

# **MODEL MATEMATIS SISTEM DINAMIS DAN SISTEM KENDALI**

- **PENDAHULUAN**
- **KLASIFIKASI SISTEM**
- **MODEL MATEMATIS SISTEM FISIS**
- **PEMODELAN STATE SPACE**

# PENDAHULUAN

- Untuk analisis dan desain sistem kendali, sistem fisis harus dibuat model fisisnya.
- Model fisis harus dapat menggambarkan karakteristik dinamis sistem tsb secara memadai.
- Model matematis diturunkan dari hukum-hukum fisis sistem ybs.
  - Dinamika sistem mekanis dimodelkan dengan hukum-hukum Newton.
  - Dinamika sistem elektrik dimodelkan dengan hukum-hukum Kirchhoff, Ohm.
- Model matematis suatu sistem: kumpulan persamaan yang menggambarkan dinamika suatu sistem secara memadai.
- Model matematis dapat meningkat akurasi dengan memodelkan secara lebih lengkap, bila diperlukan dalam analisis yang teliti.
- Perlu kompromi antara kesederhanaan model dengan akurasi hasil analisis.

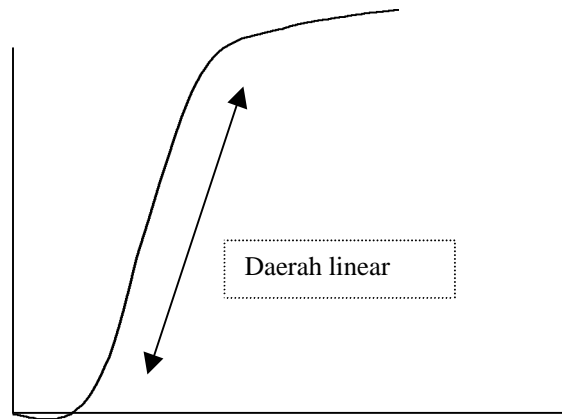
- Kesederhanaan model dicapai dengan memperhatikan faktor-faktor penting saja dalam pemodelan.
  - Pemodelan dengan persamaan differential (bukan parsial), akan menghilangkan sifat-sifat nonlinear tertentu dan parameter-parameter terdistribusi yang mungkin ada pada sistem.
  - Pemodelan suatu komponen pada frekuensi rendah tidak dapat digunakan pada frekuensi tinggi.
- Suatu sistem yang memiliki model matematis sama tidak selalu menggambarkan model fisis yang sama (Misal: analogi sistem mekanis dengan sistem elektrik).
- Dua pendekatan analisis :
  - Fungsi Alih (Tradisional, untuk sistem SISO)
  - State Space (Modern, untuk sistem modern, misal MIMO)

# KLASIFIKASI SISTEM

- LINEAR VS NONLINEAR
- TIME-INVARIANT VS TIME-VARYING
- CONTINUOUS-TIME VS DISCRETE-TIME
- DETERMINISTIC VS STOCHASTIC
- LUMPED- VS DISTRIBUTED - PARAMETERS
- TRANSFER FUNCTION VS STATE SPACE

## - LINEAR VS NON-LINEAR

- Sistem fisis umumnya bersifat nonlinear dalam tingkat tertentu.
- Untuk daerah kerja yang kecil, sistem nonlinear dapat dianggap linear (piece-wise linearisation)



- Sistem linear : berlaku hukum superposisi:
  - respons suatu sistem terhadap beberapa input berbeda merupakan kombinasi respons masing-masing input.
- Pengujian kelinearan suatu sistem melalui input sinusoidal.
- Dalam beberapa hal elemen-elemen nonlinear sengaja disertakan dalam sistem kendali untuk optimasi unjuk kerja.
  - Relay on-off dipakai pada sistem kontrol optimal waktu, sistem kendali pesawat dan sistem peluru kendali.

## TIME-INVARIANT VS TIME-VARYING

- Sistem time-invariant memiliki parameter-parameter yang konstan, tak tergantung waktu.
- Respons nya tak tergantung pada saat kapan input diberikan.
- Sistem time-varying memiliki satu atau lebih parameter yang berubah terhadap waktu.
- Respons nya tergantung pada waktu diberikan input.
- Contoh Sistem Kendali Time-varying:  
Sistem kendali pesawat ruang angkasa : bobotnya berkurang akibat konsumsi bahan bakar.

## CONTINUOUS-TIME VS DISCRETE-TIME

- Sistem kontinyu waktu : memiliki semua variabel / sinyal yang kontinyu terhadap waktu.
- Sistem diskrit waktu : memiliki satu atau lebih variabel / sinyal yang diskrit terhadap waktu.

## DETERMINISTIC VS STOCHASTIC

- Sistem deterministik memiliki respons terhadap suatu input yang dapat ditebak dan berulang / konsisten.
- Sistem stokastik: respons terhadap input yang sama tidak selalu menghasilkan output yang sama.

## LUMPED- VS DISTRIBUTED – PARAMETERS

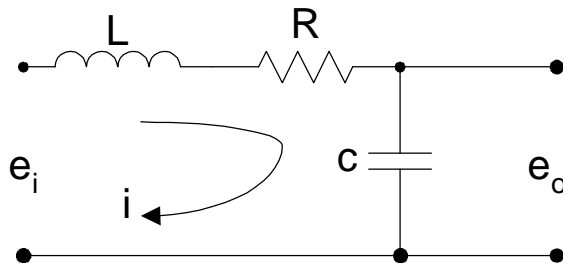
- Pemodelan komponen yang sederhana bila dapat dianggap bahwa parameter-parameter komponen tsb dapat dimodelkan secara terkumpul disatu titik.
- Dicitrakan dengan persamaan differensial biasa.
- Pemodelan parameter terdistribusi lebih tepat digunakan, misalnya pada sistem transmisi.
- Dicitrakan dengan persamaan differensial parsial.

## TRANSFER FUNCTION VS STATE SPACE

- Analisis sistem sederhana, SISO yang bersifat linear, kontinyu, time-invariant, lumped-parameters, deterministik, dapat dilakukan melalui pendekatan tradisional (fungsi alih) yang merupakan domain frekuensi kompleks. Alat bantu analisis dan perancangan dapat berupa Root Locus (domain waktu), Bode Plot atau Nyquist (domain frekuensi).
- Untuk sistem modern yang kompleks dan berakurasi tinggi (ditandai dengan MIMO, non-linear, time-varying, optimal, robust) harus digunakan pendekatan state space yang bersifat domain waktu.



## Model Matematis untuk Rangkaian Elektrik(1)



Hukum Fisis : Kirchoff  
Persamaan dinamis sistem  
/ Persamaan differensial

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int i dt = e_i$$

$$\frac{1}{c} \int i dt = e_o$$

Dalam bentuk Laplace : (anggap kondisi mula = 0)

$$sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = E_i(s)$$

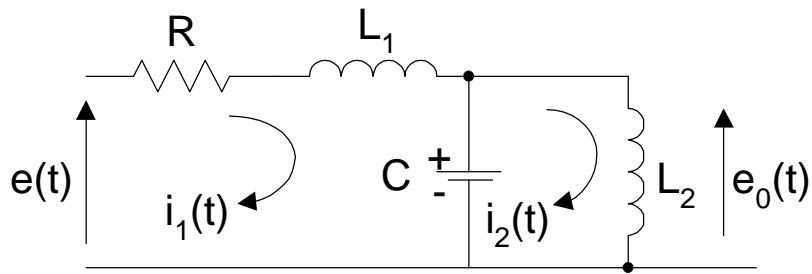
$$\frac{1}{sC} I(s) = E_o(s) \rightarrow \frac{I(s)}{C} = sE_o(s)$$

$$s^2 LI(s) + RsI(s) + \frac{I(s)}{c} = sE_i(s)$$

Fungsi alih :

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{I(s)}{C}}{\left( s^2 L + Rs + \frac{1}{C} \right) I(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

## Model Matematis untuk Rangkaian Elektrik (2)



$$e(t) = Ri_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + e_0 \quad (1)$$

$$e_0 = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} i_c = i_1(t) - i_2(t) \\ i_c = C \frac{de_0(t)}{dt} \end{array} \right\} i_1 - i_2 = C \frac{de_0}{dt} \quad (3)$$

Transformasi Laplace :

$$E_0(s) - sL_2 I_2(s) \quad (2) \rightarrow I_2(s) = \frac{E_0(s)}{sL_2} \quad (2)$$

$$I_1(s) - I_2(s) = sC E_0(s) \quad (3)$$

$$E(s) = (R + sL_1)I_1(s) + E_0(s) \quad (1)$$

$$I_1(s) = \frac{E(s) - E_0(s)}{R + sL_1} \quad (1)$$

(1) & (2)  $\rightarrow$  (3)

$$\frac{E(s) - E_0(s)}{R + sL_1} - \frac{E_0(s)}{sL_2} = sC E_0(s)$$

$$\frac{sL_2 E(s) - sL_2 E_0(s) - (R + sL_1)E_0(s)}{(R + sL_1)(sL_2)} = sC E_0(s)$$

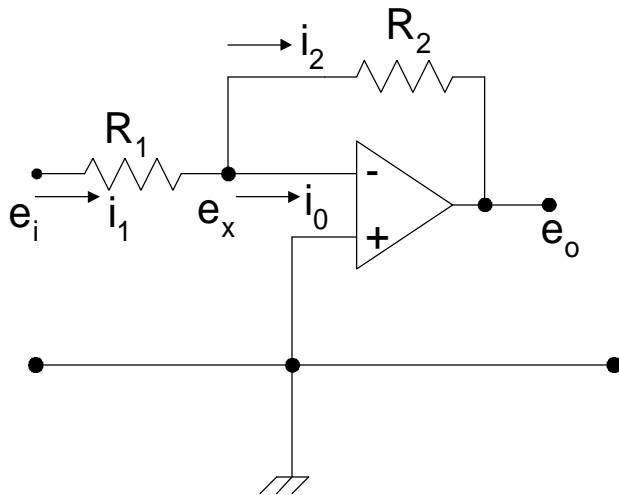
$$sL_2 E(s) - (R + s(L_1 + L_2))E_0(s) = (R + sL_1)(s^2 L_2 C)E_0(s)$$

$$sL_2 E(s) = [s^2 L_2 C(R + sL_1) + s(L_1 + L_2) + R]E_0(s)$$

$$\frac{E_0(s)}{E(s)} = \frac{sL_2}{s^2 L_2 C(R + sL_1) + s(L_1 + L_2) + R}$$

$$= \frac{sL_2}{s^3 L_1 L_2 C + s^2 L_2 CR + s(L_1 + L_2) + R}$$

## Model Matematis untuk Rangkaian Elektrik (3)



Op Amp ideal :

$$Z_{in} = \infty$$

Sehingga  $i_0 = 0$

$e_x \approx 0$  virtual ground,  
sehingga

$$i_1 = i_2$$

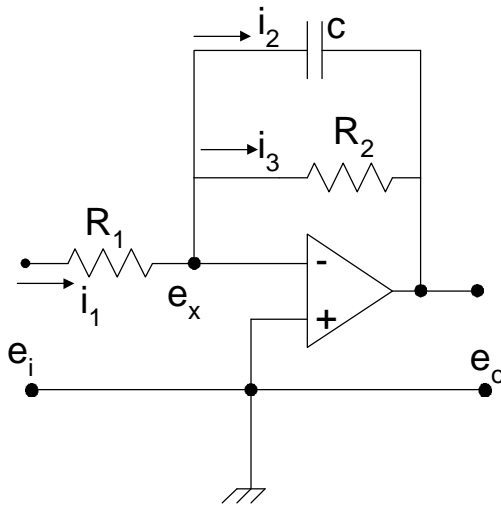
Persamaan Rangkaian:

$$\frac{e_i - e_x}{R_1} = \frac{e_x - e_o}{R_2} \Rightarrow \frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

Diperoleh:

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$$

## Model Matematis untuk Rangkaian Elektrik (4)



$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$i_1 = \frac{e_i - e_x}{R_1} \approx \frac{e_i}{R_1}$$

$$i_2 = C \frac{d(e_x - e_o)}{dt}$$

$$\approx C \frac{-de_o}{dt}$$

$$i_3 = \frac{e_x - e_o}{R_2} \approx \frac{-e_o}{R_2}$$

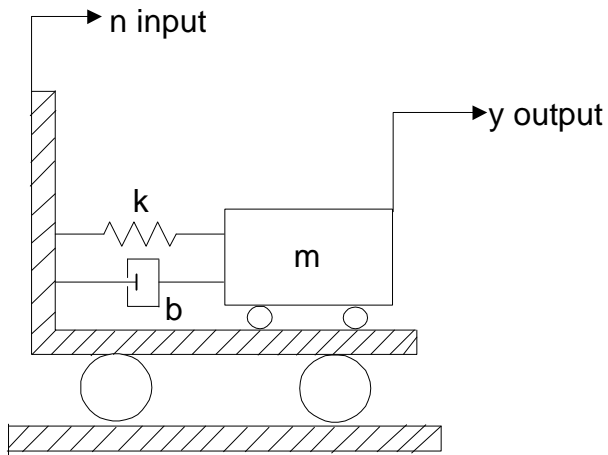
$$\frac{e_i}{R_1} = -C \frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -sCE_o(s) - \frac{E_o(s)}{R_2}$$

sehingga

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{R_2Cs + 1}$$

## Model Matematis untuk Sistem Mekanis: Translasi(1)



pada  $t < 0$  : sistem tak bergerak  
 pada  $t = 0$  gerobak di gerakan  
 dengan  
 kecepatan konstan

$$\frac{dn}{dt} = \text{konstan}$$

$y$  = output relatif terhadap  
 ground

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dn}{dt} \right) + k(y - n)$$

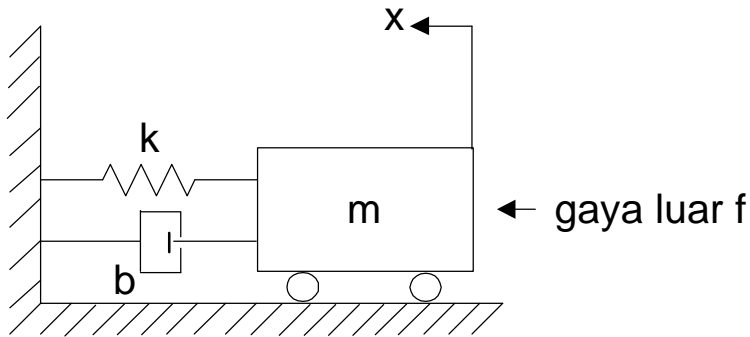
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = b \frac{dn}{dt} + kn$$

### Laplace :

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

## Model untuk Sistem Mekanis : Translasi(2)



Hukum Newton kedua :

$$ma = \sum F$$

M = massa, (kg)

A = percepatan, m / s<sup>2</sup>

F = gaya, N

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f$$

**Laplace :**

$$ms^2 X(s) + bs X(s) + kX(s) = F(s)$$

**Diperoleh Fungsi Alih:**

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

**Ambil :**

$f = \delta(t)$  , sehingga  $F(s) = 1$ ;  $m = 1$ ;  $b = 2$ ;  $k = 1$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s+1)}$$

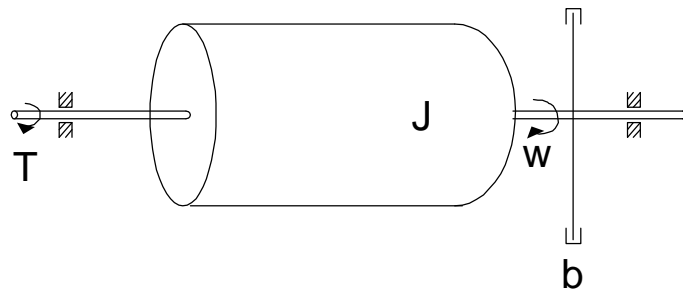
## Model Matematis untuk Sistem Mekanis: Rotasi

$$Ja = \sum T$$

$J$  = momen inersia beban  $\text{kg m}^2$

$\alpha$  = percepatan sudut beban  $\text{rad / s}^2$

$T$  = torsi yang diberikan pada sistem  $\text{Nm}$



$$J \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} = T$$

atau :

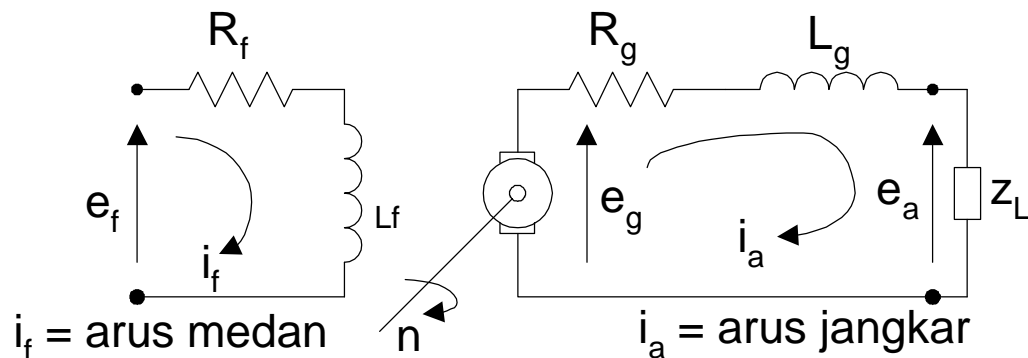
$$J \frac{dW}{dt} + bW = T$$

$\omega$  = kecepatan sudut  $\text{rad / s}$

$\theta$  = simpangan sudut (rad)



## Model Matematis untuk Generator DC :



o Kecepatan konstan  $n$

o Arus output  $i_a$  dapat dikontrol dari besarnya arus  $i_f$

$$\left. \begin{aligned} e_g &= k_1 \cdot n \cdot f \\ f &= k_2 \cdot i_f \end{aligned} \right\} e_g = k_g \cdot i_f \quad (1)$$

$\uparrow$   
 Konstanta generator

**KVL pada kiri/input :**

$$(1): \quad R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (2)$$

$$i_f = \frac{e_g}{k_g} \quad (3)$$

Substitusi (3)  $\rightarrow$  (2):

$$e_f = R_f \frac{e_g}{k_g} + \frac{L_f}{k_g} \frac{de_g}{dt}$$

Dalam Laplace:

$$E_f(s) = \frac{1}{k_g} [R_f + sL_f] E_g(s)$$

Fungsi Alih :

$$\frac{E_g(s)}{E_f(s)} = \frac{k_g}{R_f + sL_f}$$

**KVL pada loop kanan/ouput**

$$-e_a = -e_g + i_a R_g + L + L_g \frac{di_a}{dt};$$

$$e_a = i_a \cdot z_L$$

Atau:

$$i_a = \frac{e_a}{z_L}$$

**Substitusi :**

$$-e_a = -e_g + \frac{e_a}{z_L} R_g + \frac{L_g}{z_L} \frac{de_a}{dt}$$

$$e_g = \left[ e_a + \frac{R_g}{z_L} e_a + \frac{L_g}{z_L} \frac{de_a}{dt} \right]$$

$$E_g(s) = \left[ 1 + \frac{R_g}{z_L(s)} + \frac{sL_g}{z_L(s)} \right] E_a(s)$$

$$= \left( \frac{z_L(s)}{z_L(s)} \right) E_a(s)$$

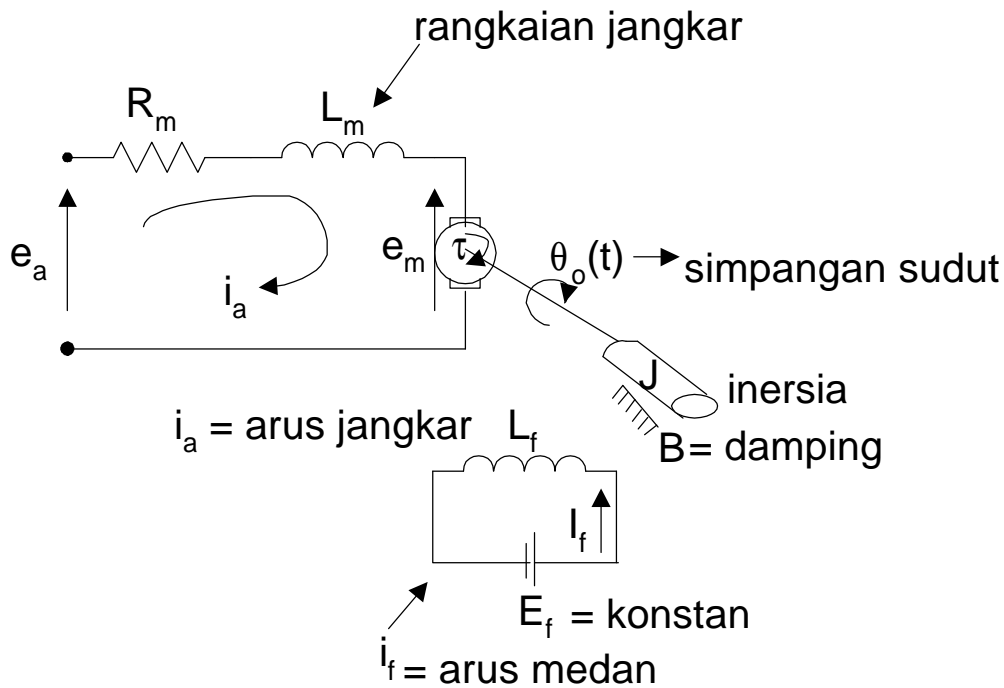
Diperoleh:

$$\frac{E_a(s)}{E_g(s)} = \frac{z_L(s)}{z_L(s) + R_g + L_g s}$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \frac{E_a(s)}{E_f(s)} &= \frac{E_g(s)}{E_f(s)} \times \frac{E_a(s)}{E_g(s)} \\ &= \frac{R_g}{R + sL_f} \times \frac{z_L(s)}{z_L(s) + R_g + sL_g} \end{aligned}$$

## Model Matematis untuk Motor DC dengan Pengontrolan Arus Jangkar



$e_m$  = tegangan terinduksi

$$e_m = k_1 \cdot f \cdot n \quad n = \text{kecepatan rotasi (putaran) motor}$$

$$f = k_2 \cdot i_f \quad \phi = \text{konstan}$$

$I_f = \text{konstan}$

sehingga

$$e_m = k_e \cdot n = k_e \frac{dq_b}{dt} \quad K_e = \text{konstanta tegangan motor}$$

**Persamaan rangkaian :**

$$e_a = R_m i_a + L_m \frac{di_a}{dt} + e_m$$

$$e_a = R_m i_a + L_m \frac{di_a}{dt} + k_e \frac{dq_b}{dt}$$

$$E_a(s) = (R_m + sL_m)I_a(s) + k_e sQ_b(s)$$

**Persamaan Beban**

Torsi yang dihasilkan motor : sebanding dengan fluksi  $\phi$  (yang dalam hal ini konstan) dan sebanding dengan arus jangkar  $i_a$

$$\longrightarrow T = k_T \cdot i_a$$

$K_T$  = konstanta torsi motor

$$T = J \frac{d^2 q_b}{dt^2} + B \frac{dq_b}{dt}$$

atau :

$$k_T I_a(s) = (Js^2 + B_s) \Theta(s)$$

**sehingga :**

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{k_T}{J L_m s^2 + (R_m J + L_m B) s^2 + (R_m B + k_e k_T) s} \quad \text{[EYS- 98] hal 21 dari 28}$$

**Dengan definisi :**

$$T_a = \frac{L_m}{R_m} \rightarrow \text{Konstanta waktu iangkar}$$

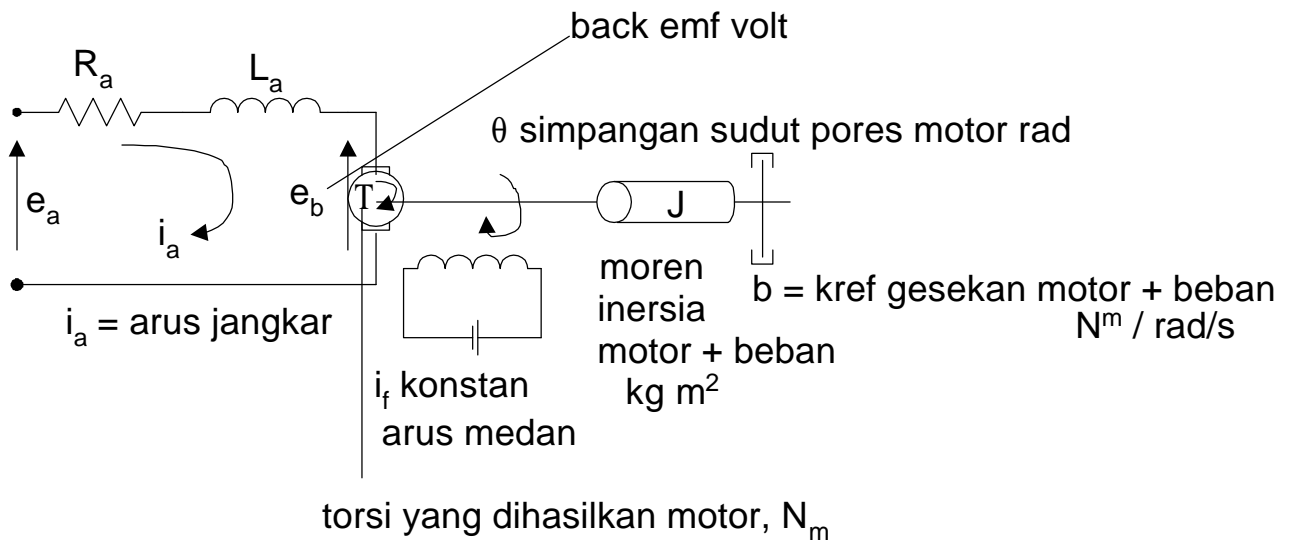
$$T_m = \frac{J R_m}{k_e k_T} \rightarrow \text{Konstanta waktu motor}$$

$$g = \frac{R_m B}{k_e k_T} \rightarrow \text{Faktor redaman}$$

Diperoleh:

$$\frac{\Theta_s(s)}{E_a(s)} = \frac{1/k}{s[T_a T_m s^2 + (T_m + g T_a)s + (g + 1)]}$$

## Model Matematis untuk Motor DC dengan Pengontrolan Arus Jangkar :



### Fluksi oleh arus medan :

$$\psi = k_f \cdot i_f \quad - \text{Konstan untuk } i_f \text{ konstan}$$

### Torsi T :

$$T = k_i i_a \cdot \psi = k_i \cdot i_a \cdot k_f \cdot i_f = k \cdot i_a$$

$k$  = konstanta motor - torsi

### Tegangan Back EMF:

Tegangan EMF: proporsional terhadap fluksi (konstan) & kecepatan sudut putaran poros motor.

$$\rightarrow e_b = k_b \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

**Persamaan input :**

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

**Persamaan output :**

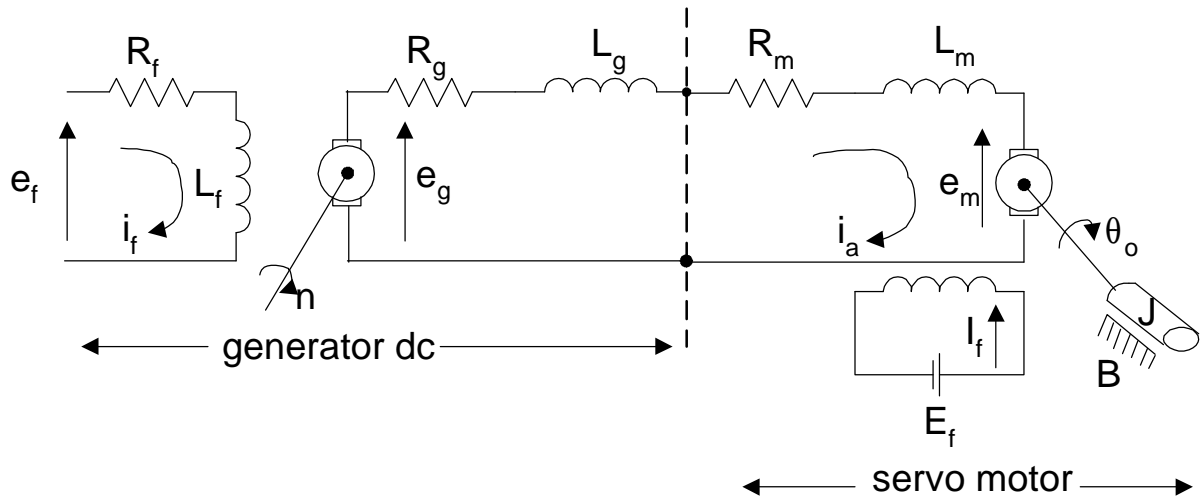
$$T = k \cdot i_a = J \frac{d^2q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt}$$



# Model Matematis untuk Sistem Generator-Motor Ward-Leonard

Generator dc mendrive motor dc dengan pengontrolan arus jangkar

**Konfigurasi dasar :**



**Fungsi alih :**

$$\frac{E_g(s)}{E_f(s)} = \frac{k_g}{R_f + sL_f}$$

**Persamaan Loop kanan :**

$$e_g = (R_g + R_m)i_a + (L_g + L_m)\frac{di_a}{dt} + k_e \frac{d\theta_o}{dt}$$

$$E_g(s) = \left[ (R_g + R_m) + s(L_g + L_m) \right] I_a(s) + k_e s\Theta_o(s)$$

**Persamaan Beban :**

$$T = J \frac{d^2 q_o}{dt^2} + B \frac{dq_o}{dt}$$

$$k_T \cdot I_a(s) = (Js^2 + Bs)\Theta_o(s)$$

$$I_a(s) = \frac{(Js^2 + Bs)}{k_T} \Theta_o(s)$$

atau :

$$e_a \rightarrow e_g \cdot R_m \rightarrow (R_m + R_g); L_m \rightarrow (L_m + L_g), \text{ sehingga}$$

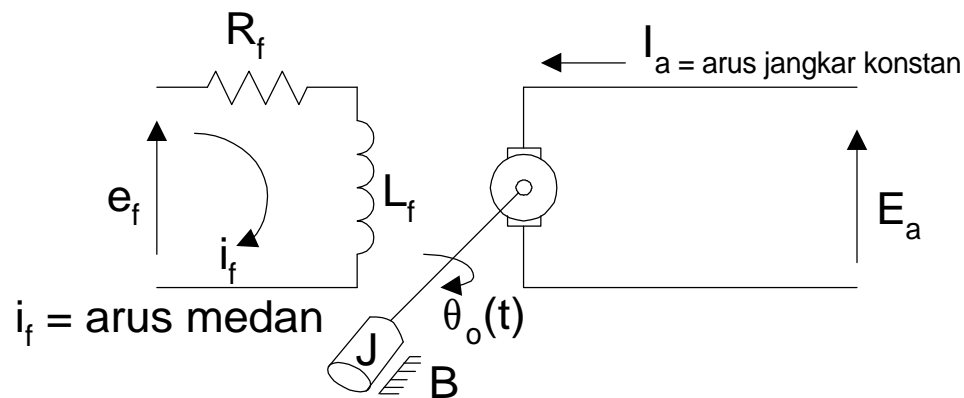
$$\frac{\Theta_o(s)}{E_g(s)} = \frac{kT}{s \left[ J(L_m + L_g)s^2 + \left[ (R_m + R_g)J + (L_m + L_g)B \right] s + (R_m + R_g)B + k_e k_T \right]}$$

sehingga :

$$\frac{\Theta_o(s)}{e_f(s)} = \frac{\Theta_o(s)}{E_g(s)} \times \frac{E_g(s)}{E_f(s)}$$

$$= \dots\dots\dots$$

## Model Matematis untuk Motor DC dengan Pengontrolan Arus Medan



Torsi yang dihasilkan motor :

$$T \sim f_a = \text{kons tan} \\ \sim i_f$$

sehingga

$$T = k_T \cdot i_f$$

Pers beban :

$$T = J \frac{d^2 q_b}{dt^2} + B \frac{dq_b}{dt} \\ i_f = \frac{J}{kT} \frac{d^2 q_b}{dt^2} + B \frac{dq_b}{dt}$$

Pers loop kiri / input :

$$e_f = i_f R_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

Diperoleh:

$$\rightarrow \frac{Q_o(s)}{E_f(s)} = \frac{k_T / R_f \cdot B}{s(1 + T_f s)(1 + T_m s)}$$

$$T_f = \frac{L_f}{R_f} = \text{Konstanta waktu rangkaian}$$

$$T_m = \frac{J}{B} = \text{Konstanta waktu motor}$$