RISULTATI E COMMENTI

Il laboratorio svolto richiede la creazione di 4 portafogli con specifiche caratteristiche a partire da 5 titoli rischiosi e un titolo privo di rischio. I titoli con rendimento aleatorio sono rappresentati dai seguenti indici azionari: DJI, STOXX, N225, HSI, IXIC, mentre il titolo risk-free è un generico conto corrente con un tasso di interesse annuale pari al 2%.

Premessa Teorica

Dal punto di vista teorico stiamo considerando un'economia composta da 5 titoli il cui rendimento è distribuito come una variabile aleatoria $\widetilde{\mathrm{r_n}}$ con media e_n, varianza σ_n^2 e covarianza fra di esse pari a $Cov(\widetilde{r_i}, \widetilde{r_j}) = \sigma_{ij}$. Il titolo privo di rischio permette invece di trasferire con certezza denaro nel tempo garantendo al contempo un rendimento costante rf=2%. Partendo dalle singole variabili costruiamo il vettore aleatorio $\bar{\mathrm{r}}$ con vettore delle medie $e \in \mathrm{R}^5$ e matrice di varianza-covarianza $\mathrm{V} \in \mathrm{R}^{5\times5}$. Vale la pena osservare che fra le componenti del vettore che descrivono i titoli aleatori ed il titolo privo di rischio $\mathrm{Cov}(\widetilde{\mathrm{r_n}}, rf) = 0 \quad \forall\, \mathrm{n} = 1, \dots, \mathrm{N}.$ Il portafoglio è quindi una variabile aleatoria ottenuta dalla combinazione lineare $\omega^\top \bar{r}$ con media pari a $E[\omega^\top \bar{r}] = \omega^\top e\ = \sum_{n=1}^{N} w_n \mathrm{e_n}$ e varianza $\sigma(\bar{\mathrm{r}})^2 = \omega^\top \mathrm{V}\, \omega = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} \omega_\mathrm{i}\ Cov(\widetilde{r_i}, \widetilde{r_j})\, \omega_\mathrm{j}$.

Il rendimento rf è su base annuale, dovremo quindi suddividere tale valore per il numero di intervalli temporali $q = 52$ rispetto ai quali calcoliamo il rendeimento dei titoli rischiosi. Per farlo sfruttiamo la capitalizzazione composta poiché anche il rendimento dei titoli azionari segue questo criterio. Il tasso di interesse equivalente per la frazione temporale $\frac{1}{q}$ sarà quindi pari a $i_q = (1+q)^{\frac{1}{q}} - 1$.

I portafogli richiesti nell'homework sono i seguenti:

1. Equally weighted portfolio (EW): $\omega^{\mathrm{EW}} = \left[\frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{5}\right]$
2. Global minimum variance portfolio (MVP): $\omega^{MVP} = \frac{V^{-1}\mathbb{1}}{\mathbb{1}^\top V^{-1}\mathbb{1}}$
3. Risk parity portfolio (RSK): $\omega^{RSK} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{5} \sigma_n^{-1}} [\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_5^{-1}]$
4. Tangent portfolio (TG) : $\omega^{\mathrm{T}} = \mathrm{V}^{-1} \frac{\mathrm{e} - \mathrm{rf}\mathbb{1}}{\mathbb{1}^\top \mathrm{V}^{-1}(\mathrm{e} - \mathrm{rf}\mathbb{1})}$

Svolgimento

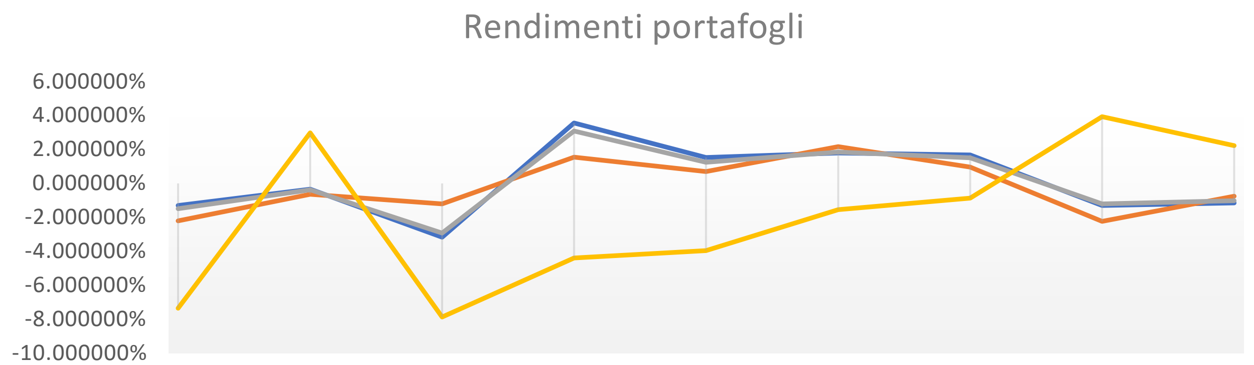
Scarichiamo da Yahoo finance le quotazioni delle chiusure settimanali dei 5 titoli dal 28/03/2022 al 25/03/2024 in formato csv. Dopo averli importati in un foglio di calcolo Excel calcoliamo i rendimenti, di settimana in settimana, nel modo seguente $\Delta\% = \frac{P(t+i) - P(t)}{P(t)}$ per ciascun titolo. Una volta ottenute le variazioni percentuali calcoliamo la media campionaria con la funzione 'MEDIA ()', la varianza campionaria con 'VAR.C()' e 'COVARIANZA.C()' in modo da costruire il vettore delle medie e la matrice di varianza-covarianza V dei rendimenti storici.

Una volta ottenuti questi valori con le funzioni 'MATR.INVERSA()' e 'MATR.PRODOTTO()' costruiamo il vettore dei pesi di ciascun portafoglio.

Pesi	EW	MVP	RSKP	TG
DJI	0.2000000000	0.4528601183	0.2240947670	-0.2140273999
HSI	0.2000000000	0.1072934261	0.1499467722	-0.9761080993
N225	0.2000000000	0.3058188629	0.2105554547	1.8394638749
STOXX	0.2000000000	0.3996681903	0.2563117073	0.5904133831
IXIC	0.2000000000	-0.2656405975	0.1590912987	-0.2397417587

Valutazione della Performance

Per valutare la performance dei portafogli, abbiamo ancora una volta ricavato il valore delle chiusure settimanali dal 1° aprile 2024 al 31 maggio 2024, convertito il valore in euro e da questi calcolato i rendimenti di settimana in settimana. Infine, abbiamo calcolato i rendimenti dei portafogli moltiplicando i rendimenti settimanali per i pesi dei portafogli precedentemente ottenuti:



	05/04/2024	12/04/2024	19/04/2024	26/04/2024	03/05/2024	10/05/2024	17/05/2024	24/05/2024	31/05/2024
EW	-1.314205%	-0.345142%	-3.176018%	3.553319%	1.511793%	1.788246%	1.669119%	-1.315788%	-1.158559%
MVP	-2.217446%	-0.638965%	-1.219989%	1.533325%	0.686881%	2.158584%	0.949997%	-2.243316%	-0.766819%
RSKP	-1.494639%	-0.383080%	-2.933011%	3.078916%	1.227943%	1.830992%	1.495976%	-1.217232%	-1.025167%
TG	-7.365600%	2.973227%	-7.877682%	-4.397269%	-3.959141%	-1.558050%	-0.870431%	3.923351%	2.215633%

Per ciascun portafoglio abbiamo poi calcolato: il rendimento medio, la deviazione standard e lo *sharpe ratio* $\frac{E[\tilde{r}]-r_f}{\sigma(\tilde{r})}$. Dal punto di vista intuitivo questa grandezza misura il rendimento per unità di rischio del portafoglio in questione.

	EW	MVP	RSKP	TG
Media	0.1347516	-0.1953054	0.064522	-1.8795512
Deviazione standard	2.1136124	1.5998347	1.9383126	4.3567942
Sharpe Ratio	0.045733234	-0.145886698	0.013637025	-0.440149419

Alla luce dei risultati ottenuti è possibile notare che il portafoglio che ha il rendimento atteso maggiore è quello equally weighted, seguito da quello risk parity, mentre il portafoglio tangente presenta il rendimento atteso più basso. Per quanto riguarda la deviazione standard, una misura del rischio, il portafoglio che presenta i valori più elevati è quello tangente, seguito da quello equally weighted. Lo sharpe ratio è invece massimo per il portafoglio equally weighted: in un'ottica di scelta basata sul criterio Media-Varianza, tenderemo quindi a escludere questo portafoglio.

Possiamo concludere quindi che il portafoglio 1/N sembra essere il migliore, nel periodo analizzato, avendo uno sharpe ratio positivo, un rendimento atteso positivo e una deviazione standard non troppo elevata.

Notiamo, infine, come i risultati trovati concordino con le aspettative teoriche. Il portafoglio a varianza minima globale presenta effettivamente la varianza minima. Ricordiamo, poi, che tutti i portafogli nel piano rendimento atteso-deviazione standard che si trovano alla sua destra sono raggiungibili, mentre quelli alla sua sinistra non lo sono; mettendo così in evidenza un trade-off rischio rendimento, ossia quali combinazioni di rischio e rendimento sono possibili.
Difatti, cercando un portafoglio con un rendimento atteso superiore a quello di varianza minima dobbiamo aspettarci anche un aumento della varianza