第九周作业答案

李浩哲

2024 年 11 月 12 日

[0]本文档使用 LaTeX 编写，如有错误或笔误欢迎指正

1 第四章习题（习题三）

37. 设 A 是 n 阶可逆方阵，a, b 为 n 维列向量. 证明：$A + ab^T$ 可逆当且仅当 $1 + b^T A^{-1} a \neq 0$. 且 $A + ab^T$ 可逆时，$(A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^TA^{-1}}{1+b^TA^{-1}a}$.

证明：(1) 先证 $A + ab^T$ 可逆 $\iff 1 + b^T A^{-1} a \neq 0$.

$$\begin{aligned} A + ab^T \text{ 可逆 } &\iff det(A + ab^T) \neq 0 \\ &\iff det(A)det(I + A^{-1}ab^T) \neq 0 \\ &\iff det(I + A^{-1}ab^T) \neq 0 \end{aligned}$$

注意到 $det(I_m - PQ) = det(I_n - QP)$，则有 $det(I + A^{-1}ab^T) = det(1 + b^T A^{-1} a)$

故 $A + ab^T$ 可逆 $\iff 1 + b^T A^{-1} a \neq 0$.

(2) 再求 $A + ab^T$ 的逆.

对这种验证类的题目，可以直接把题目给的结果代入验证，这里不再赘述. 下面给出直接求逆的方法.

$(A + ab^T)^{-1} = (A(I + A^{-1}ab^T))^{-1} = (I + A^{-1}ab^T)^{-1}A^{-1} \overset{def}{=} BA^{-1}$

则有

$$(I + A^{-1}ab^T)B = I \to B + A^{-1}ab^TB = I \tag{1}$$

两边同时左乘 $A^{-1}ab^T$ 得

$$\begin{aligned} &A^{-1}ab^TB + A^{-1}ab^TA^{-1}ab^TB = A^{-1}ab^T \to A^{-1}ab^TB + A^{-1}a(b^TA^{-1}a)b^TB = A^{-1}ab^T \\ &\to (1 + b^TA^{-1}a)A^{-1}ab^TB = A^{-1}ab^T \to A^{-1}ab^TB = \frac{A^{-1}ab^T}{1 + b^TA^{-1}a} \end{aligned} \tag{2}$$

上式利用了 $b^TA^{-1}a$ 是数，可以随意交换位置

带回式 (1) 得 $B = I - \frac{A^{-1}ab^T}{1+b^TA^{-1}a}$，即 $(A + ab^T)^{-1} = BA^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^TA^{-1}}{1+b^TA^{-1}a}$.

38. 设 $A \in F^{m\times m}, B \in F^{n\times n}, C \in F^{n\times m}$, 且 A 为对称可逆方阵. 证明：存在可逆方阵 P 使得 $P\begin{pmatrix} A & C^T \\ C & B \end{pmatrix}P^T$ 为准对角阵.

证明：利用 Schur 公式 $\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ 进行对角化：

$$\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C^T \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C^T \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & B - CA^{-1}C^T \end{pmatrix} \tag{3}$$

易见左式最左边的矩阵即为满足要求的 P:

$det(P) = det(\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}) = 1$，故可逆;

$$P^T = \begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} I & (-CA^{-1})^T \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C^T \\ & I \end{pmatrix}.$$

40. 计算下列矩阵的秩.

$$(1)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$$

解：(1) 进行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 39/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

经变换后的矩阵行列式为 0，且容易找到一个非零三阶子式：取第 1、2、3 行和第 1、2、4 列，故矩阵秩为 3

其实也可以直接从原矩阵出发：观察易知第一行和第四行相等，故其行列式为 0，再找到一个非零三阶子式即可说明秩为 3

但进行一定程度的初等变换可以让我们更容易地找到非零子式：找对角元均非零的上三角子式即可.

(2) 进行初等变换：(一般步骤应遵循高斯消元法的过程，由本题的特殊结构给出一种更简单的变换方法)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{依次减去上一行}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&9&16\\3&5&7&9\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&4&6\\0&3&8&15\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&2&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\tag{5}$$

化简后的矩阵行列式为 0，容易找到其左上角的三阶子式不为零，故秩为 3.

41. 对于 a,b 的各种取值，讨论实矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&a\\3&b&9\end{pmatrix}$ 的秩.

解：进行初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&a\\3&b&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&a-6\\0&b-6&0\end{pmatrix}\tag{6}$$

对 a,b 的取值进行讨论如下：

(1) a,b 均不为 6 时，秩为 3;

(2) a,b 有一个 6 时，秩为 2;

(3) a,b 均为 6 时，秩为 1.

42. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=I$. 求方阵 $diag(I+A,I-A)$ 的相抵标准型.

解：进行分块初等变换：

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}I+A&\\O&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I+A&O\\I+A&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I+A&O\\2I&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O&(I+A)(I-A)/2\\2I&I-A\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}O&(I-A^2)/2\\2I&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O&O\\2I&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O&O\\2I&O\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_n&O\\O&O\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{7}$$

即相抵标准型为 $\begin{pmatrix}I_n&O\\O&O\end{pmatrix}$

注：相抵标准型要和原矩阵大小相同，有的同学这道题直接写的 I_n，这是不正确的.

46. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I$, 证明：$rank(I+A)+rank(I-A)=n$.

法一：由 $rank(A)+rank(B)=rank(diag(A,B))$ 知本题与 42 题等价.

法二：利用秩不等式：

(1) $rank(I+A)+rank(I-A)\geq rank((I+A)+(I-A))=n$

(2) 由 Sylvester 不等式：

$rank(I+A)+rank(I-A)\leq rank((I+A)(I-A))+n=rank(O)+n=n$

综合 (1)(2) 知命题成立.