1.13 第十五周作业

习题 1.96 (第六章第 47 题)

设 $A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\10&-4&5\\5&-4&6\end{pmatrix}$，求方阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为 Jordan 标准形。

解 A 的特征多项式 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，则 A 的特征值为 $2,1,1$.
对于 $\lambda=1$，有 $rank(A-I)=rank(J-I)=2$，故 $J=diag(2,J_2(1))$，设 $T=(T_1,T_2,T_3)$ 满足 $AT=TJ$.
则 $AT_1=2T_1,AT_2=T_2,AT_3=T_2+T_3$，则 $(A-2I)T_1=0,(A-I)T_2=0,(A-I)T_3=T_2,(A-I)^2T_3=0$.
计算得 $T_1=(4t,15t,10t)^T,T_2=(s,5s,3s)^T$，由 $(A-I)^2T_3=0$ 得 $T_3=(2p-q,q,p)^T$，代入 $(A-I)T_3=T_2$
可得满足条件的方阵 T 的通解为 $T=\begin{pmatrix}4t&s&2p-q\\15t&5s&q\\10t&3s&p\end{pmatrix}$，其中 $5p-3q=s$.

习题 1.97 (第六章第 48 题)

设方阵 A 满足 $A^2=A$，用矩阵的 Jordan 标准形证明：$tr(A)=rank(A)$.

证明 任取 A 的一个特征值 λ，以及一个对应的特征向量 $\boldsymbol{x}$，则有 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}=A^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，而 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda=0$ 或 1，即 A 的特征值只能为 0 或 1，则可以设 A 的 Jordan 标准形为 $J=diag(J_{m_1}(1),\cdots,J_{m_p}(1),J_{k_1}(0),\cdots,J_{k_q}(0))$，并且 $P^{-1}AP=J$，其中 P 是可逆方阵，由 $A^2=A$，则 $tr(A)=tr(J)=p,rank(A)=rank(A^2)=rank(J^2)$，且 $J^2=P^{-1}A^2P=P^{-1}AP=J$，而 $J^2=diag(J_{m_1}^2(1),\cdots,J_{m_p}^2(1),J_{k_1}^2(0),\cdots,J_{k_q}^2(0))=J$，那么只能 $k_1=\cdots=k_q=1$，即特征值 0 对应的 Jordan 块都是 1 阶的，也就是 0，那么 $rank(A)=rank(J)=p$.

习题 1.98 (第七章第 1 题)

已知 $\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,3,1,-1),\alpha_3=(-1,-1,-2,2)$.
(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的长度及彼此之间的夹角。
(2) 求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量。

解 (1) 计算得 $|\alpha_1|=\sqrt{7},|\alpha_2|=\sqrt{15},|\alpha_3|=\sqrt{10}$，以及 $\alpha_1\cdot\alpha_2=6,\alpha_1\cdot\alpha_3=1,\alpha_2\cdot\alpha_3=-9$. 从而有：

$$\theta_{12}=\arccos\left(\frac{6}{\sqrt{105}}\right),\ \theta_{13}=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{70}}\right),\ \theta_{23}=\arccos\left(-\frac{9}{5\sqrt{6}}\right).$$

(2) 这等价于求解方程组：$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\2x_1+3x_2+x_3-x_4=0\\-x_1-x_2-2x_3+2x_4=0\end{cases}$，通解为：$(-5,3,1,0)^Tt+(5,-3,0,1)^Ts$.

习题 1.99 (第七章第 3 题)

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个向量，它们之间的夹角为 θ，证明：
(1)（余弦定理）$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$.
(2)（平行四边形定理）$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=2(|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2)$

(3)（菱形对角线定理）若 $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}|$，则 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\perp(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$.

证明 (1) $RHS = |\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 = LHS$.

(2) $LHS = |\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 2(|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2) = RHS$.

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2 = 0$，故 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\perp(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$.

习题 1.100 (第七章第 5 题)

用 Schmidt 正交化方法构造标准正交向量组：

(1) $(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$;

(2) $(1,1,1,2),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$.

解 以下均设三个向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

(1) $|\alpha_1| = 1$，则取 $e_1 = \alpha_1$，令 $\beta_2 = \alpha_2-(\alpha_2,e_1)e_1 = (0,1,0), |\beta_2| = 1$，则取 $e_2 = \beta_2$.

令 $\beta_3 = \alpha_3-(\alpha_3,e_1)e_1-(\alpha_3,e_2)e_2 = (1,0,0), |\beta_3| = 1$，则取 $e_3 = \beta_3$.

(2) $|\alpha_1| = \sqrt{7}$，则取 $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2)$，令 $\beta_2 = \alpha_2-(\alpha_2,e_1)e_1 = (\frac{4}{7},\frac{4}{7},-\frac{38}{7},\frac{15}{7}), |\beta_2| = \frac{9\sqrt{21}}{7}$，则取 $e_2 = \frac{1}{9\sqrt{21}}(4,4,-38,15)$，令 $\beta_3 = \alpha_3-(\alpha_3,e_1)e_1-(\alpha_3,e_2)e_2 = \alpha_3+\frac{1}{7}\alpha_1+\frac{389\times 7}{1701}\beta_2$,，将 β_3 单位化，得到 $e_3 = \frac{1}{\sqrt{13449}}(\frac{493\sqrt{2}}{9},\frac{743\sqrt{2}}{18},-\frac{133\sqrt{2}}{18},-\frac{133\sqrt{2}}{3})$.

习题 1.101 (补充题)

设 $(V,(\cdot,\cdot))$ 为内积空间，$\mathbb{B}_1 = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n), \mathbb{B}_2 = (\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为两组基，$(\beta_1,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，设 $(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2$ 下的度量矩阵分别为 G_1,G_2，证明：$G_2 = P^TG_1P$.

证明 设 $P = (p_{ij})_{n\times n}$，则 $\beta_k = p_{1k}\alpha_1+\cdots+p_{nk}\alpha_n, k = 1,\cdots,n$，记 $(G_1)_{ij} = (\alpha_i,\alpha_j) = g_{ij}$，则 $(G_2)_{ij} = (\beta_i,\beta_j) = (p_{1i}\alpha_1+\cdots+p_{ni}\alpha_n, p_{1j}\alpha_1+\cdots+p_{nj}\alpha_n) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{mi}g_{mk}p_{kj} = (P^TG_1P)_{ij}$，故 $G_2 = P^TG_1P$.

习题 1.102 (第七章第 6 题)

设在 $\mathbb{R}^3$ 中，基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

试求 $\mathbb{R}^3$ 中由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 表示的一组标准正交基。

解 可以看出 $|\boldsymbol{a}_1| = 1, |\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 正交，故取 $e_1 = \boldsymbol{a}_1, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_2$，令 $\beta_3 = \boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3,e_1)e_1-(\boldsymbol{a}_3,e_2)e_2 = \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，则 $|\beta_3|^2 = |\boldsymbol{a}_3|^2+|\boldsymbol{a}_1|^2+2\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3 = 1$，则可取 $e_3 = \beta_3 = \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3$. e_1,e_2,e_3 即为一组标准正交基。

习题 1.103 (第七章第 10 题)

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，令 $\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)$,

$\boldsymbol{a}_3=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)$ 证明：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

证明 由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_3$ 是标准正交基，则 $|\boldsymbol{a}_1|^2=\dfrac{1}{9}(4|\boldsymbol{e}_1|^2+4|\boldsymbol{e}_2|^2+|\boldsymbol{e}_3|^2)=1$，故 $|\boldsymbol{a}_1|=1$，类似有 $|\boldsymbol{a}_2|=|\boldsymbol{a}_3|=1$. 并且 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}=0$，类似有 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3=0$，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

习题 1.104 (第七章第 12 题)

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，证明：

(1) 对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\limits_{i=1}^n(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_i)$.

(2) 对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n,|\boldsymbol{a}|^2=\sum\limits_{i=1}^n(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_i)^2$.

证明 (1) 由于 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是标准正交基，可设 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}=\mu_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\mu_n\boldsymbol{a}_n$，则 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_i)=\lambda_i,(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_i)=\mu_i$，则 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n,\mu_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\mu_n\boldsymbol{a}_n)=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\mu_i=\sum\limits_{i=1}^n(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_i)$.

(2) 在 (1) 中令 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 即得。

习题 1.105 (第七章第 14 题)

写出所有 3 阶正交矩阵，它的元素是 0 或 1.

解 由于正交矩阵每行每列均为单位向量，则每行每列均有且只有一个 1，故满足要求的正交矩阵只能是标准单位向量 $e_1.e_2,e_3$ 的排列，共以下 6 个：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

习题 1.106 (第七章第 16 题)

若 $\boldsymbol{a}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 单位向量，证明：$Q=I_n-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 是一个正交阵。当 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时，具体求出 Q.

证明 由于 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，故 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=1$，且容易看出 $Q=Q^T$，故：

$$QQ^T=Q^TQ=(I_n-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)(I_n-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)^T=I_n-4\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T+4\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T=I_n-4\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T+4\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T=I_n.$$

从而 Q 是一个正交矩阵。

解 代入计算得到 $Q=I_3-\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.