

## 1.7 第九周作业

## 习题 1.40 (第四章第 37 题)

设  $A$  是  $n$  阶可逆方阵,  $a, b$  为  $n$  维列向量. 证明:  $A + ab^T$  可逆当且仅当  $1 + b^T A^{-1}a \neq 0$ . 且  $A + ab^T$  可逆时,  $(A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a}$ .



**证明** (1) 先证  $A + ab^T$  可逆  $\iff 1 + b^T A^{-1}a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} A + ab^T \text{ 可逆} &\iff \det(A + ab^T) \neq 0 \\ &\iff \det(A)\det(I + A^{-1}ab^T) \neq 0 \\ &\iff \det(I + A^{-1}ab^T) \neq 0 \end{aligned}$$

注意到  $\det(I_m - PQ) = \det(I_n - QP)$ , 则有  $\det(I + A^{-1}ab^T) = \det(1 + b^T A^{-1}a)$

故  $A + ab^T$  可逆  $\iff 1 + b^T A^{-1}a \neq 0$ .

(2) 再求  $A + ab^T$  的逆.

对这种验证类的题目, 可以直接把题目给的结果代入验证, 这里不再赘述. 下面给出直接求逆的方法.

$$(A + ab^T)^{-1} = (A(I + A^{-1}ab^T))^{-1} = (I + A^{-1}ab^T)^{-1}A^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} BA^{-1}$$

则有

$$(I + A^{-1}ab^T)B = I \rightarrow B + A^{-1}ab^T B = I \quad (1.51)$$

两边同时左乘  $A^{-1}ab^T$  得

$$\begin{aligned} A^{-1}ab^T B + A^{-1}ab^T A^{-1}ab^T B &= A^{-1}ab^T \rightarrow A^{-1}ab^T B + A^{-1}a(b^T A^{-1}a)b^T B = A^{-1}ab^T \\ \rightarrow (1 + b^T A^{-1}a)A^{-1}ab^T B &= A^{-1}ab^T \rightarrow A^{-1}ab^T B = \frac{A^{-1}ab^T}{1 + b^T A^{-1}a} \end{aligned} \quad (1.52)$$

上式利用了  $b^T A^{-1}a$  是数, 可以随意交换位置

$$\text{带回式 (1.51) 得 } B = I - \frac{A^{-1}ab^T}{1 + b^T A^{-1}a}, \text{ 即 } (A + ab^T)^{-1} = BA^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a}.$$

## 习题 1.41 (第四章第 38 题)

设  $A \in F^{m \times m}, B \in F^{n \times n}, C \in F^{n \times m}$ , 且  $A$  为对称可逆方阵. 证明: 存在可逆方阵  $P$  使得

$$P \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & B \end{pmatrix} P^T \text{ 为准对角阵.}$$



**证明** 利用 Schur 公式  $\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$  进行对角化:

$$\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C^T \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & B - CA^{-1}C^T \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

易见左式最左边的矩阵即为满足要求的  $P$ :

$$\det(P) = \det\left(\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\right) = 1, \text{ 故可逆;}$$

$$P^T = \left(\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} I & (-CA^{-1})^T \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C^T \\ & I \end{pmatrix}.$$

## 习题 1.42 (第四章第 40 题 (1)(3))

计算下列矩阵的秩. (1)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$

解 (1) 进行初等变换:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 39/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.54)$$

经变换后的矩阵行列式为 0, 且容易找到一个非零三阶子式: 取第 1、2、3 行和第 1、2、4 列, 故矩阵秩为 3  
其实也可以直接从原矩阵出发: 观察易知第一行和第四行相等, 故其行列式为 0, 再找到一个非零三阶子式

即可说明秩为 3

但进行一定程度的初等变换可以让我们更容易地找到非零子式: 找对角元均非零的上三角子式即可.

(2) 进行初等变换: (一般步骤应遵循高斯消元法的过程, 由本题的特殊结构给出一种更简单的变换方法)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{依次减去上一行}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.55)$$

化简后的矩阵行列式为 0, 容易找到其左上角的三阶子式不为零, 故秩为 3.

## 习题 1.43 (第四章第 41 题)

对于  $a, b$  的各种取值, 讨论实矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix}$  的秩.

解 进行初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & b-6 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

对  $a, b$  的取值进行讨论如下:

(1)  $a, b$  均不为 6 时, 秩为 3; (2)  $a, b$  有一个 6 时, 秩为 2; (3)  $a, b$  均为 6 时, 秩为 1.

## 习题 1.44 (第四章第 42 题)

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $A^2 = I$ . 求方阵  $\text{diag}(I + A, I - A)$  的相抵标准型.

**解** 进行分块初等变换:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I+A & \\ O & I-A \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} I+A & O \\ I+A & I-A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I+A & O \\ 2I & I-A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & (I+A)(I-A)/2 \\ 2I & I-A \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} O & (I-A^2)/2 \\ 2I & I-A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & O \\ 2I & I-A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} O & O \\ 2I & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.57)$$

即相抵标准型为  $\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O \end{pmatrix}$

**注** 相抵标准型要和原矩阵大小相同, 有的同学这道题直接写的  $I_n$ , 这是不正确的.

## 习题 1.45 (第四章第 46 题)

设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = I$ , 证明:  $\text{rank}(I + A) + \text{rank}(I - A) = n$ .

**证明** 法一: 由  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(\text{diag}(A, B))$  知本题与 42 题等价.

法二: 利用秩不等式: (1)  $\text{rank}(I + A) + \text{rank}(I - A) \geq \text{rank}((I + A) + (I - A)) = n$

(2) 由 Sylvester 不等式:  $\text{rank}(I + A) + \text{rank}(I - A) \leq \text{rank}((I + A)(I - A)) + n = \text{rank}(O) + n = n$

综合 (1)(2) 知命题成立.

## 习题 1.46 (第五章第 1 题)

设  $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 3)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 0)$  是三维几何空间中的三个向量. 能否将其中某一个向量写成其它两个向量的线性组合? 这三个向量是否共面?

**解** 注意到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

故向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性无关, 因此其中任一向量不能表示为其它两个向量的线性组合, 进而这三个向量不共面.

## 习题 1.47 (第五章第 3 题)

在  $\mathbb{F}^4$  中, 判断向量  $\mathbf{b}$  能否写成  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  的线性组合. 若能, 写出一种表达方式.

$$(1) \quad \mathbf{a}_1 = (-1, 3, 0, -5), \mathbf{a}_2 = (2, 0, 7, -3), \mathbf{a}_3 = (-4, 1, -2, 6), \mathbf{b} = (8, 3, -1, -25).$$

$$(2) \quad \mathbf{a}_1 = (3, -5, 2, -4)^T, \mathbf{a}_2 = (-1, 7, -3, 6)^T, \mathbf{a}_3 = (3, 11, -5, 10)^T, \mathbf{b} = (2, -30, 13, -26)^T.$$

**解** (1) 这个问题等价于线性方程组  $x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + x_3\alpha_3^T = \mathbf{b}^T$  是否有解, 若有解, 给出一组解. 考虑增广矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 6 & -25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得  $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, -3)$ , 故  $\mathbf{b} = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$ .

(2) 类似于 (1) 考虑线性方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = b$ . 对增广矩阵作初等变换

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 11 & -30 \\ 2 & -3 & -5 & 13 \\ -4 & 4 & 10 & -26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -11 \\ 0 & 17 & 51 & -85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得  $(x_1, x_2, x_3) = (-3, -8, 1)$ , 故  $b = -3\alpha_1 - 8\alpha_2 + \alpha_3$ .

#### 习题 1.48 (第五章第 4 题)

设  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 0), \mathbf{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$ . 证明:  $\mathbb{F}^4$  中任何向量可以写成  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  的线性组合, 且表示唯一.

**证明** 对任意向量  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{F}^4$ , 考虑线性方程组  $x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + x_3\alpha_3^T + x_4\alpha_4^T = \mathbf{b}^T$ . 原问题等价于此线性方程组对任意向量  $\mathbf{b}$  是否存在解, 且解唯一. 注意到系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

非退化, 由 *Cramer* 法则知该线性方程组存在唯一解.

#### 习题 1.49 (第五章第 5 题)

设  $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$  是三维几何空间中的点. 证明:  $\mathbf{P}_i, i = 1, 2, 3, 4$  共面的条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**证明**  $\mathbf{P}_i, i = 1, 2, 3, 4$  共面等价于  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$  线性相关, 也等价于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

即等价于行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

#### 习题 1.50 (第五章第 7 题)

设  $b_1, b_2, \dots, b_s$  中的每一个向量是  $n$  维向量  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的线性组合. 证明:  $b_1, b_2, \dots, b_s$  的任何线性组合都是  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的线性组合.

**证明** 由于  $b_1, b_2, \dots, b_s$  中的每一个向量是  $n$  维向量  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的线性组合, 可假设

$$(b_1, b_2, \dots, b_s) = (a_1, a_2, \dots, a_r)A, \text{ 其中 } A \in \mathbb{F}^{r \times s}. \text{ 于是:}$$

$k_1 b_1 + \cdots + k_s b_s = (b_1, b_2, \cdots, b_s)(k_1, k_2, \cdots, k_s)^T = (a_1, a_2, \cdots, a_r)A(k_1, k_2, \cdots, k_s)^T$ , 其中  $k_i \in \mathbb{F}, \forall i = 1, \cdots, s$ .

故  $b_1, b_2, \cdots, b_s$  的任何线性组合都是  $a_1, a_2, \cdots, a_r$  的线性组合.

### 习题 1.51 (第五章第 9 题)

判别下列线性方程组是否线性相关

$$(1) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_3 = -1 \\ 8x_1 - 6x_2 - 10x_3 = -13 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

**解** (1) 对线性方程组的增广矩阵作如下初等变换

$$\left( \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 8 & -6 & -10 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{5r_1+r_2, 8r_1+r_3} \left( \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 14 & 19 \\ 0 & 10 & 14 & 19 \end{array} \right).$$

因此  $5r_1 + r_2 = 8r_1 + r_3$ , 进而  $r_2 = 3r_1 + r_3$ .

(2) 注意到系数矩阵之子式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的行列式不为零, 系数矩阵秩为 3, 因此线性无关.

### 习题 1.52 (第五章第 10 题)

判断下列向量组是否线性相关

(1)  $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, -2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$ ;

(2)  $a_1 = (1, -1, 0, 0), a_2 = (0, 1, -1, 0), a_3 = (0, 0, 1, -1), a_4 = (-1, 0, 0, 1)$ .

**解** (1) 考虑行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -30 \neq 0.$$

故  $a_1, a_2, a_3$  线性无关.

(2) 考虑行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

故  $a_1, a_2, a_3, a_4$  线性相关.

### 习题 1.53 (第五章第 11 题)

证明: 任何一个经过以下两个平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

交线的平面的方程能写成:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

其中  $\lambda, \mu$  为不全为零的常数.

**证明** 设  $\pi_1, \pi_2$  所确定的直线为  $l, \pi: Ax + By + Cz + D = 0$  为经过  $l$  的平面方程. 故方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1.58)$$

与

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad (1.59)$$

同解, 故  $(A, B, C, D)$  可由  $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$  线性表出. 即存在常数  $\lambda, \mu$ , 使得  $Ax + By + Cz + D = \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$ . 故平面  $\pi$  的方程即为  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ .

**注** 我们对上述证明中 “ $(A, B, C, D)$  可由  $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$  线性表出” 作详细解释:

注意到  $A_1, B_1, C_1$  不全为 0, 不妨假设  $A_1 \neq 0$ , 考虑方程组 (1.1) 的增广矩阵,

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & B_2 - \frac{B_1}{A_1} & C_2 - \frac{C_1}{A_1} & -D_2 + \frac{D_1}{A_1} \end{pmatrix}$$

注意到  $B_2 - \frac{B_1}{A_1}$  与  $C_2 - \frac{C_1}{A_1}$  不能同时为 0. 若同时为 0, 当  $-D_2 + \frac{D_1}{A_1} = 0$  时, 则平面  $\pi_1, \pi_2$  重合; 当  $-D_2 + \frac{D_1}{A_1} \neq 0$  时, 则方程组 (1.1) 无解, 即平面  $\pi_1, \pi_2$  无交 (与交为直线, 无数组解相矛盾!). 记  $B'_2 = B_2 - \frac{B_1}{A_1}, C'_2 = C_2 - \frac{C_1}{A_1}, -D'_2 = -D_2 + \frac{D_1}{A_1}$ . 不妨假设  $B'_2 \neq 0$ , 考虑方程组 (1.2) 的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A & B & C & -D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & B'_2 & C'_2 & -D'_2 \\ A & B & C & -D \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{利用第一行第二行消去第三行前两列元素}} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & B'_2 & C'_2 & -D'_2 \\ 0 & 0 & C' & -D' \end{pmatrix}$$

由于方程组 (1.1) 与 (1.2) 同解, 又方程组 (1.1) 有无数组解, 故方程组 (1.2) 也有无数解, 因此  $C' = 0$  (注意, 若  $C' \neq 0$ , 根据 Cramer 法则, 方程组 (1.2) 的解存在且唯一, 矛盾!). 若  $D' \neq 0$ , 则 (1.2) 无解. 综上,  $C' = 0$  且  $D' = 0$ . 即  $(A, B, C, -D)$  可由  $(A_1, B_1, C_1, -D_1), (A_2, B_2, C_2, -D_2)$  线性表出, 也即  $(A, B, C, D)$  可由  $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$  线性表出.

#### 习题 1.54 (第五章第 12 题)

下列说法是否正确? 为什么? (1) 若  $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$  线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其他向量的线性组合.

(2) 如果向量组的任何不是它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关.

(3) 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关.

(4)  $\mathbb{F}^{n \times n}$  的  $n+1$  个向量组成的向量组必线性相关.

(5) 设  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关, 则  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$  必线性无关.

(6) 设  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性相关, 则  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$  必线性相关.

(7) 设  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{F}^n$  线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关.

(8) 设  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{F}^n$  线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关.

**解** (1) 不正确, 可以考虑向量组  $a_1, a_2, \dots, a_s$  中的极大无关组.

- (2) 不正确, 考虑  $(1, 0)^T$  与  $(2, 0)^T$ .
- (3) 正确. 其逆否命题为“若存在一组子向量组线性相关, 则该向量组线性相关”.
- (4) 正确, 含有  $n+1$  个未定元的  $n$  个线性方程组必有非零解.
- (5) 不正确, 考虑  $s=2$  时的情况.
- (6) 正确, 由教材定理 5.3.5 中第 3 条, 知  $\text{rank}(a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1) \leq \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_s) < s$ .
- (7) 正确, 考虑线性方程组, 注意到加长向量组相当于添加了更多的线性方程. 其逆否命题为“若加长向量组线性相关, 则本身一定线性相关”.
- (8) 不正确, 考虑考虑向量组  $(1), (-1)$  与其加长版本  $(1, 0)^T, (-1, 1)^T$ .

#### 习题 1.55 (第五章第 17 题)

设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性无关, 且  $a_1, a_2, \dots, a_r$  可由向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性表示, 则  $b_1, b_2, \dots, b_r$  也线性无关.



**证明** 由教材定理 5.3.5 中第 3 条知向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的极大无关组个数小于等于向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  的极大无关组个数. 再由向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性无关, 知向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  也线性无关.