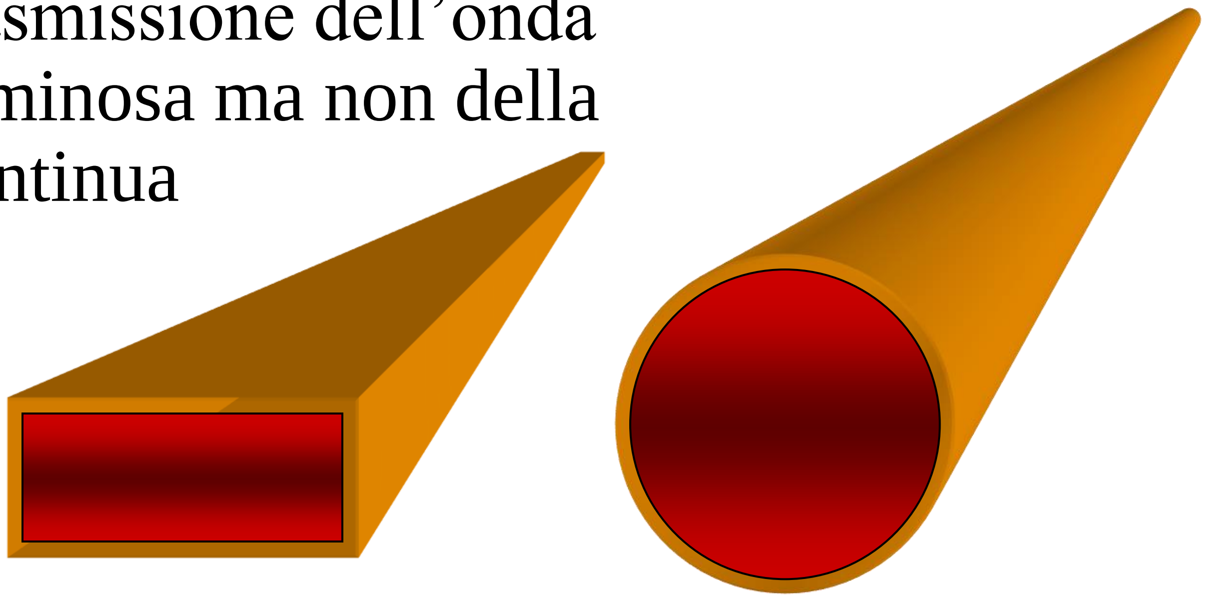
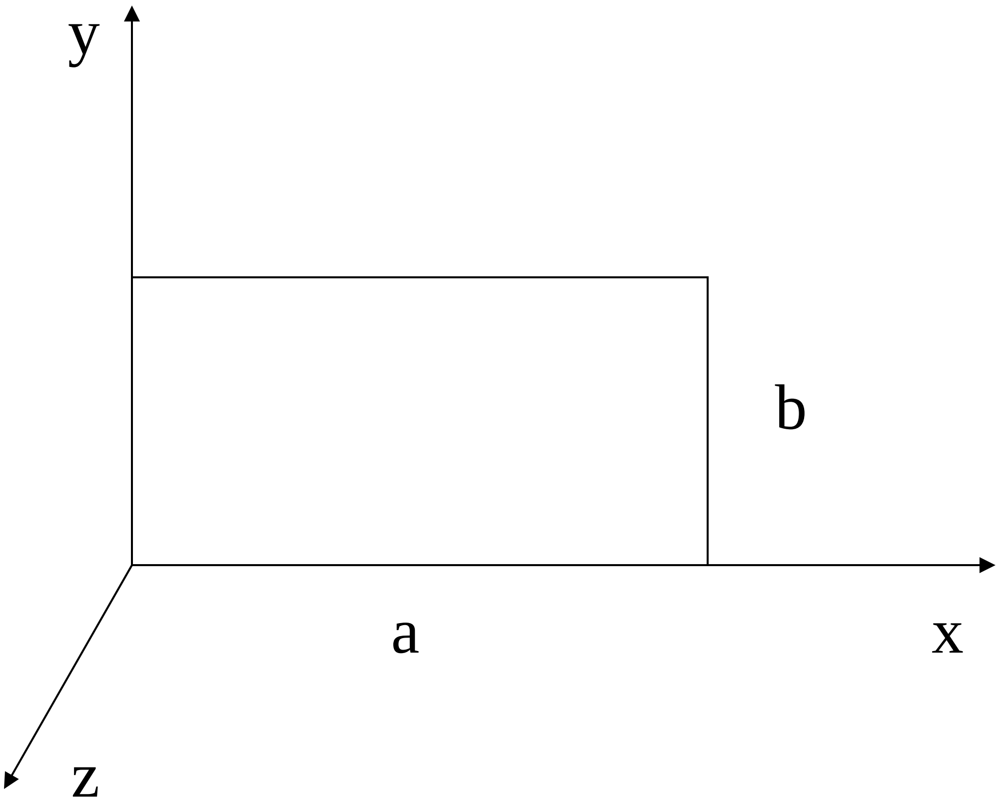
Guide d’onda

- Un tubo metallico consente la trasmissione dell’onda luminosa ma non della continua



Guide rettangolari (dominio della frequenza)



$$\mathbf{E}(x,y,z) = (\mathbf{e}(x,y) + \mathbf{u}_z e_z(x,y))e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (\mathbf{h}(x,y) + \mathbf{u}_z h_z(x,y))e^{-j\beta z}$$

N.B. Le quantità **E**, **H** sono fasori!!

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) = -j\omega\mu\,\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) = j\omega\varepsilon\,\mathbf{E}$$

$$\partial_y E_z + j\beta E_y = -j\omega\mu\, H_x$$

$$-j\beta E_x - \partial_x E_z = -j\omega\mu\, H_y$$

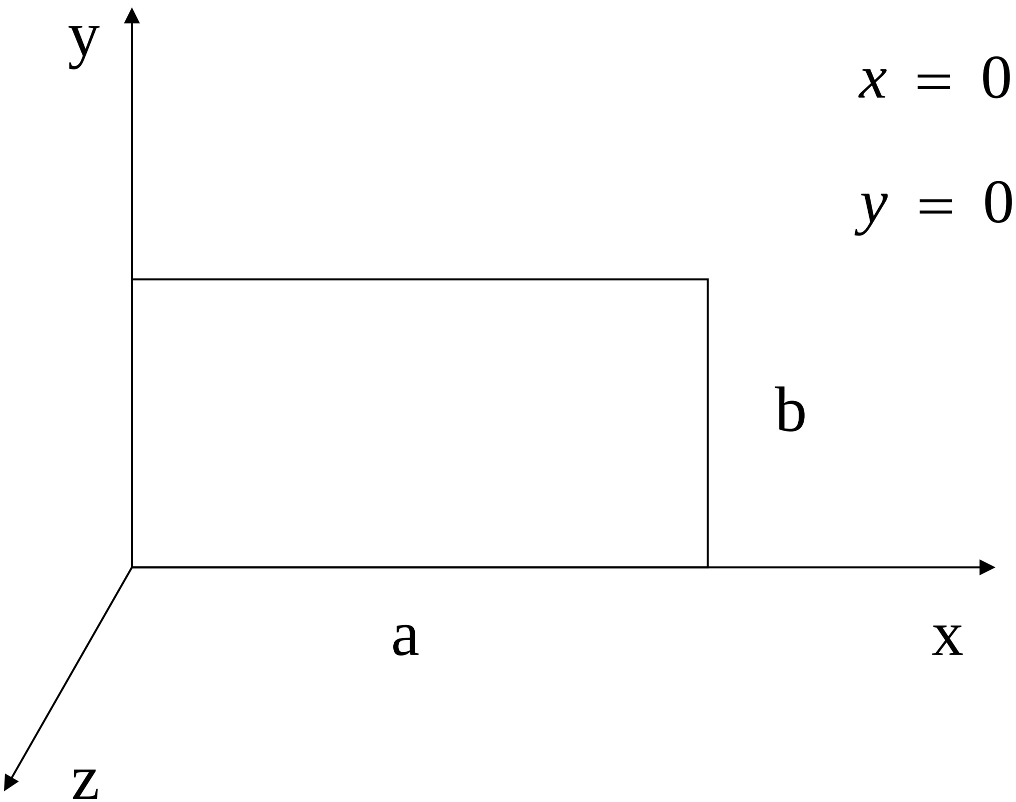
$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = -j\omega\mu\, H_z$$

$$\partial_y H_z + j\beta H_y = j\omega\varepsilon\, E_x$$

$$-j\beta H_x - \partial_x H_z = j\omega\varepsilon\, E_y$$

$$\partial_x H_y - \partial_y H_x = j\omega\varepsilon\, E_z$$

Condizioni al contorno



$$\left.\begin{array}{l} x = 0 ; x = a \\ y = 0 ; y = b \end{array}\right\} \quad \partial_{n} H_{z} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 ; x = a \\ y = 0 ; y = b \end{array}\right\} \quad E_{z} = 0$$

Modi TE (H)

$$E_z = 0$$

$$H_x = \frac{-j}{k_c^2} \beta \partial_x H_z \qquad E_x = \frac{-j}{k_c^2} \omega\mu \, \partial_y H_z$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \beta \partial_y H_z \qquad E_y = \frac{j}{k_c^2} \omega\mu \, \partial_x H_z$$

IMPEDENZA D’ONDA

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta}$$

Modi TE (H)

$$E_z = 0$$

H_z deve soddisfare l' equazione d' onda di Helmoltz

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + k^2\right) H_z = 0$$

ma

$$H_z = h_z(x, y) e^{-j\beta z}$$

quindi

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2\right) h_z = 0$$

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2\right) h_z(x, y) = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0; x = a \\ y = 0; y = b \end{array}\right\} \qquad \partial_n h_z = 0$$

Separazione delle variabili: $h_z(x, y) = X(x) Y(y)$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 XY = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 = 0$$

Soluzione generale

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2$$

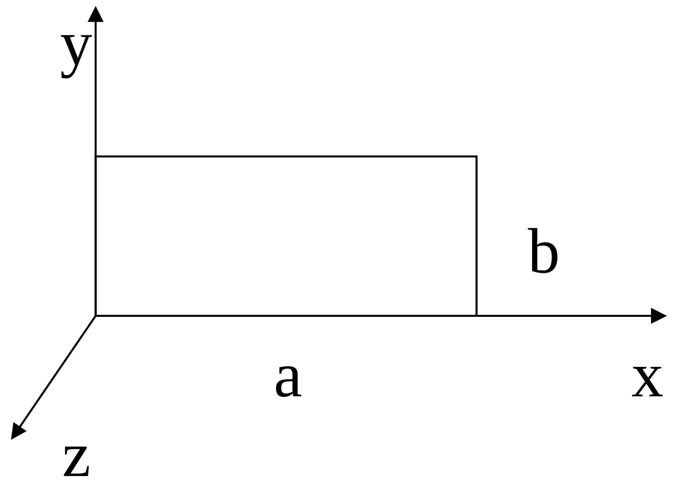
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 \qquad\qquad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

$$Y(y) = C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)$$

Condizioni al contorno

$$\left.\begin{array}{l} x = 0;\, x = a \\ y = 0;\, y = b \end{array}\right\} \quad \partial_{\mathrm{n}} h_z = 0$$



$$A = C = 0$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a};\, k_y = \frac{m\pi}{b}$$

Soluzione TE

$$h_{znm}(x, y) = A_{nm} \cos\frac{n\pi}{a}x \cos\frac{m\pi}{b}y$$

$$H^{\pm}_{znm}(x, y, z) = A_{nm} \cos\frac{n\pi}{a}x \cos\frac{m\pi}{b}y \, e^{\mp j\beta z}$$

$$k^2 - \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

n o m non nulli

β deve essere reale

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \geq \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]$$

Pertanto:

$$\beta^2 = k^2 - \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \geq 0$$

Frequenza di cutoff

Rispetto alla frequenza:

$$f \geq f_{cnm} = \frac{c}{(2\pi)} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

f_{cnm} è la frequenza di taglio (cutoff) del modo TE nm

Il modo fondamentale è quello con frequenza di taglio minore.
Se a è maggiore di b, il modo fondamentale è il TE_{10} .

$$f_{c10} = \frac{c}{2}\frac{1}{a} \qquad f_{c10}(\mathrm{GHz}) = \frac{150}{a(\mathrm{mm})}$$

Es. banda L (1.12 –1.70 GHz, WR650), a=165.1 mm, $f_{c10} = 0.908\ \mathrm{GHz}$

banda W (75 –110 GHz), a=2.54 mm, $f_{c10} = 59.01\ \mathrm{GHz}$

Modo fondamentale TE10: campo elettromagnetico

$$H_z^{\pm}(x, y, z) = A_{10} \cos \frac{\pi}{a} x \quad e^{\mp j\beta z}$$

$$H_x^{\pm} = \frac{j}{k_c^2} \frac{\pi}{a} \beta A_{10} \sin \frac{\pi}{a} x \quad e^{\mp j\beta z}$$

$$E_y^{\pm} = -\frac{j}{k_c^2} \omega\mu \frac{\pi}{a} A_{10} \sin \frac{\pi}{a} x \quad e^{\mp j\beta z}$$

$$E_x = H_y = E_z = 0$$

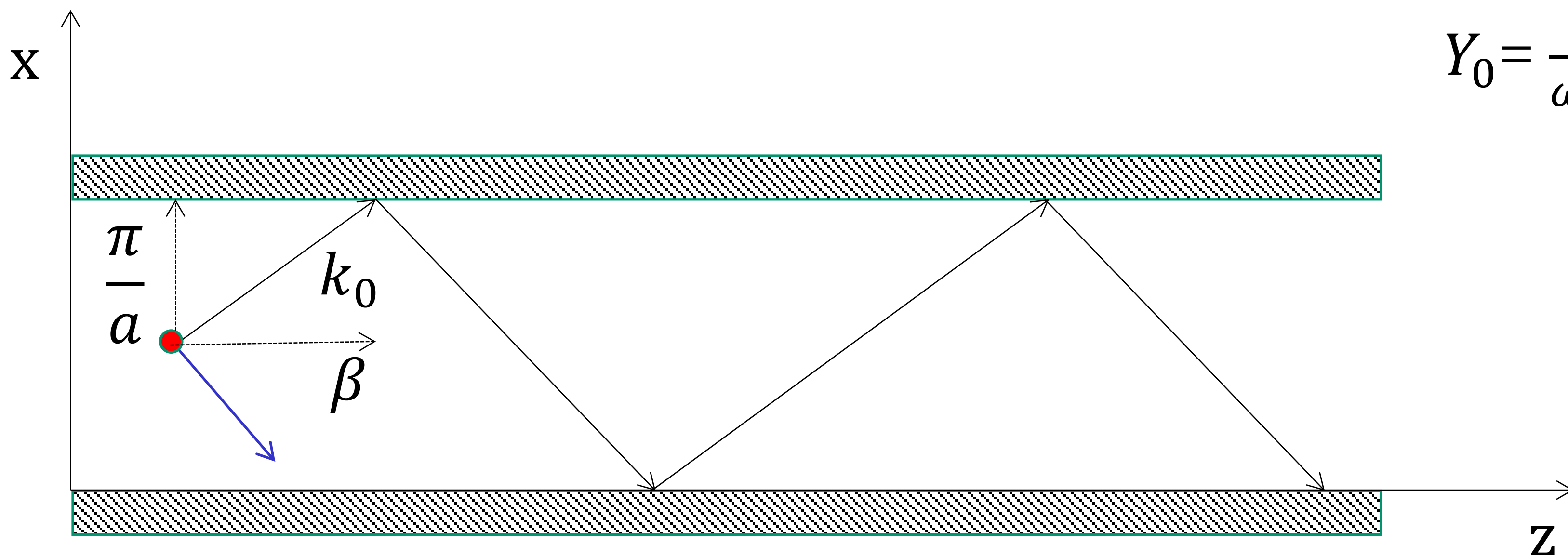
$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{x,y,z}) = V^{+}\phi(x)e^{-j\beta z}\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

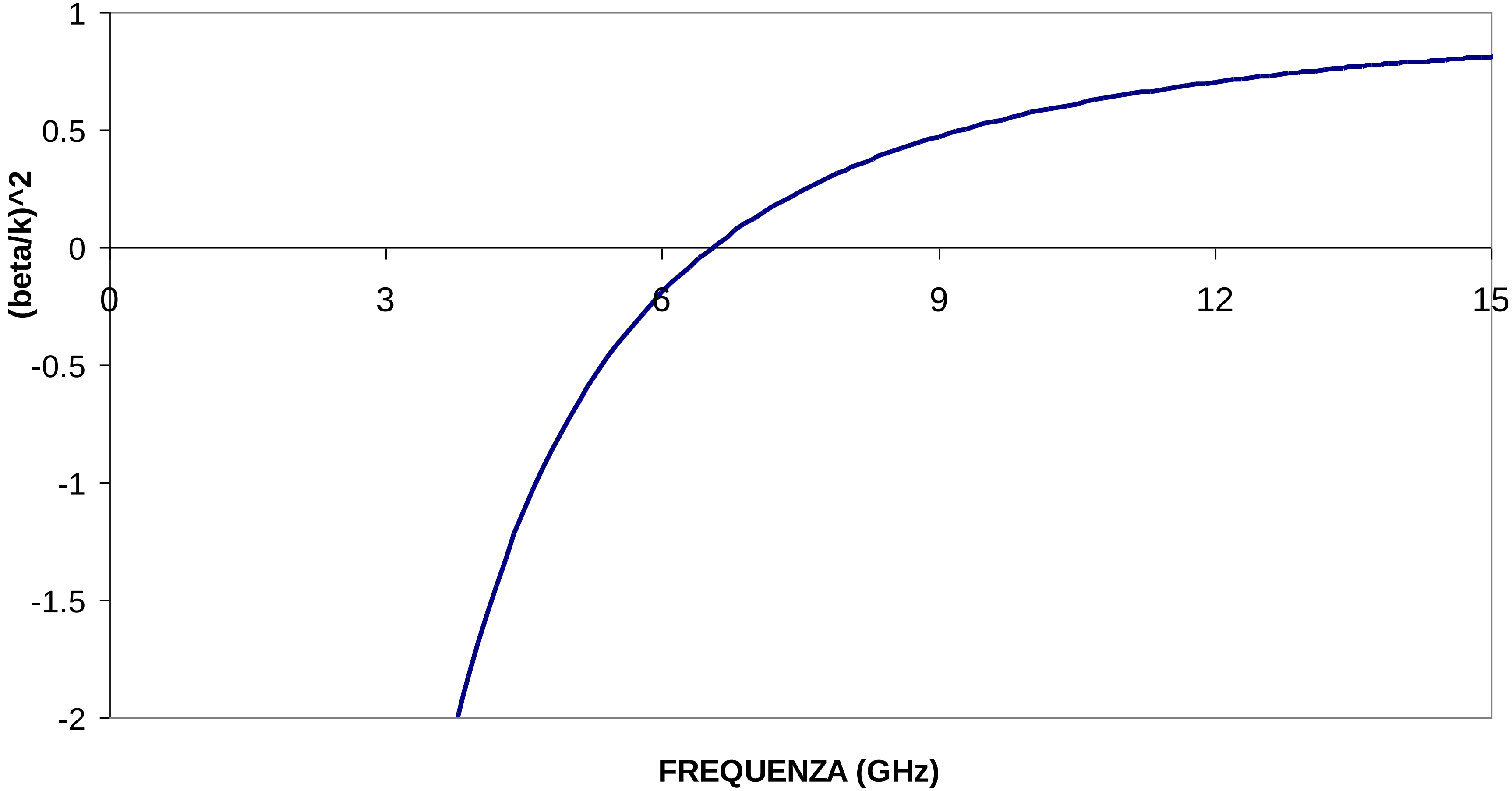
$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(j\beta V^{+}\phi(x)e^{-j\beta z}\hat{\boldsymbol{x}} + V^{+}\phi'(x)e^{-j\beta z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$

$$\mathbf{H}(\mathrm{x,y,z}) = \left(-Y_0\phi(x)\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\frac{\pi}{a}}{j\omega\mu_0}\sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right)V^{+}e^{-j\beta z}$$

$$Y_0 = \frac{\beta}{\omega\mu_0}$$

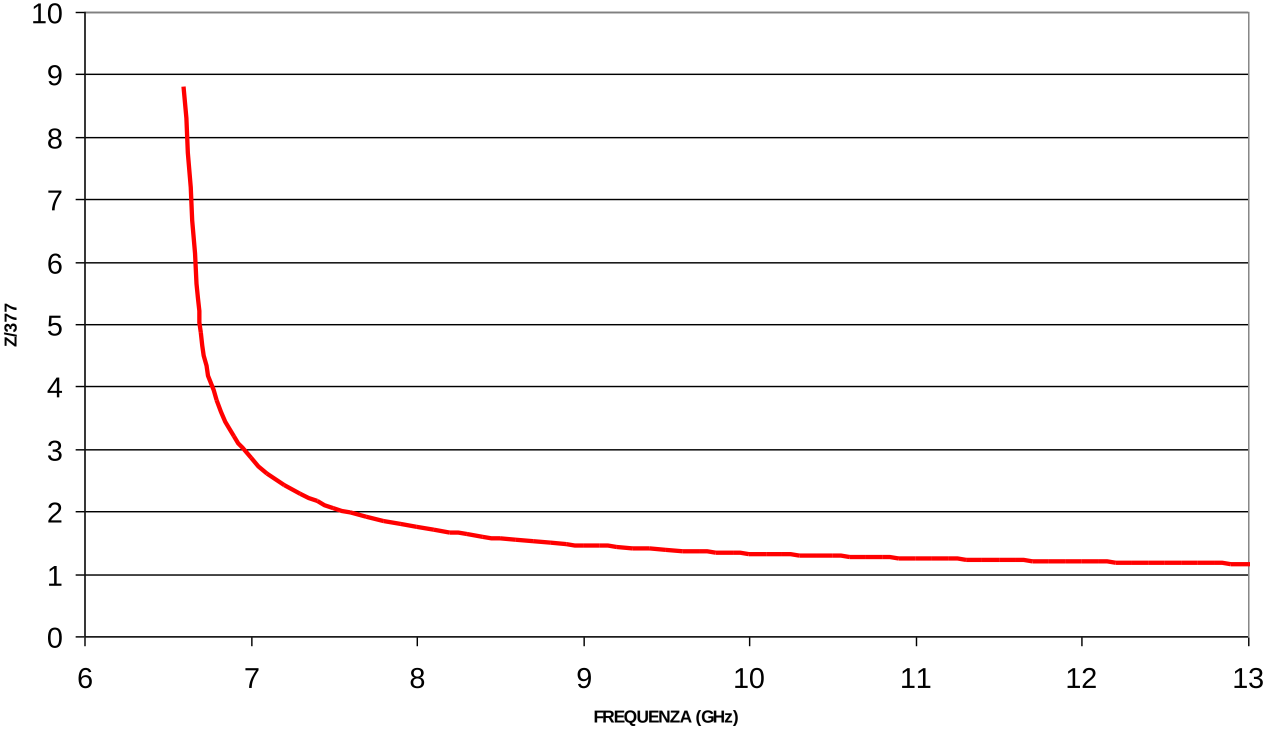


Curva di dispersione per il modo fondamentale



Impedenza d'onda

$$Z_{TE_{10}} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu_0}{\beta} = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$$



Lunghezza d’onda

Lunghezza d’onda in guida:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} > \frac{2\pi}{k} = \lambda$$

Velocità di fase:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \geq \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Flusso di potenza attiva media

$$P_{10} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^a \int_0^b \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{u}_z \, dx \, dy =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} Y_0 \, |V^+|^2 \int_0^a \int_0^b \phi^2(x) dx dy = \frac{1}{2} Y_0 |V^+|^2}$$

Velocità di fase

Ogni componente spettrale ω si propaga con velocità di fase $\omega/\beta(\omega)$, dove :

$$\beta(\omega) = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

A quale velocità si propaga un segnale non sinusoidale, o che abbia energia finita oppure sia periodico?

Consideriamo una portante sinusoidale ω_0 modulata in ampiezza dal segnale *s(t), con banda B molto minore di* ω_0

Velocità di gruppo

Come già visto, ogni componente spettrale ω si propaga con costante di fase $\beta(\omega)$:

$$\beta(\omega) = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \approx \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)$$

In $z=0$

$$s(t) = S(t, z = 0) \cdot e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega_0 t} d\omega$$

Il segnale in una sezione *z* si ottiene integrando le componenti spettrali sfasate del fattore di propagazione: $e^{-i\beta(\omega)z}$

$$s(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega)\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{i\omega_0 t} e^{-i\beta(\omega)z}\, d\omega =$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega)\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{i\omega_0 t} e^{-i[\beta(\omega_0)+\beta'(\omega_0)\cdot(\omega-\omega_0)]z}\, d\omega =$$

$$= e^{i\omega_0 t} e^{-i[\beta(\omega_0)-\beta'(\omega_0)\cdot\omega_0]z} \frac{1}{2\pi}\int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega)\cdot e^{i\omega[t-\beta'(\omega_0)z]}\, d\omega =$$

$$= e^{i\omega_0 t} e^{-i[\beta(\omega_0)-\beta'(\omega_0)\cdot\omega_0]z} S(t-\beta'(\omega_0)z)$$

A parte il fattore moltiplicativo, $e^{-i[\beta(\omega_0)-\beta'(\omega_0)\cdot\omega_0]z}$

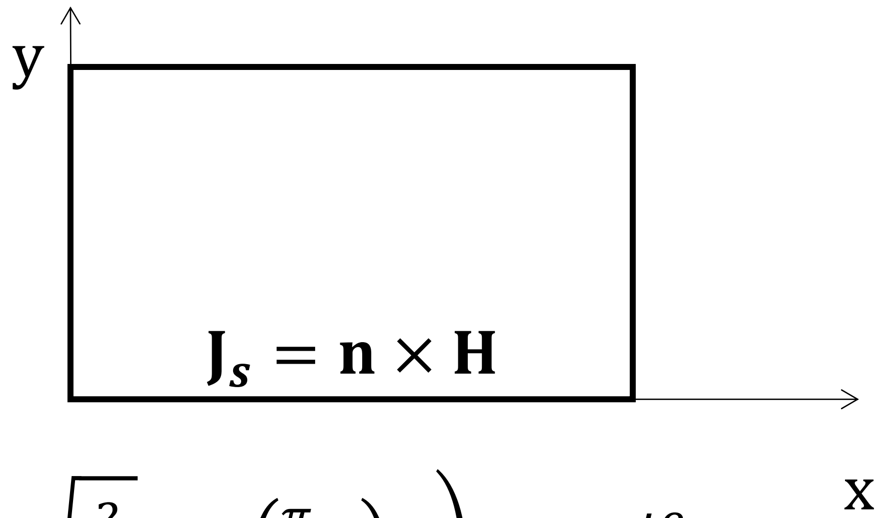
$s(t,z)$ è la replica di $s(t,0)$ ritardata di un tempo z/v_g

dove $v_g = \left. \dfrac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega_0}$

Quindi, nelle ipotesi di banda stretta, il pacchetto d’onda si propaga senza subire distorsioni alla VELOCITA’ DI GRUPPO v_g

Perdite in guida d'onda rettangolare (TE10)

$$P_\ell = \frac{1}{2} R_s \int_{S_0} \left| \hat{\mathbf{J}}_s \right|^2 dS$$



$$\mathbf{H}(\mathrm{x,y,z}) = \left(-Y_0 \phi(x) \hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\frac{\pi}{a}}{j\omega\mu_0} \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right) V^+ e^{-j\beta z}$$

$y = 0 \quad \mathbf{J}_s = \hat{\boldsymbol{y}} \times \mathbf{H}$ $\qquad$ $y = b \quad \mathbf{J}_s = -\hat{\boldsymbol{y}} \times \mathbf{H}$ $\qquad$ Lati maggiori

$x = 0 \quad \mathbf{J}_s = \hat{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{H}$ $\qquad$ $x = a \quad \mathbf{J}_s = -\hat{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{H}$ $\qquad$ Lati minori

$$\mathbf{H}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \left(-Y_0\phi(x)\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\frac{\pi}{a}}{j\omega\mu_0}\sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right)V^+e^{-j\beta z}$$

$$\int_0^a |\mathbf{H}(\mathrm{x},0,\mathrm{z})|^2 dx =$$

$$\int_0^a \left|\left(-Y_0\phi(x)\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\frac{\pi}{a}}{j\omega\mu_0}\sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right)V^+e^{-j\beta z}\right|^2 dx$$

$$= |V^+|^2\left((Y_0)^2\int_0^a \phi^2(x)dx + \left(\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0}\right)^2\frac{2}{ab}\int_0^a cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx\right) =$$

$$= |V^+|^2\left((Y_0)^2\frac{1}{b} + \left(\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0}\right)^2\frac{2}{ab}\frac{a}{2}\right)$$

Potenza media attiva dissipata sui lati maggiori per unità di lunghezza (W/m)

$$P_a = \frac{1}{2} R_s |V^+|^2 2 \left((Y_0)^2 \frac{1}{b} + (\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0})^2 \frac{1}{b} \right)$$

$$\int_0^b |\mathbf{H}(0,\mathrm{y},\mathrm{z})|^2 dx = \int_0^b \left| \left(-\frac{\frac{\pi}{a}}{j\omega\mu_0}\sqrt{\frac{2}{ab}}\,\hat{\boldsymbol{z}} \right) V^+ e^{-j\beta z} \right|^2 dy$$

$$=|V^+|^2 \left((\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0})^2 \frac{2}{ab} b \right)$$

Potenza media attiva dissipata sui lati minori per unità di lunghezza (W/m)

$$P_b = \frac{1}{2} R_s |V^+|^2 2 \left((\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0})^2 \frac{2}{a} \right)$$

Potenza media attiva dissipata per unità di lunghezza (W/m)

$$P_a + P_b = \frac{1}{2} R_s |V^+|^2 2 \left((Y_0)^2 \frac{1}{b} + (\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0})^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a} \right) \right)$$

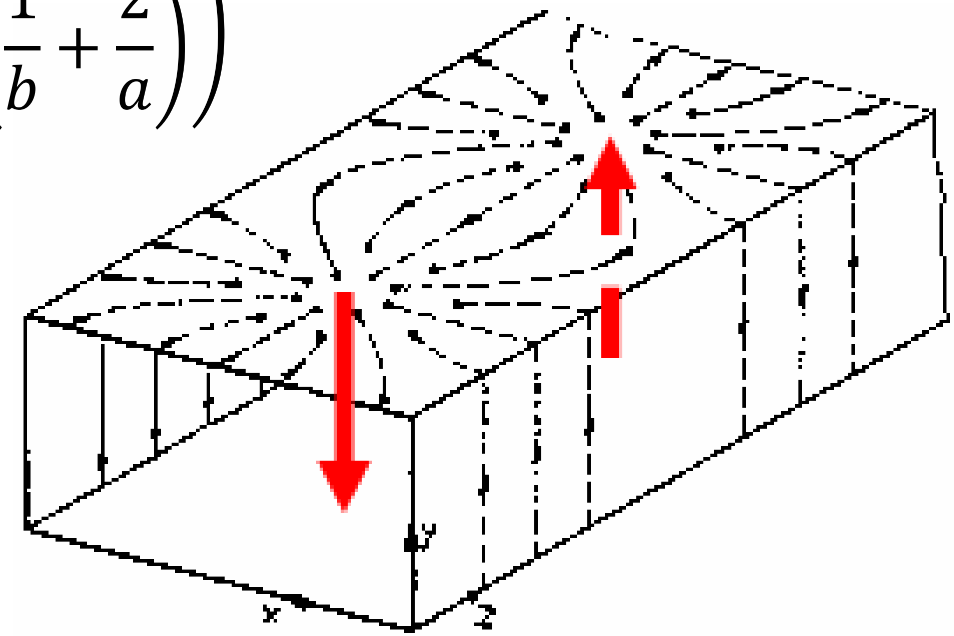
$$P(z) = P(z=0)e^{-2\alpha z}$$

$$-\frac{d}{dz} P(z) = 2\alpha P(z=0)e^{-2\alpha z} =$$

$$\alpha = 1/2 \, \frac{\frac{d}{dz} P(z)|_{z=0}}{P(z=0)} = 1/2 \, \frac{P_a + P_b}{P(z=0)} = 1/2 \, \frac{\frac{1}{2} R_s \left|V^+\right|^2 2 \left((Y_0)^2 \frac{1}{b} + (\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0})^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a} \right) \right)}{\frac{1}{2} Y_0 |V^+|^2}$$

Costante di attenuazione (Np/m) per effetto Joule

$$\alpha = Z_0 R_s \left((Y_0)^2 \frac{1}{b} + \left(\frac{\frac{\pi}{a}}{\omega\mu_0}\right)^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right) \right)$$



$$\alpha_c \approx \frac{R_s}{a^3 b \beta k \eta}\left(2b\pi^2 + a^3 k^2\right)$$

Le perdite diminuiscono all’aumentare della sezione trasversale !!

Modi TM (E)

$$H_z = 0$$

E_z deve soddisfare l' equazione d' onda

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + k^2\right) E_z = 0$$

ma

$$E_z = e_z(x, y) e^{-j\beta z}$$

quindi

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2\right) e_z = 0$$

Modi TM (continua)

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2\right) e_z(x,y) = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0;\, x = a \\ y = 0;\, y = b \end{array}\right\} \quad e_z = 0$$

Separazione delle variabili : $e_z(x,y) = X(x)Y(y)$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 XY = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 = 0$$

Soluzione generale

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \qquad\qquad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

$$Y(y) = C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)$$

Soluzione TM

$$e_{znm}(x,y) = B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

$$E^{\pm}_{znm}(x,y,z) = B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \; e^{\mp j\beta z}$$

$$k^2 - \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

n e m non nulli

β deve essere reale, perché il modo sia in propagazione

$$\beta^2 = k^2 - \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \geq 0$$

Pertanto: $$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \geq \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]$$

Frequenza di cutoff

Rispetto alla frequenza:

$$f \geq f_{cnm} = \frac{c}{(2\pi)} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

f_{cnm} è la frequenza di taglio (cutoff) del modo TM nm

f_{cnm} è la stessa per modi TE e TM

Il modo TM di ordine minore è il TM_{11} .

$$f_{c11}(GHz) \approx \frac{\pi}{21}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Nel caso generale (n,m)

$$E_z^{\pm}(x,y,z) = B_{11} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} x \quad e^{\mp j\beta z}$$

$$E_x^{\pm} = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{n\pi}{a} B_{nm} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \quad e^{\mp j\beta z}$$

$$H_x^{\pm} = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{m\pi}{b} B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y \quad e^{\mp j\beta z}$$

$$E_y^{\pm} = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{m\pi}{b} B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y \quad e^{\mp j\beta z}$$

$$H_y^{\pm} = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{n\pi}{a} B_{nm} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \quad e^{\mp j\beta z}$$

Le guide d'onda sono dimensionate in modo tale che alla frequenza di lavoro vi sia un solo modo in propagazione. Pertanto, essendo in pratica $a \geq 2b$

Il secondo modo risulta essere il TE20, la cui frequenza di taglio vale:

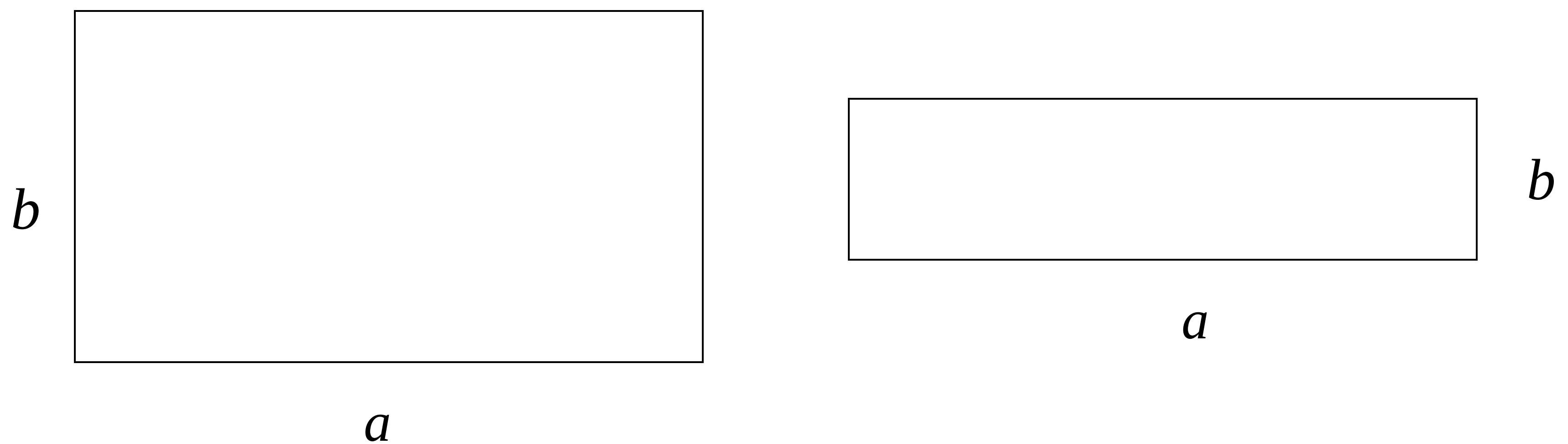
$$f_{c20}(\mathrm{GHz}) = \frac{300}{a(\mathrm{mm})}$$

Quindi l'intervallo di monomodalità

$$\frac{300}{a(\mathrm{mm})} = f_{c20} \geq f(GHz) \geq f_{c10} = \frac{150}{a(\mathrm{mm})}$$

Es. $a = 15\ \mathrm{mm} \qquad 20\ \mathrm{GHz} \geq f \geq 10\ \mathrm{GHz}$

Si nota inoltre che i modi di indice m=0, non dipendono da b, mentre la frequenza di taglio dei rimanenti aumenta al diminuire di b. Si potrebbe pensare di scegliere b quanto minore possibile……



Ricordiamo però che: $\alpha_c \approx \frac{R_s}{a^3 bk\eta}\left(2b\pi^2 + a^3k^2\right)$

E che pure il campo max è inversamente proporzionale a $\sqrt{b}$

Confronto potenza max gestibile

Cavo coassiale:

$$P_{max} = 5.8 \cdot 10^{12} \left(\frac{E_d}{f_{max}} \right)^2$$

10 GHz (senza modi superiori) P=520 kW

Guida rettangolare:

$$P_{max} = 2.6 \cdot 10^{13} \left(\frac{E_d}{f_{max}} \right)^2$$

10 GHz (senza modi superiori) P=2300 kW