PER ALTRI APPUNTI CONSULTARE IL SITO:

https://luigi-v.github.io/Appunti_Universita/

CT1: ANALISI COMBINATORIA

Principio fondamentale del calcolo combinatorio:

Si realizzino 2 esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia m esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n esiti possibili. Se sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti, allora vi sono in tutto m*n esiti possibili.

- ***Dimostrazione**:*

Elenchiamo tutti gli esiti

dei due esperimenti:

$$m \text{ righe: } \left\{ \begin{array}{llll} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \quad \leftarrow n \text{ elementi} \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) \quad \leftarrow n \text{ elementi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m,1) & (m,2) & \dots & (m,n) \quad \leftarrow n \text{ elementi} \end{array} \right.$$

dove si intende che l'esito finale è la coppia ordinata (i,j) se il primo esperimento ha prodotto esito i e il secondo ha prodotto esito j. L'insieme dei possibili esiti consiste di m righe, ognuna contenente n elementi. Quindi vi sono in tutto m*n esiti possibili.

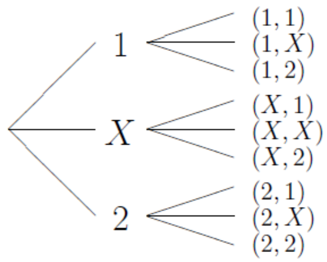
Notiamo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti; in altri termini (i,j) è un risultato distinto da (j,i).

Esempio:

Un giocatore scommette su 2 partite di calcio, con esiti 1, X, 2. In quanti modi può scegliere come scommettere?

Soluzione:

3 × 3 = 9



Principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio

Si realizzino r esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia n1 esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n2 esiti possibili, e ancora che per ognuno degli esiti dei primi 2 esperimenti il terzo esperimento abbia n3 esiti possibili, ecc…

Allora, se sequenze distinte di esiti degli r esperimenti producono esiti finali distinti, allora gli r esperimenti producono in tutto n1 · n2 · · · nr esiti possibili.

Esempio:

Quanti sono i risultati possibili se si lancia a caso una moneta per n volte, se l'ordine `e rilevante?

Soluzione:

Ognuno degli n esperimenti consistenti nel lancio della moneta ha 2 possibili esiti, e quindi i risultati possibili sono 2 × 2×· · ·×2 = 2n.

Ad esempio, per n = 3 si hanno 8 risultati: ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt.

Permutazioni (semplici)

In quanti modi si possono ordinare le lettere a, b, c? Per il *principio fondamentale del calcolo combinatorio* i casi possibili sono 3 × 2 × 1 = 6: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Ciascuno di questi ordinamenti prende il nome di *permutazione*.

Le permutazioni distinte di n oggetti sono $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

0! = 1	10! = 3 628 800
1! = 1	11! = 39 916 800
2! = 2	12! = 479 001 600
3! = 6	13! = 6 227 020 800
4! = 24	14! = 87 178 291 200
5! = 120	15! = 1 307 674 368 000

Permutazioni di oggetti non tutti distinti

Vi sono permutazioni distinte di n oggetti presi da r categorie, dei quali n1 sono identici fra loro, n2 sono identici fra loro e distinti dai precedenti, . . . , nr sono identici fra loro e distinti dai precedenti, con n = n1 + n2 + · · · + nr.

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

Esempio:

Quanti sono gli anagrammi di *S T A T I S T I C A* ?

Soluzione:

Se le 10 lettere da permutare fossero distinte vi sarebbero 10! = 3 628 800 permutazioni possibili. Tuttavia le lettere non sono distinte: se permutiamo le lettere S tra di loro, le lettere T tra di loro, le lettere A tra di loro, e le lettere I tra di loro, si ottiene comunque la stessa parola.

Il numero di anagrammi distinti è quindi: $$\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{2\cdot 6\cdot 2\cdot 2} = 75\,600.$$

Permutazione circolare

Particolare tipo di *permutazioni semplici,* quando gli elementi sono disposti in modo circolare. Dati n elementi distinti, il numero delle permutazioni circolari è dato da: ***(n-1)!***

Si considera un elemento in meno perché non sappiamo il primo e l`ultimo elemento.

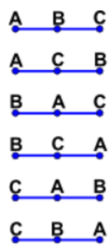
Esempio:

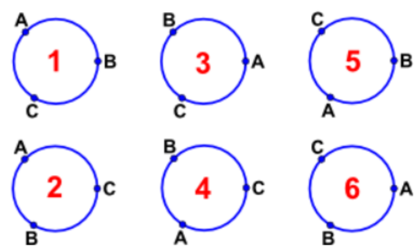
Consideriamo A, B, C. In quanti modi possibili si possono sedere lungo un tavolo rotondo avente 3 sedie?

Soluzione:

I posti, non essendo numerati, in realtà le tavole 1, 4, 6 e le tavole 2, 3, 5 assumono le stesse posizioni.

(3-1)! = 2! = 2 modi possibili





- ## *Disposizioni*

Dati n oggetti distinti, quanti sono i sottoinsiemi di r oggetti che si possono formare. Nel caso di insiemi ordinati le sequenze da formare si dicono *disposizioni semplici* se non sono ammesse ripetizioni.

Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio

– il numero di ***disposizioni semplici*** di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

dove $(n)_r := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ è detto fattoriale discendente.

– il numero di ***disposizioni con ripetizioni*** di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D'_{n,r} = n \cdot n \cdot n \cdots n = n^r.$$

Esempio:

Quante parole di lunghezza 2 si possono formare da un alfabeto di 4 lettere:
(a) se le lettere non possono ripetersi?
(b) se le lettere possono ripetersi?

Soluzione:

(a) Si tratta di disposizioni semplici di n = 4 oggetti raggruppati in r = 2 classi, quindi $D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

(ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc)

(b) Si tratta di disposizioni con ripetizioni di n = 4 oggetti raggruppati in r = 2 classi, quindi $D'_{4,2} = 4^2 = 16$.

(aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd)

- ## *Combinazioni*

Consideriamo il problema di determinare quanti insiemi non ordinati di r oggetti si possono formare a partire da n oggetti distinti.

Nel caso di insiemi non ordinati le sequenze si dicono *combinazioni semplici* se non sono ammesse ripetizioni. Notiamo anche che $\boldsymbol{D_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!}$, in quanto il numero di sequenze ordinate è uguale al numero di sequenze non ordinate per il numero di permutazioni di r oggetti.

Il numero $C_{n,r}$ di ***combinazioni semplici*** di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

Il numero $C'_{n,r}$ di ***combinazioni con ripetizioni*** di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C'_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = \frac{(n+r-1)_r}{r!} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!}$$

Esempio:

Quante combinazioni di 4 oggetti in gruppi di 2 si possono formare
(a) nel caso di combinazioni semplici? (gli oggetti non possono ripetersi)
(b) nel caso di combinazioni con ripetizioni? (gli oggetti possono ripetersi)

Soluzione:

(a) $C_{4,2} = (4)_2/2! = (4 \cdot 3)/2 = 6$ (ab, ac, ad, bc, bd, cd).
(b) $C'_{4,2} = (5)_2/2! = (5 \cdot 4)/2 = 10$ (aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd).

Tabella riepilogativa

	Disposizioni (l'ordine è rilevante)	Combinazioni (l'ordine non è rilevante)
semplici (senza ripetizioni)	$D_{n,k} = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$
composte (con ripetizioni)	$D'_{n,k} = n^k$	$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Tavola (di Tartaglia-Newton) dei coefficienti binomiali

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	somma
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$1 = 2^0$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	$2 = 2^1$
2	1	2	1	0	0	0	0	0	$4 = 2^2$
3	1	3	3	1	0	0	0	0	$8 = 2^3$
4	1	4	6	4	1	0	0	0	$16 = 2^4$
5	1	5	10	10	5	1	0	0	$32 = 2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1	0	$64 = 2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1	$128 = 2^7$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1; \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1;$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n; \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \le r \le n.$$

($\star\star$) Dimostrazione analitica

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)\,(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{r\,(r-1)!\,(n-r-1)!}\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r}\right] \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} = \frac{n}{r\,(n-r)}\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} = \binom{n}{r}$$

Teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}, \qquad n \ge 1$$

CT2: ASSIOMI DELLE PROBABILITÀ

Spazio campionario

Chiameremo *esperimento* qualunque fenomeno il cui risultato non possa essere previsto con certezza. Sebbene l'esito dell'esperimento non sia noto a priori, supponiamo che l'insieme di tutti i possibili esiti lo sia. Definiamo questo insieme *spazio campionario* dell'esperimento e lo denotiamo con ***S***; i suoi elementi sono detti *eventi elementari*.

Esempio:

Se l'esperimento consiste nel lanciare successivamente *n* monete, lo spazio campionario è costituito da $D'_{2,n} = 2^n$ elementi:

$$S = \{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n : \forall i,\ \omega_i \in \{c,t\}\}; \qquad (S \text{ è finito})$$

$$\text{per } n = 3: \qquad S = \{ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt\}$$

Esempio:

Un esperimento consiste nel lanciare ripetutamente una moneta. Consideriamo come esito dell'esperimento il numero d'ordine del lancio in cui compare testa per la prima volta. Lo spazio campionario `e l'insieme degli interi non negativi:

$$S = \{n : n = 1, 2, \ldots\} \qquad (S \text{ è infinito numerabile})$$

Esempio:

Se l'esperimento consiste nel misurare il tempo di vita di un dispositivo elettronico, lo spazio campionario consiste nell'insieme dei numeri reali non negativi:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\} \qquad (S \text{ è infinito non numerabile})$$

Evento

Un sottoinsieme A dello spazio campionario sarà detto *evento*. Un evento è quindi un insieme di possibili esiti di un esperimento. Se l'esito di un esperimento è contenuto in A, diremo che l'evento A si è verificato.

Esempio:

Nell'esperimento del lancio di 2 dadi, l'evento si verifica quando la somma dei 2 dadi è 7.

A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}

Operazioni tra eventi

- Dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cup B$, detto *unione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che stanno in A o in B o in entrambi.
- Analogamente, dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cap B$, detto *intersezione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che sono sia in A che in B. (Talora $A \cap B$ si indica con AB).
- Per ogni evento A definiamo il nuovo evento $\overline{A}$, detto *complementare* di A, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che non sono in A. (Talvolta $\overline{A}$ si indica con A^c).

Esempio:

Nell'esperimento del lancio di 2 monete, con S = {cc, ct, tc, tt}, se:
A = {cc, ct} = {croce al primo lancio},
B = {cc, tt} = {nei due lanci si ha lo stesso risultato},

si ha A ∪ B = {cc, ct, tt}, A ∩ B = {cc}, $\overline{A}$ = {tc, tt}, $\overline{B}$ = {ct, tc}.

- Il risultato di qualunque esperimento appartiene certamente allo spazio campione; pertanto S viene detto *evento certo*.
- Un evento si dice *impossibile*, e si indica con $\emptyset$, se non contiene esiti dell'esperimento. ($\emptyset$ corrisponde all'insieme vuoto).
- Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se $A \cap B = \emptyset$.
- $A_1, A_2, \ldots$ si dicono *a due a due incompatibili* se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.
- Più eventi (in numero finito o infinito) si dicono *necessari* se la loro unione è S.
- Gli eventi $A_1, A_2, \ldots$ costituiscono una *partizione* di S se sono necessari e a due a due incompatibili.

- Se $A_1, A_2, \ldots$ sono eventi, si definiscono l'unione e l'intersezione di questi come

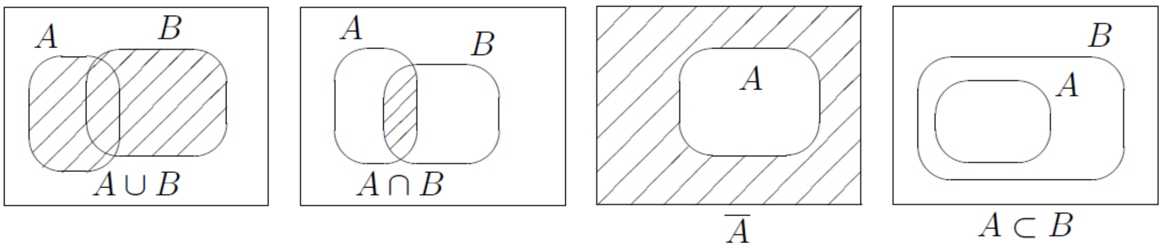
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots;$$

$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in almeno uno degli eventi $A_1, A_2, \ldots$;
$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in tutti gli eventi $A_1, A_2, \ldots$
- Per ogni evento A risulta

$$A \cup \overline{A} = S, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup S = S, \quad A \cap S = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

- Dati due eventi A e B, se tutti gli esiti di A sono anche in B, allora diciamo che A è contenuto in B, oppure che A implica B, e scriviamo $A \subset B$.
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, diciamo che A e B coincidono, e scriviamo $A = B$.
- Si ha: $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- Risulta $A \subset B$ se e solo se $\overline{B} \subset \overline{A}$.

- ***Diagrammi di Venn***



Proprietà

- commutative:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

- associative:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

- distribuitive:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

- formule di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

valide anche per un insieme finito di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

- ***Classe degli Eventi***

Abbiamo già visto che un sottoinsieme A dello spazio campionario è detto evento. Più precisamente, la *classe degli eventi* $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S tale che

(i) $S \in \mathcal{F}$;

(ii) se $A \in \mathcal{F}$ allora $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(iii) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathcal{F}$.

Da tali proprietà segue che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra (sigma-algebra) di eventi, ed inoltre:

(iv) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(v) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in \mathcal{F}$.

- ***Impostazioni frequentista e soggettiva della probabilità***

Supponiamo che un esperimento, il cui spazio campionario è S, venga ripetuto varie volte sotto le medesime condizioni. Per ogni evento E dello spazio campionario S, definiamo n(E) come *frequenza assoluta*, ossia il numero di volte che si `e verificato E nelle prime n ripetizioni dell'esperimento. Notiamo che risulta 0 <= n(E) <= n. Allora P(E), la ***probabilità dell'evento E,*** è definita come

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Cioè, P(E) è definita come limite della *frequenza relativa* n(E)/n, ossia limite della proporzione del numero di volte che l'evento E si verifica.

Secondo l'impostazione soggettiva la probabilità di un evento è il grado di fiducia che un individuo ha nel verificarsi dell'evento.

ω = risultato dell'esperimento

$$\begin{cases} \omega \in A & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 1 \\ \omega \in \overline{A} & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 0 \end{cases}$$

- ***Condizione di coerenza***

Le probabilità degli eventi vanno attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

Sia P(A) la probabilista di un evento A secondo l'impostazione soggettiva. Nel pagare P(A) e nel ricevere 1 oppure 0 si guadagna 1 − P(A) oppure −P(A), quindi almeno −P(A) e al massimo 1 − P(A). Se P(A) fosse negativa si avrebbe certamente un guadagno positivo, mentre se P(A) fosse maggiore di 1 si avrebbe certamente una perdita, e nei due casi la condizione di coerenza `e violata. Si ha quindi 0 <= P(A) <= 1.

- ***Assiomi della probabilità***

Lo *spazio di probabilità* di un esperimento è $(S, \mathcal{F}, P)$, dove S è lo spazio campionario, $\mathcal{F}$ è la classe degli eventi, e $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che per ogni evento A esiste un reale $P(A)$, definito come *probabilità* di A, per cui valgono i seguenti 3 assiomi.

Assioma 1. Per ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Assioma 2.

$$P(S) = 1$$

Assioma 3. (Additività numerabile) Per ogni successione di eventi $A_1, A_2, \ldots$ a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$), si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Proposizione.

$$P(\emptyset) = 0$$

Proposizione. (Additività finita) Per ogni collezione finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di eventi a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Proposizione. Per ogni evento A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Dimostrazione. Dall'Assioma 2 e dalla proprietà di additività finita, con A e $\overline{A}$ eventi incompatibili, segue

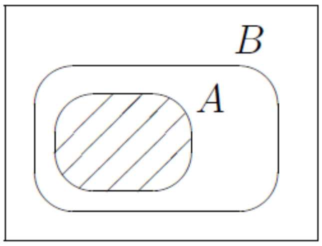
$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

da cui si giunge alla tesi.

Proposizione. Se $A \subset B$, allora

$$P(A) \leq P(B)$$

Dimostrazione. Essendo $A \subset B$, abbiamo che B può essere espresso come $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.



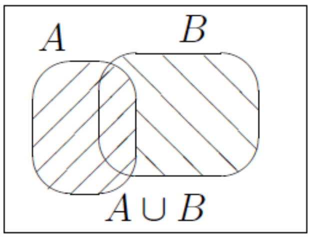
$A \subset B$

Dalla proprietà di additività finita segue
$P(B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$,
da cui si ha $P(B) \geq P(A)$, essendo $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$.

Proposizione.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

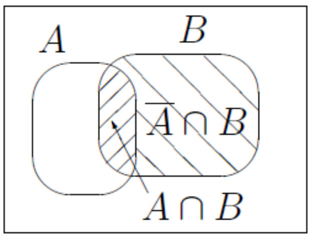
Dimostrazione. Notiamo che $A \cup B$ può essere espresso come unione di due eventi incompatibili A e $\overline{A} \cap B$.
Grazie alla proprietà di additività finita otteniamo



$$P(A \cup B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B).$$

Inoltre, essendo $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ eventi incompatibili, applicando nuovamente la proprietà di additività finita abbiamo

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$



o, equivalentemente,

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

che completa la dimostrazione.

- ***Principio di inclusione/esclusione***

Proposizione.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Dimostrazione. Ricordando che $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$, si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C),$$

e ancora

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Per la legge distributiva si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)),$$

da cui segue

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ossia la tesi.

La probabilità dell'unione di n eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ può esprimersi al seguente modo:

per $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;

per $n = 3$:
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = &\ P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3); \end{aligned}$$

- ***Spazi campionari con esiti equiprobabili***

In molti esperimenti è naturale assumere che tutti gli esiti dello spazio campionario siano equiprobabili, con S insieme finito: $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Allora si ipotizza che

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{N\})$$

il che implica

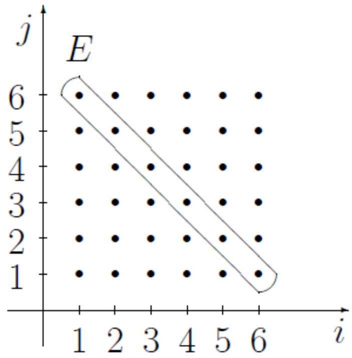
$$P(\{i\}) = \frac{1}{N}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

essendo $1 = P(S) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{N\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \ldots + P(\{N\})$.
Per la proprietà di additività avremo perciò che per ogni evento A

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{numero di elementi di } A}{\text{numero di elementi di } S} \qquad \text{(definizione classica di probabilità)}$$

Se assumiamo che tutti gli esiti di un esperimento siano equiprobabili, allora la probabilità di ogni evento A è uguale alla proporzione degli esiti dello spazio campionario contenuti in A (come rapporto di casi favorevoli su casi possibili).

Esempio. Se si lanciano 2 dadi, qual è la probabilità che la somma dei valori sulla faccia superiore sia uguale a 7?



Soluzione. Assumendo che i 36 possibili esiti siano equiprobabili, poiché ci sono 6 possibili esiti che danno come somma 7,
$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$,
la probabilità desiderata sarà uguale a $6/36$ ossia $1/6$.

- ***Probabilità condizionata***

Definizione. Se $P(F) > 0$, la probabilità condizionata di E dato F è data da

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Tale definizione è giustificata dalle seguenti considerazioni:

Per esperimenti dotati di spazio campionario finito e con esiti equiprobabili, abbiamo visto che per ogni evento A risulta: $P(A) = |A|/|S|$.

Pertanto, volendo esprimere in tale ambito la probabilità condizionata di E dato F, siamo condotti ad usare il rapporto di casi favorevoli al verificarsi di E (sapendo che si è verificato F) su casi possibili (gli elementi di F), cosicché:

$$P(E|F) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{|E \cap F|/|S|}{|F|/|S|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Esempio. Nell'esperimento del lancio di un dado non truccato calcolare le probabilità condizionate di $A = \{1, 2\}$ dati gli eventi $B_1 = \{4, 5, 6\}$, $B_2 = \{1, 5, 6\}$, $B_3 = \{1, 2, 6\}$.
Soluzione. Risulta

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(\emptyset)}{1/2} = 0,$$

$$P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(\{1\})}{1/2} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

$$P(A|B_3) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(\{1, 2\})}{1/2} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Pertanto, sebbene gli eventi B_1, B_2, B_3 siano equiprobabili, la probabilità condizionata di A dato B_k cambia al variare di k, ed in particolare risulta $P(A|B_2) = P(A)$.

Proposizione. (Regola del prodotto) Se $P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}) > 0$, allora

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3|E_2 \cap E_1) \ldots P(E_n|E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1})$$

Dimostrazione. Per la definizione di probabilità condizionata, dal 2º membro si ha

$$P(E_1)\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)} \cdots \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n)}{P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})} = P(E_1 \cap \ldots \cap E_n)$$

con le probabilità a denominatore strettamente positive perché $P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}) > 0$.

Esempio. Da un'urna contenente n biglie numerate da 1 a n si estraggono 3 biglie a caso (senza reinserimento). Assumendo che vi sia concordanza all'estrazione k-esima se in tale estrazione fuoriesce la biglia avente numero k, calcolare la probabilità
(a) di avere 3 concordanze,
(a) di avere concordanza solo nelle prime 2 estrazioni.
Soluzione. Posto $A_k = \{\text{si ha concordanza all'estrazione } k\text{-esima}\}$, dalla legge delle probabilità composte segue che la probabilità richiesta in (a) è data da

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}.$$

Analogamente, la probabilità richiesta in (b) è

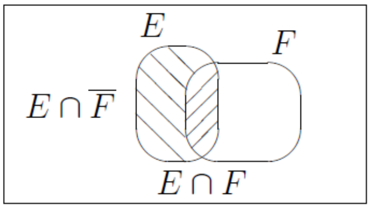
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(\overline{A_3}|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2}.$$

- ***La formula delle alternative***

Proposizione. (Formula delle alternative) Sia F tale che $0 < P(F) < 1$. Se E è un evento qualsiasi risulta

$$P(E) = P(E|F)\, P(F) + P(E|\overline{F})\, P(\overline{F}).$$

Dimostrazione. L'evento E si può esprimere come $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, con $E \cap F$ e $E \cap \overline{F}$ eventi incompatibili. Infatti, se un evento elementare appartiene all'evento E, esso inoltre appartiene o all'evento F o al suo complementare $\overline{F}$, e quindi appartiene o all'evento $E \cap F$ oppure a $E \cap \overline{F}$.



Usando la proprietà di additività finita e la regola del prodotto segue:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) && (E \cap F \text{ e } E \cap \overline{F} \text{ sono incompatibili}) \\ &= P(E|F)\, P(F) + P(E|\overline{F})\, P(\overline{F}), && \text{da cui segue la tesi.} \end{aligned}$$

La formula delle alternative permette di determinare la probabilità di un evento condizionandolo prima alla realizzazione o meno di un altro evento.

Esempio. Da un'urna contenente 5 biglie bianche e 1 biglia rossa, 6 giocatori estraggono a turno 1 biglia a caso, senza reinserimento. Qual è la probabilità che il giocatore k-esimo estragga la biglia rossa?
Soluzione. Posto $A_k = \{\text{il giocatore } k\text{-esimo estrae la biglia rossa}\}$, risulta

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) = 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Analogamente, si ottiene $P(A_k) = \dfrac{1}{6}$ per $k = 1, 2, \ldots, 6$.

Notiamo che risulta $P(A_k|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}) = \dfrac{1}{6-(k-1)}$, per $k = 1, 2, \ldots, 6$.

Osserviamo inoltre che gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sono necessari e a 2 a 2 incompatibili.

Proposizione. (Formula delle alternative, con n alternative) Se gli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono a due a due incompatibili, necessari, e ciascuno con probabilità positiva, e se E è un evento qualsiasi, allora risulta

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i).$$

Dimostrazione. Scrivendo

$$E = E \cap S = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) \qquad \text{(con } E \text{ evento qualsiasi)}$$

e osservando che gli eventi $E \cap F_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sono a due a due incompatibili, per la proprietà di additività finita e per la regola del prodotto si ha infine

$$P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} P\,(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i).$$

Nella formula delle alternative

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)$$

la probabilità di E viene espressa come media ponderata delle $P(E|F_i)$, dove il peso di ciascun termine è uguale alla probabilità dell'evento F_i, rispetto al quale si condiziona.

Dalle ipotesi che gli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono a due a due incompatibili e necessari segue che in un esperimento si realizza uno e uno solo degli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$, che evidentemente costituiscono una partizione dello spazio campionario, e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} P(F_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = P(S) = 1,$$

per la proprietà di additività finita.

Esempio. Un'urna contiene 3 monete; la 1^a è non truccata, la 2^a mostra testa con probabilità p, mentre la 3^a dà testa con probabilità $1-p$, con $0 < p < 1$. Se si sceglie una moneta a caso qual è la probabilità che lanciata mostri testa? Se la moneta lanciata mostra testa, qual è la probabilità che si tratti della 2^a?

Soluzione. Definiamo gli eventi $T = \{\text{esce testa}\}$ e $F_j = \{\text{si sceglie la moneta } j\text{-esima}\}$, $j = 1, 2, 3$. Dalle ipotesi fatte segue

$$P(F_j) = \frac{1}{3} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

e inoltre

$$P(T|F_1) = 0{,}5 \qquad P(T|F_2) = p \qquad P(T|F_3) = 1 - p.$$

La probabilità di avere testa è quindi

$$P(T) = \sum_{j=1}^{3} P(T|F_j)\, P(F_j) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{3} + p \cdot \frac{1}{3} + (1-p) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto,

$$P(F_2|T) = \frac{P(T \cap F_2)}{P(T)} = \frac{P(T|F_2)P(F_2)}{P(T)} = p\,\frac{2}{3}.$$

La formula delle alternative $P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)$ permette di determinare la probabilità di un evento condizionandolo prima alla realizzazione di uno, e uno solo, degli n eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Supponiamo ora che E si sia verificato e di voler determinare quali degli eventi alternativi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ si sia anch'esso verificato.

Proposizione. (Formula di Bayes) Se E è un evento avente probabilità positiva, e $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono eventi a due a due incompatibili, ciascuno avente probabilità positiva, e necessari, allora

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)\, P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dimostrazione. Dalla definizione di probabilità condizionata, dalla regola del prodotto e dalla formula delle alternative segue immediatamente

$$P(F_j|E) = \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)\, P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Verifichiamo che le probabilità della formula di Bayes sommano all'unità; infatti risulta

$$\sum_{j=1}^{n} P(F_j|E) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(E|F_j)\,P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\,P(F_i)} = 1.$$

Esempio. In un gioco vi sono 3 carte identiche per la forma, la prima con entrambe le facce di colore rosso, la seconda con entrambe le facce di colore nero, la terza con una faccia rossa e una nera. Si sceglie a caso una carta e la si appoggia sul tavolo; se la faccia superiore della carta è rossa, qual è la probabilità che l'altra faccia sia nera?

Soluzione. Indichiamo con F_1, F_2 e F_3 gli eventi riferiti alle 3 carte, e poniamo $R = \{$la faccia superiore della carta scelta è rossa$\}$. Dalla formula di Bayes segue

$$P(F_3|R) = \frac{P(R|F_3)\,P(F_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(R|F_i)\,P(F_i)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Notiamo che tale risultato si può ottenere anche come rapporto di casi favorevoli su casi possibili, in quanto una sola delle tre facce rosse ha una faccia nera sul retro.

- ***Eventi indipendenti***

La probabilità condizionata di E dato F non è generalmente uguale a $P(E)$. In altri termini, la conoscenza della realizzazione dell'evento F modifica in generale la possibilità del realizzarsi o meno di E.

Se $P(E|F) = P(E)$ diciamo che E è indipendente da F. Cioè, E è indipendente da F se la conoscenza della realizzazione di F non cambia la probabilità che si realizzi E.

Se $P(F) > 0$, dalla formula $P(E|F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}$ si vede che E è indipendente da F se

$$P(E\cap F) = P(E)\,P(F).$$

Tale formula è simmetrica in E ed F, pertanto se $P(E) > 0$ e $P(F) > 0$, l'evento E è indipendente da F se F è indipendente da E e viceversa.

La seguente definizione include anche i casi in cui $P(E) = 0$ oppure $P(F) = 0$.

Definizione. Due eventi E ed F si dicono *indipendenti* se vale

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Due eventi che non sono indipendenti si dicono *dipendenti*.

Esempio. Uno studente deve sottoporsi a due test. Con probabilità 0,5 supererà il primo test; con probabilità 0,4 supererà il secondo test; con probabilità 0,3 li supererà entrambi. Gli eventi relativi al superamento dei due test sono indipendenti?
Soluzione. Sia B_i l'evento che lo studente superi il test i-esimo, $i = 1, 2$. Risulta

$$P(B_1 \cap B_2) = 0{,}3 \neq 0{,}2 = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = P(B_1)\, P(B_2),$$

quindi gli eventi B_1 e B_2 sono dipendenti.

Proposizione. Se A e B eventi tali che $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora le seguenti uguaglianze sono equivalenti:
(i) $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$,
(ii) $P(A|B) = P(A)$,
(iii) $P(B|A) = P(B)$.
Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\, P(B)}{P(B)} = P(A).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\, P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)\, P(B)}{P(A)} = P(B).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(A)\, P(B).$$

Esercizio. Nell'esperimento che consiste nel lancio di n monete non truccate, sia $T_1 = \{\text{esce testa al primo lancio}\}$, $U = \{\text{esce lo stesso risultato negli } n \text{ lanci}\}$, $A = \{\text{esce testa almeno 1 volta}\}$. Mostrare che T_1 e U sono indipendenti, ed inoltre che T_1 e A non sono indipendenti. Mostrare che A e U sono indipendenti se, e solo se, $n = 1$.

Nota. Se per gli eventi A e B risulta $A \subset B$, allora sussiste indipendenza tra i 2 eventi se e solo se $P(A) = 0$ oppure $P(B) = 1$.

Nota. Se $P(A) = 0$ oppure $P(A) = 1$, allora l'evento A è indipendente da qualsiasi altro evento B.

Proposizione. Se E ed F sono eventi indipendenti, allora E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.
Dimostrazione. Poichè risulta $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, con $E \cap F$ ed $E \cap \overline{F}$ eventi incompatibili, dalla proprietà di additività finita segue

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}).$$

Poiché per ipotesi E ed F sono eventi indipendenti, si ha

$$P(E) = P(E)\, P(F) + P(E \cap \overline{F}),$$

ossia

$$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E)\, P(F) = P(E)\,[1 - P(F)] = P(E)\, P(\overline{F}).$$

Quindi E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.

Notiamo pertanto che se E è indipendente da F, la probabilità che E si realizzi non è modificata dalla realizzazione o meno di F.

Inoltre, se E ed F sono indipendenti, tali sono anche $\overline{E}$ ed F, e gli eventi $\overline{E}$ ed $\overline{F}$.
Nel prossimo esempio vedremo che se E è indipendente da F e da G, allora non è detto che E sia indipendente da $F \cap G$.

Esempio. Consideriamo i seguenti eventi nel lancio di due dadi non truccati: $E = \{$la somma dei dadi è $7\}$, $F = \{$il primo dado dà $4\}$, $G = \{$il secondo dado dà $3\}$. Esaminare l'indipendenza delle coppie di eventi E ed F, E e G, E ed $F \cap G$.
Soluzione. L'evento E è indipendente da F ed anche da G, in quanto

$$P(E \cap F) = P(\{(4,3)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E)\, P(F),$$

$$P(E \cap G) = P(\{(4,3)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E)\, P(G).$$

Inoltre, poiché $P(E|F \cap G) = 1$, l'evento E non è indipendente da $F \cap G$.

Ispirandoci a questo esempio, appare ragionevole definire l'indipendenza di tre eventi non limitandosi a richiedere l'indipendenza delle 3 possibili coppie, ma imponendo anche una condizione che coinvolga complessivamente i 3 eventi.

Definizione. Tre eventi E, F, G si dicono indipendenti se

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\,P(F)\,P(G)$$

$$P(E \cap F) = P(E)\,P(F)$$

$$P(E \cap G) = P(E)\,P(G)$$

$$P(F \cap G) = P(F)\,P(G)$$

Si noti che se E, F, G sono indipendenti, allora E è indipendente da ogni evento formato a partire da F e G. Ad esempio E è indipendente da $F \cup G$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
P(E \cap (F \cup G)) &= P((E \cap F) \cup (E \cap G)) \\
&= P(E \cap F) + P(E \cap G) - P(E \cap F \cap G) \\
&= P(E)\,P(F) + P(E)\,P(G) - P(E)\,P(F \cap G) \\
&= P(E)\,[P(F) + P(G) - P(F \cap G)] \\
&= P(E)\,P(F \cup G).
\end{aligned}$$