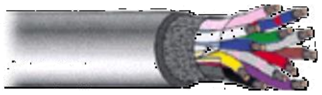
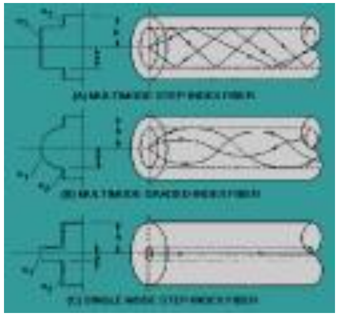
Mezzi Trasmissivi 1





LINEE DI TRASMISSIONE: Cavo coassiale

- Conduttore interno
- Calza conduttrice coassiale
- Dielettrico di separazione
- Guaina di protezione

EQUAZIONI DI MAXWELL PER I FASORI IN ASSENZA DI SORGENTI

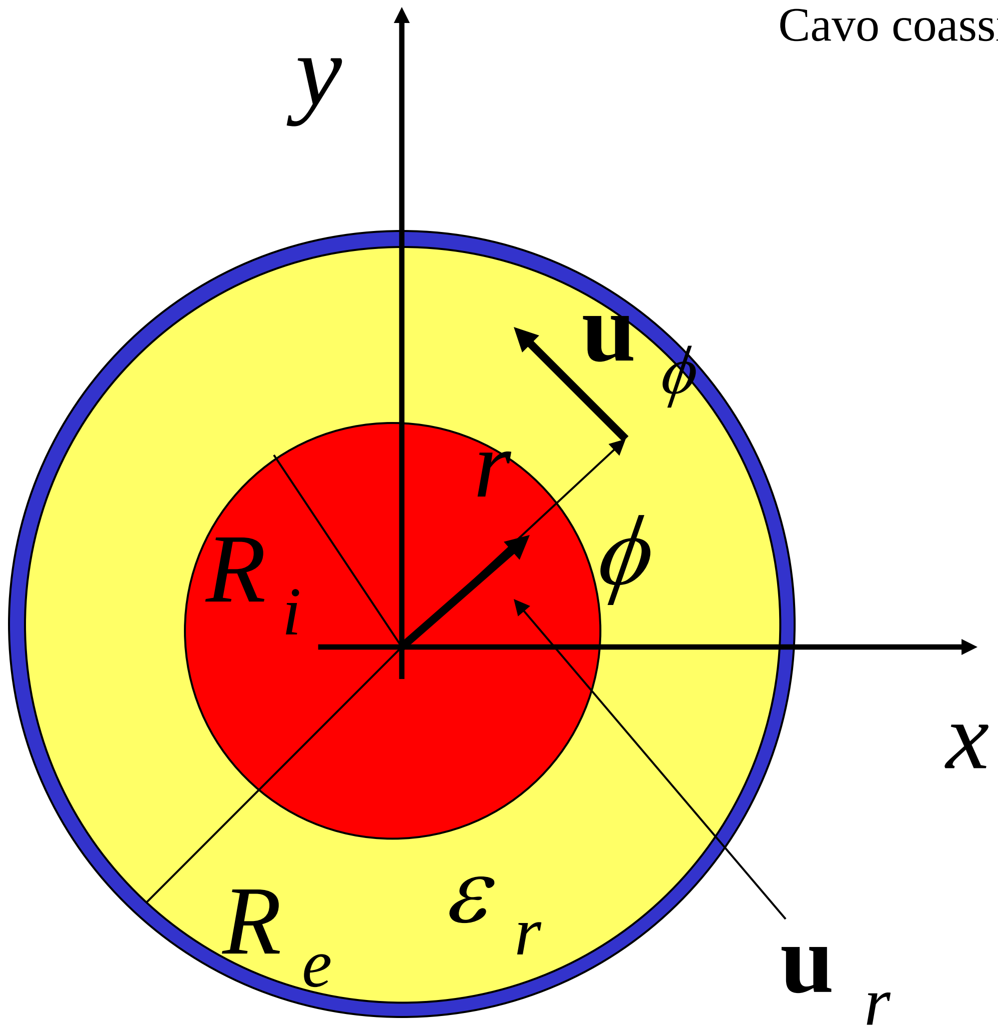
$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon \, \overset{\frown}{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \overset{\frown}{\mathbf{E}} = - j\omega\mu \, \hat{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon \, \nabla \cdot \overset{\frown}{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \overset{\frown}{\mathbf{E}} = - j\omega\mu \, \nabla \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0$$

Cavo coassiale



Modo TEM $\quad E_z = 0 \quad H_z = 0$

Inoltre, a causa della simmetria azimutale, ha senso cercare una soluzione che non dipenda da ϕ:

$$\partial_{\phi} = 0$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 = \frac{1}{r} \partial_r \left(r \hat{E}_r (r, z) \right)$$

essendo $E_z = 0$

$$\left[\hat{\mathbf{E}} \right] = \text{V/m}$$

$$r\hat{E}_r(r,z) = Cost \cdot \hat{V}(z) \Rightarrow \hat{E}_r(r,z) = \frac{Cost}{r}\hat{V}(z)$$

C si determina imponendo che:

$$\int_{R_i}^{R_e} \hat{E}_r(r,z)\,dr = \int_{R_i}^{R_e} \frac{Cost}{r}\hat{V}(z)\,dr =$$

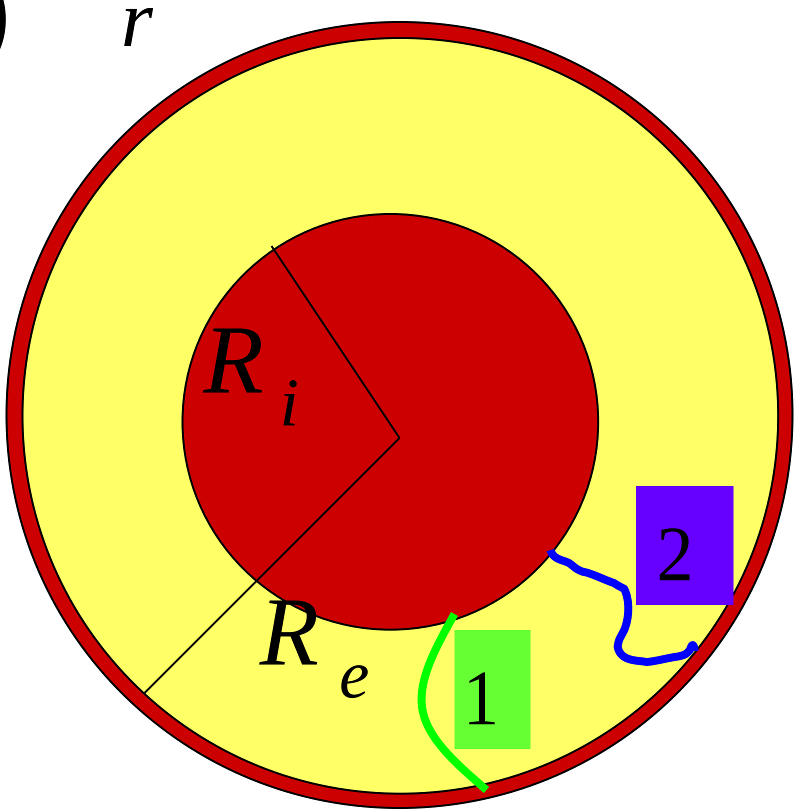
$$= Cost \cdot V(z)\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) = V(z) \Rightarrow Cost = \frac{1}{\ln\left(R_e / R_i\right)}$$

$$\left[\hat{V}(z)\right] = \mathrm{V}$$

C è adimensionale

Cavo coassiale

$$\hat{E}_r(r,z) = \frac{1}{\ln\left(R_e / R_i\right)} \frac{\hat{V}(z)}{r}$$



In una sezione z qualsiasi

$\int_{R_i}^{R_e}$ è indipendente dal cammino percorso

$$\hat{\mathbf{H}}(r,z) = \frac{1}{-j\omega\mu}\nabla\times\left(\mathbf{u}_r\hat{E}_r(r,z)\right) = $$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\phi & \mathbf{u}_z \\ \partial_r & \partial_\phi & \partial_z \\ \hat{E}_r(r,z) & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{1}{r}\partial_z\hat{E}_r(r,z)r\mathbf{u}_\phi = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}\frac{d\hat{V}(z)}{dz}\mathbf{u}_\phi$$

$$\left[\hat{\mathbf{H}}\right] = \text{A/m}$$

$$\boxed{\hat{H}_\phi = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}\frac{d\hat{V}(z)}{dz}}$$

Rotore in un sistema di coordinate arbitrario

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ h_1 A_{u_1} & h_2 A_{u_2} & h_3 A_{u_3} \end{vmatrix}$$

h_i *coefficiente metrico*, $\mathbf{e}_i$ versore , u_i *coordinata*

In una sezione z, l’integrale di linea del campo E non dipende dal cammino ed è possibile definire univocamente una tensione:

Ciò dipende dal fatto che il flusso di **H** attraverso una qualsiasi superficie normale alla direzione di propagazione è nullo, essendo nulla la componente assiale di **H**

D'altra parte: $$\hat{E}_r(r,z)\mathbf{u}_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\left(\hat{H}_\phi(r,z)\mathbf{u}_\phi\right) =$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\left(\frac{1}{-j\omega\mu}\frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}\frac{d\hat{V}(z)}{dz}\mathbf{u}_\phi\right) =$$

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

$$= -\frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}\frac{1}{k^2}\frac{d^2\hat{V}(z)}{dz^2}\mathbf{u}_r$$

$$\hat{E}_r(r,z) = \frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}\hat{V}(z) = -\frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}\frac{1}{k^2}\frac{d^2\hat{V}(z)}{dz^2}$$

Necessariamente:

$$\boxed{\hat{V}(z) = -\frac{1}{k^2}\frac{d^2\hat{V}(z)}{dz^2}}$$

$$\hat{V}(z) = V^+ \exp(-jkz) + V^- \exp(+jkz)$$

$$\hat{E}_r(r,z) = \frac{1}{r\ln\left(R_e / R_i\right)}\hat{V}(z)$$

Nel dominio del tempo:

$$\operatorname{Re}\left\{\hat{E}_r(r,z)\exp(j\omega t)\right\} = \frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}\operatorname{Re}\left\{\hat{V}(z)\exp(j\omega t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{r\ln\left(R_e/R_i\right)}V(z,t)$$

$$V(z,t) = \operatorname{Re}\left\{\hat{V}(z)\exp(j\omega t)\right\} =$$

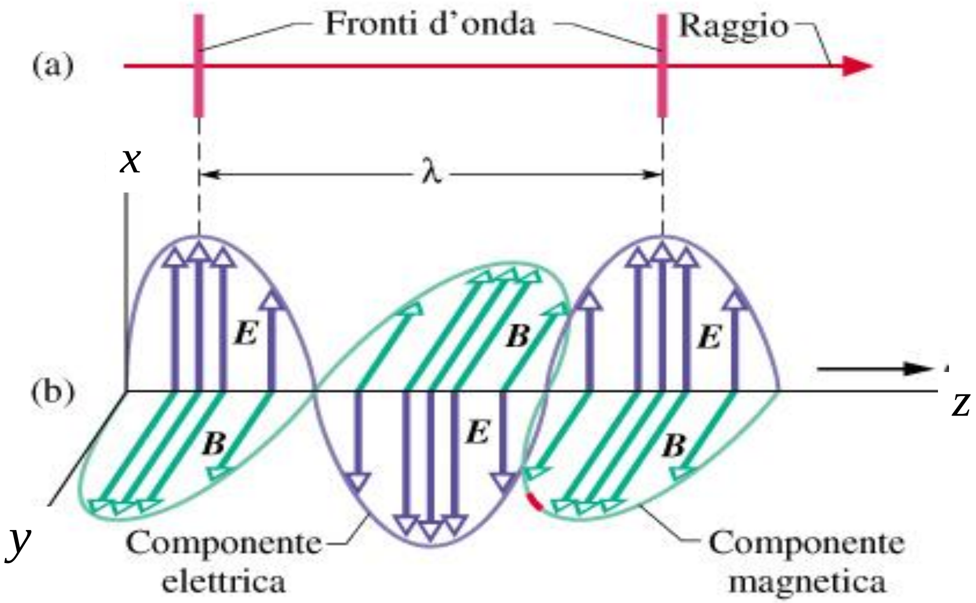
$$= V^{+}\cos(\omega t - kz) + V^{-}\cos(\omega t + kz)$$

$$V^{\pm} \in \Re$$

Costante di propagazione *k*

$$V^{+}(z,t) = f^{+}(t - z/v) = V^{+}\cos\left[\omega(t - z/v)\right]$$

$$= V^{+}\cos(\omega t - kz)$$



$$\boxed{v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c}$$

Lunghezza d'onda

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}v = \frac{v}{f}}$$

Il campo magnetico:

$$\hat{H}_{\phi} = \frac{-jk}{-j\omega\mu} \frac{1}{r \ln\left(R_e / R_i\right)} \left[V^{+} \exp(-jkz) - V^{-} \exp(+jkz)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{r \ln\left(R_e / R_i\right)} \left[V^{+} \exp(-jkz) - V^{-} \exp(+jkz)\right]$$

IMPEDENZA INTRINSECA E IMPEDENZA D'ONDA

Propagazione di un'onda piana $\hat{E}_x^+, \hat{H}_y^+$

in un mezzo illimitato e omogeneo (ε, μ)

$$\frac{\hat{E}_x^+}{\hat{H}_y^+} = \text{impedenza intrinseca } [\Omega] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\hat{E}_r^+}{\hat{H}_\phi^+} = \text{impedenza d'onda } [\Omega] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Attenzione, Quest'ultima espressione vale per un coax !!

Nel dominio del tempo:

$$H_\phi(z,t) = \operatorname{Re}\left\{\hat{H}_\phi \exp(j\omega t)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{r \ln\left(R_e / R_i\right)} \left[V^+ \cos(\omega t - kz) - V^- \cos(\omega t + kz)\right]$$

$$V^\pm \in \Re$$

La corrente totale che fluisce nel conduttore interno

$$\hat{I} = \oint_{r=R_i} \hat{H}_\phi R_i \, d\phi =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{R_i \ln\left(R_e / R_i\right)} 2\pi R_i \left[V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz)\right] =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln\left(R_e / R_i\right)} \left[V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz)\right] =$$

$$= I^+ \exp(-jkz) + I^- \exp(+jkz)$$

IMPEDENZA CARATTERISTICA

$$Z_0 = \frac{V^+ \exp(-jkz)}{I^+ \exp(-jkz)} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}\,\ln\left(R_e/R_i\right)}{2\pi}$$

$$\hat{I}(z) = \frac{1}{Z_0}\left[V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz)\right]$$

$$Z_0 = -\frac{V^- \exp(+jkz)}{I^- \exp(+jkz)}$$

Capacità per unità di lunghezza

Carica per unità di lunghezza $\hat{\rho}_l$

$$\varepsilon\ \hat{E}_r(R_e, z)\mathbf{u}_r \cdot 2\pi\ R_e\mathbf{u}_r = \hat{\rho}_l$$

$$\left[\hat{\rho}_l\right] = \text{C/m}$$

$$\varepsilon\ \frac{1}{R_e \ln\left(R_e / R_i\right)}\hat{V}(z)\mathbf{u}_r \cdot 2\pi\ R_e\mathbf{u}_r = \hat{\rho}_l$$

Capacità per unità di lunghezza

$$C = \frac{\hat{\rho}_l}{\hat{V}(z)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(R_e / R_i\right)} \quad \text{[F/m]}$$

Induttanza per unità di lunghezza

$$\Phi_B = \mu \int_{R_i}^{R_e} \hat{H}_\phi \, dr = \int_{R_i}^{R_e} \mu \frac{\hat{I}(z)}{2\pi r} dr = \mu \frac{\hat{I}(z)}{2\pi} \ln(R_e / R_i)$$

$$L = \frac{\Phi_B}{\hat{I}(z)} = \frac{\mu \ln\left(R_e / R_i\right)}{2\pi} \quad \text{[H/m]}$$

Velocità e Costante di propagazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu \ln\left(R_e / R_i\right)} \frac{\ln\left(R_e / R_i\right)}{2\pi\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

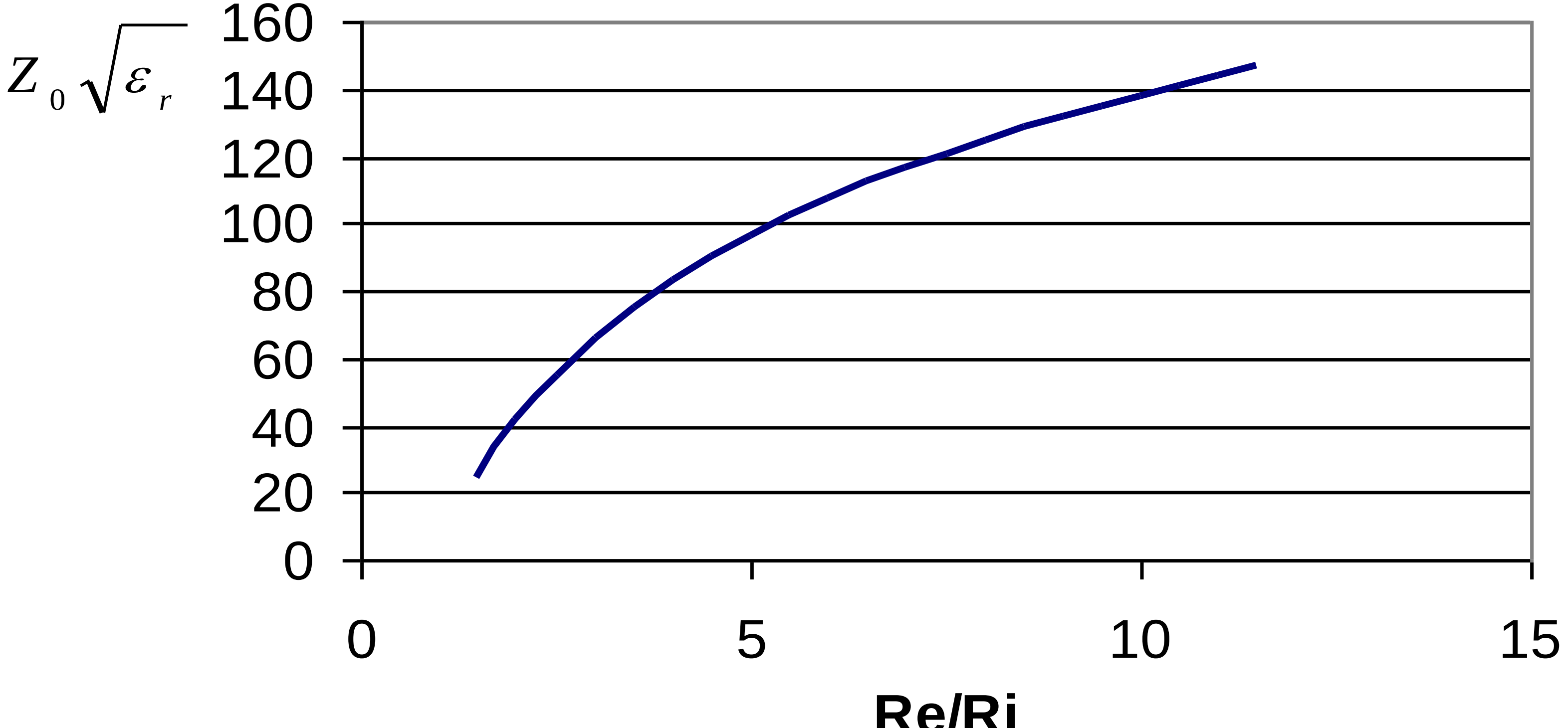
$$k = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Impedenza caratteristica in funzione di induttanza e capacità per unità di lunghezza

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\ln\left(R_e / R_i\right)}{2\pi}$$

Impedenza caratteristica

$$Z_0 \approx 60 / \sqrt{\varepsilon_r} \ln\left(R_e / R_i\right)$$



Più dettagli sulle dimensioni di cavi veri al sito

http://www.micro-coax.com/products/cable/semi-rigid/

$$\hat{H}_{\phi} = \frac{\hat{I}(z)}{2\pi r} = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{1}{r \ln\left(R_e / R_i\right)} \frac{d\hat{V}(z)}{dz}$$

$$\frac{d\hat{V}(z)}{dz} = -j\omega\mu \frac{\ln\left(R_e / R_i\right)}{2\pi} \hat{I}(z) \quad = -j\omega L \hat{I}(z)$$

$$\hat{V}(z) = -\frac{1}{k^2} \frac{d^2\hat{V}(z)}{dz^2}$$

$$\frac{d^2\hat{V}(z)}{dz^2} = -j\omega L \frac{d\hat{I}(z)}{dz} = -k^2 \hat{V}(z)$$

Equazioni dei Telegrafisti

$$\frac{d\hat{V}(z)}{dz} = -j\omega L\hat{I}(z) \qquad \frac{d\hat{I}(z)}{dz} = -j\omega C\hat{V}(z)$$

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_1 \qquad \hat{V}(z+\Delta z) = \hat{V}_2$$

$$\hat{I}(z) = \hat{I}_1 \qquad \hat{I}(z+\Delta z) = -\hat{I}_2$$

$$\hat{V}_2 - \hat{V}_1 = -j\omega L\,\Delta z\,\hat{I}_1$$

$$-\hat{I}_2 - \hat{I}_1 = -j\omega C\,\Delta z\,\hat{V}_1$$

Equazioni dei Telegrafisti

$$\hat{V}_2 = \hat{V}_1 - j\omega L \, \Delta z \, \hat{I}_1$$

$$\hat{I}_2 = + j\omega C \, \Delta z \, \hat{V}_1 - \hat{I}_1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_2 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - j\omega L \, \Delta z \\ + j\omega C \, \Delta z & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix}$$