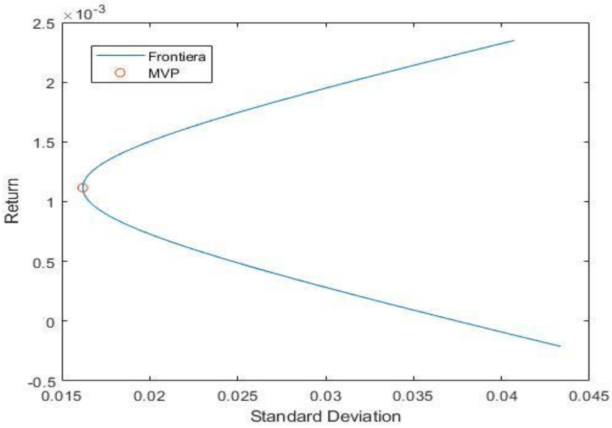
RISULTATI E COMMENTI

La frontiera dei portafogli

La Frontiera dei Portafogli è un concetto centrale nelle moderne teorie di gestione del portafoglio e di rischio degli investimenti.
Si tratta dell'insieme dei portafogli che offrono il minimo rischio possibile per un dato livello di rendimento atteso, o viceversa, che massimizzano il rendimento atteso per un determinato livello di rischio.
I portafogli di frontiera w^p, dunque, sono quelli che risolvono il seguente problema: $\min_{\omega \in R^N} \frac{1}{2} \omega^\top V \omega$ sotto i vincoli $\omega^\top e = E[\tilde{\tilde{r}}]$ e $\omega^\top \bar{1} = 1$ **,** dove e è il vettore dei rendimenti attesi degli N titoli e V è la matrice di varianza e covarianza.
Essenzialmente, si tratta di una rappresentazione grafica delle combinazioni ottimali di asset in un portafoglio che, se si considera lo spazio rendimento atteso-deviazione standard, si traduce in un'iperbole. La frontiera dei portafogli mostra visivamente le combinazioni di asset che offrono il miglior trade-off tra rischio e rendimento; infatti, alla sua destra si incontrano tutti quei portafogli raggiungibili a partire dagli N≥2 titoli rischiosi, mentre alla sua sinistra si trovano le combinazioni rendimento atteso-deviazione standard che non sono raggiungibili.



Procedimento Homework:

Ciò che, in primo luogo, ci è stato richiesto di svolgere nell'homework consiste nel, dati i prezzi giornalieri di tre titoli (Apple, Amazon e Facebook), costruire la frontiera di tre portafogli composti da tutti o alcuni di questi titoli e determinarne il portafoglio a varianza minima.
Per fare ciò abbiamo prima ricavato il rendimento logaritmico giornaliero e il rispettivo valore atteso per ogni titolo per poi concentrarci sulla costruzione dei portafogli.
Abbiamo quindi costruito per ogni portafoglio la matrice varianza-covarianza, che poi è stata invertita con il comando Excel "MATR.INVERSA", e finalmente abbiamo calcolato i coefficienti A, B, C, D attraverso le seguenti formule: $A = 1^T V^{-1} e$, $B = e^T V^{-1} e$, $C = 1^T V^{-1} 1$, $D = BC - A^2$,
e i vettori g e h: $g = \frac{B(V^{-1}1) - A(V^{-1}e)}{D}$, $h = \frac{C(V^{-1}e) - A(V^{-1}1)}{D}$, fondamentali sia per l'analisi dei singoli portafogli sia per la determinazione del portafoglio a varianza minima globale: $w^{MVP} = \frac{V^{-1}1}{C}$.
Per rispondere al quarto punto è necessario mettere in evidenza le ipotesi di partenza: i rendimenti sono distribuiti come un vettore gaussiano $\tilde{r} \sim N(\mu, V)$ con vettore delle medie e matrice di varianza noti e funzione di utilità quadratica ($u(x) = x - \frac{b}{2}x^2$, con b=0.001).
La ricchezza del portafoglio al tempo t=1 sarà quindi una variabile aleatoria scalare con la seguente distribuzione gaussiana: $\widetilde{W} = \mathrm{x\,rf} + \omega^\top(\tilde{r} - \mathrm{rf}) \sim \mathrm{N}\big(\mathrm{x\,rf} + \omega^\top(\mu - \mathrm{rf}), \omega^\top V \omega\big)$.
La formalizzazione e la soluzione del problema consiste nel risolvere un sistema di 3 equazione nelle 3 incognite $w_1\, w_2\, w_3$, ossia nel risolvere la seguente espressione semi esplicita $\omega^* = \frac{1 - bxE[\widetilde{W}]}{b} V^{-1}\big(\mu - \overline{rf}\big)$, da cui ricaviamo i pesi del portafoglio ottimo in forma esplicita:

$$\omega_i = \frac{1 - \mathrm{bx}\big(\mathrm{x} * \mathrm{rf} + \omega_1(\mu_1 - \mathrm{rf}) + \omega_2(\mu_2 - \mathrm{rf}) + \omega_3(\mu_3 - \mathrm{rf})\big)}{\mathrm{b}} \Big(V^{-1}\big(\bar{\mu} - \overline{\mathrm{rf}}\big)\Big)_i \quad \forall i = 1, \dots, 3$$

La soluzione si trova quindi risolvendo il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} b\left(\left(V^{-1}\left(\vec{\mu}-r_f\vec{1}\right)\right)_1^{-1}+\mu_1-r_f\right) & b\left(\mu_2-r_f\right) & b\left(\mu_3-r_f\right) \\ b\left(\mu_1-r_f\right) & b\left(\left(V^{-1}\left(\vec{\mu}-r_f\vec{1}\right)\right)_2^{-1}+\mu_2-r_f\right) & b\left(\mu_3-r_f\right) \\ b\left(\mu_1-r_f\right) & b\left(\mu_2-r_f\right) & b\left(\left(V^{-1}\left(\vec{\mu}-r_f\vec{1}\right)\right)_3^{-1}+\mu_3-r_f\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \vec{1} - bx^2 r_f \vec{1}$$

Per risolvere l’ultimo punto, invece, abbiamo innanzitutto ricavato i valori del portafoglio ottimo nel caso di portafogli composti da uno solo dei tre titoli e dal titolo rischioso, utilizzando come legge di attualizzazione sia quella semplice che quella composta; abbiamo calcolato il valore atteso e la varianza dei portafogli ottimi trovati per ricavarne infine l’utilità attesa $E[u(x)] = -\frac{1}{a}e^{-a(\bar{x}-\frac{1}{2}a\sigma^2(x))}$.

Risultati:

❖ **Punto 1/2**: Costruire la frontiera dei portafogli A e B

Portafoglio	A	B	C	D	**g**	**h**
(Apple,Amazon&Facebook)	4,26015471	0,0058447	3816,85552	4,15945625	**0,52431508** **-1,6819735** **2,15765846**	**-98,550607** **1837,52783** **-1738,9772**
A (Amazon&Facebook)	3,728813775	0,005287732	3309,962044	3,598140806	**-1,40963677** **2,409636776**	**1786,339235** **-1786,33923**
B (Apple&Facebook)	3,319378093	0,00345697	3446,185203	0,895086984	**-2,71389656** **3,713896568**	**3439,141204** **-3439,14120**

❖ **Punto 3**: Determina il portafoglio a var minima nei casi A e B e nel portafoglio di tre titoli visto a lezione

Portafoglio	W $apple$	W $amazon$	W $facebook$
(Apple,Amazon&Facebook)	**0,414318562**	**0,368969384**	**0,216712054**
A (Amazon&Facebook)	----------------	**0,602750756**	**0,397249244**
B (Apple&Facebook)	**0,59869672**	----------------	**0,40130328**

❖ **Punto 4:** (i risultati riportati sono stati calcolati attualizzando r_f con la legge di capitalizzazione composta)

	Apple	Amazon	Facebook	RF
w^*	**1586,473**	**3499,426**	**-998,994**	**-4085,91**

❖ **Punto 5**: (i risultati riportati sono stati calcolati attualizzando r_f con la legge di capitalizzazione composta)

	Portafoglio Apple e RF	Portafoglio Amazon e RF	Portafoglio Facebook e RF
w^*	20,24535612 -19,24535612	25,11308801 -24,11308801	12,28344408 -11,28344408
E[u(x)]	**-6,655345199**	**-6,649255801**	**-6,661579537**

Dal confronto tra i valori delle utilità attese ottenuti si può affermare che, sotto queste condizioni, se si potesse investire soltanto nel titolo privo di rischio e in uno dei tre titoli rischiosi quest’ultimo sarebbe Amazon poiché il portafoglio che lo contiene è quello che produce un’utilità attesa maggiore (minore in valore assoluto).