RISULTATI E COMMENTI

Introduzione

Il *value at risk* è una misura che permette di quantificare l'esposizione alle perdite del nostro portafoglio. Da un punto di vista intuitivo rappresenta quella quantità di denaro tale che la potenziale perdita del portafoglio è superiore ad essa con probabilità pari a p.

Formalmente è così definito: dato l'istante di tempo t con livello di confidenza $1-p$ nell'arco di tempo $[\mathrm{t}, \mathrm{t}+\mathrm{h}]$, $VaR^p(t+h)$ è tale che $P_r\big(L(t+h) > VaR^p(t+h)\big) = p$ da cui

$$VaR^p(t+h) = \inf \{\, l \in R\colon\ P_r(L(t+h) > l) \leq p \,\}$$

Dal punto di vista probabilistico corrisponde al quantile di ordine $1-p$ della funzione di ripartizione F_L della variabile aleatoria che descrive la distribuzione delle perdite (Loss L). Nel caso di una generica variabile aleatoria indichiamo $VaR^p(t+1) = F_L^{-1}(1-p)$ da cui, nel caso $L(t+1) \sim N(\mu, \sigma^2)$, si può ricavare la seguente formula esplicita $VaR^p(t+1) = \mu + \sigma\, \Phi^{-1}(1-p)$ (1), dove Φ^{-1} è l'inversa della funzione di ripartizione della gaussiana standard i cui valori sono tabulati.

È interessante osservare che in quanto quantile della distribuzione della perdita il *VaR* non fornisce alcuna informazione sull'entità della potenziale perdita; per porre rimedio a questa carenza è stata introdotta una misura di rischio denominata *Expected Shortfall.* La quantità si ottiene mediante il seguente integrale: $ES^p = \frac{1}{p}\int_0^p VaR^x dx$ dove p è detta significatività e la funzione ottenuta rispetta tutte le proprietà che la rendono una *misura di rischio coerente*. Da un punto probabilistico può essere interpretata come il valore atteso della Loss condizionata al VaR ovvero $ES^p = E[L|L \geq VaR^p]$.

Nel caso considerato nell'homework l'assunzione di gaussianità ci per permette di ricavare la seguente formula che mette in evidenza il comportamento monotono decrescente in p della misura:

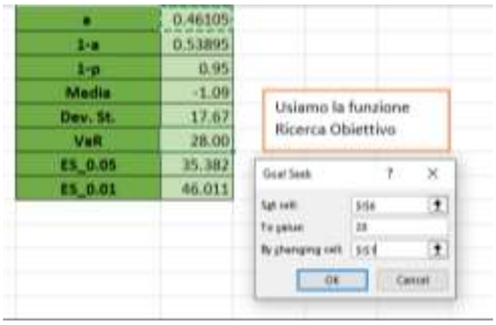
$$ES^p(t+1) = \mu + \sigma E\left[\frac{L(t+1)-\mu}{\sigma} \middle| \frac{L(t+1)-\mu}{\sigma} \geq F^{-1}_{\frac{L(t+1)-\mu}{\sigma}}(1-p)\right] = \mu + \sigma \frac{\phi\big(\Phi^{-1}(1-p)\big)}{p} \quad (2)$$

Rispetto alle misure fornite dal VaR una funzione di questo tipo risulta essere più sensibile a perdite elevate: per verificarlo consideriamo il rapporto delle due misure che, a parità di p, risulta essere sempre maggiore o uguale a 1 $\left(\frac{ES^p}{VaR^p} \geq 1\right)$. Nel caso semplice $L \sim N(0,1) \rightarrow \frac{\phi\left(\Phi^{-1}(1-p)\right)}{p\Phi^{-1}(1-p)}$ per p=0.01 vale 1.15>1.

Svolgimento

Per rispondere ai quesiti sottoposti nell'homework abbiamo adottato un approccio basato *sull'historical simulation*. Un approccio di questo tipo assume che la distribuzione delle *Loss* nell'istante di tempo *t+1* rispecchi l'approssimazione fornita dalla serie storica. Questo metodo risulta particolarmente efficiente nel caso di titoli azionari il cui prezzo non è influenzato da alcun tipo di scadenza. Un altro vantaggio è la semplicità implementativa e computazionale dell'algoritmo e in generale l'assenza di ipotesi matematiche pregresse che ne precludano la validità. Nel nostro caso, dato il rendimento storico giornaliero di tre titoli azionari, ci è stato richiesto di creare un portafoglio composto da due di questi avente *VaR* prefissato pari a 28. Per fare ciò in un primo momento abbiamo posto *a* pari a 0 per il solo scopo di calcolo delle performance del portafoglio composto dai pesi $\omega = [a, 1-a]$.

Da qui ricostruiamo *Gain* e *Loss* nell'arco del periodo storico e, dopo aver stimato la media ("MEDIA(…)") e la deviazione standard ("DEV.ST.C(…)"), troviamo $VaR(t+1) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1-p)$ grazie all'assunzione di



normalità dei dati. Tramite la funzione "Ricerca Obiettivo" abbiamo collegato la cella di *output* (I6) contenente il valore del *VaR* al parametro di *input* (I1) ovvero la cella che contiene il parametro *a.* Questa procedura permette di trovare in maniera automatica il valore di *a* tale che il portafoglio che viene costruito abbia un *VaR* = 28 (siamo consapevoli che partendo da un altro valore di a, che si discosta maggiormente da 0, tramite la ricerca obiettivo potremmo trovare l'altra soluzione di (3) "che è comunque" riportata nel file Excel e le cui considerazioni sarebbero uguali con quelle fatte per i valori di a riportati).

$$VaR = \omega^{\top}\bar{\mu} + \sqrt{\omega^{\top}V\omega}\,\Phi^{-1}(1-p) = 28 \quad (3)$$

Il ragionamento viene replicato in maniera analoga per i primi quattro punti modificando solo il parametro *p* a seconda delle richieste ponendolo sia pari a 0.05 che 0.01.

Il calcolo dell'*Expected Shortfall* (ES^p), grazie all'ipotesi di gaussianità, si svolge utilizzando la formula (2) tramite le funzioni Excel "DISTRIB.NORM.N(…)" e "INV.NORM(…)". Questa procedura è stata replicata per ogni portafoglio e per ogni p (0.01 e 0.05).

L'ultima richiesta prevedeva la costruzione del portafoglio a varianza minima a partire dai dati storici dei tre titoli. Da questi abbiamo ricavato i rendimenti logaritmici giornalieri e abbiamo costruito il vettore delle medie e la matrice di varianza e covarianza. I pesi del portafoglio si ottengono applicando la seguente formula:

$$\omega^{MVP} = \frac{V^{-1}\,\bar{1}}{C}$$

Ottenuti i pesi ricalcoliamo il rendimento del portafoglio, *Gain* e *Loss*. Usando le formule (1) e (2) calcoliamo il *VaR* e *ES* all'1% (p=0.01) e al 5% (p=0.05).

Risultati

Dati	*Apple-Amazon 5%*	*Apple-Amazon 1%*	*Apple-Facebook 5%*	*Apple-Facebook 1%*
a	**0,461048**	**0,630251**	**-4,60323**	**-2,9060611**
1-a	**0,538952**	**0,369749**	**5,603229**	**3,9060611**
VaR^p	**28**	**28**	**28**	**28**
$ES^{0.01}$	**46,011**	**32,19**	**45,62679**	**32,123448**
$ES^{0.05}$	**35,382**	**24,74**	**35,21897**	**24,791994**

Coerentemente con quanto previsto dalle nostre deduzioni teoriche, osserviamo che, a parità di livello di confidenza *p*, il Value at Risk (VaR) risulta sempre inferiore all'Expected Shortfall (ES) e quest'ultimo decresce all'aumentare di *p*. Questo comportamento è in linea con le aspettative, poiché il VaR rappresenta una stima *puntuale*, mentre l'ES è una misura *intervallare* oltre una determinata soglia, attribuisce maggior peso alla "coda" della distribuzione. I coefficienti ottenuti dal calcolo del portafoglio a varianza minima sono i seguenti:

$$\omega^{MVP} = [0{,}414318562;\ 0{,}3689694;\ 0{,}21671205]$$

	p = 0.01	*p = 0.05*
VaR^p	**28,66407334**	**20,037749**
ES^p	**32,95342883**	**25,326992**

Anche in questo caso sia il VaR sia l'ES sono decrescenti nella p.