

1.9 第十一周作业

习题 1.61 (第五章第 34 题)

以向量组 $a_1 = (3, 1, 0), a_2 = (6, 3, 2), a_3 = (1, 3, 5)$ 为基, 求 $\beta = (2, -1, 2)$ 的坐标.

解 即求线性表示的系数, 做初等变换如下:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & -1/3 & 16/3 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

故坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T = (-76, 41, -16)^T$

习题 1.62 (第五章第 35 题)

设 $a_1 = (3, 2, -1, 4), a_2 = (2, 3, 0, -1)$.

- (1) 将 a_1, a_2 扩充为 R^4 的一组基;
- (2) 给出标准基在该组基下的表示;
- (3) 求 $\beta = (1, 3, 4, -2)$ 在该组基下的坐标.

解 虽然题目给的向量是行向量, 但我们还是习惯性地使用列向量来进行计算, 即将所有向量转置.

(1) 注意到 a_1, a_2 的前两个分量线性无关, 故可以直接补充 $a_3 = (0, 0, 1, 0)$,

$a_4 = (0, 0, 0, 1)$ 得到一组基.

(2) 基变换写为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{即标准基在这组基下的表示为 } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 3/5 & -2/5 & 1 & 0 \\ -14/5 & 11/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 由坐标变换公式, $\beta' = T^{-1}\beta = (-3/5, 7/5, 17/5, 9/5)$.

习题 1.63 (第五章第 36 题)

将三维几何空间中的直角坐标系 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 绕单位向量 $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 逆时针旋转 θ 角, 求新坐标与原坐标之间的关系.

解 将标准基 1 换为 $e'_1 = e$ 及垂直于 e 的平面内互相垂直的两单位向量 $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ 组成的基 2, 有过渡矩阵:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

满足

$$(e_1, e_2, e_3)T_1 = (e'_1, e'_2, e'_3); \quad (1.61)$$

再将基 2 绕 e 逆时针旋转 θ 角得到基 3: (e''_1, e''_2, e''_3) , 有过渡矩阵 (即二维旋转):

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

满足

$$(e'_1, e'_2, e'_3)T_2 = (e''_1, e''_2, e''_3); \quad (1.62)$$

由于旋转过程中基 1 与基 2 的相对位置保持不变, 故基 1 经旋转得到的基 4: (e'''_1, e'''_2, e'''_3) 与基 3 之间满足和基 1 与基 2 相同的关系:

$$(e'''_1, e'''_2, e'''_3)T_1 = (e''_1, e''_2, e''_3); \quad (1.63)$$

即

$$(e'''_1, e'''_2, e'''_3) = (e''_1, e''_2, e''_3)T_1^{-1}. \quad (1.64)$$

综合式 (1.61), (1.62), (1.64) 得到标准基在旋转前后的基变换:

$$(e'''_1, e'''_2, e'''_3) = (e_1, e_2, e_3)T_1T_2T_1^{-1} \quad (1.65)$$

故坐标变换为:

$$\alpha' = R\alpha = T_1T_2^{-1}T_1^{-1}\alpha \quad (1.66)$$

旋转矩阵写为:

$$\begin{aligned} R &= T_1T_2^{-1}T_1^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2\cos\theta)/3 & (1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)/3 \\ (1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1+2\cos\theta)/3 & (1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)/3 \\ (1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1+2\cos\theta)/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.67)$$

注 本题也可以直接使用 Rodrigues 转动公式:

$$R(\vec{\psi}) = \begin{pmatrix} n_1^2(1-\cos\psi) + \cos\psi & n_1n_2(1-\cos\psi) - n_3\sin\psi & n_1n_3(1-\cos\psi) + n_2\sin\psi \\ n_1n_2(1-\cos\psi) + n_3\sin\psi & n_2^2(1-\cos\psi) + \cos\psi & n_2n_3(1-\cos\psi) - n_1\sin\psi \\ n_1n_3(1-\cos\psi) - n_2\sin\psi & n_2n_3(1-\cos\psi) + n_1\sin\psi & n_3^2(1-\cos\psi) + \cos\psi \end{pmatrix}$$

由于坐标轴绕 e 逆时针转 θ 角, 故相对地, 坐标绕 e 顺时针转 θ 角, 即 ψ 取 $-\theta$, 而转轴 e 的三个分量为 n_1, n_2, n_3 , 代入得

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)/3 + \cos\theta & (1-\cos\theta)/3 + \sqrt{3}\sin\theta/3 & (1-\cos\theta)/3 - \sqrt{3}\sin\theta/3 \\ (1-\cos\theta)/3 - \sqrt{3}\sin\theta/3 & (1-\cos\theta)/3 + \cos\theta & (1-\cos\theta)/3 + \sqrt{3}\sin\theta/3 \\ (1-\cos\theta)/3 + \sqrt{3}\sin\theta/3 & (1-\cos\theta)/3 - \sqrt{3}\sin\theta/3 & (1-\cos\theta)/3 + \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2\cos\theta)/3 & (1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)/3 \\ (1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1+2\cos\theta)/3 & (1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)/3 \\ (1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)/3 & (1+2\cos\theta)/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.68)$$

习题 1.64 (第五章第 40 题)

已知 F^5 中向量 $a_1 = (1, 2, 3, 2, 1)^T$ 及 $a_2 = (1, 3, 2, 1, 2)^T$, 求找一个齐次线性方程组使得 a_1 与 a_2 为该方程组的基础解系.

解 设系数矩阵为 A , 则齐次线性方程组写为 $Ax = O$, a_1 和 a_2 构成方程组的基础解系, 即方程组解空间维数等于 2, 故 $\text{rank} A = 5 - \dim V = 5 - 2 = 3$, 故找一个列数为 5, 秩为 3, $Aa_1 = O, Aa_2 = O$ 的矩阵 A 即可, 例如:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

上式中 A 的每一行是如何确定的? 实际上 A 的任意行向量 α 满足 $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix} \alpha^T = O$, 这即是 $A(a_1, a_2) = O$ 转置后的结果.

习题 1.65 (第五章第 41 题)

判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间

(1) V 是所有实数对 (x, y) 的集合, 数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. 定义

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (x, y).$$

(2) V 是所有满足 $f(-1) = 0$ 的实函数集合, 数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. 定义加法为函数加法, 数乘为数与函数的乘法.

(3) V 是所有满足 $f(0) \neq 0$ 的实函数的集合, 数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. 定义加法为函数加法, 数乘为数与函数的乘法.

(4) V 是数域 \mathbb{F} 上所有 n 阶可逆方阵的全体, 加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘.

解 (1) 不构成线性空间. 因为不满足数乘分配律:

$$(\lambda + \mu)(x, y) = (x, y) \neq (2x, 2y) = (x, y) + (x, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y) \quad (1.70)$$

(2) 构成线性空间. 由于实函数在加法和数乘下构成线性空间, 我们只需证 V 为实函数空间的子空间, 即 V 封闭: 设 $f, g \in V$, 有 $(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 0$, 故 $f + g \in V$; $\lambda f(-1) = 0$, 故 $\lambda f \in V$.

(3) 不构成线性空间, 因为 V 对加法不封闭:

设 $f \in V$, 则 $f(0) \neq 0$, $-f(0) \neq 0$. 故 $-f \in V$, 而 $f + (-f) = 0$ 是恒为 0 的常量函数, 其不在 V 中, 故 V 对加法不封闭.

(4) 不构成线性空间, 因为 V 对加法不封闭:

设 $A \in V$, 则 A 可逆, 显然 $-A$ 也可逆, 但 $A + (-A) = O$ 不可逆, 即零矩阵不在 V 中, V 对加法不封闭.

习题 1.66 (第五章第 42 题)

设 V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间, 判断 V 中下列函数组是否线性相关.

(1) $1, x, \sin x$;

(2) $1, x, e^x$;

(3) $1, \cos 2x, \cos^2 x$;

(4) $1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$;

(5) $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$.

解 (1) 线性无关. (2) 线性无关. (3) 线性相关, 注意到 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

(4) 线性相关, 注意到 $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6x^2 - 2 = 0$.

(5) 线性无关, 我们先断言 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ 线性无关. 根据第五章第 12 题的第三条, 知 $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ 线性无关.

以上断言的证明: 设

$$f(x) = a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \dots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0 \quad \text{其中 } a, b_i, c_i \in \mathbb{R}.$$

依次设 $g(x) = 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$, 分别计算定积分 $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$, 可得 $a = b_1 = c_1 = \dots = b_n = c_n = 0$.

习题 1.67 (第五章第 44 题)

设 $\mathbb{F}_n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间.

(1) 证明: $S = \{1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\}$ 构成 \mathbb{F}_n 的一组基;

(2) 求 S 到基 $T = \{1, x, \dots, x^n\}$ 的过渡矩阵;

(3) 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{F}_n[x]$ 在基 S 下的坐标.

证明 (1) 根据 $x^k = ((x-1)+1)^k (k=0, 1, 2, \dots, n)$ 的二项式展开及第五章第 17 题知 S 线性无关, 又 $\mathbb{F}_n[x]$ 的维数为 $n+1$, 故 S 构成 $\mathbb{F}_n[x]$ 的一组基.

解 (2) 根据二项式展开 $x^k = ((x-1)+1)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i (x-1)^i$. 故

$$(1, x, \dots, x^n) = (1, x-1, \dots, (x-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = (1, x, \dots, x^n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (1, x-1, \dots, (x-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

则 $p(x)$ 在 S 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1) \\ \frac{p'(1)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{p^{(n)}(1)}{n!} \end{pmatrix}$$

即为 $p(x)$ 在 1 处的 Taylor 展开.

习题 1.68 (第五章第 46 题)

给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵全体. 证明: V 在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间, 并求 V 的一组基与维数.

解 根据线性空间及矩阵数乘定义知 V 构成线性空间. 注意到下列矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3$$

均与矩阵 A 可交换, 易知 A, B, I_3 线性无关. 下面只需说明对任意矩阵 $X = x_{ij}$, 若 X 与 A 乘法可交换, 则 X 可以被 A, B, I_3 线性表示. 比较 XA 与 AX 中各个分量的元素, 知 $X = x_{23}B + x_{11}I_3 + x_{13}A$. 故 V 的基为 A, B, I_3 , 维数为 3.

习题 1.69 (第五章第 47 题)

$V = \mathbb{F}^{n \times n}$ 是数域 \mathbb{F} 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间. 令 W 是数域 \mathbb{F} 上所有满足 $\text{tr}A = 0$ 的 n 阶矩阵的全体. 证明: W 是 V 的线性子空间. 并求 W 的一组基和维数.

证明 根据迹的线性性质知 W 是 V 的线性子空间. 易知 $E_{ij}(i \neq j), E_{kk} - E_{nn} \in W$, 其中 $i, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n-1$, 且线性无关. 下面只需说明 $E_{ij}(i \neq j), E_{kk} - E_{nn} \in W$ 可以张成 W 即可, 假设 $A \in W$, 即 $\text{tr}A = 0$. 则 $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0$, 因此 $a_{nn} = -a_{11} - \dots - a_{n-1, n-1}$. 于是 $A = \sum_{i \neq j} a_{ij}E_{ij} + \sum_{k \neq n} a_{kk}(E_{kk} - E_{nn})$. 因此 $E_{ij}(i \neq j), E_{kk} - E_{nn} \in W$ 构成 W 的一组基, 维数为 $n^2 - 1$.