

SVD e DMD

Federico Riva
Ingegneria Matematica
Politecnico di Milano

Relatore: Professor Marco Verani

Sommario

Questo lavoro tratta alcuni risultati teorici inerenti la fattorizzazione a valori singolari di una matrice e introduce alcuni possibili applicazioni. Si approfondisce in particolare la dynamic mode decomposition applicandola al modello pandemico SEIRD precedentemente risolto con il metodo alle differenze finite.

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | SVD - Singular Value Decomposition | 3 |
| 1.1 | Introduzione | 3 |
| 1.2 | Premessa Teorica | 3 |
| 1.3 | Definizione della Fattorizzazione SVD | 6 |
| 1.4 | Dimostrazione della decomposizione SVD | 7 |
| 1.5 | Proprietà della Fattorizzazione SVD | 11 |
| 1.6 | Algoritmi per il Calcolo | 14 |
| 2 | Applicazioni della Singular Value Decomposition | 15 |
| 2.1 | Teorema di Eckart-Young | 15 |
| 2.2 | Pseudoinversa di una Matrice | 16 |
| 2.3 | Soluzione ai Minimi Quadrati | 17 |
| 2.4 | PCA - Principal Component Analysis | 19 |
| 2.5 | Compressione Immagini | 20 |
| 3 | DMD - Dynamic Mode Decomposition | 22 |
| 3.1 | Introduzione | 22 |
| 3.2 | Implementazione dell'Algoritmo | 25 |
| 4 | Applicazioni della Dynamic Mode Decomposition | 27 |
| 4.1 | Equazione del Calore | 27 |
| 4.2 | Sistema di Equazioni Paraboliche | 30 |
| 4.3 | Modello SEIRD | 30 |
| 5 | Bibliografia | 34 |
| A | Codici Matlab | 35 |
| A.1 | PCA - Principal Component Analysis | 35 |
| A.2 | Compressione delle immagini | 36 |
| A.3 | Equazione del Calore con condizioni miste | 37 |
| A.4 | DMD | 38 |
| A.5 | Modello S.E.I.R.D. | 39 |

1 SVD - Singular Value Decomposition

1.1 Introduzione

La decomposizione SVD, Singular Value Decomposition, è una fattorizzazione algebrica che consente di rappresentare una matrice come il prodotto di tre matrici ciascuna delle quali con caratteristiche specifiche. Le applicazioni di questo metodo possono essere ritrovate in una vasta gamma di campi tra cui l'analisi dei dati, il machine learning e l'elaborazione delle immagini.

1.2 Premessa Teorica

Prima di entrare nel vivo della trattazione della fattorizzazione SVD della matrici è necessario fornire una serie di definizioni, teoremi e proposizioni preliminari utili per la comprensione dei passaggi che seguiranno.

Definizione 1. *Matrice Ortogonale*

Una matrice quadrata $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice ortogonale se $Q^\top Q = I$.

Definizione 2. *Matrice Pseudodiagonale*

Una matrice M si dice pseudodiagonale se $m_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$.

Definizione 3. *Matrice Simmetrica*

Una matrice quadrata $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice simmetrica se $Q^\top = Q$.

Definizione 4. *Forma Quadratica*

Si definisce forma quadratica un polinomio di secondo grado in n variabili $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$p(x) = p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{nn-1} x_n x_{n-1} + a_{nn} x_n^2 = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e A è una matrice simmetrica di dimensione $n \times n$.

Dimostriamo ora una semplice proprietà del prodotto fra matrici fondamentale per quanto discuteremo in seguito.

Proposizione 1.

Hp: Data una qualsiasi $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Ts: $D = M^\top M$ e $S = M M^\top$ sono matrici simmetriche e semidefinite positive.

Dimostrazione. 1) Vogliamo dimostrare che $D = D^\top$. Segue quindi dalle proprietà di trasposizione del prodotto di due matrici: $D^\top = (M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M = D$. Si dimostra in maniera analoga il risultato per S .

2) Dal momento che è una matrice quadrata per dimostrare la semipositività della matrice $A^\top A$ possiamo studiare il segno della forma quadratica associata. Se quest'ultima sarà

positiva allora lo saranno anche tutti gli autovalori.

$$\forall \mathbf{x} \neq 0 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x}^\top A^\top A \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^\top (A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2 \geq 0$$

□

Osservazione 1. : Una proprietà fondamentale che segue dalla definizione di matrice semidefinita positiva è che gli autovalori ad essa associati sono ≥ 0 ; possiamo quindi calcolarne la radice quadrata.

Proposizione 2.

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ e $\{\lambda_i(A^\top A)\}_{i=1}^n$ e $\{\lambda_j(AA^\top)\}_{j=1}^m$ gli autovalori di ciascuna matrice quadrata

Ts: $\{\lambda_i(A^\top A)\}_{i=1}^n \subset \{\lambda_j(AA^\top)\}_{j=1}^m$.

Dimostrazione. Ipotezziamo che la coppia autovalori-autovettore $(\mathbf{x}_i, \lambda_i) \forall i = 1, \dots, n$ sia associata alla matrice $A^\top A$. Possiamo quindi scrivere

$$A^\top A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

e moltiplicando ambo i membri per A otteniamo

$$AA^\top A \mathbf{x} = \lambda A \mathbf{x}$$

Ma allora definendo $\mathbf{y} = A \mathbf{x}$ possiamo riscrivere

$$AA^\top \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$$

il che conclude la dimostrazione poiché prova che la coppia $(\mathbf{y}_i, \lambda_i) \forall i = 1, \dots, n$ è una coppia autovalore-autovettore anche della matrice AA^\top . □

Corollario 1.

Hp: Sia $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$

Ts: Gli autovalori di $M^\top M$ e MM^\top sono gli stessi e valgono $\lambda^2 = [\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2]$

Dimostrazione. Per ricavare la tesi sfruttiamo la **Proposizione 2** nel caso particolare $A = M$ unita alla definizione di autovalore. □

Definizione 5. Matrice Diagonalizzabile

Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta diagonalizzabile su \mathbb{R} se esistono una matrice diagonale D e una matrice quadrata reale e invertibile P tali che:

$$A = PDP^{-1}$$

In particolare siamo sicuri che una matrice sia diagonalizzabile se e solo se:

- D è una matrice diagonale contenente gli autovalori di A lungo la diagonale principale.
- P è una matrice le cui colonne sono gli autovettori di A

Teorema 1. Teorema Spettrale

Hp: Data $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica

Ts: È ortogonalmente diagonalizzabile $Q = UDU^{-1} = UDU^T$

Prendendo in considerazione la **Proposizione 1** ed il **Teorema 1** possiamo osservare che data una qualsiasi matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è possibile costruire a partire da essa due matrici simmetriche ortogonalmente diagonalizzabili. Possiamo quindi fornire le seguenti definizioni.

Definizione 6. Vettori Singolari di sinistra

I vettori singolari di sinistra di A sono gli autovettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ di $AA^T = U D_l U^T$ e compongono la Matrice Singolare di Sinistra U .

Definizione 7. Vettori Singolari di destra

I vettori singolari di destra di A sono gli autovettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ di $A^T A = V D_r V^T$ e compongono la Matrice Singolare di destra V .

Definizione 8. Valori Singolari

I valori singolari sono le radici quadrate degli autovalori non nulli di $A^T A$ e $A A^T$ e li indicheremo con $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r \leq \min\{n, m\}} \geq 0$. Nel caso in cui sia $n \leq m$ e tutti gli autovalori della matrice $n \times n$ siano non nulli allora $r = n = \min\{m, n\}$.

Introduciamo ora alcune nozioni sulle norme matriciali che adopereremo per discutere alcuni risultati di approssimazione. Dal momento che $\mathbb{R}^{m \times n}$ è isomorfo a \mathbb{R}^{mn} la norma di una matrice è equivalente alla norma di un vettore.

Definizione 9. Norma

Una funzione $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta norma se soddisfa le seguenti proprietà

- $f(A) \geq 0 \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $f(A) = 0 \iff A = 0$
- $f(A + B) \leq f(A) + f(B) \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $f(\alpha A) = |\alpha| f(A), \alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Useremo quindi la notazione $\|A\| = f(A)$ per indicare la 'norma della matrice A '.

Fra le numerose norme esistenti le due più frequenti sono:

Definizione 10. Norma di Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_j^n \|\mathbf{a}_j\|_2^2} = \sqrt{\sum_i^m \|\tilde{\mathbf{a}}_i\|_2^2}$$

dove se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allora $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m \forall j = 1, \dots, n$ e $\tilde{\mathbf{a}}_i \in \mathbb{R}^n \forall i = 1, \dots, m$

Definizione 11. Norma p -esima

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|A\mathbf{x}\|_p$$

Proposizione 3.

Hp: Data una matrice ortogonale $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ts: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

Dimostrazione. $\|Q\mathbf{x}\|^2 = (Q\mathbf{x})^\top (Q\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top Q^\top Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top I\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$ □

1.3 Definizione della Fattorizzazione SVD

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, oppure equivalentemente $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, allora la decomposizione SVD della una matrice nel caso $m > n$ è definita come:

$$A = U\Sigma V^\top$$

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^\top$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]^\top$$

mentre per $m < n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]^\top$$

Dove:

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è una matrice ortogonale contenente i vettori singolari sinistri di A ,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una matrice pseudodiagonale contenente i valori singolari di A ordinati in modo decrescente,
- $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice ortogonale contenente i vettori singolari destri di A .

Da un punto di vista intuitivo la fattorizzazione SVD può essere quindi considerata come la generalizzazione del concetto di diagonalizzazione di una matrice non quadrata ($m \times n$), senza limite alcuno sulla sua dimensioni.

Osserviamo infine che se A ammette la fattorizzazione SVD allora $A = U\Sigma V^\top$ valgono le seguenti relazioni:

$$A^\top A = (U\Sigma V^\top)^\top U\Sigma V^\top = V\Sigma^\top U^\top U\Sigma V^\top = V\Sigma^\top \Sigma V^\top$$

$$AA^\top = U\Sigma V^\top (U\Sigma V^\top)^\top = U\Sigma V^\top V\Sigma^\top U^\top = U\Sigma \Sigma^\top U^\top$$

Definizione 12. Fattorizzazione SVD ridotta

Sia A una matrice $m \times n$ con rango r . La decomposizione ai valori singolari (SVD) ridotta di A è data da $A = U'\Sigma'V'^\top$ dove:

$$U' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_r \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times r}, \quad \Sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad e \quad V'^\top = \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1^\top & - \\ - & \mathbf{v}_2^\top & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_r^\top & - \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n}$$

1.4 Dimostrazione della decomposizione SVD

Teorema 2. Decomposizione a valori singolari

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Rg(A) = r$.

Ts: Esistono una matrice pseudodiagonale $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$ e due matrici ortogonali U e V tali che possiamo riscrivere la matrice A come $A = U\Sigma V^\top$. Tale decomposizione si dice decomposizione ai valori singolari di A , non è unica, ma in ogni decomposizione siffatta gli elementi non nulli σ_k di Σ sono i valori singolari di A .

Dimostrazione. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ poiché $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simmetrica e semidefinita positiva segue dal Teorema Spettrale che \exists una matrice ortonormale $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$A^\top A = V\bar{D}V^\top$$

e a sua volta poiché $V^{-1} = V^\top$

$$V^\top A^\top A V = \bar{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $D \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ è una matrice diagonale e positiva di dimensione con $\ell \leq \min\{m, n\}$ il numero di autovalori non nulli della matrice $A^\top A$. Osserviamo che per definizione di autovalori e autovettori la i -esima colonna di V corrisponde all' i -esimo autovalore \bar{D}_{ii} . Di conseguenza possiamo individuare $V_1 = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_\ell] \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ e $V_2 = [\mathbf{v}_{\ell+1} \dots \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n-\ell}$ tali che $V = [V_1 \ V_2]$ che sono rispettivamente gli autovettori associati ad autovalori non nulli e nulli. Possiamo quindi riscrivere l'equazione come:

$$\begin{bmatrix} V_1^\top \\ V_2^\top \end{bmatrix} A^\top A \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^\top A^\top A V_1 & V_1^\top A^\top A V_2 \\ V_2^\top A^\top A V_1 & V_2^\top A^\top A V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui ricaviamo le seguenti equazioni:

$$V_1^\top A^\top A V_1 = D \quad \text{e} \quad V_2^\top A^\top A V_2 = 0$$

Siamo quindi in grado di risolvere la seconda

$$\|AV_2\|_2 = 0 \Rightarrow AV_2 = 0$$

Costruiamo inoltre le seguenti matrici di diverse dimensioni che torneranno utili in seguito:

- $V_1^\top V_1 = I_\ell$ dove $(\ell \times n) \times (n \times \ell) = (\ell \times \ell)$
- $V_2^\top V_2 = I_{n-\ell}$ dove $(n-\ell \times n) \times (n \times n-\ell) = (n-\ell \times n-\ell)$
- $[V_1 \ V_2][V_1 \ V_2]^\top = V_1 V_1^\top + V_2 V_2^\top = I_n$ dove

$$(n \times \ell) \times (\ell \times n) = (n \times n) \quad \text{e} \quad (n \times n-\ell) \times (n-\ell \times n) = (n \times n)$$

Definiamo ora la matrice U_1 come:

$$U_1 = AV_1 D^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{m \times \ell} \{(m \times \ell) = (m \times n) \times (n \times \ell) \times (\ell \times \ell)\}$$

sapendo che $D^{-\frac{1}{2}}$ è ben definita poiché $D_{ii} > 0 \ \forall \ i = 1, \dots, \ell$.

Invertendo la relazione e sostituendo U_1 :

$$A = U_1 D^{\frac{1}{2}} V_1^\top = AV_1 D^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} V_1^\top = AV_1 V_1^\top$$

e sfruttando $V_1 V_1^\top + V_2 V_2^\top = I_n$ e $AV_2 = 0$ otteniamo:

$$A = A \left(I - V_2 V_2^\top \right) = A - AV_2 V_2^\top = A - 0 = A$$

il che stabilisce la coerenza dalla definizione di U_1 proposta.

Abbiamo quindi quasi dimostrato il risultato completo, non ci resta che verificare che le colonne della matrice U_1 formino una base ortonormale:

$$U_1^\top U_1 = D^{-\frac{1}{2}} V_1^\top A^\top A V_1 D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} D D^{-\frac{1}{2}} = I_\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$$

Possiamo quindi costruire il complemento ortogonale di U_1 ovvero $U_2 = \text{Span}(\text{Col}(U_1)^\perp) \in \mathbb{R}^{m \times n - \ell}$ in modo che $U = [U_1 \ U_2] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sia una matrice ortogonale.

Per concludere aggiungiamo un numero opportuno di righe e colonne nulle alla matrice $D^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ in modo da creare:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Allora sfruttando le proprietà del prodotto matriciale fra matrici a blocchi:

$$U \Sigma V^\top = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} [V_1 \ V_2]^\top = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} V_1^\top \\ 0 \end{bmatrix} = U_1 D^{\frac{1}{2}} V_1^\top = A$$

□

Enunciamo ora una serie di corollari che seguono dalla dimostrazione della fattorizzazione SVD.

Corollario 2.

Hp: Sia $U^\top A V = \Sigma$ la decomposizione SVD della matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$.

Ts: $\forall i = 1, \dots, n$ $A \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ e $A^\top \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$

Dimostrazione.

$$A = U \Sigma V^\top$$

$$A V = U \Sigma$$

$$[A \mathbf{v}_1 \ A \mathbf{v}_2 \ \dots \ A \mathbf{v}_n] = [U \sigma_1 \ U \sigma_2 \ \dots \ U \sigma_n]$$

Tenendo conto che

$$\sigma_i = [0 \ \dots \ 0 \ \sigma_i \ 0 \ \dots \ 0]$$

Otteniamo

$$\forall i = 1, \dots, n \ A \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$$

Analogamente si dimostra il risultato per $A^\top \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$

□

Corollario 3.

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$

Ts: $\|A\|_2 = \sigma_1$ e $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$

Dimostrazione. 1)

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|U\Sigma V^\top \mathbf{x}\|_2$$

Dalla **Proposizione 3** sappiamo che le due matrici ortogonali U e V non modificano la norma. Possiamo quindi riscrivere l'uguaglianza come

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\Sigma \mathbf{x}\|_2$$

cioè

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e poiché $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$ otteniamo il massimo per $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$ ovvero $\|A\|_2 = \sigma_1$
2)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |(U\Sigma V^\top)_{ij}|^2}$$

scrivendo il prodotto matriciale elemento per elemento otteniamo che

$$(U\Sigma V^\top)_{ij} = \sum_{k=1}^r U_{ik} \Sigma_{kk} (V^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^r U_{ik} \Sigma_{kk} V_{jk}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r U_{ik} \Sigma_{kk} V_{jk}}$$

Tuttavia per costruzione della matrice Σ

$$\Sigma_{kk} = \sigma_k \geq 0 \ \forall k = 1, \dots, r \text{ con } r \leq n = \min\{m, n\} \text{ e } \Sigma_{ij} = 0 \ \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall j = 1, \dots, n$$

Otteniamo la tesi

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

□

Corollario 4. *Hp: Sia $A, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$*

Ts: $\sigma_{\max}(A + E) \leq \sigma_{\max}(A) + \|E\|_2$ e $\sigma_{\min}(A + E) \geq \sigma_{\min}(A) - \|E\|_2$

Dimostrazione. Dal **Corollario 3** segue che

$$\sigma_{\min}(A)\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\mathbf{x}\|_2 \leq \sigma_{\max}(A)\|\mathbf{x}\|_2$$

e scegliendo un vettore $\mathbf{x} = 1$ otteniamo che

$$\sigma_{\min}(A) \leq \|A\mathbf{x}\|_2 \leq \sigma_{\max}(A)$$

Applicando questo risultato al nostro caso e la proprietà subaddittività della norma otteniamo

$$\sigma_{\min}(A) - \|E\|_2 \leq \|A\|_2 - \|E\|_2 \leq \|A + E\|_2 \leq \|A\|_2 + \|E\|_2 = \sigma_{\max}(A) + \|E\|_2$$

da cui la tesi. \square

Corollario 5.

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$

Ts: $\sigma_{\max}([A \mathbf{z}]) \geq \sigma_{\max}(A)$ e $\sigma_{\min}([A \mathbf{z}]) \leq \sigma_{\min}(A)$

Dimostrazione. Sia $A = U\Sigma V^\top$ la decomposizione SVD di A e consideriamo il vettore $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$, ottenuto dalla prima colonna della matrice V , e la matrice $\bar{A} = [A \mathbf{z}] \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$. Sfruttando il **Corollario 4** otteniamo

$$\sigma_{\max}(A) = \|A\mathbf{x}\|_2 = \|\bar{A} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\|_2 \leq \sigma_{\max}(\bar{A})$$

Analogamente si dimostra che $\sigma_{\min}(A) \geq \sigma_{\min}(\bar{A})$ \square

1.5 Proprietà della Fattorizzazione SVD

Per prima cosa cerchiamo di fornire un'interpretazione intuitiva della fattorizzazione SVD dal punto di vista geometrico. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ consideriamo l'applicazione lineare ad essa associata

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

La fattorizzazione SVD scopone la trasformazione lineare in 3 trasformazioni geometriche descritte dalle matrici U, V e Σ dove le matrici ortonormali rappresentano un'isometria, sia essa una rotazione o una simmetria assiale, mentre la matrice Σ è una dilatazione di *intensità* σ_i lungo la componente \mathbf{u}_i ; ricordiamo che per il **Corollario 2** A mappa il v_i elemento della base in nel vettore dilatato $\sigma_i u_i$. Di seguito illustriamo visivamente lo specifico caso $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ nel caso di una circonferenza di raggio unitario che viene mappata in un'ellissi.

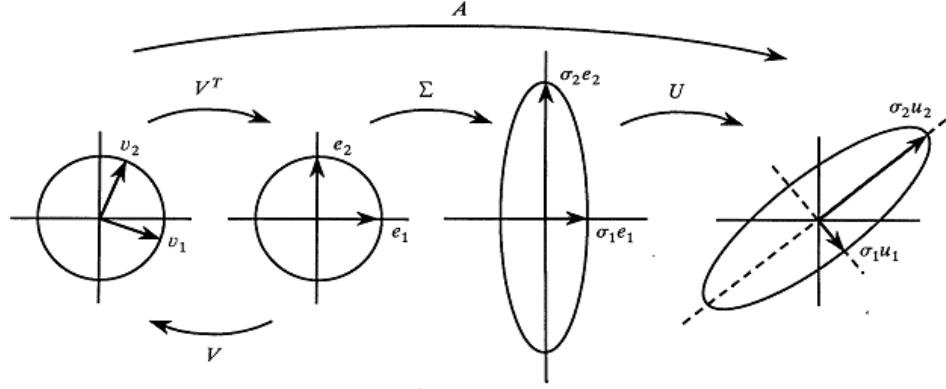


Figura 1: Illustrazione in \mathbb{R}^2

Possiamo estendere questo ragionamento ad un caso più generale considerando una sfera di raggio unitario in \mathbb{R}^n e l'ellissoide ad essa associata da $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in \mathbb{R}^m .

Queste osservazioni che a prima vista possono sembrare una mera curiosità illustrativa nascondono al loro interno un significato molto più profondo con importantissimi risvolti pratici nell'ambito della matematica numerica.

Definizione 13. Numero di Condizionamento di una Matrice

Si definisce numero di condizionamento di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la quantità

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

in particolare

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Nel caso più generale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

Il numero di condizionamento di una matrice, indipendentemente dalla sua dimensione, è definito come il rapporto tra il semiasse maggiore e il semiasse minore dell'ellisse associato all'immagine della matrice A . Da un punto di vista applicativo, esso misura la sensibilità della soluzione di un sistema lineare rispetto a variazioni nei dati di input, quantificando l'impatto di piccole perturbazioni nei coefficienti della matrice o nei termini noti sulla soluzione del sistema. Una matrice con un basso numero di condizionamento è ben condizionata, indicando soluzioni stabili rispetto a perturbazioni dei dati. Al contrario, una matrice con un alto numero di condizionamento è mal condizionata, suggerendo che piccole variazioni nei dati possono causare grandi cambiamenti nella soluzione. Notiamo quindi la relazione fra la *dilazione* della base dello Span e la propagazione dell'errore in un metodo numerico per la risoluzione un sistema lineare.

Studiamo ora le relazioni che sussistono fra gli spazi vettoriali associati alle colonne della

matrice A e delle matrici di decomposizione U e V ; per farlo avremo bisogno di qualche ulteriore risultato teorico.

Definizione 14. Spazio Vettoriale Generato dalle Colonne di una Matrice

Definiamo lo spazio vettoriale generato dall'insieme delle colonne della matrice A come tutte le possibili combinazioni lineari ottenute dai vettori colonna e lo indichiamo $\text{Span}(A) = \text{Col}(A)$. Analogamente, lo spazio vettoriale generato dalle righe della matrice A è dato da $\text{Row}(A) = \text{Span}(A^\top) = \text{Col}(A^\top)$.

Definizione 15. Nulceo di una matrice

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ indichiamo con $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{v} = 0\}$

Proposizione 4.

Hp: Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ valgono le seguenti relazioni

Ts: $\text{Ker}(A) = \text{Row}(A)^\perp$ $\text{Row}(A) = \text{Ker}(A)^\perp$ e $\text{Ker}(A^\top) = \text{Col}(A)^\perp$ $\text{Col}(A) = \text{Ker}(A^\top)^\perp$

Teorema 3. Teorema di Nullità più rango

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\text{Rg}(A) = r$

Ts: $\dim \text{Ker}(A) = n - r$

Proposizione 5.

Hp: $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ valgono le seguenti uguaglianze

Ts: $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A)$, $\text{Col}(A^\top) = \text{Col}(A^\top A)$ e di conseguenza $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^\top A)$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^\top (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A^\top A \mathbf{x}$$

Ne segue che, se \mathbf{x} appartiene al Nucleo di $A^\top A$ allora $\|A\mathbf{x}\|^2 = 0$ e quindi $A\mathbf{x} = 0$, cioè $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$. Viceversa se $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$ ripercorrendo la catena di uguaglianze a retroso $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A^\top A)$ e per arbitrarietà della scelta del vettore i due nuclei sono uguali. Dall'uguaglianza dei nuclei per il **Teorema 3** segue l'uguaglianza dei ranghi.

$\text{Col}(A^\top) = \text{Row}(A)$ e $(\text{Row}(A))^\perp = \text{Ker}(A)$. Ma $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A)$ il cui complemento ortogonale è $\text{Row}(A^\top A)$. Quindi $\text{Col}(A^\top) = \text{Row}(A^\top A)$ ma per simmetria di $A^\top A$

$$\text{Row}(A^\top A) = \text{Col}(A^\top A) \Rightarrow \text{Col}(A) = \text{Col}(A^\top A)$$

□

Corollario 6.

$$\text{Ker}(A^\top) = \text{Ker}(AA^\top), \quad \text{Col}(A) = \text{Col}(AA^\top), \quad \text{Rg}(A^\top) = \text{Rg}(AA^\top).$$

Se quindi la matrice A non ha rango massimo, $\text{Rg}(A) = r < \min\{m, n\}$, allora sussiste la seguente relazione:

Proposizione 6.

Hp: Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e la sua fattorizzazione SVD $A = U\Sigma V^\top$

Ts: Valgono le seguenti relazioni:

1. Le prime r colonne di U sono una base dello $\text{Span}(A)$;
2. Le ultime $m - r$ colonne di U sono una base del $\text{Ker}(A^\top)$;
3. Le prime r colonne di V sono una base dello $\text{Span}(A^\top)$;
4. Le ultime $n - r$ colonne di V sono una base del $\text{Ker}(A)$

Dimostrazione. 1. e 2.

$$\text{Col}(A) = \text{Col}(AA^\top)$$

$$\text{Col}(U\Sigma V^\top) = \text{Col}((U\Sigma V^\top)(U\Sigma V^\top)^\top) = \text{Col}(U\Sigma V^\top V \Sigma^\top U^\top) = \text{Col}(U\Sigma \Sigma^\top U^\top)$$

Sapendo che $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\text{Rg}(\Sigma) = r$

$$\Sigma \Sigma^\top = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

quando svolgiamo il prodotto fra $U \Sigma \Sigma^\top$ e U^\top otteniamo

$$[\mathbf{u}_1 \sigma_1^2 \dots \mathbf{u}_r \sigma_r^2 0 \dots 0]$$

da cui la tesi $\text{Col}(A) = \text{Span}([\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r])$

$$\text{Ker}(A^\top) = \text{Ker}(AA^\top)$$

$$\text{Ker}(V \Sigma^\top U^\top) = \text{Ker}((U\Sigma V^\top)(U\Sigma V^\top)^\top) = \text{Ker}(U\Sigma \Sigma^\top U)$$

e quindi $\text{Ker}(A^\top) = \text{Span}([\mathbf{u}_{m-r} \dots \mathbf{u}_m])$ □

Dimostrazione. 3. e 4. Analogamente a 1. e 2. sfruttando le proprietà della trasposizione del prodotto matriciale □

1.6 Algoritmi per il Calcolo

2 Applicazioni della Singular Value Decomposition

La fattorizzazione SVD può essere applicata senza la necessità di ulteriori elementi per ottenere una serie di risultati sia teorici che pratici. Di seguito illustriamo in più famosi.

2.1 Teorema di Eckart-Young

Teorema 4. Teorema di Eckart-Young

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di rango r e sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $1 \leq k \leq r$ tale che

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^\top$$

è la matrice ottenuta troncando la sommatoria che definisce la decomposizione a valori singolari

Ts: La matrice A_k è soluzione ottima il seguente problema di minimizzazione fra tutte le matrici di rango k

$$\min_{\text{Rg}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2$$

Dimostrazione. Notiamo che $A_k = U \Sigma_k V^\top$, possiamo quindi scrivere che

$$A - A_k = U \Sigma V^\top - U \Sigma_k V^\top = U (\Sigma - \Sigma_k) V^\top$$

Invertendo la relazione

$$U^\top (A - A_k) V = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e per unitarietà della norma delle matrici U e $V \Rightarrow \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

Perciò, dobbiamo mostrare che $\forall B_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $\text{Rg}(B_k) = k$

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1} \leq \|A - B_k\|_2.$$

Poiché $\text{Rg}(B) = k$

$$\text{Col}(B) = \text{Span}([\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_k]) \quad \text{e} \quad \text{Ker}(B) = \text{Row}(B)^\perp = \text{Span}([\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-k}]),$$

Per la **Proposizione 6.4** e per il **Teorema 3**

$$\text{Span}([\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{k+1}]) \cap \text{Span}([\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-k}]) \neq 0$$

allora deve esistere una combinazione lineare non banale delle prime $k+1$ colonne di V , cioè,

$$\mathbf{w} = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \gamma_{k+1} \mathbf{v}_{k+1},$$

tale che $Bw = 0$. Senza perdita di generalità, possiamo normalizzare w in modo che $\|w\|_2 = 1$ o (equivalentemente) $\gamma_1^2 + \dots + \gamma_{k+1}^2 = 1$. Pertanto,

$$\|A - B_k\|_2^2 \geq \|(A - B_k)w\|_2^2 = \|Aw\|_2^2 = \gamma_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \gamma_{k+1}^2 \sigma_{k+1}^2 \geq \sigma_{k+1}^2.$$

Il risultato segue prendendo la radice quadrata di entrambi i lati della disuguaglianza sopra. \square

2.2 Pseudoinversa di una Matrice

Definizione 16. Matrice Pseudoinversa o inversa di Moore-Penrose

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \exists A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ detta matrice pseudoinversa di A tale che

- $A^+ A \mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^+$ per ogni $\mathbf{x}^+ \in \text{Row}(A)$
- $A^+ \mathbf{y}_0 = 0$ per ogni $\mathbf{y}_0 \in \text{Col}(A)^\perp$

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\text{Row}(A^+) = \text{Col}(A) \quad \text{Col}(A^+) = \text{Row}(A) \quad \text{Ker}(A^+) = \text{Col}(A)^\perp$$

La matrice A è la matrice pseudoinversa di A^+ : $A = (A^+)^+$. In particolare

- $AA^+ \mathbf{v} = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$

Se si considera la generica applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbf{W}_1 \rightarrow \mathbf{W}_2$ tra due spazi euclidei di dimensione finita, senza considerare la scelta di una base, si definisce l'applicazione pseudoinversa come l'unica applicazione lineare $\mathcal{L}^+ : \mathbf{W}_2 \rightarrow \mathbf{W}_1$ con le proprietà che $\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}(x^+) = x^+$ per ogni $x^+ \in \text{Ker}(\mathcal{L})^\perp$ e $\mathcal{L}^+(y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in \text{Im}(\mathcal{L})^\perp$. Se A è la matrice che rappresenta \mathcal{L} rispetto a due basi ortonormali di \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 , allora A^+ rappresenta \mathcal{L}^+ rispetto a tali basi.

Proposizione 7. Fattorizzazione SVD e matrice pseudoinversa

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $A = U \Sigma V^T$ la sua decomposizione a valori singolari

Ts: La matrice pseudoinversa di A è $A^+ = V \Sigma^+ U^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dove i valori singolari di A^+ sono i reciproci dei valori singolari di A

Dimostrazione. Vogliamo verificare l'espressione proposta soddisfa tutte le caratteristiche della **Definizione 16**.

Poniamo $C = V\Sigma^+U^T$. Dobbiamo dimostrare che $CA\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^+$ per ogni $\mathbf{x}^+ \in \text{Row}(A)$ e che $C\mathbf{y}_0 = 0$ per ogni $\mathbf{y}_0 \perp \text{Col}(A)$.

Dall'uguaglianza $A^T = V\Sigma^T U^T$ segue che ogni vettore $\mathbf{x}^+ \in \text{Row}(A) = \text{Col}(A^T)$ è della forma $\mathbf{x}^+ = VX^+$ per un unico $X^T \in \text{Row}(\Sigma) = \text{Col}(\Sigma^T)$. Quindi

$$CA = \mathbf{x}^+ = CAVX^+ = V\Sigma^+U^T U\Sigma V^T \mathbf{x}^+ = V\Sigma^+ \Sigma X^+ = VX^+ = \mathbf{x}^+$$

Da $A^T = V\Sigma^T U^T$ segue che ogni vettore $\mathbf{y}_0 \in \text{Ker}(A^T) = \text{Col}(A)^\perp$ è della forma UY_0 per un unico $Y_0 \in \text{Ker}(\Sigma^T)$. Quindi

$$C\mathbf{y}_0 = CUY_0 = V\Sigma^+U^T UY_0 = V\Sigma^+Y_0 = V0 = 0$$

□

Osservazione 2. Le proprietà della matrice pseudoinversa possono essere equivalentemente riscritte come:

- $AA^+A = A$,
- $A^+AA^+ = A^+$,
- $(AA^+)^T = AA^+$,
- $(A^+A)^T = A^+A$.

da cui è possibile ricavare la seguente formulazione esplicita della matrice pseudoinversa nel caso $\text{Rg}(A)$ massimo: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$. Per sostituzione facile verificare che $A^+ = V\Sigma^+U^T$

$$\begin{aligned} A^+ &= (A^T A)^{-1} A^T = (V\Sigma U^T U\Sigma V^T)^{-1} V\Sigma U^T \\ &= (V\Sigma^2 V^T)^{-1} V\Sigma U^T = (V^T)^{-1} \Sigma^{-2} V^{-1} V\Sigma U^T \\ &= V\Sigma^{-2} \Sigma U^T = V\Sigma^{-1} U^T \end{aligned}$$

2.3 Soluzione ai Minimi Quadrati

Definizione 17. Soluzione ai minimi quadrati

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vogliamo trovare $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$$

Teorema 5. Soluzione ai Minimi Quadrati di un sistema lineare

Hp: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice di rango massimo con $m \geq n$, e sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Ts: Il sistema di equazioni lineari sovradeterminato $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una soluzione ai minimi quadrati \mathbf{x}^* data da

$$\mathbf{x}^* = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}.$$

Osservazione 3. Notiamo come la matrice associata alla soluzione ai minimi quadrati combaci con la definizione equivalente di matrice pseudoinversa fornita nell'**Osservazione 2**

Sfruttando la fattorizzazione SVD $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ può essere riscritto come

$$U\Sigma V^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= ((U\Sigma V^\top)^\top U\Sigma V^\top)^{-1} (U\Sigma V^\top)^\top \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^* &= (V\Sigma^\top \Sigma V^\top)^{-1} (V\Sigma^\top U^\top) \mathbf{b} \end{aligned}$$

ricordando che date due matrici quadrate Q e M vale $(MQ)^{-1} = Q^{-1}M^{-1}$ e che

$$\Sigma^\top \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix}$$

è invertibile per definizione di Valori Singolari.

$$\mathbf{x}^* = V(\Sigma^\top \Sigma)^{-1} \Sigma^\top U^\top \mathbf{b}$$

Riscrivo sfruttando la fattorizzazione SVD ridotta

$$\mathbf{x}^* = V'(\Sigma'^\top \Sigma')^{-1} \Sigma'^\top U'^\top \mathbf{b}$$

dove possiamo semplificare

$$(\Sigma^\top \Sigma)^{-1} \Sigma'^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sigma_r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} = \Sigma'^{-1}$$

Il Risultato è quindi

$$\mathbf{x}^* = V' \Sigma'^{-1} U'^\top \mathbf{b}$$

2.4 PCA - Principal Component Analysis

La Principal Component Analysis (PCA) è una tecnica che trova applicazione nell'ambito della riduzione della dimensionalità e dell'analisi di dati multivariati. L'obiettivo principale di questo metodo è l'identificazione delle "direzioni" lungo cui i dati sono maggiormente distribuiti al fine di determinare efficacemente i parametri delle leggi delle variabili aleatorie da cui sono tratte le osservazioni. L'individuazione delle componenti principali è particolarmente utile nel caso di dataset di considerevoli dimensioni, in cui l'applicazione della PCA permette di ridurre la complessità dei dati mantenendo pur mantenendo al contempo la maggior parte delle informazioni rilevanti, consentendo così una più facile visualizzazione e interpretazione.

Ipotizziamo di condurre un certo numero m di esperimenti aleatori le cui realizzazioni possono essere riassunte in un vettore di n elementi. Il dataset prodotto sarà una matrice X di dimensioni (m, n) . Possiamo quindi calcolare il vettore riga medio $\bar{\mathbf{x}}$ sfruttando la media campionaria di un vettore di variabili aleatorie

$$\bar{\mathbf{x}}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Una volta ottenuto $\bar{\mathbf{x}}$ costruiamo la matrice media $\bar{X} = [1 \dots 1]^\top \bar{\mathbf{x}}$ di dimensioni (m, n) . Definiamo ora la matrice $B = X - \bar{X}$; questo passaggio equivale ad una traslazione dell'origine del dataset. Infine, sfruttando le proprietà del prodotto matriciale, notiamo che la matrice di covarianza di B è data da

$$C = \frac{1}{n-1} B^\top B$$

dove il fattore $\frac{1}{n-1}$ è dato dal coefficiente dello stimatore non distorto della varianza campionaria.

Per le proprietà matriciali dimostrate precedentemente la matrice C è simmetrica e definita positiva; ciò risulta coerente con quanto ci aspetteremmo da una matrice di covarianza dove $C_{ii} = \lambda_i^2$ è la varianza mentre $C_{ik} = \lambda_{ik}$ la covarianza campionaria fra la i -esima e k -esima colonna.

Date le buone proprietà di C per il **Teorema 1**, possiamo riscrivere l'espressione come segue

$$C = V D V^\top \Rightarrow D = V^\top C V$$

dove gli autovettori sono le componenti principali e gli autovalori le varianze. Intuitivamente, possiamo affermare che la i -esima coppia autovalore-autovettore indica la dispersione del dataset lungo una determinata direzione.

Sappiamo inoltre che la matrice V è la matrice contenente i vettori singolari di destra

della matrice B , che possiamo riscrivere come $B = U\Sigma V^\top$. Sostituendo questa relazione otteniamo

$$C = \frac{1}{n-1} B^\top B = \frac{1}{n-1} V \Sigma^\top \Sigma V^\top \Rightarrow D = \frac{1}{n-1} \Sigma^2$$

dove

$$\lambda_k = \frac{\sigma_k^2}{n-1}$$

Illustriamo ora questo concetto con un esempio grafico: per farlo ci avvaliamo del **Codice A.1** che ci permette di generare un campione casuale a partire da un vettore gaussiano e, dopo aver riassunto i risultati in un matrice, calcoliamo i 3 assi principali tramite fattorizzazione SVD .

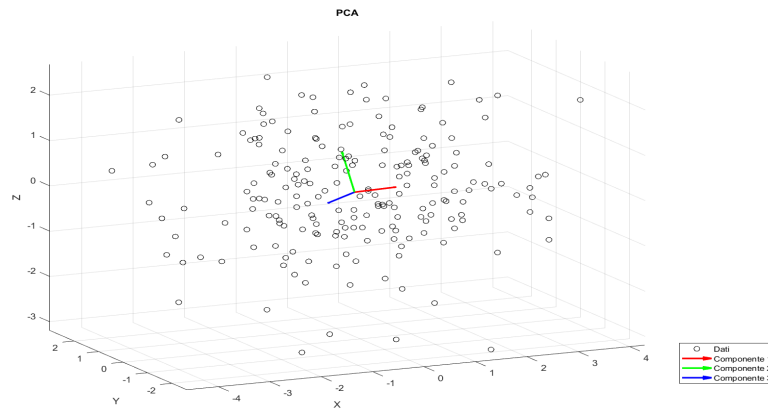


Figura 2: Componenti Principali in \mathbb{R}^3

2.5 Compressione Immagini

La compressione delle immagini tramite la fattorizzazione SVD è un approccio fondamentale nell'ambito della riduzione della dimensionalità dei dati. L'obiettivo principale di questa procedura è quello di ridurre lo spazio di archiviazione richiesto per codificare le informazioni contenute in un'immagine mantenendo al contempo una qualità visiva accettabile. Dal punto di formale possiamo rappresentare un'immagine in bianco e nero come una matrice X dove a ciascun elemento è associato un pixel dell'immagine con valori da 0 a 1 che rappresentano la scala di grigi che va dal bianco, 0, al nero, 1.

Per il **Teorema 4** siamo in grado di costruire un'approssimazione progressiva della matrice X sfruttando la sommatoria dei valori singolari di destra, sinistra e dei valori singolari

minimizzando l'errore commesso.

$$X_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^\top$$

Inoltre, sfruttando il **Corollario 3** saremo in grado di stimare l'errore commesso

$$\|X - X_k\|_2 = \left\| \sum_{i=k+1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^\top \right\|_2 = \sigma_{k+1}$$



Figura 3: Approssimazione dell'immagine con una matrice di rango k effettuata sfruttando il **Codice A.2**

3 DMD - Dynamic Mode Decomposition

3.1 Introduzione

La Dynamic Mode Decomposition è una tecnica per l'analisi di dati spazio-temporali il cui scopo è l'individuazione di strutture coerenti al loro interno. Le grandezze osservate sono ottenuti dall'unione di diverse misurazioni di determinati parametri in diversi istanti temporali. Grazie alle sue proprietà la DMD è particolarmente indicata per la ricostruzione delle dinamiche evolutive di sistemi dinamici complessi, serie temporali e immagini dinamiche permettendo di rivelare modelli e dinamiche al loro interno, anche di tipo fortemente non lineare.

Dato un insieme di osservazioni di m parametri in n istanti di tempo

$$\{\mathbf{x}(t_k), \mathbf{x}(t'_k)\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^m \text{ e } t'_k = t_k + \Delta t$$

costruiamo le matrici X e X' così definite

$$X = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{x}(t_1) & \mathbf{x}(t_2) & \dots & \mathbf{x}(t_n) \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{x}(t'_1) & \mathbf{x}(t'_2) & \dots & \mathbf{x}(t'_n) \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

Assumendo un campionamento uniforme possiamo scrivere che $t_k = k\Delta t$ e di conseguenza quindi vale la seguente relazione $t'_k = t_k + \Delta t = t_{k+1}$. L'obiettivo della DMD si riassume nel trovare la matrice A tale che $X' \simeq AX$ e per l'ipotesi di campionamento uniforme unita alle proprietà del prodotto matriciale segue che $\mathbf{x}_{k+1} \simeq A\mathbf{x}_k$.

Dal punto di vista matematico il problema si traduce nel seguente problema di minimizzazione

$$A = \min_{M \in \mathbb{R}^{m \times m}} \|X' - MX\|_F$$

Proposizione 8.

Hp: Data una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$, $\text{Rg}(M) = r$ e $M = U\Sigma V^\top$ la sua decomposizione SVD

Ts: Allora $M^+ = \arg\min_{B \in \mathbb{R}^{n \times m}} \|MB - I_m\|_F$ dove con M^+ denotiamo la matrice pseudoinversa e grazie alle proprietà della fattorizzazione SVD siamo in grado di trovare la sua formulazione esplicita $M^+ := V\Sigma^+U^\top$, dove $\Sigma_{i,j}^+ = 0$ se $\Sigma_{i,j} = 0$ e $\Sigma_{i,j}^+ = \frac{1}{\sigma_i}$ se $\Sigma_{i,j} = \sigma_i$.

Dimostrazione. Se $B = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m]$ dove \mathbf{b}_i sono le colonne della matrice B e \mathbf{e}_i sono le colonne della matrice identità I_m . Sfruttando le proprietà di equivalenza fra norme possiamo quindi scrivere

$$\|MB - I_m\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \|M\mathbf{b}_i - \mathbf{e}_i\|_2^2$$

da cui la minimizzazione della norma di Frobenius può essere scritta come m minimizzazione in norma 2 indipendenti le une dalle altre.

$$\operatorname{argmin}_B \|MB - I_m\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \operatorname{argmin}_{\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n} \|M\mathbf{b}_i - \mathbf{e}_i\|_2^2$$

Dati m problemi ai minimi quadrati per l'**Osservazione 3** sappiamo che la soluzione di un sistema ai minimi quadrati è $\mathbf{b}_i = A^+ \mathbf{e}_i \ \forall i = 1, \dots, m$ da cui $B = [A^+ \mathbf{e}_1, \dots, A^+ \mathbf{e}_m] = A^+ I_m = A^+$ \square

Applicando la proposizione precedente al caso siamo quindi in grado di individuare la soluzione in forma esplicita

$$\tilde{C} = \operatorname{argmin}_{C \in \mathbb{R}^{m \times m}} \|X' - CX\|_F = X'X^+$$

Dimostrazione. Sfruttando le proprietà della norma di Frobenius osserviamo che

$$\operatorname{argmin}_C \|X' - CX\|_F = \sum_{i=1}^m \operatorname{argmin}_{\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^m} \|\mathbf{x}'_i - \mathbf{c}_i X\|_2^2$$

dove

$$\begin{bmatrix} - & \mathbf{x}'_i & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{c}_i & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix}$$

e le matrici hanno dimensine $(m \times n) = (m \times m) \times (m \times n)$ da cui scritto in forma di sistema lineare otteniamo

$$\begin{aligned} X^\top \mathbf{c}_i^\top &= \mathbf{x}'_i{}^\top \\ \tilde{\mathbf{c}}_i^\top &= (X^\top)^+ \mathbf{x}'_i{}^\top \\ \tilde{\mathbf{c}}_i^\top &= (X^+)^T \mathbf{x}'_i{}^\top \\ \tilde{\mathbf{c}}_i &= \mathbf{x}'_i X^+ \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 X^+ \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_m X^+ \end{bmatrix} = X'X^+$$

\square

Osservazione 4. Data una generica matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allora $(M^+)^T = (M^T)^+$

Una volta ottenuta la matrice quadrata A saremo interessati a trovare i suoi autovalori e autovettori. Tuttavia, nonostante siamo in possesso di una formula esplicita che ci permette calcolarla se consideriamo una matrice $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dove m sono i parametri osservati e n le realizzazioni temporali, notiamo che la matrice A dovrebbe avere dimensioni $m \times m$. Dal punto di vista applicativo, dove accade di frequente che i parametri osservati sono dell'ordine di 10^6 , ciò si traduce in una matrice con 10^{12} elementi rendendone quindi computazionalmente ingestibile il calcolo.

Per ovviare a questo problema possiamo ricorrere alla SVD ridotta in modo da ottenere una matrice \bar{A} di dimensioni sensibilmente minori, al massimo $(n \times n)$, ma che al contempo *approssimi* al meglio le caratteristiche di $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dal punto di vista matematico il concetto appena espresso può essere formalizzato come segue mediante la POD, ovvero Proper Orthogonal Decomposition.

POD Proper Orthogonal Decomposition

Ricordando la **Proposizione 6** sappiamo che data una matrice $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\text{Rg}(Y) = d$ lo $\text{Span}(Y)$ può essere rappresentato come le prime d colonne linearmente indipendenti della matrice U . Lo scopo principale della POD è la riduzione della dimensione dei dati e quindi il numero di colonne necessarie per rappresentarli. Questo processo di riduzione è cruciale perché permette di semplificare modelli complessi senza perdere informazioni significative, migliorando l'efficienza computazionale e l'interpretabilità dei risultati. Le colonne della matrice Y possono quindi essere rappresentate come una combinazione lineare delle d colonne linearmente indipendenti della matrice $U^d \in \mathbb{R}^{m \times d}$. Grazie alla fattorizzazione SVD ridotta poniamo, da cui $Y = U^d \Sigma (V^d)^T$

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^d (\Sigma (V^d)^T)_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^d ((U^d)^T U^d \Sigma (V^d)^T)_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^d ((U^d)^T Y)_{ij} \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=1}^m U_{ki}^d Y_{kj} \right) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^d \mathbf{u}_i^T \mathbf{y}_j \mathbf{u}_i \quad \forall j = 1, \dots, n$$

DA FINIRE

Vale il seguente teorema

Teorema 6. SVD e POD

Hp: Sia $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice di rango $d \leq \min m, n$ e inoltre sia $Y = U \Sigma V^T$ la sua scomposizione a valori singolari.

Ts: Allora $\forall l \in \{1, \dots, d\}$ la soluzione al seguente problema di ottimizzazione

$$\max_{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n |\mathbf{y}_j^T \tilde{\mathbf{u}}_i|^2 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{u}}_i^T \tilde{\mathbf{u}}_j = \delta_{i,j} \quad 1 \leq i, j \leq l$$

è data dai vettori singolari $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^l$ ovvero le prime l colonne di U .

3.2 Implementazione dell'Algoritmo

- **Step 1.** Calcoliamo la fattorizzazione SVD ridotta della matrice $X = U'\Sigma'V'^\top$ dove $U' \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\Sigma' \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $V' \in \mathbb{R}^{n \times r}$ con $r \leq n = \min\{m, n\}$. Questa scelta risulta essere cruciale nel caso di elevate dimensioni della matrice X e di $\text{Rg}(X)$ non massimo permettendo di semplificare sensibilmente la complessità computazionale dei passaggi che seguiranno.

Ricordiamo che per le proprietà della fattorizzazione SVD ridotta vale la seguente relazione $U'^\top U' = I_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $V'^\top V' = I_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e le colonne della matrice U' prendono il nome di *Modi della Proper Orthogonal Decomposition*.

- **Step 2.** Dalla soluzione del problema di minimizzazione sappiamo che $A = X'X^+$ che a sua volta può essere scritta come

$$A = X'V'\Sigma'^{-1}U'^\top$$

Tuttavia così facendo otteniamo una matrice A di dimensioni $(m \times m)$ con tutte le criticità che essa comporta. Per ovviare a questo problema ricorriamo quindi alla POD proiettando A sui *Modi* di U' . In questo modo riusciamo a ridurre le dimensioni della matrice pur mantenendo la massima "somiglianza" alla matrice di partenza

$$\bar{A} = U'^\top A U' = U'^\top X' X^+ U' = U'^\top X' V' \Sigma'^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

E' importante notare che gli r autovalori di \bar{A} sono gli stessi r autovalori della matrice A . Possiamo quindi trovare direttamente la matrice \bar{A} senza calcolare la matrice estesa A riducendo così sensibilmente il costo computazionale. Una volta introdotta la matrice \bar{A} il modello lineare diventa $\bar{\mathbf{x}}_{k+1} \simeq \bar{A}\bar{\mathbf{x}}_k$ e $\mathbf{x} = U'\bar{\mathbf{x}}$

- **Step 3.** Calcoliamo la decomposizione spettrale della matrice \bar{A}

$$\bar{A}W = W\Lambda$$

dove le colonne w_i $i = 1 \dots r$ della matrice $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono gli autovettori di \bar{A} mentre $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice diagonale contenente gli autovalori.

- **Step 4.** I modi $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sono ricostruiti sfruttando la matrice degli autovettori W del modello lineare di dimensioni ridotte e la matrice dei dati X'

$$\Phi = X'V'\Sigma'^{-1}W$$

Infatti le dimensioni delle matrici che compongono il prodotto che genera la matrice quadrata finale $(m \times m) = (m \times n) \times (n \times r) \times (r \times r) \times (r \times r)$.

Notiamo che abbiamo quindi ricavato gli autovalori della matrice di partenza A senza calcolarne esplicitamente né il valore né la decomposizione spettrale

$$A\Phi = X'X^+\Phi = X'V'\Sigma'^{-1}U'^\top X'V'\Sigma'^{-1}W$$

e ricordando che la matrice $\bar{A} = U'^\top X'V'\Sigma'^{-1}$ e che $\bar{A}W = W\Lambda$ otteniamo

$$A\Phi = X'V'\Sigma'^{-1}\bar{A}W = X'V'\Sigma'^{-1}W\Lambda = \Phi\Lambda$$

da cui $\Phi = X'V'\Sigma'^{-1}W$

Una volta calcolati i Modi della Dynamic Mode Decomposition

Decomposizione spettrale e ricostruzione del Sistema Espansione DMD

Una delle caratteristiche più importanti della DMD è la possibilità di ricostruire le osservazioni del sistema sfruttando una decomposizione spettrale interamente basata sui dati

$$\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^r \phi_j \lambda_j^{k-1} b_j = \Phi \Lambda^{k-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \phi_1 & \dots & \phi_r \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

DA FINIRE

4 Applicazioni della Dynamic Mode Decomposition

Come abbiamo osservato nel paragrafo precedente la DMD si presta all'analisi di dati generati da sistemi complessi con un comportamento fortemente non lineare. Per verificarne la validità consideriamo un problema modello dalla cui soluzione traiamo i dati delle osservazioni sperimentali che ricostruiremo con la DMD; non dimentichiamo tuttavia che nella realtà le misurazioni campionarie sarebbero gli unici dati a nostra disposizione ed il nostro scopo sarebbe proprio quello di ricostruire le dinamiche incognite del sistema che li ha generati.

Dal punto di vista fisico un possibile esempio di problemi che generano una successione di osservazioni spazio-temporali sono tutti quei fenomeni che possono essere modellati come una o più equazione alle derivate parziali di tipo parabolico. In particolare tratteremo sia l'equazione di diffusione del calore lungo un segmento che un sistema di equazioni di reazione e diffusione che caratterizzano il modello pandemico S.E.I.R.D..

4.1 Equazione del Calore

Consideriamo una funzione $u : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, dove $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tale che soddisfi il seguente problema composto da un'equazione alle derivate parziali soggetta alle condizioni ai limiti e alla condizione iniziale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - D \Delta u(x, t) = f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} u(a, t) = \phi_a \\ u(b, t) = \phi_b \end{array} \right.$$

Nel caso monodimensionale possiamo riscrivere l'equazione come segue

$$\partial_t u(x, t) - D \partial_{xx}^2 u(x, t) = f(x, t)$$

L'equazione è nota come *equazione del calore*, in quanto $u(x, t)$ descrive la temperatura nel punto x all'istante t . Definiamo ora la discretizzazione sulla griglia di calcolo $x_i = a + ih$ dove $h = \frac{|a-b|}{N}$ con $N \in \mathbb{N}$ e $t_n = \tau n$ con $\tau = \frac{T}{M}$ con $M \in \mathbb{N}$. Discretizziamo il problema in spazio tramite la seguente relazione alle differenze finite del secondo ordine

$$\begin{aligned} \partial_{xx}^2 u(x, t) &= D_{xx}^2 u(x_i, t) + O(h^2) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{h^2} + O(h^2) \\ d_t u(x_i, t) - D \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{h^2} &= f(x_i, t) \quad \forall i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

Per ogni nodo abbiamo definito una funzione continua in tempo. Per discretizzare la derivata temporale utilizziamo il metodo di Eulero implicito in modo da ottenere un metodo incondizionatamente assolutamente stabile. Per fare ciò utilizziamo il metodo delle differenze finite all'indietro

$$d_t u(x_i, t) = D_x^- u(x_i, t_{n+1}) + O(\tau) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} + O(\tau)$$

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} - D \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1}))}{h^2} = f(x_i, t_{n+1})$$

Per alleggerire la notazione poniamo d'ora in avanti $u(x_i, t_n) \approx U_i^n$ da cui

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - D \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} = f(x_i, t_{n+1}) \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

Il primo nodo della discretizzazione $i = 0$ sarà ricavato mediante il metodo del nodo fantasma

$$\begin{cases} \frac{U_0^{n+1} - U_0^n}{\tau} - D \frac{U_1^{n+1} - 2U_0^{n+1} + U_{-1}^{n+1}}{h^2} = f(x_0, t_{n+1}) \\ \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} = \phi_a \end{cases}$$

da cui sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo

$$U_0^{n+1} + \frac{2\tau D}{h^2}(U_0^{n+1} - U_1^{n+1}) = U_0^n + \tau(f(x_0, t_{n+1}) + \frac{2D\phi_a}{h})$$

Mentre il penultimo nodo $x_{N-1} \quad \forall n = 1, \dots, M$

$$\begin{cases} \frac{U_{N-1}^{n+1} - U_{N-1}^n}{\tau} - D \frac{U_N^{n+1} - 2U_{N-1}^{n+1} + U_{N-2}^{n+1}}{h^2} = f(x_{N-1}, t_{n+1}) \\ U_N^n = \phi_b \quad \forall n = 1, \dots, M \end{cases}$$

da cui

$$U_{N-1}^{n+1} + \frac{\tau D}{h^2}(U_{N-1}^{n+1} - U_{N-2}^{n+1}) = \tau f(x_{N-1}, t_{n+1}) + \frac{D\tau\phi_b}{h^2}$$

ciò comporterà una correzione del primo ed ultimo elemento del termine forzante ad ogni passo di discretizzazione temporale.

Costruiamo quindi la formulazione matriciale del problema:

- definiamo il vettore contenente la soluzione valutata all'istante t_n nei nodi spaziali della griglia di calcolo

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}(t_{n+1}) = [u(x_0, t_{n+1}), \dots, u(x_N, t_{n+1})]^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$$

In particolare lo stato iniziale $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(t_0) = [u_0(x_0), \dots, u_0(x_N)]^\top$ è noto e per la condizione di Dirichlet in $x = b$

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(t_n) = [u(x_0, t_n), \dots, u(x_{N-1}, t_n), \phi_b]^\top \quad \forall n = 0, \dots, M$$

Per cui ad ogni iterazione il vettore delle incognite è così definito

$$\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}(t_n) = [u(x_0, t_n), \dots, u(x_{N-1}, t_n)]^\top \in \mathbb{R}^N \quad \forall n = 0, \dots, M$$

e la soluzione ad ogni istante è data da $\mathbf{u} = [\tilde{\mathbf{u}}, \phi_b]^\top$

- la matrice di massa o di iterazione

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

- il vettore dei termini noti corretto con le opportune condizioni al bordo

$$\mathbf{F}(t_n) = \begin{bmatrix} f(x_0, t_n) + \frac{2D\phi_a}{h} \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, t_n) + \frac{D}{h^2}\phi_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

Possiamo riformulare il sistema di equazioni in forma matriciale

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(I_N + \tau D A_h) = \tilde{\mathbf{u}}^n + \tau \mathbf{F}(t_{n+1}) \quad \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^N$$

Da cui

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = (I_N + \tau D A_h)^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}^n + \tau \mathbf{F}(t_{n+1}))$$

La soluzione $U \in \mathbb{R}^{N+1 \times M+1}$ sarà quindi composta da $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$U = \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ \mathbf{u}^0 & \mathbf{u}^1 & \dots & \mathbf{u}^i & \dots & \mathbf{u}^M \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ \tilde{\mathbf{u}}^0 & \tilde{\mathbf{u}}^1 & \dots & \tilde{\mathbf{u}}^i & \dots & \tilde{\mathbf{u}}^M \\ | & | & & | & & | \\ \phi_b & \phi_b & & \phi_b & & \phi_b \end{bmatrix}$$

Abbiamo costruito un insieme di osservazioni spazio-temporali che compongono un dataset, ideale per l'applicazione della Dynamic Mode Decomposition (DMD) dal momento che consiste in una serie di snapshot temporali uniformemente intervallati che catturano l'evoluzione del un sistema dinamico che descrive la diffusione del calore lungo il segmento.

DA FINIRE

4.2 Sistema di Equazioni Paraboliche

manufacturing generation **DA FINIRE**

4.3 Modello SEIRD

Il modello pandemico S.E.I.R.D. (Suscettibili, Esposti, Infetti, Guariti, Deceduti) è caratterizzato da 5 diverse popolazioni, ciascuna rappresentata da una funzione in spazio e tempo, che interagiscono fra loro in funzione della loro densità spaziale, combinate per un opportuno coefficiente, e di un termine di diffusione spaziale. Ciascuna funzione descrive una categoria ed è così definita

$$s, e, i, r, d : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \Omega \subset \mathbb{R}.$$

Il modello si compone da un sistema di equazioni paraboliche con termine di reazione

$$\begin{cases} \frac{\partial s(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \beta_i \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}}\right) s(\mathbf{x}, t) i(\mathbf{x}, t) + \beta_e \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}}\right) s(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (n_{pop} \nu_s \nabla s(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \frac{\partial e(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \beta_i \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}}\right) s(\mathbf{x}, t) i(\mathbf{x}, t) - \beta_e \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}}\right) s(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) + \\ \quad + (\alpha + \gamma_e) e(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (n_{pop} \nu_e \nabla e(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \frac{\partial i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \alpha e(\mathbf{x}, t) + (\gamma_i + \delta) i(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (n_{pop} \nu_i \nabla i(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \frac{\partial r(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \gamma_e e(\mathbf{x}, t) - \gamma_i i(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (n_{pop} \nu_r \nabla r(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \frac{\partial d(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \delta i(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases}$$

Descriviamo i parametri che caratterizzano il modello:

- A_e è il *Parametro di Allee* che in un modello epidemiologico mette in relazione il tasso di crescita di una classe di popolazione con la sua densità.
- β_i, β_e descrivono il tasso di trasmissione fra i sintomatici e i suscettibili e gli asintomatici e i suscettibili, ciascuno in unità giorno⁻¹.
- $\nu_s, \nu_e, \nu_i, \nu_r$ sono i parametri di diffusione dei vari gruppi di popolazioni.
- δ è il tasso di mortalità.
- γ_e, γ_i corrispondono al tasso di guarigione rispettivamente degli asintomatici e dei sintomatici.
- α denota il periodo di incubazione della malattia.

Dal momento che è un problema evolutivo imponiamo le condizioni iniziali e al contorno per ogni equazione del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} s(x, 0) = s_0(x) = e^{-(x+1)^4} + e^{-\frac{(x-0.35)^2}{10^{-2}}} + \frac{1}{8} \left(e^{-\frac{(x-0.62)^4}{10^{-5}}} + e^{-\frac{(x-0.52)^4}{10^{-5}}} + e^{-\frac{(x-0.42)^4}{10^{-5}}} \right) + \frac{1}{4} e^{-\frac{(x-0.735)^4}{10^{-5}}}; \\ \frac{\partial s(0,t)}{\partial x} = \phi_a = 0; \quad s(0, t) = \phi_b = 0 \\ e(x, 0) = e_0(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{(x-0.735)^4}{10^{-5}}}; \quad \frac{\partial e(0,t)}{\partial x} = \phi_a = 0; \quad e(0, t) = \phi_b = 0 \\ i(x, 0) = i_0(x) = 0; \quad \frac{\partial i(0,t)}{\partial x} = \phi_a = 0; \quad i(0, t) = \phi_b = 0 \\ r(x, 0) = r_0(x) = 0; \quad \frac{\partial r(0,t)}{\partial x} = \phi_a = 0; \quad r(0, t) = \phi_b = 0 \\ d(x, 0) = d_0(x) = 0; \quad \frac{\partial d(0,t)}{\partial x} = \phi_a = 0; \quad d(0, t) = \phi_b = 0 \end{array} \right.$$

Per risolvere il problema con il metodo alle differenze finite utilizziamo un metodo semi-implicito in modo tale da non dover trovare ad ogni iterazione la soluzione di un sistema di equazioni non lineari ma solamente la soluzione di un sistema lineare. Assumendo coefficienti costanti possiamo scrivere $\forall i = 0, \dots, N-1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau} + \beta_i \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n I_i^n + \beta_e \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n E_i^n - n_{pop} \nu_s \frac{S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} - \beta_i \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n I_i^n - \beta_e \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n E_i^n + (\alpha + \gamma_e) E_i^n - n_{pop} \nu_e \frac{E_{i+1}^{n+1} - 2E_i^{n+1} + E_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ \frac{I_i^{n+1} - I_i^n}{\tau} - \alpha E_i^n + (\gamma_i + \delta) I_i^n - n_{pop} \nu_i \frac{I_{i+1}^{n+1} - 2I_i^{n+1} + I_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ \frac{R_i^{n+1} - R_i^n}{\tau} - \gamma_e E_i^n - \gamma_i I_i^n - n_{pop} \nu_r \frac{R_{i+1}^{n+1} - 2R_i^{n+1} + R_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ \frac{D_i^{n+1} - D_i^n}{\tau} - \delta I_i^n = 0 \end{array} \right.$$

Per semplicità consideriamo il termine di reazione non lineare nell'istante precedente come se fosse la il termine forzante $f(x, t)$ di una generica equazione di diffusione-reazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau} - n_{pop} \nu_s \frac{S_{i+1}^{n+1} - 2S_i^{n+1} + S_{i-1}^{n+1}}{h^2} = -\beta_i \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n I_i^n - \beta_e \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n E_i^n =: f_{S_i}^n \\ \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} - n_{pop} \nu_e \frac{E_{i+1}^{n+1} - 2E_i^{n+1} + E_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \beta_i \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n I_i^n + \beta_e \left(1 - \frac{A_e}{n_{pop}} \right) S_i^n E_i^n =: f_{E_i}^n \\ \frac{I_i^{n+1} - I_i^n}{\tau} - n_{pop} \nu_i \frac{I_{i+1}^{n+1} - 2I_i^{n+1} + I_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \alpha E_i^n - (\gamma_i + \delta) I_i^n =: f_{I_i}^n \\ \frac{R_i^{n+1} - R_i^n}{\tau} - n_{pop} \nu_r \frac{R_{i+1}^{n+1} - 2R_i^{n+1} + R_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \gamma_e E_i^n + \gamma_i I_i^n =: f_{R_i}^n \\ \frac{D_i^{n+1} - D_i^n}{\tau} = \delta I_i^n =: f_{D_i}^n \end{array} \right.$$

Infine, in ogni equazione nel primo e ultimo nodo della discretizzazione, imponiamo le condizioni al contorno: di tipo Neumann in $x = 0$ e di tipo Dirichlet in $x = 1$

$$\begin{cases} \frac{S_1^n - S_{-1}^n}{2h} = 0, & S_N^n = 0 \\ \frac{E_1^n - E_{-1}^n}{2h} = 0, & E_N^n = 0 \\ \frac{I_1^n - I_{-1}^n}{2h} = 0, & I_N^n = 0 \\ \frac{R_1^n - R_{-1}^n}{2h} = 0, & R_N^n = 0 \\ - - & D_N^n = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che per la funzione d non essendoci termine diffusivo non è possibile imporre la derivata prima nulla con il metodo del nodo fantasma; tuttavia se osserviamo la relazione costitutiva del termine forzante allora la condizione di Neumann al bordo è garantita dalla condizione imposta sul I .

Costruiamo la formulazione matriciale di ogni equazione del problema che come nel caso precedente è composta dalla matrice di iterazione, dal vettore dei termini noti e dai vettori contententi

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \mathbf{F}_S^n = \begin{bmatrix} f_{S0}^n + \frac{2n_{pop}v_s\phi_a}{h} \\ f_{S2}^n \\ \vdots \\ f_{SN}^n + \frac{n_{pop}v_s\phi_b}{h^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{F}_E^n = \begin{bmatrix} f_{E0}^n + \frac{2n_{pop}v_e\phi_a}{h} \\ f_{E2}^n \\ \vdots \\ f_{EN}^n + \frac{n_{pop}v_e\phi_b}{h^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad \mathbf{F}_I^n = \begin{bmatrix} f_{I0}^n + \frac{2n_{pop}v_i\phi_a}{h} \\ f_{I2}^n \\ \vdots \\ f_{IN}^n + \frac{n_{pop}v_i\phi_b}{h^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad \mathbf{F}_R^n = \begin{bmatrix} f_{R0}^n + \frac{2n_{pop}v_r\phi_a}{h} \\ f_{R2}^n \\ \vdots \\ f_{RN}^n + \frac{n_{pop}v_r\phi_b}{h^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

Possiamo quindi scrivere la seguente formulazione matriciale del problema dove $\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{s}}^{n+1} = (I_N + \tau n_{pop} v_s A_h)^{-1} (\tilde{\mathbf{s}}^n + \tau \mathbf{F}_S^n) \\ \tilde{\mathbf{e}}^{n+1} = (I_N + \tau n_{pop} v_e A_h)^{-1} (\tilde{\mathbf{e}}^n + \tau \mathbf{F}_E^n) \\ \tilde{\mathbf{i}}^{n+1} = (I_N + \tau n_{pop} v_i A_h)^{-1} (\tilde{\mathbf{i}}^n + \tau \mathbf{F}_I^n) \\ \tilde{\mathbf{r}}^{n+1} = (I_N + \tau n_{pop} v_r A_h)^{-1} (\tilde{\mathbf{r}}^n + \tau \mathbf{F}_R^n) \\ \tilde{\mathbf{d}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{d}}^n + \tau \mathbf{F}_D^n \end{cases}$$

Aggiungendo la condizione al contorno $\mathbf{s} = [\tilde{\mathbf{s}}, 0]^\top$ $\mathbf{e} = [\tilde{\mathbf{e}}, 0]^\top$ $\mathbf{i} = [\tilde{\mathbf{i}}, 0]^\top$ otteniamo le matrici che contengono le soluzioni $R^{N+1 \times M+1}$

$$S = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

DA FINIRE

5 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

- [1] Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz, *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*, 2nd Edition, Kindle Edition, Cambridge University Press, 2022.
- [2] Enrico Schlesinger, *Algebra lineare e geometria*, Zanichelli, 2017.
- [3] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, volume 3, Johns Hopkins University Press, 2013.
- [4] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, P. Gervasio, *Matematica Numerica*, 4a edizione, Springer, 2013.

A Codici Matlab

A.1 PCA - Principal Component Analysis

Listing 1: PCA su un dataset gaussiano in \mathbb{R}^3

```
1 % Parametri della distribuzione gaussiana
2 mu = [0 0 0]; % Media
3 sigma = [1 0.5 0.2; 0.5 1 0.3; 0.2 0.3 1]; % Matrice di
   covarianza
4 % Generazione del dataset casuale distribuito gaussianamente
   in  $\mathbb{R}^3$ 
5 rng(42); % Impostiamo il seed per la replicabilit 
6 n = 400; % Numero di punti nel dataset
7 data = mvnrnd(mu, sigma, n); % Generiamo i dati casuali
8 % Calcolo della PCA
9 coeff = pca(data); % Calcoliamo i coefficienti della PCA
10 % Plot del dataset e dei vettori della PCA
11 % Plot dei punti
12 scatter3(data(:,1), data(:,2), data(:,3), 'MarkerEdgeColor', '
   k');
13 hold on;
14 % Primo, Secondo e Terzo vettore della PCA
15 quiver3(mean(data(:,1)), mean(data(:,2)), mean(data(:,3)), ...
16         coeff(1,1), coeff(2,1), coeff(3,1), 'r', 'LineWidth',
           2);
17 quiver3(mean(data(:,1)), mean(data(:,2)), mean(data(:,3)), ...
18         coeff(1,2), coeff(2,2), coeff(3,2), 'g', 'LineWidth',
           2);
19 quiver3(mean(data(:,1)), mean(data(:,2)), mean(data(:,3)), ...
20         coeff(1,3), coeff(2,3), coeff(3,3), 'b', 'LineWidth',
           2);
21 % Titoli e grafica
22 xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z');
23 title('PCA');
24 grid on; axis equal;
25 legend({'Dati', 'Componente 1', 'Componente 2', 'Componente 3'
   });
```

A.2 Compressione delle immagini

Listing 2: Approssimazione di un'immagine con il Teorema di Eckart-Young

```
1 function compress_image(image_path, k)
2     img = imread(image_path);
3     if size(img, 3) == 3
4         % Conversione dell'immagine in scala di grigi
5         img = rgb2gray(img);
6     end
7     % Converti l'immagine in una variabile double per il
      calcolo SVD
8     img_double = double(img);
9     [U, S, V] = svd(img_double);
10    U_k = U(:, 1:k);
11    S_k = S(1:k, 1:k);
12    V_k = V(:, 1:k);
13    % Ricostruzione dell'immagine compressa
14    img_compressed = U_k * S_k * V_k';
15    % Riconversione ad immagine
16    img_compressed = uint8(img_compressed);
17    figure;
18    subplot(1, 2, 1);
19    imshow(img);
20    title('Immagine Originale');
21    subplot(1, 2, 2);
22    imshow(img_compressed);
23    title(['Immagine Compressa con k = ', num2str(k)]);
24 end
```

A.3 Equazione del Calore con condizioni miste

Listing 3: Eulero Implicito con condizioni al bordo miste

```
1 function [x,t,U] = calore_EI_ND(L,N,T,K,ua1,ub,f,u0)
2 % Calcolo passo di discretizzazione in spazio e tempo
3 h=2*L/N;
4 tau=T/K;
5 % Inizializzazione dei vettori t
6 t=linspace(0,T,K+1);
7 t=t';
8 % Inizializzazione del vettore x
9 x=linspace(-L,L,N+1);
10 x=x';
11 % Inizializzazione della matrice soluzione u
12 U=zeros(N+1,K+1);
13 % Condizione iniziale
14 U(:,1)=u0(x);
15 % Condizioni al bordo
16 U(end,:)=ub(t);
17 % Costruzione in formato sparso della matrice A
18 e=ones(N,1);
19 A=spdiags([-e 2*e -e],[1 0 -1],N,N);
20 A(1,1)=2;
21 A(1,2)=-2;
22 A=(tau/h^2)*A;
23 I=eye(N,N);
24 % Ciclo iterativo
25 for k = 1:K
26     % Assemblaggio termine noto
27     F=f(x(1:end-1),t(k+1));
28     % Correzione del termine noto con le condizioni al bordo
29     F(1)=F(1)+(2/h)*ua1(t(k+1));
30     F(end)=F(end)+(1/h^2)*ub(t(k+1));
31     F=tau*F;
32     % Risoluzione del problema
33     U(1:end-1,k+1)=(I+A) \ (U(1:end-1,k)+F);
34 end
```

A.4 DMD

Listing 4: Calcolo della DMD

```
1 function [Phi, omega, lambda, b, Xdmd] = DMD(X1, X2, r, dt)
2 %% DMD
3 [U, S, V] = svd(X1, 'econ');
4 r = min(r, size(U, 2));
5
6 U_r = U(:, 1:r); % Troncamento a rango r
7 S_r = S(1:r, 1:r);
8 V_r = V(:, 1:r);
9 Atilde = U_r' * X2 * V_r / S_r;
10 [W_r, D] = eig(Atilde);
11 Phi = X2 * V_r / S_r * W_r; % Modi DMD
12
13 lambda = diag(D); % Autovalori nel tempo discreto
14 omega = log(lambda) / dt; % Autovalori nel tempo continuo
15
16 %% Calcolo delle ampiezze dei modi DMD b
17 x1 = X1(:, 1);
18 b = Phi \ x1;
19
20 %% Ricostruzione DMD
21 mm1 = size(X1, 2); % mm1 = m - 1
22 time_dynamics = zeros(r, mm1);
23 t = (0:mm1-1) * dt; % Vettore temporale
24 for iter = 1:mm1
25     time_dynamics(:, iter) = (b .* exp(omega * t(iter)));
26 end
27 Xdmd = Phi * time_dynamics;
28
29 end
```

A.5 Modello S.E.I.R.D.

Listing 5: Sistema PDE con condizione di Neumann-Dirichlet

```

1 function [x, t, S, E, I, R, D] = sistema_pde_ND(L, N, T, K,
    sa1, sb, ea1, eb, ia1, ib, ra1, rb, da1, db, u0_e, u0_i,
    u0_r, u0_d, beta_i, beta_e, alpha, gamma_e, gamma_i, delta,
    a_e, n_pop, v_s, v_e, v_i, v_r);
2 % Calcolo passo di discretizzazione in spazio e tempo
3 h = L / N;
4 tau = T / K;
5 % Inizializzazione dei vettori t e x
6 t = linspace(0, T, K+1)';
7 x = linspace(0, L, N+1)';
8 % Inizializzazione delle matrici soluzione
9 S = zeros(N+1, K+1);
10 E = zeros(N+1, K+1);
11 I = zeros(N+1, K+1);
12 R = zeros(N+1, K+1);
13 D = zeros(N+1, K+1);
14 % Condizioni iniziali
15 S(:, 1) = u0_s(x);
16 E(:, 1) = u0_e(x);
17 I(:, 1) = u0_i(x);
18 R(:, 1) = u0_r(x);
19 D(:, 1) = u0_d(x);
20 % Condizioni al contorno
21 S(end, :) = sb(t);
22 E(end, :) = eb(t);
23 I(end, :) = ib(t);
24 R(end, :) = rb(t);
25 D(end, :) = db(t);
26 % Costruzione delle matrici A
27 e = ones(N, 1);
28 A_s = spdiags([-e 2*e -e], [-1 0 1], N, N) * (tau / h^2) * v_s
    *n_pop;
29 A_e = spdiags([-e 2*e -e], [-1 0 1], N, N) * (tau / h^2) * v_e
    *n_pop;
30 A_i = spdiags([-e 2*e -e], [-1 0 1], N, N) * (tau / h^2) * v_i
    *n_pop;

```

```

31 A_r = spdiags([-e 2*e -e], [-1 0 1], N, N) * (tau / h^2) * v_r
    *n_pop;
32 A_s(1,1)=2*tau/h^2*v_s*n_pop;
33 A_s(1,2)=-2*tau/h^2*v_s*n_pop;
34 A_e(1,1)=2*tau/h^2*v_e*n_pop;
35 A_e(1,2)=-2*tau/h^2*v_e*n_pop;
36 A_r(1,1)=2*tau/h^2*v_r*n_pop;
37 A_r(1,2)=-2*tau/h^2*v_r*n_pop;
38 A_i(1,1)=2*tau/h^2*v_i*n_pop;
39 A_i(1,2)=-2*tau/h^2*v_i*n_pop;
40 for k = 1:K
41     % Termini noti e correzioni per le condizioni al bordo
42     s = S(1:end-1, k);
43     e = E(1:end-1, k);
44     i = I(1:end-1, k);
45     r = R(1:end-1, k);
46     F_s = -beta_i * (1 - a_e / n_pop) .* s .* i - beta_e * (1
        - a_e / n_pop) .* s .* e;
47     F_e = beta_i * (1 - a_e / n_pop) .* s .* i + beta_e * (1 -
        a_e / n_pop) .* s .* e - (alpha + gamma_e) * e;
48     F_i = alpha * e - (gamma_i + delta) * i;
49     F_r = gamma_e * e + gamma_i*i;
50     F_d = delta * i;
51     F_s(1)=F_s(1)+2*n_pop*v_s/h*sa1(t(k+1));
52     F_s(end)=F_s(end)+1*n_pop*v_s/h^2*sb(t(k+1));
53     F_e(1)=F_e(1)+2*n_pop*v_e/h*ea1(t(k+1));
54     F_e(end)=F_e(end)+1*n_pop*v_e/h^2*eb(t(k+1));
55     F_i(1)=F_i(1)+2*n_pop*v_i/h*ia1(t(k+1));
56     F_i(end)=F_i(end)+1*n_pop*v_i/h^2*ib(t(k+1));
57     F_r(1)=F_r(1)+2*n_pop*v_r/h*ra1(t(k+1));
58     F_r(end)=F_r(end)+1*n_pop*v_r/h^2*rb(t(k+1));
59     F_d(1)=F_d(1);
60     F_d(end)=F_d(end);
61     % Aggiornamento delle soluzioni
62     S(1:end-1, k+1) = (eye(N) + A_s) \ (s + tau * F_s);
63     E(1:end-1, k+1) = (eye(N) + A_e) \ (e + tau * F_e);
64     I(1:end-1, k+1) = (eye(N) + A_i) \ (i + tau * F_i);
65     R(1:end-1, k+1) = (eye(N) + A_r) \ (r + tau * F_r);
66     D(1:end-1, k+1) = D(1:end-1, k) + tau * F_d;
67 end

```