Lista de Exercícios - Parte 2
- Prova Automática de Teoremas -

1. Aplique o método da Resolução ao exemplo sobre Marcos e César. Construa a árvore de prova para demonstrar que "odeia(marcos,césar)". Use as proposições apresentadas no slide 46 do material de Lógica.

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

   (a) $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$

   (b) $\exists x.\forall y.P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y)$

   (c) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):

   (a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

   (b) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

   (c) $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$

4. Prove uma consulta do da lista 1

1)

$$W = \quad odeia(marcos, cesar)$$

$$\begin{aligned} G = \quad & \{1.homem(marcos), \\ & 2.pompeano(marcos), \\ & 3.\neg pompeano(x_1) \vee romano(x_1), \\ & 4.soberano(cesar), \\ & 5.\neg romano(x_2) \vee leal(x_2, cesar) \vee odeia(x_2, cesar), \\ & 6.leal(x_3, f(x_3)), \\ & 7.\neg homem(x_4) \vee \neg soberano(y_1) \vee \neg tentaAssassinar(x_4, y_1) \vee \\ & \neg leal(x_4, y_1), \\ & 8.tentaAssassinar(marcos, cesar)\} \end{aligned}$$

Formas clausais

- ¬ pompeano (x) ∨ romano (x)
- ¬ romano (x) ∨ leal (x, C) ∨ odeia (x, C)
- leal (x, f(x))
- ¬ homem (x) ∨ ¬ soberano (y) ∨ ¬ tentAss (x, y) ∨ ¬ leal (x, y)

Axiomas

- homem (M)
- pompeano (M)
- soberano (C)
- tentaAss (M, C)

$w = \text{odeia}(M, C)$

$\neg\,\text{odeia}(M, C) \mid \neg\,\text{romano}(M) \lor \text{leal}(M, C) \lor \text{odeia}(M, C)$

$\neg\,\text{romano}(M) \lor \text{leal}(M, C) \mid \text{romano}(M)$

$\text{leal}(M, C) \mid \neg\,\text{homem}(M) \lor \neg\,\text{soberano}(C) \lor \neg\,\text{tentAss}(M, C) \lor \neg\,\text{leal}(x, y$

$\neg\,\text{homem}(M) \lor \neg\,\text{soberano}(C) \lor \neg\,\text{tentAss}(M, C) \mid \text{homem}(M)$

$\neg\,\text{soberano}(C) \lor \neg\,\text{tentaAss}(M, C) \mid \text{soberano}(C)$

$\neg\,\text{tentaAssassinar}(M, C) \mid \text{tentaAssassinar}(M, C)$

$\square$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):

(a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

(b) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

(c) $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$

a) 1. $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$ original

2. $\neg((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q))$ negar total

$\neg(\neg(P \wedge \neg Q) \vee \neg(P \rightarrow Q))$ $A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B$

$\neg(\neg(P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))$

$(\neg\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg(\neg P \vee Q))$

$(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

$\underline{P} \wedge \underline{\neg Q} \wedge \underline{(\neg P \vee Q)}$

TABLEAU

1. $\neg((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
2. $(P \wedge \neg Q)$ de 1 [Rc $\neg(\rightarrow)$]
3. $\neg(\neg(P \rightarrow Q))$ de 1 [Rc $\neg(\rightarrow)$]
4. P de 2 [Rc $\wedge$]
5. $\neg Q$ de 2 [Rc $\wedge$]
6. $(P \rightarrow Q)$ de 3 [R $\neg\neg$]
7. $\neg P$ | Q de 6 [RD $\rightarrow$]

X X

- Regra para a negação:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

- Regras para fórmulas quantificadas universalmente:

$$\frac{\forall x.A}{A\{x/t\}} \qquad \frac{\neg\exists x.A}{\neg A\{x/t\}}$$ onde t é um termo.

- Regras para fórmulas quantificadas existencialmente:

$$\frac{\exists x.A}{A\{x/\pi\}} \qquad \frac{\neg\forall x.A}{\neg A\{x/\pi\}}$$ onde π é um parâmetro.

- Regras para fórmulas conjuntivas:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}} \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}} \qquad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\\neg B\end{array}}$$

- Regras para fórmulas disjuntivas:

$$\frac{A \vee B}{A \mid B} \qquad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B} \qquad \frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):

(a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

(b) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

(c) $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$

b) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

$\neg(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$

$\neg(\neg(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$

$\neg\neg(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$

$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

$\underline{\exists x.P(x)} \wedge \underline{\exists x.Q(x)} \wedge \underline{(\neg P(x) \vee \neg Q(x))}$

TABLEAU

1. $\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$
2. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$ } de 1 [R.C $\neg(\rightarrow)$]
3. $\neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$
4. $(P(a) \wedge Q(a))$ de 2. [R $\exists x$]
5. $\neg\exists x.P(x) \vee \neg\exists x.Q(x)$ de 3. [negação]
6. $P(a)$ } de 4. [RC $\wedge$]
7. $Q(a)$
8. $\neg\exists x.P(x)$ | $\neg\exists x.Q(x)$ de 5. [RD $\vee$]
9. $\neg P(a)$ | $\neg Q(a)$ de 8 [R $\neg\exists x$]

× ×

- Regra para a negação:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

- Regras para fórmulas quantificadas universalmente:

$$\frac{\forall x.A}{A\{x/t\}} \qquad \frac{\neg\exists x.A}{\neg A\{x/t\}}$$ onde t é um termo.

- Regras para fórmulas quantificadas existencialmente:

$$\frac{\exists x.A}{A\{x/\pi\}} \qquad \frac{\neg\forall x.A}{\neg A\{x/\pi\}}$$ onde π é um parâmetro.

- Regras para fórmulas conjuntivas:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}} \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}} \qquad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\\neg B\end{array}}$$

- Regras para fórmulas disjuntivas:

$$\frac{A \vee B}{A \mid B} \qquad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B} \qquad \frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):

(a) $(P \land \neg Q) \to \neg(P \to Q)$

(b) $\exists x.(P(x) \land Q(x)) \to (\exists x.P(x) \land \exists x.Q(x))$

(c) $\forall x.(P(x) \lor Q(x)) \to (\exists x.P(x) \lor \forall x.Q(x))$

c) 1. $\neg(\forall x.(P(x) \lor Q(x)) \to (\exists x.P(x) \lor \forall x.Q(x)))$

2. $\neg(\neg(\forall x.(P(x) \lor Q(x))) \lor (\exists x.P(x) \lor \forall x.Q(x)))$

3 $\neg(\neg\forall x.P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\exists x.P(x) \lor \forall x.Q(x))$

$\neg\neg\forall x.P(x) \lor \neg\neg Q(x) \land \neg(\exists x.P(x) \lor \forall x.Q(x))$

$\underline{(\forall x.P(x) \lor Q(x))} \land \underline{\neg\exists x.P(x)} \land \underline{\neg\forall x.Q(x)}$

TABLEAU

1. $\neg(\forall x.(P(x) \lor Q(x)) \to (\exists x.P(x) \lor \forall x.Q(x)))$
2. $\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$ } de 1 [R $\neg(\to)$]
3. $\neg(\exists x.P(x) \lor \forall x.Q(x))$
4. $P(x) \lor Q(x)$ de 2 [R $\forall x$]
5. $\neg\exists x.P(x)$ } de 3 [R $\neg(A \lor B)$]
6. $\neg\forall x.Q(x)$
7. $\neg P(x)$ de 5. [R $\neg\exists x$]
8. $\neg Q(x)$ de 6. [R $\neg\forall x$]
9. × $P(x)$ } de 4. [R.D. $\lor$]
10. $Q(x)$ ×

- Regra para a negação:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

- Regras para fórmulas quantificadas universalmente:

$$\frac{\forall x.A}{A\{x/t\}} \qquad \frac{\neg\exists x.A}{\neg A\{x/t\}}$$ onde t é um termo.

- Regras para fórmulas quantificadas existencialmente:

$$\frac{\exists x.A}{A\{x/\pi\}} \qquad \frac{\neg\forall x.A}{\neg A\{x/\pi\}}$$ onde π é um parâmetro.

- Regras para fórmulas conjuntivas:

$$\frac{A \land B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}} \qquad \frac{\neg(A \lor B)}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}} \qquad \frac{\neg(A \to B)}{\begin{array}{c}A\\\neg B\end{array}}$$

- Regras para fórmulas disjuntivas:

$$\frac{A \lor B}{A \mid B} \qquad \frac{\neg(A \land B)}{\neg A \mid \neg B} \qquad \frac{A \to B}{\neg A \mid B}$$

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

(a) $(P \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow ((P \land \neg Q) \lor (P \land R))$

(b) $\exists x.\forall y.P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y)$

(c) $\exists x.(P(x) \land Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \land \exists x.Q(x))$

a) $\neg[(P \land (\neg Q \lor R)) \to ((P \land \neg Q) \lor (P \land R))]$

$\neg[\neg(P \land (\neg Q \lor R)) \lor ((P \land \neg Q) \lor (P \land R))]$

$\neg[\neg P \lor \neg(\neg Q \lor R) \lor ((P \land \neg Q) \lor (P \land R))]$

$\neg[\neg P \lor (Q \land \neg R)) \lor (P \land (\neg Q \lor R))]$

$\neg[((\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor \neg R)) \lor ((P \land \neg Q) \lor (P \land R))]$

$\neg((\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor \neg R)) \land \neg((P \land \neg Q) \lor (P \land R))$

$\neg(\neg P \lor Q) \lor \neg(\neg P \lor \neg R) \land \neg(P \land \neg Q) \land \neg(P \land R)$

$((P \land \neg Q) \lor (P \land R)) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

   (a) $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$

   (b) $\exists x.\forall y.P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y)$

   (c) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

b) $\exists x.\forall y.P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y)$

$\neg(\exists x.\forall y.P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y))$

$\neg(\neg(\exists x.\forall y.P(x,y)) \vee \forall y.\exists x.P(x,y))$

$\neg(\neg(\forall y.P(a,y)) \vee P(x,f(x)))$

$\neg(\neg\forall y.P(a,y)) \vee P(x,f(x)))$

$\neg\neg\forall y.P(a,y) \wedge \neg P(x,f(x)))$

$\forall y.P(a,y) \wedge \neg P(x,f(x))$

$P \wedge \neg P$

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

(a) $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$

(b) $\exists x.\forall y.P(x, y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x, y)$

(c) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

c) $\neg(\exists x.P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$

$\neg(\neg(\exists x.P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$

$\neg((\neg \exists x.P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$

$\neg((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$

$\neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$

$(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\neg \exists x.P(x) \vee \neg \exists x.Q(x))$

$(\underline{P(x) \wedge Q(x)}) \wedge \underline{\neg P(x)} \wedge \underline{\neg Q(x)}$

4) Consulta: localE (gravata, trilha)

[G] [T]

- Axiomas

local (gravata)

tipo (gravata, trilha)

- forma Clausal

$(local(x) \wedge tipo(x,y)) \rightarrow localE(x,y)$

$\hookrightarrow \neg(local(x) \wedge tipo(x,y)) \vee localE(x,y)$

$w = localE(x,y)$

$\underline{\neg localE(G,T)} \mid \neg(local(G) \wedge tipo(G,T)) \vee \underline{localE(G,T)}$

$\neg(local(G) \wedge tipo(G,T))$

$\underline{\neg local(G)} \vee \neg tipo(G,T) \mid \underline{local(G)}$

$\underline{\neg tipo(G,T)} \mid \underline{tipo(G,T)}$

$\square$