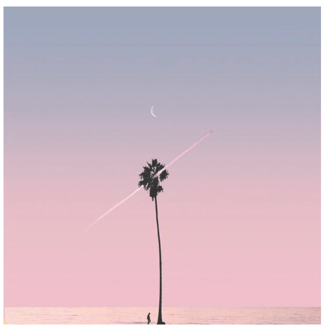
线性代数 (B1)
习题课讲义



作者：助教-崔平凡

时间：2024 秋
版本：1.0

我看见极光撕开夜空，星星从间隙里洒下，洒在我的怀里，洒满我的眼底。

目录

第 1 章 作业答案

1.1 第四次作业

习题 1.1 (第三章第 1 题)

计算下列行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (3)\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix}$$

$$(4)\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (5)\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} \quad (6)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -40.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 15 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -20.$$

(3)

(法一) $\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & x-y & x-y \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = (x-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = (x-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$

(法二)可以将行列式

$$f(x) \triangleq \begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix}$$

看成系数为 $\mathbb{F}[y,z]$ 关于 x 的多项式. 根据行列式的完全展开式知 $f(x)$ 为关于 x 的一次多项式且有两个根 y, z. 故 $f(x) = 0$.

(4)

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} & & a_{2,n-1} \\ & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \cdots = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}.$$

(5) 考虑如下多项式函数

$$f(x) \triangleq \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$

由行列式的完全展开式知 $f(x)$ 为关于 x 的二次多项式. 易知 $f(b)=f(c)=0$, 故可设 $f(x)=\lambda(x-b)(x-c)$.

$$\lambda bc = f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ b^2 & b^2+b & b^2 \\ c^2 & c^2+c & c^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} b^2 & b^2+b \\ c^2 & c^2+c \end{vmatrix} = 4bc(b-c)$$

故 $\lambda = 4(b-c)$, 于是 $f(x)=4(b-c)(x-b)(x-c)$. 带入 $x=a$ 有

$$f(a) = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(b-c)(a-b)(a-c).$$

(6) 由行列式的 *Laplace* 展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ d_3 & d_4 & 0 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)c_3d_4e_5.$$

习题 1.2 (第三章第 2 题)

在三维直角坐标系中，已知点 A, B, C, D 的坐标分别是（1，1，0)，（3，1，2)，（0，1，3)，（2，2，4）. 求四面体 $ABCD$ 的体积及各个面的面积.

解 $\overrightarrow{AB}=(2,0,2), \overrightarrow{AC}=(-1,0,3), \overrightarrow{AD}=(1,1,4), \overrightarrow{BC}=(-3,0,1), \overrightarrow{BD}=(-1,1,2)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0,-8,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2,-6,2)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-3,7,-1)$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1,5,-3)$$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=4, S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{11}, S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{59}}{2}, S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|=\frac{\sqrt{35}}{2}$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{6}\text{abs}(\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix})=\frac{4}{3}.$$

习题 1.3 (第三章第 3 题)

将行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

展开为关于 x 的多项式.

解

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -x^2+4x-3 & 2-x & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & x^2-4x+3 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x^2-4x+3 & x-2 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}=(x^2-4x+3)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}-(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix}=(x^2-4x+3)^2-(x-2)^2$$

$=(x^2-3x+1)(x^2-5x+5)$.

习题 1.4 (第三章第 4 题)

A 为 n 阶方阵，λ 为常数. 证明：$\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$

证明 由矩阵数乘的定义及行列式映射的多重线性性知 $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.

习题 1.5 (第三章第 5 题)

方阵 A 称为反对称方阵，如果它的转置方阵等于 $-A$. 证明：奇数阶反对称方阵的行列式为零.

证明 由第四题知 $\det(A)=\det(A^T)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$. 由于 n 为奇数，因此 $\det(A)=-\det(A)$. 故 $2\det(A)=0$, 即 $\det(A)=0$.

1.2 第九次作业

习题 1.6 (第五章第 1 题)

设 $\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1), \boldsymbol{a}_2=(2,0,3), \boldsymbol{a}_3=(2,1,0)$ 是三维几何空间中的三个向量. 能否将其中某一个向量写成其它两个向量的线性组合? 这三个向量是否共面?

解 注意到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

故向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，因此其中任一向量不能表示为其它两个向量的线性组合，进而这三个向量不共面.

习题 1.7 (第五章第 3 题)

在 $\mathbb{F}^4$ 中，判断向量 $\boldsymbol{b}$ 能否写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的线性组合. 若能，写出一种表达方式.

(1) $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 3, 0, -5), \boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 7, -3), \boldsymbol{a}_3 = (-4, 1, -2, 6), \boldsymbol{b} = (8, 3, -1, -25)$.

(2) $\boldsymbol{a}_1 = (3, -5, 2, -4)^T, \boldsymbol{a}_2 = (-1, 7, -3, 6)^T, \boldsymbol{a}_3 = (3, 11, -5, 10)^T, \boldsymbol{b} = (2, -30, 13, -26)^T$.

解 (1) 这个问题等价于线性方程组 $x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + x_3\alpha_3^T = b^T$ 是否有解，若有解，给出其中一组解. 考虑增广矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 6 & -25 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, -3)$, 故 $b = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$.

(2) 类似于 (1) 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = b$. 对增广矩阵作初等变换

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 11 & -30 \\ 2 & -3 & -5 & 13 \\ -4 & 4 & 10 & -26 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -11 \\ 0 & 17 & 51 & -85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (-3, -8, 1)$, 故 $b = -3\alpha_1 - 8\alpha_2 + \alpha_3$.

习题 1.8 (第五章第 4 题)

设 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 0), \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 0), \boldsymbol{a}_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$. 证明：$\mathbb{F}^4$ 中任何向量可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 的线性组合，且表示唯一.

证明 对任意向量 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{F}^4$, 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + x_3\alpha_3^T + x_4\alpha_4^T = b^T$. 原问题等价于此线性方程组对任意向量 $\boldsymbol{b}$ 是否存在解，且解唯一. 注意到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

非退化，由 $Cramer$ 法则知该线性方程组存在唯一解.

习题 1.9 (第五章第 5 题)

设 $\boldsymbol{P}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$ 是三维几何空间中的点. 证明：$\boldsymbol{P}_i, i = 1, 2, 3, 4$ 共面的条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 $\boldsymbol{P}_i, i=1,2,3,4$ 共面等价于 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，也等价于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

即等价于行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

1.3 第十次作业

习题 1.10 (第五章第 7 题)

设 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 中的每一个向量是 n 维向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合. 证明：$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 的任何线性组合都是 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合.

证明 由于 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 中的每一个向量是 n 维向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合，可假设

$$(b_1,b_2,\cdots,b_s)=(a_1,a_2,\cdots,a_r)A, \text{其中} A\in\mathbb{F}^{r\times s}.$$

于是

$$k_1b_1+\cdots+k_sb_s=(b_1,b_2,\cdots,b_s)(k_1,k_2,\cdots,k_s)^T=(a_1,a_2,\cdots,a_r)A(k_1,k_2,\cdots,k_s)^T, \text{其中} k_i\in\mathbb{F}, \forall i=1,\cdots,s.$$

故 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 的任何线性组合都是 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合.

习题 1.11 (第五章第 9 题)

判别下列线性方程组是否线性相关

$$(1)\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 5x_1-x_3=-1 \\ 8x_1-6x_2-10x_3=-13 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+5x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+2x_4=3 \\ x_1+x_2+2x_3+4x_4=1 \end{cases}$$

解 (1) 对线性方程组的增广矩阵作如下初等变换

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 8 & -6 & -10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{5r_1+r_2,8r_1+r_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 14 & 19 \\ 0 & 10 & 14 & 19 \end{pmatrix}.$$

因此 $5r_1+r_2=8r_1+r_3$, 进而 $r_2=3r_1+r_3$.

(2) 注意到系数矩阵之子式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的行列式不为零，系数矩阵秩为 3，因此线性无关.

习题 1.12 (第五章第 10 题)

判断下列向量组是否线性相关

(1)$a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, -2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$;

(2)$a_1 = (1, -1, 0, 0), a_2 = (0, 1, -1, 0), a_3 = (0, 0, 1, -1), a_4 = (-1, 0, 0, 1)$.

解 考虑行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -30 \neq 0.$$

故 a_1, a_2, a_3 线性无关.

(2) 考虑行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

故 a_1, a_2, a_3, a_4 线性相关.

习题 1.13 (第五章第 11 题)

证明：任何一个经过以下两个平面

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

交线的平面的方程能写成：

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

其中 λ, μ 为不全为零的常数.

证明 设 π_1, π_2 所确定的直线为 l,$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 为经过 l 的平面方程. 故方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

与

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

同解，故 (A, B, C, D) 可由 $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$ 线性表出. 即存在常数 λ, μ, 使得 $Ax+By+Cz+D = \lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$. 故平面 π 的方程即为 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) = 0$.

注 我们对上述证明中“(A, B, C, D) 可由 $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$ 线性表出”作详细解释：

注意到 A, B, C 不全为 0，不妨假设 $A \neq 0$，考虑方程组 (1.1) 的增广矩阵，

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & B_2 - \frac{B_1}{A_1} & C_2 - \frac{C_1}{A_1} & -D_2 + \frac{D_1}{A_1} \end{pmatrix}$$

注意到 $B_2 - \frac{B_1}{A_1}$ 与 $C_2 - \frac{C_1}{A_1}$ 不能同时为 0. 若同时为 0，当 $-D_2 + \frac{D_1}{A_1} = 0$ 时，则平面 π_1, π_2 重合；当 $-D_2 + \frac{D_1}{A_1} \neq 0$ 时，则平面 π_1, π_2 无交. 记 $B_2' = B_2 - \frac{B_1}{A_1}, C_2' = C_2 - \frac{C_1}{A_1}, -D_2' = -D_2 + \frac{D_1}{A_1}$. 不妨假设 $B_2' \neq 0$, 考虑方程组 (1.2)

的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A & B & C & -D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & B_2' & C_2' & -D_2' \\ A & B & C & -D \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{利用第一行第二行消去第三行前两列元素}} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & B_2' & C_2' & -D_2' \\ 0 & 0 & C' & -D' \end{pmatrix}$$

由于方程组 (1.1) 与 (1.2) 同解，又方程组 (1.1) 有无数解 (交为直线)，故方程组 (1.2) 也有无数解，因此 $C' = 0$(注意，若 $C' \neq 0$, 根据 $Cramer$ 法则，方程组 (1.2) 的解存在且唯一，矛盾!). 若 $D' \neq 0$, 则 (1.2) 无解. 综上，$C' = 0$ 且 $D' = 0$. 即 $(A, B, C, -D)$ 可由 $(A_1, B_1, C_1, -D_1), (A_2, B_2, C_2, -D_2)$ 线性表出，也即 (A, B, C, D) 可由 $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$ 线性表出.

习题 1.14 (第五章第 12 题)

下列说法是否正确？为什么？(1) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_s (s \geq 2)$ 线性相关，则其中每一个向量都可以表示成其他向量的线性组合.

(2) 如果向量组的任何不是它本身的子向量组都线性无关，则该向量组也线性无关.

(3) 若向量组线性无关，则它的任何子向量组都线性无关.

(4)$\mathbb{F}^{n\times n}$ 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关.

(5) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots, a_s + a_1$ 必线性无关.

(6) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots, a_s + a_1$ 必线性相关.

(7) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s \in \mathbb{F}^n$ 线性无关，则它们的加长向量组也必线性无关.

(8) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s \in \mathbb{F}^n$ 线性相关，则它们的加长向量组也必线性相关.

解 (1) 不正确，可以考虑向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 中的极大无关组.

(2) 不正确，考虑 $(1, 0)^T$ 与 $(2, 0)^T$.

(3) 正确. 其逆否命题为“若存在一组子向量组线性相关，则该向量组线性相关”.

(4) 正确，含有 $n+1$ 个未定元的 n 个线性方程组必有非零解.

(5) 不正确，考虑 $s = 2$ 时的情况. (6) 正确，由教材定理 5.3.5 中第 3 条，知 $rank(a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots, a_s + a_1) \leq rank(a_1, a_2, \cdots, a_s) < s$.

(7) 正确，考虑线性方程组，注意到加长向量组相当于添加了更多的线性方程. 其逆否命题为“若加长向量组线性相关，则本身一定线性相关”.

(8) 不正确，考虑考虑向量组 $(1), (-1)$ 与其加长版本 $(1, 0)^T, (-1, 1)^T$.

习题 1.15 (第五章第 17 题)

设向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，且 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 可由向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性表示，则 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 也线性无关.

证明 由教材定理 5.3.5 中第 3 条知向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 的极大无关组个数小于等于向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 的极大无关组个数. 再由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，知向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 也线性无关.

1.4 第十二次作业 (部分)

习题 1.16 (第五章第 42 题)

设 V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间，判断 V 中下列函数组是否线性相关.

(1)$1, x, \sin x$;

(2)$1, x, e^x$;

(3)$1, \cos 2x, \cos^2 x$;

(4)$1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$;

(5)$\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx$.

解 (1) 线性无关.

(2) 线性无关.

(3) 线性相关，注意到 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

(4) 线性相关，注意到 $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6x^2 - 2 = 0$.

(5) 线性无关，我们先断言 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$ 线性无关. 根据第五章第 12 题的第三条，知 $\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx$ 线性无关.

以上断言的证明：设

$$f(x) = a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \cdots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0 \quad \text{其中} a, b_i, c_i \in \mathbb{R}.$$

依次设 $g(x) = 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$，分别计算定积分 $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$, 可得 $a = b_1 = c_1 = \cdots = b_n = c_n = 0$.

习题 1.17 (第五章第 44 题)

设 $\mathbb{F}_n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间.

(1) 证明：$S = \{1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\}$ 构成 $\mathbb{F}^n$ 的一组基；

(2) 求 S 到基 $T = \{1, x, \cdots, x^n\}$ 的过渡矩阵；

(3) 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ 在基 S 下的坐标.

证明 (1) 根据 $x^k = ((x-1)+1)^k (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 的二项式展开及第五章第 17 题知 S 线性无关，又 $\mathbb{F}_n[x]$ 的维数为 $n+1$，故 S 构成 $\mathbb{F}_n[x]$ 的一组基.

解 （2）根据二项式展开 $x^k = ((x-1)+1)^k = \sum\limits_{i=1}^{k} C_k^i (x-1)^i$. 故

$$(1, x, \cdots, x^n) = (1, x-1, \cdots, (x-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = (1, x, \cdots, x^n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (1, x-1, \cdots, (x-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

则 $p(x)$ 在 S 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1) \\ \frac{p'(1)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{p^{(n)}(1)}{n!} \end{pmatrix}$$

即为 $p(x)$ 在 1 处的 $Taylor$ 展开.

习题 1.18 (第五章第 46 题)

给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵全体. 证明：V 在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间，并求 V 的一组基与维数.

解 根据线性空间及矩阵数乘定义知 V 构成线性空间. 注意到下列矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3$$

均与矩阵 A 可交换，易知 A, B, I_3 线性无关. 下面只需说明对任意矩阵 $X = x_{ij}$, 若 X 与 A 乘法可交换，则 X 可以被 A, B, I_3 线性表示. 比较 XA 与 AX 中各个分量的元素，知 $X = x_{23}B + x_{11}I_3 + x_{13}A$. 故 V 的基为 A, B, I_3，维数为 3.

习题 1.19 (第五章第 47 题)

$V = \mathbb{F}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间. 令 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有满足 $\mathrm{tr}A = 0$ 的 n 阶矩阵的全体. 证明：W 是 V 的线性子空间. 并求 W 的一组基和维数.

证明 根据迹的线性性质知 W 是 V 的线性子空间. 易知 $E_{ij}(i \neq j), E_{kk} - E_{nn} \in W$, 其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n, k = 1, 2, \cdots, n-1$, 且线性无关. 下面只需说明 $E_{ij}(i \neq j), E_{kk} - E_{nn} \in W$ 可以张成 W 即可，假设 $A \in W$, 即 $\mathrm{tr}A = 0$. 则 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0$, 因此 $a_{nn} = -a_{11} - \cdots - a_{n-1,n-1}$. 于是 $A = \sum\limits_{i\neq j} a_{ij}E_{ij} + \sum\limits_{k\neq n} a_{kk}(E_{kk} - E_{nn})$. 因此 $E_{ij}(i \neq j), E_{kk} - E_{nn} \in W$ 构成 W 的一组基，维数为 $n^2 - 1$.

第 2 章 习题课讲义

2.1 第三次习题课

2.1.1 基础矩阵与标准单位向量

定义 2.1

n 维标准列向量是指以下 n 个 n 维列向量

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

♣

定义 2.2

n 阶基础矩阵是指 n^2 个 n 阶矩阵 $\{E_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\}$. 其中 $E_{ij} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 它的第 (i,j) 元素是 1，其他元素为 0.

♣

性质 (1) $e_i^T e_j = 0, e_i^T e_i = 1$. 其中 $i \neq j$;

(2）若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 Ae_i 为 A 的第 i 个列向量；$e_i^T A$ 为 A 的第 i 个行向量;

(3) 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $e_i^T Ae_j = a_{ij}$;

(4)$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$;

(5) 若 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 $E_{ij}A$ 将 A 的第 j 行变成第 i 行，其他元素变为 0;

(6) 若 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 AE_{ij} 将 A 的第 i 列变成第 j 列，其他元素变为 0.

习题 2.1

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

证明：

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

♠

证明 将矩阵 A 写成 $A = (e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})$. 由分块矩阵的乘法及性质 (2), 有 $A^2 = (Ae_n, Ae_1, Ae_2 \cdots, Ae_{n-1}) = (e_{n-1}, e_n, e_1, \cdots, e_{n-2})$. 如此下去便可得到结论.

习题 2.2

具有以下形状的矩阵称为循环矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

证明：同阶循环矩阵的乘积仍然是循环矩阵.

证明 设

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到任意循环矩阵 A 可以表示为 $A = a_1 I_n + a_2 J + a_3 J^2 + \cdots + a_n J^{n-1}$ 的形式，反之有如前形式的矩阵也一定是循环矩阵. 两个循环矩阵的乘积可以写成关于 J 的两个多项式的乘积，又 $J^n = I_n$, 即可得到结论.

习题 2.3

设 A 是 n 阶上三角矩阵且主对角线上元素全为零，证明：$A^n = 0$.

证明 可以设

$$A = \sum_{i<j} a_{ij} E_{ij}.$$

当 $j \neq k$ 时，$E_{ij}E_{kl} = 0$, 因此在 A^n 的乘法展开式中，可能的非 0 项只能具有形状 $E_{ij_1}E_{j_1j_2}\cdots E_{j_{n-1}j_n}$，且 $1 \le i < j_1 < j_2 < \cdots < j_n \le n$. 显然这是不可能的，因此 $A^n = 0$.

2.1.2 迹及其应用

定义 2.3

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，则 A 上主对角线元素之和称为矩阵 A 的迹，记为 $\mathrm{tr}A$.

性质 若 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}, k \in \mathbb{F}$，则

(1)$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;

(2)$\mathrm{tr}(kA) = k(\mathrm{tr}A)$;

(3)$\mathrm{tr}A^T = \mathrm{tr}A$;

(4)$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

命题 2.1 (迹的等价刻画)

若映射 $f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$, 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}, k \in \mathbb{F}$，满足

(1)$f(A+B) = f(A) + f(B)$;

(2)$f(kA) = kf(A)$;

(3)$f(AB) = f(BA)$;

(4)$f(I_n) = n$.

则 f 是迹.

证明 由 f 的线性性知，$f(E_{11}) + f(E_{22}) + \cdots + f(E_{nn}) = f(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn}) = f(I_n) = n$.
又 $f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj})$, 故 $f(E_{ii}) = 1$. 当 $i \neq j$ 时，$E_{ij} = E_{i1}E_{1j}$, 则 $f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) = f(E_{1j}E_{i1}) = f(0) = f(0I_n) = 0f(I_n) = 0$. 设 $A = (a_{ij})$, 则 $f(A) = f(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} f(E_{ij}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} =$

$\mathrm{tr}A$. 即映射 f 就是迹.

习题 2.4

不存在矩阵 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $AB - BA = kI_n$, 其中 $k \neq 0$.

证明 若存在这样的矩阵 A, B, 使得 $AB - BA = kI_n$，且 $k \neq 0$. 同时取迹，有 $0 = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(kI_n) = kn$, 矛盾！

习题 2.5

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明：$\mathrm{tr}(AA^T) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = 0$.

证明 设 $A = (a_{ij})$, 经计算易得 $\mathrm{tr}(AA^T) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$. 等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0, \forall i, j$, 即 $A = 0$.

习题 2.6

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $AA^T = A^2$, 证明：A 是对称矩阵.

证明 只需证明 $A - A^T = 0$. 由上题知只需证明 $\mathrm{tr}((A-A^T)(A-A^T)^T) = 0$ 即可. 由 $AA^T = A^2$, 知 $A^TA = (A^T)^2$. $\mathrm{tr}((A - A^T)(A - A^T)^T) = \mathrm{tr}((A - A^T)(A^T - A)) = \mathrm{tr}(AA^T - A^2 - (A^T)^2 + A^TA) = \mathrm{tr}(A^TA - AA^T) = \mathrm{tr}(A^TA) - \mathrm{tr}(AA^T) = 0$, 从而结论得证.

2.1.3 降阶公式及其应用

命题 2.2

若 $A \in \mathbb{F}^{m\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}, C \in \mathbb{F}^{n\times m}, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 其中 A 可逆，则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

上述等式两边同时取行列式即可得到结论.

注 当 D 可逆时，有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

故

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C).$$

于是，当矩阵 A, D 同时可逆时，有如下等式

$$\det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C). \tag{2.1}$$

等式 (2.1) 我们称为**降阶公式**.

推论 2.1

若 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，且 $n \geq m$, 则

$$\det(\lambda I_n - AB) = \lambda^{n-m}\det(\lambda I_m - BA).$$

证明 当 $\lambda \neq 0$ 时，考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$$

对上述矩阵作同命题 2.2 及其注记中的处理.
当 $\lambda = 0$ 时，分别考虑 $m = n$ 和 $n > m$ 的情况.

习题 2.7 (小测第四题)

计算 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 注意到

$$A = -I_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, \cdots, 1).$$

由推论 2.1 知

$$\det A = \det\left(-I_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, \cdots, 1)\right) = (-1)^{n-1} \det\left(-1 + (1, 1, \cdots, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-1)^{n-1}(n-1).$$

习题 2.8 (第五周作业)

计算下列 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

解

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \det 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} 1^{-1} (1, 1, \cdots, 1)\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \cdot \det\left(1 + (1, 1, \cdots, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right)$$

$= \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} a_k.$

注 后面将处理存在 $a_i = 0$ 的情形.

2.1.4 利用矩阵乘法计算行列式

习题 2.9

设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 0), s_0 = n$

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

求 $\det S$, 并证明当 $x_i \in \mathbb{R}$ 时，有 $\det S \geq 0$.

解 设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

则 $S = VV^T$, 因此 $\det S = (\det V)^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \geq 0.$

习题 2.10

计算下列矩阵 A 的行列式

$$A = \begin{pmatrix} x & y & -z & w \\ y & -x & -w & -z \\ z & -w & x & y \\ w & z & y & -x \end{pmatrix}.$$

解 注意到 $AA^T = \mathrm{diag}(u, u, u, u)$, 其中 $u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. 于是

$$(\det A)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^4.$$

因此 $\det A = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2$ 或者 $\det A = -(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2$，带入 $x = 1, y = z = w = 0$, 有 $\det A = 1$, 故 $\det A = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2$.

2.1.5 摄动法及其应用

命题 2.3

若 A 是一个 n 阶方阵，则存在一个正数 a, 使得对任意的 $0 < t < a$，矩阵 $tI_n + A$ 总是可逆矩阵.

证明 由行列式的展开式，可以假设

$$\det(tI_n + A) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n.$$

这是一个关于 t 的 n 次多项式，其上至多有 n 个不同的根. 若上述多项式的根均为零，则可取 $a = 1$; 若上述多项式有非零根，则可取 a 为上述多项式模长的最小值. 无论上述哪种情况，当 $0 < t_0 < a$ 时，t_0 都不会是上述多项

式的根，因此 $\det(t_0 I_n + A) \neq 0$, 即矩阵 $t_0 I_n + A$ 可逆.

注 这个命题告诉我们对任意的 n 阶矩阵 A, 经过微小的一维摄动后，$tI_n + A$ 总能成为一个可逆矩阵.

笔记 摄动法原理: 设 A 是 n 阶矩阵，由上面命题知，存在一列有理数 $t_k \to 0$，使得 $t_k I_n + A$ 都是可逆矩阵. 如果一个矩阵问题对可逆矩阵成立，特别地对 $t_k I_n + A$ 成立，并且该问题关于 t_k 连续，则可让 $t_k \to 0$，最后得到该问题对一般的方阵 A 也成立. 需要注意的是：摄动法处理矩阵问题时一定要关于 t_k 连续. 这一点非常重要，否则我们将不能用摄动法来归结处理. 一般而言，运用摄动法分为两步：首先处理可逆矩阵情形; 其次再利用摄动以及取极限得到一般情况的证明. 接下来，我们来看一个具体的例子.

习题 2.11

设 $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 且 $AC = CA$. 证明:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

证明 若矩阵 A 可逆，由命题 2.2 及矩阵 A, C 的交换性知

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB).$$

对于一般的方阵 A，可以取到一列有理数 $t_k \to 0$，使得 $t_k I_n + A$ 是可逆矩阵，且 $(t_k I_n + A)C = C(t_k I_n + A)$. 由前面分析知

$$\det\begin{pmatrix} t_k I_n + A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det((t_k I_n + A)D - CB).$$

注意到上述等式两边均为关于 t_k 的多项式，从而关于 t_k 连续 (适合摄动法使用条件). 上述等式两边同时取极限，令 $t_k \to 0$，即有

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

结论得证.

2.1.6 运用多项式处理行列式

命题 2.4

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$, 即 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 则 $f(x)$ 是零多项式.

证明 由假设 $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \cdots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$ 是下列方程组的解

$$\begin{cases} x_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_1^{n-1} x_{n-1} + b_1^n x_n = 0 \\ x_0 + b_2 x_1 + \cdots + b_2^{n-1} x_{n-1} + b_2^n x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_0 + b_{n+1} x_1 + \cdots + b_{n+1}^{n-1} x_{n-1} + b_{n+1}^n x_n = 0 \end{cases}$$

上述线性方程组的系数是一个 $Vander\ Monde$ 行列式，又 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$ 互不相同，所以系数行列式不为零. 由 $Cramer$ 法则知上述方程组只有零解，即 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$, 故 $f(x)$ 是零多项式.

习题 2.12

设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式，证明：对任意 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

证明 考虑如下多项式函数

$$g(x) \triangleq \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

若 $a_i(i=2,\cdots,n)$ 中有相同者，则显然有 $g(x)=0$. 若诸 a_i 互不相同，则由 $g(a_i)=0(i=2,\cdots,n)$, 知 $g(x)$ 有 $n-1$ 个互不相同的根，由命题 2.4，知 $g(x)=0$. 综上，无论何种情况，总有 $g(x)=0$，特别 $g(a_1)=0$, 因此原行列式值等于零.

习题 2.13

计算下列 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

解 考虑如下多项式函数

$$f(x) \triangleq \begin{vmatrix} 1+a_1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n+x \end{vmatrix}.$$

存在自然数 N，当 $x>N$ 时，$a_i+x(i=1,2,\cdots,n)$ 全不为零. 于是由习题 2.8 知，当 $x>N$ 时 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+x)+\sum\limits_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(a_k+x)$. 再由命题 2.4 知 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+x)+\sum\limits_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(a_k+x)$ 对任意 x 成立. 特别对 $x=0$ 成立. 因此

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j} a_k.$$