PER ALTRI APPUNTI CONSULTARE IL SITO:

https://luigi-v.github.io/Appunti_Universita/

Un vettore $\underline{y}$ è **combinazione lineare** dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ scalari tali che:

$\underline{y} = \lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{x}_n$.

Un vettore $\underline{y}$ è **combinazione conica** dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ scalari tali che:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$;
2. $\underline{y} = \lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{x}_n$.

Un vettore $\underline{y}$ è **combinazione convessa** dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ scalari tali che:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$;
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$;
3. $\underline{y} = \lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{x}_n$.

I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ si dicono **linearmente indipendenti** se:

$\lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{x}_n = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ si dicono **linearmente dipendenti** se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ <u>non tutti nulli</u>, tali che:

$\lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{x}_n = \underline{0}$.

Oppure, se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri. $\underline{x}_1^T = (1, 2, 3)$, $\underline{x}_2^T = (-1, 1, -1)$, $\underline{x}_3^T = (0, 3, 2) \Rightarrow \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = \underline{x}_3$.

Un insieme di vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ di dimensione *n* **genera** l'insieme di vettori E^n se ogni vettore in E^n può essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Quindi, E^n è detto ***spazio generato***.

Def. Un insieme $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ in E^n è una **base** di E^n se valgono le due seguenti condizioni:

1. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ generano E^n;
2. se uno solo dei vettori è rimosso, allora i rimanenti *k-1* vettori non generano E^n.

Alternativamente, è possibile utilizzare la seguente proprietà.

Proprietà. Un insieme di vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ in E^n è una base di E^n se e solo se:

1. k = n;
2. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ sono <u>***linearmente indipendenti***</u>. (colonne delle variabili in base)

Def. Il numero di vettori che formano una base per E^n è detto **dimensione** dello spazio E^n.

Per trovare una base per E^2 si devono cercare 2 vettori in E^2 linearmente indipendenti. Siano $\underline{x}_1^T = (1, 0)$, $\underline{x}_2^T = (-1, 3)$, $\underline{x}_3^T = (2, 1)$.

1) Essi generano $\mathbb{R}^2$, anche se essi sono 3 e non 2, possiamo porre $\lambda_3 = 0$, e lavorare solo sui vettori $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$; tramite combinazione lineare di questi due vettori possiamo rappresentare <u>qualsiasi</u> vettore in $\mathbb{R}^2$.
2) Essi non sono una base in $\mathbb{R}^2$ in quanto per esserlo deve avere esattamente 2 vettori linearmente indipendenti, ma in questo caso ne sono 3. Infatti, essi non sono linearmente indipendenti in quanto $\underline{x}_3^T$ può essere espresso come combinazione conica di $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$.
3) $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$ sono, presi singolarmente, una base in $\mathbb{R}^2$, oppure, $\underline{x}_2^T$ e $\underline{x}_3^T$ sono, presi singolarmente, una base in $\mathbb{R}^2$.
5) Sia $\underline{x}_4^T = (1, -3)$. Allora $\underline{x}_2^T$ e $\underline{x}_4^T$ non sono una base in $\mathbb{R}^2$, dato che essi non sono linearmente indipendenti.

Sia *A* una matrice quadrata di *n* righe ed *n* colonne, allora se esiste una matrice quadrata *B* di *n* righe ed *n* colonne tale che *AB* = *I* e *BA* = *I*, allora *B* è detta **matrice inversa** di *A*. Occorre ricordare che:

- l'inversa di una matrice A (se esiste) è unica, ed è indicata con A^{-1};
- se una matrice ammette l'inversa, allora essa è detta matrice *non singolare*;
- una matrice quadrata è non singolare se e solo se le righe sono linearmente indipendenti o se e solo se le colonne sono linearmente indipendenti.

Il **determinante** di una matrice quadrata A è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche, si calcola, fissata una riga *i*, con la formula:

$$\boxed{det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot minor(A_{ij})}$$

dove $minor(A_{ij})$ è il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la *i*-esima riga e la *j*-esima colonna di A.

Il determinante di una matrice A (2x2) si calcola effettuando la differenza tra il prodotto dei termini sulla diagonale principale e il prodotto dei termini sulla diagonale secondaria, cioè $(a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$.

Es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot minor(A_{11}) + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot minor(A_{12}) + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot minor(A_{13}) =$

$= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = = 12.$

Il calcolo del determinante è importante, in quanto:

- se il determinante è diverso da 0, allora la matrice **è invertibile** ed esiste la matrice inversa. Significa che le colonne e le righe di tale matrice sono linearmente indipendenti;
- se il determinante è uguale a 0, allora la matrice non è invertibile.

Una volta calcolato il determinante, si vuole calcolare la matrice inversa A^{-1}. La formula è la seguente, dove il $\boxed{cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot minor(A_{ij})}$:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} cof(A_{11}) & cof(A_{21}) & \cdots & cof(A_{n1}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ cof(A_{1n}) & cof(A_{2n}) & \cdots & cof(A_{nn}) \end{pmatrix}}$$

cioè, il rapporto tra la *matrice trasposta dei cofattori* ed il determinante di A.

Teorema: *Data una qualsiasi matrice, il rango per righe e per colonne coincide.*

Implica che, data una matrice A di *m* righe ed *n* colonne, Rango(A) ≤ min(m, n). Quindi, se rango(A) = min(m, n), allora A è detta matrice *a rango pieno*.

La seguente regola consente di calcolare in modo rapido l'inversa di una matrice *A* 2x2:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}.$$

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con m vincoli ed n variabili in **forma canonica di minimo** (***Teoria della Dualità***):

$$\min z = \underline{c}^T\underline{x}$$
$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha un problema di minimo con valore z che la funzione obiettivo assume nel punto $\underline{x}$, tutti i vincoli sono di maggiore o uguale, ed abbiamo $\underline{x} \geq \underline{0}$.
- $\underline{x}$ è il vettore nx1 delle **variabili decisionali**, dove il numero di tali variabili (n) dipende dal problema;
- $\underline{c}$ è il vettore nx1 dei **coefficienti di costo** della funzione obiettivo, cioè i coefficienti delle variabili $\underline{x}$ all'interno della funzione obiettivo;
- $\underline{b}$ è il vettore mx1 dei **termini noti** dei vincoli, dove il numero di tali vincoli (m) dipende dal problema;
- A è la matrice mxn dei **coefficienti tecnologici** dei vincoli ($A = [a_{ij}]$, i = 1, …, n; j = 1, …, m).

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con m vincoli ed n variabili in **forma standard di minimo**:

$$\min z = \underline{c}^T\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$
$$\underline{x} \geq \underline{0} \quad (2)$$
$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Condizione: $\underline{b} \geq 0$

Questa forma è l'input preteso dal ***Simplesso*** per trovare la soluzione ottima. Il problema deve essere di minimo, tutti i vincoli devono essere di uguaglianza e le variabili decisionali devono essere tutte non-negative, infine, il vettore $\underline{b}$ deve essere sempre maggiore o uguale a 0.
- I valori di $\underline{x}$ che soddisfano i vincoli (1) sono detti **soluzione** del problema del PL;
- i valori di $\underline{x}$ che soddisfano anche i vincoli (2) sono detti **soluzioni ammissibili** del problema di PL.

Si assumono soddisfatte le seguenti ipotesi:
- m < n (più variabili che vincoli)
- m = rango(A).

Il sistema di equazioni lineari (1) può ammettere una soluzione unica se m=n, oppure può ammettere ∞^{n-m} soluzioni se m < n.

Dato un problema di programmazione lineare, un vettore $\underline{x}'$ di $\mathbb{R}^n$:
- **soddisfa** il vincolo $g_i(\underline{x}) \geq b_i$ se $g_i(\underline{x}') \geq b_i$, cioè se andando a sostituire i valori delle componenti di $\underline{x}'$ il vincolo è soddisfatto;
- **viola** il vincolo $g_i(\underline{x}) \geq b_i$ se $g_i(\underline{x}') < b_i$;
- **satura** (o *rende attivo*) il vincolo $g_i(\underline{x}) \geq b_i$ se $g_i(\underline{x}') = b_i$.

Un vettore $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice **soluzione ammissibile** per il problema di PL se e solo se soddisfa tutti i vincoli del problema.
Un problema di programmazione lineare risulta:
1. **Inammissibile** se la regione ammissibile è vuota, ossia $X = \emptyset$.
2. **Illimitato** (inferiormente) se, scelto un qualsiasi scalare k, esiste sempre un punto $\underline{x} \in X$ tale che $f(\underline{x}) < k$. Il valore della soluzione ottima del problema è $-\infty$ se sto minimizzando e $+\infty$ se sto massimizzando; inoltre, se l'ottimo del problema è illimitato, non esiste un punto di ottimo;
3. **Ammettere soluzione ottima finita** se esiste un punto $\underline{x}^* \in X$ tale che $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in X$. La funzione f, nel punto $\underline{x}^*$, è minore o uguale alla stessa funzione in un qualsiasi altro punto della regione. Per quest'ultimo vanno distinti due casi:
   1) quando si ha **unico punto di ottimo**;
   2) quando si hanno **infiniti punti di ottimo**.

Avere ***infiniti punti di ottimo*** è diverso da avere una soluzione ammissibile con valore ***ottimo illimitato***. Infatti, nel primo caso si ha che nella regione ammissibile esistono infiniti punti in cui la funzione assume il valore ottimo; invece, nel secondo caso non esiste un punto di ottimo finito, giacché è $\pm\infty$ a seconda se sto massimizzando o minimizzando.

Def. Un punto $\underline{x}^* \in X$ è un **ottimo globale** per la funzione $f(\underline{x})$ se e solo se: $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in X$.
Quindi, l'ottimo globale indica che, tra gli infiniti punti della regione ammissibile, esso è il punto in cui la funzione assume il valore minimo.
Def. Un punto $\underline{x}' \in X$ è un **ottimo locale** per la funzione $f(\underline{x})$ se e solo se: $f(\underline{x}') \leq f(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in N(\underline{x}', \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.
Quindi, l'ottimo locale indica che, ottenuta una soluzione nel punto $\underline{x}'$, ci sarà un insieme di punti $\underline{x}_i$ (i = 1, 2, …) nell'intorno di $\underline{x}'$ tale che la funzione $f(\underline{x}_i)$ è più grande o al più uguale a $f(\underline{x}')$. Dunque, localmente, quella è la migliore soluzione possibile.

Def. Un insieme X è **convesso** se e solo se, dati due punti $\underline{x}, \underline{y} \in X$, ogni punto $\underline{w}$ generato come loro combinazione convessa ($\underline{w} = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$, con $\lambda \in [0, 1]$) è tale che $\underline{w} \in X$.
Geometricamente, la combinazione convessa di due vettori in $\mathbb{R}^2$ corrisponde ai punti della retta che unisce i vertici dei due vettori.
- L'insieme $X = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}\}$ è un insieme convesso.

DIM. Se $\underline{x}' \in X$, allora $A\underline{x}' = \underline{b}$. Analogamente, se $\underline{x}'' \in X$, allora $A\underline{x}'' = \underline{b}$.
Sia $\underline{w} = \lambda\underline{x}' + (1-\lambda)\underline{x}''$, con $\lambda \in [0, 1]$. Allora $A\underline{w} = \lambda A\underline{x}' + (1-\lambda)A\underline{x}'' = \lambda\underline{b} + (1-\lambda)\underline{b} = \underline{b}$.

Def. Un **poliedro** è l'intersezione di un numero finito di semispazi.
Ciò implica che un poliedro X è un insieme convesso. Un poliedro può essere chiuso e limitato (**politopo**) o illimitato (**poliedro illimitato**).

Def. Una funzione $f(\underline{x})$ si dice **convessa** su insieme X se, presi comunque due punti $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in X$ risulta che:
$f(\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2) \leq \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)f(\underline{x}_2)$, con $\lambda \in [0,1]$.
Teorema (**FUNZIONE CONVESSA**)**.** *Una funzione lineare del tipo $\underline{c}^T\underline{x}$ è una funzione convessa.*
DIM. Dalla definizione di funzione convessa, sostituendo la $f(\underline{x})$ con $\underline{c}^T\underline{x}$ si ha:
- $f(\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2) \rightarrow \underline{c}^T\lambda\underline{x}_1 + \underline{c}^T(1-\lambda)\underline{x}_2$;
- $\lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)f(\underline{x}_2) \rightarrow \lambda\underline{c}^T\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{c}^T\underline{x}_2$.

I due precedenti risultati sono uguali. Poiché $f\big(\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2\big) = \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)f(\underline{x}_2)$, la funzione $\underline{c}^T\underline{x}$ è convessa.

Punti e Direzioni estreme. Teorema della rappresentazione

Def. Un punto di un poliedro X è un **punto estremo** se e solo se non può essere espresso come combinazione convessa STRETTA di altri punti di X.
Geometricamente, questa definizione afferma che se prendiamo due punti qualsiasi in X, il vertice non si trova sulla retta che congiunge i due punti:

$$\underline{w} = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}.$$

Teorema (**PROPRIETÀ DEI PUNTI ESTREMI DI UN POLIEDRO LIMITATO**). Dato un poliedro X non vuoto e limitato con punti estremi $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$, ogni punto $\underline{y} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X, cioè

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underline{x}_j \text{ , con } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \text{ e } \lambda_j \geq 0 \ \forall j=1, \dots, k.$$

Def. Un **raggio** R di vertice $\underline{x}_0$ e di direzione $\underline{d}$ è un insieme di punti della forma $R = \{\underline{x}_0 + \lambda\underline{d} \mid \lambda \geq 0\}$.
Informalmente, $\underline{x}_0 + \lambda\underline{d}$ è la semiretta che parte dal punto $\underline{x}_0$ e si sposta all'infinito lungo il vettore $\underline{d}$.
Def. Dato un poliedro X, il vettore $\underline{d}$ è una **direzione** di X se e solo se, per ogni punto $\underline{x}_0 \in X$, il raggio $\underline{x}_0 + \lambda\underline{d}$ (con $\lambda \geq 0$) appartiene a X.
Di seguito è posto il procedimento algebrico per calcolare le direzioni di un poliedro.
Quindi, le direzioni $\underline{d}$ del poliedro X sono tutti e soli i vettori tali che:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$
$$\underline{d} \geq \underline{0}$$
$$\underline{d} \neq \underline{0}.$$

Il raggio, al variare di λ all'infinito, deve comunque rimanere all'interno della regione, quindi deve soddisfare tutti i vincoli del poliedro.

Def. Un **cono convesso** C è un insieme convesso tale che se $\underline{x} \in C$ allora anche $\lambda\underline{x} \in C$ $\forall \lambda \geq 0$.
Un cono convesso è un insieme convesso che contiene raggi che partono dall'origine, in quanto possiamo scegliere $\lambda = 0$ per azzerare il vettore $\underline{x}$.
Inoltre, possiamo scegliere $0 < \lambda < 1$ per diminuirne il modulo.
Solo alcuni raggi sono sufficienti (detti ***raggi estremi***), perché gli altri sono espressi come combinazione conica di questi.
Def. Una direzione $\underline{d}$ di un poliedro X, è una **direzione estrema** di X se e solo se non è esprimibile come combinazione conica di altre direzioni di X.

Teorema (**DI RAPPRESENTAZIONE DI POLIEDRI**)**:** Dato un poliedro X non vuoto con punti estremi $\underline{x}_i$ (con i = 1, …, k) e direzioni estreme $\underline{d}_j$ (con j = 1, …, t), ogni punto $\underline{x} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione conica delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \underline{d}_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,t$$

Infatti: $\min/\max \underline{c}^T\underline{x} = \min/\max z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\underline{c}^T\underline{x}_i) + \sum_{j=1}^{t} \mu_j(\underline{c}^T\underline{d}_j)$.
Considerando prima $\underline{c}^T\underline{d}_j$ (se stiamo *minimizzando*):
- per ogni j = 1, …, t, se esso è ≥ 0, allora $\mu_j = 0$, il che implica che cancelliamo la seconda sommatoria (cioè, non ha ottimo illimitato);
- se esiste < 0, allora $\mu_j = \infty$, il che implica che la soluzione ottima è $Z^* = -\infty$.
Se eliminiamo la seconda sommatoria, ci concentriamo sulla prima.
Considerando prima $\underline{c}^T\underline{d}_j$ (se stiamo *massimizzando*):
- se esso è > 0, allora $\mu_j = +\infty$, il che implica che la soluzione ottima è $Z^* = +\infty$;
- se esso è ≤ 0, allora $\mu_j = 0$, il che implica che cancelliamo la seconda sommatoria (cioè, non ha ottimo illimitato).
Se eliminiamo la seconda sommatoria, ci concentriamo sulla prima.

Soluzioni di base ammissibili, teorema fondamentale della PL

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con *m* vincoli ed *n* variabili in **forma standard**:
Poiché m = rango(A) ed m < n, si può partizionare A come $\mathbf{A = [A_B \mid A_N]}$, dove:
- A_B è una matrice non singolare mxm ($\det(A_B) \neq 0$, per cui questa matrice è una base di $\mathbb{R}^m$);
- A_N è una matrice mx(n-m).
La matrice A_B è composta da m colonne linearmente indipendenti di A. Tali colonne (viste come vettori) sono quindi una base dello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di A. La matrice A_B è detta **matrice di base**.
In corrispondenza di una scelta di A_B ed A_N si può partizionare anche il vettore delle $\underline{x}$:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{m componenti} \\ \text{n-m componenti} \end{array}$$

Il vettore $\underline{x}_B$ è detto **vettore delle variabili in base** (o "vettore di base").
Il vettore $\underline{x}_N$ è detto **vettore delle variabili fuori base**.

Una scelta importante è porre $x_N = 0$ da cui si ottiene $\boxed{\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}{}_B \underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix}}$, che rappresenta una **soluzione di base**, associata ad una base di $\mathbb{R}^m$.

Se $\underline{x}_B = A^{-1}{}_B \underline{b} \geq \underline{0}$, allora si ottiene una **soluzione di base ammissibile**.

Teorema. Dato $X = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ insieme convesso, dove A è una matrice mxn di rango m (con m < n), $\underline{x}_e$ è un punto estremo di X se e solo se $\underline{x}_e$ è una soluzione di base ammissibile.
Tra le infinite soluzioni del poliedro, si individua una soluzione di base ammissibile perché i vertici del poliedro corrispondono alle soluzioni di base ammissibili. Sono dette **soluzioni degenere** se almeno una variabile $\underline{x}_{Bi}$ in base è uguale a 0.

Teorema (**FONDAMENTALE DELLA PL**)**.** Dato un problema di PL in forma standard, dove A è una matrice mxn con rango(A) = m ed m < n, allora:
1. esiste una soluzione ammissibile ⇔ esiste una soluzione ammissibile di base;
2. esiste una soluzione ottima finita ⇔ esiste una soluzione ottima finita che è anche di base.

Il punto 2 afferma che se esiste all'interno della regione ammissibile un punto di ottimo, allora esisterà anche una soluzione di base ammissibile dove la funzione obiettivo assume il valore ottimo: algoritmicamente, mi devo concentrare *solo sulle soluzioni di base ammissibili del problema*.

Metodo del simplesso: condizioni di ottimalità e di illimitatezza

Consideriamo il problema di PL in Forma Standard

$$\min z = \underline{c}^T\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

$\boxed{\text{Condizione: } \underline{b} \geq 0}$

Data una base B ammissibile, riscriviamo il problema in funzione di B come segue:

$$\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$
$$\underline{x}_B = \overline{\underline{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$
$$\underline{x} \geq \underline{0},$$

dove: $z_0 = \underline{c}^T{}_B \overline{\underline{b}},\ z_j = \underline{c}^T{}_B A^{-1}{}_B \underline{a}_j,\ \overline{\underline{b}} = A^{-1}{}_B \underline{b},\ \underline{y}_j = A^{-1}{}_B \underline{a}_j.$

Teorema (**CONDIZIONE DI OTTIMALITÀ**)**.** Una soluzione di base non degenere di un problema di PL è ottima se e solo se:

1) $\overline{b}_i \geq 0$ (ammissibile); (***vettore delle variabili in base***)
2) $(z_j - c_j) \leq 0\ \forall j \in \mathrm{N}$ (non migliorabile). (***coefficienti di costo ridotto***)

Il **metodo del gradiente** sceglie la variabile fuori base x_k che localmente fa aumentare più rapidamente l'obiettivo:

$$z_j - c_j = \max_{j \in N}\{z_j - c_j\}.$$

Determinata la variabile fuori base x_k da portare in base, si deve scegliere la variabile uscente. Esistono due alternative:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \overline{b}_3 \\ \vdots \\ \overline{b}_r \\ \vdots \\ \overline{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

a) $y_{ik} \leq 0\ \forall i = 1, \dots, m$, si nota che **la soluzione del problema è illimitata** (non esiste un punto di ottimo). In questo caso facendo aumentare x_k il valore di nessuna variabile di base diminuisce: $z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \leq z_0$, per qualsiasi valore di x_k;
b) $y_{rk} > 0\ per\ almeno\ un\ r$, ed in questo caso la soluzione di base non è ottima, e bisogna quindi passare alla base successiva.

INPUT: Problema di PL (in forma standard) e una soluzione di base ammissibile.

1. <u>Test di ottimalità</u>:
Se $z_j - c_j \leq 0\ \forall j \in N$, allora la soluzione corrente è ottima e l'algoritmo termina.
Altrimenti andare al passo 2.

2. <u>Scelta della variabile entrante in base</u>:
Scegliere una variabile fuori base x_k tale che $z_k - c_k > 0$ ed andare al passo 3.

3. <u>Test di illimitatezza</u>:
Se $y_{ik} \leq 0\ \forall i = 1, \dots m$, allora la soluzione del problema è illimitata (non esiste ottimo finito), e l'algoritmo termina.
Altrimenti vai al Passo 4.

4. <u>Scelta della variabile uscente dalla base</u> (Test dei minimi rapporti):
Scegliere la variabile x_r tale che $\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = \min_{i \in B}\left\{\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$.
x_r è la variabile uscente e la variabile entrante x_k assume valore pari a $\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$.

5. <u>Aggiornamento della base</u>:
Aggiornare gli indici delle variabili in base (B) e quelli delle variabili fuori base (N). Tornare al passo 1.

Metodo delle due fasi e Big-M

Utilizzare il **metodo delle due fasi** per costruire "*artificialmente*" la matrice identità; si modifica il sistema dei vincoli come segue,

$$\min \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \quad (1)$$
$$\underline{x} \geq 0 \rightarrow \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \quad (2)$$

con l'aggiunta di una variabile artificiale y_i ad ogni vincolo del sistema. Nel nuovo sistema sarà presente una matrice identità (associata alle y).
Una soluzione ($\underline{x}'$, $\underline{y}'$) del nuovo sistema sarà soluzione anche del sistema di partenza <u>*se e solo*</u> *se* $\underline{y}' = 0$. Per ottenerla si risolve:

$$\min g = \textstyle\sum_{i=1}^m y_i$$
$$A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \quad (1)$$
$$\underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \quad (2).$$

Alla fine della prima fase possono verificarsi due casi, per l'ottimo della funzione obiettivo:
1. $g^* = \sum_{i=1}^m y_i > 0$: una variabile artificiale è maggiore di 0. Questo implica che $A\underline{x} = \underline{b}$ *non ammette soluzione*. Non si passa alla seconda fase;
DIM. Supponiamo per assurdo che $\exists \underline{x}' : A\underline{x}' = \underline{b}$, con $\underline{x}' \geq 0$. Costruito il vettore $\left[\underline{x}', \underline{y}'\right] = \left[\underline{x}', \underline{0}\right]$, notiamo che esso è una soluzione ammissibile. Questo ci consente di costruire una soluzione ammissibile nel nuovo sistema, dove $g^* = 0$, ma questo è assurdo in quanto avevamo supposto $g^* > 0$.
2. $g^* = \sum_{i=1}^m y_i = 0$: $A\underline{x} = \underline{b}$ *ammette soluzione* (a meno di soluzioni degeneri). Si passa alla seconda fase e si risolve il problema iniziale utilizzando la base ottima della prima fase come base iniziale della seconda fase.

Il **metodo del Big-M**, alla funzione obiettivo originale vengono sommate le variabili artificiali *moltiplicate per un coefficiente M* molto grande.

$$\min \underline{c}^T \underline{x} \rightarrow \min \underline{c}^T \underline{x} + M\underline{y}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \quad (1)$$
$$\underline{x} \geq 0 \rightarrow \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \quad (2)$$

$$\max \underline{c}^T \underline{x} \rightarrow \max \underline{c}^T \underline{x} - M\underline{y}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \quad (1)$$
$$\underline{x} \geq 0 \rightarrow \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \quad (2)$$

Teoria della Dualità

$$\begin{aligned}&\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3\\ &s.t.\\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2\\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3\\ &\underline{x} \geq 0\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	
w_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
w_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
w_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
	c_1	c_2	c_3	

$$\begin{aligned}&\max\ b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3\\ &s.t\\ &a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \leq c_1\\ &a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \leq c_2\\ &a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3 \leq c_3\\ &w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} (P) & \min & \underline{c}^T\underline{x} & \\ & & A\underline{x} \geq \underline{b} & \\ & & \underline{x} \geq \underline{0} & \\ & & \underline{x} \in \mathbf{R}^n & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (D) & \max & \underline{b}^T\underline{w} & \\ & & A^T\underline{w} \leq \underline{c} & \\ & & \underline{w} \geq \underline{0} & \\ & & \underline{w} \in \mathbf{R}^m & \end{array}$$

Siano dati il problema primale **di minimo** (P) $\begin{array}{c}\min \underline{c}^T\underline{x}\\ A\underline{x} \geq \underline{b}\\ \underline{x} \geq \underline{0}\end{array}$ ed il suo duale di massimo (D) $\begin{array}{c}\max \underline{b}^T\underline{w}\\ A^T\underline{w} \leq \underline{c}\\ \underline{w} \geq \underline{0}\end{array}$.

Teorema (**DEBOLE DELLA DUALITÀ**). Siano $\hat{\underline{x}}$ e $\hat{\underline{w}}$ soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D). Allora $\underline{c}^T\hat{\underline{x}} \geq \underline{b}^T\hat{\underline{w}}$.
DIM. Sappiamo che $\hat{\underline{x}}$ è una soluzione ammissibile di (P), quindi $A\hat{\underline{x}} \geq \underline{b}$. (1)
E sappiamo che $\hat{\underline{w}}$ è una soluzione ammissibile di (D), essa soddisfa il vincolo $A^T\hat{\underline{w}} \leq \underline{c}$, che implica $\underline{c}^T \geq \hat{\underline{w}}^T A$. (2)
Poiché $\hat{\underline{w}} \geq \underline{0}$, possiamo premoltiplicare (1) per $\hat{\underline{w}}$, ottenendo $\hat{\underline{w}}^T A\hat{\underline{x}} \geq \hat{\underline{w}}^T \underline{b}$. (3)
Infine, sfruttando le disequazioni (2) e (3), sapendo che $\hat{\underline{x}} \geq \underline{0}$ si può premoltiplicare (3) per $\hat{\underline{x}}$, ottenendo che:

$$\underline{c}^T\hat{\underline{x}} \geq \underline{w}^T A\hat{\underline{x}} \geq \hat{\underline{w}}^T\underline{b} \quad \rightarrow \quad \underline{c}^T\hat{\underline{x}} \geq \hat{\underline{w}}^T\underline{b}.$$

Corollario 1. Se $\underline{x}$ è una soluzione ammissibile per il primale (P) e $\underline{w}$ una soluzione ammissibile per il duale (D) tali che $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{b}^T\underline{w}$, allora $\underline{x}$ e $\underline{w}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.
DIM. Supponiamo per assurdo che $\exists \underline{x}' \in X$: $\underline{c}^T\underline{x}' < \underline{c}^T\underline{x}^* = \underline{b}^T\underline{w}^*$; siccome vale quest'ultima uguaglianza, allora $\underline{c}^T\underline{x}' < \underline{b}^T\underline{w}^*$: questo è un assurdo, poiché va contro la tesi del Teorema debole della dualità.

Corollario 2. Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente, allora il duale (D) è inammissibile. Viceversa, se il duale (D) è illimitato superiormente, allora il primale (P) è inammissibile.
DIM. Supponiamo che il valore ottimo del primale (P) sia $z^* = -\infty$ e che il problema duale ammetta una soluzione $\underline{w}$. Dal teorema della dualità debole si ha che $\underline{c}^T\underline{x} \geq \underline{b}^T\underline{w}$ per una qualsiasi soluzione ammissibile $\underline{x}$ di (P), dove $\underline{b}^T\underline{w}$ è uno scalare. Questo implica che $\underline{b}^T\underline{w} \leq -\infty$: questo è assurdo.

Teorema (**FORTE DELLA DUALITÀ**)**.** Data una coppia di problemi primale-duale, (P) e (D), se uno dei due problemi ammette una soluzione ottima finita, allora anche l'altro problema ammette una soluzione ottima finita ed i valori ottimi delle funzioni obiettivo coincidono, $\underline{c}^T\underline{x}^* = \underline{b}^T\underline{w}^*$.
DIM. Sia $\underline{x}^*$ la soluzione ottima del primale, e sia B la base ad esso associata:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix}\underline{x}^*{}_B\\ \underline{x}^*{}_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A^{-1}{}_B\underline{b}\\ \underline{0}\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{c}^T\underline{x}^* = \underline{c}_B^T\underline{x}_B^* + \underline{c}_N^T\underline{x}_N^* = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{b}.$$

Sia $\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}$; vogliamo dimostrare che questo vettore è una soluzione ammissibile (1) ed ottima (2) per (D).
(1) Dal duale, il vincolo che dev'essere soddisfatto è che $A^T\underline{w}^* \leq \underline{c} \Rightarrow \underline{w}^{*T}A \leq \underline{c}^T$.
(2) Il valore della funzione obiettivo duale in $\underline{w}^{*T}$ è $\underline{w}^{*T}\underline{b} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{b} = \underline{c}_B^T\underline{x}_B + \underline{c}_N^T\underline{x}_N = \underline{c}^T\underline{x}$. Dal Corollario 1 del teorema della dualità debole sappiamo che, essendo $\underline{c}^T\underline{x}^* = \underline{b}^T\underline{w}^*$, anche $\underline{w}^{*T}$ è ottima.
Dal teorema della dualità forte ricaviamo che, data la base ottima B del primale, è possibile calcolare velocemente la soluzione ottima del duale (D) tramite l'equazione:

$$\boxed{\underline{w}^{*T} = \underline{c}_B^T A_B^{-1}}.$$

Riassumendo:
- (P) è illimitato ⇒ (D) non è ammissibile;
- (P) ha soluzione ottima finita ⇔ (D) ha soluzione ottima finita (ed i valori delle loro f.o. coincidono);
- (P) è inammissibile ⇒ (D) illimitato o inammissibile.

Teorema (**DEGLI SCARTI COMPLEMENTARI**)**.** Data la coppia di soluzioni $\underline{x}$ e $\underline{w}$ rispettivamente ammissibili per (P) e (D), $\underline{x}$ e $\underline{w}$ sono ottime per (P) e (D) se e solo se

$$\mathrm{s_j w_j} = (\underline{a}^j\underline{x} - \mathrm{b_j})\mathrm{w_j} = 0 \quad (\mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{m})$$
$$\mathrm{v_i x_i} = (\mathrm{c_i} - \underline{a}_i^T\underline{w})\mathrm{x_i} = 0 \quad (\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}),$$

dove $\underline{a}^j$ è la j-esima colonna di A, e $\underline{a}_i$ è la i-esima colonna di A.

Analisi sensitiva

Le variabili duali $\underline{w}$ rappresentano i "**prezzi ombra**", ovvero i prezzi minimi a cui bisogna vendere le risorse per mantenere invariato il valore ottimo della funzione obiettivo. I **prezzi ombra** sono validi fino a quando non viene cambiata la base ottima (quando ciò avviene devono essere ricalcolati). Quando un vincolo è attivo, la risorsa ad esso associata è scarsa. La variabile duale corrispondente, a meno di degenerazione, sarà diversa da zero. Se invece la risorsa è abbondante sicuramente la variabile duale ad essa associata è nulla.

Caso 1: **variazione nel vettore dei costi $\underline{c}$**. Data una soluzione di base ottima $\underline{x}$* (sia B la base associata a tale soluzione), supponiamo che il coefficiente di una delle variabili sia cambiato da c_k a c_k'. L'effetto di questo cambio si ripercuoterà sui coefficienti di costo ridotto. Bisogna considerare due casi:
caso 1.1) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una ***variabile non in base***;
caso 1.2) variazione di un coefficiente di costo relativo ad una ***variabile in base***.
Caso 2: **variazione del termine noto di un vincolo**.
In sintesi, il caso 1 influisce **sull'*ottimalità*** della soluzione, mentre il caso 2 influisce **sull'*ammissibilità*** della stessa.

Problema del Flusso a Costo Minimo, sia G un grafo connesso ed orientato in cui:

- x_{ij} = quantità di flusso sull'arco (i, j);
- c_{ij} = costo di trasporto di un'unità di flusso sull'arco (i, j);
- b_i = intero associato al nodo i:
  - se $b_i > 0$: nodo offerta
  - se $b_i < 0$: nodo domanda
  - se $b_i = 0$: nodo di passaggio

Bisogna far giungere la merce prodotta (dai nodi di offerta) alle destinazioni (nodi di domanda) minimizzando i costi di trasporto.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = b_i \qquad i = 1,\dots n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in A$$

Problema del Trasporto è un *caso particolare* del *problema del flusso a costo minimo*, in quanto si hanno solo nodi di offerta e nodi di domanda.
L'unico cambiamento sono i vincoli (1) per i fornitori e (2) per i clienti.
Se si considera un nodo di offerta (fornitore) non si hanno archi entranti, per cui la sommatoria $\sum_{k\in Bs(i)} x_{ki}$ è nulla. Ecco perché $\sum_{j\in Fs(i)} x_{ij} = o_i$.
Per cliente (nodo di domanda) non si hanno archi uscenti, per cui la sommatoria $\sum_{j\in Fs(i)} x_{ij}$ è nulla.
Ipotesi di ammissibilità (*Condizioni di bilanciamento*)**.** Affinché il problema possa ammettere una soluzione deve essere verificata la condizione:

$$\sum_{i=1}^{m} o_i - \sum_{j=1}^{n} d_j = 0,$$

ossia la quantità totale di prodotto disponibile deve essere uguale alla richiesta totale dello stesso.
Questo problema può essere risolto, senza simplesso e calcolo della matrice inversa, mediante il **Metodo del Nord-Ovest**, per trovare una soluzione di base ammissibile iniziale, ed il **Metodo del Ciclo,** per migliorare la soluzione ammissibile.

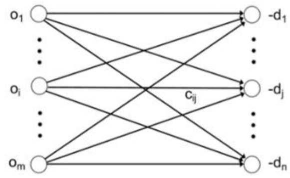
$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \qquad i = 1,\dots,m; \qquad (1)$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -d_j \qquad j = 1,\dots,n; \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in R \qquad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n$$



Problema dei cammini minimi uno-a-uno, consiste nel determinare il percorso di costo minimo da s a t in G. Le cose che cambiano sono:

- le variabili $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} \in p \\ 0 & \text{se } x_{ij} \notin p \end{cases}$: $\quad x_{ij} = 1$ se selezioniamo (i, j), 0 altrimenti;
- i vincoli del problema sono $\sum_{j\in Fs(i)} x_{ij} - \sum_{k\in Bs(i)} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \in N \setminus \{s,t\} \\ -1 & \text{se } i = t \end{cases}$.

$$\min z = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j\in Fs(i)} x_{ij} - \sum_{k\in Bs(i)} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \in N \setminus \{s,t\} \\ -1 & \text{se } i = t \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Problema dei cammini minimi uno-a-tutti, consiste nel determinare l'albero dei cammini minimi da s a tutti gli altri nodi di G. Le cose che cambiano sono:

- vincoli (non esistono nodi passaggio) $\sum_{j\in Fs(i)} x_{ij} - \sum_{k\in Bs(i)} x_{ki} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = s \\ -1 & \text{se } i \neq s \end{cases}$;
- variabili decisionali, con $x_{ij} \in Z^+ \cup \{0\}$.

Per risolvere tale problema si utilizza l'algoritmo di ***Bellman-Ford*** o ***Dijkstra***.

$$\min z = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j\in Fs(i)} x_{ij} - \sum_{k\in Bs(i)} x_{ki} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = s \\ -1 & \text{se } i \neq s \end{cases}$$

$$x_{ij} \in Z^+ \cup \{0\}$$

Problema del Flusso Massimo consiste nel determinare la massima quantità di flusso che è possibile inviare da s a t attraverso G.
Voglio spedire da s a t la massima quantità di flusso f senza violare i vincoli di ***capacità***.

- le variabili decisionali x_{ij} rappresentano la quantità di flusso che passa sull'arco (i, j), e devono essere $\mathbf{0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}}$ $\;\forall (i,j) \in A$, dato che la quantità di flusso non può superare la capacità dell'arco;
- la funzione obiettivo è massimizzare f, cioè la quantità di flusso che esce dalla sorgente s ($f = \sum_{j\in Fs(s)} x_{sj}$); ($f$ è la **variabile** del problema)
- i vincoli sono $\quad \sum_{j\in Fs(i)} x_{ij} - \sum_{k\in Bs(i)} x_{ki} = \begin{cases} 0 & \forall i \in V,\ i \neq s,t \\ f & \text{se } i = s \\ -f & \text{se } i = t \end{cases}$

Dato il taglio s-t $[V_1, V_2]$, la **capacità del taglio $u[V_1, V_2]$** è pari alla somma delle capacità degli archi diretti del taglio. Cioè, $u[V_1,V_2] = \sum_{(i,j)\in[V_1,V_2]} u_{ij}$.
Teorema (**MAX FLOW – MIN CUT**). Il flusso massimo che può essere spedito dalla sorgente al pozzo su un grafo orientato G è uguale alla capacità del taglio s-t minimo di G.

$$\max f$$

con vincoli :

Vincoli di **bilanciamento del flusso**

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = \begin{cases} 0 & \forall i \in V\ i \neq s,t \\ f & se\ \ i = s \\ -f & se\ \ i = t \end{cases} \qquad (1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall\ (i,j) \in A \qquad (2)$$

Vincoli di **capacità**

Problema Minimo Albero Ricoprente (Minimum Spanning Tree Problem):
Sia G = (V, E) un grafo non orientato e connesso dove ad ogni arco $e_i \in E$ è associato un costo c_i.
Il **costo** di un albero ricoprente T di G è dato dalla somma dei costi degli archi che lo compongono.
Problema: Determinare l'albero ricoprente di G di costo minimo.

- le variabili decisionali sono $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se scelgo } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, per ogni (i, j) in E;

Questo problema si risolve con l'algoritmo di **Kruskal** o **Prim**.

Subtour Elimination

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} = n-1$$

$$\sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S, j\in S}} x_{ij} \leq |S|-1 \qquad \forall S \subset V,\ |S| \geq 3$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\ (i,j) \in E$$

Cut Formulation

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} = n-1$$

$$\sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S, j\in V\setminus S}} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V,\ |S| \geq 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\ (i,j) \in E$$