1.4 第六周作业

习题 1.17 (补充题)

证明：设 $\mathscr{A}:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}^{m\times 1}$ 为集合映射，则：$\mathscr{A}$ 为线性映射 $\Longleftrightarrow \pi_i\circ\mathscr{A}$ 为线性映射，$\forall 1\leqslant i\leqslant m$.

证明 $\Rightarrow$: 设线性映射 $\mathscr{A}:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}^{m\times 1}$ 对应的矩阵为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $\forall i,1\leqslant i\leqslant m$，有：

$$\pi_i\circ\mathscr{A}:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F},\pi_i\circ\mathscr{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$$

则该映射可用 $1\times n$ 矩阵 $A_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ 表示，从而为线性映射。

$\Leftarrow$: 设线性映射 $\pi_i\circ\mathscr{A}:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}$ 对应的矩阵为 $A_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$，则 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{F}^{n\times 1}$，将 $\mathscr{A}\boldsymbol{x}$ 记为 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)^T$，则 $\boldsymbol{y}$ 的第 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 个分量：

$$y_i=\pi_i\circ\mathscr{A}\boldsymbol{x}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$$

由 $\boldsymbol{x}$ 的任意性，该映射可用矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 来表示，从而为线性映射。

习题 1.18 (补充题)

记 $\mathscr{L}(\mathbb{F}^{n\times 1},\mathbb{F}^{m\times 1})$ 为 $\mathbb{F}^{n\times 1}$ 到 $\mathbb{F}^{m\times 1}$ 的线性映射全体。

对 $\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，令 $\ell_A:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}^{m\times 1},\ell_A(X)=AX,\forall X\in\mathbb{F}^{n\times 1}$

(1) 证明 ℓ_A 为线性映射。

(2) 记 $\Phi:\mathscr{L}(\mathbb{F}^{n\times 1},\mathbb{F}^{m\times 1})\to\mathbb{F}^{m\times n},\Psi:\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathscr{L}(\mathbb{F}^{n\times 1},\mathbb{F}^{m\times 1})$

$$\Phi(\mathscr{A})=(\mathscr{A}e_1,\mathscr{A}e_2,\cdots,\mathscr{A}e_n),\forall\mathscr{A}\in\mathscr{L}(\mathbb{F}^{n\times 1},\mathbb{F}^{m\times 1});$$

$$\Psi(A)=\ell_A,\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}.$$

证明：Φ,Ψ 为互逆映射。

证明 (1) 任意取定 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则 $\forall X=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{F}^{n\times 1}$, 记 $\ell_A(X)=Y=(y_1,\cdots,y_m)^T$, 则由矩阵乘法运算规则可知：

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=AX=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

从而映射 ℓ_A 可用矩阵 A 来表示，故为线性映射。

(2) 这道题其实就是个阅读理解。首先明确一点：映射是两个集合之间的关系，$\mathscr{L}(\mathbb{F}^{n\times 1},\mathbb{F}^{m\times 1})$ 是一族线性映射构成的集合，而 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 的矩阵全体构成的集合，从而 Φ 作用的对象是线性映射，并且它把线性映射映为矩阵，而 Ψ 作用的对象是矩阵，并且它把矩阵映为线性映射。

回到题目中，由第 (1) 问可知，Ψ 即为 $\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathscr{L}(\mathbb{F}^{n\times 1},\mathbb{F}^{m\times 1})$ 的一个一一对应，从而 Ψ 可逆，再由 Φ 的值域和 Ψ 的定义域相同，那么我们只需要验证：

$$\forall\mathscr{A}\in\mathscr{L}(\mathbb{F}^{n\times 1},\mathbb{F}^{m\times 1})\text{，都有}\Psi(\Phi(\mathscr{A}))=\mathscr{A}\text{，从而}\Phi(\mathscr{A})=\Psi^{-1}(\mathscr{A})$$

设 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，由第 (1) 问 $\mathscr{A}=\ell_A$。且 $\mathscr{A}e_k=(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{mk})^T,1\leqslant k\leqslant n$，则：

$$\Phi(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=A\text{，从而}\Psi(\Phi(\mathscr{A}))=\Psi(A)=\ell_A=\mathscr{A}$$

笔记 以上两题采用的是教材上对线性映射的定义来证明，课上讲到的验证加法与数乘的方法是更本质的做法，不过在数组向量空间中，这两种做法是等价的。

习题 1.19 (补充题)

$\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}, C \in \mathbb{F}^{p\times q}$，证明矩阵乘法满足下列性质：

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $AI_n = I_mA = A, \quad I_n = diag(1, \cdots, 1)$

(3) $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B, \quad A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

(4) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

证明 只需要验证等式两边矩阵的任意位置元素均相等即可。以下记 $(A)_{ij}$ 为矩阵 A 的 (i, j) 位置的元素。

(1) $(AB)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B)_{kj}$，故 $((AB)C)_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{p}(AB)_{it}(C)_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B)_{kt}(C)_{tj}$.

$(BC)_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{p}(B)_{it}(C)_{tj}$，故 $(A(BC))_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(BC)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{t=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{kt}(C)_{tj} = ((AB)C)_{ij}$.

(2) $(AI_n)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(I_n)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$. (其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号)

$(I_mA)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m}(I_m)_{ik}(A)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{m}\delta_{ik}(A)_{kj} = A_{ij}$. 故 $AI_n = I_mA = A$.

(3) $((A_1 + A_2)B)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A_1 + A_2)_{ik}(B)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A_1)_{ik}(B)_{kj} + \sum\limits_{k=1}^{n}(A_2)_{ik}(B)_{kj} = (A_1B)_{ij} + (A_2B)_{ij}$.

$(A(B_1 + B_2))_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B_1 + B_2)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B_1)_{kj} + \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B_2)_{kj} = (AB_1)_{ij} + (AB_2)_{ij}$

(4) $((\lambda A)B)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n}(\lambda A)_{ik}(B)_{kj} = \lambda\sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B)_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n}(A)_{ik}(\lambda B)_{kj} = (\lambda(AB))_{ij} = (A(\lambda B))_{ij}$.

习题 1.20 (第四章第 3 题)

设 $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，计算 AB, BC, ABC, B^2, AC, CA.

解

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{pmatrix}.$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 12 & 11 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$ABC = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -61 \\ 12 & 93 \end{pmatrix}.$$

$$B^2=\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4&-6\\-12&-3&8\\8&-4&-11\end{pmatrix}.$$

$$AC=\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-15&-4\end{pmatrix}.$$

$$CA=\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\13&7&12\\1&-5&-6\end{pmatrix}.$$

习题 1.21 (第四章第 5 题)

计算$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_m)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

解 原式 $=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}x_ia_{i1}\quad\sum\limits_{i=1}^{m}x_ia_{i2}\quad\cdots\quad\sum\limits_{i=1}^{m}x_ia_{in}\right)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}x_ia_{ij}y_j.$

习题 1.22 (第四章第 6 题)

举例求满足条件的 2 阶实方阵 A.

(1) $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (2) $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ (3) $A^3=I$ 且 $A\neq I$.

解 (1) 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则令 $A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=bc+d^2=0\\b(a+d)=c(a+d)=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=bc+d^2=0\\b(a+d)=c(a+d)=1\end{cases}\Rightarrow a=d$ 且 b,c 异号 $\Rightarrow a=b=c=d=0$，矛盾，故不存在满足条件的A.

这其实是因为一个二维空间中的线性变换最多将平面的定向改变一次，而二维空间中平面定向改变两次后与原来的定向相同，从而若对空间作两次相同的线性变换，定向必然与原来的空间相同。或者也可以通过后续会学到的性质：矩阵行列式的乘积为乘积的行列式，得到 $\det(A^2)=(\det(A))^2=-1$，但是显然有实矩阵的行列式必须为实数，从而矛盾。

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ 即可。(3) 取 $A=\begin{pmatrix}-\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{pmatrix}$ 即可。

对于 (2)(3) 两小问，可以考虑几何意义，将矩阵 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 作用于二维直角坐标系中的点 (x,y)，等价于将向量 (x,y) 以原点为中心逆时针旋转了 θ 角度，那么 A^n 就代表旋转了 $n\theta$ 角度，从而第 (2) 问中 θ 可取

$-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$，第 (3) 问中 θ 可取 $\pm\frac{2\pi}{3}$.

现在我们来寻找 (2)(3) 问中所有满足条件的二阶实方阵。

对于第 (2) 问，设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则令 $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=bc+d^2=0 \\ b(a+d)=1 \\ c(a+d)=-1 \end{cases}$

从而 $a^2=d^2$，而 $a+d\neq 0$，则有 $a=d, b=-c=\frac{1}{2d}$，那么代入第一式有 $a^2=b^2=c^2=d^2=\frac{1}{4d^2}$，从而 $d^2=\frac{1}{2}, d=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, c=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$，即满足要求的矩阵只有上面列出的两个。

对于第 (3) 问，令 $A^3=\begin{pmatrix} a^3+2abc+bcd & a^2b+b^2c+abd+bd^2 \\ a^2c+acd+bc^2+cd^2 & abc+2bcd+d^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $\begin{cases} a^3+2abc+bcd=abc+2bcd+d^3=1 \\ b(a^2+bc+ad+d^2)=c(a^2+bc+ad+d^2)=0 \end{cases}$ 若 $b=0$ 或 $c=0$，代入可解得 $A=I$，矛盾，故 b,c 均不为 0，从而方程组等价于 $\begin{cases} a(a^2+bc)=d(bc+d^2)=1-abc-bcd \\ a^2+bc+ad+d^2=0 \end{cases}$，那么所有满足这个方程组的四元数组 (a,b,c,d) 所组成的矩阵均为符合第 (3) 问要求的矩阵。