$  可相似于对角阵, 则此对角阵为零矩阵, 则  $A$  为零矩阵, 矛盾.

(3) 存在一个  $n$  阶可逆方阵  $T$  使得  $T^{-1}AT$  为上三角阵, 且其对角元素为  $A$  的特征值, 即均为 0. 故  $I + T^{-1}AT$  为对角线元素均为 1 的上三角阵, 即  $|I + T^{-1}AT| = 1$ , 则

$$|I + A| = |T(I + T^{-1}AT)T^{-1}| = |T||I + T^{-1}AT||T^{-1}| = 1 \quad (1.87)$$

另解:  $A$  的特征值均为 0, 其为特征多项式的  $n$  重根, 则特征多项式为  $|\lambda I - A| = \lambda^n$ . 取  $\lambda = -1$  得  $(-1)^n |I + A| = (-1)^n$ , 即  $|I + A| = 1$ . 由此看到, 利用特征多项式可以简化一些相关行列式的计算.

### 习题 1.94 (第六章第 29 题 (2)(3))

判断下列矩阵  $A$  是否可以对角化? 若可以, 试求变换矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT$  为对角阵.

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad (3) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 (2) 特征多项式为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6) \quad (1.88)$$

即特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ .

对于二重特征值 2, 有  $\text{rank}(2I - A) = 1$ , 则其特征子空间维数为 2, 即  $A$  可对角化, 两个基 (解方程组得到) 可写为  $(1, 0, 1)^T$  和  $(1, -1, 0)^T$ .

又特征值 6 的一个特征向量写为  $(1, -2, 3)^T$ , 故变换矩阵  $T$  (不唯一) 可写为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) 特征多项式为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \quad (1.89)$$

即特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$ .

对于二重特征值 1, 有  $\text{rank}(I - A) = 2$ , 则其特征子空间维数为 1, 即  $A$  不能对角化.

#### 习题 1.95 (第六章第 30 题)

设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $A$  有  $n$  个互异的特征值且  $AB = BA$ . 证明  $B$  相似于对角阵.



**证明** (这玩意实际上就是期中考试前那天晚上群里有人问到的往年题.)

由于  $A$  有  $n$  个互异特征值, 故  $A$  可对角化, 有  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C$ . 记  $T^{-1}BT = D$ , 我们下面证明  $D$  为对角阵.

$$AB = BA \Rightarrow T^{-1}ABT = T^{-1}BAT \Rightarrow T^{-1}ATT^{-1}BT = T^{-1}BTT^{-1}AT \Rightarrow CD = DC.$$

即  $D$  与对角阵  $C$  可交换, 考虑其非对角元素  $d_{ij}, i \neq j$ , 有  $\lambda_i d_{ij} = \lambda_j d_{ij}$ , 由于  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , 故  $d_{ij} = 0$ , 所以  $D$  为对角阵, 命题成立.