Álgebra: Operaciones con polinomios

Suma-resta de polinomios

Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

a) $-(-3x^2 + 4x^5 + 7) + (2x + 6x^5) - (x^2 - 7x^5 + 9)$

b) *(Opcional)* $-(7y^3 - 3y + 11) + (5y^2 + 9y^3 - 1) - (-y^3 - 4y^2 + 3y)$

c) *(Opcional)* $\left(3x^3 + 4x^2 - 7x + 1\right) + \left(9x^3 - 4x^2 - 6x\right) - \left(-7 - \frac{3}{2}x\right)$

d) *(Opcional)* $3x - \left\{x^4 - 2\left[x^3 - 3x^4 + 2\left(x^4 - x\right) + x^4\right] + 2x\right\}$

Multiplicación de polinomios

Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

a) $\left(7-3x+3x^3\right)\left(x^2+2x\right)-(x+1)(2-x)$

b) *(Opcional)* $\left(7m^2-6\right)(m+1)+3m(4m-4)$

c) *(Opcional)* $(3x^2 - 8x + 7)(x^3 + x) - (x + 2)(x - 1)$

d) *(Opcional)* $\left(w^2 + 2\right)\left(w^3 + 5\right) - 6\left(2w^2 - 4w^3\right)$

Fórmulas Notables

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow$ Cuadrado de la suma de dos números

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow$ Cuadrado de la diferencia de dos números

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow$ Diferencia de cuadrados

d) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \rightarrow$ Cubo de la suma de dos números

e) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \rightarrow$ Cubo de la diferencia de dos números

1. Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

    a) $(3x-2)^3 - (1-2x)^2 + x^2(3x-1)$

b) *(Opcional)* $y(y-6)^2-(3y+1)^3+3(y^3-8)$

c) *(Opcional)* $-(3x-1)(3x+1)-(x-2)^2$

2. Dados los siguientes polinomios definidos en la variable y

$$R(y) = y^3 + 1 : \quad S(y) = 7 - y; \quad T(y) = y^6 - 3y^2 - 3y + 1$$

Determine el polinomio reducido de efectuar la operación:

$$[R(y)]^2 - 5y\,[S(y)]^3 - 2T(y)$$

3. *(Opcional)* Dados los siguientes polinomios

$$P(x) = 2x - 3 \ , \ Q(x) = x + 6 \ , \ R(x) = 7 - 5x$$

Determine la expresión algebraica más simple que se obtiene al efectuar las operaciones

$$[P(x)]^3 + 2x^2 \cdot Q(x) - 3R(x)$$

División de polinomios

División de polinomio por monomio

Ejemplo. División de polinomio por monomio

Efectué las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

a) $\left(12x^4 - 7x^2 - 9x^5 + 3x^3\right) \div 3x^2$

b) *(Opcional)* $\dfrac{-18m^2 + 21m^6 - 9m^5}{9m^2}$

División de polinomio por polinomio o División algebraica

a) Se deben ordenar los términos del dividendo y del divisor en orden descendente (de mayor a menor) con respecto a una de las variables, si falta alguna de las variables se debe completar el polinomio con un cero.

b) Se divide el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor, el resultado es el primer término del **cociente** $C(x)$.

c) Se multiplica el cociente por cada término del divisor y los resultados se van colocando debajo de cada término del dividendo y se restan uno a uno.

d) El polinomio obtenido es el nuevo dividendo con el cual se repiten los pasos b y c anteriores.

e) Se continúa con los pasos $b), c)$ y $d)$ hasta que se obtenga un polinomio de grado menor que el divisor. Éste se llamará **residuo** $R(x)$.

Se debe considerar lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} \longleftarrow P(x) & Q(x) \longrightarrow \text{divisor} \\ \cline{2-2} \text{residuo} \longleftarrow R(x) & C(x) \longrightarrow \text{cociente} \end{array}$$

La división de la forma $P(x) \div Q(x)$ o $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se puede expresar como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

La división algebraica es posible si el polinomio del dividendo es de grado mayor o igual al polinomio del divisor.

Método de división algebraica

a) $P(x) = 2x^4 + 2x^2 - x + 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, efectúe la operación $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

b) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$ y $Q(x) = 2 + x^2$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, efectúe la operación $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

c) *(Opcional)* $P(x) = 2x - 4x^2 + 3x^3 - 1$ y $Q(x) = 1 + x^2 + 2x$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, efectúe la operación $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

d) *(Opcional)* $P(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 5$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, efectúe la operación $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

División Sintética

La división sintética es un procedimiento abreviado para determinar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ de grado n, con $n \geq 1$, por un polinomio de la forma $x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Es importante tomar muy en cuenta ***la forma*** que debe tener el divisor para poder determinar si la división sintética es posible de realizar o no.

Ejemplo: Método de división sintética

Determine el cociente y el residuo que se obtiene al efectuar cada una de las siguientes divisiones.

a) $\left(-9x^2 + x + 3 + x^4\right) \div (x + 3)$

b) $(4x^3 + 3x^2 - 5x + 2) \div (x - 3)$

c) $(8x^3 + 8x^2 + 22x - 15) \div (2x - 1)$

d) *(Opcional)* $(-8x^3 + x^4 - 16 + 2x) \div (x - 8)$

e) *(Opcional)* $(5 - 3x^2 + x^3 + x) \div (-2 + x)$