

Lista de Exercícios - Parte 2

- Prova Automática de Teoremas -

1. Aplique o método da Resolução ao exemplo sobre Marcos e César. Construa a árvore de prova para demonstrar que "odeia(marcos,césar)". Use as proposições apresentadas no slide 46 do material de Lógica.
2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):
 - (a) $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$
 - (b) $\exists x. \forall y. P(x, y) \rightarrow \forall y. \exists x. P(x, y)$
 - (c) $\exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))$
3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):
 - (a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
 - (b) $\exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))$
 - (c) $\forall x. (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x. P(x) \vee \forall x. Q(x))$

4. Prove uma consulta do da lista 1

1)

$$W = \text{odeia}(\text{marcos}, \text{cesar})$$

$$\begin{aligned} G = & \{1.\text{homem}(\text{marcos}), \\ & 2.\text{pompeano}(\text{marcos}), \\ & 3.\neg\text{pompeano}(x_1) \vee \text{romano}(x_1), \\ & 4.\text{soberano}(\text{cesar}), \\ & 5.\neg\text{romano}(x_2) \vee \text{leal}(x_2, \text{cesar}) \vee \text{odeia}(x_2, \text{cesar}), \\ & 6.\text{leal}(x_3, f(x_3)), \\ & 7.\neg\text{homem}(x_4) \vee \neg\text{soberano}(y_1) \vee \neg\text{tentaAssassinar}(x_4, y_1) \vee \\ & \quad \neg\text{leal}(x_4, y_1), \\ & 8.\text{tentaAssassinar}(\text{marcos}, \text{cesar})\} \end{aligned}$$

Formas clausis

- $\neg\text{pompeano}(x) \vee \text{romano}(x)$
- $\neg\text{romano}(x) \vee \text{leal}(x, c) \vee \text{odeia}(x, c)$
- $\text{leal}(x, f(x))$
- $\neg\text{homem}(x) \vee \neg\text{soberano}(y) \vee \neg\text{tentAss}(x, y) \vee \neg\text{leal}(x, y)$

Axiomas

- $\text{homem}(M)$
- $\text{pompeano}(M)$
- $\text{soberano}(C)$
- $\text{tentAss}(M, C)$

$\omega = \text{odeiz } (M, C)$

$\neg \text{odeiz } (M, C) \mid \neg \text{romano } (M) \vee \text{leal } (M, C) \vee \underline{\text{odeiz } (M, C)}$

$\neg \text{romano } (M) \vee \text{leal } (M, C) \mid \underline{\text{romano } (M)}$

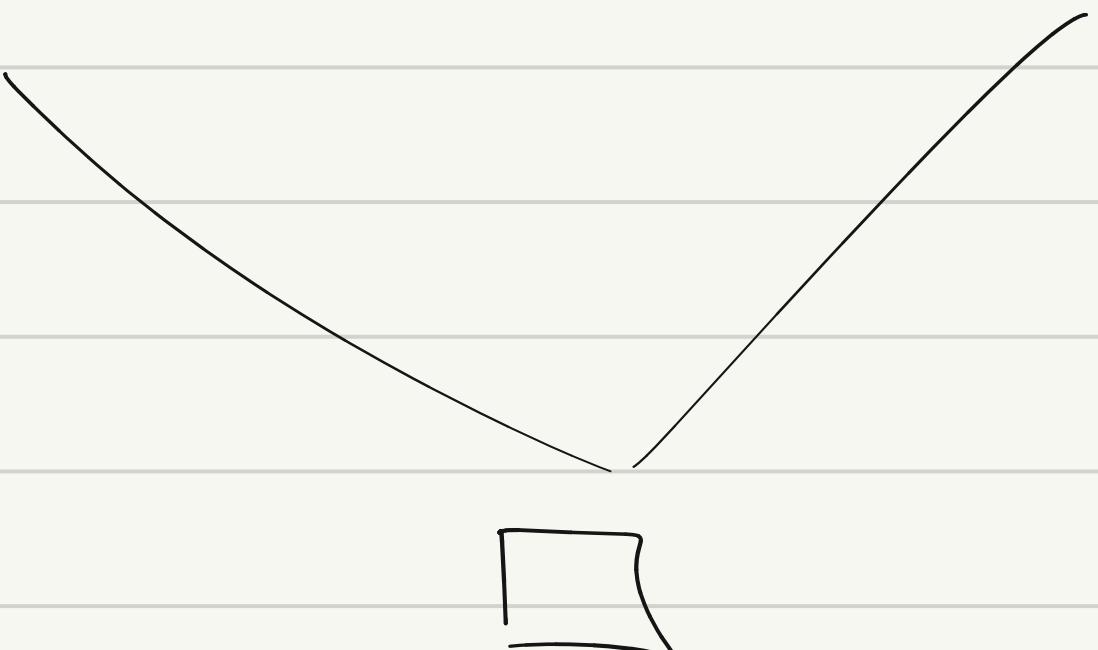
$\underline{\text{leal } (M, C)}$

$\neg \text{homem } (M) \vee \neg \text{soberano } (C) \vee \neg \text{tentAss } (M, C) \vee \neg \text{leal } (x, y)$

$\neg \text{homem } (M) \vee \neg \text{soberano } (C) \vee \neg \text{tentAss } (M, C) \mid \underline{\text{homem } (M)}$

$\neg \text{soberano } (C) \vee \neg \text{tentAss } (M, C) \mid \underline{\text{soberano } (C)}$

$\neg \text{tentAssassinr } (M, C) \mid \underline{\text{tentAssassinr } (M, C)}$



3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):

- (a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
- (b) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$
- (c) $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$

$$\begin{aligned}
 1. & (P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q) && \text{original} \\
 2. & \neg((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)) && \text{negar taut} \\
 & \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \vee \neg(P \rightarrow Q)) && A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B \\
 & \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)) \\
 & (\neg\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg(\neg P \vee Q)) \\
 & (P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
 \underline{1.} & \underline{P \wedge \neg Q} \wedge \underline{\neg P \vee Q}
 \end{aligned}$$

TABLEAU

1.	$\neg((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q))$	
2.	$(P \wedge \neg Q)$	de 1 [RC $\neg(\rightarrow)$]
3.	$\neg(\neg(P \rightarrow Q))$	de 1 [RC $\neg(\neg)$]
4.	P	de 2 [RC \wedge]
5.	$\neg Q$	de 2 [RC \wedge]
6.	$(P \rightarrow Q)$	de 3 [RC $\neg\neg$]
7.	$\neg P \quad \quad Q$	de 6 [RD \rightarrow]

- Regra para a negação:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

- Regras para fórmulas quantificadas universalmente:

$$\frac{\forall x.A}{A\{x/t\}} \quad \frac{\neg\exists x.A}{\neg A\{x/t\}} \quad \text{onde } t \text{ é um termo.}$$

- Regras para fórmulas quantificadas existencialmente:

$$\frac{\exists x.A}{A\{x/\pi\}} \quad \frac{\neg\forall x.A}{\neg A\{x/\pi\}} \quad \text{onde } \pi \text{ é um parâmetro.}$$

- Regras para fórmulas conjuntivas:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}} \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}} \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}}$$

- Regras para fórmulas disjuntivas:

$$\frac{A \vee B}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}} \quad \frac{\neg(A \wedge B)}{\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}} \quad \frac{A \rightarrow B}{\begin{array}{c} A \\ \neg A \end{array}}$$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):

- (a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
- (b) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$
- (c) $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$

$$\begin{aligned}
 b) & \quad \exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)) \\
 \neg & \quad (\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))) \\
 \neg & \quad (\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))) \\
 \neg & \quad (\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))) \\
 & \quad \exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \\
 & \quad \underline{\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)} \quad \underline{\neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x))}
 \end{aligned}$$

TABLEAU

1.	$\neg(\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)))$	
2.	$\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$	$\} \text{ de } 1$
3.	$\neg(\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$	$[R.C \neg(\rightarrow)]$
4.	$(P(z) \wedge Q(z))$	$\text{de } 2. [R \exists]$
5.	$\neg \exists x.P(x) \vee \neg \exists x.Q(x)$	$\text{de } 3. [\text{negação}]$
6.	$P(z)$ $Q(z)$	$\} \text{ de } 4. [R.C \wedge]$
7.	$\neg \exists x.P(x)$	$\neg \exists x.Q(x) \text{ de } 5. [R \vee]$
8.	$\neg P(z)$	$\neg Q(z) \text{ de } 8. [R \neg \exists]$
9.	\times	\times

- Regra para a negação:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

- Regras para fórmulas quantificadas universalmente:

$$\frac{\forall x.A}{A\{x/t\}} \quad \frac{\neg\exists x.A}{\neg A\{x/t\}} \quad \text{onde } t \text{ é um termo.}$$

- Regras para fórmulas quantificadas existencialmente:

$$\frac{\exists x.A}{A\{x/\pi\}} \quad \frac{\neg\forall x.A}{\neg A\{x/\pi\}} \quad \text{onde } \pi \text{ é um parâmetro.}$$

- Regras para fórmulas conjuntivas:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c|c} A & \\ \hline B & \end{array}} \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c|c} \neg A & \\ \hline \neg B & \end{array}} \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c|c} A & \\ \hline \neg B & \end{array}}$$

- Regras para fórmulas disjuntivas:

$$\frac{A \vee B}{\begin{array}{c|c} A & \\ \hline B & \end{array}} \quad \frac{\neg(A \wedge B)}{\begin{array}{c|c} \neg A & \\ \hline \neg B & \end{array}} \quad \frac{A \rightarrow B}{\begin{array}{c|c} A & \\ \hline B & \end{array}}$$

3. Prove os seguintes teoremas utilizando o método de Tableaux (lembre-se de negar o teorema):

- (a) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
- (b) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x))$
- (c) $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$

$$\begin{aligned}
 c) 1. & \neg (\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))) \\
 2. & \neg (\neg (\forall x.(P(x) \vee Q(x)))) \vee (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x)) \\
 3. & \neg (\neg \forall x.P(x) \wedge \neg \forall x.Q(x)) \vee (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x)) \\
 & \neg \neg \forall x.P(x) \vee \neg \neg \forall x.Q(x) \wedge \neg (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x)) \\
 & (\forall x.P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg \exists x.P(x) \wedge \neg \forall x.Q(x)
 \end{aligned}$$

TABLEAU

1.	$\neg (\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x)))$
2.	$\forall x.(P(x) \vee Q(x))$
3.	$\neg (\exists x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$ } de 1 [RC $\neg(\rightarrow)$]
4.	$P(x) \vee Q(x)$ de 2 [R $\forall x$]
5.	$\neg \exists x.P(x)$ } de 3 [R $\neg(A \vee B)$]
6.	$\neg \forall x.Q(x)$
7.	$\neg P(x)$ de 5. [R $\neg \exists x$]
8.	$\neg Q(x)$ de 6. [R $\neg \forall x$]
9.	$P(x)$ } de 4. [R.D. \vee]
10.	$Q(x)$ }

- Regra para a negação:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

- Regras para fórmulas quantificadas universalmente:

$$\frac{\forall x.A}{A\{x/t\}} \quad \frac{\neg\exists x.A}{\neg A\{x/t\}} \quad \text{onde } t \text{ é um termo.}$$

- Regras para fórmulas quantificadas existencialmente:

$$\frac{\exists x.A}{A\{x/\pi\}} \quad \frac{\neg\forall x.A}{\neg A\{x/\pi\}} \quad \text{onde } \pi \text{ é um parâmetro.}$$

- Regras para fórmulas conjuntivas:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}} \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}} \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}}$$

- Regras para fórmulas disjuntivas:

$$\frac{A \vee B}{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \end{array}} \quad \frac{\neg(A \wedge B)}{\begin{array}{c|c} \neg A & \neg B \\ \hline \end{array}} \quad \frac{A \rightarrow B}{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \end{array}}$$

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

$$(a) (P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$$

$$(b) \exists x. \forall y. P(x, y) \rightarrow \forall y. \exists x. P(x, y)$$

$$(c) \exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))$$

$$\neg \left[(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)) \right]$$

$$\neg \left[\neg (P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)) \right]$$

$$\neg \left[\neg P \vee \neg (\neg Q \vee R) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)) \right]$$

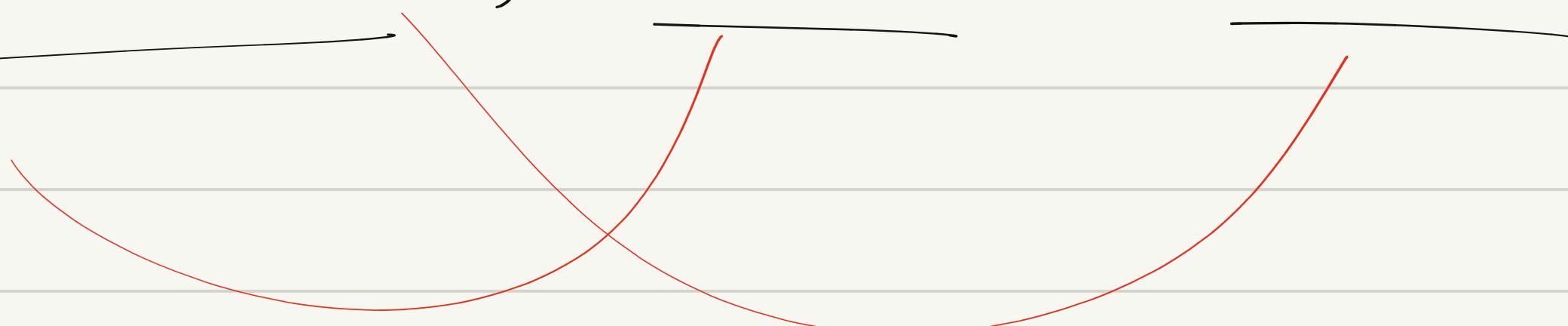
$$\neg \left[\neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge (\neg Q \vee R)) \right]$$

$$\neg \left[((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)) \right]$$

$$\neg \left[((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \wedge \neg ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)) \right]$$

$$\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg (\neg P \vee \neg R) \wedge \neg (P \wedge \neg Q) \wedge \neg (P \wedge R)$$

$$\underline{((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))} \wedge \underline{\neg (\neg P \vee Q)} \wedge \underline{\neg (\neg P \vee \neg R)}$$



2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

(a) $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$

(b) $\exists x. \forall y. P(x, y) \rightarrow \forall y. \exists x. P(x, y)$

(c) $\exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))$

b) $\neg (\exists x. \forall y. P(x, y) \rightarrow \forall y. \exists x. P(x, y))$
 $\neg (\neg (\exists x. \forall y. P(x, y)) \vee \forall y. \exists x. P(x, y))$
 $\neg (\neg (\forall y. P(z, y) \vee P(x, f(x)))$
 $\neg (\neg \forall y. P(z, y) \wedge \neg P(x, f(x)))$
 $\neg \forall y. P(z, y) \vee \neg \neg P(x, f(x))$

$\forall y. P(z, y) \vee P(x, f(x))$

?

2. Prove os seguintes teoremas utilizando o método da Resolução (lembre-se de negar o teorema):

- (a) $(P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R))$
- (b) $\exists x. \forall y. P(x, y) \rightarrow \forall y. \exists x. P(x, y)$
- (c) $\exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))$

$$\begin{aligned}
 & c) \neg (\exists x. P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x)) \\
 \neg & (\neg (\exists x. P(x) \wedge Q(x)) \vee (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))) \\
 \neg & ((\neg \exists x. P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))) \\
 \neg & ((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x))) \\
 \neg & (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg (\exists x. P(x) \wedge \exists x. Q(x)) \\
 & (\underline{P(x) \wedge Q(x)}) \wedge (\underline{\neg P(x)} \wedge \underline{\neg Q(x)})
 \end{aligned}$$

4) Consulta: $\text{localE}(\text{gravata}, \text{trilha})$
[G] [T]

- Axiomas

$\text{local}(\text{gravata})$

$\text{tipo}(\text{gravata}, \text{trilha})$

- Forma Cláusula

$(\text{local}(x) \wedge \text{tipo}(x, y)) \rightarrow \text{localE}(x, y)$

$\hookrightarrow (\text{local}(x) \wedge \text{tipo}(x, y)) \vee \text{localE}(x, y)$

$\omega = \text{localE}(x, y)$

$\neg \underline{\text{localE}(G, T)} \mid \neg (\text{local}(G) \wedge \text{tipo}(G, T)) \vee \underline{\text{localE}(G, T)}$

$\neg (\text{local}(G) \wedge \text{tipo}(G, T))$

$\neg \underline{\text{local}(G)} \vee \neg \underline{\text{tipo}(G, T)} \mid \underline{\text{local}(G)}$

$\neg \underline{\text{tipo}(G, T)} \mid \underline{\text{tipo}(G, T)}$

□