1.10 第十二周作业

习题 1.70 (第六章第 5 题)

证明：$\mathbb{R}^2$ 上的可逆线性变换可以分解为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换的复合。

证明 显然关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换都是可逆的，且其逆变换仍为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换。且 $\mathbb{R}^2$ 上任意线性变换都与一个二阶方阵对应。因此我们任取一个可逆线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$，其中 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为可逆方阵，那么我们只需要证明可以通过将 A 与关于坐标轴的伸缩、反射、旋转变换对应的矩阵相乘来得到单位阵即可，我们先通过伸缩来使矩阵两列向量长度相等：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

由于 A 可逆，a, c 不同时为 0，b, d 不同时为 0，则必存在 $\lambda, \mu > 0$，满足 $\lambda^2(a^2 + c^2) = \mu^2(b^2 + d^2)$，这也就是 $a_1^2 + c_1^2 = b_1^2 + d_1^2$，并且由齐次性不妨设其为 1，再通过旋转来使两列向量关于 y 轴对称：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cos\theta - c_1\sin\theta & b_1\cos\theta - d_1\sin\theta \\ a_1\sin\theta + c_1\cos\theta & b_1\sin\theta + d_1\cos\theta \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

设 $a_1 = \cos\alpha, c_1 = \sin\alpha, b_1 = \cos\beta, d_1 = \sin\beta$，那么我们有：

$$a_2 = \cos(\theta + \alpha),\ b_2 = \cos(\theta + \beta),\ c_2 = \sin(\theta + \alpha),\ d_2 = \sin(\theta + \beta)$$

取 $\theta = \dfrac{\pi - \alpha - \beta}{2}$，就有 $a_2 + b_2 = 0, c_2 = d_2$，再通过一次伸缩使两个列向量正交且均化为单位向量：

$$\begin{pmatrix} p & \\ & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & -a_2 \\ c_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_2 & -pa_2 \\ qc_2 & qc_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_3 & -a_3 \\ c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

那么必存在 $p, q > 0$，满足 $q^2c_2^2 - p^2a_2^2 = 0$，且由齐次性不妨设 $q^2c_2^2 = p^2a_2^2 = \dfrac{1}{2}$，此时矩阵两列向量互相正交，且关于 y 轴对称，均为单位向量，与坐标轴夹角都是 $\dfrac{\pi}{4}$，所以若两列向量是正定向，只需再做一次旋转便可得到单位阵，若为负定向，则先做一次反射再旋转，也可得到单位阵，至此我们便完成了命题的证明。

习题 1.71 (第六章第 6 题)

在三维几何空间的直角坐标系中，求关于平面 $x + 2y + 3z = 0$ 的对称变换。

解 记所求变换为 T，所给平面为 S，任取 $a = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$，设其关于 S 的对称点为 $T(a) = (u, v, w)^T \triangleq b$，则 a, b 中点落在 S 上，且 a, b 之间的向量与 S 垂直，S 法向量为 $\overrightarrow{n} = (1, 2, 3)^T$，从而有：

$$x + u + 2(y + v) + 3(z + w) = 0,\ x - u = \frac{y - v}{2} = \frac{z - w}{3}$$

解得 $T(x, y, z)^T = (u, v, w)^T = \left(\dfrac{6}{7}x - \dfrac{2}{7}y - \dfrac{3}{7}z, -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{3}{7}y - \dfrac{6}{7}z, -\dfrac{3}{7}x - \dfrac{6}{7}y - \dfrac{2}{7}z\right)^T$.

习题 1.72 (第六章第 7 题)

在三维几何空间的直角坐标系中，求关于直线 $z = 2y = 3x$ 的对称变换。

解 记所求变换为 T，所给直线为 l，任取 $a = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$，设其关于 l 的对称点为 $T(a) = (u, v, w)^T \triangleq b$，则 a, b 中点落在 l 上，且 a, b 之间的向量与 l 垂直，l 的方向向量为 $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)^T$，从而有：

$$3(x + u) = 2(y + v) = z + w,\ \frac{x - u}{3} + \frac{y - v}{2} + z - w = 0$$

解得 $T(x,y,z)^T=(u,v,w)^T=\left(-\frac{41}{49}x+\frac{12}{49}y+\frac{24}{49}z,\frac{12}{49}x-\frac{31}{49}y+\frac{36}{49}z,\frac{24}{49}x+\frac{36}{49}y+\frac{23}{49}z\right)^T$.

习题 1.73 (第六章第 8 题)

在三维几何空间的直角坐标系中，求绕向量 $\boldsymbol{e}=(1,-1,1)^T$ 逆时针旋转 $30°$ 角的变换。

解 记所求变换为 T，任取 $A=(a,b,c)^T\in\mathbb{R}^3$，设 $\boldsymbol{e}$ 所在直线为 l，则过点 A 且与 l 垂直的平面 S 的方程为：

$$(x-a)-(y-b)+(z-c)=0$$

设 l 与 S 交于点 $O'=(\lambda,-\lambda,\lambda)^T$，代入 S 方程得到 $\lambda=\frac{a-b+c}{3}$，所求的 $T(A)$ 即为在平面 S 上，将点 A 绕 O' 逆时针旋转（从 $\boldsymbol{e}$ 的正方向看）$30°$ 角得到的点，记为 B，接下来我们以 O' 为原点取一组正交基，不妨取 $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{O'O},\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{u_3}\times\overrightarrow{u_1}$（向量外积），这样得到的 $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ 构成右手系。再对 $\overrightarrow{u_2}$ 做伸缩使其模长与 $\overrightarrow{u_1}$ 相同，即 $\overrightarrow{u_2}'=\frac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|}|\overrightarrow{u_1}|$，那么 $\overrightarrow{O'B}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u_1}\pm\frac{1}{2}\overrightarrow{u_2}'$ ($\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{e}<0$时为$+$,$>0$时为$-$)，上述过程中各个向量均是可求出的，计算得到：

$$\overrightarrow{u_1}=(a-\lambda,b+\lambda,c-\lambda)^T,\overrightarrow{u_2}=\lambda(b+c,c-a,-a-b)^T,\overrightarrow{u_3}=(-\lambda,\lambda,-\lambda)^T$$

而显然 T 是一个线性变换，那么我们只需要计算标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的像即可，利用上述过程计算得到：

$$T(\boldsymbol{e}_1)=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3},\frac{\sqrt{3}-1}{3},\frac{1}{3}\right)^T,T(\boldsymbol{e}_2)=\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}+1}{3},\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right)^T,T(\boldsymbol{e}_3)=\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{3},-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)^T$$

据此我们便可得到所有点在该旋转变换下的像点，即 $T(x,y,z)^T=xT(\boldsymbol{e}_1)+yT(\boldsymbol{e}_2)+zT(\boldsymbol{e}_3)$.

笔记 $\overrightarrow{O'B}$ 表达式中正负号的不同是由于在 $\boldsymbol{e}$ 的正方向和负方向看，逆时针是不同的。其实也可以用 $\boldsymbol{e}$ 的方向作为 u_3 轴的方向，就可以避免讨论正负。

习题 1.74 (第六章第 36 题)

求下列线性变换在所指定的基下的矩阵

(1) 在 $F_n[x]$ 中，$\mathscr{A}(P(x))=P'(x)$，在基 $e_0=1,e_1=x,\cdots,e_{n-1}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下；

(2) 以四个线性无关的函数

$$\alpha_1=e^{ax}\cos bx\quad\alpha_2=e^{ax}\sin bx\quad\alpha_3=x\,e^{ax}\cos bx\quad\alpha_4=x\,e^{ax}\sin bx$$

为基的四维空间中，线性变换为微分变换；

(3) 给定 2 阶实方阵 A, 求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}A$ 在基

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\text{下的矩阵。}$$

解 (1) 由题 $\mathscr{A}(e_0,e_1,\cdots,e_{n-1})=(0,e_0,e_1,\cdots,e_{n-2})=(e_0,e_1,\cdots,e_{n-1})\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\&0&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&0\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$.

(2) 由题可知 $\mathscr{A}$ 与 (1) 中相同，那么有：

$$\mathscr{A}(\alpha_1)=(e^{ax}\cos bx)'=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)=a\alpha_1-b\alpha_2,$$

$$\mathscr{A}(\alpha_2)=(e^{ax}\sin bx)'=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)=b\alpha_1+a\alpha_2,$$

$$\mathscr{A}(\alpha_3) = (xe^{ax}\cos bx)' = e^{ax}(\cos bx + ax\cos bx - bx\sin bx) = \alpha_1 + a\alpha_3 - b\alpha_4,$$

$$\mathscr{A}(\alpha_4) = (xe^{ax}\sin bx)' = e^{ax}(\sin bx + ax\sin bx - bx\cos bx) = \alpha_2 + b\alpha_3 + a\alpha_4.$$

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $\mathscr{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -be_2 + ce_3, \mathscr{A}e_2 = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -ce_1 + (a-d)e_2 + ce_4, \mathscr{A}e_3 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} = be_1 + (d-a)e_3 - be_4, \mathscr{A}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = be_2 - ce_3$，于是：

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3,e_4) = (e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

习题 1.75 (第六章第 37 题)

在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}(x,y,z)^T = (x+2y, x-3z, 2y-z)^T.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T, \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$ 下的矩阵。

解 $\mathscr{A}\boldsymbol{e}_1 = (1,1,0) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \mathscr{A}\boldsymbol{e}_2 = (2,0,2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \mathscr{A}\boldsymbol{e}_3 = (0,-3,-1) = -3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$，则有：

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \triangleq (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)A$$

则 A 即为 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T, \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$ 下的矩阵。

习题 1.76 (第六章第 38 题)

设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 将

$$\alpha_1 = (0,0,1)^T, \quad \alpha_2 = (0,1,1)^T, \quad \alpha_3 = (1,1,1)^T$$

变换到

$$\beta_1 = (2,3,5)^T, \quad \beta_2 = (1,0,0)^T, \quad \beta_3 = (0,1,-1)^T.$$

求 $\mathscr{A}$ 在自然基和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵。

解 容易看出 $\boldsymbol{e}_1 = \alpha_3 - \alpha_2, \boldsymbol{e}_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \boldsymbol{e}_3 = \alpha_3$，则 $\mathscr{A}\boldsymbol{e}_1 = \beta_3 - \beta_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \mathscr{A}\boldsymbol{e}_2 = \beta_2 - \beta_1 = -\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3, \mathscr{A}\boldsymbol{e}_3 = \beta_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$，则有：

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \triangleq (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)A$$

则 A 即为 $\mathscr{A}$ 在自然基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵。

而 $\mathscr{A}\alpha_1=\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \mathscr{A}\alpha_2=\beta_2=-\alpha_2+\alpha_3, \mathscr{A}\alpha_3=\beta_3=-2\alpha_1+\alpha_2$，则有：

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\triangleq(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$$

则 B 即为 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵。

习题 1.77 (第六章第 41 题)

在 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基：

$$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(2,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T;\quad \beta_1=(2,3,1)^T,\quad \beta_2=(7,9,5)^T,\quad \beta_3=(3,4,3)^T.$$

定义线性变换 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i\,(i=1,2,3)$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵。

解 (1) 计算得 $\mathscr{A}\alpha_1=\beta_1=-\dfrac{3}{2}\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2+\dfrac{5}{2}\alpha_3, \mathscr{A}\alpha_2=\beta_2=-3\alpha_1+\alpha_2+8\alpha_3, \mathscr{A}\alpha_3=\beta_3=-\alpha_1+4\alpha_3$，则有：

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3&-1\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&8&4\end{pmatrix}\triangleq(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$$

则 A 即为 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵。

(2) 由前一问 $\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathscr{A}(\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=\mathscr{A}^2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A.$

从而 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵也为 A.

习题 1.78 (第六章第 42 题)

设 V 为 n 维线性空间，$\mathscr{A}:V\to V$ 为线性变换. 若存在 $\alpha\in V$, 使得 $\mathscr{A}^{n-1}\alpha\neq 0$, 但是 $\mathscr{A}^n\alpha=0$, 证明：$\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\&0&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&0\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$$

证明 先证 $\alpha,\mathscr{A}\alpha,\cdots,\mathscr{A}^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基，只需证它们线性无关即可。设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2\mathscr{A}\alpha+\cdots+\lambda_n\mathscr{A}^{n-1}\alpha=0$，由题 $k\geqslant n$ 时，$\mathscr{A}^k\alpha=0$，则等式两边同时作用 $\mathscr{A}^{n-1}$ 可得 $\lambda_1\mathscr{A}^{n-1}\alpha=0$，由于 $\mathscr{A}^{n-1}\alpha\neq 0$，则 $\lambda_1=0$，同理将等式两边同时作用 $\mathscr{A}^{n-m}$ 可得 $\lambda_m=0, m=1,\cdots,n$，从而 $\alpha,\mathscr{A}\alpha,\cdots,\mathscr{A}^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基，于是：

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-1}\alpha,\cdots,\mathscr{A}\alpha,\alpha)=(0,\mathscr{A}^{n-1}\alpha,\cdots,\mathscr{A}\alpha)=(\mathscr{A}^{n-1}\alpha,\cdots,\mathscr{A}\alpha,\alpha)\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\&0&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&0\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$$

故题中所给矩阵为 $\mathscr{A}$ 在基 $(\mathscr{A}^{n-1}\alpha,\cdots,\mathscr{A}\alpha,\alpha)$ 下的矩阵。

笔记 这是个很常见的取法，以后也可能会多次见到，建议记住并掌握证明方法。

习题 1.79 (第六章第 43 题)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基，证明：对于任意 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in V$，存在线性变换 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i\,(i=1,2,\cdots,n)$.

证明 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，那么 $\forall\beta_k,k=1,\cdots,n$，存在唯一的一组常数 $\lambda_{1k},\cdots,\lambda_{nk}$ 使得 $\beta_k=\lambda_{1k}\alpha_1+\cdots+\lambda_{nk}\alpha_n$，取方阵 A 满足 $(A)_{ij}=\lambda_{ij}$，由于线性变换与矩阵之间存在着一一对应，那么必存在一个线性变换 $\mathscr{A}$，其在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A，于是有：

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

从而 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i,i=1,\cdots,n$，于是 $\mathscr{A}$ 即为所求的线性变换。

笔记 或者也可以直接定义映射 $\mathscr{A}:\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n\mapsto\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n$，容易验证线性性。这是因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，所以 V 中任意元素都能写成它们的线性组合，我们把组合系数“迁移”到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 上，便得到了要求的线性变换。并且我们其实可以把这个结论推广到线性映射，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in U$ 为另一个线性空间，以同样的方式定义映射，验证线性性即可。