

## 2.8 第八次习题课

### 2.8.1 期末复习知识点整理

期末考试主要考察后三章（即六、七、八）三章，期中前的内容大概率不会单独考察，但实际上后半学期的内容也是建立在前面章节的基础上的，所以打牢基础才是最重要的。在理解和掌握基本概念的基础上再适当做几套往年考试题，就能拿到一个比较理想的成绩了。接下来我们按照书上章节的顺序梳理一下重要的知识点，并适当结合一些往年的真题来加深理解。

**注** 助教考试前也是看不到卷子的，所以我们仅是在个人理解范围内，尽可能帮助大家建立一个知识框架，可用于查漏补缺，但不能代表考试重点和考试题型，如有错误或疏漏欢迎指正。

**注** 标注 \* 的表示不要求掌握，但我觉得值得了解的内容。

### 线性变换

#### ¶ 数组空间上的线性映射

- 数组空间上线性映射（变换）可与矩阵一一对应
- 由上条推出的线性映射（变换）的秩与矩阵的秩的对应关系
- 验证是否是线性映射（变换）：保加法、保数乘（\* 注意数域的选取）
- 像空间与核空间维数和为  $n$

#### ¶ 线性变换的特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的定义（注意特征向量是非零向量）
- 特征值与特征向量的几何意义：一般考虑二维情形，即椭圆长短轴，就足够了。但是这只对线性变换可对角化的情形成立，变换不可对角化时不能通过求特征值来得到长短轴长度，因为二维情形下，不可对角化说明变换只有一个特征值，且对应的特征子空间是一维的，自然无法求出两个对称轴。

**例题 2.45（2023-2024 第二学期期末填空 6.）** 设平面  $\mathbb{R}^2$  上的线性变换  $\mathcal{B}: (x, y)^T \mapsto (x + y, y)$  将单位圆  $C$  变为椭圆  $E$ ，则  $E$  的长半轴的长度为：

**解** 这个变换对应的矩阵是不能对角化的，所以我们采用另外一种方式：单位圆上一点  $(\cos \theta, \sin \theta)$  在变换后的像为  $(\cos \theta + \sin \theta, \sin \theta)$ ，由线性性，原点仍然是椭圆的中心，那么我们只需要最大化这个点到原点的距离，即为长半轴长度， $(\cos \theta + \sin \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1 + \sin^2 \theta + \sin 2\theta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \sin 2\theta$ ，最大值为  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ，故  $E$  的长半轴的长度为  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ （实际上根据取最大值时的  $\theta$  值，也可定出长半轴方向）。

- 特征子空间，\* 为了使其成为子空间，将特征向量全体再并上零向量。
- 特征值与特征向量的求解：先求出特征多项式，再对代入每个特征值求解线性方程组得到特征向量。
- 注意特征值相同不能推出特征向量相同，比如  $A$  与  $A^T$ （很多人作业里犯过这个错误）。
- 特征值与矩阵迹、行列式的关系： $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ 。

#### ¶ 矩阵的相似

- 相似的定义。\* 看清楚在什么数域上相似（如实相似和复相似是不同的）。
- 相似的矩阵有相同的特征多项式和特征值，但不一定有相同的特征向量。
- 相似的矩阵有相同的迹与行列式，秩也相同，这是上面一条与上节最后一条的推论。
- $n$  阶方阵  $A$  可对角化的充要条件：

(1)  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量

(2)  $A$  每个特征值的代数重数与几何重数相等 (回顾代数重数和几何重数的定义: 特征多项式中的幂次与特征子空间的维数。实际上很容易推出与 (1) 等价)。

- 不同特征值对应的特征向量线性无关, 利用这个可以推出特征值两两不同的方阵一定可以对角化。同时这个命题的证明方法也值得看一看 (利用归纳法)。
- 实对称方阵的特征值都是实数, 且不同特征值对应的特征向量是正交的, 且一定可以正交相似对角化。(教材命题 7.3.4, 命题 7.3.5, 定理 7.3.6) 这个很重要, 最好要熟悉证明过程。

**例题 2.46 (2023-2024 第二学期期末 6.)** 设  $A, B$  均为  $n$  阶实对称方阵, 满足  $AB = BA$ 。

(1) 证明: 存在非零列向量  $v \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $v$  同时为  $A$  和  $B$  的特征向量。

(2) 证明: 存在  $n$  阶正交方阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  与  $P^{-1}BP$  均为对角矩阵。

**证明** 任取 (2) 中的  $P$  的一个列向量作为  $v$ , 满足 (1) 中条件, 只证明 (2) 即可。

将  $A$  正交相似到对角阵:  $T^{-1}AT = \Lambda$ , 由题有  $T^{-1}ATT^{-1}BT = T^{-1}ABT = T^{-1}BAT = T^{-1}BTT^{-1}AT$  即  $\tilde{B} = T^{-1}BT$  与  $\Lambda$  可交换。由上面的命题可将  $\Lambda$  与  $\tilde{B}$  写为分块形式:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s I_{r_s} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_i$  是  $A$  的互不相同的特征值。考察  $\Lambda \tilde{B}$  与  $\tilde{B} \Lambda$  的第  $(i, j)$  个分量得到  $\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$ , 且由于  $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$ , 所以  $B_{ij} = 0, i \neq j$ 。所以  $\tilde{B}$  是准对角阵。注意到  $\tilde{B}$  是实对称阵, 所以  $B_{ii}$  是实对称阵, 从而对每一个  $B_{ii}$ , 均存在一个  $Q_i$ , 使得  $Q_i^{-1} B_{ii} Q_i$  为对角阵。记

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_s \end{pmatrix}$$

取  $P = TQ$ , 则  $P$  满足题意。

- 实对称矩阵正交相似到对角阵的具体过程, 可参考教材例 7.3.3, 这个计算过程一定要会。

**例题 2.47 (教材例 7.3.3)** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求正交阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT$  为对角阵

**解** 具体过程参见教材, 一定要自己动手算一下, 这类题目既有计算特征多项式, 又涉及 Schmidt 正交化, 不注意就可能算错。

- 任意一个复方阵都可以相似于一个上三角阵, 且主对角线元素都是特征值 (用数学归纳法证明)。

## II 一般空间上的线性变换

- 一般线性空间上的线性映射 (变换) 的定义: 保加法和数乘。这里我们不能直接以矩阵的形式 ( $y = Ax$ ) 来表示线性映射 (变换), 数组空间可以这么做是因为矩阵与数组向量有一个良好的乘法运算, 但在一般的线性空间中, 我们甚至不知道这里 “向量” 的具体形式, 因而  $Ax$  也是没有定义的。但我们仍然可以用线性映射 (变换) 在基下的矩阵来表示它, 注意二者是有区别的。

**例题 2.48** 定义  $\Lambda: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \Lambda(f) = f(0)$ , 显然这是一个线性映射, 但是无法用  $y = Ax$  的形式来表示。即使我们取  $C[a, b]$  的一个有限维子空间  $P_n[a, b]$ , 即次数不超过  $n$  次的多项式全体构成的空间, 仍然不能以这种形式来表示, 但这个映射在基  $\{1, x, \dots, x^n\}$  下的矩阵为  $\text{diag}(1, 0, \dots, 0)$

- 线性相关的向量在线性映射作用后仍然线性相关
- (根据个人经验, 本课程在涉及线性映射在基下的矩阵时, 一般只考虑线性变换) 线性变换在一组基下的矩阵实际上是每个变换后的基向量在这组基下的坐标。
- 线性变换在基下的矩阵导出坐标变换  $y = Ax$ , 这里  $x$  与  $y$  分别是  $\alpha$  与  $\mathcal{A}\alpha$  在基下的坐标 (定理 6.4.3)。

- 线性变换在不同基下的矩阵相似，相差的矩阵即为两组基之间的过渡矩阵。

**例题 2.49 (2024-2025 第一学期期末判断 2.)** 设  $V$  是  $n$  维线性空间， $\mathcal{A}$  是  $V$  上的线性变换，若  $\mathcal{A}$  在  $V$  的任意一组基下的矩阵都相等，则  $\mathcal{A}$  是  $V$  上的数乘变换。

**解** 正确，由不同基下矩阵之间相似可以得到  $A = PAP^{-1}$  对任意可逆矩阵  $P$  都成立，即  $AP = PA$ ，从而只能是  $A = \lambda I$ ，也就是  $\mathcal{A}$  为数乘变换。

- 线性变换与其在任一组基下的矩阵有相同的特征值。

**例题 2.50 (教材例 6.4.10)** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $V = F^{2 \times 2}$  为线性空间，定义  $V$  上的线性变换  $\mathcal{A} : \mathcal{A}M = AM, M \in V$ ，求  $\mathcal{A}$  的特征值和特征向量。

**解** 具体过程参见教材，这类题考试还是常考的，只要对线性映射理解透彻的话就很容易做。首先  $A$  是用来定义这个映射的，并不是这个映射在基下的矩阵，这二者是完全不同的，空间  $V$  的维数是 4，所以变换在基下的矩阵也一定是 4 阶方阵。并且要记住线性变换在基下的矩阵是坐标，所以这个矩阵的特征向量也是在基下的坐标，所以  $\mathcal{A}$  的特征向量是这组基乘上坐标，而不是矩阵的特征向量（ $V$  中的“向量”是二阶方阵，而不是数组向量）。

- 线性变换  $\mathcal{A}$  可对角化的定义：其在某组基下的矩阵  $A$  为对角阵。同时变换的特征多项式、秩、迹、行列式也是类似定义，\* 它们良定因为这些都是相似不变量。

## 内积空间及变换

### ¶ 数组内积空间的定义与性质

- 用度量矩阵来定义的数组空间内积，三条性质：对称性、线性性、正定性。
- 用内积来诱导度量（或说是向量的模长），Cauchy-Schwarz 不等式。
- 度量（距离）的三条性质：对称性、正定性、三角不等式，向量夹角，勾股定理（教材命题 7.1.2）

### ¶ 标准正交基

- 标准正交基：标准：模长都是 1；正交：两两正交；基：构成空间的一组基。
- Schmidt 正交化（基本是每年必考的）：一定要熟悉正交化的过程，实质上是一个正交分解的过程，顺次在前面每个已经构建好的两两正交的向量上做投影，减去这些投影的和，就得到与前面都正交的一个向量，再单位化，不断重复。理解了这个几何视角就会好记忆很多，但是计算时也要小心不要出错。

**例题 2.51 (2024-2025 第一学期期末 4.)** 记  $V$  是所有 2 阶实对称方阵构成的实线性空间。对于  $V$  中任意两个矩阵，定义  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$ ，则  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  构成一个欧式空间。

(1) 考虑  $V$  中向量  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。将  $A_1, A_2$  扩充为  $V$  的一组基  $\Gamma_1$ 。

(2) 利用 Schmidt 正交化，从  $\Gamma_1$  构造  $V$  的一组标准正交基  $\Gamma_2$ 。

**解** (1) 显然  $V$  的维数是 3，我们可以先考虑  $A_1, A_2$  生成的子空间，我们发现这两个向量的线性组合可以让两个对角元取到任意值，但是另外两个元素受到组合系数的约束，所以我们可以取  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

(2) 按照题目上内积的定义来计算向量模长。 $|A_1|^2 = \text{tr}(A_1 \cdot A_1) = 3$ ,  $|A_1| = \sqrt{3}$ ，故取  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}A_1$ 。  $\beta_2 =$

$$A_2 - \text{tr}(A_2, e_1)e_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \beta_3 = A_3 - \text{tr}(A_3, e_1)e_1 - \text{tr}(A_3, e_2)e_2 =$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{|\beta_3|}\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, e_1, e_2, e_3 \text{ 即为一组标准正交基。}$$

- 正交方阵的定义:  $QQ^T = Q^TQ = I$ , 等价的条件:  $Q$  的行(或列)向量构成  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基. 前者常用于验证方阵为正交方阵, 或在某些问题中将单位阵  $I$  写为  $QQ^T$  来简化处理; 后者则常常是已知是正交方阵情况下, 用这个性质来处理问题.

**例题 2.52 (2024-2025 第一学期期末判断 3.)** 设  $A, B$  是  $n$  阶正交矩阵, 满足  $|A| + |B| = 0$ , 则  $|A + B| = 0$ .

**解** 正确, 这里显然是用正交方阵的定义来处理, 我们有  $|A + B| = |BB^T A + BA^T A| = |B||B^T + A^T||A| = -|A|^2|A + B| = -|A + B|$ , 故有  $|A + B| = 0$ .

**例题 2.53 (2024-2025 第一学期期末 6.)** 考虑实对角阵  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ , 其中  $a_1 > \dots > a_n > 0$ , 设  $P, Q$  是  $n$  阶正交矩阵, 且  $PA = AQ$ , 证明  $P = Q$ .

**证明** 这里给出了我们  $A$  中元素的形式, 这提示我们用上述正交矩阵的第二性质, 设  $P = (p_{ij}), Q = (q_{ij})$ , 则  $PA = AQ$  即:

$$\begin{pmatrix} a_1 p_{11} & a_2 p_{12} & \cdots & a_n p_{1n} \\ a_1 p_{21} & a_2 p_{22} & \cdots & a_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 p_{n1} & a_2 p_{n2} & \cdots & a_n p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 q_{11} & a_1 q_{12} & \cdots & a_1 q_{1n} \\ a_2 q_{21} & a_2 q_{22} & \cdots & a_2 q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n q_{n1} & a_n q_{n2} & \cdots & a_n q_{nn} \end{pmatrix}$$

由于  $Q$  是正交方阵,  $AQ$  的第 1 个行向量的模长平方是  $a_1^2$ , 再由  $PA$  的形式,  $a_1^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 p_{1k}^2 \leq a_1^2$ , 说明等号成立, 那么只有  $|p_{11}| = 1, p_{1j} = 0, j = 2, \dots, n$ , 类似地可得  $P, Q$  均为对角阵, 而  $a_i > 0$ , 故  $P = Q$ .

- 正交方阵的一些性质 (教材定理 7.2.4), 上面的例题也有用到这些性质.

- (1) 单位阵是正交方阵
- (2) 若  $A, B$  是同阶正交方阵, 则  $AB$  也是正交方阵
- (3) 若  $A$  是正交方阵, 则  $A^T = A^{-1}$  也是正交方阵
- (4) 正交方阵的行列式是 1 或  $-1$
- (5) 正交方阵的特征值模长为 1

- 正交子空间、正交投影. 正交投影在处理最佳逼近元问题时可以在一定程度上简化计算.

**例题 2.54 (2021-2022 第二学期期末 4.)** 在数域  $\mathbb{R}$  上次数不超过 3 的多项式全体构成的线性空间  $R_3[x]$  上

定义内积  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ .

- (1) 将向量组  $1, x, x^2$  按顺序使用 Schmidt 正交化得到单位正交向量组.
- (2) 令  $W = \langle 1, x, x^2 \rangle$ . 求多项式  $p(x) \in W$  使得  $|x^3 - p(x)|$  达到最小.

**解** (1) 按正交化过程计算即可, 单位正交向量组为  $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1) \right\}$ , 记为  $\{e_1, e_2, e_3\}$

(2) 我们用正交投影的方法来处理这个问题, 要求的  $p(x)$  即为  $x^3$  在子空间  $W$  上的正交投影.

即  $p(x) = \langle x^3, e_1 \rangle e_1 + \langle x^3, e_2 \rangle e_2 + \langle x^3, e_3 \rangle e_3 = \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} x = \frac{3}{5} x$  (前后两项由于是奇函数, 积分为 0).

## 2.8.2 同时对角化

### 习题 2.48 (公共特征向量)

设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是线性空间  $V$  上的线性变换, 若  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$  且  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  的特征值均在  $\mathbb{F}$  中. 则  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  有公共特征向量.

**证明** 由  $\mathcal{A}$  的特征值在  $\mathbb{F}$  中, 知存在  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ , 使得  $V_{\lambda_0} = \{x \in V : \mathcal{A}x = \lambda_0 x\} \neq \emptyset$ . 对任意  $x \in V_{\lambda_0}$ , 有  $\mathcal{A}\mathcal{B}x = \mathcal{B}\mathcal{A}x = \lambda_0 \mathcal{B}x$ , 故  $\mathcal{B}x \in V_{\lambda_0}$ , 因此  $V_{\lambda_0}$  是  $\mathcal{B}$ -不变子空间. 由于  $\mathcal{B}$  的特征值均在  $\mathbb{F}$  中, 因此  $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_0}}$  的特征值也均在  $\mathbb{F}$  中, 故存在  $x_0 \in V_{\lambda_0}$  及  $\mu_0 \in \mathbb{F}$ , 使得  $\mathcal{B}x_0 = \mu_0 x_0$ .  $x_0$  即为所求.

**注**[矩阵语言] 设矩阵  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $AB = BA$  且  $A, B$  特征值均在  $\mathbb{F}$  中. 则矩阵  $A, B$  有公共特征向量. 考虑线性

变换  $\mathcal{A}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, x \mapsto Ax; \mathcal{B}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, x \mapsto Bx$ , 易知  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$  由上例立明.

### 习题 2.49

设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是线性空间  $V$  上的线性变换, 若  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  的特征值均在  $\mathbb{F}$  中且  $\mathcal{A}$  有  $n = \dim V$  个不同的特征值. 则存在  $V$  中的一组基, 使得  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  在这组基下的矩阵均为对角矩阵.

**证明** 设  $\mathcal{A}$  的特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , 对应的特征向量为  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . 则  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$  且  $V_{\lambda_i} = \text{span}\{\alpha_i\}$ . 同上例知  $V_{\lambda_i}$  是  $\mathcal{B}$ -不变子空间. 特别地, 存在  $\mu_i \in \mathbb{F}$ , 使得  $\mathcal{B}\alpha_i = \mu_i\alpha_i$ . 因此线性变换  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  在基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  下对应的矩阵均为对角矩阵.

**注**[矩阵语言] 设  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}, AB = BA, A, B$  的特征值均在  $\mathbb{F}$  中且  $A$  有  $n$  个不同的特征值. 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP, P^{-1}BP$  同时为对角矩阵.

**证明** 作业题.

### 习题 2.50

设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是  $V$  上的线性变换, 若  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$  且存在两组基使得  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  分别在这两组基下对应的矩阵是对角矩阵. 则存在一组基, 使得  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  在这组基下对应的矩阵同时为对角矩阵.

**证明** 由于  $\mathcal{A}$  可对角化, 因此  $V$  可以分解成  $\mathcal{A}$  的特征子空间的直和, 即  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ , 其中  $V_{\lambda_i} = \{x \in V: \mathcal{A}x = \lambda_i x\}$ . 且  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . 同上, 知  $V_{\lambda_i}$  是  $\mathcal{B}$ -不变子空间. 下面对  $n = \dim V$  进行归纳. 当  $n = 1$  时, 显然. 假设命题对小于  $n$  时成立, 下面需说明命题对  $n$  成立. 当  $k = 1$  时,  $\mathcal{A} = \lambda_1 \text{id}_V$ , 又  $\mathcal{B}$  可以对角化, 因此  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  可以同时角化. 当  $k > 1$  时,  $\dim V_{\lambda_i} < n$ , 又  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ , 故  $\mathcal{A}|_{V_{\lambda_i}} \mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}} = \mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}} \mathcal{A}|_{V_{\lambda_i}}$ ,  $\mathcal{A}|_{V_{\lambda_i}}, \mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}}$  在  $V_{\lambda_i}$  上可对角化. 由归纳假设, 知存在  $V_{\lambda_i}$  上的一组基  $e_{i1}, \dots, e_{is_i}$  使得  $\mathcal{A}|_{V_{\lambda_i}}, \mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}}$  在这组基下为对角矩阵, 将诸如此类基拼成  $V$  的基, 易知  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  在这组基下的矩阵为对角矩阵.

**注**[矩阵语言] 设  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 若  $AB = BA$  且  $A, B$  均可对角化. 则  $A, B$  可以同时角化.

**证明** 对矩阵阶数进行归纳, 当  $n = 1$  时, 显然. 假设命题对于小于  $n$  时成立, 现需证明命题对于  $n$  成立. 存在

可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{l_1}, \dots, \lambda_s I_{l_s})$ , 记  $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix}$ , 其中  $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ . 由

$AB = BA$  知矩阵  $P^{-1}AP$  与矩阵  $P^{-1}BP$  可交换. 故  $\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij} (i \neq j)$ , 故  $B_{ij} = 0 (i \neq j)$ . 当  $k = 1$  时,  $A$  为数量矩阵, 结论显然. 当  $k > 1$  时,  $B_{ii}$  阶数小于  $n$ , 存在可逆矩阵  $Q_{ii}$ , 使得  $Q_{ii}^{-1}B_{ii}Q_{ii}$  为对角矩阵. 令  $Q = \text{diag}(Q_{11}, \dots, Q_{kk})$ , 令  $T = QP$ , 则有  $T^{-1}AT$  与  $T^{-1}BT$  同时为对角矩阵.

**笔记** 还可以证明: (1) 若  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{F}^{n \times n}$  两两可交换, 且它们的特征值均在  $\mathbb{F}$  中, 则  $A_1, \dots, A_m$  有公共特征向量.

(2) 若  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{F}^{n \times n}$  两两可交换, 且它们在  $\mathbb{F}$  中均可对角化, 则  $A_1, \dots, A_m$  可同时对角化.

## 2.8.3 半正定矩阵开 $k$ 次方

### 习题 2.51

设  $B$  是  $n$  阶半正定矩阵,  $\mu_1, \dots, \mu_n$  是  $B$  的  $n$  个特征值. 则对任意给定的正整数  $k$ , 存在一个只和  $\mu_i^k$  有关的实系数多项式  $f(x)$ , 满足  $B = f(B^k)$ .

**证明** 设  $\mu_1, \dots, \mu_n$  中互不相同的数为  $\mu_1, \dots, \mu_s$ , 记  $\lambda_i = \mu_i^k$ , 令  $f(x) = \sum_{i=1}^s \frac{(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{i-1})(x-\lambda_{i+1})\cdots(x-\lambda_s)}{\lambda_i - \lambda_1 \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_s)}$ . 存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T B Q = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , 易验证  $B = f(B^k)$ .


## 习题 2.52

设  $A$  是  $n$  阶半正定矩阵. 则对任意正整数  $k$ , 存在唯一的  $n$  阶半正定矩阵  $B$ , 使得  $A = B^k$ .



**证明** (存在性) 存在正交矩阵  $P$ , 使  $P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , 其中  $\lambda_i \geq 0$ . 令  $B = P \text{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{k}}, \dots, \lambda_n^{\frac{1}{k}}) P^T$ , 则  $B$  半正定且  $B^k = A$ .

(唯一性) 若  $B^k = A$ , 设  $B$  的特征值为  $\mu_i$ , 则  $A$  的特征值为  $\lambda_i^{\frac{1}{k}}$ , 由上例, 存在一个只与  $\mu_i$  有关的多项式  $f(x)$  使得  $f(A) = f(B^k) = B$ . 若还有  $C$ , 满足  $C^k = A$ , 同上分析有  $C = f(C^k) = f(A)$ , 从而  $B = C$ .

 **笔记** 我们一般将上例中  $B$  定义为  $A^{\frac{1}{k}}$ , 由以上两个例子知, 这个定义是合理的 (存在且唯一).

**注** 第十六次作业中的补充题对正定矩阵同时开根号即可.

一学期的助教工作已经走向尾声了, 在这里送给大家一句话作为本学期课程的结束:

我们是孩子, 但是我们精力充沛, 勇往直前……

——1831 年 6 月 16 日伽罗瓦在法庭上的辩护词

最后, 祝大家期末考试取得好成绩!