

1.10 第十二周作业

习题 1.70 (第六章第 5 题)

证明: \mathbb{R}^2 上的可逆线性变换可以分解为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换的复合。

证明 显然关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换都是可逆的, 且其逆变换仍为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换。且 \mathbb{R}^2 上任意线性变换都与一个二阶方阵对应。因此我们任取一个可逆线性变换 \mathcal{A} 满足 $\mathcal{A}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为可逆方阵, 那么我们只需要证明可以通过将 A 与关于坐标轴的伸缩、反射、旋转变换对应的矩阵相乘来得到单位阵即可, 我们先通过伸缩来使矩阵两列向量长度相等:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

由于 A 可逆, a, c 不同时为 0, b, d 不同时为 0, 则必存在 $\lambda, \mu > 0$, 满足 $\lambda^2(a^2 + c^2) = \mu^2(b^2 + d^2)$, 这也就是 $a_1^2 + c_1^2 = b_1^2 + d_1^2$, 并且由齐次性不妨设其为 1, 再通过旋转来使两列向量关于 y 轴对称:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta - c_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta - d_1 \sin \theta \\ a_1 \sin \theta + c_1 \cos \theta & b_1 \sin \theta + d_1 \cos \theta \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

设 $a_1 = \cos \alpha, c_1 = \sin \alpha, b_1 = \cos \beta, d_1 = \sin \beta$, 那么我们有:

$$a_2 = \cos(\theta + \alpha), b_2 = \cos(\theta + \beta), c_2 = \sin(\theta + \alpha), d_2 = \sin(\theta + \beta)$$

取 $\theta = \frac{\pi - \alpha - \beta}{2}$, 就有 $a_2 + b_2 = 0, c_2 = d_2$, 再通过一次伸缩使两个列向量正交且均化为单位向量:

$$\begin{pmatrix} p & \\ & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -a_2 \\ c_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_2 & -pa_2 \\ qc_2 & qc_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_3 & -a_3 \\ c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

那么必存在 $p, q > 0$, 满足 $q^2 c_2^2 - p^2 a_2^2 = 0$, 且由齐次性不妨设 $q^2 c_2^2 = p^2 a_2^2 = \frac{1}{2}$, 此时矩阵两列向量互相正交, 且关于 y 轴对称, 均为单位向量, 与坐标轴夹角都是 $\frac{\pi}{4}$, 所以若两列向量是正定向, 只需再做一次旋转便可得到单位阵, 若为负定向, 则先做一次反射再旋转, 也可得到单位阵, 至此我们便完成了命题的证明。

习题 1.71 (第六章第 6 题)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求关于平面 $x + 2y + 3z = 0$ 的对称变换。

解 记所求变换为 T , 所给平面为 S , 任取 $a = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, 设其关于 S 的对称点为 $T(a) = (u, v, w)^T \triangleq b$, 则 a, b 中点落在 S 上, 且 a, b 之间的向量与 S 垂直, S 法向量为 $\vec{n} = (1, 2, 3)^T$, 从而有:

$$x + u + 2(y + v) + 3(z + w) = 0, \quad x - u = \frac{y - v}{2} = \frac{z - w}{3}$$

解得 $T(x, y, z)^T = (u, v, w)^T = \left(\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z, -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z, -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z \right)^T$.

习题 1.72 (第六章第 7 题)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求关于直线 $z = 2y = 3x$ 的对称变换。

解 记所求变换为 T , 所给直线为 l , 任取 $a = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, 设其关于 l 的对称点为 $T(a) = (u, v, w)^T \triangleq b$, 则 a, b 中点落在 l 上, 且 a, b 之间的向量与 l 垂直, l 的方向向量为 $\vec{u} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)^T$, 从而有:

$$3(x + u) = 2(y + v) = z + w, \quad \frac{x - u}{3} + \frac{y - v}{2} + z - w = 0$$

解得 $T(x, y, z)^T = (u, v, w)^T = \left(-\frac{41}{49}x + \frac{12}{49}y + \frac{24}{49}z, \frac{12}{49}x - \frac{31}{49}y + \frac{36}{49}z, \frac{24}{49}x + \frac{36}{49}y + \frac{23}{49}z \right)^T$.

习题 1.73 (第六章第 8 题)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求绕向量 $e = (1, -1, 1)^T$ 逆时针旋转 30° 角的变换.

解 记所求变换为 T , 任取 $A = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$, 设 e 所在直线为 l , 则过点 A 且与 l 垂直的平面 S 的方程为:

$$(x - a) - (y - b) + (z - c) = 0$$

设 l 与 S 交于点 $O' = (\lambda, -\lambda, \lambda)^T$, 代入 S 方程得到 $\lambda = \frac{a-b+c}{3}$, 所求的 $T(A)$ 即为在平面 S 上, 将点 A 绕 O' 逆时针旋转 (从 e 的正方向看) 30° 角得到的点, 记为 B , 接下来我们以 O' 为原点取一组正交基, 不妨取 $\vec{u}_1 = \overrightarrow{O'A}, \vec{u}_3 = \overrightarrow{O'O}, \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \times \vec{u}_1$ (向量外积), 这样得到的 $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ 构成右手系. 再对 \vec{u}_2 做伸缩使其模长与 \vec{u}_1 相同, 即 $\vec{u}_2' = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} |\vec{u}_1|$, 那么 $\overrightarrow{O'B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_1 \pm \frac{1}{2} \vec{u}_2'$ ($\overrightarrow{OA} \cdot e < 0$ 时为 $+$, > 0 时为 $-$), 上述过程中各个向量均是可求出的, 计算得到:

$$\vec{u}_1 = (a - \lambda, b + \lambda, c - \lambda)^T, \vec{u}_2 = \lambda(b + c, c - a, -a - b)^T, \vec{u}_3 = (-\lambda, \lambda, -\lambda)^T$$

而显然 T 是一个线性变换, 那么我们只需要计算标准正交基 e_1, e_2, e_3 的像即可, 利用上述过程计算得到:

$$T(e_1) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{3}, \frac{1}{3} \right)^T, T(e_2) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{3} \right)^T, T(e_3) = \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3} \right)^T$$

据此我们便可得到所有点在该旋转变换下的像点, 即 $T(x, y, z)^T = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3)$.

笔记 $\overrightarrow{O'B}$ 表达式中正负号的不同是由于在 e 的正方向和负方向看, 逆时针是不同的. 其实也可以用 e 的方向作为 u_3 轴的方向, 就可以避免讨论正负.

习题 1.74 (第六章第 36 题)

求下列线性变换在所指定的基下的矩阵

- (1) 在 $F_n[x]$ 中, $\mathcal{A}(P(x)) = P'(x)$, 在基 $e_0 = 1, e_1 = x, \dots, e_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下;
- (2) 以四个线性无关的函数

$$\alpha_1 = e^{ax} \cos bx \quad \alpha_2 = e^{ax} \sin bx \quad \alpha_3 = x e^{ax} \cos bx \quad \alpha_4 = x e^{ax} \sin bx$$

为基的四维空间中, 线性变换为微分变换;

- (3) 给定 2 阶实方阵 A , 求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathcal{A}(x) = Ax - xA$ 在基

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 下的矩阵.}$$

解 (1) 由题 $\mathcal{A}(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) = (0, e_0, e_1, \dots, e_{n-2}) = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 由题可知 \mathcal{A} 与 (1) 中相同, 那么有:

$$\mathcal{A}(\alpha_1) = (e^{ax} \cos bx)' = e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx) = a\alpha_1 - b\alpha_2,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_2) = (e^{ax} \sin bx)' = e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx) = b\alpha_1 + a\alpha_2,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_3) = (xe^{ax} \cos bx)' = e^{ax}(\cos bx + ax \cos bx - bx \sin bx) = \alpha_1 + a\alpha_3 - b\alpha_4,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_4) = (xe^{ax} \sin bx)' = e^{ax}(\sin bx + ax \sin bx - bx \cos bx) = \alpha_2 + b\alpha_3 + a\alpha_4.$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -be_2 + ce_3$, $\mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -ce_1 + (a-d)e_2 + ce_4$, $\mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} = be_1 + (d-a)e_3 - be_4$, $\mathcal{A}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = be_2 - ce_3$, 于是:

$$\mathcal{A}(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

习题 1.75 (第六章第 37 题)

在 \mathbb{R}^3 中定义线性变换

$$\mathcal{A}(x, y, z)^T = (x + 2y, x - 3z, 2y - z)^T.$$

求 \mathcal{A} 在基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵。

解 $\mathcal{A}e_1 = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$, $\mathcal{A}e_2 = (2, 0, 2) = 2e_1 + 2e_3$, $\mathcal{A}e_3 = (0, -3, -1) = -3e_2 - e_3$, 则有:

$$\mathcal{A}(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \triangleq (e_1, e_2, e_3)A$$

则 A 即为 \mathcal{A} 在基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵。

习题 1.76 (第六章第 38 题)

设 \mathbb{R}^3 中的线性变换 \mathcal{A} 将

$$\alpha_1 = (0, 0, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$$

变换到

$$\beta_1 = (2, 3, 5)^T, \quad \beta_2 = (1, 0, 0)^T, \quad \beta_3 = (0, 1, -1)^T.$$

求 \mathcal{A} 在自然基和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。

解 容易看出 $e_1 = \alpha_3 - \alpha_2, e_2 = \alpha_2 - \alpha_1, e_3 = \alpha_3$, 则 $\mathcal{A}e_1 = \beta_3 - \beta_2 = -e_1 + e_2 - e_3, \mathcal{A}e_2 = \beta_2 - \beta_1 = -e_1 - 3e_2 - 5e_3, \mathcal{A}e_3 = \beta_1 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3$, 则有:

$$\mathcal{A}(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \triangleq (e_1, e_2, e_3)A$$

则 A 即为 \mathcal{A} 在自然基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵。

而 $\mathcal{A}\alpha_1 = \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\mathcal{A}\alpha_2 = \beta_2 = -\alpha_2 + \alpha_3$, $\mathcal{A}\alpha_3 = \beta_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2$, 则有:

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \triangleq (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$$

则 B 即为 \mathcal{A} 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。

习题 1.77 (第六章第 41 题)

在 \mathbb{R}^3 中给定两组基:

$$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (2, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T; \quad \beta_1 = (2, 3, 1)^T, \quad \beta_2 = (7, 9, 5)^T, \quad \beta_3 = (3, 4, 3)^T.$$

定义线性变换 $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i (i = 1, 2, 3)$.

(1) 求 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵;

(2) 求 \mathcal{A} 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵。

解 (1) 计算得 $\mathcal{A}\alpha_1 = \beta_1 = -\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3$, $\mathcal{A}\alpha_2 = \beta_2 = -3\alpha_1 + \alpha_2 + 8\alpha_3$, $\mathcal{A}\alpha_3 = \beta_3 = -\alpha_1 + 4\alpha_3$, 则有:

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 8 & 4 \end{pmatrix} \triangleq (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$$

则 A 即为 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。

(2) 由前一问 $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = \mathcal{A}^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A$.

从而 \mathcal{A} 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵也为 A .

习题 1.78 (第六章第 42 题)

设 V 为 n 维线性空间, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 为线性变换. 若存在 $\alpha \in V$, 使得 $\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0$, 但是 $\mathcal{A}^n\alpha = 0$, 证明: \mathcal{A} 在某组基下的矩阵为


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证明 先证 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基, 只需证它们线性无关即可. 设 $\lambda_1\alpha + \lambda_2\mathcal{A}\alpha + \dots + \lambda_n\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0$, 由题 $k \geq n$ 时, $\mathcal{A}^k\alpha = 0$, 则等式两边同时作用 \mathcal{A}^{n-1} 可得 $\lambda_1\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0$, 由于 $\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0$, 则 $\lambda_1 = 0$, 同理将等式两边同时作用 \mathcal{A}^{n-m} 可得 $\lambda_m = 0, m = 1, \dots, n$, 从而 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基, 于是:

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}\alpha, \dots, \mathcal{A}\alpha, \alpha) = (0, \mathcal{A}^{n-1}\alpha, \dots, \mathcal{A}\alpha) = (\mathcal{A}^{n-1}\alpha, \dots, \mathcal{A}\alpha, \alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

故题中所给矩阵为 \mathcal{A} 在基 $(\mathcal{A}^{n-1}\alpha, \dots, \mathcal{A}\alpha, \alpha)$ 下的矩阵。

 **笔记** 这是个很常见的取法, 以后也可能会多次见到, 建议记住并掌握证明方法。

习题 1.79 (第六章第 43 题)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基, 证明: 对于任意 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in V$, 存在线性变换 \mathcal{A} , 使得 $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$.



证明 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一组基, 那么 $\forall \beta_k, k = 1, \dots, n$, 存在唯一的一组常数 $\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{nk}$ 使得 $\beta_k = \lambda_{1k}\alpha_1 + \dots + \lambda_{nk}\alpha_n$, 取方阵 A 满足 $(A)_{ij} = \lambda_{ij}$, 由于线性变换与矩阵之间存在着一一对应, 那么必存在一个线性变换 \mathcal{A} , 其在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A , 于是有:

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

从而 $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, \dots, n$, 于是 \mathcal{A} 即为所求的线性变换。



笔记 或者也可以直接定义映射 $\mathcal{A} : \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n \mapsto \lambda_1\beta_1 + \dots + \lambda_n\beta_n$, 容易验证线性性。这是因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一组基, 所以 V 中任意元素都能写成它们的线性组合, 我们把组合系数“迁移”到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 上, 便得到了要求的线性变换。并且我们其实可以把这个结论推广到线性映射, 即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in U$ 为另一个线性空间, 以同样的方式定义映射, 验证线性性即可。