Algebra y Geometria Analitica I
Teoria

Facundo Beltramo
contacto: fexbef[arroba]gmail.com

Fecha: xx de xx del 20xx

Índice general

Capítulo 1

Numeros Complejos

1.1. Definicion

Un numero complejo es un par ordenado (a, b) de numeros reales.
a . se denomina parte real de z ($\mathrm{Re}(z)$).
b . se denomina parte imaginaria de z ($\mathrm{Im}(z)$).
Dados $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (a', b')$ decimos que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

1.1.1. Suma y producto de un numero complejo

Sean $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$, numeros complejos, entonces definimos:

- la Suma: $z + w = (a + c, b + d)$
- el Producto: $z \times w = (ac - bd, ad + bc)$

1.2. Propiedades

Sean $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$, $u = (u_1, u_2)$.

1.2.1. asociatividad

$$(z + w) + u = z(w + u)$$

$$(z \times w) \times u = z \times (w \times u)$$

Demostracion:

$$(w + z) + u \Leftrightarrow (z_1 + w_1, z_2 + w_2) + (u_1, u_2) \Leftrightarrow ((z_1 + w_1) + u_1, (z_2 + w_2) + u_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + (w_1 + u_1), z_2 + (w_2 + u_2)) \Leftrightarrow (z_1, z_2) + (w_1 + u_1, w_2 + u_2) \Leftrightarrow z + (w + u)$$

$$(zw)u \Leftrightarrow ((z_1w_1 - z_2w_2, z_1w_2 + z_2w_1)) \times (u_1, u_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((z_1w_1 - z_2w_2)u_1 - (z_1w_2 + z_2w_1)u_2, (z_1w_1 - z_2w_2)u_2 + (z_1w_2 + z_2w_1)u_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1w_1u_1 - z_2w_2u_1 - z_1w_2u_2 - z_2w_1u_2, z_1w_1u_2 - z_2w_2u_2 + u_1z_1w_2 + z_2w_1u_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1(w_1u_1 - w_2u_2) - z_2(w_1u_2 + w_2u_1), z_1(w_1u_2 + w_2u_1) + z_2(w_1u_1 - u_2w_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1, z_2) \times (w_1u_1 - u_2w_2, w_1u_2 + w_2u_1) \Leftrightarrow z(wu)$$

1.2.2. conmutatividad

$$z + w = w + z$$
$$z \times w = w \times z$$

Demostracion:

$$z + w \Leftrightarrow (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \Leftrightarrow (w_1 + z_1, w_2 + z_2) \Leftrightarrow w + z$$

$$wz \Leftrightarrow (w_1 z_1 - w_2 z_2, w_2 z_1 + w_1 z_2) \Leftrightarrow (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_2 w_1 + z_2 w_2) \Leftrightarrow zw$$

1.2.3. distributiva

$$z \times (u + w) = zu + zw$$
$$(u + w) \times z = uz + wz$$

Demostracion:
sale aplicando la definicion de la suma y el producto de complejos y usando distributiva de numeros reales.

1.2.4. Elemento neutro

Existe $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}/z + 0 = z \forall z \in \mathbb{C}$
Existe $1 = (0, 1) \in \mathbb{C}/1 \times z = z \forall z \in \mathbb{C}$

1.2.5. Opuesto

$\forall z \in \mathbb{C}, \exists - z \in \mathbb{C}/z + (-z) = (0, 0)$
Def.: $z - w = w + (-w)$

1.2.6. Resiproco

$\forall z \neq 0, z \in \mathbb{C}, \exists z^{-1} \in \mathbb{C}/z \times z^{-1} = (1, 0) = 1$
Def.: si $w \neq 0$, $\frac{z}{w} = z \times \frac{1}{w} = x \times w^{-1}$

1.3. Identificando los reales en los complejos

Sea $C_0 = (a, 0) \in \mathbb{C}/a \in \mathbb{R} \in \mathbb{C}$

- $z = (a, 0)$, $w = (b, 0)$
  $z + w = (a + b, 0) \in C_0$ $\quad -z = (-a, 0) \in C_0$
$zw = (ab, 0) \in C_0$ $\quad z^{-1} = (\frac{1}{a}, 0) \in C_0$

Vemos que la suma, el producto y la divicion en C_0 se comportan igual que en los Reales.
Identificamos $\mathbb{R}$ en C_0

$$a \in \mathbb{R} \longleftrightarrow (a, 0) \in C_0$$

Notacion: Dado $a \in \mathbb{R}$, notamos $a \in \mathbb{C}$ al complejo $(a, 0)$

1.4. Unidad imaginaria

Definimos: $i := (0, 1)$
$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1) = (-1, 0) = -1$

1.5. Forma Binomica

Sea $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$, $a + bi$ se denomina forma binomica.

1.6. Conjugado de un numero complejo

Sea $z = (a, b)$ dicece el conjugado de z a $\overline{z} = (a, -b)$ o de otra forma $\overline{z} = a - bi$.

1.6.1. Propiedades

Sean $z = (a, b)$ y $w = (d, c)$ dos numeros complejos.

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

Demostracion:

$$z + w = (a + d, b + c) \Leftarrow \overline{z + w} = (a + d, -(b + c)) = (a + b, -b - c) = (a, -b) + (c, -d) = \overleftarrow{z} + \overline{w}$$

- $\overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}$

Demostracion:

- $z \times \overline{z} =$Im$(z)^2$+Re$(z)^2$
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

1.7. Raiz cuadrada de un numero natural negativo

Sea $a \in \mathbb{R}$, $x^2 + a^2 = 0$ tiene como solucion $x_1 = ai$ y $x_2 = -ai$

$$(ai)^2 + a^2 = -a^2 + a^2 = 0$$

Definicion: si $w \in \mathbb{C}$ decimos que $z \in \mathbb{C}$ es una raiz cuadrada de w si $z^2 = w$
Nota: $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$
- Si $w = a \in \mathbb{R} \quad a = -|a|$

Quiero $z/z^2 = -|a|$

$\therefore z = \pm\sqrt{-|a|} = \mp\sqrt{|a|} \times \sqrt{-1} = \mp\sqrt{-|a|} \times i \qquad z^2 = \pm\left(\sqrt{|a|}\right)^2 \times i^2 = -|a| = a$

Ejemplo:
$\sqrt{-4} = \sqrt{|-4|}i = \pm 2i$
$\sqrt{-9} = \sqrt{|-9|}i = \pm 3i$
$\sqrt{-2} = \sqrt{|-2|}i = \sqrt{2}i$

Si $ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Las soluciones son $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$ hay una raiz real doble.
- Si $\Delta > 0$ hay dos raices reales distintas.
- Si $\Delta < 0$ hay dos raices complejas conjugadas.

1.8. Potencias de los complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$z^n = \begin{cases} z^1 = z \\ z^n = z^{n-1} \times z \quad Siz \neq 0 z^0 = 1 \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Y $k \in \mathbb{Z}$

$$z^k = \begin{cases} z & Sik = 1 \\ z^k & Sik \geq 0 \\ (z^{(-1)})^k & Sik < 0 \end{cases}$$

1.8.1. Propiedades

Sean z, w numeros complejos y n, m enteros:

$(zw)^n = z^n \times w^n$

$w \neq 0,\ \left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n}$

$(z^n)^m = z^{nm}$

$z^n \times z^m = z^{n+m}$

1.8.2. Potencias de i

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i \times i^2 = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

$i^6 = i^4 \times i^2 = (-1) \times 1 = -1$

$$i^{(-1)} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

Ejemplos:

$$i^{(-5)} = (i^{(-1)})^5 = (-i)^5 = (-1)^5 \times i^5 = (-1) \times i = -i$$

$$i^8 = i^4 \times i^4 = i \times i = -1$$

$$i^{(-10)} = i^4 \times i^4 \times i^2 \times i^{(-1)} = 1 \times 1 \times (-1) \times (-1) = 1$$

En conclucion sea $k = 4c + r \in \mathbb{Z}$, donde r es el resto ed dividir k por 4 y c es el cosiente:

$$i^k = i^{4c+r} = i^{4c} \times i^r = (i^4)^c \times i^r = 1^c \times i^r = 1 \times i^r = i^r$$

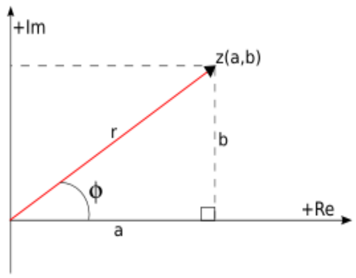
$$\therefore i^k = i^r, r = kmod4$$

1.9. Forma Polar y Trigonometrica

Modulo de un complejo Definimos al modulo de un complejo $z = a+bi$, al numero: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Forma Polar

Sea $z = (a, b) = a + bi$, notaremos al mismo numero complejos como: $z = r_\theta$
Llamamos a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo de z y a θ argumento de z.



Si $\theta = Arg(z)$:

$tg(\theta) = \frac{a}{b}$

Por tanto: Si $a = 0 \quad (z = bi)$

- Si $b = 0$, $z = 0$ No tiene argumento. El complejo se ubica en el origen de cordenadas.
- Si $b > 0$, $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ El complejo se ubica en la parte positiva del eje de las ordenadas.
- Si $b < 0$, $Arg(z) = \frac{3}{2}\pi$ El complejo se ubica en la parte negativa del eje de las ordenadas.

Forma Trigonometrica

1.10. Forma Trigonometrica

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $\theta = Arg(z)$ y $r = |z|$.
Sabiendo:

- $sen(\theta) = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \times sen(\theta)$
- $cos(\theta) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \times cos(\theta)$

Definimos la forma Trigonometrica como la siguiente:

$$z = r \times (sen(\theta) + i \times cos(\theta))$$

Ejemplo: —-

1.10.1. Propiedades de modulo y argumento

Sean $z, w \in \mathbb{C}$:

- $|zw| = |z| \times |w|$
- $Arg(z) + Arg(w)$ es un $Arg(zw)$

Demostracion:
Sea $|z| = P$, $Arg(z) = \theta \quad |w| = J$, $Arg(w) = \alpha$:

$$zw = [P \times (sen(\theta) + i \times cons(\theta))] \times [J(sen(\alpha) + i \times cos(\alpha))] =$$
$$= P \times J[cos(\theta) \times cos(\alpha) + i \times cos(\theta) \times sen(\alpha) + i \times sen(\theta) \times cos(\alpha) - sen(\theta) \times sen(\alpha)] =$$
$$= P \times L[\underbrace{(cos(\theta) \times cos(\alpha) - sen(\theta) \times sen(\alpha))}_{cos(\theta+\alpha)} + i \times \underbrace{(sen(\theta) \times cos(\alpha) + cos(\theta) \times sen(\alpha))}_{sen(\theta+\alpha)} =$$
$$= P \times L[cos(\theta + \alpha) + i \times sen(\theta + \alpha)]$$

$\therefore |zw| = P \times L = |z| \times |w|$

Un argumento de zw es $Arg(z) + Arg(w)$

Corolario: Propiedades

$zw = (PL)_{\theta+\alpha}$

$\frac{z}{w} = \left(\frac{P}{L}\right)_{\theta+\alpha} \quad \forall w \neq 0$

$z^n = (P^n)_{n\theta}$

Demostracio:
$\frac{z}{w} = zw^{(-1)}$
Sabemos: $w \times w^{(-1)}$
Luego $|w \times w^{(-1)}| = 1 \Rightarrow |w^{(-1)}| = \frac{1}{|w|}$
Notaremos como $arg(z)$ a algun argumento, no al principal, de z.

$$\left.\begin{array}{c} Arg(1) = 0 \\ arg(w \times w^{(-1)}) = arg(w) + arg(w^{(-1)} \end{array}\right\} \Rightarrow arg(w) + arg(w^{(-1)}) = 0 \Rightarrow arg(w^{(-1)}) = -arg(w)$$

$\therefore \frac{z}{w} = zw^{(-1)} = (PL)_(\theta - \alpha)$

Ejemplo: —–

1.10.2. Igualdad en Forma Polar

Sean $z = L_\theta$, $w = P_\alpha$

$$z = w \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} L = & P \\ \theta = & \alpha + k \times 2\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

1.11. Raices n-esimas de una complejo

Definicion: dado $w \in \mathbb{C}$, y $n \in \mathbb{N}$ decimos que $z \in \mathbb{C}$ es raiz n-esima de w si $z^n = w$
Ejemplo: Calcular la raiz cuarta de $w = 16_{\frac{\pi}{4}}$

Sea $z = P_\theta$ una raiz cuarta de w. Entonces $z^4 = w$ y como $z^4 = (P^4)_{4\theta}$

$$\therefore \begin{cases} P^4 = & 16 \\ 4\theta = & \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- $P^4 = 16 \Rightarrow P = 2$
- $\theta = \dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{2k\pi}{4} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

Procedemos dando valores a k.
(k=0) $\theta_0 = \frac{\pi}{16}$ (k=1) $\theta_1 = \frac{9}{16}\pi$
(k=2) $\theta_2 = \frac{17}{16}\pi$ (k=3) $\theta_3 = \frac{25}{16}\pi$
Notamos que si pasamos el n-esimo valor para k en este caso el 4, repetiremos resultados por lo tanto el procedimiento termina ahi. Esas son las 4 raices cuartas de nuestro z.

Teorema de Movie Lo mostrado anteriormente se resumen con este teorema de la siguiente manera.
Dado $w = P_\theta \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces w tiene n raices n-esimas. $z = L_\alpha \in \mathbb{C}$ donde:

$$\begin{cases} L = & \sqrt[n]{P} \\ \alpha = & \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \forall k \in 0, 1, ..., n-1 \end{cases}$$