

UJIAN AKHIR SEMESTER GASAL TA 2021/2022

Nama : Andriansyah
Kelas : TI.20.B1
Nim : 312010011
Matkul : Matematika Diskrit

1. a. Pada babak final sebuah turnamen, tim pemenang adalah tim yang pertama sekali memenangkan 2 pertandingan secara berurutan atau tim yang pertama sekali memenangkan 4 pertandingan. Banyak cara turnamen dapat terjadi adalah.

Jawab :

Misalkan pada turnamen tersebut, dua tim yang bertanding adalah Tim A dan Tim B. Tabel berikut menyatakan kemungkinan yang dapat terjadi agar tim A menang (M = menang, K = kalah).

Banyak pertandingan	Tim A	Tim B
2	(M M)	(K K)
3	(K M M)	(M K K)
4	(M K M M)	(K M K K)
5	(K M K M M)	(M K M K K)
6	(M K M K M M)	(K M K M K K)
7	(K M K M K M M)	(M K M K M K K)

- b. Dalam sebuah lemari terdapat 25 helai baju yang terdiri atas 4 ukuran, yaitu 5 helai baju berukuran S, 4 helai baju berukuran M, 9 helai baju berukuran L, dan 7 helai baju berukuran XL. Tentukan jumlah baju paling sedikit yang dapat diambil agar selalu diperoleh 7 helai baju berukuran sama.

Jawab :

Gunakan **Prinsip Sarang Burung Merpati** untuk menyelesaikan kasus ini. Ada 4 ukuran baju berbeda. Ambil 6 helai masing-masing ukuran bajunya, yaitu 5 helai baju ukuran S (maksimum), 4 helai baju ukuran M (maksimum), 6 helai baju ukuran L, 6 helai baju ukuran XL.

Jumlah : $5 + 4 + 6 + 6 = 21$ helai baju. Ambil 1 helai baju lagi (antara baju berukuran L atau XL) sehingga dipastikan kita sudah memegang 7 helai baju dengan ukuran sama. Jadi, kita perlu mengambil paling sedikit **22** helai baju agar selalu diperoleh 7 helai baju dengan ukuran sama.

- c. Saat acara sebuah pesta pernikahan terdapat 6 orang (termasuk pengantin) yang hendak berfoto. Banyak cara menata pose foto dalam satu baris dari keenam orang tersebut sedemikian sehingga pengantin berdiri tidak saling berdekatan atau bersampingan adalah.

Jawab :

Banyak cara menata pose foto 6 orang berdiri dalam satu baris adalah

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ cara.}$$

Banyak cara menata pose foto orang sehingga pengantin berdiri saling berdekatan/bersampingan dapat diibaratkan dengan skema berikut.

OOABCD => XABCD

Dengan $OO = X$ yang penyusunannya ada $2!$ Cara, sedangkan $XABCD$ penyusunannya ada $5!$ cara sehingga totalnya adalah

$$2! \times 5! = 2 \times 120 = 240 \text{ cara.}$$

Jadi, banyak cara menata pose foto sehingga pengantin berdiri tidak saling berdekatan atau berdampingan adalah **720 – 240 = 480** cara.

d. Sebanyak 100000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilangan yang mengandung tepat 1 buah angka 3, 1 buah angka 4, dan 1 buah angka 5?

Jawab :

Bilangan 100.000 jelas tidak memenuhi untuk kasus ini sehingga kita hanya perlu meninjau bilangan dengan 5 digit (untuk kasus bilangan ratusan, anggap posisi puluh ribuan dan ribunya 0, begitu juga untuk kasus bilangan ribuan). Berarti, ada 5 cara mengisi angka 5, 4 cara mengisi angka 4, dan 3 angka mengisi angka 3. Dua tempat kosong lainnya bisa diisi angka lain yaitu 0,1,2,6,7,8, dan 9 (ada 7 angka dan boleh berulang). Jadi, banyak bilangan yang demikian adalah **5 x 4 x 3 x 7 x 7 = 2940** cara

e. Jumlah kartu remi seluruhnya ada 52 buah kartu dalam satu pak. Keseluruhan kartu ini terdiri dari 13 jenis kartu, setiap jenis terdiri atas 4 buah kartu. Tiga belas kartu tersebut adalah: 2, 3, 10, joker, ratu, raja, dan as. Setiap pemain remi mendapatkan 5 buah kartu sebagai bentuk dimulainya permainan. Berapa peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu dari jenis yang sama?

Jawab :

Jumlah cara mengambil 5 kartu sembarang dari 52 kartu yang ada adalah $C(52,5)$ (jumlah titik contoh).

Jumlah cara mengambil satu jenis kartu dari 13 jenis yang ada adalah $C(13,1)$.

Jumlah cara mengambil 4 kartu dari 4 kartu sejenis yang ada adalah $C(4,4)$.

Jumlah cara mengambil satu kartu lagi dari sisa 48 kartu lainnya adalah $C(48,1)$.

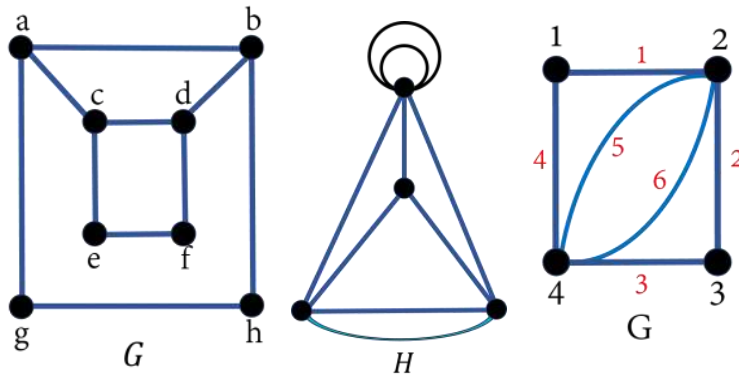
Jadi, peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu sejenis adalah

$$\frac{C(13,1) \times C(4,4) \times C(48,1)}{C(52,5)} = 0,00024$$

2. a. Gambarkan graf dengan 6 titik dan 10 sisi dalam bentuk, Sederhana, Memuat loop dan sisi rangkap serta Tidak sederhana dan memuat sisi rangkap.

Jawab :

b. Jelaskan Matriks Keterhubungan dan Keterkaitan ketiga graf berikut!



Jawab :

Matriks keterhubungan dari graf G di atas adalah sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks keterkaitan dari garf G diatas adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordo matriks di atas adalah 8 x 12 yang menunjukkan bahwa graf itu memuat 8 titik dan 12 sisi.

Matriks keterhubungan langsung dari graf H di atas adalah sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrkis keterkaitannya adalah sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ordo matriks di atas adalah 4 x 9 . Banyak barisnya 4 menunjukkan bahwa jumlah titik di graf itu adalah 4, sedangkan 9 kolomnya menyatakan bahwa graf itu memuat 9 sisi. Perhatikan bahwa angka 2 pada entri di baris pertama (titik 1) matriks itu menunjukkan bahwa sisi loop mengait pada titik 1.

Gambar G No. k3

Misalkan menyatakan matriks keterhubungan langsung (*adjacency matrix*) dari graf , maka dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$A(G) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α_{ij} menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik i dan titik j, misalnya α_{24} berarti banyak sisi yang menghubungkan titik 2 dan 4, yaitu ada 2 sisi. Selanjutnya, misalkan $I(G)$ menyatakan matriks keterkaitan (*incidency matrix*) dari graf G, maka $I(G)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$I(G) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \end{bmatrix}$$

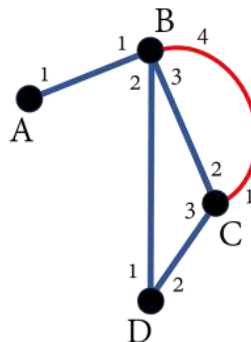
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Catatan: α_{ij} menyatakan banyaknya keterkaitan titik i pada sisi j. Misalkan α_{43} bernilai 1 menyatakan ada 1 sisi, yaitu sisi 3, yang terkait dengan titik 4.

c. Misalkan B adalah graf dengan barisan derajat: (4,3,2,1). Tentukan banyaknya sisi di B dan gambarkan graf B.

Jawab :

Menurut lema jabat tangan (*Handshaking Lemma*), jumlah derajat titik pada suatu graf sama dengan 2 kali banyak sisi. Diketahui bahwa jumlah derajat titik-titik graf itu adalah $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Dengan demikian, banyak sisi di B adalah $\frac{1}{2} \times 10 = 5$. Gambar graf dapat dilihat sebagai berikut



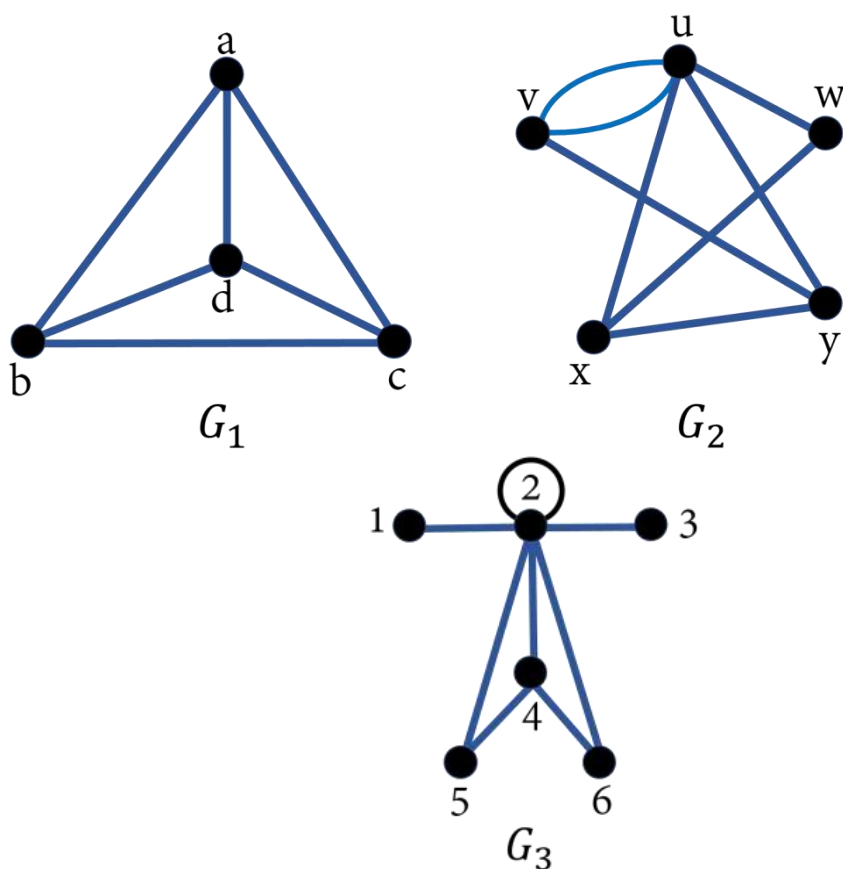
Tampak pada gambar di atas bahwa derajat titik A, B, C, dan D berturut-turut adalah 1, 4, 3 dan 2. Tampak pula ada 5 sisi pada graf tersebut.

d. Apakah ada graf sederhana yang mempunyai barisan derajat (1,2,3,4)? Jika tidak, berikan alasannya.

Jawab :

Tidak ada. Misalkan titik graf itu adalah a, b, c, dan d. Katakanlah d merupakan titik berderajat 4. Graf yang terbentuk bukan graf sederhana karena hanya ada 3 sisi yang ditarik dari d ke titik lain (a,b,c) sehingga 1 sisi lainnya pastilah akan menjadi bagian dari sisi rangkap atau *loop* di titik itu.

3.



a. Berdasarkan gambar di atas maka tentukanlah, Himpunan titiknya dan Himpunan sisinya.

Jawab :

Himpunan titik graf G kita notasikan dengan $V(G)$, huruf V diambil dari kata "Vertex". Dari gambar, masing-masing graf telah diberi nama G_1 , G_2 dan G_3 .

Untuk itu, dapat kita tuliskan:

$$V(G_1) = \{a, b, c, d\}$$

$$V(G_2) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$V(G_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Himpunan sisi graf G kita notasikan dengan $E(G)$, huruf E diambil dari kata "Edge". Dari gambar, masing-masing graf telah diberi nama G_1 , G_2 dan G_3 .

Untuk itu, kita dapat tuliskan

$$E(G_1) = \{ab, ac, bc, ad, bd, cd\}$$

$$E(G_2) = \{xy, xw, xu, vy, uv, uy, vu\}$$

$$E(G_3) = \{12, 22, 23, 24, 25, 26, 45, 46\}$$

- b. Perhatikan kembali graf yang diberikan pada soal nomor 3. Tentukan graf mana yang sederhana, memuat loop dan memuat sisi rangkap.

Jawab :

Graf yang memuat sisi rangkap adalah graf G_2 , yaitu pada sisi penghubung titik u dan v .

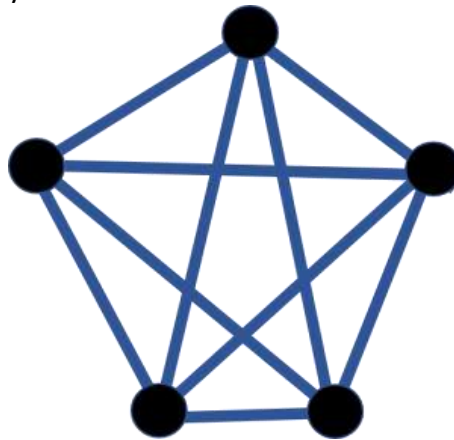
Graf yang memuat *loop* adalah G_3 , yaitu pada titik 2.

Graf sederhana adalah G_1 karena tidak memuat sisi rangkap maupun *loop*.

- c. Dalam sebuah pesta, lima orang saling berjabat tangan. Tiap orang hanya berjabat tangan satu kali dengan orang lainnya. Hitung jumlah jabat tangan yang terjadi dan modelkan dalam graf.

Jawab :

Graf berikut merepresentasikan jabat tangan yang terjadi. Titik mewakili orang, sedangkan sisi mewakili jabat tangan. Jumlah jabat tangan diwakili oleh jumlah sisi pada graf tersebut, yaitu $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.



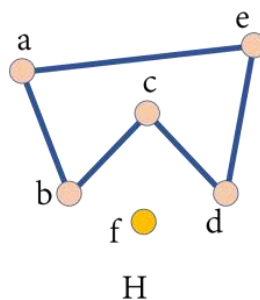
- d. Berilah contoh setiap graf berikut dengan paling banyak 8 titik yaitu Graf Hamilton yang bukan Euler dan Graf Euler yang bukan Hamilton.

Jawab :

Graf Hamilton adalah graf yang memuat siklus Hamilton. Siklus Hamilton sendiri adalah jalan tertutup yang semua sisi dan titik internalnya berbeda serta melalui seluruh titik pada graf tersebut, sedangkan graf Euler adalah graf yang memuat sirkuit Euler, yaitu jalan tertutup yang semua sisinya berbeda dan setiap sisi dilalui tepat 1 kali. Contoh :



Graf G di atas mengandung siklus Hamilton dengan barisan titik $a b d c a$. Jelas bahwa jalan tersebut tertutup (kembali pada titik semula), melalui semua titik pada graf, dan titik internalnya berbeda (hanya dilalui 1 kali). Oleh karena itu, graf di atas disebut graf Hamilton dan bukan graf Euler karena ada sisi yang tidak dilaluinya, yaitu sisi bc .

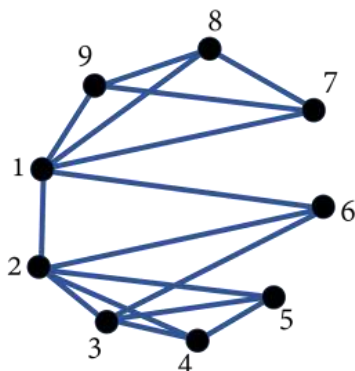


Graf H di atas tergolong graf Euler karena mengandung sirkuit Euler $a b c d e a$, tetapi bukan graf Hamilton sebab titik f tidak dilaluinya (tidak mengandung siklus Hamilton).

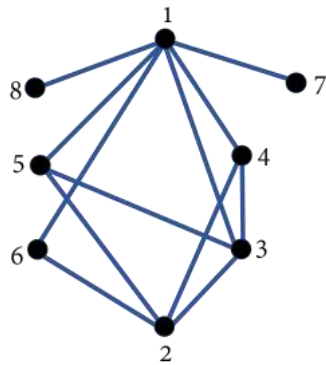
4. a. Gambarlah graf sederhana dengan barisan derajat $(5,5,4,3,3,3,3,3)$
- b. Gambarlah graf sederhana dengan barisan derajat $(6,4,4,3,3,2,1,1)$
- c. Periksalah apakah barisan $(4, 4, 3, 3, 2)$ merupakan grafik atau bukan.
- d. Periksalah apakah barisan $(5, 4, 3, 2, 1, 0)$ merupakan grafik atau bukan.
- e. Periksalah apakah barisan $(6, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1)$ merupakan grafik atau bukan.

Jawab :

a.



b.



- c. Perhatikan bahwa banyaknya bilangan pada $S = 4\ 4\ 3\ 3\ 2$ adalah 5. Jelas bahwa $n = 5 \geq 1$. Tampak pula bahwa S tidak memuat bilangan yang lebih dari 4 dan tidak semua bilangannya 0, serta tidak ada bilangan negatif. S sudah terurut berupa bilangan monoton turun sehingga langkah selanjutnya adalah sebagai berikut.

$$S = 4\ 4\ 3\ 3\ 2$$

(Eksekusi 4 dan kurangi 4 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_1 = 3\ 2\ 2\ 1$$

(Eksekusi 3 dan kurangi 3 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_2 = 1\ 1\ 0$$

(Eksekusi 1 dan kurangi 1 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_3 = 0\ 0$$

Tampak bahwa S_3 hanya memuat bilangan 0 sehingga S_3 grafik. Jadi, S juga grafik.

- d. Perhatikan bahwa banyaknya bilangan pada $S = 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0$ adalah 6. Jelas bahwa $n = 6 \geq 1$. Tampak pula bahwa S tidak memuat bilangan yang lebih dari 5 dan tidak semua bilangannya 0, serta tidak ada bilangan negatif. S sudah terurut berupa bilangan monoton turun sehingga langkah selanjutnya adalah sebagai berikut.

$$S = 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0$$

(Eksekusi 5 dan kurangi 5 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_1 = 3\ 2\ 1\ 0\ -1$$

Tampak bahwa S_1 hanya memuat bilangan negatif sehingga S_1 bukan grafik. Jadi, S juga bukan grafik.

- e. Perhatikan bahwa banyaknya bilangan pada $S = 6\ 4\ 4\ 3\ 3\ 2\ 1\ 1$ adalah 8. Jelas bahwa $n = 8 \geq 1$. Tampak pula bahwa S tidak memuat bilangan yang lebih dari 7 dan tidak semua bilangannya 0, serta tidak ada bilangan negatif. S sudah terurut berupa bilangan monoton turun sehingga langkah selanjutnya adalah sebagai berikut.

$$S = 6\ 4\ 4\ 3\ 3\ 2\ 1\ 1$$

(Eksekusi 6 dan kurangi 6 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_1' = 3\ 3\ 2\ 2\ 1\ 0\ 1$$

$$\Rightarrow S_1 = 3\ 3\ 2\ 2\ 1\ 1\ 0$$

(Eksekusi 3 dan kurangi 3 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_2 = 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$$

(Eksekusi 2 dan kurangi 2 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_3' = 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \Rightarrow S_3 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

(Eksekusi 1 dan kurangi 1 bilangan disampingnya dengan 1)

$$S_4 = 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

Tampak bahwa S_4 hanya memuat bilangan 0 sehingga S_4 grafik. Jadi, S juga grafik.

5. a. Carilah sebuah jurnal yang berkaitan dengan topik Matematika Diskrit!

Jawab :

Ya sudah <http://jurnal.pascaumnaw.ac.id/index.php/JMN/article/view/68/59>

- b. Buatlah minimal 10 poin penting dari konten jurnal yang sudah kalian cari!

Jawab :

1. Matematika diskrit merupakan salah satu matakuliah yang tidak lepas dari masalah pembuktian
2. Konsep mendasar dari matematika yaitu kemampuan membuktikan merupakan masalah penting yang harus dikuasai
3. Konsep-konsep matematika diskrit berkaitan dengan teorema-teorema yang perlu di buktikan secara matematis.
4. Pada kelompok rendah mereka tidak memahami masalah, tidak memiliki strategi pembuktian, bahkan tidak mempunyai motivasi untuk mengerjakan soal - soal yang diberikan.
5. Percaya diri dapat mempengaruhi hasil belajar siswa.
6. Kesalahan fatal yang sering dilakukan di semua kelompok adalah membenarkan masalah yang akan dibuktikan dengan memberikan contoh.
7. Pentingnya memahami soal
8. Pentingnya menyukai apa yang akan dikerjakan karena jika sudah suka pasti akan senang mengerjakannya
9. Pentingnya belajar sebelum ujian
10. Kebanyakan mahasiswa malas duluan saat mendengar kata “matematika”
11. Matematika itu tidak hanya tentang menghitung tapi ada juga algoritma dan penerapannya dalam sehari hari
12. Rata rata Kesulitan mahasiswa belajar matematika yaitu :
(1) memahami konsep matematika, (2) Bahasa dan notasi matematis, (3) minimnya strategi bukti matematis, dan (4) kesulitan dalam membaca bukti matematis.

- c. Jelaskan manfaat jurnal yang kalian dapatkan!

Jawab :

Setelah membaca jurnal ini manfaat yang saya dapatkan saya bisa mengetahui persepsi bahwa matematika tidak hanya tentang menghitung tapi banyak ilmu matematika yang lainnya yang bahkan bisa diterapkan dalam kehidupan sehari hari, saya juga dapat mengetahui kesulitan mahasiswa saat mempelajari matematika diskrit.