第十一周作业答案（部分）

李浩哲

2024 年 11 月 14 日

[0]本文档使用 LaTeX 编写，如有错误或笔误欢迎指正

1 第五章习题 (习题四)

34. 以向量组 $a_1=(3,1,0),a_2=(6,3,2),a_3=(1,3,5)$ 为基，求 $\beta=(2,-1,2)$ 的坐标.

解：即求线性表示的系数，做初等变换如下：

$$\begin{pmatrix}3&6&1&2\\1&3&3&-1\\0&2&5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3&-1\\3&6&1&2\\0&2&5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3&-1\\0&-3&-8&5\\0&2&5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3&-1\\0&-3&-8&5\\0&0&-1/3&16/3\end{pmatrix}\tag{1}$$

故坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T=(-76,41,-16)^T$

35. 设 $a_1=(3,2,-1,4),a_2=(2,3,0,-1)$.

(1) 将 a_1,a_2 扩充为 R^4 的一组基；

(2) 给出标准基在该组基下的表示；

(3) 求 $\beta=(1,3,4,-2)$ 在该组基下的坐标.

解：虽然题目给的向量是行向量，但我们还是习惯性地使用列向量来进行计算，即将所有向量转置.

(1) 注意到 a_1,a_2 的前两个分量线性无关，故可以直接补充 $a_3=(0,0,1,0)$, $a_4=(0,0,0,1)$ 得到一组基.

(2) 基变换写为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}$$

故 $$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

即标准基在这组基下的表示为 $$\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3/5&-2/5&0&0\\-2/5&3/5&0&0\\3/5&-2/5&1&0\\-14/5&11/5&0&1\end{pmatrix}$$

(3) 由坐标变换公式，$\beta'=T^{-1}\beta=(-3/5,7/5,17/5,9/5)$.

36. 将三维几何空间中的直角坐标系 $[O;e_1,e_2,e_3]$ 绕单位向量 $e=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 逆时针旋转 θ 角，求新坐标与原坐标之间的关系.

解:将标准基 1 换为 $e_1'=e$ 及垂直于 e 的平面内互相垂直的两单位向量 $e_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), e_3'=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ 组成的基 2，有过渡矩阵 $T_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

满足

$$(e_1,e_2,e_3)T_1=(e_1',e_2',e_3'); \tag{2}$$

再将基 2 绕 e 逆时针旋转 θ 角得到基 3：(e_1'',e_2'',e_3'')，有过渡矩阵 (即二维旋转)：

$$T_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\theta & -sin\theta\\ 0 & sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}$$

满足

$$(e_1',e_2',e_3')T_2=(e_1'',e_2'',e_3''); \tag{3}$$

由于旋转过程中基 1 与基 2 的相对位置保持不变，故基 1 经旋转得到的基 4：(e_1''',e_2''',e_3''') 与基 3 之间满足和基 1 与基 2 相同的关系：

$$(e_1''',e_2''',e_3''')T_1=(e_1'',e_2'',e_3''); \tag{4}$$

即

$$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1'',e_2'',e_3'')T_1^{-1}. \tag{5}$$

综合式 (2)(3)(5) 得到标准基在旋转前后的基变换：

$$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1,e_2,e_3)T_1T_2T_1^{-1} \tag{6}$$

故坐标变换为：

$$\alpha'=R\alpha=T_1T_2^{-1}T_1^{-1}\alpha \tag{7}$$

旋转矩阵写为:

$$\begin{aligned}R&=T_1T_2^{-1}T_1^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}(1+2cos\psi)/3 & (1-cos\psi+\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1-cos\psi-\sqrt{3}sin\psi)/3\\ (1-cos\psi-\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1+2cos\psi)/3 & (1-cos\psi+\sqrt{3}sin\psi)/3\\ (1-cos\psi+\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1-cos\psi-\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1+2cos\psi)/3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

注：本题也可以直接使用 Rodrigues 转动公式：

$$R(\vec{\psi}) = \begin{pmatrix} n_1^2(1-cos\psi)+cos\psi & n_1n_2(1-cos\psi)-n_3sin\psi & n_1n_3(1-cos\psi)+n_2sin\psi \\ n_1n_2(1-cos\psi)+n_3sin\psi & n_2^2(1-cos\psi)+cos\psi & n_2n_3(1-cos\psi)-n_1sin\psi \\ n_1n_3(1-cos\psi)-n_2sin\psi & n_2n_3(1-cos\psi)+n_1sin\psi & n_3^2(1-cos\psi)+cos\psi \end{pmatrix}$$

由于坐标轴绕 e 逆时针转 θ 角，故相对地，坐标绕 e 顺时针转 θ 角，即 ψ 取 $-\theta$，而转轴 e 的三个分量即为 n_1, n_2, n_3，代入得

$$R(-\theta e) = \begin{pmatrix} (1-cos\psi)/3+cos\psi & (1-cos\psi)/3+\sqrt{3}sin\psi/3 & (1-cos\psi)/3-\sqrt{3}sin\psi/3 \\ (1-cos\psi)/3-\sqrt{3}sin\psi/3 & (1-cos\psi)/3+cos\psi & (1-cos\psi)/3+\sqrt{3}sin\psi/3 \\ (1-cos\psi)/3+\sqrt{3}sin\psi/3 & (1-cos\psi)/3-\sqrt{3}sin\psi/3 & (1-cos\psi)/3+cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2cos\psi)/3 & (1-cos\psi+\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1-cos\psi-\sqrt{3}sin\psi)/3 \\ (1-cos\psi-\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1+2cos\psi)/3 & (1-cos\psi+\sqrt{3}sin\psi)/3 \\ (1-cos\psi+\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1-cos\psi-\sqrt{3}sin\psi)/3 & (1+2cos\psi)/3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

40. 已知 F^5 中向量 $a_1 = (1,2,3,2,1)^T$ 及 $a_2 = (1,3,2,1,2)^T$，求找一个齐次线性方程组使得 a_1 与 a_2 为该方程组的基础解系.

设系数矩阵为 A，则齐次线性方程组写为 $Ax = O$，a_1 和 a_2 构成方程组的基础解系，即方程组的解空间维数等于 2，故 $rankA = 5 - dimV = 5 - 2 = 3$，故找一个列数为 5，秩为 3，$Aa_1 = O, Aa_2 = O$ 的矩阵 A 即可，例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

上式中 A 的每一行是如何确定的？实际上 A 的任意行向量 α 满足 $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix} \alpha^T = O$，这即是 $A(a_1, a_2) = O$ 转置后的结果.

41. 判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间

(1) V 是所有实数对 (x,y) 的集合，数域 $F = R$. 定义

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (x, y).$$

(2) V 是所有满足 $f(-1) = 0$ 的实函数的集合，数域 $F = R$. 定义加法为函数的加法，数乘为数与函数的乘法.

(3) V 是所有满足 $f(0) \neq 0$ 的实函数的集合，数域 $F = R$. 定义加法为函数的加法，数乘为数与函数的乘法.

(4) V 是数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的全体，加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘.

解：(1) 不构成线性空间. 因为不满足数乘分配律：

$$(\lambda + \mu)(x, y) = (x, y) \neq (2x, 2y) = (x, y) + (x, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y) \tag{11}$$

(2) 构成线性空间. 由于实函数在加法和数乘下构成线性空间，我们只需证 V 为实函数空间的子空间，即 V 封闭：

设 $f, g \in V$, 有 $(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1) = 0$，故 $f+g \in V$; $\lambda f(-1) = 0$，故 $\lambda f \in V$.

(3) 不构成线性空间，因为 V 对加法不封闭：

设 $f \in V$，则 $f(0) \neq 0$，$-f(0) \neq 0$. 故 $-f \in V$，而 $f + (-f) = 0$ 是恒为 0 的常量函数，其不在 V 中，故 V 对加法不封闭.

(3) 不构成线性空间，因为 V 对加法不封闭：

设 $A \in V$，则 A 可逆，显然 $-A$ 也可逆，但 $A + (-A) = O$ 不可逆，即零矩阵不在 V 中，V 对加法不封闭.