

Теорія інформації та кодування

Лекція 6

Кодування сигналів. Методи оптимального кодування. Метод Шеннона-Фано

Доцент, к.т.н. Колісник М.О.

Кафедра комп'ютерних систем, мереж і кібербезпеки НАУ ХАІ

1

У чому полягає ідея першої теореми Шеннона?

При будь-якій продуктивності джерела повідомлень, меншій пропускної спроможності каналу, існує спосіб кодування, що дозволяє передавати по каналу всі повідомлення, що виробляються джерелом.

Важливе зауваження.

Мінімальна середня кількість елементів на виході кодуючого пристрою, що відповідає одному символу дискретного повідомлення, можна зробити як завгодно близьким до максимальної ентропії джерела.

Оптимальне (ефективне) кодування (1)

Визначення.

Кодування, яке здійснює видалення або зменшення надмірності із закодованих повідомлень, називається **ефективним**.

Основними вимогами до ефективного коду є:

- однозначність декодування, тобто кожному символу кодованого повідомлення має відповідати своя кодова комбінація та для всіх символів комбінації повинні бути різні;
- в середньому на один символ повідомлення має припадати мінімальна кількість елементів кодової комбінації ефективного коду;
- жодна коротша комбінація ефективного коду не повинна бути початком іншої, довшої комбінації.

Оптимальне (ефективне) кодування (2)

Якщо елемент повідомлення x_i представлений кодовою послідовністю символів, що складається з $l(K(x_i))$ символів, то середня кількість символів $l_{cp}(K(x_i))$ у кодовій послідовності, що припадає на один елемент, так само:

$$l_{cp}\{K(x_i)\} = \sum p(x_i) l\{K(x_i)\}$$

Максимальна ентропія кодової послідовності, що припадає на один символ, дорівнює $\log m$, де m — число різних кодових символів.

$$H_{\max} = \log m$$

Оптимальне (ефективне) кодування (3)

Ентропія кодової послідовності $K(x_i)$, що припадає в середньому на одну комбінацію (відповідну елементу повідомлення):

$$l_{cp} \{K(x_i)\} * H(Y) \leq l_{cp} \{K(x_i)\} * H_{\max}(Y) == \sum p(x_i) l\{K(x_i)\} * \log m$$

Основна вимога, що висувається до будь-якого коду, полягає в можливості однозначного декодування кодової послідовності, що призводить до умови

$$l_{cp} \{K(x_i)\} * H(Y) = H(X)$$

$$l_{cp} \{K(x_i)\} = \frac{H(X)}{H(Y)} \geq \frac{H(X)}{H_{\max}(Y)} = \frac{1}{\log m} \sum p(x_i) \log \frac{1}{p(x_i)}$$

Оптимальне (ефективне) кодування (4)

Надмірністю ефективного коду називається показник, що визначається виразом

$$D_k = \frac{l_{cp}\{K(X)\} - l_{\min}\{K(X)\}}{l_{cp}\{K(X)\}} = \frac{\sum_{i=1}^n p(x_i)l\{K(x_i)\} - H(X)}{\sum_{i=1}^n p(x_i)l\{K(x_i)\}}.$$

Оптимальне (ефективне) кодування (5)

Ефективністю ефективного коду називається показник η , який визначається виразом

$$\eta = \frac{l_{\min} \{K(X)\}}{l_{cp} \{K(X)\}} = \frac{H(X)}{\sum_{i=1}^n p(x_i) l\{K(x_i)\}}.$$

Задача

Задана матриця імовірностей системи, об'єднаної в одну систему з двох взаємозалежних систем В і А:

$$p(A, B) = \begin{vmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Визначити повні умовні ентропії $H(B/A)$ та $H(A/B)$

Рішення

Обчислюємо безумовні імовірності як суми сумісних імовірностей по рядках та стовпцях вихідної матриці:

$$p(A, B) = \begin{array}{c|ccc|c} & 0,3 & 0 & 0 & p(a_i) \\ \hline & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ \hline & 0 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ \hline p(b) & 0,5 & 0,4 & 0,1 & \end{array}$$

Визначаємо умовні ймовірності та складаємо матрицю умовних імовірностей:

$$\begin{aligned} p(a_i/b_j) &= \frac{p(a_i, b_j)}{p(b_j)}; \quad p(a_1/b_1) = \frac{0,3}{0,5} = 0,6; \quad p(a_2/b_1) = \\ &= \frac{0,2}{0,5} = 0,4; \quad p(a_2/b_2) = \frac{0,3}{0,4} = 0,75; \quad p(a_3/b_2) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25; \\ p(a_2/b_3) &= \frac{0,1}{0,1} = 1; \quad p(a_3/b_1) = p(a_1/b_2) = p(a_1/b_3) = p(a_3/b_3) = 0; \end{aligned}$$

$$p(a_i/b_j) = \begin{vmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,75 & 1 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} H(A/B) &= - \sum_i \sum_j p(b_j) p(a_i/b_j) \log_2 p(a_i/b_j) = \\ &= - [0,5 (0,6 \log_2 0,6 + 0,4 \log_2 0,4) + 0,4 (0,75 \log_2 0,75 + \\ &\quad + 0,25 \log_2 0,25) + 0,1 (1 \log_2 1)] \approx 0,485 + 0,324 = \\ &= 0,809 \text{ бум/см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A/B) &= - \sum_i \sum_j p(a_i, b_j) \log_2 p(a_i/b_j) = - (0,3 \log_2 0,6 + \\ &+ 0,2 \log_2 0,4 + 0,3 \log_2 0,75 + 0,1 \log_2 0,25) = 0,3 \cdot 0,736 + 0,2 \cdot 1,321 + \\ &+ 0,3 \cdot 0,415 + 0,1 \cdot 2 \approx 0,809 \text{ бум/см} \end{aligned}$$

Задача. Повідомлення складаються з 5 якісних ознак ($m=5$). Тривалість елементарної послідовності $\tau = 20$ мс. Необхідно визначити: а) чому дорівнює швидкість передачі сигналів; б) чому дорівнює швидкість передачі інформації

Рішення. Швидкість передачі сигналів

$$V = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ символ/сек.}$$

Швидкість передачі інформації

$$C = \frac{H}{\tau} = \frac{\log_2 m}{\tau} = \frac{\log_2 5}{0,02} = \frac{2,32}{0,02} = 116 \text{ бит/сек.}$$

12
Задача. Повідомлення передаються в двійковому коді ($m=2$). Час передачі 0 дорівнює $\tau_0 = 1$ с, тривалість імпульсу, що відповідає 1, $\tau_1 = 5$ с. Необхідно визначити швидкість передачі інформації для випадків: а) коли символи рівноімовірні та незалежні; б) імовірність появи символу 0 $p_0 = 0,37$, імовірність появи символу 1 $p_1 = 0,63$; в) $p_0 = 0,2$; $p_1 = 0,8$; г) $p_0 = 0,02$; $p_1 = 0,98$.

$$C = \frac{H}{\tau_{\text{cp}}} = \frac{\log_2 2}{\frac{1}{2} (\tau_0 + \tau_1)} = \frac{1}{3} \approx 0,33 \text{ бит/сек.}$$

$$\text{б) } C = \frac{H_1}{\tau_{\text{cp}}} = \frac{- \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i}{\sum_{i=1}^m \tau_i p_i} =$$

$$= \frac{-(0,37 \log_2 0,37 + 0,63 \log_2 0,63)}{0,63 \cdot 5 + 0,37 \cdot 1} = 0,27 \text{ бит/сек.}$$

$$\text{в) } C = \frac{H_2}{\tau_{\text{cp}}} = \frac{-(0,8 \log_2 0,8 + 0,2 \log_2 0,2)}{0,8 \cdot 5 + 0,2 \cdot 1} = 0,4 \text{ бит/сек.}$$

$$\text{г) } C = \frac{H_3}{\tau_{\text{cp}}} = \frac{-(0,98 \log_2 0,98 + 0,02 \log_2 0,02)}{0,98 \cdot 5 + 0,02 \cdot 1} \approx 0,3 \text{ бит/сек.}$$

13 Повідомлення складаються з алфавіту a, b, c, d. Імовірність появи літер алфавіту в текстах дорівнює відповідно: $p_a = 0,2$; $p_b = 0,3$; $p_c = 0,4$; $p_d = 0,1$. Необхідно знайти надмірність повідомлень, що складаються з даного алфавіту.

► Рішення: Надмірність

$$D = 1 - \frac{H}{H_{\text{макс}}}.$$

Максимальна ентропія для алфавіту з 4 символів

$$H_{\text{макс}} = \log_2 m = \log_2 4 = 2 \text{ бит/символ.}$$

$$H = - \sum_i p_i \log_2 p_i = - (0,2 \log_2 0,2 + 0,3 \log_2 0,3 + 0,4 \log_2 0,4 + 0,1 \log_2 0,1) = 0,4644 + 0,5211 + 0,5288 + 0,3322 = 1,8465 \text{ бит/символ.}$$

$$D = 1 - \frac{1,8465}{2} = 1 - 0,9232 = 0,07688.$$

Алгоритм К.Шеннона – Р.Фано символів джерела дискретних повідомлень

1. Задати джерело дискретної інформації, описавши його в стандартній формі

$$X = \{x_i : p(x_i); i = \overline{1, n}\}$$

та характеризуючи його значенням ентропії $H(x)$, що обчислюється в силу визначення

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i);$$

2. Скласти таблицю формування ефективного коду символів джерела дискретної інформації (ДДІ), що має $(n+1)$ рядків та не більше $(n+3)$ стовпців;

3. Виписати в порядку спадання значення імовірностей $p(x_i); i = \overline{1, n}$ символи $x_i; i = \overline{1, n}$, розмістивши їх у другому стовпці, а значення імовірностей їх з'явлення на виході ДДІ – в третьому;

4. Провести перший крок процедури ефективного кодування, для чого символи розділити на дві групи з можливо рівними сумами імовірностей символів груп, після чого всім символам верхніх підгруп в розряд коду, що слідує за старшим, в четвертому стовпці вписати одиницю (1), а нижніх груп – нуль (0).

Алгоритм К.Шеннона – Р.Фано символів джерела дискретних повідомлень

5. Провести другий крок процедури ефективного кодування, для чого символи кожної з двох груп, отриманих в п.4 алгоритму, розділити на дві підгрупи з можливо рівними сумами імовірностей символів суміжних підгруп, після чого всім символам підгруп зверху в розряд коду, що слідує за старшим, в п'ятому стовпці вписати одиницю (1), а нижніх груп – нуль (0).

6. Провести кроки процедури ефективного кодування за схемою, наведені вище в п.п.4 та 5 алгоритму, вписуючи кожного разу в наступний розряд коду символів верхніх підпідгруп одиницю (1), а нижніх підпідгруп – нуль (0), причому процедуру проводити до тих пір, поки не будуть закодовані всі символи алфавіту, кількість ітерацій якої в залежності від кількості n символів, що кодуються ДДІ та структури розподілення імовірностей $p(x_i)$ по символам може складати від одиниці до $(n - 1)$.

7. Виписати в останній правий стовець таблиці значення чисел розрядів сформованих ефективних кодів, які представляють собою

довжини $l\{K(x_i)\}$ цих кодів з тим, щоб обчислити середню на символ кількість двійкових розрядів коду за допомогою співвідношення

$$l_{cp}\{K(X)\} = \sum_{i=1}^n p(x_i) l\{K(x_i)\};$$

Алгоритм К.Шеннона – Р.Фано символів джерела дискретних повідомлень

8. Оцінити ступінь близькості $l_{cp}\{K(x)\}$ до ентропії $H(x)$ ДДІ шляхом контролю виконання нерівності

$$\frac{l_{cp}\{K(X)\} - H(X)}{H(X)} \leq \delta_l = (0.05 \div 0.1).$$

Якщо нерівність виконується, то здійснити перехід до п.14 алгоритму, якщо не виконується, то здійснити перехід по п.9 алгоритму.

9. Модифікувати джерело шляхом введення агрегованих символів $\tilde{x}_l = x_i x_j, (i, j = \overline{1, n}; l = \overline{1, n^2})$, що характеризуються імовірностями появи символу $p(\tilde{x}_l)$ на виході модифікованого ДДІ, що дорівнюють $p(\tilde{x}_l) = p(x_i)p(x_j)$

Алгоритм К.Шеннона – Р.Фано символів джерела дискретних повідомлень

10. Здійснити ефективне кодування агрегованих символів модифікованого ДДІ за схемою, представленою п.2-7 алгоритму;

11. Оцінити за допомогою співвідношення середню довжину коду на агрегований символ,

$$\frac{l_{cp}\{K(X)\} - H(X)}{H(X)} \leq \delta_l = (0.05 \div 0.1).$$

з майбутнім перерахунком її шляхом ділення отриманої довжини на кількість елементів в агрегованому символі – блоці;

12. Виконати перевірку виконання нерівності. Якщо нерівність виконується, то здійснити перехід до п.14 алгоритму, якщо ні, то здійснюється перехід до п.13 алгоритму;

13. Здійснити чергову модифікацію ДДІ, збільшивши кількість вхідних символів в блоках на одиницю, і виконати п.2-7 та п.10-12 алгоритму;

Приклад кодування методом Шеннона-Фано

[illegible]

Приклад

За наведеними даними необхідно здійснити ефективне кодування кодом Шеннона-Фано

Символ	Імовірність
a_i	$p(a_i)$
a_1	0,25
a_4	0,25
a_5	0,125
a_7	0,125
a_2	0,0625
a_3	0,0625
a_6	0,0625
a_8	0,0625

Приклад

Приклад. Здійснимо ефективне кодування символів ДДІ, що генерує алфавіт

$$X = \{x_i; i = 1 \div 8: p(x_i) = (2^{-i}), i = 1 \div 7; p(x_8) = p(x_7)\}.$$

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^8 p(x_i) \log_2(p(x_i)) = \sum_{i=1}^8 p(x_i) \log_2(p(x_i)^{-1}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{16}4 + \\ &+ \frac{1}{32}5 + \frac{1}{64}6 + \frac{1}{128}7 + \frac{1}{128}7 = \frac{127}{64} [\text{бит/символ}]; \end{aligned}$$

№ п/п	x_i	$p(x_i)$	$K(x_i)$							$l\{K(x_i)\}$
			1	2	3	4	5	6	7	
1.	x_1	$1/2$	1							1
2.	x_2	$1/4$	0	1						2
3.	x_3	$1/8$	0	0	1					3
4.	x_4	$1/16$	0	0	0	1				4
5.	x_5	$1/32$	0	0	0	0	1			5
6.	x_6	$1/64$	0	0	0	0	0	1		6
7.	x_7	$1/128$	0	0	0	0	0	0	1	7
8.	x_8	$1/128$	0	0	0	0	0	0	0	7

$$l_{cp}\{K(X)\} = \sum_{i=1}^n p(x_i) l\{K(x_i)\} = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{16}4 + \dots + \frac{1}{32}5 + \frac{1}{64}6 + \frac{1}{128}7 +$$

$$+ \frac{1}{128}7 = \frac{127}{64} [\text{бит/символ}];$$

$$\frac{l_{cp}\{K(X)\} - H(X)}{H(X)} = \frac{127/64 - 127/64}{127/64} = 0 \leq \delta_l = (0.05 \div 0.1);$$

Приклад 2

Приклад. Здійснимо ефективне кодування символів ДДІ, що генерує алфавіт

$$X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = 0.9; p(x_2) = 0.1\}$$

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^2 p(x_i) \log_2(p(x_i)) = -0.9(\log_2 0.9) - 0.1(\log_2 0.1) = 0.9(0.14) + 0.1(0.32) = \\ &= 0.47 [\text{бит/символ}] \end{aligned}$$

№ п/п	x_i	$p(x_i)$	$K(x_i)$							$l\{K(x_i)\}$
			1	2	3	4	5	6	7	
1.	x_1	0.9	1							1
2.	x_2	0.1	0							1

$$l_{cp}\{K(X)\} = \sum_{i=1}^n p(x_i) l\{K(x_i)\} = 0.9 \cdot 1 + 0.1 \cdot 1 = 1 [\text{бит/символ}];$$

$$\frac{l_{cp}\{K(X)\} - H(X)}{H(X)} = \frac{1 - 0.47}{0.47} = 2.128 - 1 = 1.128 \gg \delta_l = (0.05 \div 0.1);$$

5. У зв'язку з невиконанням нерівності здійснимо перехід до п.9 алгоритму з метою модифікації вхідного ДДІ шляхом введення мультимплікативно агрегованих символів (блоків) $\tilde{x}_l = x_i x_j, (i, j = \overline{1, n}; l = \overline{1, n^2})$, що характеризуються $p(\tilde{x}_l)$ - імовірностями появи на виході ДДІ, що дорівнюють $p(\tilde{x}_l) = p(x_i)p(x_j)$.

6. Виконаємо п.2-7 алгоритму, заповнюючи таблицю ефективними кодами блоків символів та значеннями їх довжин.

№ п/п	\tilde{x}_i	$p(\tilde{x}_i)$	$K(\tilde{x}_i)$							$l\{K(\tilde{x}_i)\}$
			1	2	3	4	5	6	7	
1.	$\tilde{x}_1 = x_1 x_1$	0.81	1							1
2.	$\tilde{x}_2 = x_1 x_2$	0.09	0	1						2
3.	$\tilde{x}_3 = x_2 x_1$	0.09	0	0	1					3
4.	$\tilde{x}_4 = x_2 x_2$	0.01	0	0	0					3

$$l_{\text{срб}} \{K(\tilde{X})\} = \sum_{i=1}^n p(\tilde{x}_i) l\{K(\tilde{x}_i)\} = 0.81 \cdot 1 + 0.09 \cdot 2 + 0.09 \cdot 3 + 0.01 \cdot 3 = 1.29 [\text{бит/блок}];$$

$$l_{\text{ср}} \{K(X)\} = \frac{l_{\text{срб}} \{K(\tilde{X})\}}{n_{\tilde{\text{б}}}} = \frac{1.29}{2} = 0.645 [\text{бит/символ}];$$

$$\frac{l_{\text{ср}} \{K(X)\} - H(X)}{H(X)} = \frac{0.645 - 0.47}{0.47} = 1.37 - 1 = 0.37 > \delta_l = (0.05 \div 0.1);$$

№ п/п	\tilde{x}_i	$p(\tilde{x}_i)$	$K(\tilde{x}_i)$							$l\{K(\tilde{x}_i)\}$
			1	2	3	4	5	6	7	
1.	$\tilde{x}_1 = x_1 x_1 x_1$	0.729	1							1
2.	$\tilde{x}_2 = x_1 x_1 x_2$	0.081	0	1	1					3
3.	$\tilde{x}_3 = x_1 x_2 x_1$	0.081	0	1	0					3
4.	$\tilde{x}_4 = x_2 x_1 x_1$	0.081	0	0	1					3
5.	$\tilde{x}_1 = x_1 x_2 x_2$	0.009	0	0	0	1	1			5
6.	$\tilde{x}_1 = x_2 x_1 x_2$	0.009	0	0	0	1	0			5
7.	$\tilde{x}_1 = x_2 x_2 x_1$	0.009	0	0	0	0	1			5
8.	$\tilde{x}_1 = x_2 x_2 x_2$	0.001	0	0	0	0	0			5

$$l_{\text{срб}} \{K(\tilde{X})\} = \sum_{i=1}^n p(\tilde{x}_i) l\{K(\tilde{x}_i)\} = 0.729 \cdot 1 + 3 \cdot 0.081 \cdot 3 + 3 \cdot 0.009 \cdot 5 + 0.001 \cdot 5 = \\ = 1.59 [\text{бит/блок}];$$

$$l_{\text{ср}} \{K(X)\} = \frac{l_{\text{срб}} \{K(\tilde{X})\}}{n} = \frac{1.29}{2} = 0.53 [\text{бит/символ}];$$

$$\frac{l_{ep}\{K(X)\} - H(X)}{H(X)} = \frac{0.53 - 0.47}{0.47} = 1.127 - 1 = 0.127 \approx \delta_l = (0.05 \div 0.1);$$

Спрощений варіант кодування кодом Шеннона-Фано

1. Всі символи дискретного джерела розміщуються в порядку зменшення ймовірностей їх появи.
2. Утворений стовпець символів поділяється на дві групи таким чином, щоб сумарні ймовірності кожної групи мало відрізнялися один від друга.
3. Верхня група кодується символом "1", а нижня - "0".
4. Кожна група поділяється на дві підгрупи з близькими сумарними ймовірностями; верхня підгрупа кодується символом "1", а нижня - "0".
5. Процес розподілу та кодування триває доти, доки в кожній підгрупі не виявиться по одному символу повідомлення джерела.
6. Записується код кожного символу джерела; зчитування коду здійснюється зліва направо.

Дякую за увагу!