О монадическом законе нуля и единицы для графа $G(n,p)$

Анастасия Ремизова

15 декабря 2016 г.

1 Определения

Рассмотрим **модель случайных графов Эрдеша-Реньи**. Пусть $\mathfrak{G}$ — множество, содержащее все конечные неориентированные графы $G = \langle |G|, E\rangle$. Определим функцию $p = p(n)$, $p : \omega \mapsto [0,1]$. Определим вероятностную модель $\mathfrak{G}(n,p) = \langle \mathfrak{G}, \mathsf{P}_p\rangle$: для графа G с числом ребер ϵ определим $\mathsf{P}(\mathfrak{G}(n,p) = G) = p^{\epsilon}(1-p)^{\binom{n}{2}-\epsilon}$.

Рассмотрим формулы **логики первого порядка** и **монадической логики второго порядка** над случайными графами: сигнатура σ содержит символы равенства $=$ и смежности $\sim$. Формулы логики первого порядка построены из атомарных переменных x, y, x_1, ... и двух предикатных символов, упомянутых выше, логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\forall$, $\exists$ по переменным. Формулы монадической логики (второго порядка), помимо этого, могут содержать переменные, обозначающие множества, в форме $x \in X$, и кванторы по ним.

Будем рассматривать только конечные формулы. Назовем **кванторной глубиной** $q(\varphi)$ **формулы** φ число вложенных кванторов в самой длинной цепи вложенных кванторов в этой формуле.

Нас интересуют асимптотические свойства вероятности выполнения свойства φ для случайного графа $\mathfrak{G}(n,p)$ — обозначим эту вероятность $\mathsf{P}_{n,p}(\varphi)$, а особенно существование предела этой вероятности при $n \to \infty$, который мы назовем **асимптотической вероятностью** φ — $\mathsf{P}_p(\varphi) = lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_{n,p}(\varphi)$. Если этот предел существует для любой формулы логики L, то мы говорим, что выполняется **закон сходимости** для L и p. Если, к тому же, для каждой формулы асимптотическая вероятность равна 0 или 1, мы говорим, что выполняется **закон** 0 **и** 1. Если асимптотическая вероятность равна 1, мы говорим, что φ выполняется **асимптотически почти наверное (а.п.н.)**. В случае, когда для всех формул логики L, имеющих глубину не более чем k, асимптотическая вероятность равна 0 или 1, мы говорим, что выполняется k**-закон** 0 **и** 1. Разумеется, закон 0 и 1 (для логики L) выполняется тогда и только тогда, когда для любого натурального k выполняется k-закон 0 и 1.

В частности, если L — логика первого порядка, то мы называем эти законы **FO-законами** (из-за того, что в английском языке логика первого порядка называется first order logic), а если L — монадическая логика второго порядка — то **MSO-законами** (monadic second order logic).

2 Известные результаты

Теорема 1 (Глебский, Коган, Лиогонький, Таланов, Фагин [1]). При $p = const$ FO-закон 0 и 1 выполнен.

Теорема 2 (Кауфман, Шелах [3], Тишкиевич [4]). При $p = const$ граф $G(n, p)$ не подчиняется MSO-закону сходимости.

Надо заметить, что доказательство ниже было приведено Тишкиевичем. Оно имеет преимущество перед более ранним доказательством Кауфмана и Шелаха: его легче перенести на случай $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, для которого закон сходимости, как доказал Тишкиевич в упомянутой работе, также не выполнен.

Наша задача состоит в нахождении минимальной кванторной глубины, при которой MSO-закон 0 и 1 не выполнен для некоторого p, равного константе. Для получения верхней оценки мы постараемся найти кванторную глубину формулы, которая не имеет асимптотической вероятности и описана в доказательстве ниже. Однако она не приведена явно. В следующем разделе мы осуществим явную конструкцию этой формулы, чтобы оценить ее кванторную глубину.

Идея доказательства: Рассмотрим пару графов $(G, H), G \subseteq H; |G| = \{0, ..., k-1\}, |H| \backslash |G| = \{k, ..., l-1\}$

Обозначим следующую формулу, назовем ее *аксиомой расширения*, $Ext(G, H)$:

$$\forall x_0, ..., x_{k-1}([\{x_0, ..., x_{k-1}\} \simeq G] \to (\exists x_k, ..., x_{l-1}[\{x_0, ..., x_{l-1}\} \simeq H],$$

которая выражает свойство, заключающееся в том, что каждый граф, изоморфный G, можно дополнить до графа, изоморфного H. При этом сохраняется порядок вершин: изоморфизм, переводящий x_0, ..., x_{l-1} в H, переводит x_0, ..., x_{k-1} в G.

Фагин [2] доказал, что для произвольных двух графов $G \subseteq H$ выполнено равенство: $\mathsf{P}_p(Ext(G, H)) = 1$, в частности, $\mathsf{P}_p(Ext(\varnothing, H)) = 1$. При этом $\mathsf{P}_{n,p}(Ext(G, H))$ равна 1 при $n < |G|$ и $\mathsf{P}_{p,n}(Ext(G, H)) = 1 - \mathsf{P}_{n,p}(Ext(\varnothing, G))$ при $n < |H|$.

Можно выбрать последовательность (G_i, H_i) такую, что с ростом i мощности $|G_i|$ и $|H_i|$ бы очень быстро возрастали: $|H_i|$ был бы много больше $|G_i|$ и $|H_{i-1}|$, и при достижении n значения $|H_i|$ $\mathsf{P}_{p,n}(\bigwedge_{j<i}(Ext(G_j, H_j))) \approx 1$. Тогда формула, выражающая $\bigwedge_{i \in \omega} Ext(G_i, H_i)$, не имела бы асимптотической вероятности, так как:

$$\mathsf{P}_{p,n}(\bigwedge_{i \in \omega} Ext(G_i, H_i)) \approx \min_{i \in \omega} \mathsf{P}_{p,n}(Ext(G_i, H_i)).$$

Зададим такую последовательность с помощью монадической формулы.

Доказательство: Пусть M — детерминированная одноленточная машина Тьюринга, которая на вход принимает число в его унарном разложении и всегда останавливается.

Определим функцию из ω в ω:

$$size_M(m) = m + space_M(m) \cdot time_M(m),$$

где $time_M(m)$ — число шагов вычисления машиной M при входе m, $space_M(m)$ — число клеток, в которых побывала головка до завершения работы машины M.

Построим монадическую формулу $\varphi(X)$ такую, что если верно, что $G \models \varphi(X)$, то мощность X равна $size_M(m)$ при некотором m. Мы еще вернемся к этой формуле позже.

Возьмем $\varphi(X)$ таким образом:

$$\exists L, U \exists EC, OC, ER, OR \tilde{\varphi}(L, U, EC, OC, ER, OR),$$

где $\tilde{\varphi}$ — соединение следующих условий:

1. $L, U \subseteq X$
2. $EC, OC, ER, OR \subseteq U$
3. $L \cap U = \varnothing, L \cup U = X$
4. $EC \cap OC = \varnothing, EC \cup OC = U$
5. $ER \cap OR = \varnothing, ER \cup OR = U$
6. $\langle U, E \rangle$ — прямоугольная решетка такая, что EC и OC (ER и OR, соответственно) — объединения несвязанных цепей, которые являются четными и нечетными столбцами (строками) этой решетки.
7. E — биекция из L на первые $|L|$ элементов первой строки решетки.
8. Других ребер не существует, кроме, возможно, ребер между вершинами L.

Мы назовем граф X **решеточным расширением**, если для него выполняются предыдущие 8 условий, и говорим, что он — **решеточное расширение** L', если в качестве L можно взять L'.

Сделаем так, чтобы получившийся граф X соответствал вычислению машины Тьюринга M на входе 1...1 длины $|L|$. Поясним, как это будет реализовано. Считаем, что имеем алфавит $A = \{a_1, ..., a_m\}$ и множество состояний $Q = \{q_1, ..., q_k\}$. Выберем подмножества вершин графа X $X(q_i, a_j)$ — это вершины, которые будут соответствовать пребыванию головки в состоянии q_i в ячейке, которая содержит a_j. $Y = \bigcup_{i \in \{1,...,k\}, j \in \{1,...,m\}} X(q_i, a_j)$. Каждая строка решетки U будет соответствовать некоторому моменту времени, таким образом, в каждой строке должна быть ровно одна вершина из Y. В первой строке должна быть вершина из $X(q_1, a_j)$, где q_1 — начальное состояние.

Каждый столбец решетки U будет соответствовать некоторой ячейке ленты. Переходы вида $< q_i, a_j > \to < q_{i'}, a_{j'}, d >$ будут соответствовать вершинам из двух соседних строк: вершина из верхней строки будет лежать в $X(q_i, a_j)$, а из нижней — $X(q_{i'}, a_{j''})$, где $a_{j''}$ — ранее записанная буква в ячейку, соответствующую этой строке (правильная последовательность записи букв тоже должна будет поддерживаться некоторым способом). Вершина из нижней строки будет находиться на один столбец левее, правее или в том же столбце, если $d = L, R$ или N соответственно. При этом во всех столбцах должна быть хотя бы одна вершина из Y. Тогда ширина решетки U — число столбцов — будет равна $space_M(|L|)$, высота решетки — число строк — будет равна $time_M(|L|)$ (на самом деле, $time_M(|L|) + 1$, но это можно исправить тем, что мы не переходим на уровень ниже, если происходит переход в завершающее состояние). Чтобы получился граф, удовлетворяющий данным условиям, добавим к $\tilde{\varphi}$ конъюнкцию с $\exists X(q_1, a_1)$ ... $\exists X(q_1, a_m)$ ... $\exists X(q_k, a_1)$ ... $\exists X(q_k, a_m)$ $\psi(L, U, EC, OC, ER, OR, X(q_1, a_1),$ ..., $X(q_1, a_m)$, ..., $X(q_k, a_1)$, ... $X(q_k, a_m))$. ψ должна быть записана так, чтобы выражать предыдущие условия.

Для другой детерминированной одноленточной машины Тьюринга N мы запишем формулу $\gamma(X, Y)$ такую, что если $G \models \gamma(X, Y)$, то $|Y| = size_N(|X|)$. Ее можно построить аналогично φ, где вместо множества L мы будем строить расширение множества X, но уже не ставя по нему кванторов.

Теперь определим функцию $g : \omega \to \omega$:

$g(m) = 1 +$ (наименьшее $n > g(m-1)$ такое, что $\mu_n(\bigwedge Ext(G, H)) \geq 1 - 1/m$; конъюнкция проходит по всем решеточным расширениям (G, H) таким, что $|H| \leq m$)

Очевидно, что g является рекурсивной строго возрастающей функцией.

Пусть машина Тьюринга N принимает унарное разложение числа m, выводит строку из единиц и вычисляет некоторую функцию $h > g$ такую, что она удовлетворяет условию: $h(m) = space_N(m)$.

Пусть машина Тьюринга M принимает унарное разложение числа m и выводит строку из единиц. Более того, M вычисляет всюду определенную на множестве унарных последовательностей функцию f такую, что для $m > 0$:

$$f(m) > g(size_N(size_M(m-1)))$$

.

Окончательно, искомой формулой будет:

$$Ext \equiv \forall X(\varphi(X) \to \gamma(X, Y))$$

Заметим, что Ext эквивалентна $\bigwedge_{m \in \omega} Ext(G_m, H_m)$, где G_m — решеточное расширение $\varnothing$ размера $size_M(m)$, H_m — решеточное расширение G_m размера $size_N(size_M(m))$.

Утверждение: Не существует $\mathsf{P}_p(Ext)$.

Пусть $n = g(size_M(m)) - 1$ для некоторого m. Тогда, по построению g,

$$\mathsf{P}_{n,p}Ext(\varnothing, H)) \geq 1 - 1/m$$

для всех решеточных расширений $(\varnothing, H)$ с $|H| \leq size_M(m)$. Поэтому вероятность выбора графа X, удовлетворяющего $\phi(X)$, с мощностью $|X|$, не меньше $1 - 1/m$. Но тогда Y, удовлетворяющего $\gamma(X, Y)$, не существует, так как тогда $|Y \backslash X| \geq g(size_M(m)) > n$, а это не так. Поэтому $\mu_n(Ext) \leq 1/m$.

Значит, нижний предел $\mathsf{P}_{n,p}(Ext(G_m, H_m))$ равен 0.

Теперь, пусть $n = g(size_N(size_M(m-1)))$ для некоторого m. Так как $size_M(m) > n$, все X, которые могут удовлетворять $\phi(X)$, должны иметь мощности: $size_M(0)$, ..., $size_M(m-1)$. Но $\mathsf{P}_{n,p}(\bigwedge Ext(G, H)) \geq 1 - 1/m$, где конъюнкция происходит по всем (G, H), H — расширение G, $|H| \leq size_N(size_M(m-1))$, следовательно, для каждого X, удовлетворяющего $\varphi(X)$, есть Y, удовлетворяющий $\gamma(X, Y)$, с вероятностью не меньшей $1 - 1/m$. А значит, $\mathsf{P}_{n,p}(Ext) \geq (1 - 1/m)$.

Значит, верхний предел $\mathsf{P}_{n,p}(Ext(G_m, H_m))$ равен 1.

А потому MSO-закон сходимости не выполняется.

3 Полученные результаты

Мы желаем найти минимальную кванторную глубину монадической формулы, при которой MSO-закон 0 и 1 не выполняется.

Из доказательства утверждения следует идея для верхней оценки глубины монадической формулы, при которой для $p = const$ не выполняется закон 0 и 1 — собственно, оценить глубину формулы Ext. Для этого построим ее явно.

Сначала построим формулу, которая показывает, что граф удовлетворяет свойствам 1)-8).

1) $L, U \subseteq X$:

$\forall x(x \in L \to x \in X)$ — глубина 1.

Аналогично для $U \subseteq X$ и 2).

2) $EC, OC, ER, OR \subseteq U$

3) $L \cap U = \emptyset, L \cup U = X$

$\forall x \neg(x \in L \wedge x \in U) \wedge (x \in X \to x \in L \vee x \in U)$ — глубина 1.

Аналогично для 4), 5).

4) $EC \cap OC = \emptyset, EC \cup OC = U$

5) $ER \cap OR = \emptyset, ER \cup OR = U$

6) $\langle U, E\rangle$ — решетка. $EC, OC(ER, OR)$ — объединения разъединённых цепей, представляющих собой чётные и нечётные столбцы (строки) решётки.

Обозначим число соседей вершины v из множества V как $deg(V, v)$:

$deg(v, V) = 0$ — глубины 1:

$\forall v_1(v_1 \in V \to (v \nsim v_1))$

$deg(v, V) = 1$ — глубины 2:

$\exists v_1(v_1 \in V \wedge v \sim v_1 \wedge \forall v_2((v_2 \in V \wedge v \sim v_2) \to v_1 = v_2))$

$deg(v, V) = 2$ — глубины 3:

$\exists v_1 \exists v_2 (v_1 \in V \wedge v_2 \in V \wedge v_1 \neq v_2 \wedge v \sim v_1 \wedge v \sim v_2 \wedge \forall v_3 ((v_3 \in V \wedge v \sim v_3) \to (v_3 = v_1 \vee v_3 = v_2)))$

Множество V и ребра между его вершинами представляют собой объединение разъединённых цепей; обозначим формулу $UnionChains(V)$ — она глубины 4.

$\forall v (v \in V \to (deg(v, V) = 1 \vee deg(v, V) = 2)) \wedge$

$\forall V_1 (V_1 \subseteq V \to \exists v_1 (v_1 \in V_1 \wedge (deg(v_1, V_1) = 0 \vee deg(v_1, V_1) = 1)))$

Вторая часть формулы отвечает за отсутствие циклов в множестве.

Нужно просто подставить EC (ER, OC,OR) в формулу $UnionChains(V)$, чтобы получить, что они - объединения разъединённых цепей.

Формула, показывающая, что V является множеством, состоящим из одной цепи, при условии, что V — подмножество вершин объединения разъединённых цепей, — $ChainInUnion(V)$ — глубины 4:

$\wedge \exists BE (\exists v_1 \exists v_2 (v_1 \in V \wedge v_2 \in V \wedge v_1 \in BE \wedge v_2 \in BE \wedge \forall v (v \in BE \to v = v_1 \wedge v = v_2)) \wedge$

$\forall v ((v \in BE \to deg(v, BE) = 1) \wedge ((v \in V \wedge v \notin BE) \to \neg(deg(v, V) = 1 \vee deg(v, V) = 0))$

BE — множество, состоящее из начала и конца цепи.

Формула, показывающая, что можно построить инъекцию из V_1 в V_2, которая отображает вершину из V_1 в ее единственного соседа из V_2 — $Injection(V_1, V_2)$ — глубины 3:

$\forall v_1 (v_1 \in V_1 \to \exists v_2 (v_2 \in V_2 \wedge v_1 \sim v_2 \wedge \forall v_3 ((v_3 \in V_2 \wedge v_1 \sim v_3) \to (v_3 = v_2))))$

Тогда можно определить биекцию из V_1 в V_2 — $Bijection(V_1, V_2)$ — глубины 3:

$Injection(V_1, V_2) \wedge Injection(V_2, V_1)$

Дополнительное условие для цепей — чтобы биекция имела правильный вид и соединяла соседей в цепи с соседями в другой цепи — $CorrectConnection(V_1, V_2)$ — глубины 4:

$\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 ((v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2 \wedge v_3 \in V_1 \wedge v_4 \in V_2 \wedge v_1 \sim v_2 \wedge v_1 \sim v_3 \wedge v_3 \sim v_4) \to v_2 \sim v_4)$

Формула, означающая, что цепи соединены правильным образом — $Connected(V_1, V_2)$ — глубины 4:

$Bijection(V_1, V_2) \wedge CorrectConnection(V_1, V_2)$

Формула, показывающая, что любые 2 цепи из подмножеств цепей в четных и нечетных столбцах либо соединены, либо не имеют общих ребер — $AllChainConnection(EC, OC)$ — глубины 6.

$\forall C_1 \forall C_2 ((((C_1 \subseteq EC \wedge C_2 \subseteq OC) \vee (C_1 \subseteq OC \wedge C_2 \subseteq EC)) \wedge ChainInUnion(C_1) \wedge ChainInUnion(C_2)) \to (Connected(C_1, C_2) \vee (\forall v (v \in C_1 \to deg(v, C_2) = 0))))$

Формула, показывающая, что C — крайняя цепь из EC — $LastChain(C, EC, OC)$ — глубины 4:

$ChainInUnion(C) \wedge C \subseteq EC \wedge \forall v ((v \in C) \to deg(v, OC) = 1)$

Формула, показывающая, что любая цепь из EC, не совпадающая с C_1 и C_2, соединена с 2 другими из OC — $OtherChains(EC, OC, C_1, C_2)$ — глубины 4:

$\forall v ((EC(v) \wedge v \notin C_1 \wedge v \notin C_2) \to deg(v, OC) = 2))$

Формула, определяющая решетку — $Grid(EC, OC)$ — глубины 6:

$AllChainConnection(EC,OC) \wedge \exists C_1 \exists C_2((LastChain(C_1,EC,OC) \vee LastChain(C_1,OC,EC)) \wedge (LastChain(C_2,EC,OC) \vee LastChain(C_2,OC,EC)) \wedge OtherChains(EC,OC,C_1,C_2) \wedge OtherChains(OC,EC,C_1,C_2))$

Аналогично можно записать $Grid(ER,OR)$.

7. E — биекция из L на первые $|L|$ элементов первой строки.

$\exists R_1(LastChain(C_1,ER,OR) \wedge Injection(L,C_1) \wedge CorrectConnection(L,C_1) \wedge \exists v(deg(v,C_1) = 1 \wedge \exists v_1(v_1 \in L \wedge v_1 \sim v))$

8. Не существует иных ребер, кроме, возможно, между вершинами L — следует уже из 7.

Дальнейшая работа состоит в том, чтобы построить формулу, определяющую соответствие данного графа некоторой конкретной машине Тьюринга.

4 Список литературы

[1] Ю.В. Глебский, Д.И. Коган, М.И. Лиогонький, В.А.Таланов, Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов, *Кибернетика*, 1969, **2**: 17-26.

[2] R. Fagin, Probabilities in finite models, *J. Symbolic Logic*, 1976, **41**: 50-58.

[3] M. Kaufmann, S. Shelah, On random models of finite power and monadic logic, *Discrete Mathematics*, 1985, **54(3)**: 285-293.

[4] J. Tyszkiewicz, On Asymptotic Probabilities of Monadic Second Order Properties, *Lecture Notes in Computer Science*, 1993, **702**: 425-439.