

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

COMUNICACIONES DIGITALES

Taller 1 — Sistemas digitales

Autores:

Federico BELLO

Julieta UMPIERREZ

28 de septiembre de 2025



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Índice

1. Parte I: Modulación digital pasabanda	2
1.1. Parte a	2
1.1.1. BPSK	2
1.1.2. QPSK	2
1.1.3. 8-PSK	2
1.1.4. 16-QAM	3
1.1.5. Parte b	3
1.1.6. BPSK	4
1.1.7. QPSK	4
1.1.8. 8-PSK	4
1.1.9. 16-QAM	4
1.2. Parte c	4
1.2.1. BPSK	4
1.2.2. QPSK	5
1.2.3. 8-PSK	5
1.2.4. 16-QAM	5
1.3. Parte d	6
1.3.1. BPSK	6
1.3.2. QPSK	7
1.3.3. 8-PSK	7
1.3.4. 16-QAM	8
1.4. Parte e	10
1.5. Parte f	10
1.6. Parte g	10
2. Parte II: Modulación de pulsos bandabase	11
2.1. Parte 1	11
2.2. Parte 2	12
2.3. Parte 3	14
2.4. Parte 4	14
2.5. Parte 5	15
2.6. Parte 6	17
3. Parte III: Sobre el trabajo integrador	18

1. Parte I: Modulación digital pasabanda

1.1. Parte a

Dado que se consideran símbolos equiprobables, las fronteras de decisión son la mediatrices entre los símbolos. En todos los casos se usa codificación Grey.

1.1.1. BPSK

La constelación correspondiente se adjunta en la figura 1, la frontera de decisión esta marcada en azul y es la recta que pasa por 0.

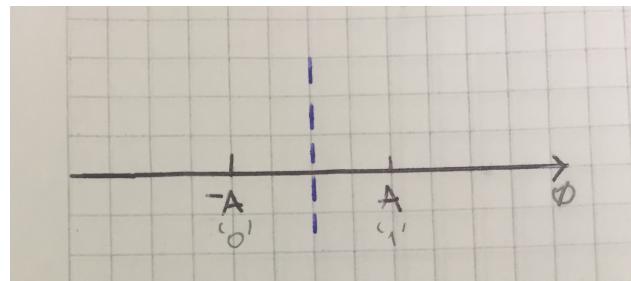


Figura 1: Constelación y frontera de decisión de BPSK

1.1.2. QPSK

La constelación correspondiente se adjunta en la figura 2, la frontera de decisión se compone por los ejes, marcados en azul.

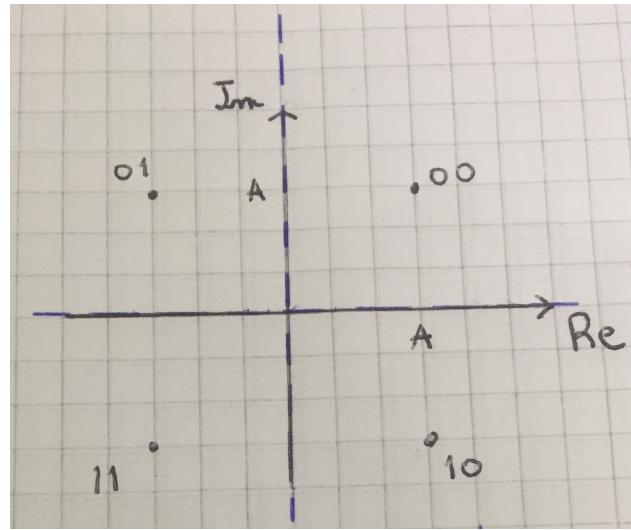


Figura 2: Constelación y frontera de decisión de QPSK

1.1.3. 8-PSK

La constelación correspondiente se adjunta en la figura 3, la frontera de decisión, compuesta por los ejes y dos rectas de ángulos $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{4}$ radianes, se marca en azul.

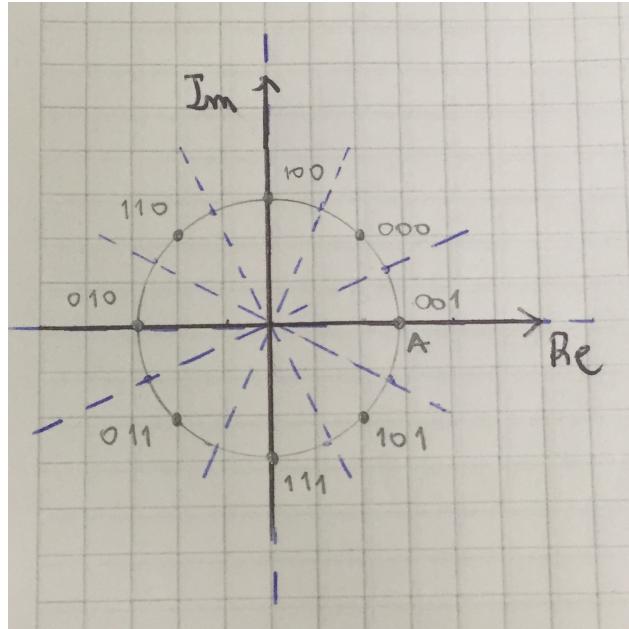


Figura 3: Constelación y frontera de decisión de 8-PSK

1.1.4. 16-QAM

La constelación correspondiente se adjunta en la figura 4, la frontera de decisión se compone por los ejes y rectas paralelas a los mismos en $2A$ y $-2A$ marcadas en azul.

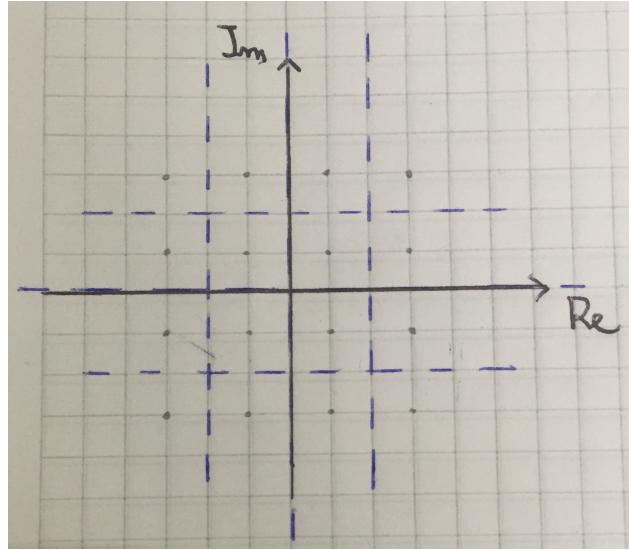


Figura 4: Constelación y frontera de decisión de 16-QAM

1.1.5. Parte b

Se sabe que la máxima tasa de transferencia de símbolos alcanzable por el sistema esta acotada por el ancho de banda del canal de la forma: $B_T = r_s(1 + \rho) \leq B_{canal}$, donde r_s es la tasa de transferencia de símbolos, ρ el coeficiente de *roll-off* y B_T y B_{canal} son el ancho de banda utilizado y el del canal respectivamente. Despejando r_s , se obtiene que la máxima tasa de transferencia de símbolos es: $r_s = \frac{B_{canal}}{1 + \rho}$. Este es un resultado general, independiente de la modulación realizada. Además, la máxima tasa de transferencia de bit cumple que: $r_b = (\log_2 M)r_s$, por lo que reemplazando M se obtiene la misma para cada modulación. Esto se detalla en las siguientes secciones.

1.1.6. BPSK

Como esta clase de modulación solo utiliza dos símbolos, cada uno se corresponde a un bit. Por lo tanto:
 $r_b = r_s = \frac{B_{canal}}{1 + \rho}$

1.1.7. QPSK

En este caso, $M = 4 \rightarrow \log_2 4 = 2$, llegando así a que $r_b = 2r_s = \frac{2B_{canal}}{1 + \rho}$

1.1.8. 8-PSK

Análogamente, se tiene que $M = 8 \rightarrow \log_2 8 = 3$, obteniendo: $r_b = 3r_s = \frac{3B_{canal}}{1 + \rho}$

1.1.9. 16-QAM

Por ultimo, $M = 16 \rightarrow \log_2 16 = 4$, llegando a que: $r_b = 4r_s = \frac{4B_{canal}}{1 + \rho}$

1.2. Parte c

En la figura 5 se adjunta el diagrama genérico de un par transmisor-receptor para todas las modulaciones, en el primer caso es solo en el eje real. Las tablas de mapeo se realizan de forma particular para cada tipo de modulación a continuación.

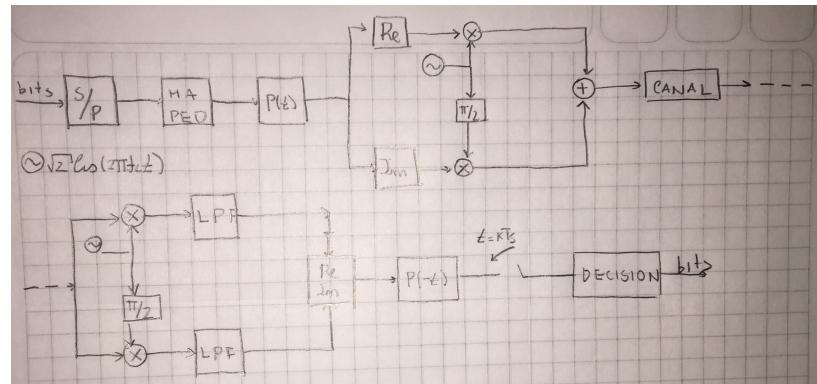


Figura 5: Par transmisor-receptor para el resto de las modulaciones.

Se recuerda que $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$ con M la cantidad de símbolos. A su vez al ser símbolos equiprobables se recuerda que E_s se calcula como el promedio de las energías de cada símbolo y la energía de cada símbolo es la distancia al origen al cuadrado.

1.2.1. BPSK

En la tabla 1 se adjunta el mapeo para BPSK. A su vez se calcula la energía de símbolo y de bit para este caso:

$$E_s = E_b = \frac{1}{2} [A^2 + (-A)^2] = A^2$$

'0'	-A
'1'	A

Cuadro 1: Mapeo BPSK

1.2.2. QPSK

En la tabla 2 se adjunta el mapeo para QPSK. A su vez se calcula la energia de simbolo y de bit para este caso:

$$E_s = \frac{1}{16} \left[\left(\sqrt{A^2 + A^2} \right)^2 + \left(\sqrt{A^2 + -A^2} \right)^2 + \left(\sqrt{-A^2 + A^2} \right)^2 + \left(\sqrt{-A^2 + -A^2} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} [2A^2 + 2A^2 + 2A^2 + 2A^2]$$

$$E_s = 2A^2$$

Dado que $M = 4$ se tiene

$$E_b = A^2$$

'00'	A+jA
'01'	-A+jA
'11'	-A-jA
'10'	A-jA

Cuadro 2: Mapeo QPSK

1.2.3. 8-PSK

En la tabla 3 se adjunta el mapeo para 8-PSK.

$$E_s = \frac{1}{8} [A^2 + A^2 + A^2 + A^2 + A^2 + A^2 + A^2 + A^2] = A^2$$

En este caso $M = 8$ entonces

$$E_b = \frac{A^2}{3}$$

'001'	A+j0
'000'	$\sqrt{2}/2A + j\sqrt{2}/2A$
'100'	0+jA
'110'	$-\sqrt{2}/2A + j\sqrt{2}/2A$
'010'	-A+j0
'011'	$-\sqrt{2}/2A - j\sqrt{2}/2A$
'111'	0-jA
'101'	$\sqrt{2}/2A - j\sqrt{2}/2A$

Cuadro 3: Mapeo 8PSK

1.2.4. 16-QAM

En la tabla 4 se adjunta el mapeo para 16-QAM.

$$E_s = \frac{1}{16} [4 * 2A^2 + 8 * 10A^2 + 4 * 18A^2] = 10A^2$$

Dado que $M = 16$ se tiene

$$E_b = \frac{E_s}{4} = \frac{5A^2}{2}$$

'0000'	A+jA
'0001'	A+j3A
'0011'	3A+j3A
'0010'	3A+jA
'1000'	-A+jA
'1001'	-A+j3A
'1011'	-3A+j3A
'1010'	-3A+jA
'1110'	-3A-jA
'1100'	-A-jA
'1111'	-3A-j3A
'1101'	-A-j3A
'0100'	A+jA
'0110'	3A-jA
'0101'	A-j3A
'0111'	3A-j3A

Cuadro 4: Mapeo 16QAM

1.3. Parte d

De manera genérica, la probabilidad de error de símbolo P_e se calcula como

$$P_e = \sum_{i=1}^M p_i P_{ei}$$

donde para el i -esimo símbolo se considera p_i la probabilidad del mismo y P_{ei} la probabilidad de error dado que mande ese símbolo. En este caso al considerarse símbolos equiprobables todos los p_i son iguales.

Luego, al codificarse con código de Grey se puede considerar que la probabilidad de error de bit se calcula como

$$P_{be} = \frac{P_e}{\log_2 M}$$

A su vez para todas los cálculos se toman en cuenta las fronteras de decisión de la sección 1.1.

También se aclara que al estar usando pulso apareado (normalizado) y al considerarse ruido blanco gaussiano de media nula con densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2}$ se tiene que $\sigma^2 = \frac{\eta}{2}$ en todos los casos.

Otro resultado que se va a utilizar es para la potencia de transmisión, $S_T = \frac{E_s}{T_s} = E_s r_s$.

Por ultimo se considera la atenuación del canal $L = 1$.

1.3.1. BPSK

En este caso se tiene $p_i = \frac{1}{2}$. A su vez mirando la región de decisión de la figura 1 se puede apreciar como la probabilidad de error es la misma para ambos símbolos, por esta razón solo se calculará P_{e0} .

$$P_{e0} = P(\text{error} | \text{símbolo} = -A)$$

Utilizando que el umbral de decisión es en 0 se desprende la siguiente condición:

$$-A + n[k] > 0$$

por lo que

$$P_{e0} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Para ponerla en función de S_T , la tasa de símbolo y la densidad espectral del ruido se tiene que $E_s = A^2 \rightarrow S_T = A^2 r_s$.

Tomando que $M = 2$, las expresiones final son

$$P_e = P_{be} = \frac{1}{2} \left[Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{r_s\eta}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{r_s\eta}}\right) \right] = Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{r_s\eta}}\right)$$

1.3.2. QPSK

En este caso se tiene $p_i = \frac{1}{4}$. A su vez mirando la región de decisión de la figura 2 se puede apreciar como la probabilidad de error es la misma para todos los símbolos, por esta razón solo se calculará P_{e00} .

$$\begin{aligned} P_{e00} &= P(\text{error} | \text{simbolo} = A + jA) \stackrel{(1)}{\overbrace{=}} P(A + jA + N^i(kT_s) + jN^q(kT_s) \notin C_1) \stackrel{(2)}{\overbrace{=}} \\ &\quad P(A + N^i(kT_s) < 0 \cup A + N^q(kT_s) < 0) \stackrel{(3)}{\overbrace{=}} \end{aligned}$$

$$P(A + N^i(kT_s) < 0) + P(A + N^q(kT_s) < 0) - P(A + N^i(kT_s) < 0 \cap A + N^q(kT_s) < 0)$$

donde (1) es que no se pertenezca al cuadrante positivo, (2) es escribiendo la región como la unión de dos condiciones y (3) es descomponiendo la unión.

Los primeros dos términos valen $Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$ mientras que al ser las componentes del ruido independientes, el tercer término es $Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right)$. Este último se desprecia suponiendo un error razonable, ya que corresponde a irse por el tercer cuadrante y esto se lo considera poco probable. Por lo que se tiene

$$P_{e00} = 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Para ponerla en función de S_T , la tasa de símbolo y la densidad espectral del ruido se tiene que $E_s = 2A^2 \rightarrow S_T = 2A^2 r_s$.

Tomando $M = 4$, las expresiones finales son

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{4} \left[4 * 2Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{r_s\eta}}\right) \right] = 2Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{r_s\eta}}\right) \\ P_{be} &= Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{r_s\eta}}\right) \end{aligned}$$

1.3.3. 8-PSK

En este caso se tiene $p_i = \frac{1}{8}$. A su vez mirando la región de decisión de la figura 3 se puede apreciar como la probabilidad de error es la misma para todos los símbolos, por esta razón solo se calculará P_{e001} . Definiendo $\theta = \text{Atan}\left(\frac{N^q(kT_s)}{N^i(kT_s)+A}\right)$ podemos establecer que el error se da cuando ese ángulo es se escapa de $\left[\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$.

$$\begin{aligned} P_{e001} &= P(\text{error} | \text{simbolo} = A + j0) = P\left(\theta \notin \left[\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] | \text{simbolo} = A\right) \stackrel{(1)}{\overbrace{=}} \\ &\quad P\left(\theta < -\frac{\pi}{8} \cup \theta > \frac{\pi}{8}\right) \stackrel{(2)}{\overbrace{=}} P\left(\theta < -\frac{\pi}{8}\right) + P\left(\theta > \frac{\pi}{8}\right) - P\left(\theta < -\frac{\pi}{8} \cap \theta > \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

(1) es escribiendo la región como la unión de dos condiciones y (2) es descomponiendo la unión.

Ahora, los primeros dos términos dan el mismo resultado y el último se desprecia suponiendo un error razonable, ya que corresponde a irse por ambas condiciones a la vez y esto se lo considera poco probable.

La condición para los primeros términos es

$$A\left(\sqrt{2}-1\right) < N^q(kT_s) + \left(1-\sqrt{2}\right)N^i(kT_s) = N^s(kT_s)$$

donde $N^s(kT_s)$ es una combinación lineal de gaussianas cuya distribución es $\mathcal{N}\left(0, \sqrt{\eta(2-\sqrt{2})}\right)$.

De ahí se obtiene

$$P_{e001} = 2Q \left(\frac{A(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\eta(2-\sqrt{2})}} \right)$$

Para ponerla en función de S_T , la tasa de símbolo y la densidad espectral del ruido se tiene que $E_s = A^2 \rightarrow S_T = A^2 r_s$.

Tomando $M = 8$ se tiene

$$P_e = \frac{1}{8} \left[8 * 2Q \left((\sqrt{2}-1) \sqrt{\frac{S_T}{\eta r_s(2-\sqrt{2})}} \right) \right] = 2Q \left((\sqrt{2}-1) \sqrt{\frac{S_T}{\eta r_s(2-\sqrt{2})}} \right)$$

$$P_{be} = \frac{2}{3} Q \left((\sqrt{2}-1) \sqrt{\frac{S_T}{\eta r_s(2-\sqrt{2})}} \right)$$

1.3.4. 16-QAM

Para evaluar la probabilidad de error en este caso se dividirán los puntos de la constelación en 3. Se le llamaran *símbolos interiores* a los 4 símbolos mas cercanos al origen, *extremos* a los 4 símbolos mas alejados y *símbolos exteriores* a los restantes 8 símbolos (ver figura 4). Notar entonces que, por simetría, la probabilidad de error de cada símbolo perteneciente a una categoría es igual, por lo que para calcular la probabilidad de error total alcanza con calcular el promedio ponderado entre las 3 categorías (ya que todos los símbolos son equiprobables). Además, cada símbolo se encuentra a distancia A del límite de decisión, teniendo una situación muy análoga a la del caso QPSK.

Símbolos interiores: se tomara el símbolo centrado en (A, A_j) como ejemplo para calcular la probabilidad de error.

$$P_{e_1} = P(\text{error} | \text{símbolo} = A + jA) = P(A + jA + N^i(kT_s) + jN^q(kT_s) \notin C_1) =$$

$$P(A + N^i(kT_s) < 0 \cup A + N^q(kT_s) < 0 \cup A + N^i(kT_s) > 0 \cup A + N^q(kT_s) > 0)$$

Por el principio de inclusión-exclusión y denominando $W = A + N^i(kT_s) < 0$, $X = A + N^q(kT_s) < 0$, $Y = A + N^i(kT_s) > 0$ y $Z = A + N^q(kT_s) > 0$ se llega a que:

$$P_{e_1} = P(W) + P(X) + P(Y) + P(Z) - P(W \cap X) - P(W \cap Y) - P(W \cap Z) - P(X \cap Y) - P(X \cap Z) - P(Y \cap Z) + P(W \cap X \cap Y) + P(W \cap Y \cap Z) + P(W \cap X \cap Z) + P(X \cap Y \cap Z) - P(W \cap X \cap Y \cap Z)$$

Donde los primeros 4 términos son iguales y valen $Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$. Por lo tanto, suplantando este resultado, aplicando la independencia del ruido blanco gaussiano y despreciando los términos de grado mayor a 1, se llega a que

$$P_{e_1} = 4Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Símbolos exteriores: similar al caso anterior, solo que en lugar de tener las cuatro posibilidades para el ruido se tienen tres, las cuales dependen del punto evaluado. Por ejemplo, si se toma el punto centrado en $(A, 3A_j)$ se observa que independientemente de lo grande que sea $N^q(kT_s)$ siempre se estará dentro de la frontera de decisión, o, en términos matemáticos:

$$P_{e_2} = P(A + N^i(kT_s) < 0 \cup A + N^q(kT_s) < 0 \cup A + N^i(kT_s) > 0)$$

Por lo tanto, realizando el mismo procedimiento que la parte anterior, se llega a que la probabilidad de error para cada uno de estos símbolos es:

$$P_{e_2} = 3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Extremos: por último, solo quedan los puntos de los extremos. Se tomará el punto $(3A, 3A_j)$ a modo de ejemplo. Esto, es similar al caso anterior, pero con la diferencia de que solamente es posible salir de la zona de decisión si los valores $N^i(kT_s)$ o $N^q(kT_s)$ son muy negativos. Es decir:

$$P_{e_3} = P(A + N^i(kT_s) < 0 \cup A + N^q(kT_s) < 0)$$

Obteniendo así:

$$P_{e_3} = 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Finalmente, la probabilidad de error de símbolo es:

$$P_e = \frac{1}{16} (4P_{e_1} + 6P_{e_2} + 4P_{e_3}) = \frac{1}{16} \left(16Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + 24Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + 8Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \right) = 3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Asumiendo que se usa codificación Gray y considerando que los términos cuadráticos (y mayores) fueron despreciado, se obtiene que la probabilidad de error de bit es:

$$P_{be} = \frac{3}{4}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Resta entonces dejar este resultado en función de la SNR y la tasa de trasmisión. Por la parte 1.2.4 se tiene que la energía de símbolo en 16-QAM es $E_s = 10A^2$, por lo tanto $S_T = 10A^2r_s \rightarrow A = \sqrt{\frac{S_T}{10r_s}}$.

Suplantando este resultado en la probabilidad de error, se tiene:

$$P_{be} = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{10r_s\eta}}\right)$$

Teniendo en cuenta que se utiliza la máxima tasa de trasmisión de símbolo posible (por lo que se mantiene constante en las distintas modulaciones, ya que el ancho de banda del canal es fijo) parece natural definir la SNR como la relación entre la potencia de un símbolo y la potencia del ruido, para así poder comparar el desempeño de cada una. En cambio, si la misma se tomara como la relación entre la potencia de bit y la potencia de ruido, se estarían utilizando distintas tasas de trasmisión de bit para cada modulación, dificultando la comparación. Es por esto que, para este caso, se define

$$SNR = \frac{\frac{E_s}{T_s}}{\frac{\eta}{2T_s}} = \frac{2S_T}{r_s\eta}$$

En la figura 6 se observa la probabilidad de error de las cuatro modulaciones anteriores para distintos valores de la SNR. Se observa como para SNR bajas el error es alto, mientras que al ir aumentando la SNR la probabilidad de error baja considerablemente. Además, notar como al aumentar la cantidad de bits en cada símbolo, el error aumenta para un valor de SNR dado. Esto tiene sentido, ya que al aumentar la cantidad de símbolos, se disminuyen los tamaños de las regiones determinadas por las fronteras de decisión. Sin embargo, utilizar varios bits por símbolo tiene la ventaja de disminuir el ancho de banda utilizado.

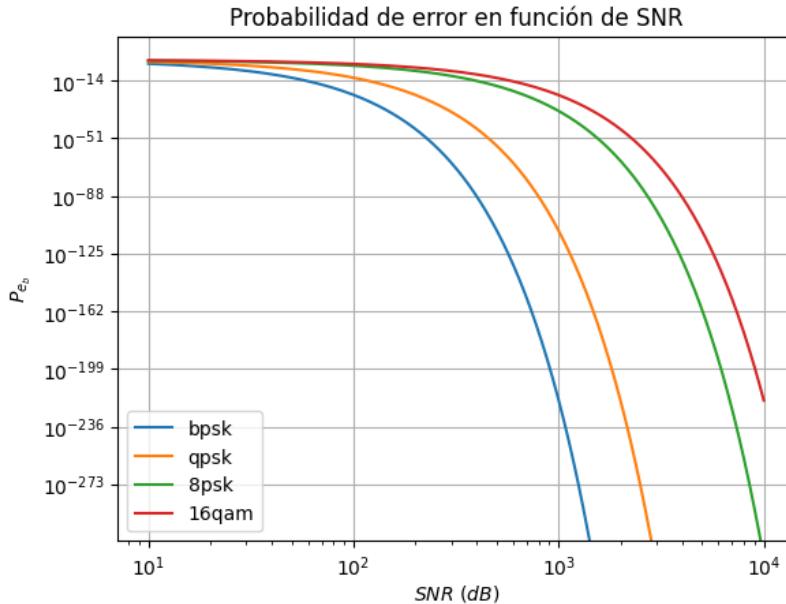


Figura 6: Probabilidad de error para distintas modulaciones.

1.4. Parte e

Poder trasmisir información a una velocidad de $24Mbps$ utilizando 512 portadoras distintas, implica que cada portadora debe, como mínimo, transferir a una velocidad de $\frac{24Mbps}{512} \approx 46,9Kbps$, respetando la restricción del máximo ancho de banda del canal de $4KHz$.

Por la parte b, se sabe que en una modulación de dos símbolos pasabanda, como lo es ASK, el *bit rate* se encuentra limitado por $r_b = \frac{B}{1+\rho} \leq \frac{B_{canal}}{1+\rho}$, donde B es el ancho de banda utilizado. Además, en este caso, $\rho = 0$, ya que se busca maximizar la tasa de trasmisión. Suplantando por los valores del problema, se llega a que la máxima tasa de trasmisión posible es $r_b = 4Kbps$ por portadora, o $2048Kbps$ en total, no alcanzando el valor teórico de $24Mbps$.

1.5. Parte f

Como pulso de trasmisión se utilizara un pulso de Nyquist para así evitar la interferencia ínter-simbólica. Luego, para trasmisir a una tasa de $3585Kbps$, se debe trasmisir a una tasa de $r_b = 7Kbps$ por portadora.

Notar que la probabilidad de error en este caso es igual a la modulación QPSK, obteniendo así que la probabilidad de error debe cumplir:

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{\eta r_b}}\right) \leq 10^{-5}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{\eta r_b}}\right) \leq \frac{1}{2}10^{-5}$$

Para resolverlo se interpola $\sqrt{\frac{2S_T}{\eta r_b}} = 4,4$ de la gráfica de $Q(k)$ para que tome el valor $5*10^{-6}$. Respetando el sentido de la igualdad se obtiene

$$\sqrt{\frac{2S_T}{\eta r_b}} \geq 4,4$$

Del cual se puede despejar

$$S_T \geq \frac{(4,4)^2}{2} \eta 7 kbps$$

1.6. Parte g

La eficiencia espectral se define como el cociente entre R la tasa de transmisión en bps y B el ancho de banda del canal. En este caso dado que se tienen 512 portadoras y se tiene que cada portadora ocupa $4kHz$, se llega a que $B = 512 * 4kHz$. A su vez $r_b = \frac{24Mbps}{512} = 46875bps$ por lo que la eficiencia E es

$$E = \frac{24Mbps}{512^2 * 4kHz} = 0,023$$

Por otro lado, como se vio anteriormente, $r_b = r_s \log_2 M$ y $r_s = \frac{B}{(1+\rho)} \leq B_{canal}$, con $\rho = 0$ para este caso. Despejando M se obtiene: $M = 2^{\frac{r_b}{r_s}} \geq 2^{\frac{r_b}{B_{canal}}} = 2^{\frac{46875}{4000}} = 3370$. Es decir, M debe ser la potencia de 2 mas chica posible que cumpla ser mas grande que 3370, llegando así a que $M = 4096$. Esta última constelación puede observarse en la figura 7.

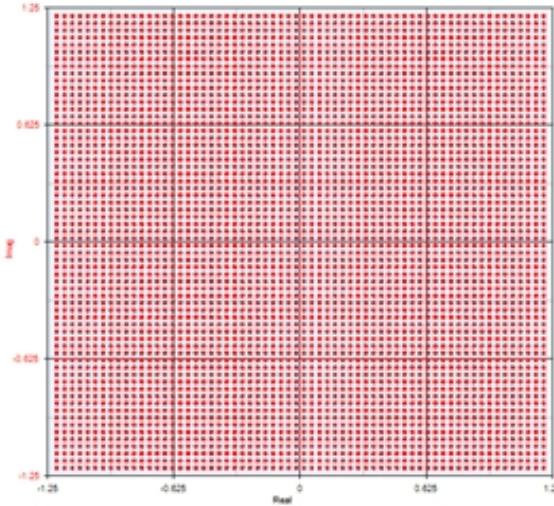


Figura 7: Constelación de 4096-QAM extraída de [1]

2. Parte II: Modulación de pulsos bandabase

Para esta parte se cuenta con un sistema de la forma del de la figura 8

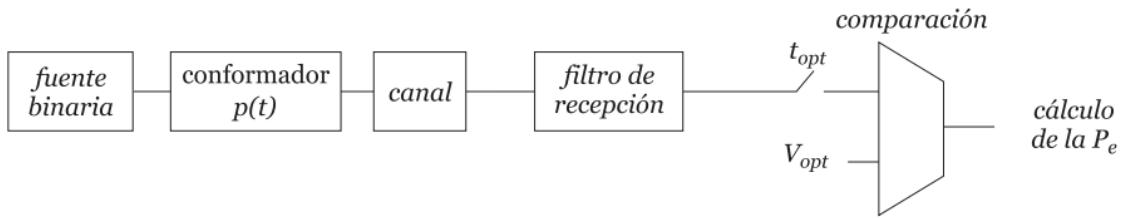


Figura 8: Diagrama de bloques del sistema

La fuente binaria tiene una probabilidad de trasmisión del símbolo '1' de q y el símbolo '0' una probabilidad $(1-q)$, de la parte 1 a la parte 5 se supondrá símbolos equiprobables ($q=0.5$). Los símbolos se generan a una cadencia $r_s = \frac{1}{T_s} = 44100 * 8$ bps, independientes entre si, codificándose de forma polar ('0' $\rightarrow -A$, '1' $\rightarrow A$).

2.1. Parte 1

Para ver el espectro que genera el pulso rectangular se puede notar que es una señal PAM. Esto implica que el espectro tiene la siguiente forma

$$S_x(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \left[\sigma_x^2 + \frac{m_x^2}{T_s} \sum_k \delta(f - k/T_s) \right]$$

En este caso debido a la codificación polar se tiene

$$m_x^2 = \mathbb{E}[x_k] = (-A)\frac{1}{2} + A\frac{1}{2} = 0$$

$$\sigma_x^2 = \mathbb{E}[x_k^2] = (-A)^2\frac{1}{2} + (A)^2\frac{1}{2} = A^2$$

Dado que $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \Pi(\frac{t}{T_s})$ se tiene $P(f)^2 = T_s^2 \text{sinc}(fT_s)^2$ por lo que se obtiene

$$S_x(f) = T_s A^2 \text{sinc}(fT_s)^2$$

Al pasar por el canal el pulso rectangular genera un espectro que cumple $S_R \propto |\text{sinc}(fT_s)|^2$. La figura 9 muestra la señal recibida, observándose los mínimos cada $\frac{1}{T_s} = 352\text{kHz}$ (como puede verse en la figura 10).

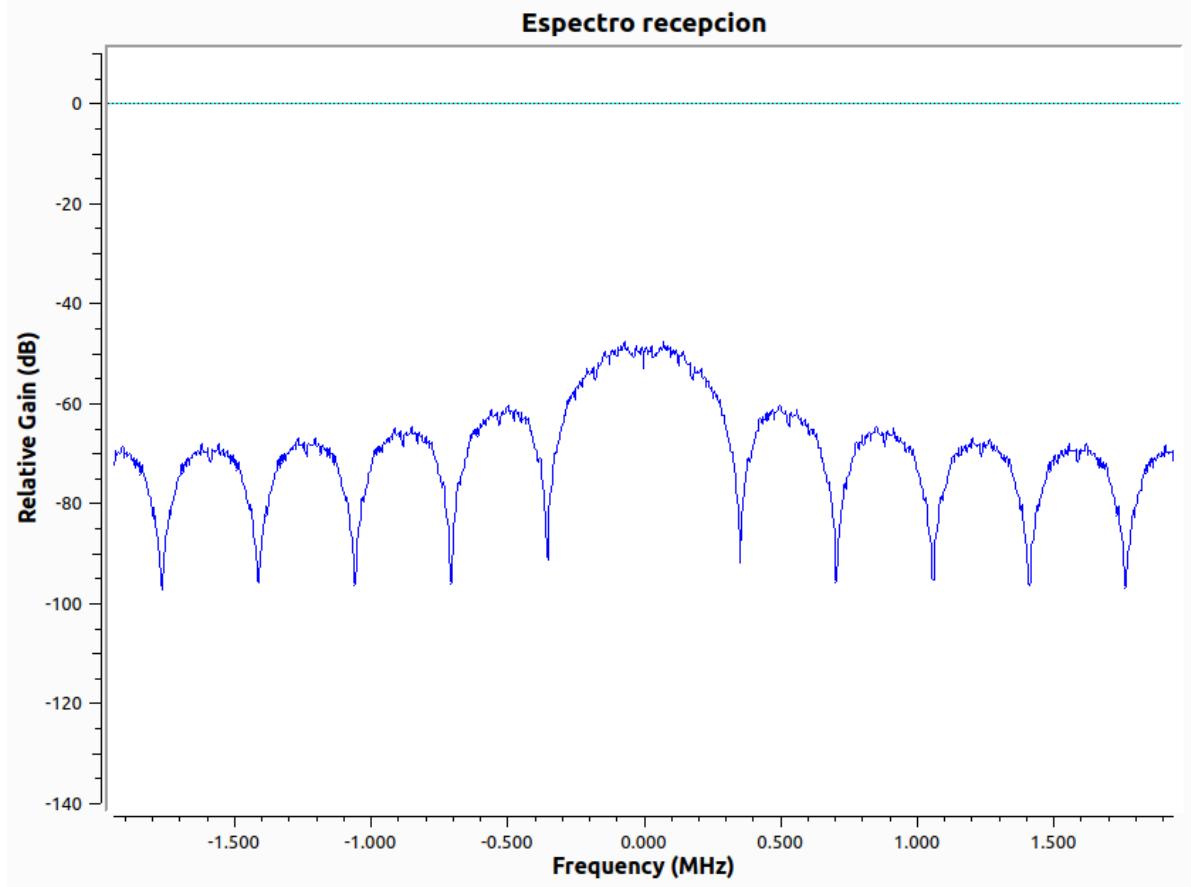


Figura 9: Espectro en recepción

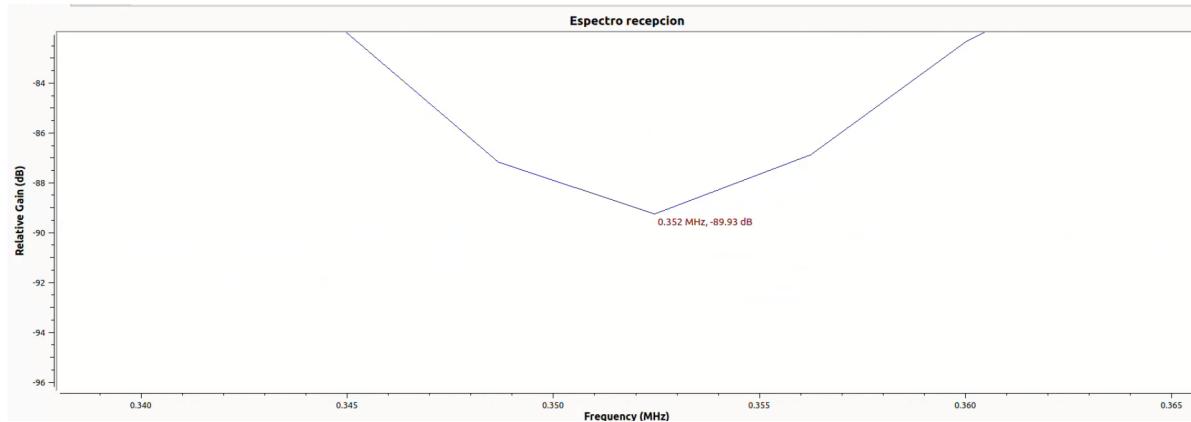


Figura 10: Ancho de los lóbulos de la señal en recepción

2.2. Parte 2

Con el objetivo de minimizar la probabilidad de error, es deseable obtener histogramas lo mas angostos y separados entre si. Esto logra minimizar el error. Intuitivamente se puede ver que si las gaussianas se superponen menos, tomar la decisión es mas simple. Una justificación matemática se verá en la Parte 6. Algo

similar puede razonarse observando el plano, cuanto mas separadas estén las nubes de puntos, menor sera el error.

Principalmente se utilizara el histograma, pero el razonamiento es muy análogo para el plano. Además, notar que en este caso en particular, se desean enviar dos símbolos ('0' y '1'), por lo que se deberían ver dos gaussianas, una centrada en $\frac{A}{\sqrt{L}}$ proveniente del '1' y otra centrada en $-\frac{A}{\sqrt{L}}$ proveniente del '0'.

- Muestra 0 a muestra 4: se observan dos distribuciones gaussianas, de mayor varianza para las muestras mas grandes. La muestra 2 y la muestra 3 tienen la menor varianza en las distribuciones, indicando que pueden ser los óptimos. Un ejemplo de esto puede verse en la figura 11

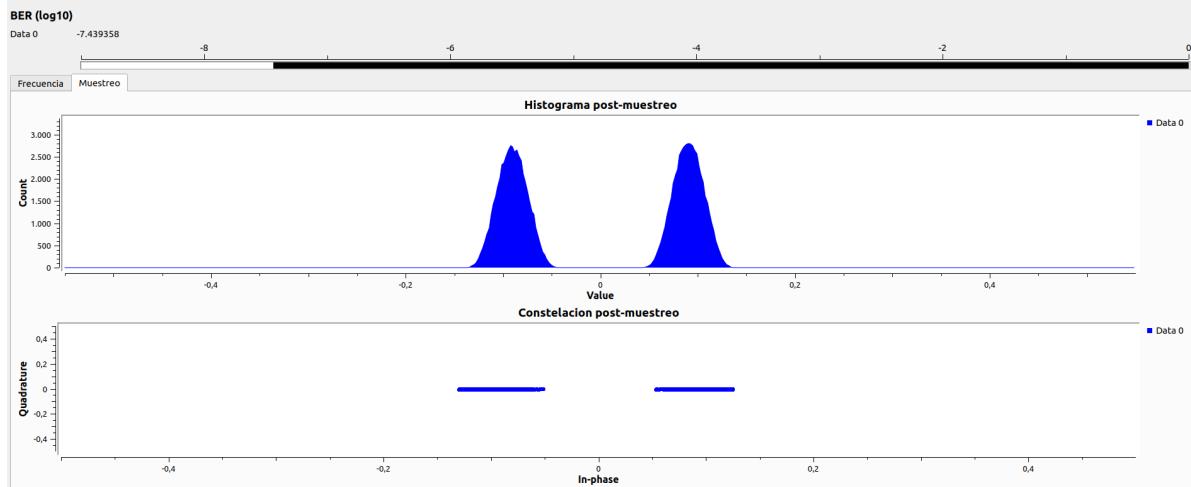


Figura 11: BER, histograma y constelación para la segunda muestra

- Muestra 5 a muestra 8: se observan mas de dos campanas. También se observa como el Bit Error Rate (BER) aumenta drásticamente en comparación con el caso anterior.

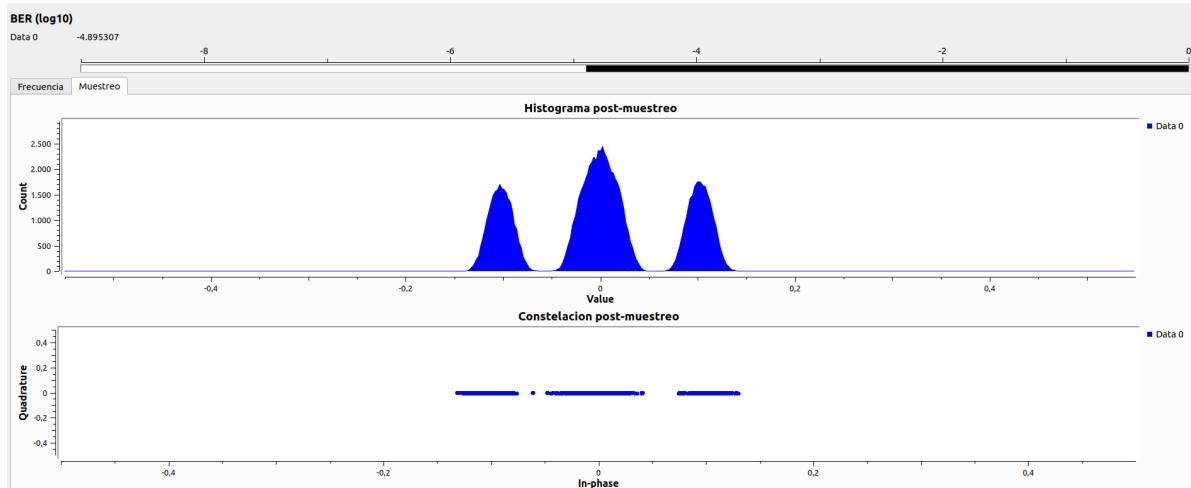


Figura 12: BER, histograma y constelación para la sexta muestra

- Novena y décima muestra: si bien se ven dos histogramas, el BER aumenta de forma considerable, lo cual no es deseado. Esto hace pensar que las campanas están cambiadas de lugar.

En resumen, la muestra óptima puede ser la segunda o la tercera, ya que son a simple vista las que parecen disminuir la varianza de las distribuciones y aumentar la distancia entre las mismas. En caso de desear hacer un análisis mas cuantitativo, seria necesario analizar el BER en casos de prueba.

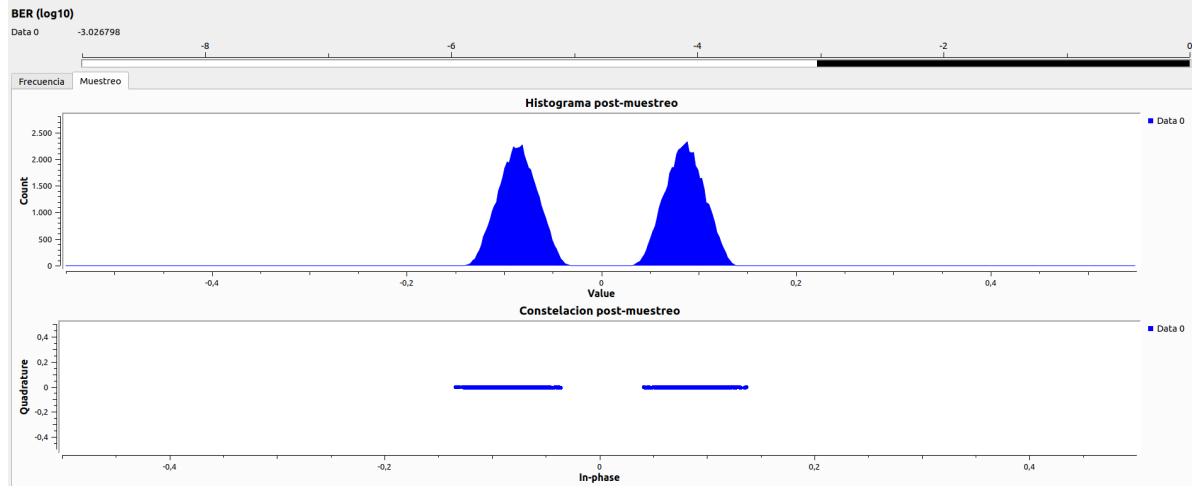


Figura 13: BER, histograma y constelación para la décima muestra

2.3. Parte 3

En el curso se vieron dos criterios para fijar el ancho de banda, el primero es menos restrictivo y se basa en tomar $W = \frac{1}{T_s}$, el segundo es mas restrictivo y se basa en tomar $W = \frac{1}{2T_s}$. En el primer caso se tiene un mayor ancho de banda lo que podría ser algo no deseado, sin embargo, al tomar la segunda opción se tiene una perdida de información muy grande que afecta considerablemente la forma de la señal aumentando la probabilidad de error. Fijando $W = \frac{1}{T_s}$ es que se obtiene el histograma de la figura 14, donde tomando la muestra 0 se ven dos picos bien definidos sin una nube de puntos significativa alrededor.

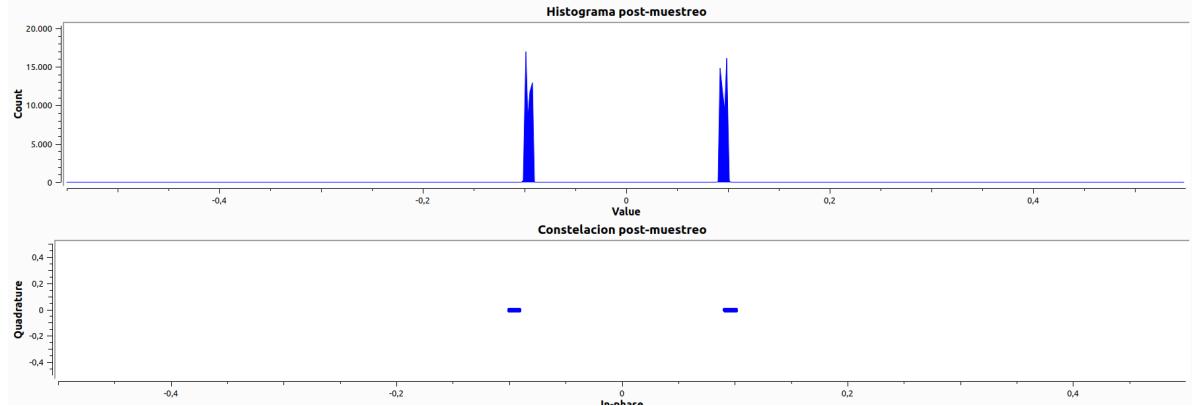


Figura 14: Histograma y constelación para muestra 0 y $W = \frac{1}{T_s}$

2.4. Parte 4

Como se dio en el curso, un sistema de trasmisión-recepción ideal utiliza el filtro de correlación. Este filtro no es posible implementarlo, por lo que se implementa utilizando el filtro apareado. El mismo, utiliza para recepción $p(-t)$, donde $p(t)$ fue el pulso utilizado en la trasmisión. Por lo tanto, no se tendrán en cuenta las combinaciones de pulsos distintos en trasmisión-recepción, ya que no forman un esquema de filtro apareado.

Además, para minimizar la probabilidad de error, es deseable utilizar pulsos de trasmisión y recepción que cumplan con la condición de no-ISI. Esto logra minimizar la interferencia de otras muestras al momento de tomar la decisión. Para cumplir con no-ISI, debe suceder que, dado un pulso de trasmisión $p(t)$ y el pulso de recepción $p(-t)$, la convolución $g(t) = p(t) * p(-t)$ cumpla que: $\sum_k a_k g((l-k)T_s) = a_l$

Condición de Nyquist: la misma afirma que si $g(nT_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$, entonces $g(t)$ cumple la

condición de no-ISI. Para que $g(t)$ cumpla la condición de Nyquist, si $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f) = |P(f)|^2$ entonces $\sum_k G\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$ debe ser constante en frecuencia. Por lo tanto, se observa fácilmente que el pulso rectangular no cumple con esta condición, ya que en frecuencia tiene la forma de un *sinc*, es por esto que el pulso rectangular no es óptimo en este sentido. Luego, es posible ver como tanto el pulso LPF (de ancho de banda $\frac{1}{2T_s}$) como el SRRC cumplen con la condición de Nyquist. Una forma de ver esto es que el SRRC tiene simetría *vestigial*¹ y el LPF es un pulso cuadrado.

Sin embargo, el pulso SRRC además de ser de Nyquist, tiene la ventaja por sobre el LPF de poseer simetría vestigial en frecuencia. Esto implica que es posible utilizar un mayor ancho de banda para volver mas angosto el pulso en el tiempo, sin romper con la condición de Nyquist, logrando así una menor interferencia íntersimbólica. El pulso LPF no permite hacer uso de esta herramienta ya que, al no poseer simetría vestigial, aumentar el ancho de banda implicaría romper con la condición de Nyquist o aumentar el ancho de banda de manera excesiva, a múltiplos de $\frac{1}{2T_s}$. Una explicación visual puede verse en las figuras 15 y 16, donde en gris se ve cada pulso periodizado por separado y en azul la suma de estos pulsos.

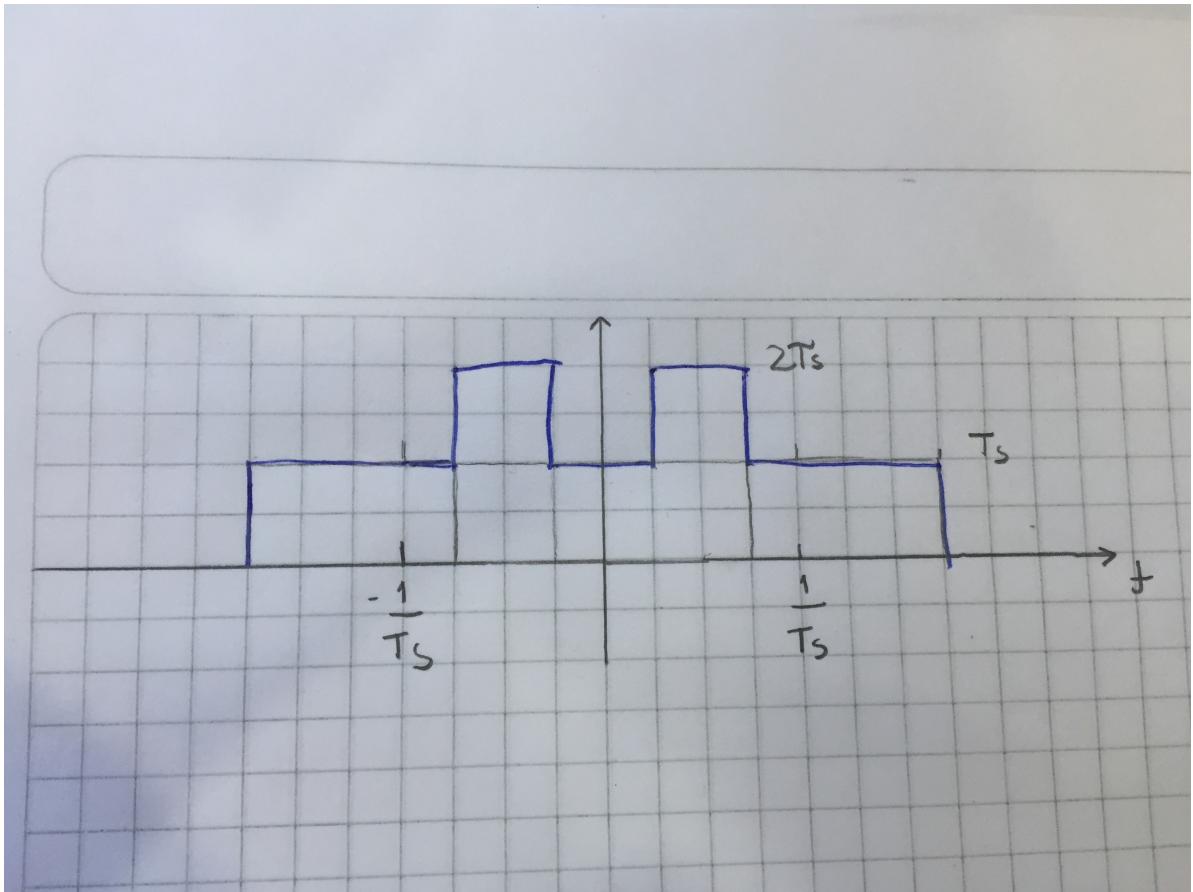


Figura 15: Ejemplo de no cumplimiento de Nyquist

2.5. Parte 5

En las figuras 17 y 18 se ven los histogramas correspondientes a utilizar $len_sym_rate = 51$ y $len_sym_rate = 3$ respectivamente. En ambos casos la muestra óptima es la tercera y por mas de que la diferencia no es grande, se puede notar que las campanas mas finas se dan con $len_sym_rate = 51$, indicando que el efecto del ISI es menor al tomar un enventanado de mayor largo.

Además, analizando el espectro en frecuencia, se observa como tomar un enventanado de menor largo implica una caída en frecuencia mas tenue, mientras que un enventanado mayor implica una caída en frecuencia mas abrupta. Esto, no solo tiene un efecto en el ancho de banda, sino que además, cuanto menor el enventanado, mas se aleja la señal de cumplir Nyquist y por lo tanto mayor el ISI. Esto puede verse con

¹Simetría impar respecto a $\frac{1}{2T_s}$ y sus múltiplos.

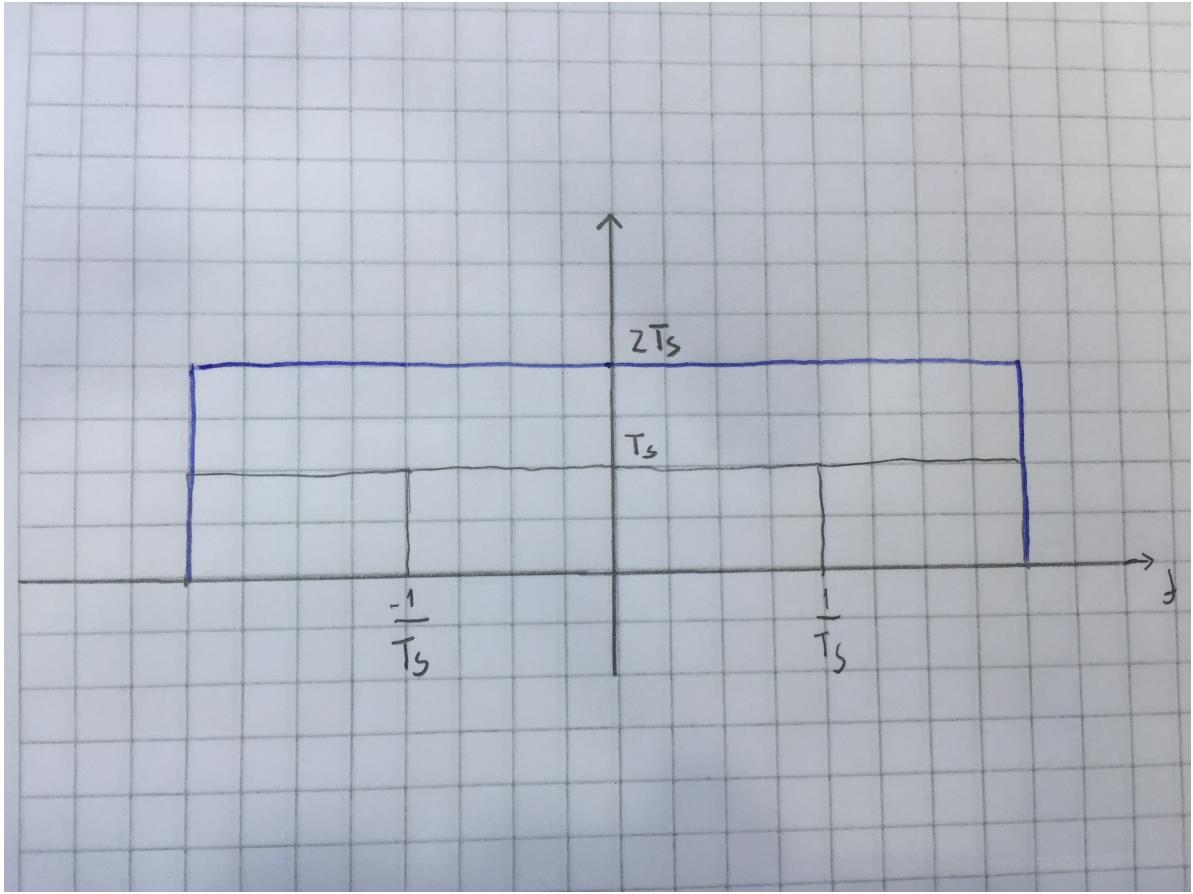


Figura 16: Aumento de ancho de banda para cumplir Nyquist

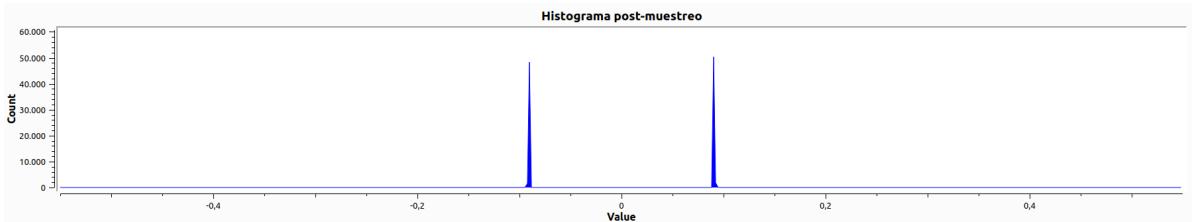


Figura 17: Histograma tercer muestra para $len_sym_rate = 51$

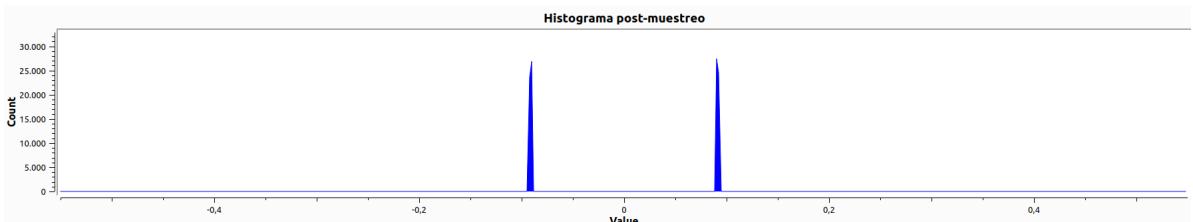


Figura 18: Histograma tercer muestra para $len_sym_rate = 3$

un ejemplo en la figura 19, donde se observa como para el caso de $len_sym_rate = 3$ el espectro tiende a 0 de una forma mucho mas suave que para el caso con mayor largo de símbolos, alejándose de las hipótesis ideales.

Sin embargo, utilizar una cantidad de símbolos muy alta conlleva a una mayor cantidad de muestras, aumentando el costo computacional del problema. Es por esto, que existe un compromiso entre eficiencia (pocos símbolos) y mayor exactitud (muchos símbolos). Junto con esto esta el tema del tiempo, al utilizar

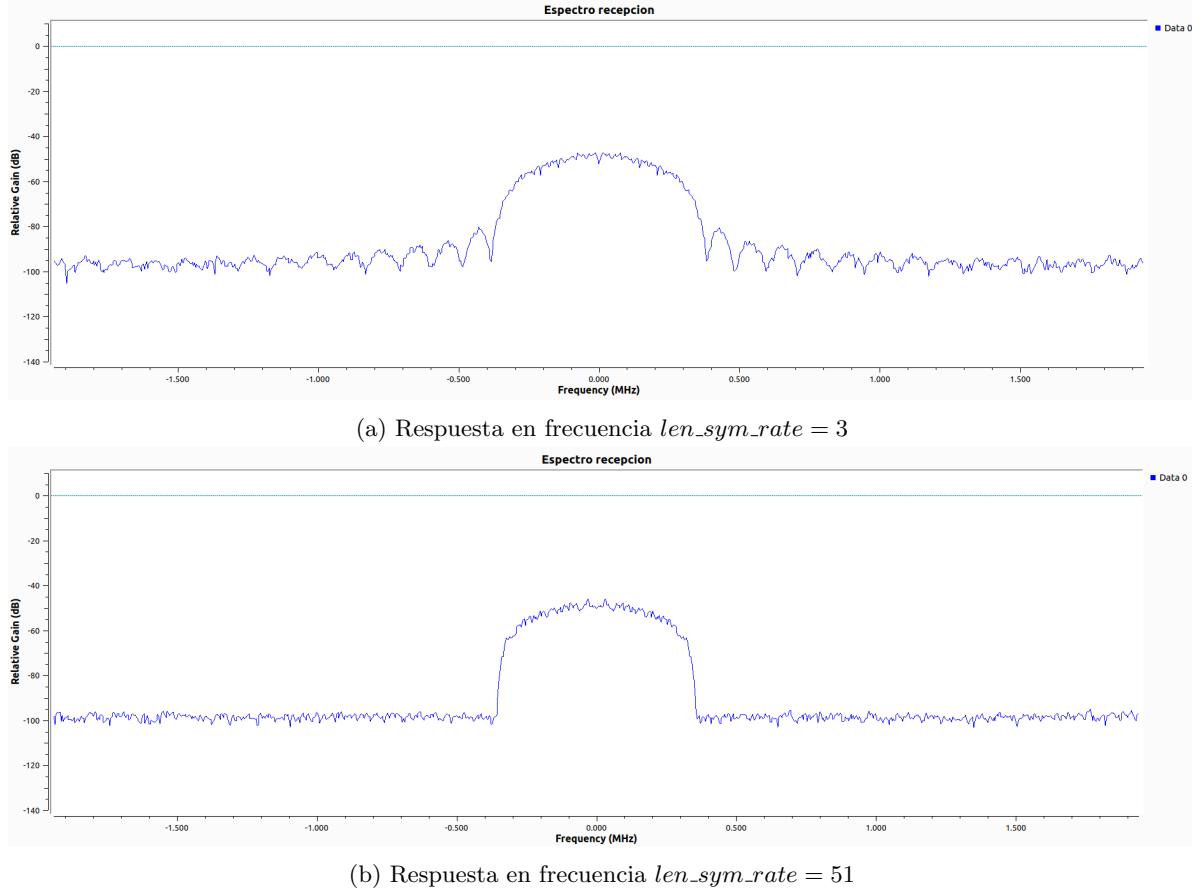


Figura 19: Respuesta en frecuencia para distintos valores de len_sym_rate

muchas muestras hay un retardo considerable que se evita al utilizar pocas.

Una manera de resolver el aumento de ISI es introducir el parámetro *alpha* en el flowgraph, conocido como roll off factor, este parámetro sirve para aumentar el ancho de banda y seguir cumpliendo Nyquist aprovechando la simetría vestigial. Cuando esto se enventana en el tiempo, por mas que sea corto, al haber aumentado el ancho de banda, no se pierde tanta información dado que al aumentar el ancho de banda el pulso en el tiempo se vuelve mas angosto. Esto, tiene la clara desventaja de que es necesario aumentar el ancho de banda, un recurso escaso.

2.6. Parte 6

Para calcular el valor óptimo del umbral se debe calcular la probabilidad de error de símbolo P_e y realizar la optimización respecto al umbral de decisión con el objetivo de minimizar la probabilidad de error.

$$P_e = P_{e0} + p_1 P_{e1}$$

donde p_0 es la probabilidad de ocurrencia del símbolo '0', $(1 - q)$ por letra, P_{e0} es la probabilidad de error al enviar un '0', p_1 es la probabilidad de ocurrencia del símbolo '1', q por letra, y P_{e1} es la probabilidad de error al enviar un '1'.

A continuación se calcularan P_{e0} y P_{e1} tomando atenuación de canal L

$$P_{e0} = P(\text{error} | \text{se mando un '0'}) = P\left(-\frac{A}{\sqrt{L}} + n[k] > \frac{V_T}{\sqrt{L}}\right) = Q\left(\frac{V_T + A}{\sigma\sqrt{L}}\right)$$

$$P_{e1} = P(\text{error} | \text{se mando un '1'}) = P\left(\frac{A}{\sqrt{L}} + n[k] < \frac{V_T}{\sqrt{L}}\right) = Q\left(\frac{A - V_T}{\sigma\sqrt{L}}\right)$$

El valor de σ^2 se calcula de la siguiente manera considerando el filtro de recepción normalizado

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{2} |H(f)|^2 = \frac{\eta}{2}$$

Escribiendo P_e

$$P_e = (1 - q)Q\left(\frac{V_T + A}{\sigma\sqrt{L}}\right) + qQ\left(\frac{A - V_T}{\sigma\sqrt{L}}\right)$$

Derivando esa expresión respecto a V_T ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_e}{\partial V_T} &\stackrel{(1)}{=} \frac{1-q}{\sigma\sqrt{L}} \frac{\partial Q}{\partial V_T}\left(\frac{V_T + A}{\sigma\sqrt{L}}\right) - \frac{q}{\sigma\sqrt{L}} \frac{\partial Q}{\partial V_T}\left(\frac{A - V_T}{\sigma\sqrt{L}}\right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{(1-q)}{\sigma\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{V_T + A}{\sigma\sqrt{L}}\right)^2\right) - \frac{q}{\sigma\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A - V_T}{\sigma\sqrt{L}}\right)^2\right) \end{aligned}$$

donde (1) es por la regla de la cadena y (2) es por la regla de Leibniz.

Igualando a 0 y despejando se obtiene

$$(1 - q)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{V_T + A}{\sigma\sqrt{L}}\right)^2\right) = (q)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A - V_T}{\sigma\sqrt{L}}\right)^2\right)$$

Tomando logaritmos y despejando se obtiene

$$\ln \frac{1-q}{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{(V_T + A)^2 - (A - V_T)^2}{\sigma^2 L} \right)$$

Despejando

$$V_T = \frac{\sigma^2 L}{2A} \ln \frac{1-q}{q}$$

Aumentar la potencia del ruido genera que aumente la probabilidad de error dado que las gaussianas tienen mayor varianza y el área bajo las colas desde el umbral es mayor, incluso tomando el valor óptimo del umbral.

3. Parte III: Sobre el trabajo integrador

Zigbee es un protocolo de comunicación inalámbrica ampliamente utilizado en dispositivos de Internet de las cosas (dispositivos IoT) como pueden ser hogares inteligentes, edificios inteligentes y automatización industrial. Esta tecnología permite la conexión de dispositivos de forma simple y eficiente, ya que utiliza un bajo consumo de energía, una baja tasa de transmisión de datos y un bajo costo.

Zigbee funciona con el estándar IEEE 802.15.4, que especifica las capas física y de control de acceso al medio (MAC) para redes inalámbricas personales de baja velocidad (LR-WPAN). Los dispositivos Zigbee pueden comunicarse entre sí utilizando una topología de red de malla, lo que significa que los dispositivos pueden comunicarse entre sí a través de otros dispositivos cercanos, extendiendo el alcance de la red. Esto lo hace ideal para diversas aplicaciones de IoT, ya que es conocido por su duración prolongada de la batería y características de seguridad.

A continuación, se mencionan algunas buenas referencias para profundizar sobre esta tecnología:

- Farahani, S. (2011). ZigBee wireless networks and transceivers. newnes.
- Ergen, S. C. (2004). ZigBee/IEEE 802.15. 4 Summary. UC Berkeley, September, 10(17), 11.
- Ramya, C. M., Shanmugaraj, M., Prabakaran, R. (2011, April). Study on ZigBee technology. In 2011 3rd international conference on electronics computer technology (Vol. 6, pp. 297-301). IEEE.

También se utilizará la implementación para GNU-Radio de este repositorio de GitHub

Referencias

[1] Editorial Team. Everything rf, Jul 2022.