

1.5 第七周作业

习题 1.23 (第四章第 7 题 (2)(3)(4)(5))

计算下列方阵的 k 次方幂, k 为正整数.

$$(2) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (5) \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$



解 (2) 法一: $a = b = 0$ 时, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k = O^k = O$

a, b 不同时为 0 时, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k &= \left(\sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right)^k \\ &= (a^2 + b^2)^{k/2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k \\ &= (a^2 + b^2)^{k/2} \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.42)$$

其中 $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 最后一步用到了旋转矩阵的 k 次幂 (转 k 次 θ 角相当于转一次 $k\theta$ 角), 即习题 7.1). 注意: 我们上述的讨论是在 a, b 取实数的情况下进行的, 当 a, b 取复数时需要对结果进行解析延拓, 扩展到复数域, 在此不做赘述。

法二: 将矩阵进行拆分: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aI + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

则有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k &= (aI + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})^k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{k-i} b^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i \\ &= \sum_{i=2m}^{0 \leq i \leq k} C_k^i a^{k-i} b^i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^m + \sum_{i=2n+1}^{1 \leq i \leq k} C_k^i a^{k-i} b^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^m C_k^{2m} a^{k-2m} b^{2m} & \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^n C_k^{2n+1} a^{k-2n-1} b^{2n+1} \\ -\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^n C_k^{2n+1} a^{k-2n-1} b^{2n+1} & \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^m C_k^{2m} a^{k-2m} b^{2m} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.43)$$

注 将矩阵拆分再按二项式展开计算矩阵幂次需满足拆成的两个矩阵可交换: 即令 $A = B + C$, 需 $BC = CB$

法三: 一般的, 求矩阵 k 次幂的通法是进行相似对角化 (不要问我怎么化的, 后面会学):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} A^{-1} B A \quad (1.44)$$

则有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k &= (A^{-1}BA)^k = A^{-1}B^kA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+bi)^k & 0 \\ 0 & (a-bi)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(a+bi)^k + (a-bi)^k}{2} & \frac{i(a-bi)^k - i(a+bi)^k}{2} \\ \frac{i(a+bi)^k - i(a-bi)^k}{2} & \frac{(a+bi)^k + (a-bi)^k}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.45)$$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 有 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} A & I \\ O & A \end{pmatrix}^k \\ &= \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1} \\ O & A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & ka & k & k(k-1)a \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

(4) 将矩阵拆为两部分: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = I_{n \times n} + J_{n \times n}$, 其中 $J_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$, 满足

$$J^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix} & k < n \\ O & k \geq n \end{cases}, \text{ 则由二项式定理:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^k = (I + J)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i J^i = \begin{pmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \cdots & C_k^{n-1} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & C_k^2 \\ & & & \ddots & C_k^1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

在上式中, 我们并没有讨论 k 和 n 的大小关系, 而是使用了更广泛的组合数定义 $C_p^q = 0, \forall q > p$ 来使结果简洁.

(5)

$$\text{注意到 } \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T (b_1, b_2, \cdots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} AB,$$

且 $BA = (b_1, b_2, \cdots, b_n)(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, 有

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}^k &= (AB)^k = ABAB \cdots AB = A(BA)(BA) \cdots (BA)B \\
 &= A \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^{k-1} B = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^{k-1} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

习题 1.24 (第四章第 8 题)

8. 设 A, B 都是 n 阶对称方阵, 且 $AB = BA$. 证明 AB 也是对称方阵.



证明 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 即 AB 为对称方阵.

习题 1.25 (第四章第 9 题)

证明: 两个 n 阶上(下)三角方阵的乘积仍是上(下)三角.



证明 我们只证上三角阵, 下三角阵同理.

设 A, B 为任意两个 n 阶上三角方阵, 则 $\forall 1 \leq j < i \leq n$ 有 $A_{ij} = B_{ij} = 0$, 令 $C = AB$, 则 $\forall 1 \leq j < i \leq n$, 有

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \cdot 0 = 0 \quad (1.48)$$

即 C 为上三角阵.

注 上三角阵的等价表述是其行标大于列标的元素均为 0.

习题 1.26 (第四章第 10 题)

证明: 与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵.



证明 设 A 为与任意 n 阶方阵均乘法可交换的 n 阶方阵, 考虑 A 与矩阵 E_{ij} (表示第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素均为 0 的 n 阶方阵) 的乘法, 有:

$$AE_{ij} = E_{ij}A \implies a_{ii} = a_{jj}, \quad a_{pi} = a_{jq} = 0 \quad (\forall p \neq i, q \neq j) \quad (1.49)$$

其中 a_{st} 表示矩阵 A 的第 s 行第 t 列元素. 在式 (1.49) 中取 $i = 1$, 令 j 遍历 1 到 n 可得: $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ 且 $a_{st} = 0 \quad \forall s \neq t$. 即 A 为数量阵.

习题 1.27 (第四章第 17 题)

求所有满足 $A^2 = O, B^2 = I, \bar{C}^T C = I$ 的 2 阶复方阵 A, B, C .



解

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则由题得到方程组: $a^2 + bc = b(a + d) = c(a + d) = bc + d^2 = 0$, 下面分类讨论:

当 $b = 0$ 时 $a = d = 0$, c 可取任意复数, 此时 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$;

当 $b \neq 0$ 时 $a + d = 0, bc = -a^2$, 此时 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$.

(2) 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则由题得到方程组: $a^2 + bc = bc + d^2 = 1, b(a + d) = c(a + d) = 0$, 下面分类讨论:

当 $b = 0$ 时, $a = \pm 1, d = \pm 1$, 有 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

当 $b \neq 0$ 时, $a + d = 0, c = \frac{1-a^2}{b}$, 即 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

(3) 由 $\overline{C}^T C = I$ 易知 $C \overline{C}^T = I$. 设 $C = \begin{pmatrix} ae^{i\alpha_1} & be^{i\alpha_2} \\ ce^{i\alpha_3} & de^{i\alpha_4} \end{pmatrix}$ 其中 $a, b, c, d \geq 0$ 为模长. 由 $\overline{C}^T C = I$ 及 $C \overline{C}^T = I$ 可得 $a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = c^2 + d^2 = b^2 + d^2 = 1$, 设 $a = \cos \theta$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), 有 $b = c = \sin \theta, d = \cos \theta$. 下面分类讨论:

$\theta = 0$ 时 $C = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_4} \end{pmatrix}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时 $C = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha_2} \\ e^{i\alpha_3} & 0 \end{pmatrix}$ (这两种情况可以合并到第三种的结果里)

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时进一步由题有 $e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} + e^{i(\alpha_4 - \alpha_3)} = 0$, 得 $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_3 - \pi + 2k\pi$, 故有 $C = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\alpha_1} & -\sin \theta e^{i(\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_3)} \\ \sin \theta e^{i\alpha_3} & \cos \theta e^{i\alpha_4} \end{pmatrix}$, 这里将第一行第二列元素的辐角用其他三个角度表示是为了与二阶旋转矩阵形式统一, 特别地, 当四个辐角均取 0 时 C 即为旋转矩阵.

下面给出丘维声《高等代数》下册对本题的做法:

例 11 求出所有 2 级酉矩阵.

解 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

是酉矩阵, 则 $A^{-1} = A^*$. 于是有

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}.$$

由此得出, $a_{22} = |A| \overline{a_{11}}$, $a_{12} = -|A| \overline{a_{21}}$.

由于 A 的列向量组是 \mathbf{C}^2 的一个标准正交基, 因此 $|a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 = 1$. 从而 $(|a_{11}|, |a_{21}|)$ 是单位圆上的一个点且在第 1 象限或在 x 轴、 y 轴的正半轴上, 于是存在 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 使得 $|a_{11}| = \cos \theta, |a_{21}| = \sin \theta$. 因此 $a_{11} = \cos \theta e^{i\theta_1}, a_{21} = \sin \theta e^{i\theta_2}$, 其中 $0 \leq \theta_j < 2\pi, j=1, 2$.

据本套教材上册习题 4.6 第 18 题, 酉矩阵 A 的行列式的模为 1, 因此 $|A| = e^{i\theta_3}$, 其中 $0 \leq \theta_3 < 2\pi$, 于是 $a_{22} = e^{i\theta_3} \cos \theta e^{-i\theta_1}, a_{12} = -e^{i\theta_3} \sin \theta e^{-i\theta_2}$. 从而

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\theta_1} & -\sin \theta e^{i\theta_3} e^{-i\theta_2} \\ \sin \theta e^{i\theta_2} & \cos \theta e^{i\theta_3} e^{-i\theta_1} \end{pmatrix}. \quad (71)$$

直接验证知道, 形如 (71) 的矩阵都是酉矩阵. 于是 (71) 式给出了所有的 2 级酉矩阵, 其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta_j < 2\pi, j=1, 2, 3$.

可以把 (71) 式的 A 写成下述形式:

$$A = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i(\theta_1 + \theta_2)} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix}. \quad (72)$$

习题 1.28 (第四章第 30 题)

设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^3 = I_n$. 计算 $\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024}$.



解

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024} &= \left(\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^2 \right)^{1012} \\
 &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^{1012} \\
 &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^{1011} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
 &= \left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^3 \right)^{337} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
 &= I_{2n} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}. \tag{1.50}
 \end{aligned}$$