2.4 第四次习题课

2.4.1 相关知识补充

分块矩阵初等变换

¶ 初等变换内容

定义 2.24 (分块矩阵的初等行变换)

(1) 把一个块行的左 P 倍加到另一个块行上;

(2) 互换两个块行位置;

(3) 用一个可逆矩阵左乘某一块行.

♣

定义 2.25 (分块矩阵的初等列变换)

(1) 把一个块列的右 P 倍加到另一个块列上;

(2) 互换两个块列位置;

(3) 用一个可逆矩阵右乘某一块列.

可见，这与矩阵的初等变换十分类似，实际上，分块矩阵的初等变换也可以由分块初等矩阵表示.

♣

定义 2.26 (分块初等矩阵)

单位矩阵分块得到的矩阵经一次分块矩阵初等行(列)变换得到的矩阵称为分块初等矩阵，共有以下三种:

$$
(1)\quad T_{ij}(P)=\begin{pmatrix} I_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & I_{ii} & & P & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & I_{jj} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_{nn}\end{pmatrix}.
$$

将分块矩阵 A 左乘 $T_{ij}(P)$ 表示将 A 的第 j 行的矩阵左乘 P 加到第 i 行；右乘 $T_{ij}(P)$ 表示将 A 的第 i 列的矩阵右乘 P 加到第 j 列.

$$
\text{例:}\quad \begin{pmatrix} I & \\ P & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ PA+C & PB+D\end{pmatrix};\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & Q\\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B+AQ\\ C & D+CQ\end{pmatrix}
$$

特别地，当 A 可逆时取 $P=-CA^{-1},Q=-A^{-1}B$ 即得 Schur 公式:

$$
\begin{pmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ & D-CA^{-1}B\end{pmatrix};\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B\\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \\ C & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}
$$

$$
(2)\quad S_{ij}=\begin{pmatrix} I_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & O_{ii} & & I_{ij} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & I_{ji} & & O_{jj} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_{nn}\end{pmatrix}
$$

S_{ij} 左(右)作用分别对应分块矩阵 i，j 块行(列)互换.

$$(3)\quad D_i(P)=\begin{pmatrix} I_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & I_{i-1,i-1} & & & & \\ & & & P_{ii} & & & \\ & & & & I_{i+1,i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_{nn} \end{pmatrix}$$

$D_i(P)$ 左 (右) 作用分别对应分块矩阵第 i 块行 (列) 左 (右) 乘 P. ♣

¶ 性质

- 三种分块初等矩阵都可以由多个初等方阵相乘得到.
  推论：分块矩阵初等变换就是一次进行了多个矩阵初等变换.
- $T_{ij}(P)^{-1}=T_{ij}(-P)$, $\quad S_{ij}^{-1}=S_{ij}$, $\quad D_i(P)^{-1}=D_i(P^{-1})$，这也是初等变换 (3) 要求 P 可逆的原因.
- $det(T_{ij}(P))=1$, $\quad det(D_i(P))=det(P)$, $\quad det(S_{ij})=(-1)^{(r+t+s-1)r+(s+t-1)s}$，其中 r 为 S_{ij} 的第 i 块行的行数，t 为第 (i+1) 块行到第 (j-1) 块行的总行数，s 为第 j 块行的行数.
  证明：前两个行列式由 Laplace 展开易得；求第三个行列式即求交换两行的次数，把 I_{ij} 的各行从上到下依次换到 I_{ji} 下方，进行了 $(r+t+s-1)r$ 次对换，再将 I_{ji} 的各行从下到上依次换到 (i+1) 块行上方，进行了 $(s+t-1)s$ 次对换.

¶ 应用

(1) 求行列式

例题 2.16 第六次作业 1、4 题

解 以第 4 题为例，$\lambda\neq 0$ 时有

$$\begin{vmatrix}\lambda I_n & -A\\ -B & I_m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_n-AB & \\ -B & I_m\end{vmatrix}=det(\lambda I_n-AB) \tag{2.45}$$

上式是对分块矩阵做了行变换，下面再做列变换：

$$\begin{vmatrix}\lambda I_n & -A\\ -B & I_m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_n & \\ -B & I_m-\frac{BA}{\lambda}\end{vmatrix}=det(\lambda I_n)det(I_m-\frac{BA}{\lambda})=\lambda^{n-m}det(\lambda I_m-BA) \tag{2.46}$$

结合式 (2.45)(2.46) 知命题成立.

注 分块矩阵行列式进行初等变换 (2)(3) 时，并非直接相等，而是相差一个倍数，所以更不容易出错的办法是先将矩阵相乘的等式写出来，再对等式两边求行列式. 用分块初等变换求行列式的目标是将行列式变为准三角阵，之后就可以利用 Laplace 展开进行降阶.

(2) 求逆矩阵：用于分块性质良好的矩阵，步骤与一般初等变换类似.

例题 2.17(2018-2019 第一学期期中 3.) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&3\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解 设 $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 易知 $B^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix},C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ 则

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}I&B&I&O\\C&O&O&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I&B&I&O\\O&-CB&-C&I\end{pmatrix}\\ \to&\begin{pmatrix}I&O&O&C^{-1}\\O&-CB&-C&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I&O&O&C^{-1}\\O&I&B^{-1}&-B^{-1}C^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.47}$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&-B^{-1}C^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&0&1\\-3&2&3&-5\\2&-1&-2&3\end{pmatrix}\tag{2.48}$$

(3) 求矩阵的秩/相抵标准型

由于分块初等变换就是多个初等变换的乘积，故分块初等变换也不改变分块矩阵的秩.

例题 2.18（课本习题三第 42 题） 这是还没截止的作业题，暂不提供解答.

例题 2.19（2022-2023 第二学期期中 6.） 设 A,B,C 为 n 阶实方阵，证明：存在矩阵 X,Y 满足 $XA-BY=C\iff$ 分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$ 相抵

证明 (1)$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&O\\XA-BY&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}\tag{2.49}$$

即两矩阵相抵.

(2)$\Leftarrow$

设 $A=P_1\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q_1,B=P_2\begin{pmatrix}I_s&O\\O&O\end{pmatrix}Q_2$，则有

$$\begin{pmatrix}P_1^{-1}&O\\O&P_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^{-1}&O\\O&Q_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1^{-1}AQ_1^{-1}&O\\P_2^{-1}CQ_1^{-1}&P_2^{-1}BQ_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&O&O&O\\O&O&O&O\\C_1&C_2&I_s&O\\C_3&C_4&O&O\end{pmatrix}\tag{2.50}$$

对等式右边初等变换，有

$$\begin{pmatrix}I_r&O&O&O\\O&I_{n-r}&O&O\\-C_1&O&I_s&O\\-C_3&O&O&I_{n-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&O&O&O\\O&O&O&O\\C_1&C_2&I_s&O\\C_3&C_4&O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&O&O&O\\O&I_{n-r}&O&O\\O&-C_2&I_s&O\\O&O&O&I_{n-s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&O&O&O\\O&O&O&O\\O&O&I_s&O\\O&C_4&O&O\end{pmatrix}\tag{2.51}$$

由分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$ 相抵知 $C_4=O$，则 $P_2^{-1}CQ_1^{-1}=\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&O\end{pmatrix}$ 进而

$$\begin{aligned}C&=P_2\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&O\end{pmatrix}Q_1=P_2\begin{pmatrix}C_1&O\\C_3&O\end{pmatrix}Q_1+P_2\begin{pmatrix}O&C_2\\O&O\end{pmatrix}Q_1\\&=P_2\begin{pmatrix}C_1&O\\C_3&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q_1+P_2\begin{pmatrix}I_s&O\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&C_2\\O&O\end{pmatrix}Q_1\end{aligned}$$

$$= P_2\begin{pmatrix} C_1 & O \\ C_3 & O \end{pmatrix} P_1^{-1}A - B(-Q_2^{-1}\begin{pmatrix} O & C_2 \\ O & O \end{pmatrix} Q_1) \tag{2.52}$$

即存在 $X = P_2\begin{pmatrix} C_1 & O \\ C_3 & O \end{pmatrix} P_1^{-1}, Y = -Q_2^{-1}\begin{pmatrix} O & C_2 \\ O & O \end{pmatrix} Q_1$ 使得 $XA - BY = C$.

注 一些秩相关结论的证明用到分块初等变换，详见之后的“矩阵秩的相关性质”章节.

求逆矩阵

¶ 初等变换法

对于一般的矩阵求逆，采用初等变换法，即将矩阵与同阶单位阵按左右 (上下) 相邻位置写在一起，同时进行初等行 (列) 变换，当矩阵变为单位阵时，单位阵相应地变为了逆矩阵. 行变换原理即 $P_kP_{k-1}\cdots P_1A = I \Rightarrow P_kP_{k-1}\cdots P_1I = A^{-1}$，列变换同理，注意行列变换不能混在一起用. 把矩阵初等变换为单位阵的步骤类似于高斯消元法.

例题 2.20（2018-2019 第二学期期中 1.(3)） 求 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & -1/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 2/7 & 4/7 \\ 0 & 3 & 0 & -9/7 & 3/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 7/3 & -1/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 2/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & -2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

注 求逆矩阵是必考题，各题型位置均有可能考察，这题是随便挑了一道，大部分题目用初等变换即可解决，有些题目使用其他技巧会更快

¶ 利用伴随矩阵

利用 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{detA}$ 来计算逆矩阵，适用于各 $(n-1)$ 阶子式形状接近，只需要求解部分代表就可以得到全部子式的情形.

例题 2.21 作业题 34.(5) 可采用这种方法.

¶ 利用矩阵多项式

例题 2.22 若 $A^l = O, l$ 为整数，则 $I - A$ 可逆，且 $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{l-1}$

证明

$$(I-A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{l-1}) = I - A^l = I \tag{2.54}$$

注 这类似于淑芬的无穷级数求和，需要矩阵满足 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k \to O$，显然本例的 A 满足条件.

例题 2.23 若 n 阶方阵 A 满足 $b_mA^m + b_{m-1}A^{m-1} + \cdots + b_1A + b_0I = 0$ 且 $b_0 \neq 0$，则 A 可逆，且 $A^{-1} = -\dfrac{1}{b_0}(b_mA^{m-1} + b_{m-1}A^{m-2} + \cdots + b_1I)$

证明 直接相乘验证即可，过程略.

例题 2.24 求 n 阶方阵 A 的逆，$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ 0 & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

解 记 $J_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，满足 $J^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix} & k < n \\ O & k \geq n \end{cases}$

则易见 $A = I + bJ + b^2J^2 + \cdots + b^{n-1}J^{n-1}$，而 $A(I - bJ) = I - b^nJ^n = I$，即

$$A^{-1} = I - bJ = \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

¶ 转化为解方程

$AA^{-1} = I$ 可以写为 n 个线性方程组：$A\alpha_i = e_i \quad (1 \leq i \leq n)$，其中 α_i 为 A^{-1} 的第 i 列，e_i 为 n 维向量空间的第 i 个自然基，可以看到，求逆矩阵即求解这 n 个线性方程组.

例题 2.25 求 n 阶方阵 A 的逆 $(n \geq 2)$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

解 先求解方程组 $Ax = \beta$，其中 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 将 n 个方程相加，得到

$$\frac{n(n+1)}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.56}$$

令 $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，有

$$y = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.57}$$

用第 i 个方程减去第 $i+1$ 个方程 $(i = 1, 2, \cdots, n$，规定 $i = n$ 时 $i + 1 = 1)$，得：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + (1-n)x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = b_i - b_{i+1} \tag{2.58}$$

即

$$x_i = \frac{1}{n}(y - b_i + b_{i+1}) \tag{2.59}$$

记 $s = \frac{2}{n(n+1)}$，依次取 $\beta = e_1, e_2, \cdots, e_n$，得

$$A^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} s-1 & s+1 & s & \cdots & s \\ s & s-1 & s+1 & \cdots & s \\ s & s & s-1 & \cdots & s \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s+1 & s & s & \cdots & s-1 \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

¶ 利用一些恒等式

记忆力不好的不推荐，如笔者.

命题 2.13

1.Sherman-Morrison 公式

2. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，则 $I_m - AB$ 可逆等价于 $I_n - BA$ 可逆，且 $(I_m - AB)^{-1} = I_m + A(I_n - BA)^{-1}B$，$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A$.(适用于主对角线元素明显区别于其他位置元素的情况)

证明 （仅证 2.）由分块矩阵初等变换得：

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ A & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_m - AB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ -A & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - BA & O \\ O & I_m \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

两边同时求逆立即得到结果.

这个结果还蛮常用的，很多求逆矩阵的题用它可以大大简化，如下面的例题.

例题 2.26（2022-2023 第二学期期中 4.） 求矩阵 A 的逆 $(x > 0)$，$A = \begin{pmatrix} 4+x & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3+x & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2+x & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}$

解 由 $A = xI + (4,3,2,1)^T(1,1,1,1)$，则由恒等式 2. 可知

$$\begin{aligned}(\frac{1}{x}A)^{-1} &= I - \frac{1}{x}(4,3,2,1)^T(1+\frac{1}{x}(1,1,1,1)(4,3,2,1)^T)^{-1}(1,1,1,1) \\ &= I - \frac{1}{x+10}(4,3,2,1)^T(1,1,1,1)\end{aligned} \tag{2.62}$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{x}(\frac{1}{x}A)^{-1} = \frac{1}{x(x+10)}\begin{pmatrix} x+6 & -4 & -4 & -4 \\ -3 & x+7 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & x+8 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & x+9 \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

矩阵秩的相关性质

¶ 常用的秩等式与不等式

命题 2.14

1. A 是实矩阵，$rank(A^T) = rank(A) = rank(A^TA) = rank(A^TAA^TA) = \cdots$

证明 需要用到线性方程组解空间的性质[a]

引理 2.1

$rank(AB) = rank(B) \iff$ 方程组 $ABx = O$ 与 $Bx = O$ 同解.

证明 设 B 的列数为 p，AB 和 B 的解空间分别为 V_1 和 V_2，则

$\Rightarrow$: $dim(V_1) = p - rank(AB) = p - rank(B) = dim(V_2)$，而显然 $Bx = O$ 的解均为 $ABx = O$ 的解，则两方程组同解.

$\Leftarrow$: 两方程组同解，则 $dim(V_1) = dim(V_2)$，则 $rank(AB) = rank(B)$.

由此可见，证明 $rank(A) = rank(A^TA)$ 等价于证明 $Ax = O$ 与 $A^TAx = O$ 同解:

(1) 显然 $Ax = O$ 的解必定是 $A^TAx = O$ 的解;

(2) 设 x_1 为 $A^TAx = O$ 的一个解，则 $x_1^TA^TAx_1 = 0$，则 $(Ax_1)^T(Ax_1) = 0$，则 $Ax_1 = O$，即 x_1 也是

$Ax = O$ 的一个解.

结合 (1)(2) 知命题成立.

2. $rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B), \quad rank\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq rank(A) + rank(B)$

3. $rank(A \quad B) \geq max\{rank(A), rank(B)\}$

4. $rank(A + B) \leq rank(A \quad B) \leq rank(A) + rank(B)$

5. $rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$

6. (Frobenius 秩不等式)$rank(ABC) + rank(B) \geq rank(AB) + rank(BC)$

特别地，当 B 取 I 时有 (n 为 A 的列数，C 的行数)

(Sylvester 秩不等式)$rank(AC) \geq rank(A) + rank(C) - n$

7. $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，则 $m + rank(I_n - BA) = rank\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = n + rank(I_m - AB)$

8. n 阶方阵 A 幂等 ($A^2 = A$) 等价于 $rank(A) + rank(I - A) = n$

9. n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I$ 等价于 $rank(I + A) + rank(I - A) = n$

[a] 2020-2021 第二学期期中 6.

¶ 秩的计算

1. 通过初等变换化为标准型

不同于求逆，求秩时可以初等行、列变换混用.

例题 2.27（2022-2023 第二学期期中 1.(4)） 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 的相抵标准型

解 进行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -26/3 \\ 0 & 1 & 0 & -8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 14/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

2. 求矩阵的最高阶非零子式

通常用于矩阵行列式为 0，但很容易找到一个 $n-1$ 阶子式不为零的情况 (秩比较小时要排除的子式过多)

例题 2.28（讲义例 4.4.5） 计算 n 阶方阵 A 的秩，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$

解 A 的行列式按第一列展开易得 $det(A) = 1 + (-1)^{n+1}$

(1) n 为奇数时 A 的行列式非零，则秩为 n

(2) n 为偶数时 A 的行列式为 0，但易知其右上角的 $n-1$ 阶子式非零，故秩为 $n-1$

¶ 伴随矩阵 A^* 相关

命题 2.15

A 为 $n(\geq 2)$ 阶方阵，则有

1. $det(A^*) = (det(A))^{n-1}$

2. $rank(A^*) = \begin{cases} n & rank(A) = n \\ 1 & rank(A) = n-1 \\ 0 & rank(A) < n-1 \end{cases}$

证明 （仅证 2.）(1) $rank(A) = n$，则 $detA \neq 0$，则 $det(A^*) \neq 0$，则 $rank(A^*) = n$；

(2) $rank(A) = n-1$，则 A 有不为 0 的 (n-1) 阶子式，则 $A^* \neq 0$，又由 Sylvester 秩不等式：$rank(A^*) \leq rank(A^*A) + n - rank(A) = rank(det(A)I_n) + n - (n-1) = 1$，故 $rank(A^*) = 1$；

(3) $rank(A) < n-1$，则 A 的所有 (n-1) 阶子式均为 0，即 $A^* = O$.

命题 2.16

3. $(A^*)^* = \begin{cases} (det(A))^{n-2}A & n \geq 3 \\ A & n = 2 \end{cases}$

证明 (1) $n \geq 3$ 时，若 $det(A) \neq 0$，则 $(A^*)^{-1}$ 存在，则 $(A^*)^* = det(A^*)(A^*)^{-1} = (det(A))^{n-1}\frac{1}{det(A)}A = (det(A))^{n-2}A$；若 $det(A) = 0$，则 $rank(A^*) \leq 1$，则 $(A^*)^* = O$；

(2) $n = 2$ 时易证.

若已知 $n(\geq 3)$ 阶方阵 A^*，如何求 A？

(1) $rank(A^*) = n$ 时，由 $A^*A = det(A)I$ 得 $A = det(A)(A^*)^{-1} = (det(A^*))^{\frac{1}{n-1}}(A^*)^{-1}$

例题 2.29（2017-2018 第二学期期中 1.(4)） $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A

解 易知 A^* 满秩，$det(A^*) = -8$，$(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则

$$A = (det(A^*))^{\frac{1}{n-1}}(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

注 原矩阵在复数域上不唯一，解答只给出了其中一种实方阵.

(2) $rank(A^*) = 1$ 时，$rank(A) = n-1$，$A^*A = O$，由此可见 A 的 n 个列向量均为方程组 $A^*x = O$ 的解，这个齐次方程组的解空间维数为 $dim(V) = n - rank(A^*) = n-1$，可选出 $n-1$ 个基来进行线性组合得到 A 的各个列向量，并进一步由 $AA^* = O$ 确定组合系数的约束，可最终确定 A 的形式.

(3) $A^* = O$ 时，任意秩小于 $n-1$ 的 n 阶方阵均可作为原矩阵 A.

¶ 满秩分解

习题 2.27 (2014-2015 第二学期期中 8.)

若 $A \in F^{m\times n}$， $rank(A) = r$，则 A 可分解为一个列满秩矩阵 $B \in F^{m\times r}$ 和一个行满秩矩阵 $C \in F^{r\times n}$ 的乘积 $A = BC$. 特别地，当 A 行满秩时，有 $A = I_m A$，当 A 列满秩时，有 $A = AI_n$.

证明 $rank(A) = r \Rightarrow A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，其中 $P \in F^{m\times m}, Q \in F^{n\times n}$ 均为可逆方阵，则有

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r \quad O)Q = P'Q' \tag{2.66}$$

其中 $P' = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, Q' = (I_r \quad O)Q$ 分别为列满秩矩阵和行满秩矩阵.

线性空间

当我们用线性空间的思想去回看前几章的一些内容，会得到一些新的理解.

1. 线性方程组

线性方程组 $Ax = \beta$ 有解

$\iff x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解，其中 α_i 为系数矩阵 A 的第 i 列

$\iff \beta \in <\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>$

$\iff <\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta> = <\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>$

$\iff dim <\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta> = dim <\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>$

$\iff rank(A \quad \beta) = rank(A)$

也就是说，我们求解线性方程组等价于求解满足 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 的线性组合系数，亦即：求某一个向量能否表示成一些向量的线性组合的方法是：把这些向量摆在一起得到一个线性方程组并求解.

2. 矩阵乘法

矩阵等式 $AB = C$ 可以有新的理解角度：

C 的每一行都是 B 的行向量的线性组合，C 的每一列都是 A 的列向量的线性组合

进一步地，B 的第 i 列 b_i 是方程 $Ax = c_i$ 的解，其中 c_i 是 C 的第 i 列，从这个角度，我们可以给出作业题 25. 的另一种解法：

解 由于 A 的每行、每列元素求和都为 0，则 $det(A) = 0$. 下面分类讨论：

(1) $rank(A) < n-1$，有 $rank(A^*) = O$，即 $A^* = O$;

(2) $rank(A) = n-1$，有 $Ax = O$ 的解空间 V 的维数 $dimV = n - rank(A) = 1$，而 $(1, 1, \cdots, 1)^T$ 为 $Ax = O$ 的一个非零解，故 $Ax = O$ 的通解为 $x = \lambda(1, 1, \cdots, 1)^T$.

另一方面，$AA^* = det(A)I = O$，则 A^* 的每一列均为 $Ax = O$ 的解，即正比于 $(1, 1, \cdots, 1)^T$

又注意到 $A^*A = O$，故 $A^T(A^*)^T = O$，即 $(A^*)^T$ 的每一列 (对应 A^* 的每一行) 也正比于 $(1, 1, \cdots, 1)^T$

综上，有 A^* 正比于 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

3. 秩

矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩

我们可证明以下性质：

命题 2.17

(1) 若向量组 $\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ 可由 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ 线性表示，则 $rank(b_1, b_2, \cdots, b_s) \le rank(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

(2) 若向量组 $\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ 与 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ 等价，则 $rank(b_1, b_2, \cdots, b_s) = rank(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

由此，我们可以轻易给出很多秩不等式的证明，例如：

例题 2.30 证明：$rank(AB) \le min\{rank(A), rank(B)\}$

证明 AB 的每个列向量都是 A 的列向量的线性组合，每个行向量都是 B 的行向量的线性组合，故结论成立.

2.4.2 期中考试知识点整理

线性代数的题目具有技巧性，很多时候虽然弄明白了上课讲的知识点，但做题仍然无从下手，这就需要同学们进行一定的题目练习巩固知识点、积累技巧，毫无疑问，课后习题和往年试卷提供了很好的练习样本。总览一遍往年试卷会发现，考试题目的难度普遍不是很大 (不高于作业题和上课例题)，且每年的题型和考点大同小异，因此，在考前刷上几套往年卷来熟悉考试内容，会有很大帮助。为梳理知识点，我在下面按章节列出了一些重要内容供大家参考，可以根据我列出的条目回想具体内容，想不起来的去查看讲义，以此提高复习效率。期中复习建议至少抽出三个半天 (各 4h，周末或周内晚上) 的时间来进行：知识点回顾 → 对照参考答案过一遍作业题 (作业题中有不少很有用的结论，记住它们可以帮助你更快地解题)→ 刷往年题 (每套限制在 2h 之内)。由于 11 月 16 日要考线代和数分两门期中 (加起来 10 学分，比助教本学期所有课加起来还多 (bushi))，所以考试前一天晚上要保证充足睡眠，不要熬夜；考试当天按时起来吃早饭，并至少提前二十分钟到考场 (做准备、查看座位号等)。预祝大家取得理想成绩！

线性方程组

一般会考一道含参的线性方程组求解问题，并依据参数讨论解的情况。

¶ Gauss 消元法

实质就是初等行变换，因为初等变换不改变方程组的解。

一般的步骤是：写出方程组的增广矩阵 → 通过初等行变换化为阶梯形式 → 根据阶梯形矩阵判断方程组有无解 (最后的非零行是否只有最后一列的元素非零)，若有解，从下到上依次回代求解。

¶ 解的情况判别

无解：最后的非零行只有最后一列元素非零；

唯一解：有解，且非零行个数 (即秩) r = 未知数个数 n；

无穷多解：有解且 $r < n$，通解需要设 $(n - r)$ 个参数来表示；

齐次线性方程组：方程右边都为 0 的线性方程组，方程一定有零解，有非零解 $\iff$ 有无穷多解

行列式

一般会有一道大题直接考察计算行列式，且由于行列式在其他很多地方有应用，故可能会出现在算其他东西的过程中

¶ 定义

行列式的行、列数目要相同，运算结果是一个数。

书上采用代数余子式递归定义，也可以采用完全展开式定义，也可以按照函数定义：满足多重线性性、反对称性、规范性的方阵函数。

行列式几何意义：平行多面体的有向体积 (注意四面体体积是平行六面体的 1/6)

直接考察行列式定义的考题不多，可能会考到体积计算

¶ 性质

- 行列等价 $det(A) = det(A^T)$，由于行列等价，下面的性质只描述行
- 交换两行出负号
- 某行的公因子可以提出去
- 若某行可写为两个向量相加，则行列式等于分别把这行替换为这两个向量的行列式相加
- 若有两行成比例 (含相等)，行列式为 0
- 把某行乘一个常数倍加到另一行，行列式不变
- 三角阵 (准三角阵) 的行列式等于对角元素 (的行列式) 相乘

¶ 展开式

- 单行展开：$det(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}M_{ik}$

  回忆子式、余子式、代数余子式的概念

  反之，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = \begin{cases} det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$，这在涉及子式的计算的题可能会用到
- 多行展开 (即 Laplace 展开)，按选定的 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行展开：

  $$det(A) = \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+k_1+k_2+\cdots+k_r} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & \cdots & i_n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$
- 完全展开：$det(A) = \sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)\in S_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

  回忆全排列、逆序数

¶ 一些计算技巧

- 利用初等变换化为上三角行列式 (注意交换两行出负号)
- 按多重线性拆成多个行列式的求和
- 行和/列和有特殊性时，将其余 $(n-1)$ 行 (列) 加到某一行 (列)
- 利用 Laplace 公式
- 归纳法
- 递推法 (三对角行列式)
- 利用 Binet-Cauchy 公式 (两矩阵相乘的行列式算法)
- 利用分块矩阵降阶 (降阶公式)
- 将行列式视为一些元素的多项式 (例如问你展开式中 x^k 的系数是多少)
- 加边法 (行列式每行/列都有相同的数)
- 利用 Vandermonde 行列式 (熟悉 Vandermonde 行列式求法)

¶ Cramer 法则

对于 n 个方程 n 个未知数的线性方程组，若其系数矩阵的行列式不为 0，则方程组有唯一解，特别地，对齐次方程组系数行列式不为零代表着只有零解。

实际就是 $Ax = \beta$ 在 $detA \neq 0$ 时有 $x = A^{-1}\beta$

矩阵

矩阵这一章有很多知识点，考题也较多样，分布在各个题型中

¶ 定义及一些特殊矩阵

矩阵即由 m 行 n 列共 $(m \times n)$ 个数排成的矩形列表，它可以与线性映射建立一一对应关系。

回忆一些特殊矩阵的定义：零矩阵 O、方阵、单位阵 I、数量阵 aI、(准) 对角阵、(准) 三角阵、对称阵、反对称阵、基础矩阵 E_{ij}

¶ 矩阵的运算

1. 加法：需两个矩阵大小相同，二者对应位置元素相加；
   数乘：矩阵每个位置的元素都乘上相同的数

2. 乘法：需左边矩阵列数等于右边矩阵行数，满足乘法结合律、数乘结合律、分配律，不满足交换律、消去律 ($AB = AC$ 且 $A \neq O$ 不能推出 $B = C$)，矩阵乘积的行列式满足 Binet-Cauchy 公式，矩阵乘法对应于线性映射的复合

3. 由矩阵乘法自然地给出矩阵幂次的概念，一些求幂次的方法：
   - 归纳
   - 分块
   - 拆分为容易求幂且对易的矩阵之和：$A^k = (B+C)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i B^{k-i} C^i$，其中 $BC = CB$
   - 转化为低阶矩阵乘积
   - 相似对角化：$A = P^{-1}BP$，其中 $B = diag(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则 $A^k = P^{-1}B^kP = P^{-1}diag(b_1^k, b_2^k, \cdots, b_n^k)P$

4. 转置：矩阵的行列互换，记作 A^T，满足：
   - $(A+B)^T = A^T + B^T$
   - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
   - $(AB)^T = B^T A^T$
   - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

5. 共轭：矩阵每个元素求复共轭，记作 $\bar{A}$

6. 迹：方阵对角元的和，记作 $tr(A)$，满足：
   - $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
   - $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$
   - $tr(AB) = tr(BA)$
   - $tr(A^T) = tr(A), tr(\bar{A}) = \overline{tr(A)}$
   - $tr(A\bar{A}^T) = 0 \to A = O$

7. 分块：对分块矩阵进行运算，可以先将每个矩阵块当做元素运算，再对每个矩阵块进行相同的运算 (有的同学求转置等运算时会忘了这一步)

   分块矩阵可用于求行列式、求逆、求秩等 (具体见“分块矩阵初等变换”章节)

   回顾准三角阵的逆、Schur 公式等

8. 初等变换：熟悉三种初等变换矩阵的形式；左乘代表行变换，右乘代表列变换

初等变换不改变方程组的解，可用于化简方程；与行列式性质相关，可用于求行列式；不改变矩阵的秩，可用于求秩与相抵标准形。

9. 逆矩阵：$A^{-1}A = AA^{-1} = I$，不可逆的方阵又称奇异阵

矩阵可逆的充要条件：可逆 $\Longleftrightarrow det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow rank(A) = n \Longleftrightarrow$ A 等于一些初等矩阵相乘 $\Longleftrightarrow$ A 的行 (列) 向量组线性无关

A 的伴随阵 A^* 满足 $A^*A = AA^* = det(A)I$，注意 $A^*_{ij} = A_{ji}$，伴随阵的相关性质见课后习题及本讲义“伴随矩阵 A^* 相关”小节

逆矩阵的求解技巧见本讲义“求逆矩阵”章节

10. 穿脱规则及复合规则

穿脱规则：$(AB)^T = B^TA^T$， $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$， $(AB)^* = B^*A^*$

复合规则：$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$， $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$， $(A^*)^T = (A^T)^*$

¶ 秩与相抵

回顾行秩、列秩、矩阵的秩及满秩的概念，行秩 = 列秩 = 矩阵的秩

矩阵的秩等于其最高阶非零子式的阶数

大小相等的两个矩阵 A, B 若秩相等则称二者相抵，可通过一系列初等变换互相转化，属于同一相抵等价类，具有相同的相抵标准型

相抵标准型：与秩为 r 的矩阵大小相同，且形式为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的矩阵，注意一个常见的错误：$A \in F^{m\times n}$ 的秩为 r，它的相抵标准型不为 I_r(只有 $r = m = n$ 成立)

线性方程组 $Ax = \beta$ 有解 $\Longleftrightarrow rank(A) = rank(A \quad \beta) = r$

每个秩为 r 的矩阵都可以写为 r 个秩为 1 的矩阵之和

秩的一些常用等式和不等式及秩的求法详见本讲义“矩阵秩的相关性质”章节

线性空间

¶ 数组空间与一般线性空间

线性空间即数域 $\mathbb{F}$ 上定义了加法和数乘，且满足八条运算性质的集合 V(有的题目让验证集合构成线性空间，即验证这八条运算性质)

由一般线性空间的定义出发，可以给出子空间 (更多的题目其实是在证明线性空间里满足一定性质的元素的集合构成子空间，这即是证明这个集合对数乘和加法封闭)、生成子空间 (由一些元素进行线性组合得到的子空间)、生成元、线性组合、线性相关、线性无关、极大无关组与秩、基与维数的概念

几乎每年都会有一道验证一般线性空间并延续讨论的大题，不会很难，理解好各概念与数组空间中概念的对应关系就很容易求解

¶ 线性相关与线性无关

一组向量线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的组合系数使它们组合出零向量 $\Longleftrightarrow$ 存在其中一个向量可以被其他向量线性表示，反之线性无关

给定向量组判断线性相关/无关一般需要将向量组写在一起形成一个矩阵然后求秩，当然，有很多其他的判断方法

回忆众多的判断方法及相关说法的正确性 (老师上课讲过的及作业题中的)，相关说法的正确性经常在判断题中考察

¶ 极大无关组与秩

极大无关组：向量组的一个子向量组，满足自身线性无关，且外加任何一个子向量组外的向量都线性相关

极大无关组求法：将列向量组摆在一起，经过初等行变换化为更简单的向量组，找出变换后向量组的极大无关组，其对应变换前的极大无关组

秩：一个向量组的极大无关组可以不唯一，但每个极大无关组包含的向量数目相同，记为向量组的秩

m 个向量线性无关 $\iff$ 向量组的秩为 m

回忆行秩和列秩的定义，初等变换不改变秩，矩阵的秩 = 行秩 = 列秩

¶ 基与维数

基：n 维数组空间的子空间 V 中一组向量称为 V 的一组基，如果它们线性无关且 V 中任意向量 a 可以表示成这组向量的线性组合，组合系数称为 a 在这组基下的坐标.

维数：V 的一组基的向量个数称为 V 的维数，有 $dimV = rank(V)$

基变换与坐标变换：向量在不同基下的坐标一般不同，选定两组基 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，两组基可以通过一个矩阵联系：$(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)T$，称 T 为基 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 到基 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的过渡矩阵；基线性无关 $\to$ 矩阵 T 可逆，设一个向量在两组基下的坐标分别为 X 和 Y，则有 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)X = (b_1, b_2, \cdots, b_n)Y \Rightarrow X = TY \Rightarrow Y = T^{-1}X$，即从老坐标到新坐标的坐标变换公式

求过渡矩阵即是解矩阵方程 $(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)T$

$$\Rightarrow T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{-1}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

定理 2.2 (扩充基定理)

r 维子空间 V 中任意 $s(<r)$ 个线性无关的向量可以加 $r-s$ 个向量扩充为 V 的一组基 (回顾证明) ♡

¶ 线性方程组解的结构

线性方程组 $Ax = \beta$ 有解 $\iff rank(A) = rank(A \quad \beta)$

n 元线性方程组有唯一解 $\iff rank(A) = n$

n 元齐次线性方程组 $Ax = O$ 有非零解 $\iff rank(A) < n$

齐次线性方程组解的结构：$Ax = O$ 的解空间 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间，且 $dimV = n - rank(A)$，解空间的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 称为线性方程组的一个基础解系，通解可写为基础解系的线性组合形式 $x = t_1\alpha_1 + \cdots + t_{n-r}\alpha_{n-r}$. 基础解系的求法类似于 $Gauss$ 消元法，化为阶梯形矩阵后将 $(n-r)$ 个多余自变量移到等号右边设为参数，由此求得参数解对应的向量组即基础解系.

非齐次线性方程组解的结构：$Ax = \beta$ 的解空间即对应的齐次方程组 $Ax = O$ 的解空间进行了平移的结果，通解即对应的齐次方程组通解 + 任意一个特解

题型与技巧

考试的题型分为填空题 $(5-6$ 道)、判断题 $(4-5$ 道)、解答题 (一般为 4 道)

¶ 填空题

1. 一般的考点：
   - 矩阵的乘法与方阵的幂
   - 行列式的基本性质与按一行（列）的展开
   - 矩阵的伴随与逆的基本性质
   - 矩阵与向量组的秩，线性相关与线性无关

- 线性方程组解空间的维数
- 基的坐标变换

2. 技巧：填空题只需要答案不需要过程，有些题可以直接使用相关的结论 (不用证明) 快速得到答案，甚至有的题可以直接使用特例来计算结果，例如：

例题 2.31（2018-2019 第一学期 1.(2)） 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维列向量，记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 若 $|A| = 1$，求 $|B|$

解 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别为 $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$，则 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(3-2) = 2$

¶ 判断题

1. 一般的考点：
   - 矩阵的乘法，转置，共轭，迹等及初等变换
   - 行列式及矩阵的秩，相抵关系等
   - 向量组的线性关系和极大无关组
   - 线性方程组的解的结构相关
   - 一般线性空间

2. 判断题一直以来都是比较棘手的题型，一旦判断错误就没有分，并且有的题完全是在玩文字游戏，所以建议同学们谨慎判断严格证明，判断的准确度依赖于平时对各种二级结论的积累，可能某道题正好是之前碰到过的结论，那就非常令人安心了。建议同学们熟悉各种定义、定理和运算的内容及适用的条件，对一些见过的结论留下印象。

判断题的做题步骤一般为：在最开始写下命题正确/错误，若正确则在后面进行证明，若错误则找出反例/进行一定说明即可。

¶ 解答题

1. 一般的考点：
   - 线性方程组有解的条件
   - 行列式和逆矩阵的计算
   - 有关秩的恒等式与不等式
   - 线性空间的基与坐标变换
   - 线性方程组的解的结构
   - 一般线性空间的验证
   - 一些性质的证明

2. 解答题将各种知识点综合考察，书上出现过的定理、例题等大概率可以直接使用，老师上课的例题和助教在习题课的补充拿来使用应视情况而定：如果题目本身就是补充的一些结论或只有少许延伸，那就需要进行证明；如果用到的结论只是题目解答的一小部分，那就可以直接使用。