PER ALTRI APPUNTI CONSULTARE IL SITO:

https://luigi-v.github.io/Appunti_Universita/

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio:

Si realizzino 2 esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia ***m*** esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia ***n*** esiti possibili. Se sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti, allora vi sono in tutto ***m*n*** esiti possibili.

Principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio:

Si realizzino r esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia n_1 esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n_2 esiti possibili, e ancora che per ognuno degli esiti dei primi 2 esperimenti il terzo esperimento abbia n_3 esiti possibili, ecc. Allora, se sequenze distinte di esiti degli ***r*** esperimenti producono esiti finali distinti, allora gli r esperimenti producono in tutto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ esiti possibili.

n = numero di oggetti k = numero di posti	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione r di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • conta l'ordine	$P_n = n!$	$P^r_n = \dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}$
Disposizioni • $n \neq k$ • conta l'ordine	$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $n > k$	$D^r_{n,k} = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • non conta l'ordine	$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $n > k$	$C^r_{n,k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Tavola (di Tartaglia-Newton) dei coefficienti binomiali

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	somma
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$1 = 2^0$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	$2 = 2^1$
2	1	2	1	0	0	0	0	0	$4 = 2^2$
3	1	3	3	1	0	0	0	0	$8 = 2^3$
4	1	4	6	4	1	0	0	0	$16 = 2^4$
5	1	5	10	10	5	1	0	0	$32 = 2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1	0	$64 = 2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1	$128 = 2^7$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1; \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1;$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n; \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Spazio campionario ed eventi:

Chiameremo ***esperimento*** qualunque fenomeno il cui risultato non possa essere previsto con certezza. Sebbene l'esito dell'esperimento non sia noto a priori, supponiamo che l'insieme di tutti i possibili esiti lo sia. Definiamo questo insieme ***spazio campionario*** dell'esperimento e lo denotiamo con ***S***, i suoi elementi sono detti ***eventi elementari***.

Un sottoinsieme ***A*** dello spazio campionario sarà detto ***evento***. Un evento è quindi un insieme di possibili esiti di un esperimento. Se l'esito di un esperimento è contenuto in ***A***, diremo che l'evento ***A*** si è verificato.

Operazioni tra eventi:

- Dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cup B$, detto *unione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che stanno in A o in B o in entrambi.
- Analogamente, dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cap B$, detto *intersezione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che sono sia in A che in B. (Talora $A \cap B$ si indica con AB).
- Per ogni evento A definiamo il nuovo evento $\overline{A}$, detto *complementare* di A, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che non sono in A. (Talvolta $\overline{A}$ si indica con A^c).

- Il risultato di qualunque esperimento appartiene certamente allo spazio campione; pertanto S viene detto *evento certo*.
- Un evento si dice *impossibile*, e si indica con $\emptyset$, se non contiene esiti dell'esperimento. ($\emptyset$ corrisponde all'insieme vuoto).
- Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se $A \cap B = \emptyset$.
- $A_1, A_2, \ldots$ si dicono *a due a due incompatibili* se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.
- Più eventi (in numero finito o infinito) si dicono *necessari* se la loro unione è S.
- Gli eventi $A_1, A_2, \ldots$ costituiscono una *partizione* di S se sono necessari e a due a due incompatibili.

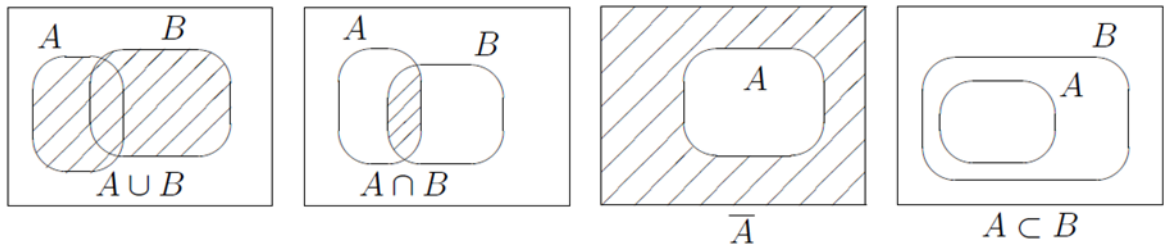
- Se $A_1, A_2, \ldots$ sono eventi, si definiscono l'unione e l'intersezione di questi come

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots;$$

$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in almeno uno degli eventi $A_1, A_2, \ldots$;
$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in tutti gli eventi $A_1, A_2, \ldots$
- Per ogni evento A risulta

$$A \cup \overline{A} = S, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup S = S, \quad A \cap S = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

- Dati due eventi A e B, se tutti gli esiti di A sono anche in B, allora diciamo che A è contenuto in B, oppure che A implica B, e scriviamo $A \subset B$.
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, diciamo che A e B coincidono, e scriviamo $A = B$.
- Si ha: $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- Risulta $A \subset B$ se e solo se $\overline{B} \subset \overline{A}$.



Proprietà

- commutative:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

- associative:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

- distribuitive:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

- formule di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

valide anche per un insieme finito di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

La classe degli eventi:

Abbiamo già visto che un sottoinsieme A dello spazio campionario è detto evento. Più precisamente, la *classe degli eventi* $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S tale che

(i) $S \in \mathcal{F}$;

(ii) se $A \in \mathcal{F}$ allora $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(iii) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathcal{F}$.

Da tali proprietà segue che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra (sigma-algebra) di eventi, ed inoltre:

(iv) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(v) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in \mathcal{F}$.

Impostazioni frequentista e soggettiva della probabilità:

Supponiamo che un esperimento, il cui spazio campionario è S, venga ripetuto varie volte sotto le medesime condizioni. Per ogni evento E dello spazio campionario S, definiamo n(E) come frequenza assoluta, ossia il numero di volte che si `e verificato E nelle prime n ripetizioni dell'esperimento.
Notiamo che risulta 0 <= n(E) <= n. Allora P(E), la probabilità dell'evento E, è definita come:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Cioè, P(E) è definita come limite della frequenza relativa n(E)/n, ossia limite della proporzione del numero di volte che l'evento E si verifica.

Secondo l'impostazione soggettiva la probabilità di un evento è il grado di fiducia che un individuo ha nel verificarsi dell'evento.

ω = risultato dell'esperimento

$$\begin{cases} \omega \in A & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 1 \\ \omega \in \overline{A} & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 0 \end{cases}$$

Condizione di coerenza:

Le probabilità degli eventi vanno attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

Sia P(A) la probabilista di un evento A secondo l'impostazione soggettiva. Nel pagare P(A) e nel ricevere 1 oppure 0 si guadagna 1 − P(A) oppure −P(A), quindi almeno −P(A) e al massimo 1 − P(A). Se P(A) fosse negativa si avrebbe certamente un guadagno positivo, mentre se P(A) fosse maggiore di 1 si avrebbe certamente una perdita, e nei due casi la condizione di coerenza `e violata. Si ha quindi 0 <= P(A) <= 1.

Assiomi della probabilità:

Lo *spazio di probabilità* di un esperimento è $(S, \mathcal{F}, P)$, dove S è lo spazio campionario, $\mathcal{F}$ è la classe degli eventi, e $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che per ogni evento A esiste un reale $P(A)$, definito come *probabilità* di A, per cui valgono i seguenti 3 assiomi.

Assioma 1. Per ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Assioma 2.

$$P(S) = 1$$

Assioma 3. (Additività numerabile) Per ogni successione di eventi $A_1, A_2, \ldots$ a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$), si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Proposizione.

$$P(\emptyset) = 0$$

Proposizione. (Additività finita) Per ogni collezione finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di eventi a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Proposizione. Per ogni evento A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Dimostrazione. Dall'Assioma 2 e dalla proprietà di additività finita, con A e $\overline{A}$ eventi incompatibili, segue

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

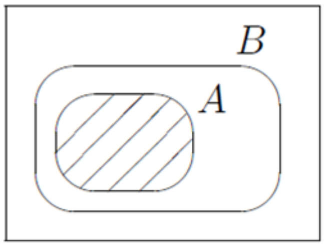
da cui si giunge alla tesi.

Proposizione. Se $A \subset B$, allora

$$P(A) \leq P(B)$$

Dimostrazione. Essendo $A \subset B$, abbiamo che B può essere espresso come $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

Dalla proprietà di additività finita segue
$P(B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$,
da cui si ha $P(B) \geq P(A)$, essendo $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$.



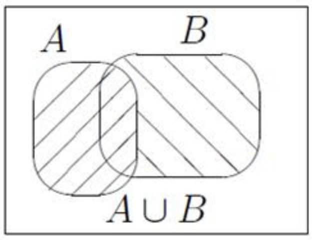
$A \subset B$

Proposizione.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dimostrazione. Notiamo che $A \cup B$ può essere espresso come unione di due eventi incompatibili A e $\overline{A} \cap B$.
Grazie alla proprietà di additività finita otteniamo

$$P(A \cup B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B).$$



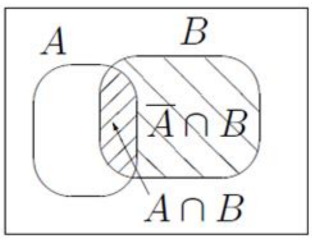
Inoltre, essendo $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ eventi incompatibili, applicando nuovamente la proprietà di additività finita abbiamo

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

o, equivalentemente,

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

che completa la dimostrazione.



Principio di inclusione/esclusione:

Proposizione.

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Dimostrazione. Ricordando che $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$, si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C),$$

e ancora

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Per la legge distributiva si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)),$$

da cui segue

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ossia la tesi.

La probabilità dell'unione di n eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ può esprimersi al seguente modo:

per $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;

per $n = 3$:
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3); \end{aligned}$$

Spazi campionari con esiti equiprobabili:

In molti esperimenti è naturale assumere che tutti gli esiti dello spazio campionario siano equiprobabili, con S insieme finito: $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Allora si ipotizza che

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{N\})$$

il che implica

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

essendo $1 = P(S) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{N\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \ldots + P(\{N\})$.
Per la proprietà di additività avremo perciò che per ogni evento A

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{numero di elementi di } A}{\text{numero di elementi di } S} \qquad \text{(definizione classica di probabilità)}$$

Se assumiamo che tutti gli esiti di un esperimento siano equiprobabili, allora la probabilità di ogni evento A è uguale alla proporzione degli esiti dello spazio campionario contenuti in A (come rapporto di casi favorevoli su casi possibili).

Probabilità condizionata:

Definizione. Se $P(F) > 0$, la probabilità condizionata di E dato F è data da

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Tale definizione è giustificata dalle seguenti considerazioni:

Per esperimenti dotati di spazio campionario finito e con esiti equiprobabili, abbiamo visto che per ogni evento A risulta: $P(A) = |A|/|S|$.

Pertanto, volendo esprimere in tale ambito la probabilità condizionata di E dato F, siamo condotti ad usare il rapporto di casi favorevoli al verificarsi di E (sapendo che si è verificato F) su casi possibili (gli elementi di F), cosicché:

$$P(E|F) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{|E \cap F|/|S|}{|F|/|S|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Proposizione. (Regola del prodotto) Se $P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}) > 0$, allora

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3|E_2 \cap E_1) \ldots P(E_n|E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1})$$

Dimostrazione. Per la definizione di probabilità condizionata, dal 2° membro si ha

$$P(E_1)\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)} \cdots \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n)}{P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})} = P(E_1 \cap \ldots \cap E_n)$$

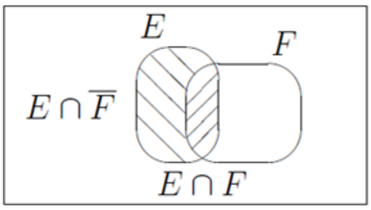
con le probabilità a denominatore strettamente positive perché $P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}) > 0$.

Formula delle alternative:

Proposizione. (Formula delle alternative) Sia F tale che $0 < P(F) < 1$. Se E è un evento qualsiasi risulta

$$P(E) = P(E|F)\, P(F) + P(E|\overline{F})\, P(\overline{F}).$$

Dimostrazione. L'evento E si può esprimere come $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, con $E \cap F$ e $E \cap \overline{F}$ eventi incompatibili. Infatti, se un evento elementare appartiene all'evento E, esso inoltre appartiene o all'evento F o al suo complementare $\overline{F}$, e quindi appartiene o all'evento $E \cap F$ oppure a $E \cap \overline{F}$.



Usando la proprietà di additività finita e la regola del prodotto segue:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) && (E \cap F \text{ e } E \cap \overline{F} \text{ sono incompatibili}) \\ &= P(E|F)\, P(F) + P(E|\overline{F})\, P(\overline{F}), && \text{da cui segue la tesi.} \end{aligned}$$

Proposizione. (Formula delle alternative, con n alternative) Se gli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono a due a due incompatibili, necessari, e ciascuno con probabilità positiva, e se E è un evento qualsiasi, allora risulta

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i).$$

Dimostrazione. Scrivendo

$$E = E \cap S = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) \qquad \text{(con } E \text{ evento qualsiasi)}$$

e osservando che gli eventi $E \cap F_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sono a due a due incompatibili, per la proprietà di additività finita e per la regola del prodotto si ha infine

$$P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(E \cap F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i).$$

Nella formula delle alternative

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)$$

la probabilità di E viene espressa come media ponderata delle $P(E|F_i)$, dove il peso di ciascun termine è uguale alla probabilità dell'evento F_i, rispetto al quale si condiziona.

Dalle ipotesi che gli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono a due a due incompatibili e necessari segue che in un esperimento si realizza uno e uno solo degli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$, che evidentemente costituiscono una partizione dello spazio campionario, e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} P(F_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = P(S) = 1,$$

per la proprietà di additività finita.

La formula delle alternative $P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)$ permette di determinare la probabilità di un evento condizionandolo prima alla realizzazione di uno, e uno solo, degli n eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Supponiamo ora che E si sia verificato e di voler determinare quali degli eventi alternativi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ si sia anch'esso verificato.

Proposizione. (Formula di Bayes) Se E è un evento avente probabilità positiva, e $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono eventi a due a due incompatibili, ciascuno avente probabilità positiva, e necessari, allora

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)\, P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dimostrazione. Dalla definizione di probabilità condizionata, dalla regola del prodotto e dalla formula delle alternative segue immediatamente

$$P(F_j|E) = \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)\, P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Eventi indipendenti:

La probabilità condizionata di E dato F non è generalmente uguale a $P(E)$. In altri termini, la conoscenza della realizzazione dell'evento F modifica in generale la possibilità del realizzarsi o meno di E.

Se $P(E|F) = P(E)$ diciamo che E è indipendente da F. Cioè, E è indipendente da F se la conoscenza della realizzazione di F non cambia la probabilità che si realizzi E.

Se $P(F) > 0$, dalla formula $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$ si vede che E è indipendente da F se

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Tale formula è simmetrica in E ed F, pertanto se $P(E) > 0$ e $P(F) > 0$, l'evento E è indipendente da F se F è indipendente da E e viceversa.

La seguente definizione include anche i casi in cui $P(E) = 0$ oppure $P(F) = 0$.

Definizione. Due eventi E ed F si dicono *indipendenti* se vale

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Due eventi che non sono indipendenti si dicono *dipendenti*.

Proposizione. Se A e B eventi tali che $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora le seguenti uguaglianze sono equivalenti:
(i) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$,
(ii) $P(A|B) = P(A)$,
(iii) $P(B|A) = P(B)$.
Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(A)} = P(B).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(A)\,P(B).$$

Proposizione. Se E ed F sono eventi indipendenti, allora E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.
Dimostrazione. Poichè risulta $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, con $E \cap F$ ed $E \cap \overline{F}$ eventi incompatibili, dalla proprietà di additività finita segue

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}).$$

Poiché per ipotesi E ed F sono eventi indipendenti, si ha

$$P(E) = P(E)\,P(F) + P(E \cap \overline{F}),$$

ossia

$$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E)\,P(F) = P(E)\,[1 - P(F)] = P(E)\,P(\overline{F}).$$

Quindi E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.

Notiamo pertanto che se E è indipendente da F, la probabilità che E si realizzi non è modificata dalla realizzazione o meno di F.

Inoltre, se E ed F sono indipendenti, tali sono anche $\overline{E}$ ed F, e gli eventi $\overline{E}$ ed $\overline{F}$.

Definizione. Tre eventi E, F, G si dicono indipendenti se

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\, P(F)\, P(G)$$

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$$

$$P(E \cap G) = P(E)\, P(G)$$

$$P(F \cap G) = P(F)\, P(G)$$

Si noti che se E, F, G sono indipendenti, allora E è indipendente da ogni evento formato a partire da F e G. Ad esempio E è indipendente da $F \cup G$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} P(E \cap (F \cup G)) &= P((E \cap F) \cup (E \cap G)) \\ &= P(E \cap F) + P(E \cap G) - P(E \cap F \cap G) \\ &= P(E)\, P(F) + P(E)\, P(G) - P(E)\, P(F \cap G) \\ &= P(E)\, [P(F) + P(G) - P(F \cap G)] \\ &= P(E)\, P(F \cup G). \end{aligned}$$

Definizione. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ si dicono indipendenti se per ogni sottoinsieme $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r}$, $2 \leq r \leq n$, di questi eventi si ha

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1})\, P(E_{i_2})\, \ldots\, P(E_{i_r}).$$

Il numero di uguaglianze coinvolte nell'indipendenza di n eventi è pari al numero di sottoinsiemi di cardinalità $r = 2, 3, \ldots, n$ di un insieme di n elementi, ossia:

$$\sum_{r=2}^{n} \binom{n}{r} = 2^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1.$$

Definizione. Gli eventi di una successione $E_1, E_2, \ldots$ si dicono indipendenti se ogni sottoinsieme finito di essi $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r}$, $r \geq 2$, è formato da eventi indipendenti.

Notiamo che se gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono indipendenti, allora ogni sequenza di eventi ottenuta sostituendo qualche evento E_i con l'evento complementare $\overline{E}_i$ è ancora costituita da eventi indipendenti.

Alcuni esperimenti talvolta consistono nell'effettuare una successione di sub-esperimenti identici, ripetuti nelle stesse condizioni, ai quali si dà il nome di *prove*.

Ad esempio, nel lancio ripetuto di una moneta, ogni lancio corrisponde ad una prova.

Talora è ragionevole supporre che gli esiti di ogni gruppo di prove non abbiano effetti sugli esiti delle altre prove. In tal caso diciamo che le prove sono indipendenti. Ne segue che la successione

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

costituisce un insieme di eventi indipendenti, dove E_i dipende esclusivamente dall'esito dell'i-esima prova.

P(·|F) è una probabilità

Vedremo ora che la probabilità condizionata soddisfa i tre assiomi della probabilità.

Proposizione. Sia F un evento tale che $P(F) > 0$; allora la probabilità condizionata da F è una funzione $P(\cdot\,|F)\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tale che

(a) $0 \leq P(A|F) \leq 1$ per ogni evento A;

(b) $P(S|F) = 1$;

(c) per ogni successione di eventi a due a due incompatibili $A_1, A_2, \ldots$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F).$$

Dimostrazione. (a) Occorre mostrare che $0 \leq P(A \cap F)/P(F) \leq 1$. La prima disuguaglianza è ovvia, mentre la seconda discende dal fatto che $A \cap F \subset F$, da cui segue $P(A \cap F) \leq P(F)$.

(b) Si ha

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

(c) Risulta

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|F\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap F\right)\frac{1}{P(F)} = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap F)\right)\frac{1}{P(F)}.$$

Essendo gli eventi $A_i \cap F$ incompatibili, per la proprietà di additività numerabile si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap F)\frac{1}{P(F)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F),$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Poiché la probabilità condizionata $P(\cdot\,|F)$ soddisfa gli assiomi della probabilità, ad essa si applicano le proposizioni sulla probabilità dimostrate in precedenza; ad esempio

$$P(A \cup B|F) = P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F).$$

Proposizione. Siano F e B eventi tali che $P(F) > 0$, $P(B \cap F) > 0$ e $P(\overline{B} \cap F) > 0$; allora

$$P(A|F) = P(A|B \cap F)\, P(B|F) + P(A|\overline{B} \cap F)\, P(\overline{B}|F).$$

Dimostrazione. Dalle proprietà della probabilità condizionata segue

$$\begin{aligned} P(A|F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A \cap B \cap F)}{P(F)} + \frac{P(A \cap \overline{B} \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(A|B \cap F)\, P(B \cap F)}{P(F)} + \frac{P(A|\overline{B} \cap F)\, P(\overline{B} \cap F)}{P(F)} \\ &= P(A|B \cap F)\, P(B|F) + P(A|\overline{B} \cap F)\, P(\overline{B}|F). \end{aligned}$$

Notiamo che la formula appena dimostrata è un'estensione di quella delle alternative

$$P(A) = P(A|B)\, P(B) + P(A|\overline{B})\, P(\overline{B}).$$

Un concetto importante della teoria della probabilità è quello della indipendenza condizionata di eventi.

Diciamo che due eventi A e B sono *condizionatamente indipendenti* dato F se

$$P(A|B \cap F) = P(A|F)$$

o, equivalentemente, se

$$P(A \cap B|F) = P(A|F)\, P(B|F).$$

La nozione di indipendenza condizionata si può facilmente estendere a più di 2 eventi.

Si noti che l'indipendenza di eventi non implica l'indipendenza condizionata, e viceversa.