Risultati e Commenti

Introduzione

Lo scopo principale di questo laboratorio è l'individuazione di un prezzo per un titolo derivato in modo da eliminare ogni possibilità di arbitraggio su di esso o sul suo titolo sottostante.
Un *titolo derivato* è un asset finanziario il cui rendimento è direttamente legato alle performance di un altro titolo scambiato sul mercato detto *titolo sottostante*. Quest'ultimo può essere di varia natura: azione, obbligazione, commodity o un generico tasso di cambio. Fra tutti i vari tipi di contratto che legano il rendimento del derivato al titolo sottostante ci siamo concentrati su una particolare tipologia di derivati detti *opzioni*. Un'opzione è un contratto stipulato da due controparti che permette ad una delle due, senza che sia obbligata, di acquistare o vendere il titolo sottostante ad un determinato prezzo K, detto *strike price*, alla scadenza o nell'arco di un determinato lasso di tempo T, detto *maturity*.
A loro volta le obbligazioni si classificano in base alle loro due caratteristiche principali: l'istante di esercizio e il diritto acquisito. In particolare, un'opzione che può essere esercitata solo alla scadenza è detta *Europea* mentre se può essere esercitata in ogni istante di tempo $t \in [0, T]$ è detta *Americana*; se danno diritto all'acquisto sono dette *Call*, se danno il diritto di vendita sono dette *Put*.
È poi possibile combinare l'acquisto/vendita del sottostante e dell'opzione in modo da mettere in atto opportune strategie che rispecchino le nostre perspettive d'andamento del mercato e che ci tutelino da variazioni repentine limitando i guadagni ma minimizzando le perdite. Fra le varie tipologie di strategie esistenti notiamo la *Covered Call* e la *Protective Put* che, se combinante, formano una *collar*.

Svolgimento

Per calcolare il prezzo di non arbitraggio di un'opzione Collar, un particolare tipo di derivato composto da *un long asset*, una *short call* e una *long put* abbiamo innanzitutto determinato i fattori up (u) e down (d), che rappresentano rispettivamente un aumento e una diminuzione percentuale del prezzo: $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, $d = \frac{1}{u}$ con $u > 1 > d$; σ indica la volatilità e δt è l'intervallo di discretizzazione scelto (nel nostro caso pari ad 1/19).
In seguito, abbiamo costruito l'albero binomiale dell'underlying asset; per farlo è bastato moltiplicare, ad ogni passo, il valore dello stock all'istante precedente una volta per il fattore u (casella adiacente) e una volta per il fattore d (casella sottostante); il procedimento deve essere ripetuto per il numero di steps, nel nostro caso 19.
A questo punto abbiamo ricavato i payoff per un'opzione call, una put e una collar nel seguente modo:

$$P_{Call_i} = \max[0; S(T)_i - K_C]$$

$$P_{Put_i} = \max\left[0; K_p - S(T)_i\right]$$

$$P_{Collar_i} = S(T)_i + P_{Put_i} - P_{Call_i} \text{ con } i = 1, \dots, T.$$

Da questi abbiamo costruito in maniera ricorsiva l'option tree per le tre opzioni:

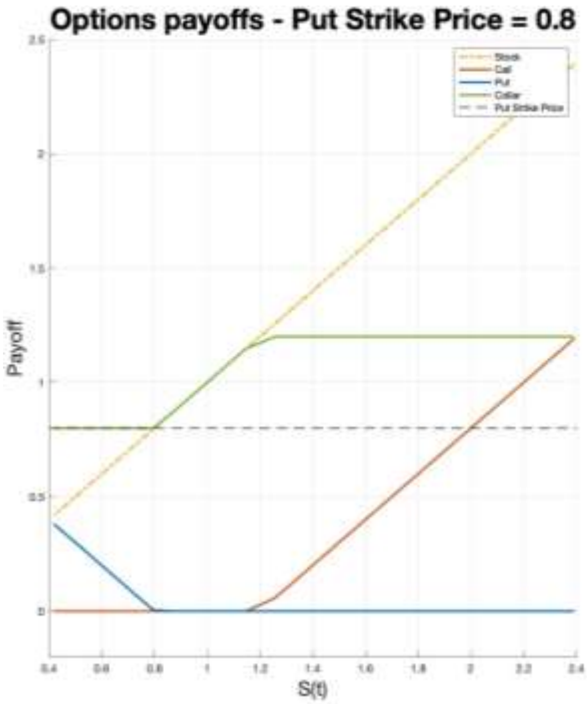
$$F[S(t)]_i = e^{-r\delta t}(q_u F[S(t+1)]_i + q_d F[S(t+1)]_{i+1}) \; con \; i = 1, \dots, t$$

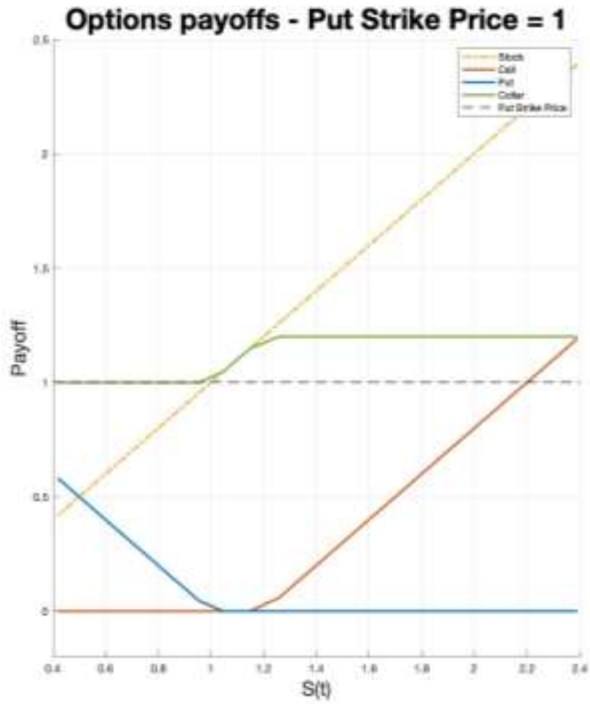
dove r è il tasso risk free, $q_u = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$ e $q_d = 1 - q_u$ sono le probabilità di finire rispettivamente nello stato up e down, al fine di ricavare il prezzo di non arbitraggio $F[S(0)]$.

Tutto il procedimento, precedentemente illustrato, è stato ripetuto due volte, la prima volta con il valore di strike dell'opzione put pari a 0.8 e la seconda volta a 1.

Risultati

- Rappresentare graficamente il payoff di una collar option:





Eseguiti tutti i calcoli, abbiamo realizzato i grafici dei payoff delle tre opzioni in relazione ai valori del sottostante nei diversi istanti di tempo. In merito al grafico con put strike 0.8, è possibile notare come quando S(t) scende sotto 0.8 la put comprata fornisce protezione, infatti il suo payoff aumenta compensando la perdita nell'azione sottostante; di conseguenza il payoff della collar non scende al di sotto di 0.8 offrendo protezione contro ribassi significativi.

Quando, invece, S(T) supera lo strike price della call venduta il payoff dell'azione sottostante continua a salire ma il payoff della call inizia a ridurre i guadagni. La linea verde (payoff della collar) diventa costante sopra un certo di livello di S(T) a causa dell'obbligo di vendere l'azione a un prezzo fissato dalla call venduta.
In conclusione, nel caso dello strike price della put pari a 0.8, il payoff della collar è compreso nell'intervallo [0.8, 1.2] e, nel caso di uno strike price della put pari a 1, il payoff è compreso fra [1,1.2].

- Quali sono i prezzi di una collar option con put strike 0.8 e put strike 1?

Prezzo Collar Option con Put strike 0.8	Prezzo Collar option con Put strike 1
0,9863	**1,0515**

Dai prezzi riportati, notiamo come una put con uno strike price più alto offra una maggiore protezione contro il calo del prezzo dell'opzione, permettendo all'investitore di vendere a un prezzo più alto; questa maggiore protezione rende l'opzione put più costosa. Questo incremento del premio si riflette nel costo complessivo della collar.