Análisis Matemático
Teoria

Facundo Beltramo
contacto: fexbef[at]gmail[dot]com

Fecha: xx de xx del 201x

Contents

Chapter 1

Funciones Reales

1.1 Definición de Función

Una Función Real de una variable Real es una regla o una ley que asigna a cada uno de los elementos de un cierto subconjunto de los $\mathbb{R}$ un único elemento $\mathbb{R}$.

Notación:

$$f : D \in \mathbb{R} \longrightarrow C \in \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

f toma un x de D y devuelve un y perteneciente a C. Donde D es el dominio de la función, $y = f(x)$ es el valor de f en x y C es el codominio de la función.

1.1.1 Definicion: Dominio

Llamaremos Conjunto de Partida o Dominio de f, a el conjunto de todos los posibles valores de ingreso que la función acepta y lo notamos Dom$f$.

1.1.2 Definición: Codominio

Llamaremos Conjunto de Llegada o Codominio de f, a el conjunto de todos los valores de salida de una función y lo notamos Cod$f$.

1.1.3 Definición: Imagen

Llamaremos recorrido o imagen de f, al conjunto Imf =$\{f(x)/x$ $\in$Dom$f\}$

1.2 Primeras Funciones con nombre

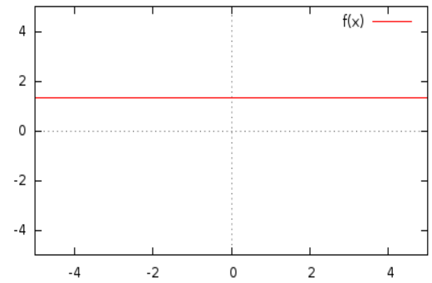
Existen ciertas funciones que suelen encontrarse con frecuencia en variados problemas y para poder hacer mejor referencia a ellas se les dio nombre.

1.2.1 Función Constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = k, k \in \mathbb{R}$$

Dom$f = \mathbb{R}$
Cod$f = \mathbb{R}$
Im$f = \mathbb{R}$

Grafica de $f(x) = k$

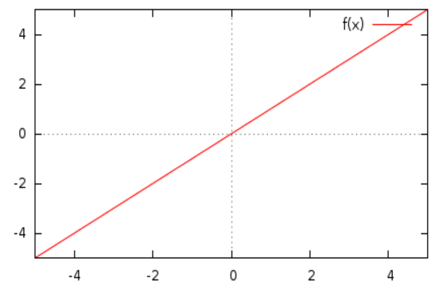


1.2.2 Funcion Identidad

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x$$

Dom$f = \mathbb{R}$
Cod$f = \mathbb{R}$
Im$f = \mathbb{R}$

Grafica de $f(x) = x$



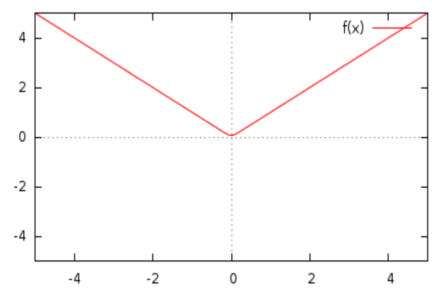
1.2.3 Función Valor Absoluto

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = |x|$$

Dom$f = \mathbb{R}$
Cod$f = \mathbb{R}$
Im$f = \mathbb{R}_0^+$

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Grafica de $f(x) = |x|$



1.2.3.1 Propiedades del Valor Absoluto

- $|x| = |-x|$ o bien $f(x) = f(-x)$ (es una función par)
- $f(f(x)) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \longrightarrow \text{no se da nunca} \end{cases} \Rightarrow ||x|| = |x|$
- $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ es decir $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (conocida como Desigualdad Triangular)
- $f(x) = \sqrt{x^2}$ es decir $|x| = \sqrt{x^2}$

1.3 Álgebra de funciones

Sean: $f : A \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, y $g : B \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiremos las siguientes funciones:

1.3.1 Función Suma

$$f+g : A\cap B \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

1.3.2 Función Diferencia

$$f-g : A\cap B \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

1.3.3 Función Producto

$$f \text{ x } g : A\cap B \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (f \text{ x } g)(x) = f(x) \text{ x } g(x)$$

1.3.4 Función Cociente

$$f/g : \{x\in A\cap B/g(x)\neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (f/g)(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)}$$

1.4 Gráfica de función

1.4.1 Definicion

Sea f una función real, llamamos gráfica o grafo de f al lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano tale que $x\in \text{Dom}f$ e $y=f(x)$ es decir, lo notamos:

$$\text{Gr}f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in\text{Dom}f \wedge y=f(x)\}$$

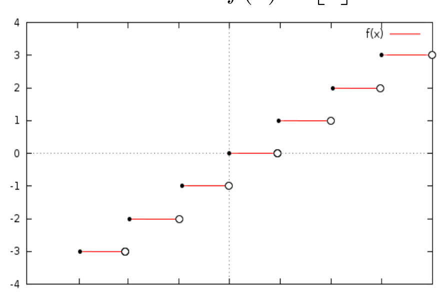
1.4.2 Función Parte Entera

$$f : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{N}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \lfloor x\rfloor = n \rightarrow \text{“Mayor entero que no supera a } x\text{”}$$

otra definicion

$$\lfloor x\rfloor = \begin{cases} a-n & -n\leqslant x < -n+1 \\ . & . \\ . & . \\ -2 & -2\leqslant x<-2+1 \\ -1 & -1\leqslant x<-1+1 \\ 0 & 0\leqslant x<0+1 \\ 1 & 1\leqslant x<1+1 \\ 2 & 2\leqslant x<2+1 \\ . & . \\ . & . \\ n & n\leqslant x<n+1 \end{cases}$$

Grafica de $f(x)=\lfloor x\rfloor$



$\text{Dom}f=\mathbb{R}$, $\text{Cod}f=\mathbb{N}$, $\text{Im}f=\mathbb{N}$

La gráfica corresponde a: $\text{Gr}f = \{(x,f(x))/x \in\text{Dom}f\}$

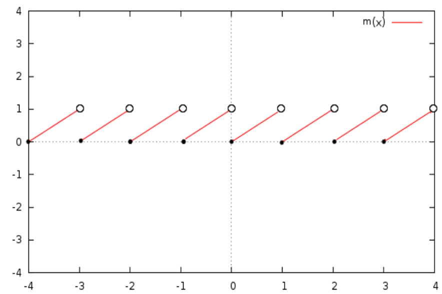
1.4.3 Función Mantisa

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = x - \lfloor x \rfloor = m(x)$$

Sea $x \in \mathbb{R}$
$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$
$0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$
$\therefore$ Se deduce la imagen.

Grafica de $f(x) = x - \lfloor x \rfloor = m(x)$



$\text{Dom} f = \mathbb{R}$, $\text{Cod} f = \mathbb{R}$, $\text{Im} f = [0, 1)$

1.5 Paridad de Funciones Reales

1.5.1 Definición conjunto simétrico

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$, diremos que es un conjunto simétrico sii: $x \in D \Rightarrow -x \in D$
Ejemplo: $[-1, 1]$ es simétrico pues: $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant -x < 1 \Leftrightarrow -x \in [-1, 1]$

1.5.2 Definición Paridad

Sea D un conjunto simétrico(respecto del origen) y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diremos que:

1.5.2.1 Función Par

f es una función par si y solo si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$

1.5.2.2 Función Impar

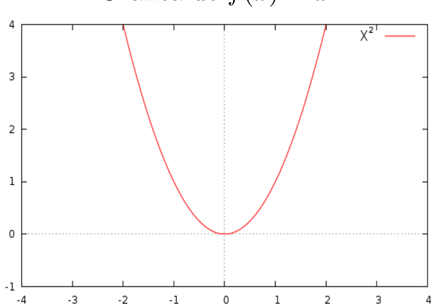
f es una función impar si y solo si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in D$
$\therefore f(-x) = -f(x)$ la función es impar.

Nota: si el dominio D no es simétrico no se puede hablar de ningun tipo de paridad.

1.5.3 Interpretación gráfica

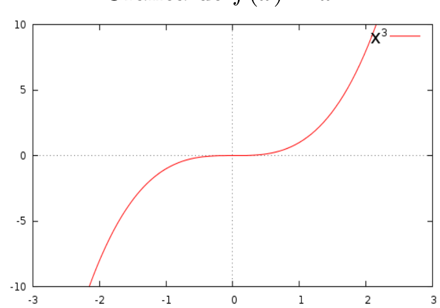
La gráfica de una función par es simétrica respecto aleje y y la de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Grafica de $f(x) = x^2$



$\text{Dom} f = \mathbb{R}$
x^2 es par ya que:
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Grafica de $f(x) = x^3$



$\text{Dom} f = \mathbb{R}$
x^3 es impar ya que:
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

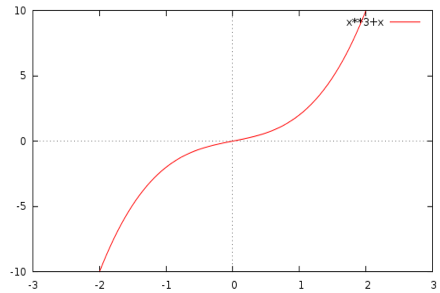
El conjunto de los $\mathbb{R}$ es simétrico.

1.5.3.1 Ejemplo: $f(x) = x^3 + x$

$f(x) = x^3 + x$
Dom$f = \mathbb{R}$ (simétrico)
Sea $x \in$ Dom$f$, valido f en $(-x)$

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$
$\therefore$ la función es impar.

Grafica de $f(x) = x^3 + x$



1.5.4 Propiedad de f impar

Sea f una función impar y $0 \in$ Dom$f \Rightarrow f(0) = 0$

1.5.4.1 Demostración

$$f(0) = -f(-0) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow 2 \text{ x } f(0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(0) = \frac{0}{2} \Rightarrow f(0) = 0$$

1.5.5 Propiedad f impar y par

Sea f una función par e impar a la vez, f termina siendo la función nula, $f(x) = 0$.

1.5.5.1 Demostración

$$f(x) \overset{f impar}{=} -f(-x) \overset{f par}{\Rightarrow} f(x) = -f(x)$$
$$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow 2 \text{ x } f(-x) = 0$$
$$f(-x) = 0$$

1.6 Monotonía

Definicion: Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diremos que:

1.6.1 Funcion creciente

f es creciente en $D \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

1.6.2 Funcion estrictamente creciente

f es creciente en $D \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

1.6.3 Funcion decreciente

f es creciente en $D \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

1.6.4 Función estrictamente decreciente

f es creciente en $D \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Nota: Si bien f es creciente o bien si es decreciente en todo su dominio, f se dice monótona.

1.6.5 Suma de funciones monótonas

- La suma de dos funciones crecientes, es una función creciente.
- La suma de dos funciones decrecientes, es una función decreciente.

1.6.5.1 Demostración suma de funciones crecientes

Hipotesis: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ (ambas crecientes)

Definimos la función suma $f + g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}/(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x)$

Sean $x_1 < x_2; x_1, x_2 \in A \cap B$

$$x_1 < x_2 \overset{Hip}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(g_1) < g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) \leqslant f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow (f+g)_{(x_1)} \leqslant (f+g)_{(x_2)}$$

$\therefore f + g$ es una función creciente.

1.6.5.2 Demostración suma de funciones decrecientes

Hipótesis: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ (ambas decrecientes)

Definimos la función suma $f + g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}/(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x)$

Sean $x_1 < x_2; x_1, x_2 \in A \cap B$

$$x_1 < x_2 \overset{Hip}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ f(g_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) \geqslant f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow (f+g)_{(x_1)} \geqslant (f+g)_{(x_2)}$$

$\therefore f + g$ es una función decreciente.

1.7 Función Lineal

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/g(x) = mx + h$$

$m :$ Pendiente.
$x :$ Variable independiente.
$h :$ Ordenada al origen.

1.7.1 Casos de funciones lineales

1.7.1.1 Caso $m = 0$

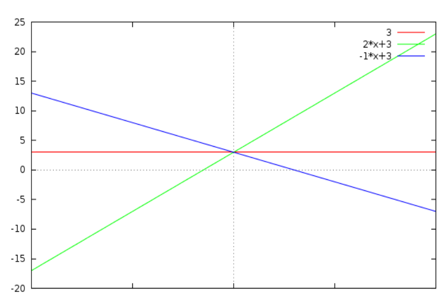
$$m = 0 \Rightarrow g(x) = h$$
$$\therefore g(x) \text{ es constante.}$$

1.7.1.2 Caso $m > 0$

$m > 0 \Rightarrow g(x) = mx + h$

Sean $x_1 < x_2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$x_1 < x_2 \overset{m>0}{\Rightarrow} mx_1 < mx_2 \Rightarrow$$
$$mx_1 + h < mx_2 + h \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$
$$\therefore \text{ es una función estrictamente creciente}$$



$f(x) = mx + 3$ con $m = -1 < 0$ y $m = 1 > 0$

1.7.1.3 Caso $m < 0$

$m < 0 \Rightarrow g(x) = mx + h$

Sean $x_1 < x_2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$x_1 < x_2 \overset{m<0}{\Rightarrow} mx_1 > mx_2 \Rightarrow$$
$$mx_1 + h > mx_2 + h \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$
$$\therefore \text{ es una función estrictamente decreciente}$$

1.7.2 Pendiente

La pendiente es la inclinación de la recta. Suponiendo que nuestra pendiente es α, sera $tg(\alpha) = m$. Siendo este m el mismo que e de nuestra ecuación $mx + h$.

1.7.3 Intersección con el eje Y

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow y = m.0 + h \Rightarrow y = h$$

1.7.4 Interseccion con el eje X

$$y = 0 \Rightarrow 0 = f(x) \Rightarrow 0 = mx + h \Rightarrow x = \frac{-h}{m}$$

1.8 Periodicidad

Si existe una constante positiva $p / \forall x \in D, x + p \in D$ y $f(x + p) = f(x)$. f se dice periódica y al mínimo p que verifica $f(x + p) = f(x)$ se o llama periodo de la función f.

1.8.1 Ejemplo: función Mantisa

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

Primero veamos que sucede si $p \in \mathbb{Z}, \Rightarrow \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$

$$f(x + p) = (x + p) - (\lfloor x + p \rfloor) \underset{p\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} f(x + p) = x + p - \lfloor x \rfloor - p \Rightarrow f(x + p) = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$$

Esto se cumple para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Vimos que con un numero perteneciente a $\mathbb{Z}$ se cumple parte de la condición de periodicidad pero, esta también dice que el periodo es el mínimo. Por lo tanto buscamos el mínimo de los naturales positivo y hallamos el numero 1.

Conclusión el periodo de la función Mantisa es 1.

1.9 Traslaciones

Movimientos de las representaciones gráficas.
Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R} / x \longrightarrow y = f(x)$:

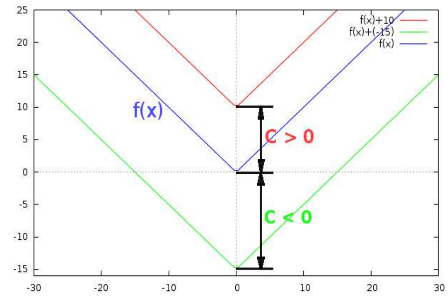
1.9.1 Traslación Vertical

Sea $g(x) = f(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$

- Si $c > 0$ la gráfica de g se obtiene desplazando la de f una distancia $|c|$ asia arriba.

- Si $c < 0$ la gráfica de g se obtiene desplazando la de f una distancia $|c|$ asia abajo.

Ejemplo $f(x) = |x|$



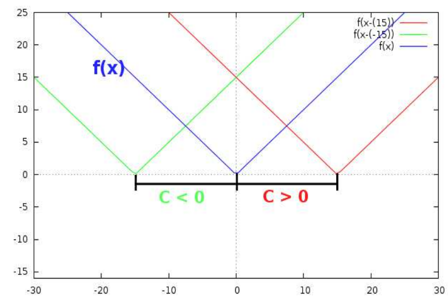
1.9.2 Traslación Horizontal

Sea $g(x) = f(x - c)$ con $c \in \mathbb{R}$
Dom$f$ $=\{x \in \mathbb{R}/x - c \in$Dom$f\}$

- Si $c > 0$ la gráfica de g se obtiene desplazando la de f una distancia $|c|$ asia la derecha.

- Si $c < 0$ la gráfica de g se obtiene desplazando la de f una distancia $|c|$ asia la izquierda.

Ejemplo $f(x) = |x|$



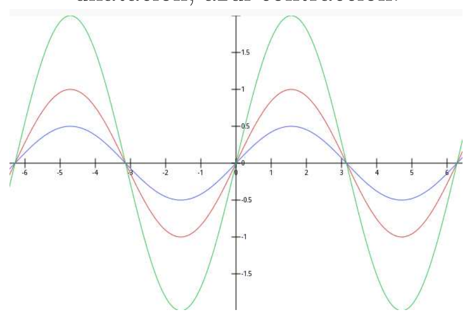
1.10 Dilataciones y contracciones

Sea $c > 0$:

1.10.1 Dilataciones y contracciones verticales

- $y = cf(x)$ dilata o estira la gráfica de f verticalmente de por un factor c.
- $y = \frac{1}{c}f(x)$ comprime la gráfica de f verticalmente de por un factor c.

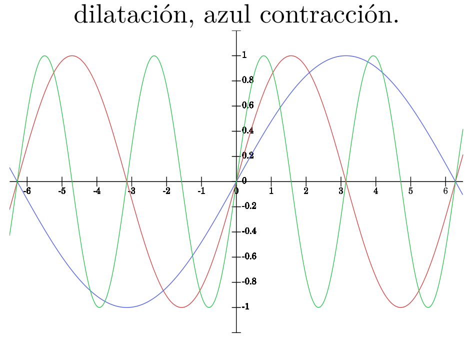
Ejemplo $f(x) = sen(x)$ en roja, $c = 2$. Verde dilatación, azul contracción.



1.10.2 Dilataciones y contracciones horizontales

- $y = f(xc)$ dilata o estira la gráfica de f horizontalmente por un factor c.
- $y = f(x\frac{1}{c})$ comprime la gráfica de f horizontalmente por un factor c.

Ejemplo $f(x) = sen(x)$ en roja, $c = 2$. Verde dilatación, azul contracción.



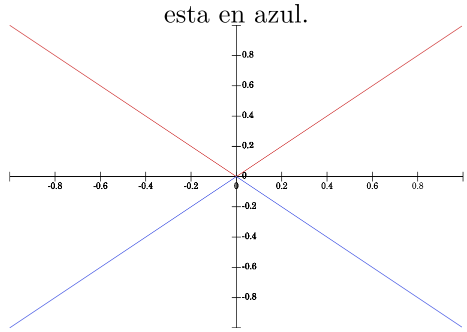
1.11 Reflexiones respecto a los ejes

1.11.1 Reflexión en el eje X

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}/y = f(x)$
defiimos $g(x) = (-1)f(x)$, Dom$f$ =Dom$f$
Si $(x, y) \in \mathrm{Gr}(f) \Rightarrow (x, -y) \in \mathrm{Gr}(g)$

Nota: Si w es raíz de f, es decir $f(w) = 0$, entonces w también lo es de g.

Ejemplo $f(x) = |x|$, en roja. La reflexión esta en azul.

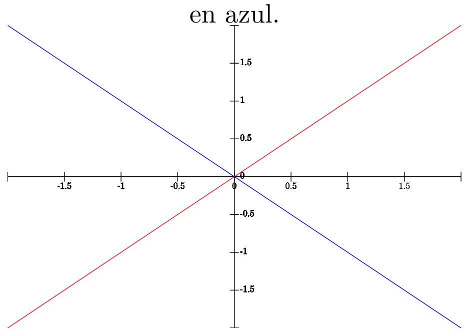


1.11.2 Reflexión en el eje Y

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}/y = f(x)$
defiimos $g(x) = f(x(-1))$
Dom$f$ =$\{x \in \mathbb{R}/ -x \in \text{Dom}f\}$
Si $(x, y) \in \text{Gr}(f) \Rightarrow (-x, y) \in \text{Gr}(g)$

Nota: se conserva la ordenada al origen y no cambia la imagen.

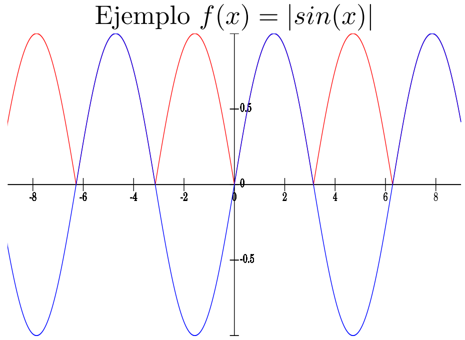
Ejemplo $f(x) = x$, en roja. La reflexión esta en azul.



1.12 Valor absoluto de una función

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}/y = f(x)$
definimos $g(x) = |f(x)|$
es decir:
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$
Dom$f$ =Dom$g$

Ejemplo $f(x) = |sin(x)|$



1.13 Función Cuadrática

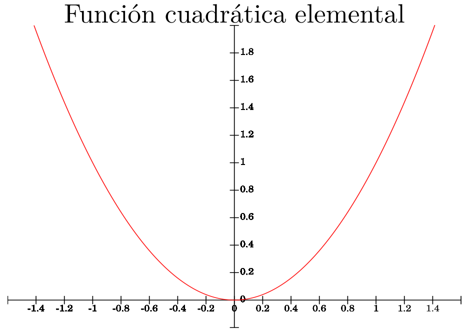
1.13.1 Función cuadrática elemental

Estudiaremos primero la función elemental:

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = x^2 \end{gathered}$$

Dom$f = \mathbb{R}$
Cod$f = \mathbb{R}$
Im$f = \mathbb{R}_0^+$

Función cuadrática elemental



- GR(f) =$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/y = x^2\} = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$
- Es par pues: $f(-x) = (-x)^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- f es creciente estrictamente en $(0, +\infty)$

Sean $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ y $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \underset{\substack{x_1>0 \\ x_2>0}}{\Rightarrow} x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$, ya que es par y estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

1.13.2 Definición de función cuadrática

Una "Función Cuadrática" es una función definida por:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ Donde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

1.13.3 Gráfica de la función cuadrática

Como ya conocemos la gráfica de la función cuadrática elemental ($f(x) = x^2$), la idea es transformar nuestra función cuadrática en corrimientos de la función cuadrática elemental y así poder hallar su gráfica mucho mas fácil.

Tenemos $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$a.x^2 + b.x + c$$

$$= \langle \text{ factor común } a \rangle$$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= \langle \text{ multiplicoy divido } \left(\frac{b}{a}x\right) \text{ por } 2 \rangle$$

$$a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= \langle \text{ sumo y resto } \left(\frac{b}{a}x\right)^2 \text{ para completar cuadrado } \rangle$$

$$a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{a}x\right)^2 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= \langle \text{ aplico inversa del trinomio cuadrado perfecto } \rangle$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= \langle \text{ propiedad de potencia y resuelvo } \rangle$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= \langle \text{ resuelvo la suma de fracciones : } \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{-b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} \\ \text{denominador común} \\ \dfrac{-b^2 + c4a}{4a^2} \end{array} \right. \rangle$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + c4a}{4a2}\right]$$

$$= \langle \text{ distribuyo } a \rangle$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + c4a}{4a}$$

$$= \langle \text{ si llamamos a } p = \frac{-b}{2a}, \text{ y a } q = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}, \text{ resulta } \rangle$$

$$a(x - p)^2 + q$$

1.13.3.1 Raíces de la función cuadrática (intersección con el eje X)

$$f(x)=0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{a}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}=0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{a}{2a}\right)^2=-\frac{-b^2+4ac}{4a} \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{a}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore f(x)=0 \Rightarrow \left. x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\} resolvente$$

1.13.3.2 Discriminante de la resolvente "$\triangle$"

Llamamos discriminante de la resolvente a el numero real:

$$\triangle=b^2-4ac$$

Hora veremos porque es importante el discriminante, es que al ver los posibles valores q puede tomar la resolvente nos dará distinguibles resultados:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}$$

Caso $\triangle=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b}{2a} \qquad \text{(Raiz } \mathbb{R} \text{ doble)}$$

La Grf corta al eje X en un solo punto: $x=\frac{-b}{2a}$.

Caso $\triangle>0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \bigwedge \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(2 raices } \mathbb{R} \text{ distintas)}$$

La Grf corta al eje X en dos puntos: x_1 y x_2.

Caso $\triangle<0$

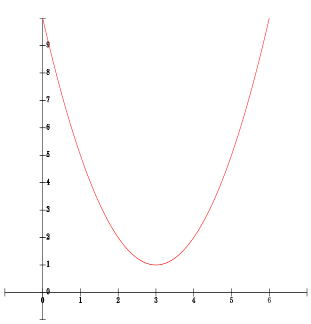
$$f(x)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(Existen 2 raices } \mathbb{C} \text{ opuestas)}$$

La Grf corta al eje X en dos puntos: x_1 y x_2.

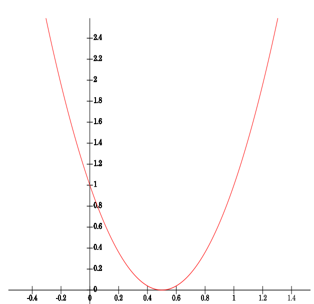
1.13.3.3 Ejemplos de gráficas:

- Considerece $a>0$

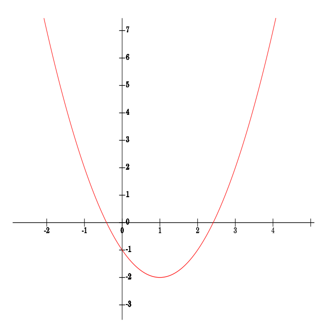
$\triangle<0$



$\triangle=0$

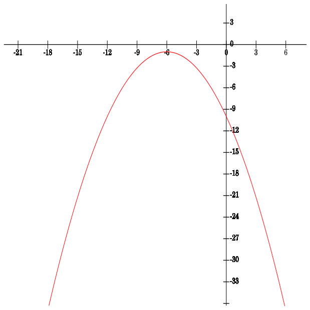


$\triangle>0$

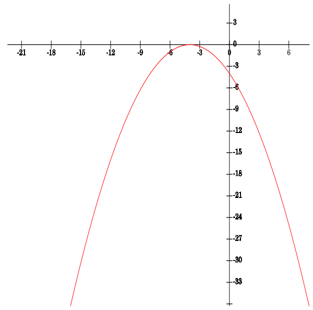


- Considérese $a < 0$

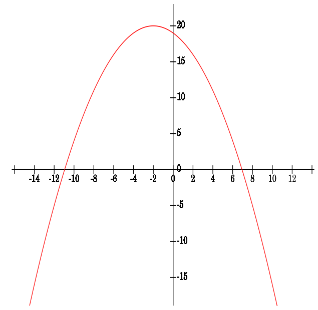
$\triangle < 0$



$\triangle = 0$



$\triangle > 0$



1.13.3.4 Intersección con el eje Y

$$f(0) = a \times 0 + b \times 0 + c \Rightarrow f(0) = c$$

La Grf corta al eje y en el punto $(0, c)$

1.13.3.5 Vertiese

El punto vértice en la gráfica de la función cuadrática se determina por los siguientes valores:

Eje de simetría
El eje de simetría de la función cuadrática es $x = p$
por tanto: $x = \dfrac{-b}{2a}$

Máximo o Mínimo de la funciona cuadrática
El máximo o mínimo de una función cuadrática en el eje Y
lo determina el valor de q es decir: $\dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$

Por lo tanto el vértice queda conformado como (p, q) es decir:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

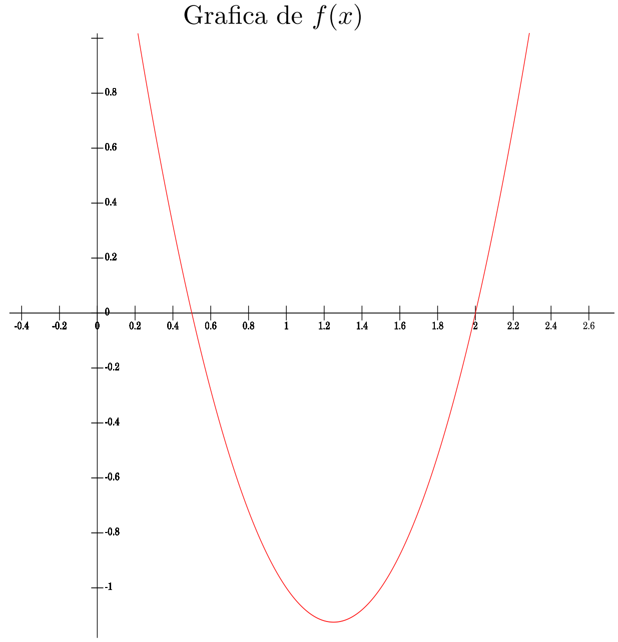
1.13.4 Ejemplo de una función cuadrática

Dada:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/x \longrightarrow f(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$\begin{aligned}
& 2x^2 - 5x + 2 \\
= \quad & \langle \text{ factor común 2 } \rangle \\
& 2\left[x^2 - x \times \frac{5}{2} + 1\right] \\
= \quad & \langle \text{ multiplico y divido por 2 } \rangle \\
& 2\left[x^2 - x \times \frac{5 \times 2}{2 \times 2} + 1\right] \\
= \quad & \langle \text{ sumo y resto } \left(\frac{5}{4}\right)^2 \rangle \\
& 2\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{4} + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} + 1\right] \\
= \quad & \langle \text{ trinomio cuadrado perfecto; resuelvo fracciones } \rangle \\
& 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] \\
= \quad & \langle \text{ distrivullo el 2 y simplifico } \rangle \\
& 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Grafica de $f(x)$



- Hallamos el vértice: $V\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$
- Intersección con ele eje Y: $f(0) = 2 \times 0^2 - 5 \times 0 + 2 = 2$
- Raíces:

$$2\times\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = 0 \Leftrightarrow 2\times\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$a = 2 \quad b = (-5) \quad c = 2$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2) \times (2)}}{2 \times (2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 2 \quad (2, 0) \qquad x_2 = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

1.14 Asíntotas

- Asíntota vertical

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje Y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$se la denomina asíntota vertical.

- Asíntota horizontal

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje X que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \to \pm\infty}$$

$f(x) = a$, siendo a un valor finito
la recta y = a es una asíntota horizontal.

- Asíntota oblicua

La recta de ecuación
$y = mx + b(m \neq 0)$ será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Los valores de m y de b se calculan con las fórmulas:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$$

1.15 Función Homográfica

La función homográfica esta definida por:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad \text{Donde } a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0; ad - cb \neq 0$$

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \qquad \text{ya que} \quad cx + d = 0 \Rightarrow x = \frac{-d}{c}$$

1.15.1 La funcion resiproca

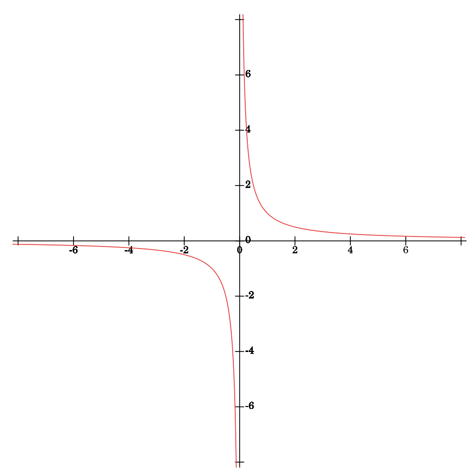
La función reciproca es la función homográfica mas simple: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ donde $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$. Su gráfica es una hipérbola.

Podemos ver su gráfica y que se trata de una homográfica:

$$f(x) = \frac{0 \times x + 1}{1 \times x + 0}$$
$$c = 1 \Rightarrow c \neq 0 \quad \text{y}$$
$$0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \Rightarrow ad - cb \neq 0$$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Paridad: $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = \dfrac{-1}{x} = -f(x)$

$\therefore$ La función reciproca es impar.
- f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Asíntota horizontal: $y = 0$
- Asíntota vertical: $x = 0$
- Centro de simetría: $(0, 0)$



1.15.2 Gráfica de la función homográfica

Para graficar la función homográfica mas fácilmente buscaremos transformar a esta en un corrimiento de la función reciproca:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$= \quad \langle \text{ factor común } a \text{ y } b \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$$

$$= \quad \langle \text{ sumo y resto } \frac{d}{c} \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a}{c} \times \frac{x+\dfrac{d}{c}-\dfrac{d}{c}+\dfrac{b}{a}}{x+\dfrac{d}{c}}$$

$$= \quad \langle \text{ reparto } \frac{d}{c} \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a}{c} \times \left[\frac{x+\dfrac{d}{c}}{x+\dfrac{d}{c}} + \frac{\dfrac{-d}{c}+\dfrac{b}{a}}{x+\dfrac{d}{c}}\right]$$

$$= \quad \langle \text{ denominador común } \frac{d}{c} \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a}{c} \times \left[1+\frac{\dfrac{bc-da}{ca}}{x+\dfrac{d}{c}}\right]$$

$$= \quad \langle \text{ resuelvo } \frac{d}{c} \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a}{c} \times \left[1+\frac{bc-da}{ca\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}\right]$$

$$= \quad \langle \text{ Distribuyo } \frac{a}{c} \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \times \frac{bc-da}{ca\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$$

$$= \quad \langle \text{ simplifico y resuelvo } \frac{a}{c} \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc-da}{c^2\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$$

$$= \quad \langle \text{ Separo expresiones } \frac{a}{c} \ \rangle$$

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc-da}{c^2} \times \frac{1}{x+\dfrac{d}{c}}$$

$$= \quad \langle \text{ Tomando a: } \frac{a}{c} = v; \ \frac{bc-da}{c^2} = u; \ \frac{-d}{c} = w \quad \text{ nos queda: } \rangle$$

$$\frac{u}{x-w} + v$$

Esto es la función reciproca corrida horizontalmente w unidades, verticalmente v unidades y expandida, contraída o reflejada, verticalmente según u.

1.15.3 Raíces de la homográfica

Como se muestra las raíces son las mismas que las raíces del polinomio numerador:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = 0 \Rightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

1.15.4 Intersección con el eje Y

$$f(0) = \frac{a \times 0 + b}{c \times 0 + d} = \frac{b}{d}$$

1.15.5 Asíntotas

- La asíntota vertical es el corrimiento vertical: $\frac{-d}{c} = w$
  - La asíntota horizontal es el corrimiento horizontal: $\frac{a}{c} = v$

1.15.6 Dominio e Imagen

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{w\}$
  - Imagen: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{v\}$

1.15.7 Otra forma: Ejemplo

Usaremos la función simple $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- **Forma 1**

Es el método desarrollado anteriormente:

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x-1} \\ = \quad & \langle \text{ sumo y resto } 1 \rangle \\ & \frac{x+1+1-1}{x-1} \\ = \quad & \langle \text{ reparto } \rangle \\ & \frac{x-1}{x-1} + \frac{1+1}{x-1} \\ = \quad & \langle \text{ resuelvo } \rangle \\ & \frac{2}{x-1} + 1 \end{aligned}$$

- **Forma 2** La segunda forma consta en realizar la división de polinomios y hacer uso de:

$$\frac{dividendo}{divisor} = cociente \times divisor + resto \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow dividendo = divisor \times \left(cociente + \frac{resto}{divisor}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{dividendo}{divisor} = cociente + \frac{resto}{divisor}$$

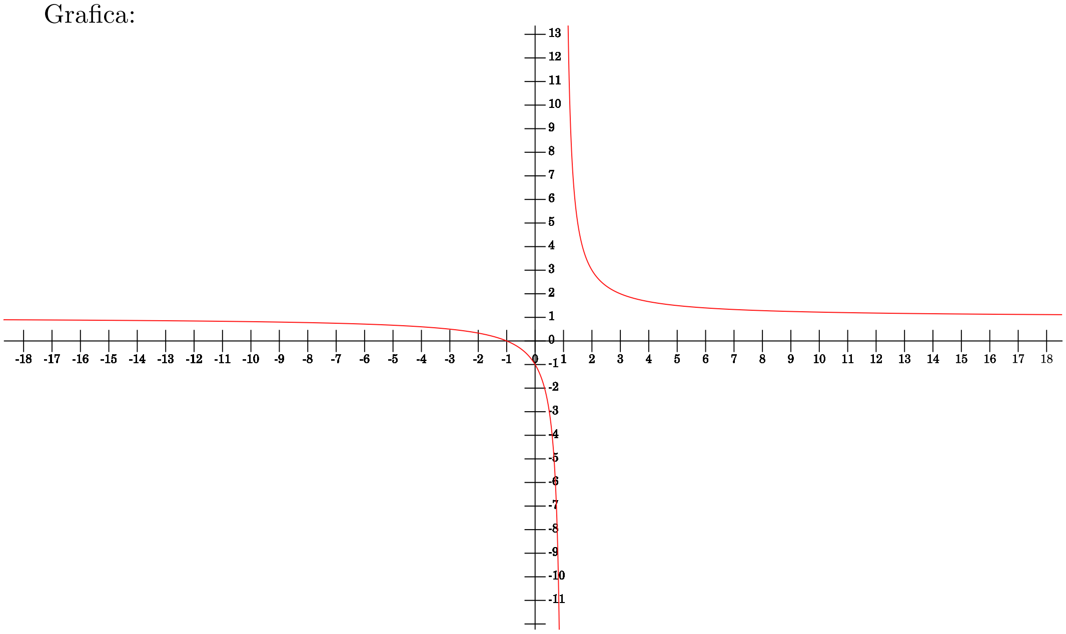
$x+1$	$x-1$
$-$	1
$x-1$	
$\setminus\ 2$	

Resultando:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

- La asíntota vertical es el corrimiento vertical: $\frac{-(-1)}{1} = 1$
- La asíntota horizontal es el corrimiento horizontal: $\frac{1}{1} = 1$
- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-(-1)}{1}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Imagen: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{1}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Raices: $\frac{x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- Intersección con el eje Y: $f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$

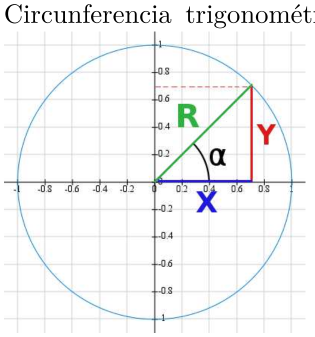
Grafica:



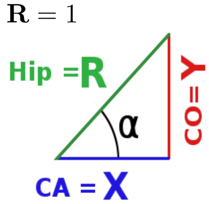
1.16 Funciones Trigonométricas

Trigonométrica

Circunferencia trigonométrica



$\mathbf{R} = 1$



$$seno(\alpha) = \frac{CO}{H} = \frac{Y}{R}$$

$$coseno(\alpha) = \frac{CA}{H} = \frac{X}{R}$$

$$tangente(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{O}{A} = \frac{Y}{X}$$

1.16.1 Función Seno

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f(x) = sen(x)$

Nuestro objetivo, ademas de estudiar esta función es esposar su gráfica. Para lo cual comenzaremos viendo algunas características destacadas.

- $-1 \leq sen(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

  $\therefore \text{Im} f = [-1, 1]$
  luego Grf esta entre las rectas $y = -1$ e $y = 1$.

- $sen(x) = -sen(x) \Rightarrow$ es impar $\Rightarrow$ Grf es simétrica respecto del origen de coordenadas.

- $sen(x + 2\pi) = sen(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

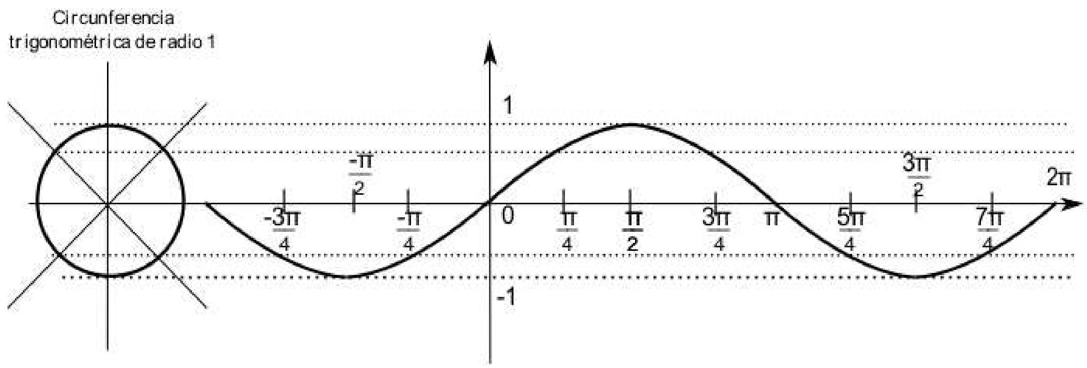
  $\therefore f$ es periódica de periodo 2π.

Conociendo la gráfica en $(0, \pi)$, se conoce en todos los $\mathbb{R}$

- $sen(\pi - x) = sen(x)$
- $sen(\pi + x) = -sen(x)$

Con estas ayudas y con la circunferencia trigonométrica terminaremos la Gr(sen).

Gráfica de la función seno



Raices

Notemos que: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

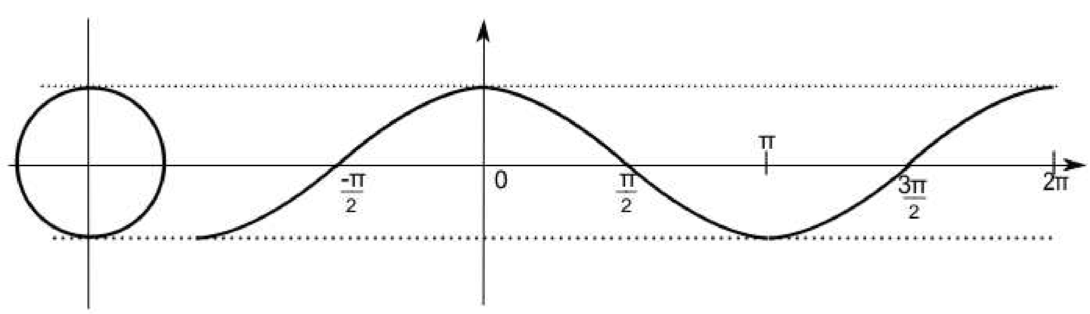
1.16.2 Función Coseno

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = cos(x)$

Podriamos trabajar como con la función seno y llegar a la gráfica a través de la circunferencia trigonométrica. Pero optaremos por hacerlo utilizando la siguientes propiedades:

- $cos(x) = cos(-x)$ la función es par.
- $cos(x) = cos(-x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Gráfica de la función coseno



Raices

Notemos que: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

1.16.3 Función Tangente

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}/f(x) = tg(x)$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{2k+1}{2} \times \pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

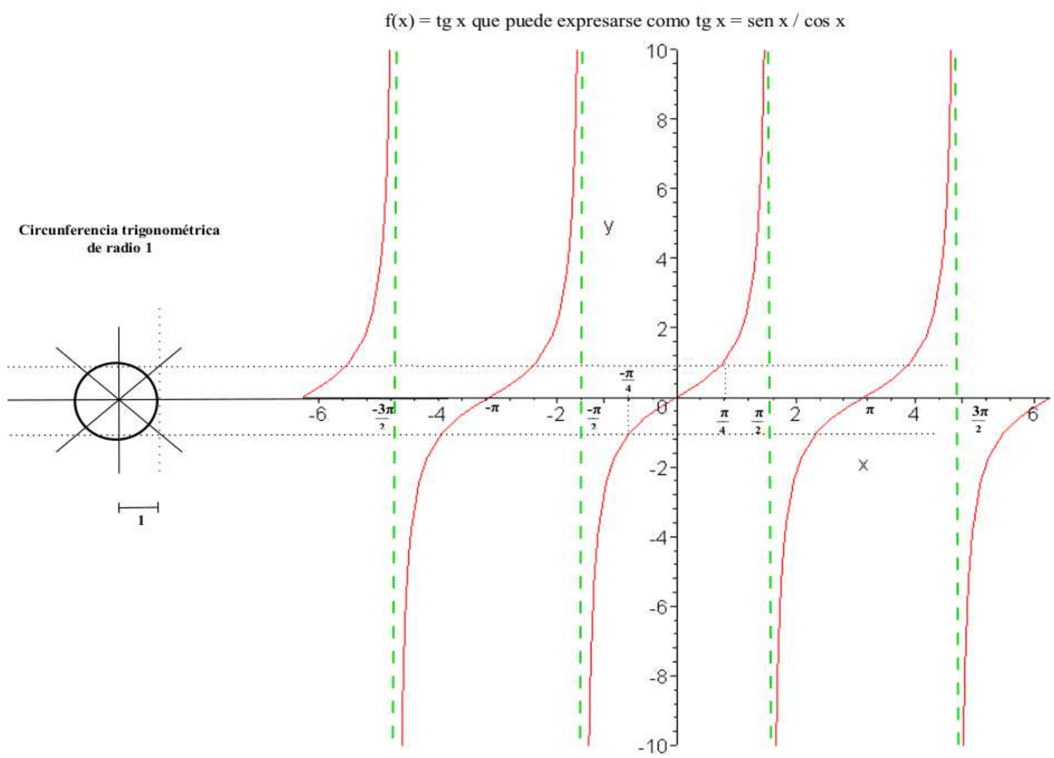
D es simétrico.

Propiedades: • $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$

- $tg(-x) = -tg(x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ es impar.
- $tg(x+\pi) = \dfrac{sen(x+\pi}{cos(x+\pi)} = \dfrac{-sen(x)}{-cos(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}} = tg(x)$

$\therefore$ *tangente* es una función periódica de periodo π.

Grafica



1.16.4 Función Senoidal

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f(x) = c \times sen(kx + \alpha)$ Donde $c \neq 0$, $k \neq 0$, α son constantes $\in \mathbb{R}$

Propiedades • Dom$f = \mathbb{R}$

- Im$f = [c, -c]$
- f es periódica de periodo $\dfrac{2\pi}{k}$, ya que:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = c \times sen\left(k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) + \alpha\right) \Rightarrow c \times sen(kx + 2\pi + \alpha) \Rightarrow c \times sen(kx + \alpha + 2\pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \times sen(kx + \alpha) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Gráfica

Se suele transformar la ecuación de la función para poder transformarla en corrimiento de alguna función ya conocida. En este caso vamos a proceder de la siguiente forma para lograr una función seno corrida.

Primero transformamos la función ligeramente:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & = & c \times sen(kx + \alpha) \\ = \langle factor & comun & \rangle \\ f(x) & = & c \times sen\left(k\left(x + \dfrac{\alpha}{k}\right)\right) \end{array}$$

Y luego graficamos por corrimientos:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & sen(x) \\ f_2(x) & = & c \times sen(x) \\ f_3(x) & = & c \times sen(kx) \\ f(x) & = & c \times sen\left(k\left(x + \dfrac{\alpha}{k}\right)\right) \end{array}$$

Ejemplo $f(x) = 3 \times sen(5x + 1)$

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im} f = [3, -3]$
- f es periódica de periodo $\dfrac{2\pi}{5}$

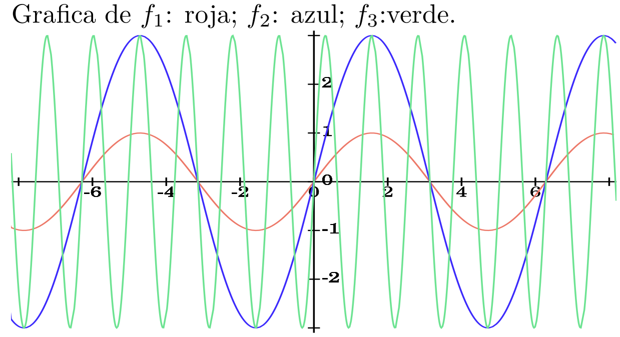
Primero transformamos la función ligeramente:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 3 \times sen(5x + 1) \\ f(x) & = & 3 \times sen\left(5\left(x + \dfrac{1}{5}\right)\right) \end{array}$$

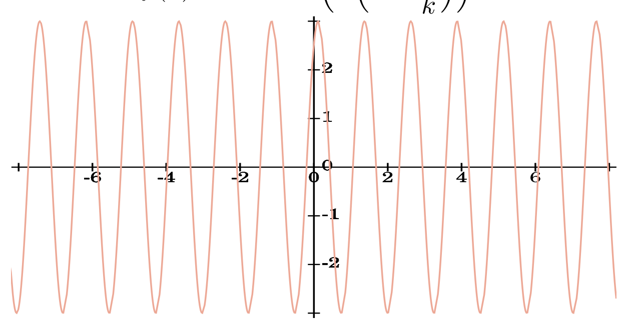
Y luego graficamos por corrimientos:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & sen(x) \\ f_2(x) & = & 3 \times sen(x) \\ f_3(x) & = & 3 \times sen(5x) \\ f(x) & = & 3 \times sen\left(k\left(x + \dfrac{\alpha}{k}\right)\right) \end{array}$$

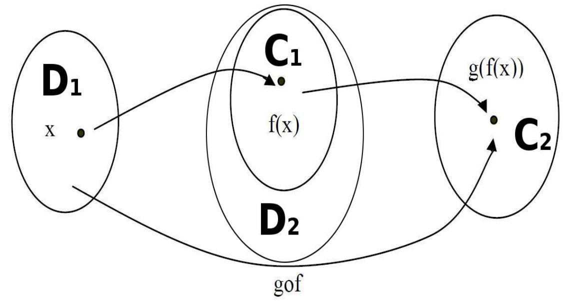
Grafica de f_1: roja; f_2: azul; f_3:verde.



Grafica de $f(x) = 3 \times sen\left(k\left(x + \dfrac{\alpha}{k}\right)\right)$



1.17 Composición de funciones



La composicion de funciones es una operación mas entre dos funciones.

Sean dos funciones reales f y g.

$$f : D_1 \longrightarrow C_1 \qquad g : D_2 \longrightarrow C_2$$

Llamaremos función compuesta a la definida por:

$$g \circ f : D \longrightarrow C/$$
$$x \longrightarrow (g \circ f)_{(x)} = g(f(x))$$

$$\text{Donde: } \mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom} f \ / \ f(x) \in \mathrm{Dom} g\}$$

Ejemplo $g \circ f$

$$f(x) = x^2 - x - 1 \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

Dom $\qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Por lo tanto el Dom$(f \circ g)$ sera:

$$\{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{o\}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}/x^2 - x - 1 \in \mathbb{R} \setminus \{o\}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{x \in \mathbb{R}/x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right\}$$

$$x^2 - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Buscamos la ley:

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x) = g(x^2 - x - 1) = \frac{1}{x^2 - x - 1}$$

En conclusión nuestra función es:

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (g \circ f)_{(x)} = \frac{1}{x^2 - x - 1}$$

1.18 Función Inyectiva

Sea $f : D \longrightarrow C$ una funcion real.

Decimos que f es una "función inyectiva" sii $\forall x_1, x_2 \in D$, con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, o su equivalente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo **1)** $f(x) = x^2 - 1$ no es inyectiva pues:

$$-1, 1 \in \mathrm{Dom} f \ -1 \neq 1 \wedge f(1) = f(-1) = 0$$

2) $g(x) = 2x - 3$ es inyectiva pues:

Sean x_1, $x_2 \in \text{Dom}g$.

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

1.19 Función Sobreyectiva

Sea $f : D \longrightarrow C$ un función real.

Decimos que f es una "función sobreyectiva o suryectiva" sii:

$$\text{Cod}f = \text{Im}f$$

Ejemplos

1)

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \longrightarrow f(x) = x^2 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} Cod(f) & = & \mathbb{R} \\ Im(f) & = & \mathbb{R}_0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow Cod(f) \neq Im(f)$$

$\therefore$ no es sobreyectiva.

2)

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ & \\ x \longrightarrow f(x) = x^2 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} Cod(f) & = & \mathbb{R} \\ Im(f) & = & \mathbb{R}_0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_0^+$$

$\therefore$ es sobreyectiva.

1.20 Función Biyectiva

Sea f una función real. Diremos que f es una "función biyectiva" sii f es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ / $f(x) = 5x$

- es inyectiva, en efecto:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 5x_1 \neq 5x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- es sobreyectiva pues:

¿$\exists x$, Dom$f = \mathbb{R}$ / $f(x) = y$?

$$\begin{array}{c} f(x) = y \\ x = \dfrac{y}{5} \\ 5x = y \end{array}$$

$\therefore$ dado $y \in \text{Cod}f$

$$\exists \frac{y}{5} \in \mathbb{R} \ / \ f\left(\frac{y}{5}\right) = y$$

Osea: $y \in \mathbb{R}$ y $\dfrac{y}{5} \in \mathbb{R}$

Luego es biyectiva.

Nota : para determinar si f es sobre hay que despejar x y ver que y pueda tomar cualquier valor de Cod$f$.

En el ejemplo anterior esto se lleva a cabo probando $y \in \mathbb{R}$ y $\dfrac{y}{5} \in \mathbb{R}$.

1.21 Funcion Inversa

Sea $f : D \longrightarrow C$ una función real biyectiva.

Llamaremos "función inversa" de f y la notaremos f^{-1} a la función definida por:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: C \longrightarrow D \\ y &\longrightarrow f^{-1}(y) = x \ / \ y = f(x) \end{aligned}$$

Ejemplo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ x \longrightarrow f(x) = 5x$

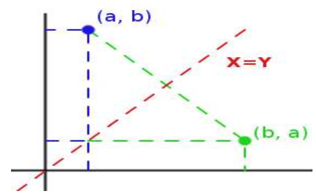
- Sabemos que f es biyectiva $\Rightarrow \exists \ f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ y \longrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y}{5}$

1.21.1 Gráfica de la función inversa

La grafica de una función y su inversa son simétricas respecto de la recta $y = x$, esto es:

$$(a, b) \in \mathrm{Gr}(f) \Leftrightarrow f(a) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow (b, a) \in \mathrm{Gr}(f^{-1})$$



1.21.2 Propiedad

$$f \circ f^{-1} = id \qquad\qquad f^{-1} \circ f = id$$

Nota: Existen casos en que esta propiedad no se cumplen, como $g(x) = x^2$.

Ya que no se cumpliría $f^{-1} \circ f = id$ es decir $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$,
solo se cumpliría si restringimos el dominio para los $\mathbb{R}_0^+$.

1.22 Función Exponencial

Sea $f(x) = a^x \qquad a > 0 \wedge a \neq 1$

Llamemos a f función exponencial.

- Analisemos:

1) Si $x = n \quad n \in \mathbb{N}$ entonces $a^x = a^n = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$

2) Si $x = 0 \quad a^0 = 1$

3) Si $x \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \dfrac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

4) Si $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = n \quad n \in \mathbb{N} \therefore a^x = a^n$

5) Si $x \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow x = -n \quad n \in \mathbb{N} \therefore a^x = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

6) Si $x \in \mathbb{R}$ caso general.

No estamos en condiciones de definir con precision potencias de exponente irracional, pero no tenemos problemas en generalizar nuestros resultados.

Propiedades

- $\text{Dom}f = \mathbb{R}$
- $\text{Im}f = \mathbb{R}^0$

- Propiedades:

Dados $n, m, x, y \in \mathbb{R}$

1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) $(ab)^x = a^x \times b^x$

4) $(a^x)^y = a^{xy}$

5) Si $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^x < b^x & si \quad x > 0 \\ a^x > b^x & si \quad x < 0 \end{cases}$

1.22.1 Función exponencial en general

Si $f(x) = a^x \qquad f(x) > 0 \qquad a > 0 \wedge a \neq 1$

- f es inyectiva.

- Si $a > 1 \longrightarrow f$ es estrictamente creciente.
  Si $a < 1 \longrightarrow f$ es estrictamente decreciente.

- **y=0** es la asíntota horizontal.

- La Grf corta al eje Y en el punto $(0, 1)$.

- El punto $(1, a) \in$ Grf.

Ejemplo e^x La funcion definida por $f(x) = e^x$

Donde e es un numero irracional, cuyo nombre se debe a Leonard Euler (1727).

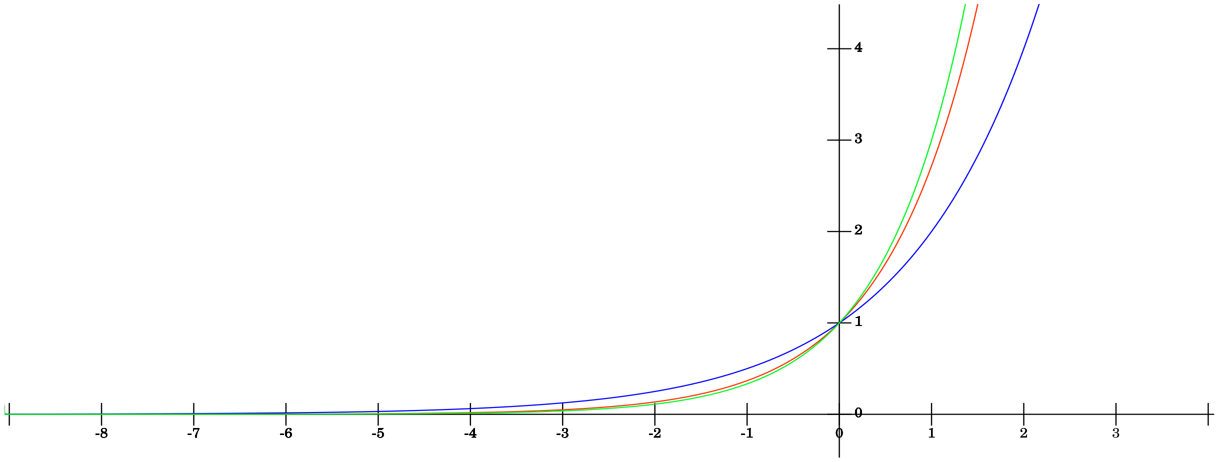
$$e \simeq 2,71828\ldots$$

- $e > 1$ la función es estrictamente creciente.

Mas precisamente como : $2 < e < 3 \Rightarrow \begin{cases} 2^x < e^x < 3^x & si \quad x > 0 \\ 2^x > e^x > 3^x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Gráfica de e^x

e^x en rojo, 2^x en azul y 3^x en verde.



1.23 Función Logarítmica

Vimos que toda función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$$

es inyectiva y por lo tanto admite función inversa, denominada "función logarítmica de base a".

La cual notamos de la siguiente forma: $\log_a y$
Y esta definida como:

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \; /$$
$$y \longrightarrow \log_a y = x \;\; \text{tal que } a^x = y$$

Nota: $\log_a y$ es el exponente al que hay que elevar "a" para obtener "y".

Ejemplos

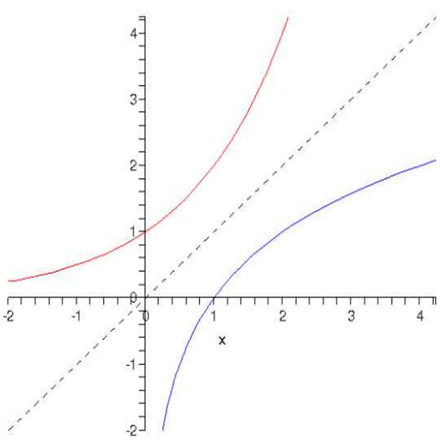
$\log_3 81 = \mathbf{4} \Leftrightarrow 3^{\mathbf{4}} = 81$

$\log_1 00,001 = (\mathbf{-3}) \Leftrightarrow 10^{(\mathbf{-3})} = 0,001$

1.23.1 Gráfica de $\log_a y$

Sea $a > 1$

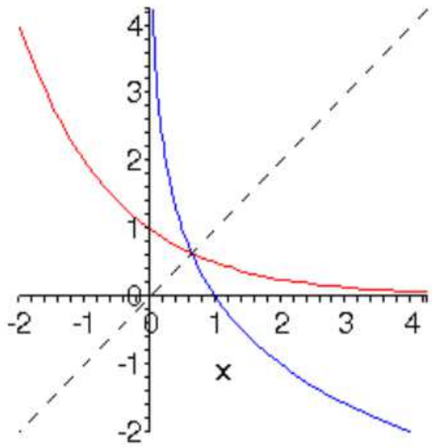
a^x en rojo, $\log_a x$ en azul.



- $\text{Dom}(\log_a) = \mathbb{R}^+$
- $\text{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$
- $\log_a$ es una función estrictamente creciente.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

Sea $a < 1$

a^x en rojo, $\log_a x$ en azul.



- $\mathrm{Dom}(\log_a) = \mathbb{R}^+$
- $\mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$
- $\log_a$ es estrictamente decreciente.
- $x = 0$ es asintota vertical.

Notaciones

- Si $a = e$ entonces $\log_e x = \ln x$ (logaritmo neperiano o natural)
- Si $a = 10$ entonces $\log_{10} x = \log x$

1.23.2 Propiedades de $\log_a$

$\forall a > 1 \wedge a \neq 0$

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Demostración:

$$\log_a(xy) = c \Leftrightarrow a^c = xy$$

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \times a^{\log_a y} \underset{a^{\log_a w} = w}{=} xy$$
$$\therefore \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

2) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^y = y \log_a x$

Demostración:

$$x^y = a^{y \log_a x}$$
Es decir:
$$\log_a x^y = y \log_a x$$

1.23.3 Prop. Cambio de base $\log_a$

$\forall a > 1 \wedge a \neq 0$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad , \qquad b > 0$$

Demostración:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log_b a^y \underset{a^y=x}{=} \log_b x \Leftrightarrow$$

$$\underset{(3)}{\Leftrightarrow} y \log_b a = \log_b x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\therefore \text{ como } y = \log_a x \text{ concluimos: } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

1.24 Funciones Hiperbólicas

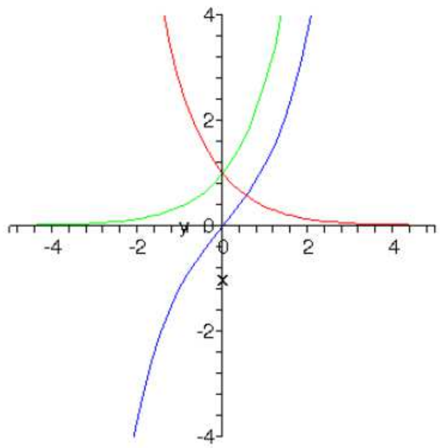
1.24.1 seno hiperbólico

La función seno hiperbólico esta definida como:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- $\text{Dom}(senh) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(senh) = \mathbb{R}$
- Es estrictamente creciente.
- $senh(-x) = \dfrac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2} = -\left[\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = -senh(x) \qquad \therefore senh(x)$ es impar.

Gráfica



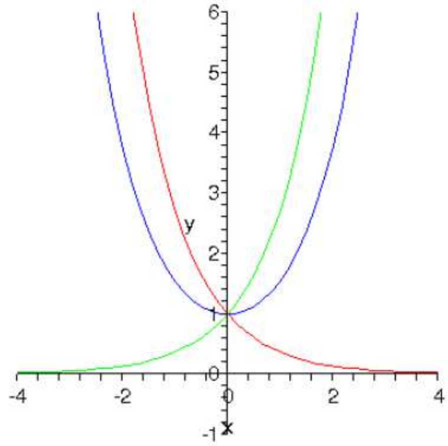
1.24.2 coseno hiperbólico

La funcion coseno hiperbólico esta definida como:

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $\text{Dom}(cosh) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(cosh) = [1, +\infty)$
- Es estrictamente:
  decreciente en $\mathbb{R}_0^-$
  y creciente en $\mathbb{R}_0^+$.
- $cosh(-x) = \dfrac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = cosh(x) \qquad \therefore cosh(x)$ es par.

Gráfica



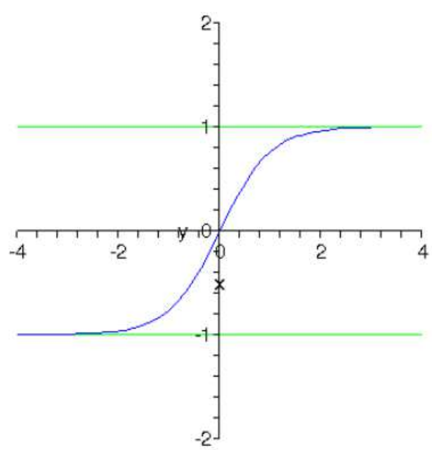
1.24.3 tangente hiperbólica

La funcion tangente hiperbólica esta definida como:

$$cosh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- $\text{Dom}(tgh) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(tgh) = (-1, 1)$
- Es estrictamente creciente.
- $tgh(-x) = \frac{senh(-x)}{cosh8 - x)} = \frac{-senh[x)}{cosh(x)} = -tgh(x)$ $\quad \therefore tgh(x)$ es impar.
- Posee dos asíntotas horizontales: $y = 1$ e $y = -1$

Gráfica



1.24.4 Más funciónes hiperbólicas

A partir de las funciónes anteriores se definen:

$$cosech(x) = \frac{1}{senh(x)}$$

$$sech(x) = \frac{1}{cosh(x)}$$

$$cotgh(x) = \frac{1}{tgh(x)}$$

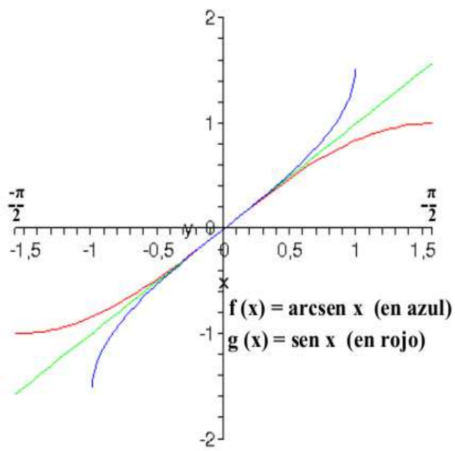
1.25 Funciones Trigonométricas inversas

Sabemos que las funciónes trigonométricas estudiadas anteriormente, sen, cos y tg no son inyectivas debido a su periodicidad; pero podemos restringir su dominio a un intervalo donde si lo sean, y así hallar las funciones inversas de estas.

1.25.1 arcseno

$$f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] \;/ \quad x \longrightarrow f(x) = sen(x)$$

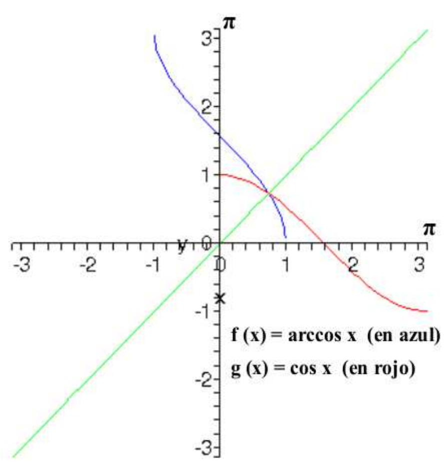
$$f : [-1,1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \;/ \quad y \longrightarrow f^{-1}(y) = x \;/\; sen(x) = y$$



1.25.2 arccoseno

$$f : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \;/ \quad x \longrightarrow f(x) = cos(x)$$

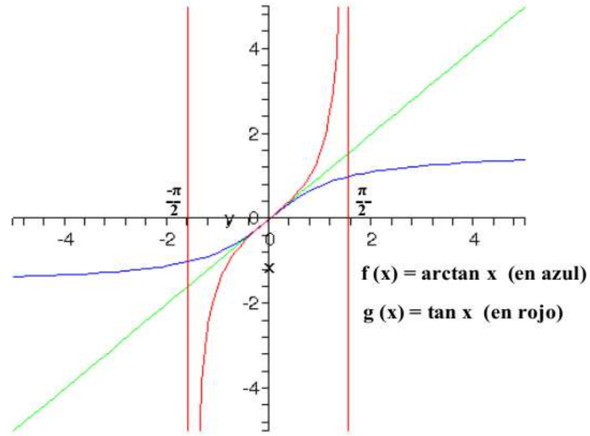
$$f : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \;/ \quad y \longrightarrow f^{-1}(y) = x \;/\; cos(x) = y$$



1.25.3 arctangente

$$f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \\ x \longrightarrow f(x) = tg(x)$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ / \\ y \longrightarrow f^{-1}(y) = x \ / \ tg(x) = y$$



Chapter 2

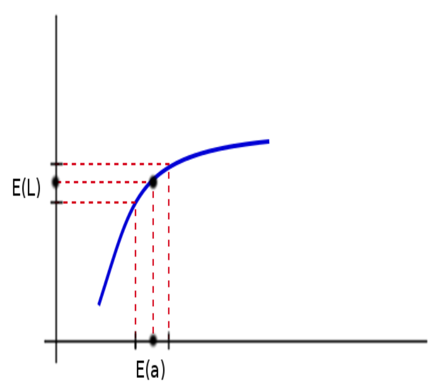
Limite y Continuidad

2.1 Limite

El limite es la mayor erramienta para poder analisar el comportamiento de las funciones.
En si se trata de observar a que valor se acerca la funcion cuando la evaluamos en valores proximos a un punto.

2.1.0.1 Entorno

Un entorno comprende los valores cercanos al un punto dado (centro). El entorno de radio 1 de 3 comprende el intervalo $[2, 4]$ o los valores de x que cumplen con $1 \geq x \geq 3$ lo que notaremos $E(a)$, siendo a el centro.
Tememos otros tipos de entornos ya sea a derecha o izquierda los cuales podemos describirlos con $r \geq x \geq a$ o $a \leq xleqr$, respectivamente (siendo r el radio y a el centro). Y existe pa posobilidad de excluir el centro del entorno osea $0 < |a - x| \leq$, lo cual notaremos con $\overset{\circ}{E}(a)$ y llamamos entorno reducido.



Continuando...

Decimos que el limite de la funcion f cuando x tiende a a (x se acerca a a) es igual a L y se nota:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

⊙ La fucnion f deve estar al menos definida en $\overset{\circ}{E}(L)$
⊙ $E(L)$ depende de $E(a)$

Para poder trabajar se utiliza la siguiente definicion formal:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Leftarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esto es: El limite de $f(x)$ con x tendiendo a a es L si y solo si para todo ε positivo, existe un δ en fucnion de ε tal que el entorno reducido de centro a y radio δ implicque que el valor absoluto de la resta de $f(x)$ menos L sea menor a ε.

En si plantea que si evaluamos $f(x)$ en puntos cercanos a a, la funcion devolvera valores cercanos a L que estaran edentro del entorno $E(L)$.

2.1.0.2 Ejemplo de limite sensillo

$$\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 7$$

Demostraremos eso:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0/0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x + 1) - 7| < \varepsilon$$

Dado un $\varepsilon > 0$ (fijamos un ε para poder trabajar).

$$|(2x + 1) - 7| < \varepsilon \Rightarrow |2x + 1 - 7| < \varepsilon \Rightarrow \ |2 \times (x - 3)| < \varepsilon \Rightarrow 2 \times \underbrace{|x - 3|}_{<\delta} < \varepsilon$$

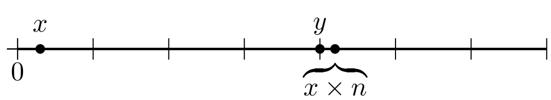
$$|x - 3| < \delta \Rightarrow 2\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tal que:

$$0 < |x - 3| < \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2(x - 3) < \varepsilon \ \checkmark \text{demostrado.}$$

2.1.0.3 Pincipio de arquimedes

Cada segmento (y) tan largo como se quiera puede ser cubiertos con un numero finito (n) de segmentos de longitud positiva tan pequenios como se quiera (x).



$$0 < x < y < x \times n$$

Propiedad Si tres nuemros reales x,y,a satisfacen.

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \forall n \in \mathbb{N}; x, y, a \in \mathbb{R}$$

$$\therefore x = a$$

Demostracion Hip: $a \geq 0$, $x > 0$, $y > 0$, $n > 0$
Sup: $a < x$, $x > 0$, $x - a > 0$
Usando el principio de arquimedes, $x = x - a > 0$

$$n \times (x - a) > y \Rightarrow x - a > \tfrac{y}{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x > a + \tfrac{y}{n} \leftarrow ABSURDO!!$$
$$(\text{Ya que } a \leq a + \tfrac{y}{n})$$

Llegando a un absurdo mostramos que la supocicion es falsa($a < x$), por tanto deve ser $a = x$.

2.1.1 Unicidad de limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L1 \wedge \lim_{x \to a} f(x) = L2 \Rightarrow L1 = L2$$

Demostracion Hip:

- $\lim_{x\to a} f(x) = L1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1(\varepsilon)/0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L1| < \varepsilon$
- $\lim_{x\to a} f(x) = L2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2(\varepsilon)/0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L2| < \varepsilon$

Si tomamos un $\delta = \min \delta_1, \delta_2$ entonces nos queda:
Dado un $\varepsilon > 0$, δ

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L1| < \varepsilon \wedge |f(x) - L2| < \varepsilon$$

$$\boxed{a > 0,\, b > 0,\, c > 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} a & < & c \\ b & < & c \end{array}\right\} \Rightarrow a + b < c + c}$$

$$\Rightarrow |f(x) - L1| + |f(x) - L2| < \varepsilon + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L1| - |f(x) - L2| < |f(x) - L1| + |f(x) - L2| < 2\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - L1 - (f(x) - L2)| < 2\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L1 - (f(x) - L2)| < 2\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - L1 - f(x) + L2| < 2\varepsilon \Rightarrow |L2 - L1| < 2\varepsilon$$

En base a la propiedad del **Pincipio de Arquimedes**.

$$\boxed{a \leq x \leq a + \tfrac{y}{n} \Rightarrow a = x, \text{ donde } a,\, x,\, y \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}}$$

Tomando $a = 0$, $x = |L2 - L1|$, $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ resulta:

$$0 \leq |L2 - L1| \leq 0 + 2 \times \frac{1}{2n} \Rightarrow 0 \leq |l2 - l1| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 0 = |L2 - L1| \Rightarrow 0 = L2 - L1 \Rightarrow L2 = L1$$

Son el mismo limite!

2.1.2 Caracter local de limite

Sean f y g dos funciones definidas en un $\overset{\circ}{E}(a)$ de manera que $\exists\delta > 0/$
$f(x) = g(x), \forall x/0 < |x-a| < \delta$ entonces los limites de $f(x)$ y $g(x)$ con $x \to a$ son el mismo.

Demostracion

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1(\varepsilon) > 0/0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L|\varepsilon$$

Como por hipotesis $f(x) = g(x)\ \forall x \in \overset{\circ}{E}(a, \delta_1)$. Tomo el minimo: $\delta_2 = \min \delta_1, \delta$ (δ hipotesis).
Seguimos, dado $\varepsilon > 0, \exists\delta_2/$

$$0 < |x-a|\delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \overset{\substack{en 0<|x-a|<\delta_2 \\ f(x)=g(x)}}{\Rightarrow} |g(x) - L < \varepsilon$$

Entonces dado $\varepsilon, \exists\delta_2$

$$/0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$$

2.1.3 Formulas equivalentes

1)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) - L = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$$

Demostracion

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0/0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = |(f(x) - L) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) - L = 0 \Leftrightarrow$$

$\boxed{||x|| = |x| \text{(propiedade de valor absoluto)}}$

$$\Leftrightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = ||(f(x) - L) - 0|| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) - L = 0$$

2) "Cambio de variable"

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) - L = 0$$

Demostracion

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0/0 < |x-a| < \delta \Leftarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

Defino $h = x - a$, $h = h - 0$, despejo $x = a + h$ y sustituyo en la formula original quedando:

$$\Leftrightarrow 0 < |h - 0| < \delta \Leftarrow |f(a+h) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = L$$

2.1.4 Teorema: "funcion acotada"

Sea una funcion $f(x)$ con limite L y vale $m < L < M$ entonces existe δ tal que $x \in \overset{\circ}{E}(a)$, $f(x)$ estara acotada inferiormente por m y superiormente por M.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \wedge m < L < M \Rightarrow [\exists\delta > 0/0 < |x-a| < \delta \Rightarrow m < f(x) < M]$$

Demostracion

Supuesto: $\lim_{x\to a} f(x) = L \wedge m < L < M$