RISULTATI E COMMENTI

Premessa Teorica

Il laboratorio svolto affronta due questioni fondamentali nell'ambito dell'investimento in strumenti finanziari obbligazionari: l'identificazione del valore attuale del titolo e il calcolo di Duration e Convexity per la valutazione dell'esposizione al rischio di tasso. La risoluzione del primo problema permette di identificare quali sono i titoli presenti sul mercato la cui quotazione attuale risulta essere vantaggiosa rispetto al loro valore intrinseco calcolato in base alla seguente formula: $p(t,x) = \sum_{n=1}^{N} x_n(1+i(t,T_n))^{-T_n}$

La risoluzione del secondo, invece, consiste nella stima di due importanti indici, che vengono calcolati attraverso le seguenti formule:

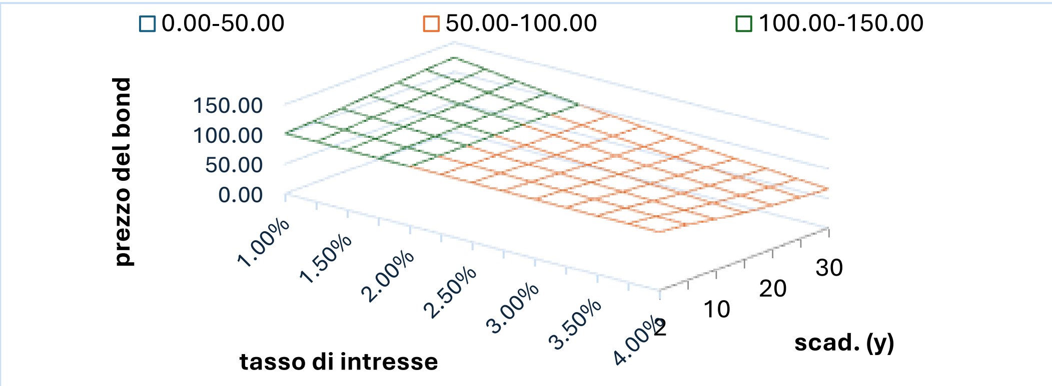
Duration $DU(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)}$ Convexity $C(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)(T_n-t+1)x_n(1+i(t,T_n))^{-T_n+t-2}}{p(t,x)}$

Pur considerando un mondo ideale privo di rischio, dove le obbligazioni vengono certamente rimborsate, è necessario valutare questi parametri poiché non si può eliminare l'incertezza dovuta alle variazioni del valore dei tassi delle nuove obbligazioni emesse. Idealmente, nel caso di una curva costante dei tassi, è facile verificare che la funzione che lega il valore del titolo alla curva è decrescente in questa grandezza. Ciò può essere spiegato dal fatto che l'introduzione sul mercato di nuove obbligazioni con tassi di interesse più elevati rispetto a quelle già presenti provoca una diminuzione del valore di queste ultime, rendendole meno appetibili per gli investitori e viceversa. Questo effetto è tanto accentuato quanto è lontana nel tempo la scadenza del titolo.

Matematicamente ciò è messo in evidenza dalla derivata del prezzo del titolo rispetto ad i e dall'indice di Duration:

$$\frac{dp(t,x)}{di} = -\frac{1}{1+i}DU(t,x)p(t,x) < 0$$

Di seguito illustriamo questo concetto sfruttando un grafico che indica il valore di un'obbligazione dopo un anno nel caso in cui i tassi hanno subito una variazione.



1) Bond con cedole pari a R=2 per T anni con un rimborso di capitale pari a C=100 e curva dei tassi piatta pari al i= 2% e conseguente valutazione del titolo alla pari poiché R/C=i.

Procedimento Homework

In aula abbiamo applicato la tecnica del bootstrap alla curva dei tassi di interesse degli zero coupon bond calcolata per estendere la stima del valore dei tassi in corrispondenza di ulteriori date. Nell'homework abbiamo affrontato il problema opposto: a partire dalla curva dei tassi data dagli zero coupon bond abbiamo calcolato i prezzi di mercato di due obbligazioni.

Grazie alla curva degli zero coupon bond, abbiamo infatti calcolato i tassi di interesse corrispondenti alle date delle cedole delle nostre obbligazioni tramite interpolazione grazie alla seguente formula:

$$i(t,x) = \frac{(T_2-x)i(t,T_1)+(x-T_1)i(t,T_2)}{T_2-T_1}$$

Mediante questi tassi, abbiamo poi calcolato il valore attuale dei due titoli: $p(t,x) = \sum_{n=1}^{N} x_n\left(1+i(t,T_n)\right)^{-T_n}$

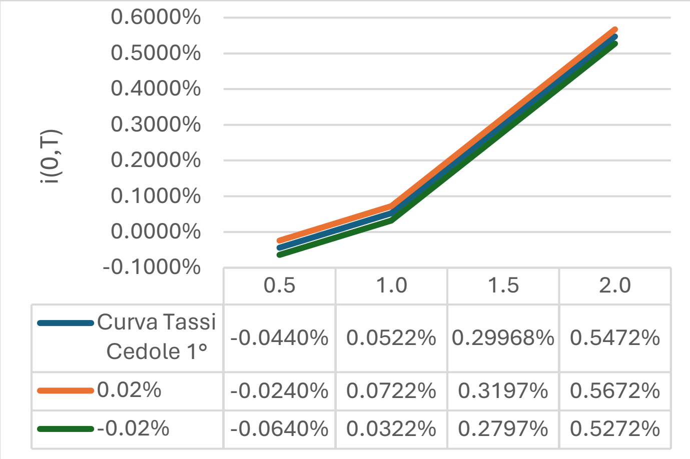
Infine, abbiamo ottenuto i loro market price come differenza tra valore attuale e rateo (che nel primo caso è nullo).

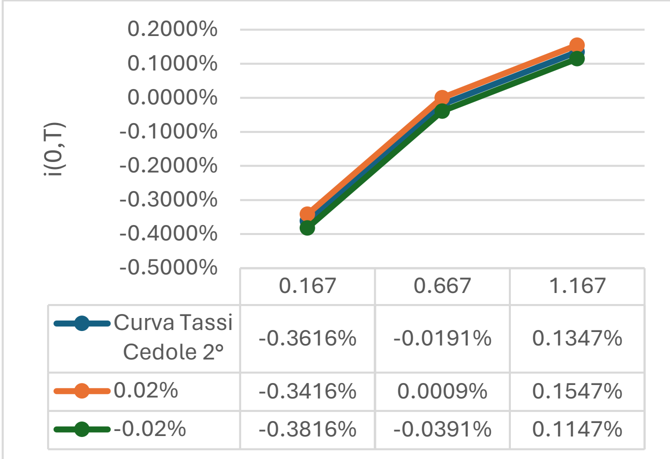
Successivamente, abbiamo introdotto un portafoglio costituito da due unità del primo titolo e tre del secondo, di cui abbiamo calcolato duration e convexity, ottenute come media ponderata delle duration e convexity dei singoli titoli.

Infine, abbiamo svolto il procedimento per immunizzare un'uscita di denaro L=4000€ con T=3 anni, sfruttando il teorema di Fisher e Weil che prevede la risoluzione di un sistema lineare.

Risultati del Laboratorio

Data la curva dei tassi calcolata a lezione interpoliamo in corrispondenza degli istanti di tempo delle cedole dei due titoli e ricaviamo il valore i(0,T)





Ipotizzando che oggi sia il 1° aprile 2024, la richiesta era di quotare le seguenti obbligazioni nel caso di curva dei tassi normale, di shift positivo di 0,02% e di shift negativo di 0,02%:

- Obbligazione cedolare, tasso cedolare 2%, valore nominale 100€, scadenza 1° aprile 2026;
- Obbligazione cedolare, tasso cedolare 2%, valore nominale 100€, emessa il 1° giugno 2021, durata 4 anni.

	Prezzo (curva normale)	Prezzo (curva con shift positivo)	Prezzo (curva con shift negativo)	Duration titolo (curva normale)	Convexity titolo (curva normale)
Primo Titolo	102,8988728	102,8585432	102,9392264	1,970868783	5,824882714
Secondo Titolo	102,1756090	102,1519492	102,1992790	1,159591692	2,48465417

I risultati trovati confermano le previsioni teoriche introdotte nella prima parte del report: nel caso di aumento dei tassi di interesse il prezzo dei titoli diminuisce, mentre in caso di diminuzione aumenta.

Successivamente, bisognava calcolare duration e convexity del portafoglio costituito da due unità del primo titolo e tre del secondo. I risultati sono i seguenti: **DU = 1,485476893** **C = 3,826404187**

Il primo valore rappresenta un indice temporale del flusso dei pagamenti del portafoglio e al contempo indica la sensibilità del suo valore di mercato alle variazioni di tasso. È importante osservare che un'obbligazione con una duration più lunga sarà più sensibile ai cambiamenti dei tassi di interesse rispetto a un'obbligazione con una duration più breve.
Il secondo indice, invece, rappresenta il rapporto tra la derivata seconda del valore di mercato del portafoglio rispetto al tasso in capitalizzazione composta e il valore di mercato del portafoglio. Questa quantità è inoltre decrescente nella cedola e in i, mentre è crescente nella maturity. Inoltre, una convexity più alta indica una maggiore variazione della duration in risposta ai cambiamenti dei tassi di interesse, mentre una convexity più bassa indica una minore variazione.

Infine, ci veniva richiesto di immunizzare un'operazione con un'unica uscita a tre anni dal 1° aprile 2024 con due operazioni la cui ultima scadenza è inferiore all'orizzonte temporale previsto. In accordo col teorema di Fisher e Weil è stato risolto il seguente sistema:

$$\begin{cases} DU(0,x) = H \\ V(0,x) = V(0,L) \end{cases}$$

Che ci ha permesso di ottenere i seguenti risultati: **l'acquisto di 86 unità del 1° titolo e la vendita allo scoperto di 48 unità del 2°titolo.**
Tuttavia, sul mercato obbligazionario non è possibile effettuare operazioni di vendita allo scoperto, per cui non è possibile immunizzare tale uscita disponendo solamente di questi due titoli, la cui scadenza oltretutto è precedente rispetto all'uscita da immunizzare.