

Campi Elettromagnetici

Guide Circolari

lez. 23 30.05.2022

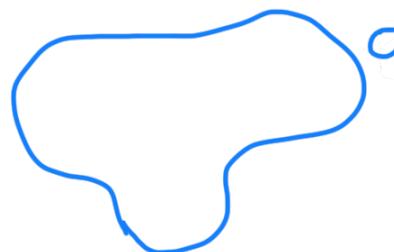
- Per le guide d'onda a sezione arbitraria si può sempre rappresentare il campo e.m. tangenziale (x, y) in funzione delle componenti longitudinali: (z) :

$$\bar{E}_t = \bar{E}_t(E_z, H_z)$$

$$\bar{H}_t = \bar{H}_t(E_z, H_z)$$

- Se il conduttore è ideale, le condizioni al contorno per E_z e H_z sono disgiunte:

$$\begin{cases} E_z(c) = 0 \\ D_m H_z(c) = 0 \end{cases}$$



- Le soluzioni delle guida circolari sono un sottoinsieme di quelle caotiche.
- Ogni guida d'onda consente la propagazione di un'infinità numerabile di modi caratterizzati ciascuno da un'infinità numerabile di frequenze di taglio $k_{c,n}$.

E₅: modo n-esimo in propagazione per $k_0 > k_{cm}$

- Per ogni guida d'onda si possono ricavare i valori $k_{c,1}, \dots, k_{c,m}$ che rappresentano i numeri d'onda di taglio dei primi m modi in propagazione e sono gli autovalori del problema che dipendono dalle cond. al contorno.

E₆: guida rettangolari

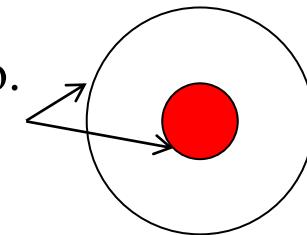
$$k_{cm}^2 = \left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2, \quad s, p \in \mathbb{Z}$$

\downarrow
 $n = n(s, p)$

Cavo coassiale: condizioni al contorno: $\partial_r H_z = 0$

Il contorno è conforme al sistema di coordinate cilindrico.

Soluzione a variabili separabili.



$$R'(R_i) = CJ'_n(k_c R_i) + DY'_n(k_c R_i) = 0$$

$$R'(R_e) = CJ'_n(k_c R_e) + DY'_n(k_c R_e) = 0$$

$$\begin{bmatrix} J'_n(k_c R_i) & Y'_n(k_c R_i) \\ J'_n(k_c R_e) & Y'_n(k_c R_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione non nulla per quei valori
di k_c tali che

$$J'_n(k_c R_i)Y'_n(k_c R_e) - Y'_n(k_c R_i)J'_n(k_c R_e) = 0$$

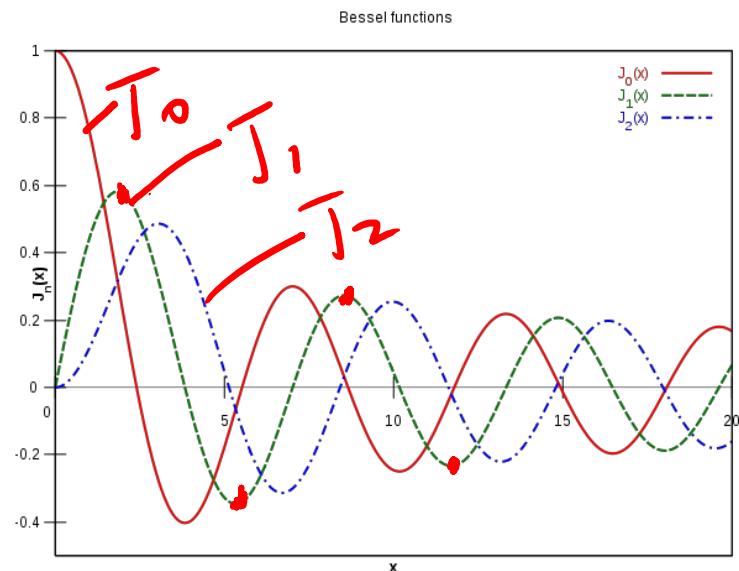
- La dipendenza da r è espressa come combinazione di funz. di Bessel di I e II specie
- Quelle di II specie hanno una singolarità in $r=0$

↳ guide coassiali: non è un problema, non ho bisogno di volutare il campo in $r=0$

↳ " circolari": le soluzioni con funz. di Bessel di II specie scompaiono

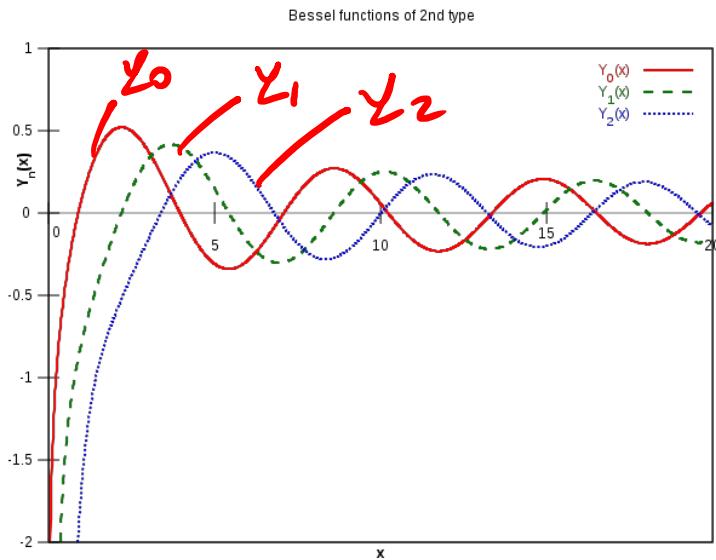
Funzioni di Bessel

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

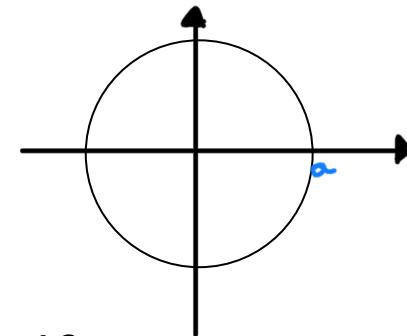


$$Y_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_p(x) = \infty$$



Guida Circolare



modi TE (h_z)

$$h_{zn}(r, \varphi, z) = J_n(k_c r) \frac{\cos(n\varphi)}{\sin(n\varphi)} e^{-j\beta z}$$

Condizioni al contorno:

$$J'_n(k_c a) = 0$$

→ zeri della derivata prima
||

$$k_c a = p'_{nm}$$

Il primo zero si ha per $n=1, m=1 \rightarrow$ modo fond. guida circolare

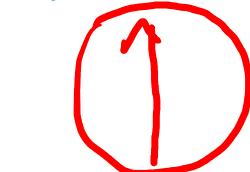
$$(TE_{11})$$

modi TM (e_z)

$$e_{zn}(r, \varphi, z) = J_n(k_c r) \frac{\cos(n\varphi)}{\sin(n\varphi)} e^{-j\beta z}$$

$$J_n(k_c a) = 0$$

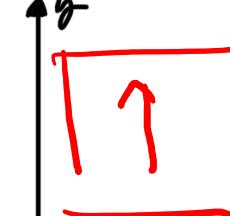
$$k_c a = p_{nm}$$

(1) TE_{11}  polarizz. verticale

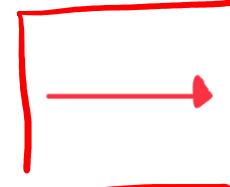
(2 soluzioni)
MODI
DEGENERI

$$(TE_{11V} \times TE_{M1H}^* = 0)$$

(2) TE_{11H}  polar. orizzontale

(1) TE_{10} 

analoghi ai modi
di una sezione quadrata (\neq rettangolare)

(2) TE_{01} 

$$\begin{bmatrix} e_r(r, \varphi) \\ h_\varphi(r, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1/r}{k_0^2 - \beta^2} \begin{bmatrix} -j\omega\mu_0 & +j\beta r \\ -j\beta & j\omega\varepsilon_0 r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\varphi h_z(r, \varphi) \\ -\partial_r e_z(r, \varphi) \end{bmatrix}$$

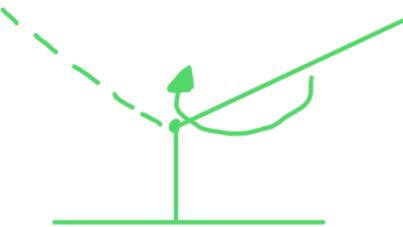
$$\begin{bmatrix} e_\varphi(r, \varphi) \\ h_r(r, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1/r}{k_0^2 - \beta^2} \begin{bmatrix} -j\omega\mu_0 r & -j\beta \\ j\beta r & j\omega\varepsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial_r h_z(r, \varphi) \\ \partial_\varphi e_z(r, \varphi) \end{bmatrix}$$

- La freq. di taglio del modo TE_{11} per una guida circolare è pari a:

$$f_{c, TE_{11}} = \frac{1.84}{a}, \text{ a raggio della guida}$$

- Vantaggi delle guide circolari:

(1) innestando due guide tra loro, la seconda può ruotare rispetto alla prima
(utile nei radar per illuminare a 360°)



(2) è comodo lavorare con le funz. di Bessel, ma ci si può sempre riferire ad una guida quadrata:

$$TE_{11V} \longleftrightarrow TE_{10}$$

$$TE_{11H} \longleftrightarrow TE_{01}$$

Teoria generale dei modi in guida d'onda

I campi trasversali possono esprimersi attraverso le sole componenti longitudinali:

Cerchiamo una soluzione propagativa del tipo $e^{-j\beta z}$

$$E_r = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad H_r = \frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\omega \varepsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

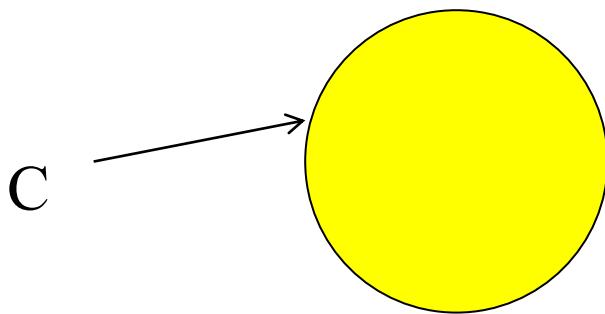
$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

$$k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$$

onda riempita
di aria



Quindi, le componenti trasversali sono funzioni di quelle longitudinali h_z e e_z , che sono le vere incognite. Come si comportano sul contorno C che delimita la guida d'onda?



Se i conduttori sono ideali,

- $e_z = 0$ su C
- $\partial_n h_z = 0$

Attenzione, le condizioni al contorno per e_z e h_z sono disgiunte e quindi ci sono due famiglie di soluzioni:

- 1) TE TRASVERSO ELETTRICO $e_z = 0, h_z \neq 0$
- 2) TM TRASVERSO MAGNETICO $e_z \neq 0, h_z = 0$

Diversamente, si avrebbe un'equazione di tipo $F(e_z, h_z) = 0$ su C

Componenti trasversali rispetto a quelle longitudinali:

$$\begin{bmatrix} e_r(r, \varphi) \\ h_\varphi(r, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1/r}{k_0^2 - \beta^2} \begin{bmatrix} -j\omega\mu_0 & +j\beta r \\ -j\beta & j\omega\varepsilon_0 r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\varphi h_z(r, \varphi) \\ -\partial_r e_z(r, \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_\varphi(r, \varphi) \\ h_r(r, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1/r}{k_0^2 - \beta^2} \begin{bmatrix} -j\omega\mu_0 r & -j\beta \\ j\beta r & j\omega\varepsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial_r h_z(r, \varphi) \\ \partial_\varphi e_z(r, \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\partial_r(re_\varphi e^{-j\beta z}) - \partial_\varphi(e_r e^{-j\beta z}) = -j\omega\mu_0 r h_z e^{-j\beta z}$$

$$\partial_r(r h_\varphi e^{-j\beta z}) - \partial_\varphi(h_r e^{-j\beta z}) = j\omega\varepsilon_0 r e_z e^{-j\beta z}$$

Le componenti longitudinali soddisfano
l'equazione d'onda

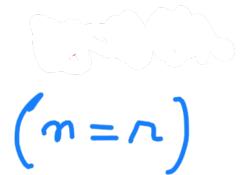
MODI TM

$$\nabla^2 E_z + k_0^2 E_z = 0 \quad E_z(\text{contorno}) = 0$$

MODI TE

$$\nabla^2 H_z + k_0^2 H_z = 0$$

$$\frac{\partial H_z(\text{contorno})}{\partial n} = 0$$



MODI TE

$$H_z(r,\phi,z) = h_z(r,\phi) e^{-j\beta z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 H_z + k_0^2 H_z = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \phi^2} - \beta^2 h_z \right] e^{-j\beta z} + k_0^2 h_z e^{-j\beta z} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \phi^2} + (k_0^2 - \beta^2) h_z = 0$$

Geometria del mezzo conforme al sistema di riferimento \Rightarrow posso risolvere H_z con il metodo delle variabili separabili

Variabili separabili

$$h_z(r, \phi) = R(r) \cdot P(\phi)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 P} \frac{d^2 P}{d\phi^2} + k_c^2 = 0 \quad k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$$

Moltiplicando per r^2

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2 k_c^2 = -\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\phi^2}$$

quantità costanti

Equazioni per R e P

$$-\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\phi^2} = \underline{k_\phi^2}$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2 k_c^2 = \underline{k_\phi^2}$$

$$\frac{d^2 P}{d\phi^2} + k_\phi^2 P = 0 \quad \Rightarrow P(\phi) = A \sin k_\phi \phi + B \cos k_\phi \phi = P(\phi + 2m\pi), \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$k_\phi = n$$

$$\Rightarrow P(\phi) = A \sin n\phi + B \cos n\phi \rightarrow \text{sostituisci nella 2^a eq.}$$

Equazione per R

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + (r^2 k_c^2 - k_\phi^2) = 0$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + (r^2 k_c^2 - n^2) = 0$$

$$R(r) = C J_n(k_c r) + D Y_n(k_c r) \rightarrow \text{eq. di Bessel}$$

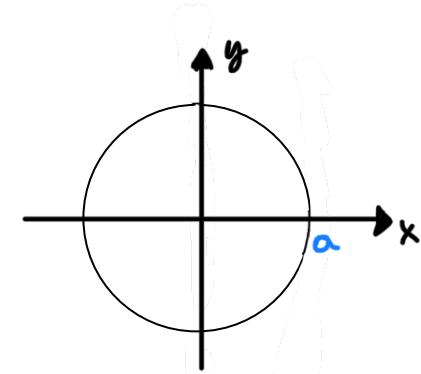
I° specie II° specie

$(\xrightarrow[x \rightarrow 0]{} +\infty)$

Guida Circolare

$$D = 0$$

(altrimenti $R(n) \rightarrow +\infty$)
 $x \rightarrow 0$



Condizioni al contorno: (TE)

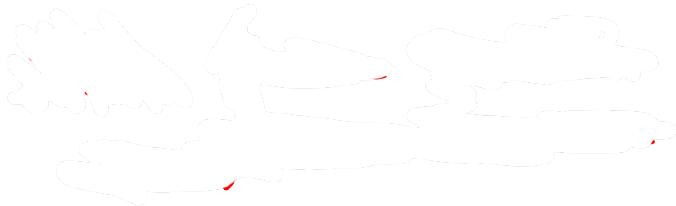
$$\frac{d}{dr} R(r) \Big|_{r=a} = 0 \quad (\text{su} \text{ } \text{contorno})$$

$$H_2(n) = C \cdot J_n(k_c n) \Rightarrow \left. \frac{d}{dn} H_2(n) \right|_{n=a} = 0 = C \cdot k_c \cdot J_n'(k_c a)$$

$$R'(a) = 0 \Rightarrow J_n'(k_c a) = 0$$

- Quindi dobbiamo vedere quali sono gli zeri della derivata prima della funz. di Bessel di I° specie di ordine n , ovvero i massimi (in modulo) di $J_p(x)$ (dove c'è un massimo/minimo locale, la pendenza della derivata è nulla)

Funzioni di Bessel

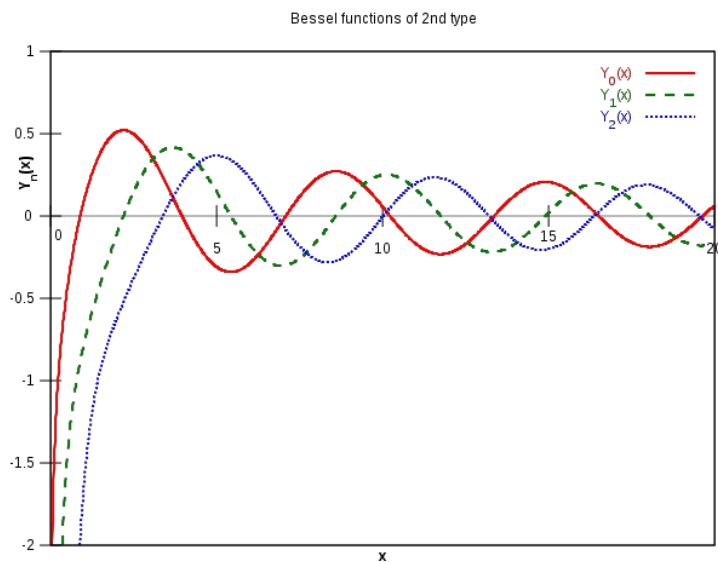
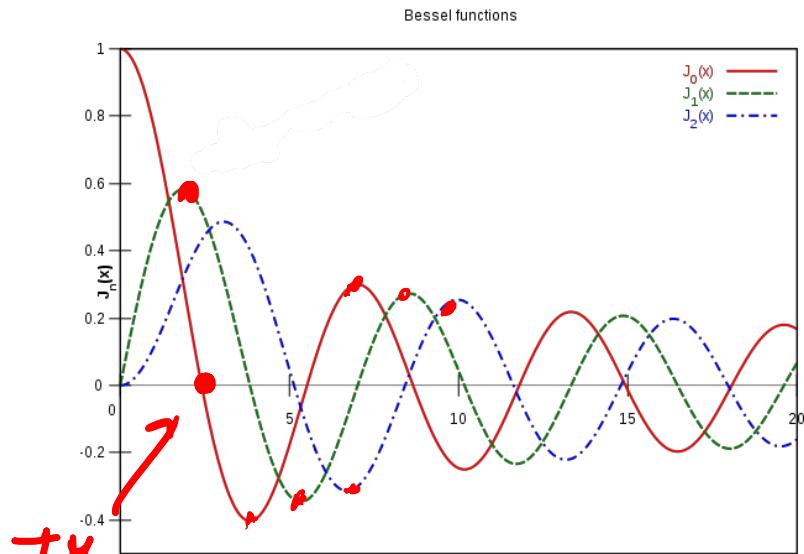


$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$



$$Y_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_p(x) = \infty$$



- Gli zeri saranno nella forma:

$$P_{m_1}^1, P_{m_2}^1, \dots, P_{m_K}^1, \quad n=0, \dots, +\infty$$

- Ordinandoli in modo crescente si ottiene che il più basso è:

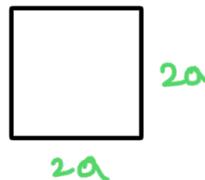
$P_{11}^1 = 1.84$

$\rightarrow K_c a = 1.84$ (valore più piccolo possibile)

$$\beta_{TE_{11}} = \sqrt{k_o^2 - k_c^2} = \sqrt{k_o^2 - \left(\frac{P_{11}^1}{a}\right)^2}$$

modo di ordine più basso
per la guida circolare

CONFRONTO CON GUIDA QUADRATA



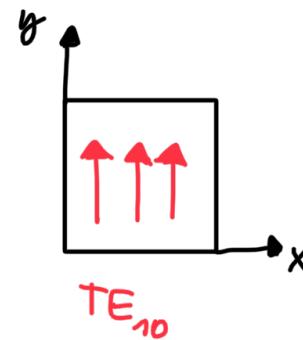
- GUIDA QUADRATA

- modo fond: TE_{10} (soluzione V)

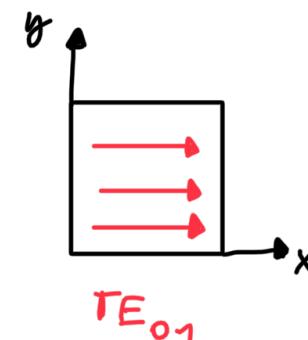
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_V = \phi(x) E_V^+ e^{-j\beta z} \hat{y} \\ \bar{H}_V = \frac{\nabla \times \bar{E}_V}{-j\omega \mu_0} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_H = \phi(y) E_H^+ e^{-j\beta z} \hat{x} \\ \bar{H}_H = \frac{\nabla \times \bar{E}_H}{-j\omega \mu_0} \end{array} \right.$$

Modi DEGENERI
(stessa soluzione con campo ruotato di 90°)



TE_{10}



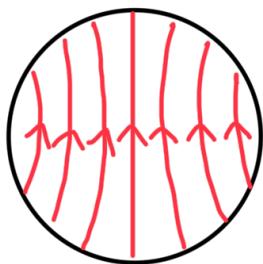
TE_{01}

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{4a^2}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

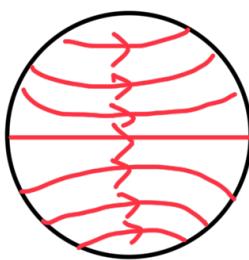
$$\beta_{wg} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2}$$

$$k_{cwg} = \frac{\pi}{2a}$$

- GUIDA CIRCOLARE



TE_{11V}



TE_{11H}

$$\beta_{WC} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{1.84}{a}\right)^2}$$

$$k_{CW_C} = \frac{1.84}{a}$$

Q: Calcola costante di propagazione di una guida circolare

$$a = 15 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad \beta(f) = \sqrt{k_0(f)^2 - \left(\frac{1.841}{a}\right)^2}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{K_{CW_C}^{TEM}}$

$$K_{CW_C}^{TEM} = \frac{1.841}{15 \cdot 10^{-3}} = 122.73, \quad k_0(f[\text{GHz}]) = 20.958 [\text{m}^{-1} \text{GHz}^{-1}] \cdot f[\text{GHz}]$$

$$f_c = \frac{1.841}{a \cdot 20.958} = 5.856 \text{ GHz}$$

- Il primo modo di ordine superiore della guida circolare è il TM_{01} , e il primo autovalore (= 1° zero della funz. di Bessel) è P_{01} (non c'è il pedice):

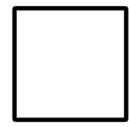
$$P_{01} = 2.405 \quad , \quad K_{c_{Wc}}^{TM_{01}} = \frac{P_{01}}{a} \Rightarrow K_{c_{Wc}}^{TM_{01}} = \frac{2.405}{15 \cdot 10^{-3}} = 160.33$$

$$f_{c_{TM_{01}}} = \frac{2.405}{a \cdot 20.958} = 7.65 \text{ GHz} \Rightarrow \text{la banda di monomodalità di una guida circolare è } \underline{\text{più piccola}} \text{ di quella di una guida quadrata}$$

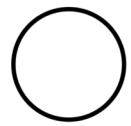
- Confronto bande di monomodalità:

- rettangolare ($a > 2b$) : $f_{c_{TE_{10}}} - f_{c_{TE_{20}}} = 2 f_{c_{TE_{10}}}$
- quadrata ($a=b$) : $f_{c_{TE_{10}}} - f_{c_{TE_{11}}} = \sqrt{2} f_{c_{TE_{10}}} = \underline{1.41} f_{c_{TE_{10}}}$
- circolare ($r=a$) : $f_{c_{TE_{11}}} - f_{c_{TM_{11}}} = \underline{1.3} f_{c_{TE_{11}}}$

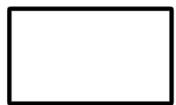
- Ricapitolando :



$$\left. \begin{array}{c} TE_{10V} \\ TE_{10H} \end{array} \right\} \text{BANDA: } f_{c_{TE_{10}}} - \underline{1.4} f_{c_{TE_{10}}}$$



$$\left. \begin{array}{c} TE_{11V} \\ TE_{11H} \end{array} \right\} \text{BANDA: } f_{c_{TE_{11}}} - \underline{1.3} f_{c_{TE_{11}}}$$



$$\left. \begin{array}{c} TE_{10} \end{array} \right\} \text{BANDA: } f_{c_{TE_{10}}} - \underline{2} f_{c_{TE_{10}}}$$

Zeri delle funzioni di Bessel

n	$p_{n1}^{'}$	$p_{n2}^{'}$	$p_{n3}^{'}$	$p_{n4}^{'}$
0	3.832	7.016	10.174	13.324
1	1.841 <small>TEM</small>	5.331	8.536	11.706
2	3.054	6.706	9.970	13.170

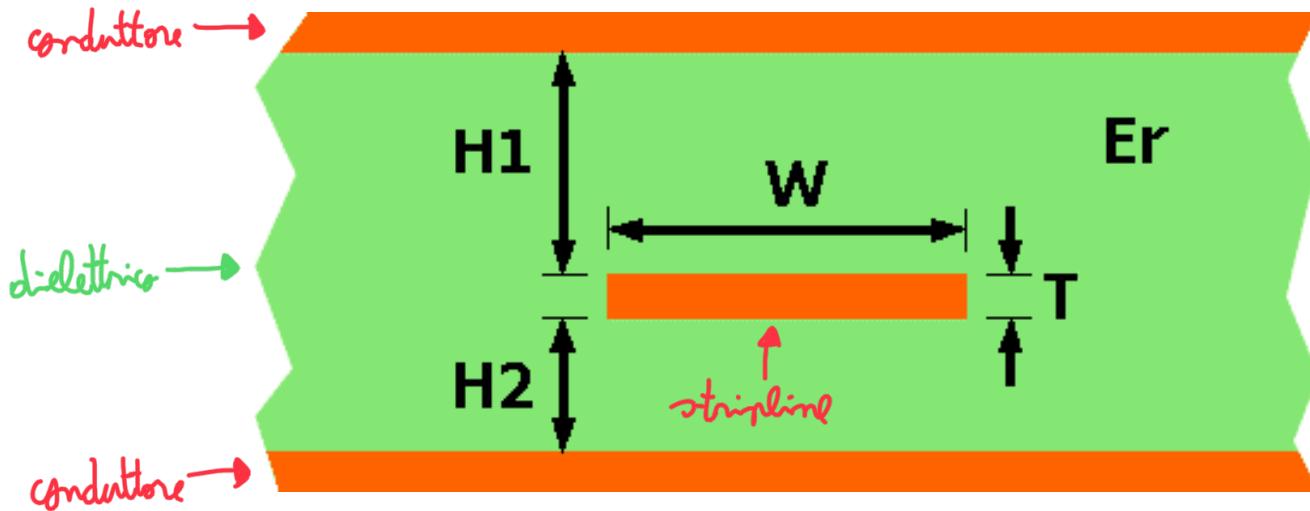
n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	p_{n4}
0	2.405 <small>TM₀₁</small>	5.520	8.654	11.792
1	3.832	7.016	10.174	13.324
2	5.135	8.417	11.620	14.796

Monomodalità

- Le guide d'onda sono dimensionate in modo che soltanto un modo sia in propagazione alla frequenza di lavoro.
- Quanto maggiore è la frequenza, tanto minore deve essere la sezione trasversale della guida per garantire monomodalità.
- Ne segue che le perdite sui conduttori aumentano.
- Ne segue pure che aumenta la concentrazione di campo elettromagnetico a parità di potenza o diminuisce la massima potenza che la guida può sopportare.

Altri mezzi trasmittivi .. Stripline

- le soluzioni non sono analitiche, mezzo economico per la produzione di massa



Dielettrico omogeneo, modo TEM

$$\beta = \sqrt{\epsilon_r} k_0 = \sqrt{\epsilon_r} \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$



Stripline: impedenza caratteristica

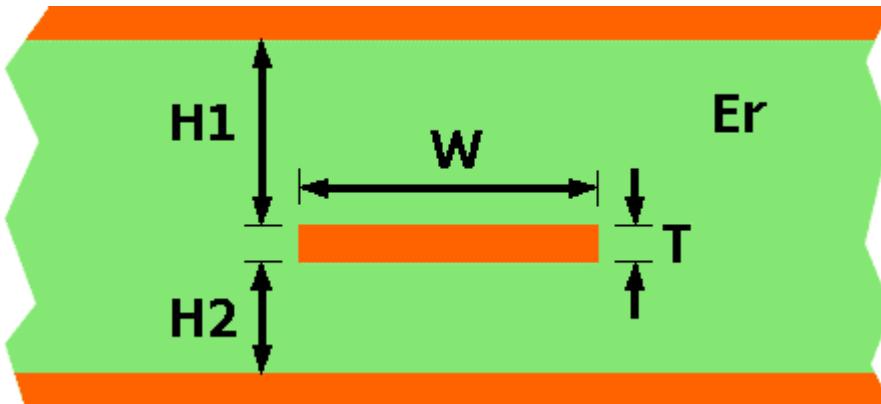
$$T = 0; \quad H_1 = H_2$$

$$b = H_1 + H_2$$

$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{1}{\frac{W_e}{b} + 0.441}$$

$$\frac{W_e}{b} = \frac{W}{b} - \begin{cases} 0 & \frac{W}{b} \geq 0.35 \\ \left(0.35 - \frac{W}{b}\right)^2 & \frac{W}{b} \leq 0.35 \end{cases}$$

Accuratezza 1%



La capacità per unità di lunghezza è data approssimativamente dal parallelo delle due capacità fra la striscia e i piani di massa inferiore e superiore, che si trovano al medesimo potenziale:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon \left(\frac{W}{H_1} + \frac{W}{H_2} \right) \Rightarrow Z_0 \approx \frac{1}{C} \sqrt{LC} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\frac{W}{H_1} + \frac{W}{H_2}}$$

$$LC = \epsilon \mu$$

Stripline: impedenza caratteristica in forma esplicita

$$\frac{W}{b} = \begin{cases} x & \sqrt{\epsilon_r} Z_0 \leq 120 \\ 0.85 - \sqrt{0.6 - x} & \sqrt{\epsilon_r} Z_0 \geq 120 \end{cases}$$

$$x = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r} Z_0} - 0.441$$

Stripline: attenuazione $\sqrt{\epsilon_r} Z_0 \leq 120$

$$\alpha_c = \frac{2.7 \times 10^{-3} R_s \epsilon_r Z_0}{30\pi(b-t)} A \quad [\text{Np/m}]$$

$$A = 1 + \frac{2W}{b-t} + \frac{1}{\pi} \frac{b+t}{b-t} \ln \frac{2b-t}{t}$$

Progetto di una stripline: impedenza caratteristica

$$Z_0 = 50\Omega \quad B=3.2 \text{ mm}, T=0.1 \text{ mm} \quad \epsilon_r = 2.2 \quad f=10\text{GHz}$$

$$\sqrt{\epsilon_r} Z_0 = \sqrt{2.2} \times 50 = 74.2 \quad \tan \delta = 0.001$$

$$x = 30\pi / \sqrt{\epsilon_r} Z_0 - 0.441 = 0.830$$

↓

$$W = bx = 3.2 \times 0.830 = 2.66\text{mm}$$

Progetto di una stripline: perdite

Dielettrico

$$k = 20.958 \times 10 \times \sqrt{2.2} = 310.6 \text{ m}^{-1}$$

$$\alpha_d = \frac{k \tan \delta}{2} = \frac{0.001 \times 310.6}{2} = 0.155 \text{ Np/m}$$

Conduttore (Cu) $R_s = 0.026 \Omega$

$$\alpha_c = \frac{2.7 \times 10^{-3} R_s \epsilon_r Z_0 A}{30\pi(b-t)} = 0.122 \text{ Np/m}$$

$$A = 4.74$$

Perdite complessive in dB/m 10 GHz

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c = 0.277$$

In dB $\alpha(\text{dB}) = 20 \times \log(e^\alpha) = 2.41 \text{ dB/m}$

In termini di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f} = 2.02 \text{ cm}$$

$$\alpha(\text{dB}) = 2.41 \text{ dB/m} \times 0.0202 \text{ m} = 0.049 \text{ dB/}\lambda$$

