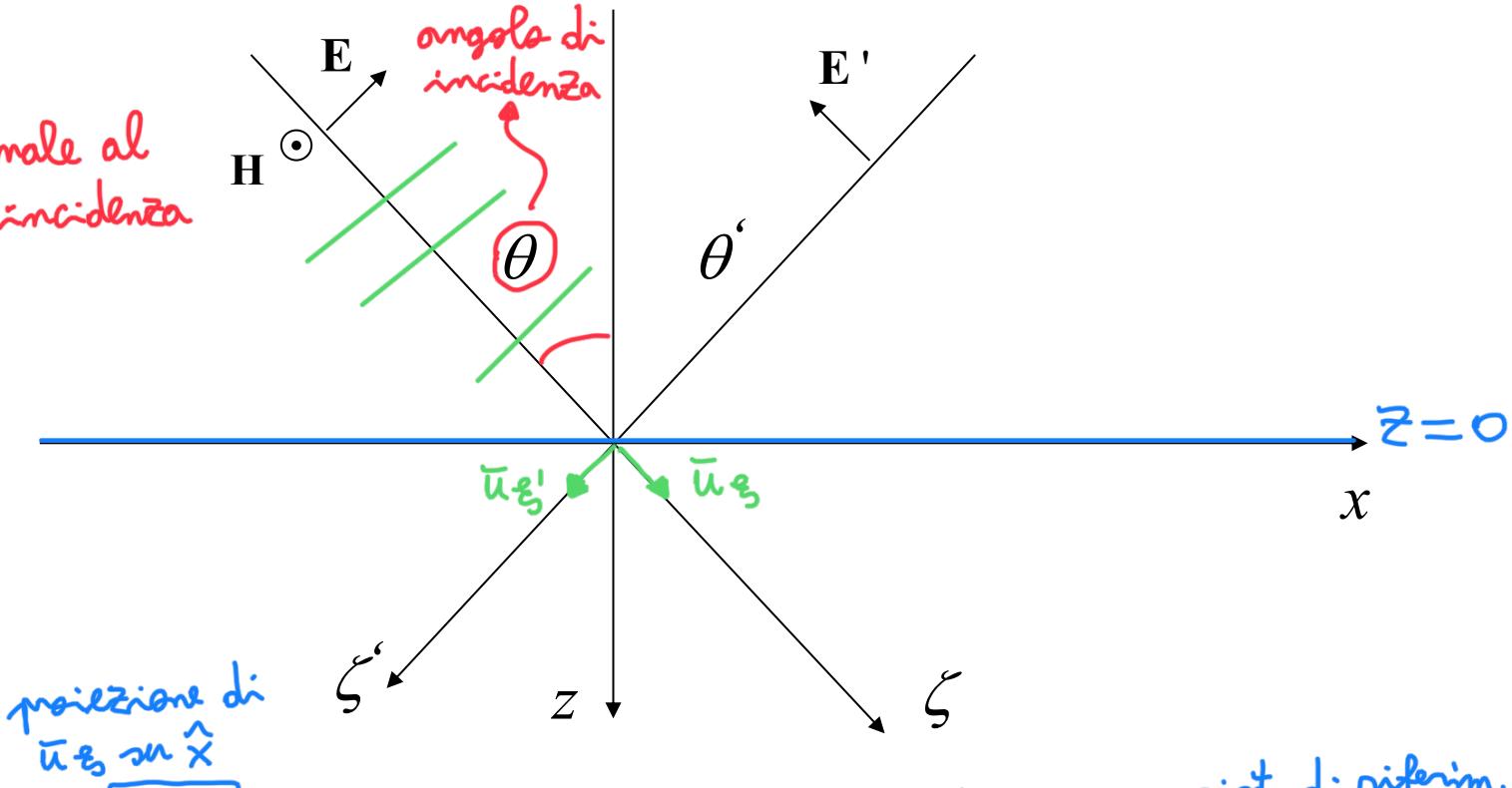


\Rightarrow piano conduttore ($E_{TAN}=0$)
 Incidenza Obliqua su un piano di massa (piano $z=0$; E giace nel piano di incidenza, oppure il campo magnetico non ha componente normale al piano $z=0$, caso **TM**) $\rightarrow E_x, H_y$

H è normale al piano di incidenza



proiezione di
 \bar{u}_s su \hat{x}

$$\mathbf{u}_s = \langle \mathbf{u}_s, \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{x}} + \langle \mathbf{u}_s, \hat{\mathbf{z}} \rangle \hat{\mathbf{z}} = \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{u}_{s'} = \langle \mathbf{u}_{s'}, \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{x}} + \langle \mathbf{u}_{s'}, \hat{\mathbf{z}} \rangle \hat{\mathbf{z}} = -\sin \theta' \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{z}}$$

- $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rightarrow$ sist. di riferim. fisso, solidale alla geometria
- $\xi, \xi', \xi'' \rightarrow$ sist. di riferim. solidale ai fronti d'onda
(incidente, riflesso e rifratto)

$$K = K_0$$

Il campo elettrico vale allora

campo \bar{H}

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk\zeta} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_\zeta = E_0 e^{-jk\zeta} \hat{\mathbf{y}} \times (\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}})$$

direzione di propagazione

$$\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk\zeta} (-\sin \theta \hat{\mathbf{z}} + \cos \theta \hat{\mathbf{x}})$$

onda riflessa

$$\mathbf{E}' = -E' e^{jk\zeta'} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_{\zeta'} = -E' e^{jk\zeta'} \hat{\mathbf{y}} \times (-\sin \theta' \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{z}}) = -E' e^{jk\zeta'} (\sin \theta' \hat{\mathbf{z}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{x}})$$

In $z=0$ la componente tangenziale di \mathbf{E}_{tot} deve annullarsi (*ha un conduttore*)

dove ξ è dato da :

$$E_0 e^{-jk\zeta(z=0)} \cos \theta - E' e^{jk\zeta'(z=0)} \cos \theta' = 0 \equiv E_x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \sin \theta x + \cos \theta z \\ \zeta' = -\sin \theta' x + \cos \theta' z \end{array} \right.$$

$$\xi = \xi(x, z)$$

$$E_0 e^{-jkx \sin \theta} \cos \theta - E' e^{-jkx \sin \theta'} \cos \theta' = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \theta = \theta', \quad E' = E_0$$

*angolo di riflessione
angolo di "incidenza"*

*ampiezza campo \bar{E} riflesso
ampiezza campo \bar{E} incidente*

Campo elettromagnetico totale

$$\xi_0, \xi'_0, E' = E_0$$

$$E_{tot} = E_0 e^{-jk(\sin \theta x + \cos \theta z)} (-\sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{x}) - E_0 e^{jk(-\sin \theta x + \cos \theta z)} (\sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{x})$$

• E_x, E_z sono in quadratura di fase (sfasate tra loro di $\frac{\pi}{2}$) perché E_x ha un termine $\Im \sin(\dots)$

$$\bar{E}_{TOT} = \left\{ \begin{array}{l} E_x = E_0 \cos \theta e^{-jk(\sin \theta x + \cos \theta z)} - E_0 \cos \theta e^{jk(-\sin \theta x + \cos \theta z)} = \\ = E_0 \cos \theta e^{-jkx \sin \theta} \underbrace{(-2j \sin(kz \cos \theta))}_{+} \\ E_z = -E_0 \sin \theta e^{-jk(\sin \theta x + \cos \theta z)} - E_0 \sin \theta e^{jk(-\sin \theta x + \cos \theta z)} = \\ = -E_0 \sin \theta e^{-jkx \sin \theta} \underbrace{(2 \cos(kz \cos \theta))}_{+} \end{array} \right.$$

Il campo elettrico totale è dato dal prodotto fra un'onda progressiva nella direzione x+ e un'onda stazionaria nella direzione z. Il campo magnetico totale si trova immediatamente:

$$\mathbf{H}_{tot} = \mathbf{H} + \mathbf{H}'$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_\zeta \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{\eta} \mathbf{u}_{\zeta'} \times \mathbf{E}'$$

Campo elettrico normale al piano di incidenza (caso TE) $\rightarrow E_y, H_x$

• Come nel caso TM:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk\zeta(x,z)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{E}' = -E' e^{jk\zeta'(x,z)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\zeta = \sin \theta x + \cos \theta z$$

$$\zeta' = -\sin \theta' x + \cos \theta' z$$

$$E_{\tan}(x,0) = 0 = E_0 e^{-jk \sin \theta x} - E' e^{-jk \sin \theta' x}$$

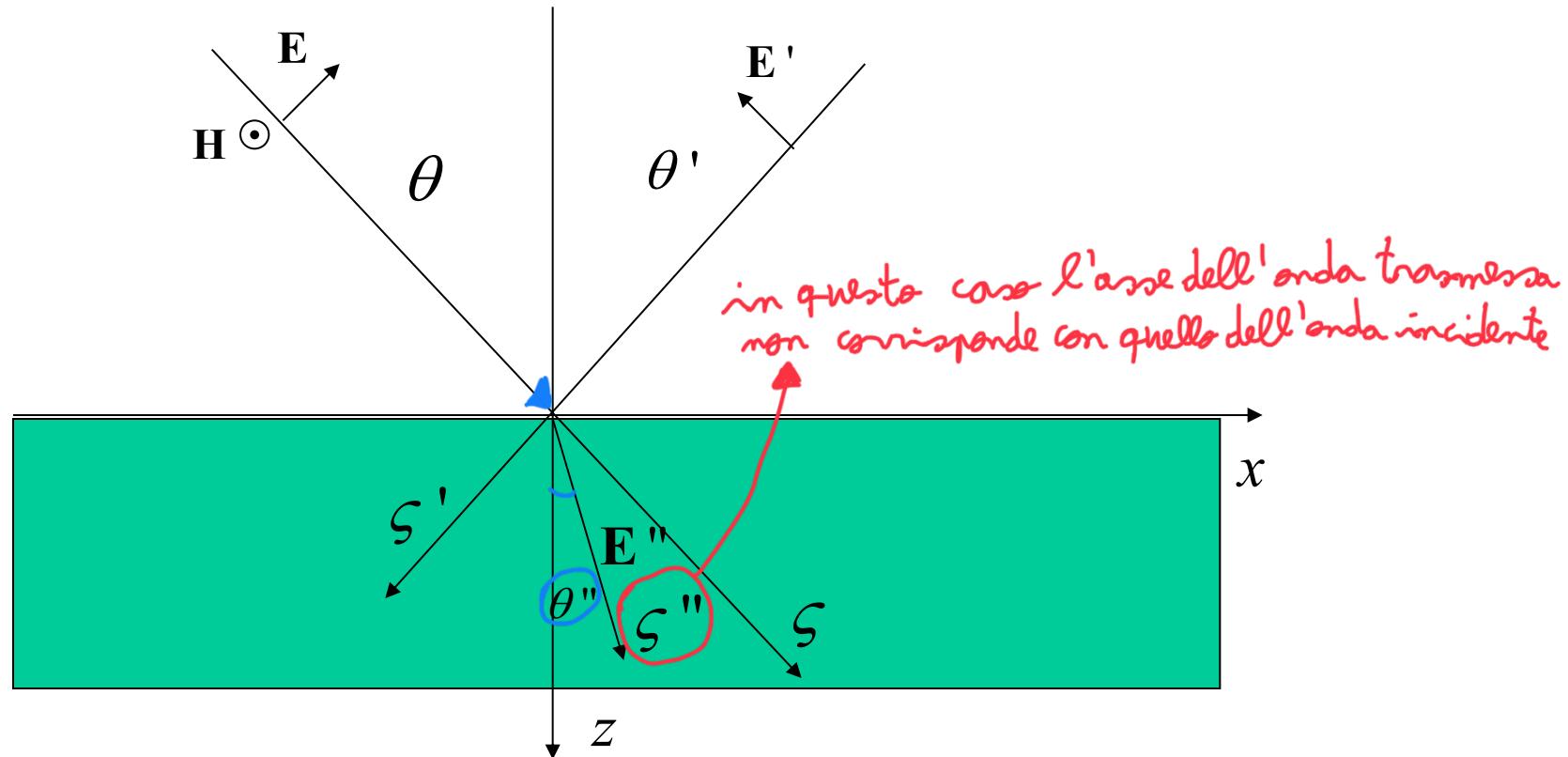
$$\Rightarrow \theta = \theta' \quad E_0 = E'$$

Campo elettromagnetico totale

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \left[e^{-jk(\sin \theta x + \cos \theta z)} - e^{jk(-\sin \theta x + \cos \theta z)} \right] = \\ \hat{\mathbf{y}} E_0 [-2j \sin(\cos \theta kz)] e^{-jk(\sin \theta x)}$$

$$\mathbf{H}_{tot} = \mathbf{H} + \mathbf{H}' \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_\varsigma \times \mathbf{E} \quad \mathbf{H}' = -\frac{1}{\eta} \mathbf{u}_{\varsigma'} \times \mathbf{E}'$$

Caso Incidenza obliqua su un dielettrico che occupa il semispazio $z>0$ (caso TM, campo magnetico ortogonale al piano di incidenza, campo elettrico parallelo al piano di incidenza).



In $z=0$ le componenti tangenziali di \mathbf{E}_{tot} e \mathbf{H}_{tot} devono essere continue

$$\boxed{[\mathbf{E}(x,0^-) + \mathbf{E}'(x,0^-)] \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{E}''(x,0^+) \cdot \hat{\mathbf{x}}} \\ \text{proiezione campo } \bar{\mathbf{E}} \text{ su } \hat{\mathbf{x}} \\ \text{in } z=0^-}$$

$$[\mathbf{H}(x,0^-) + \mathbf{H}'(x,0^-)] \cdot \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}''(x,0^+) \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

Il campo elettrico vale:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk\zeta} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_\zeta = E_0 e^{-jk\zeta} \hat{\mathbf{y}} \times (\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) = E_0 e^{-jk\zeta} (-\sin \theta \hat{\mathbf{z}} + \cos \theta \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{E}' = \Gamma E_0 e^{jk\zeta'} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_{\zeta'} = \Gamma E_0 e^{jk\zeta'} \hat{\mathbf{y}} \times (-\sin \theta' \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{z}}) = \Gamma E_0 e^{jk\zeta'} (\sin \theta' \hat{\mathbf{z}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{E}'' = TE_0 e^{-jk\zeta''} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_{\zeta''} = TE_0 e^{-jk\zeta''} (-\sin \theta'' \hat{\mathbf{z}} + \cos \theta'' \hat{\mathbf{x}})$$

$$\zeta = \sin \theta x + \cos \theta z; \quad \zeta' = -\sin \theta' x + \cos \theta' z; \quad \zeta'' = \sin \theta'' x + \cos \theta'' z$$

Quindi deve essere: *(dalla continuità)*

$$E_0 e^{-jk\zeta(x,0)} \cos \theta + \Gamma E_0 e^{+jk\zeta'(x,0)} \cos \theta' = TE_0 e^{-jk\zeta''(x,0)} \cos \theta''$$

$\forall x$

→ Tutti gli argomenti degli esponenziali devono essere uguali:

continuità del campo tangenziale
↓

$$k \sin \theta = k \sin \theta' = k'' \sin \theta''$$

$$n \hat{\mathbf{n}} = \sqrt{\epsilon_n} \hat{\mathbf{n}}$$

Legge di Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Dove abbiamo posto $\theta = \theta_1$,
 $n = n_1$, $\theta'' = \theta_2$, $n'' = n_2$

$$(E_0 \cos \theta + \Gamma E_0 \cos \theta' = T E_0 \cos \theta'') \rightarrow \text{fissa una condizione solo sulla proiezione di } E_0 \text{ su } x \\ (\text{non sulla componente } E_z)$$

Deve inoltre essere:



$$\cos \theta_1 (1 + \Gamma) = T \cos \theta_2 \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta = \theta' \\ \theta_2 = \theta'' \end{cases}$$

Il campo magnetico: (H_y è parallela al piano $z=0 \Rightarrow$ tutto \bar{H} deve essere continuo nel caso TM)

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{\eta} e^{-jk_1 z} \hat{\mathbf{y}} \quad \mathbf{H}' = -\frac{\Gamma E_0}{\eta} e^{jk_1 z} \hat{\mathbf{y}}' = \quad \mathbf{H}'' = \frac{T E_0}{\eta_2} e^{-jk_2 z} \hat{\mathbf{y}}$$

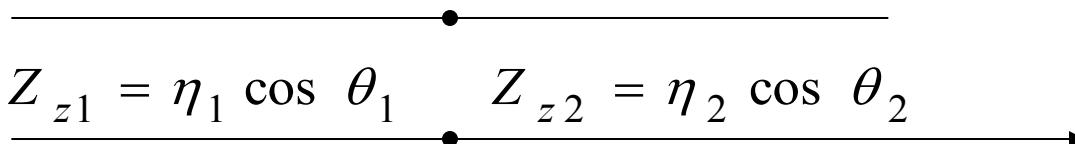
La continuità del campo magnetico tangenziale:

$$\bar{H} + \bar{H}' = \bar{H}'' \Leftrightarrow \frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2}$$

Deve essere allora:

$$\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{\eta_2 \cos \theta_2}{\eta_1 \cos \theta_1}$$

rapporto tra la sola
componente E_x del campo
 \vec{E} e tutto \vec{H} ($= H_y$)



$$k_{z1} = n_1 k_0 \cos \theta_1 \quad k_{z2} = n_2 k_0 \cos \theta_2$$

Quindi il problema è formalmente analogo a quello che si è incontrato nel caso di incidenza normale. L'unica differenza risiede nella impedenza d'onda che è moltiplicata per $\cos \theta$. D'altra parte, il fattore $\cos \theta$ fa nascere altre possibilità. Infatti,

$$\Gamma^{(TM)} = \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1}$$

Dalla quale si vede come Γ possa annullarsi anche
Se i due dielettrici sono diversi

$$\eta_2 \cos \theta_2 = \eta_1 \cos \theta_1$$

Infatti, ciò accade quando:

Dalla legge di Snell, abbiamo che $\sin \theta_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} \sin \theta_1$

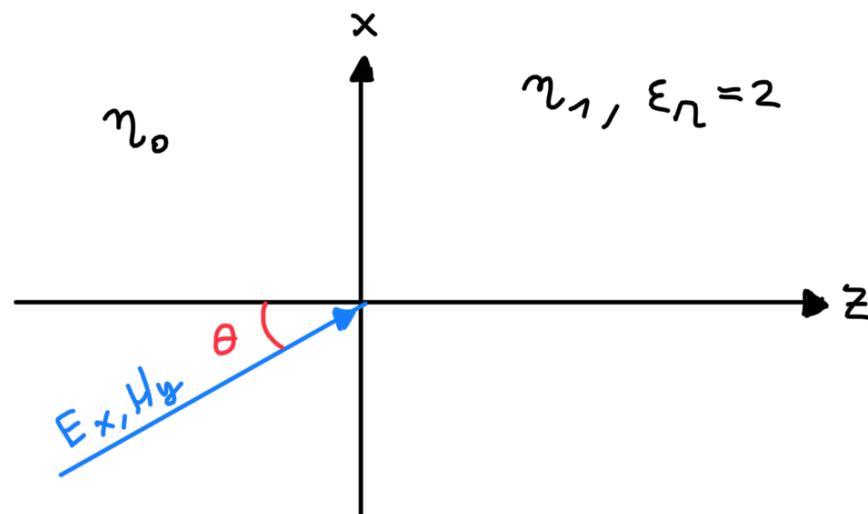
quindi

$$\left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \cos \theta_1 \right)^2 = 1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \sin \theta_1 \right)^2$$

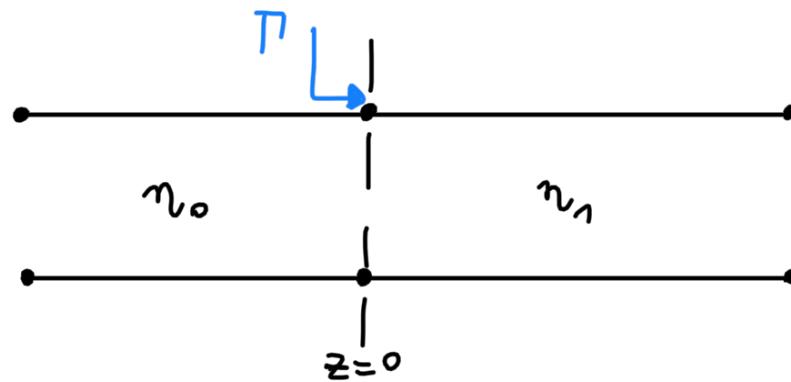
Vera se: $\left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 \theta_1 = \left[1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \right] \sin^2 \theta_1$

$$\tan^2 \theta_B = \frac{\left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^2 - 1 \right]}{1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2} = \frac{\left(\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_2^2} \right)}{\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}} = \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

3:



- incidenza TM
- $\Gamma = ?$



$$\begin{cases} n_0^{TM} = n_0 \cdot \cos \theta \\ n_1^{TM} = n_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

- Dalla legge di Snell:

$$\sin \theta = \sqrt{\epsilon_r} \cdot \sin \theta_1$$

e

$$\Gamma = \frac{z_{in} - n_0^{TM}}{z_{in} + n_0^{TM}}$$

- Essendo il secondo mezzo infinito (non ha altre interfacce che riflette l'onda) si ha:

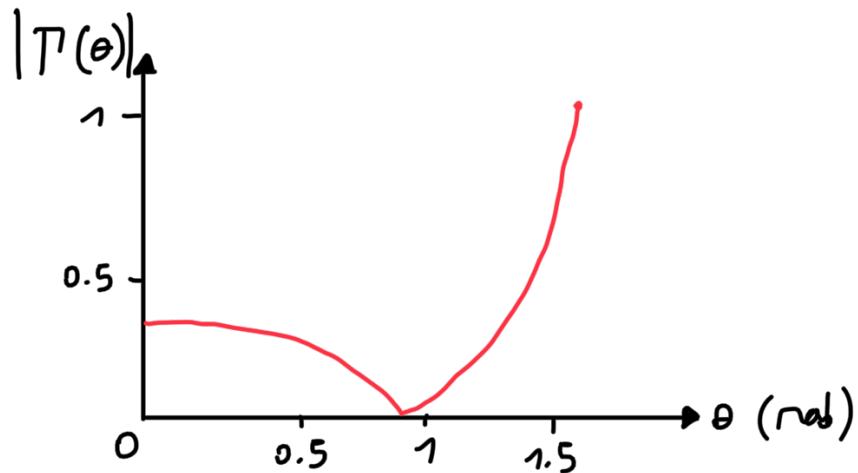
$$z_{in} = n_1^{TM} \Rightarrow \Gamma = \frac{n_1^{TM} - n_0^{TM}}{n_1^{TM} + n_0^{TM}}$$

- Considerando che :

$$n_1 = \frac{n_0}{\sqrt{2}}, \quad \theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}\right)$$

\downarrow

$$\Gamma = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_1 - \cos \theta}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_1 + \cos \theta}$$



- Dal grafico si nota che esiste un certo valore di θ (= un certo angolo di incidenza) per il quale $\Gamma=0$, ovvero non si ha riflessione.

Campi Elettromagnetici

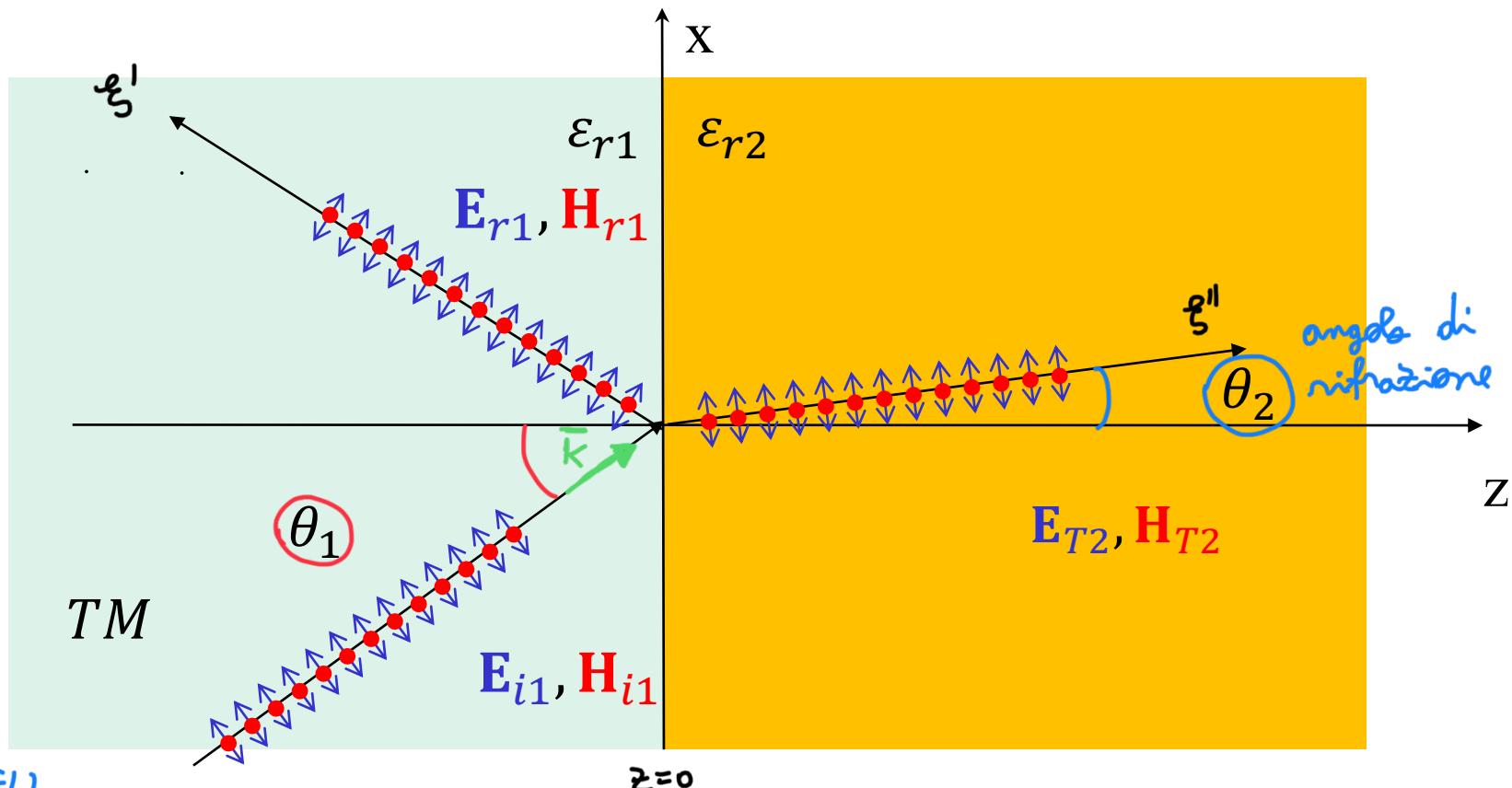
lez. 8 28.03.202

Angolo di Brester, angolo critico..

- Piano di incidenza: piano individuato dalla normale alla superficie di separazione tra i due mezzi e dal vettore d'onda \mathbf{k} .
- CASO TM
 - ↳ campo \bar{E} giace nel piano di incidenza (E_x, E_z)
 - ↳ campo \bar{H} parallelo all'interfaccia tra i due mezzi e ortogonale al piano di incidenza (H_y)
- CASO TE
 - ↳ campo \bar{E} parallelo all'interfaccia tra i due mezzi (E_y)
 - ↳ campo \bar{H} parallelo (H_x) ed ortogonale (H_z) all'interfaccia

ai fini della continuità del campo tangenziale conta solo la componente parallela.

Polarizzazione TM (E_x, E_z, H_y), $Z_0^{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \cos \theta$



SNELL

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1} = \frac{Z_{o2}^{TM} - Z_{o1}^{TM}}{Z_{o2}^{TM} + Z_{o1}^{TM}}$$

Angolo di Brewster: angolo di incidenza θ_B con il quale si ha riflessione nulla

$$\Gamma = 0 \Rightarrow \eta_2 \cos \theta_2 = \eta_1 \cos \theta_1 \Rightarrow 1/n_2 \cos \theta_2 = 1/n_1 \cos \theta_1$$

* mettendole a sistema
si ricava

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

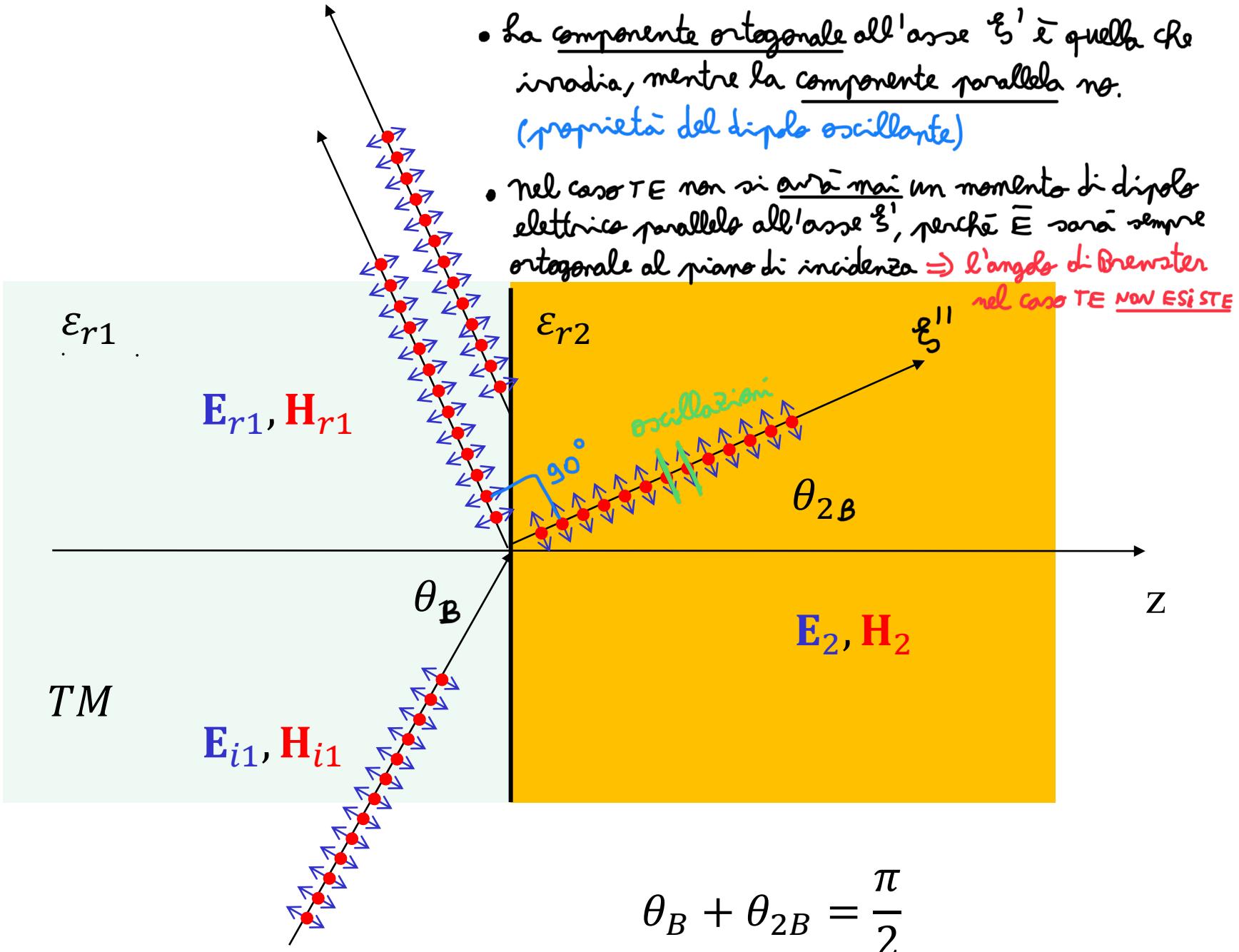
$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

$$\theta_B = \arctan \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

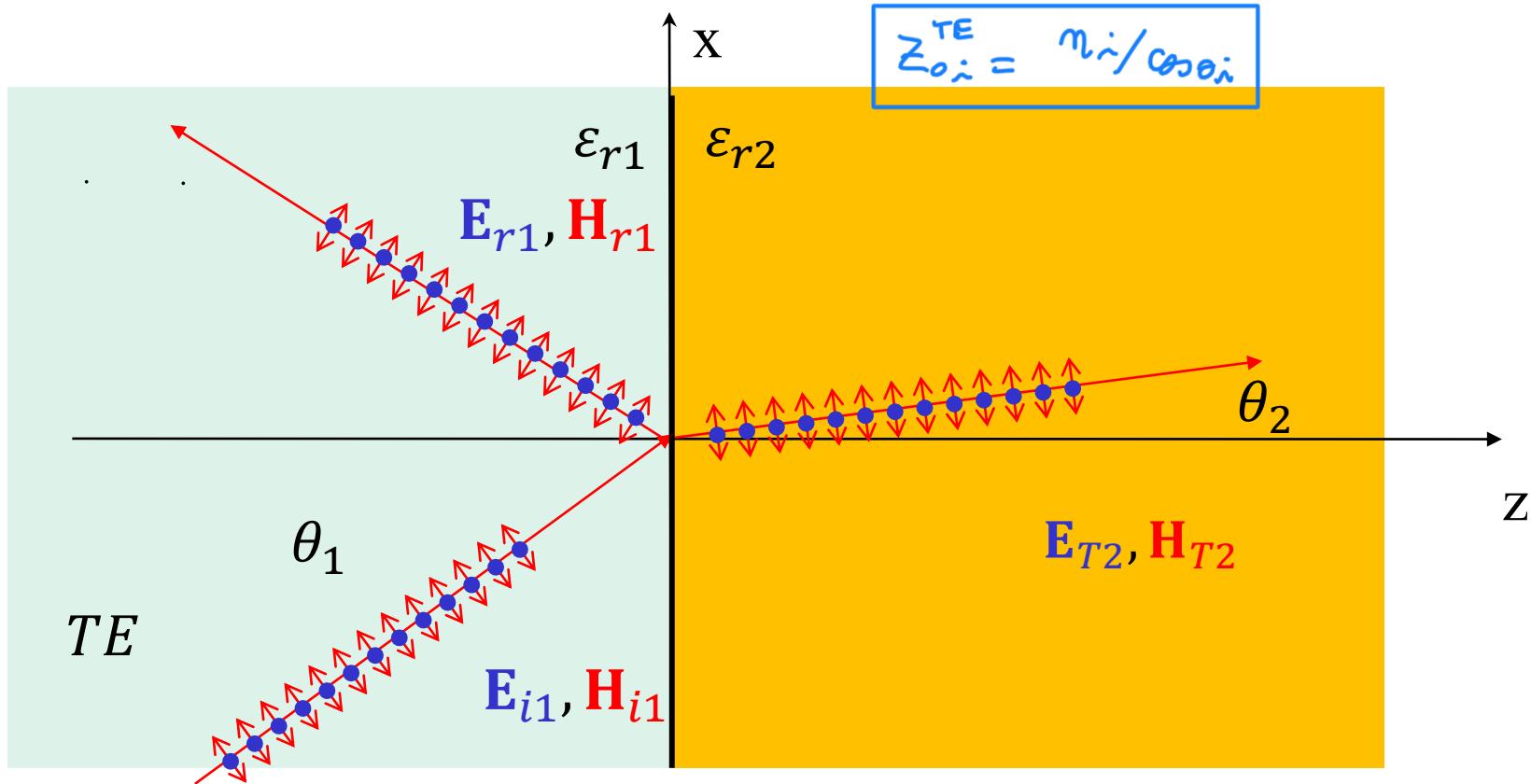
$$n_2^2 \tan \theta_{2B} = n_1^2 \tan \theta_B = n_2 n_1 \Rightarrow \tan \theta_{2B} = \frac{n_1}{n_2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right)$$

angolo di rifrazione

Quando l'onda incide con l'angolo Brewster gli angoli di riflessione e rifrazione sono tra loro a 90°. Ciò accade poiché i dipoli del materiale dielettrico all'interfaccia tra i due mezzi che sono le sorgenti sia dell'onda rifratta che di quella riflessa e che oscillano in un piano ortogonale all'onda rifratta, non possono generare un'onda rifratta con polarizzazione TM in quanto la direzione di rifrazione coinciderebbe con quella del momento di dipolo elettrico. D'altra parte un dipolo elettrico non irradia in direzione parallela al momento di dipolo.



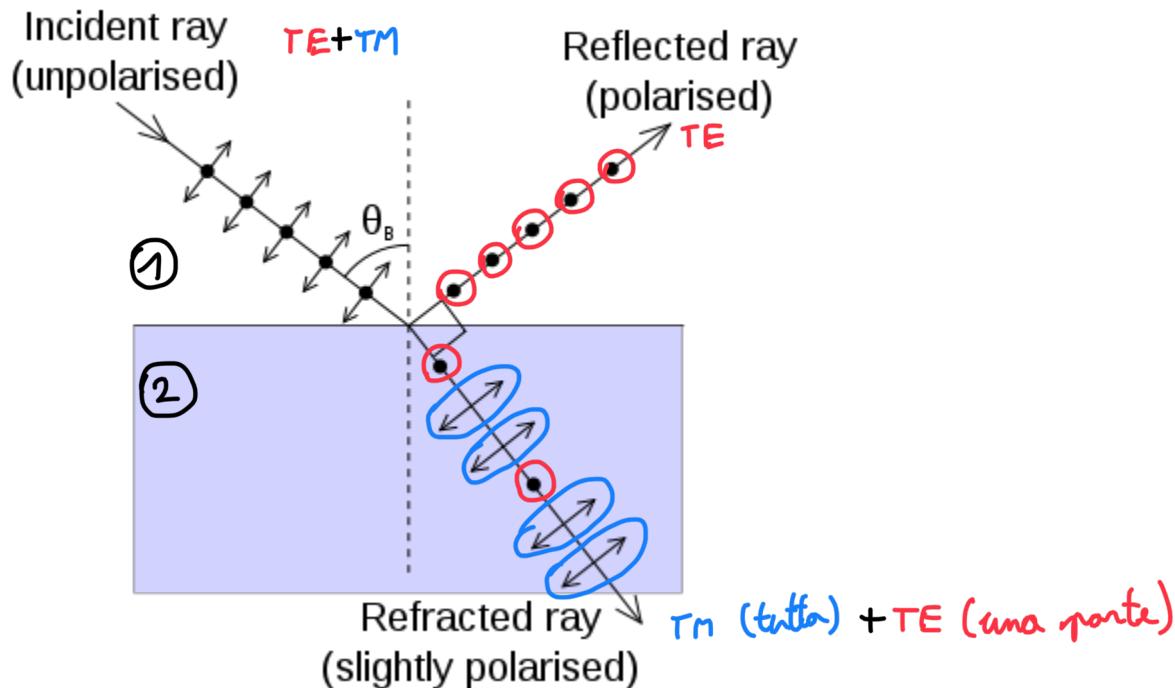
Polarizzazione TE (E_y, H_x, H_z), $Z_0^{TE} = \frac{E_y}{H_x} = \eta / \cos \theta$



$$\Gamma = \frac{\eta_2 / \cos \theta_2 - \eta_1 / \cos \theta_1}{\eta_2 / \cos \theta_2 + \eta_1 / \cos \theta_1} = \frac{Z_{02}^{TE} - Z_{01}^{TE}}{Z_{02}^{TE} + Z_{01}^{TE}} \neq 0$$

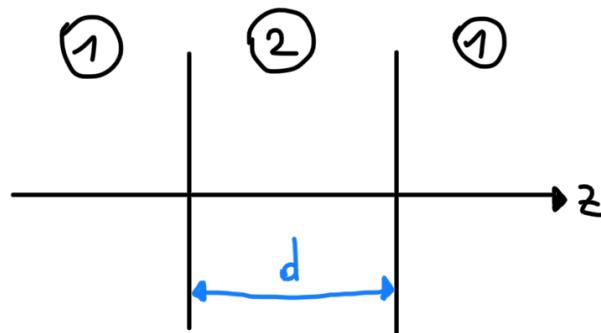
- Questa volta non mi trovo mai nelle condizioni in cui i dipoli elettrici eccitati dall'onda incidente (che si trovano sull'interfaccia di separazione) non irradiano nella regione 1.

Polarizzatore: Se un'onda non polarizzata (TE+TM) incide con l'angolo di Brewster, solanto la componente TE viene riflessa (mentre passa tutta la componente TM e parte di quella TE). Così la parte riflessa è polarizzata! (TE)





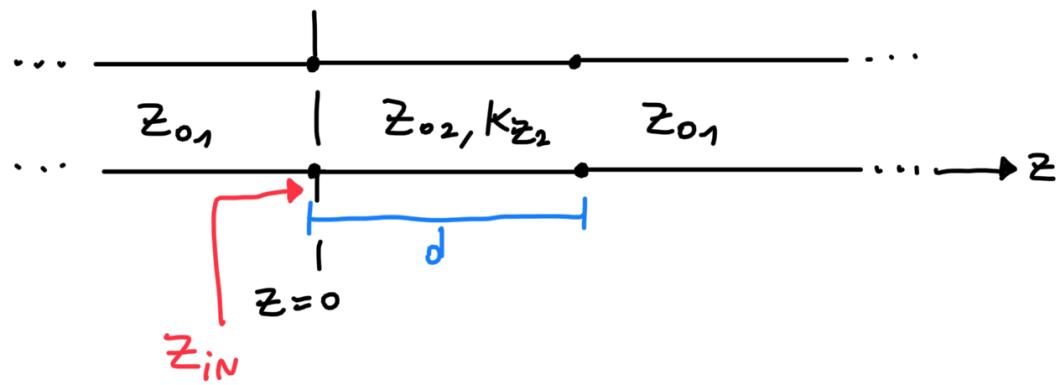
Le due fotografie sono ottenute senza (sx) e con (dx) un filtro polarizzatore della luce (davanti all'obiettivo) che lascia passare la componente TM mentre è opaco alla componente TE.



transmissione totale per:

$$k_{z_2}d = n\pi, \text{ dove } k_{z_2} = k_0 n_2 \cos \theta_2$$

- Modello circuitale equivalente:



- Calcolo coeff. di riflessione

$$Z_{IN} = Z_{02} \frac{Z_{01} + j Z_{02} t_2}{Z_{02} + j Z_{01} t_2}, \text{ dove } t_2 = \tan(k_{z_2} d) = \tan(k_0 n_2 \cos \theta_2 d)$$

$$\Gamma = \frac{Z_{IN} - Z_{01}}{Z_{IN} + Z_{01}} = \frac{(Z_{02} - Z_{01}) + j t_2 (Z_{01} - Z_{02})}{(Z_{02} + Z_{01}) + j t_2 (Z_{01} + Z_{02})}$$

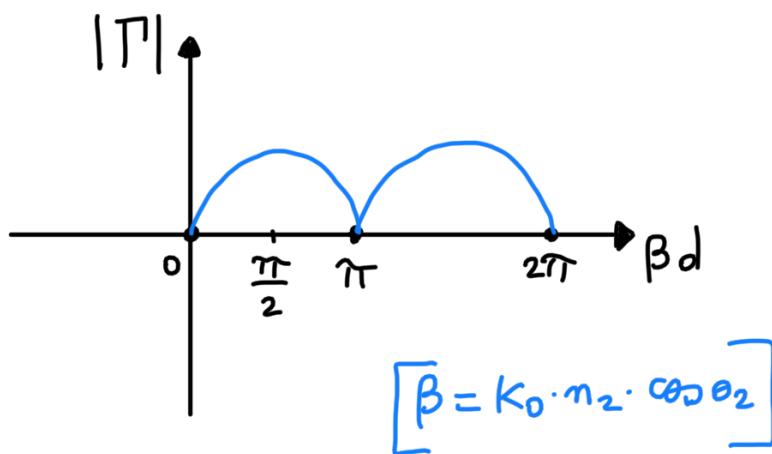
- Generalmente si usa un'impedenza di ingresso normalizzata rispetto al tratto di linea di trasmissione considerato:

$$\bar{Z}_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_{02}} = \frac{\bar{Z}_{01} + j t_2}{1 + j \bar{Z}_{01} t_2}, \text{ dare } \bar{Z}_{01} = \frac{Z_{01}}{Z_{02}}$$

$$\Gamma(t_2) = \frac{\bar{Z}_{in} - \bar{Z}_{01}}{\bar{Z}_{in} + \bar{Z}_{01}} = \frac{\bar{Z}_{01} + j t_2 - \bar{Z}_{01}(1 + j \bar{Z}_{01} t_2)}{\bar{Z}_{01} + j t_2 + \bar{Z}_{01}(1 - j \bar{Z}_{01} t_2)} = \frac{j t_2 (1 - \bar{Z}_{01}^2)}{2 \bar{Z}_{01} + j t_2 (1 + \bar{Z}_{01}^2)}$$

($\Gamma(t_2 \rightarrow 0) = 0$)

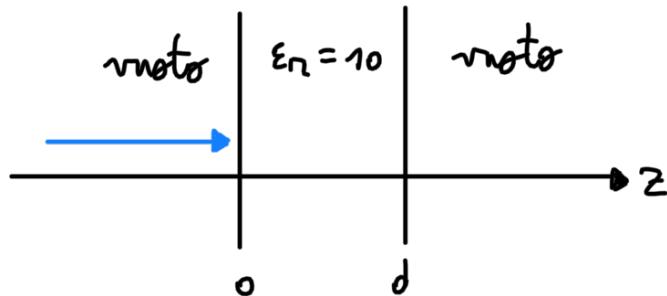
- Quanto vale il massimo di $\Gamma(t_2)$?



$$|\Gamma| = \left| \frac{j t_2 (1 - \bar{Z}_{01}^2)}{2 \bar{Z}_{01} + j t_2 (1 + \bar{Z}_{01}^2)} \right|$$

$$|\Gamma_{\max}| = \left| \frac{1 - \bar{Z}_{01}^2}{1 + \bar{Z}_{01}^2} \right| \quad \text{per } t_2 \rightarrow +\infty$$

E₂:



$$\bar{Z}_{01} = \frac{1}{1/\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|\Gamma|_{min} = 0$$

$$|\Gamma|_{MAX} = \left| \frac{3-1}{3+1} \right| = \frac{1}{2}$$

- Percentuale di potenza massima riflessa: $|\Gamma|_{MAX}^2 = 0.25 = 25\%$ (*è difficile ottenere riflessione totale*)

- Riscrivendo in termini di tensione e corrente:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & j Z_{02} \sin \bar{\theta} \\ \frac{j}{Z_{02}} \sin \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

tensione e corrente uscente
dalla sezione $z=d$

matrice di trasmissione $[S]$

$$\bar{\theta} = K_0 n_2 \cos \theta_2 d$$

$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\cos \bar{\theta} \cdot Z_{01} + j Z_{02} \sin \bar{\theta}}{j \frac{Z_{01} \sin \bar{\theta}}{Z_{02}} + \cos \bar{\theta}}$$

formula per ottenere K_0 a diverse frequenze:

$$K_0 = 20.958 \text{ m}^{-1}/\text{GHz} \cdot f(\text{GHz})$$

- La quantità $K_0 d$ dà un'idea di quanto un circuito sia concentrato e distribuito, ovvero, considerando un pezzo di linea di trasmissione (che rappresenta un ritardo di tempo per l'onda), ci dice quanto quel ritardo sia rilevante o trascurabile (assumendo la linea come se fosse una connessione ad un unico punto).
- Ciò che conta non è la lunghezza della linea (spessore del mezzo), bensì il ritardo di fase che il fronte d'onda acquista passando dalla sezione 1 alla 2.
- Il ritardo corrisponde all'argomento dell'esponenziale $e^{-j K_0 n_2 d}$.

- $\bar{\theta}$ dipende da $K_0 d$ e si ha :

$$\rightarrow \bar{\theta} \rightarrow 0 \Rightarrow [S] = [I_n]$$

- collegamento perfetto tra punto 1 e 2
 - posso trascurare i ritardi del segnale } \Rightarrow

CIRCUITO A COSTANTI

CONCENTRATE

$$(K_0 d \ll 1)$$

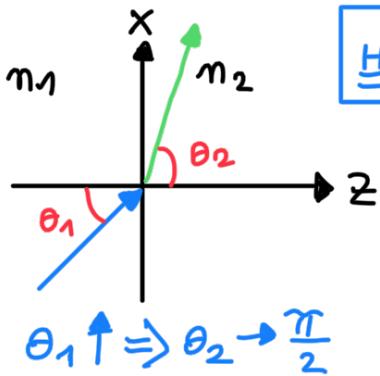
$\rightarrow \bar{\theta} \rightarrow \infty \Rightarrow$ all'aumentare della frequenza (non della distanza) non posso più trascurare i ritardi ($f \uparrow \Rightarrow K_0 \uparrow$)

Ej: ritardi in una linea di trasmissione in aria

$$K_0 \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d$$

$$\left. \begin{array}{l} f = 1 \text{ GHz} \\ \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow K_0 d = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & jZ_{02} \\ \frac{j}{Z_{02}} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ritardi non trascurabili}$$



$$\underline{\underline{H}\underline{\underline{P}}: n_1 > n_2}$$

Riflessione totale

$$n_i = \sqrt{\epsilon_{n_i}} \rightarrow \text{indice di rifrazione}$$

SNELL

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$$

\rightarrow se $\theta_1 > \theta_c \Rightarrow$ l'equazione non è più soddisfatta per un angolo ϑ_2 reale



Se $n_1 > n_2$, allora se $\vartheta_1 \geq \vartheta_c = \sin^{-1}(\frac{n_2}{n_1}) \Rightarrow \sin \vartheta_2 \geq 1$

\rightarrow non ammette soluzioni reali

Cerchiamo soluzioni in \mathbb{C} :

$$*\quad \vartheta_2 = \vartheta_{2R} + j \vartheta_{2I}$$

formule addizione

ANGOLO CRITICO: angolo di incidenza per il quale $\theta_2 = 90^\circ$

$$\sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_{2R} \cos(j \vartheta_{2I}) + \sin(j \vartheta_{2I}) \cos(\vartheta_{2R}) =$$

$$= \sin \vartheta_{2R} \underbrace{\cosh(\vartheta_{2I})}_{\in \mathbb{R}} + j \underbrace{\sinh(\vartheta_{2I}) \cos(\vartheta_{2R})}_{\in \mathbb{R}}$$

Pertanto

$$\vartheta_{2R} = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\vartheta_{2I} = \cosh^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1 \right)$$

\rightarrow annulla le parti immaginarie

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \hat{x} \sin \vartheta_2 + \hat{z} \cos \vartheta_2 = \hat{x} \cosh \vartheta_{2I} - \hat{z} \sin \vartheta_{2R} \sin(j \vartheta_{2I}) = \\ &= \hat{x} \cosh \vartheta_{2I} - j \hat{z} \sinh(\vartheta_{2I}) \end{aligned}$$

- Nella regione 2, l'onda trasmessa va come:

$$\frac{-jk_2}{l} \hat{S}_2 = \frac{-jk_2 (\hat{x} \cosh \theta_{2I} - j \sinh \theta_{2I} \hat{z})}{l} = \frac{-jk_2 \cosh \theta_{2I} \hat{x}}{l} - \frac{k_2 \sinh \theta_{2I} \hat{z}}{l}$$

termine esponenziale decadente
(evanescente)

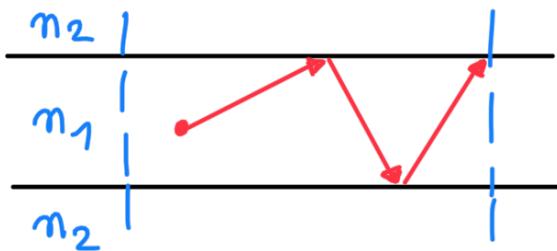
- Lungo z , quindi, non ho più un'onda che cambia soltanto la fase, ma ho un termine che decade esponenzialmente mano a mano che ci si allontana dall'interfaccia $z=0$.

- Nella regione 2 la propagazione non avviene lungo z
ma solo lungo x (non si ha passaggio di potenza attiva)

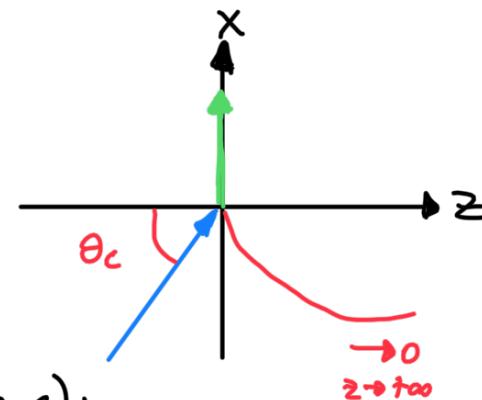


componente z reale del vett. di Rayting nulla ($\operatorname{Re}[S] \hat{z} = 0$)

- Utile nel caso delle fibre ottiche (l'onda non può uscire dal mezzo 1):



$$n_1 > n_2$$



Onda incidente nella regione 1 (TM)

(*)

$$\mathbf{E}_{1i}(x,y,z) = E_1 e^{-jk_1\zeta(x,z)} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\zeta} = E_1 e^{-jk_1\zeta(x,z)} \hat{\mathbf{y}} \times (\sin\vartheta_1 \hat{\mathbf{x}} + \cos\vartheta_1 \hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= E_1 e^{-jk_1\zeta(x,z)} (-\sin\vartheta_1 \hat{\mathbf{z}} + \cos\vartheta_1 \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{H}_{1i}(x,y,z) = \frac{E_1}{\eta_1} e^{-jk_1\zeta(x,z)} \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \bar{\mathbf{E}}_{1i} = \eta_1 \bar{\mathbf{H}}_{1i} \times \hat{\mathbf{u}}_{\zeta} \quad (*)$$

(*)

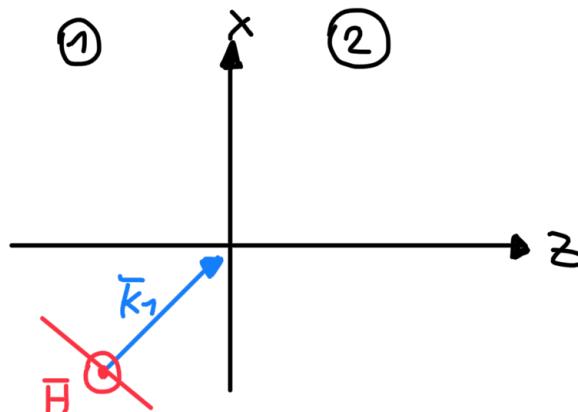
Dove:

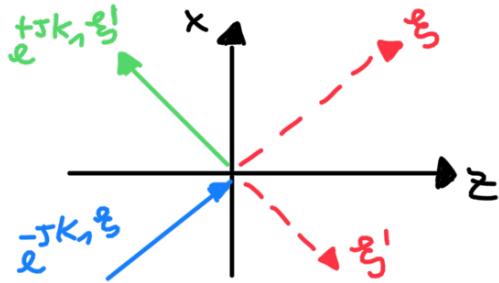
$$\zeta(x,z) = \sin\vartheta_1 x + \cos\vartheta_1 z$$

Vettore di Poynting complesso

$$\bar{\mathbf{u}}_{\zeta} = \sin\theta_1 \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta_1 \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{S}_{1i}(x,y,z) = \underbrace{\mathbf{E}_{1i}(x,y,z)}_{(*)} \times \underbrace{\mathbf{H}^*_{1i}(x,y,z)}_{(*)} = \frac{|E_1|^2}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\zeta} \times \hat{\mathbf{y}} = \frac{|E_1|^2}{\eta_1} \hat{\mathbf{u}}_{\zeta}$$





Brendiamo l'onda riflessa nel verso negativo dell'asse ξ'

Onda riflessa nella regione 1 (TM)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{1r}(x,y,z) &= \Gamma E_1 e^{+jk_1 \zeta'(x,z)} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{u}}_\zeta = \Gamma E_1 e^{+jk_1 \zeta'(x,z)} \hat{\mathbf{y}} \times (-\sin \vartheta_1 \hat{\mathbf{x}} + \cos \vartheta_1 \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \Gamma E_1 e^{+jk_1 \zeta'(x,z)} (\sin \vartheta_1 \hat{\mathbf{z}} + \cos \vartheta_1 \hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{H}_{1r}(x,y,z) &= -\frac{\Gamma E_1}{\eta_1} e^{+jk_1 \zeta'(x,z)} \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

\bar{E} si può anche ricavare da:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \omega \mu \epsilon \bar{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}} (-\partial_z H_y) + \hat{\mathbf{z}} \partial_x H_y$$

$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_y$

Dove: $\zeta'(x,z) = -\sin \vartheta_1 x + \cos \vartheta_1 z$

Vettore di Poynting complesso

$$\mathbf{S}_{1r}(x,y,z) = \mathbf{E}_{1r}(x,y,z) \times \mathbf{H}_{1r}^*(x,y,z) = \frac{-|\Gamma E_1|^2}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{u}}_\zeta, \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = -\frac{|\Gamma E_1|^2}{\eta_1} \hat{\mathbf{u}}_\zeta,$$

Onda trasmessa nella regione 2

$$\mathbf{E}_2(x,y,z) = TE_1 e^{-jk_2\zeta''(x,z)} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\zeta} = TE_1 e^{-jk_2\zeta''(x,z)} \hat{\mathbf{y}} \times (\sin\vartheta_2 \hat{\mathbf{x}} + \cos\vartheta_2 \hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= TE_1 e^{-jk_2\zeta''(x,z)} (-\sin\vartheta_2 \hat{\mathbf{z}} + \cos\vartheta_2 \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{H}_2(x,y,z) = \frac{TE_1}{\eta_2} e^{-jk_2\zeta''(x,z)} \hat{\mathbf{y}} = \frac{TE_1}{\eta_2} e^{-jk_2(\sin\theta_2 x + \cos\theta_2 z)} \hat{\mathbf{y}} =$$

$$= \frac{TE_1}{\eta_2} e^{-jk_2 \cosh\theta_2 x} e^{-jk_2 \sinh\theta_2 z}$$



 termine evanescente

$$\zeta''(x, z) = \sin\vartheta_2 x + \cos\vartheta_2 z$$

Se $\vartheta_1 > \vartheta_c \Rightarrow \vartheta_2 = \pi/2 + j\vartheta_{2i}$

\in

$n_1 > n_2$ $\vartheta_2 \in \mathbb{C}$

$$\vartheta_{2i} = \cosh^{-1}(n_1/n_2 \sin\vartheta_1)$$



$$\begin{cases} \sin\theta_2 = \cosh\theta_{2I} = \cos(j\vartheta_{2I}) \\ \cos\theta_2 = -j \sinh\theta_{2I} \end{cases}$$

$$n_1/n_2 \sin\vartheta_1 = \sin(\pi/2 + j\vartheta_{2i}) = \cosh\vartheta_{2i}$$

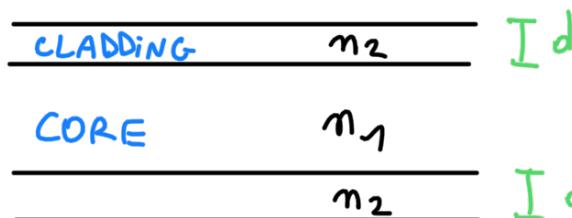
EULER: $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha}$

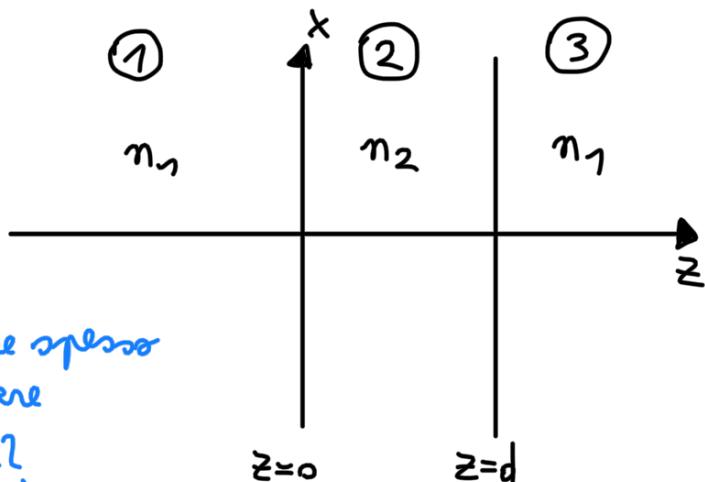
$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$

$\text{Se } x = j\frac{\xi}{2} \Rightarrow \cos(j\frac{\xi}{2}) = \frac{e^{j\frac{\xi}{2}} + e^{-j\frac{\xi}{2}}}{2}$

- Ma se la regione 2 è limitata, anche in questo caso il campo decade esponenzialmente?
- Allora, qual è la relazione tra spessore d della regione e confinamento dell'onda nella regione 1?



quanto deve essere spesso
il cladding per avere
riflessione totale?



- Lo spessore d dovrà essere tale che si possa trascurare la componente evanescente. Se d è piccola, una parte di potenza attiva dovrebbe passare nel mezzo 2... (?)
- Però ciò contrasta con il calcolo del vettore di Poynting complesso, il quale ha, lungo z , solo una componente immaginaria...
- Rifacciamo i conti e controlliamo:

Continuità in z=0

proiezione \vec{E} lungo \hat{x} (E_x)

$$[\mathbf{E}_{1i}(x,y,0) + \mathbf{E}_{1r}(x,y,0)] \cdot \hat{x} = \mathbf{E}_2(x,y,0) \cdot \hat{x} \quad (E_x \text{ componente tangenziale})$$

$$[\mathbf{H}_{1i}(x,y,0) + \mathbf{H}_{1r}(x,y,0)] \cdot \hat{y} = \mathbf{H}_2(x,y,0) \cdot \hat{y}$$

proiezione \vec{H} lungo \hat{y} (tutto \vec{H})

$$E_1 \cos \vartheta_1 (e^{-jk_1 \zeta(x,0)} + \Gamma e^{jk_1 \zeta'(x,0)}) = T E_1 e^{-jk_2 \zeta''(x,0)} \cos \vartheta_2$$

Vera se: $\left\{ -k_1 \zeta(x,0) = k_1 \zeta'(x,0) = -k_2 \zeta''(x,0) \right. \quad (1)$

$$\left. E_1 \cos \vartheta_1 (1 + \Gamma) = T E_1 \cos \vartheta_2 \right. \quad (2)$$

$$\frac{E_1}{\eta_1} (1 - \Gamma) = T \frac{E_2}{\eta_2} \quad (3)$$

$$(\theta_1 > \theta_c)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + j\theta_{2I}$$

$$\Gamma^{(TM)}(\vartheta_1) = \frac{\eta_2 \cos \vartheta_2 - \eta_1 \cos \vartheta_1}{\eta_2 \cos \vartheta_2 + \eta_1 \cos \vartheta_1} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{-j\eta_2 \sinh \vartheta_{2I}(\vartheta_1) - \eta_1 \cos \vartheta_1}{-j\eta_2 \sinh \vartheta_{2I}(\vartheta_1) + \eta_1 \cos \vartheta_1}$$

complessi coniugati
fra loro

Il modulo del rapporto di due numeri
complessi coniugati è unitario

riflessione
totale

$$|\Gamma^{(TM)}| = 1$$

- Ha riflessione totale la luce passando da un mezzo con indice di rifrazione più alto (n_1) ad uno più basso (n_2) e sta sopra ad un certo angolo critico (θ_c).

$$T^{(TM)} = (1 + \Gamma^{(TM)}) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} = -(1 + \Gamma^{(TM)}) \frac{\cos \vartheta_1}{j \sinh \vartheta_{2I}}$$

$$\Gamma^{(TM)}(\vartheta_c) = -1$$

$$T^{(TM)}(\vartheta_c) = 2$$

$$\vartheta_{2I} = \cosh^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1 \right)$$

$$\mathbf{E}_2(x, y, z) = T \mathbf{E}_1 e^{-jk_2 \zeta''(x, z)} (-\sin \vartheta_2 \hat{\mathbf{z}} + \cos \vartheta_2 \hat{\mathbf{x}})$$

$$\zeta''(x, z) = \sin \vartheta_2 x + \cos \vartheta_2 z = x \cosh \vartheta_{2i} - j z \sinh \vartheta_{2i}$$

$$\mathbf{E}_2(x, y, z) = T \mathbf{E}_1 e^{-jk_2 x \cosh \vartheta_{2i}} e^{-k_2 z \sinh \vartheta_{2i}} (-\cosh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{z}} - j \sinh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{E}_2(x,y,z) = TE_1 e^{-jk_2 x \cosh \vartheta_{2i}} e^{-k_2 z \sinh \vartheta_{2i}} (-\cosh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{z}} - j \sinh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{H}_2(x,y,z) = \frac{TE_1}{\eta_2} e^{-jk_2 x \cosh \vartheta_{2i}} e^{-k_2 z \sinh \vartheta_{2i}} \hat{\mathbf{y}}$$

- Vettore di Poynting complesso nella regione 2 :

$$\mathbf{S}_2(x,y,z) = \mathbf{E}_2(x,y,z) \times \mathbf{H}_2^*(x,y,z) =$$

$$\frac{|TE_1|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 z \sinh \vartheta_{2i}} (\cosh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{x}} + j \sinh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{z}})$$

la parte immaginaria non rappresenta trasporto di potenza attiva

$$\text{Re}(\mathbf{S}_2) = \frac{|TE_1|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 z \sinh \vartheta_{2i}} \cosh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{x}} \quad 2 * \text{Densità di potenza media attiva}$$

$$\text{Im}(\mathbf{S}_2) = \frac{|TE_1|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 z \sinh \vartheta_{2i}} \sinh \vartheta_{2i} \hat{\mathbf{z}}$$

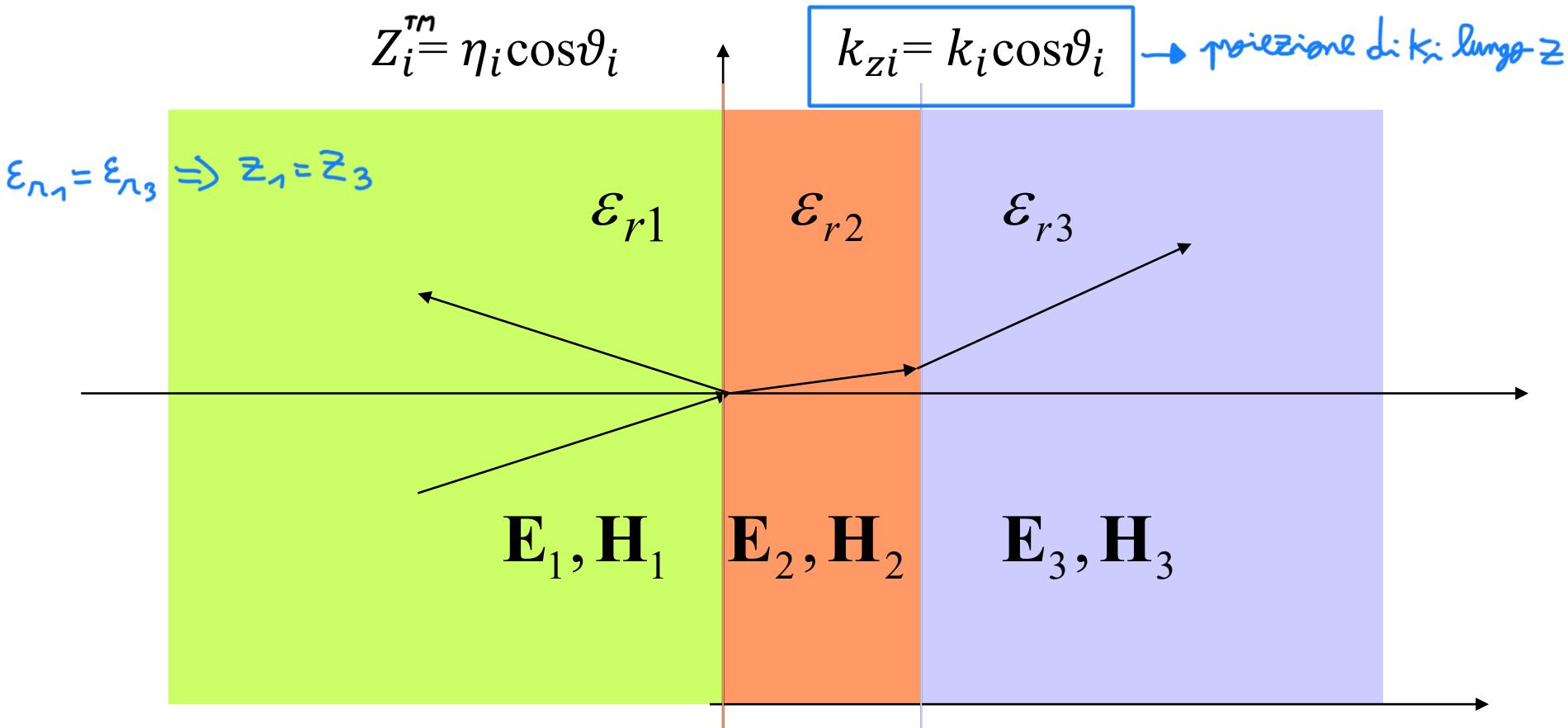
$$\frac{1}{2} \text{Re}[\bar{s}]$$

- Ma cosa succede se la regione 2 è finita ?

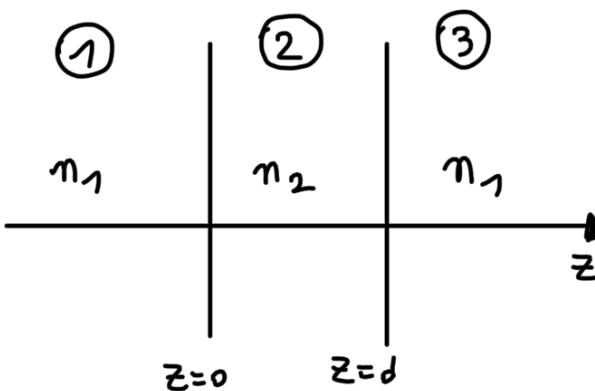
Non ho solo il termine progressivo decadente ($e^{-jk_2 \cos \theta_2 z}$), ma anche quello regressivo riflesso dall'interfaccia $z=d$ ($e^{+jk_2 \cos \theta_2 z}$).

- Quindi dobbiamo rifarsi al caso di un mezzo stratificato:

Incidenza obliqua TM su un mezzo stratificato



$$\Gamma(z=0) = \Gamma_1 = \frac{Z_2(Z_3 - Z_1) + j(Z_2^2 - Z_3 Z_1) \tan(k_z d)}{Z_2(Z_3 + Z_1) + j(Z_2^2 + Z_3 Z_1) \tan(k_z d)}$$



$$n_1 > n_2$$

- $z_1 = \frac{n}{n_1} \cos \theta_1, \quad z_2 = \frac{n}{n_2} \cdot \cos \theta_2$
- $t_2 = \tan(k z_2 d) = \tan(k_0 n_2 \cos \theta_2 d)$
- $\cos \theta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + j \theta_{2I}\right) = -j \sinh(\theta_{2I})$

$$\begin{aligned}
 Z_{in} &= Z_2 \frac{z_1 + j z_2 t_2}{z_2 + j z_1 t_2} = \\
 &= -j \sinh(\theta_{2I}) \frac{n}{n_2} \left(\frac{\frac{n}{n_1} \cos \theta_1 + j (-j \sinh(\theta_{2I})) \frac{n}{n_2} (-j \tanh(k_0 n_2 d \sinh \theta_{2I}))}{-j \sinh \theta_{2I} \frac{n}{n_2} + j \frac{n}{n_1} \cos \theta_1 (-j \tanh(k_0 n_2 d \sinh \theta_{2I}))} \right)
 \end{aligned}$$

(*)

(*)

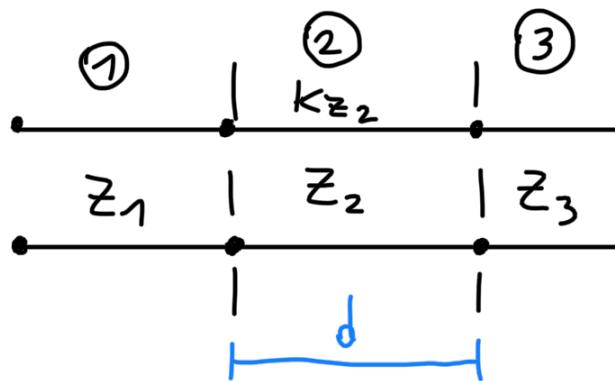
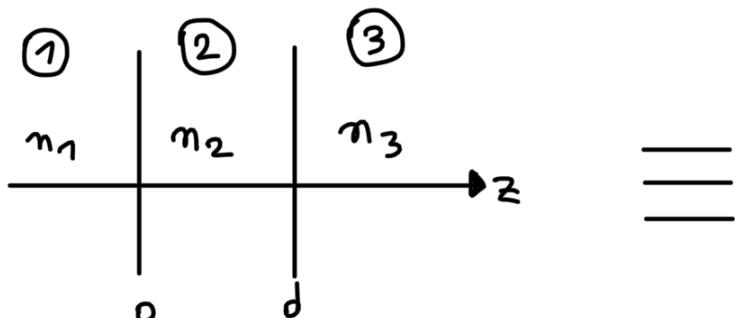
(*) $\uparrow \Rightarrow \tanh \rightarrow 1 \Rightarrow (*) \rightarrow 1 \Rightarrow Z_{in}$ puramente immaginaria

crece con lo spessore d !

$$T = \frac{z_{in} - z_1}{z_{in} + z_1} \rightarrow |T|=1 \Leftrightarrow z_{in} \text{ immaginaria} \Leftrightarrow d \text{ è sufficientemente grande}$$

- Diversamente, z_{in} è una quantità complessa $\Rightarrow |T| \neq 1 \quad (T \in \mathbb{C})$

- Da questa analisi siamo in grado di ricavare lo spessore d minimo tale per cui si possa trascurare la componente lungo z , stimando per quale valore di d l'argomento di $\tanh(\dots) \rightarrow 1$. $(K_0 n_2 d \sinh \theta_2 I$ sufficientemente grande)
- In generale:



$$\Gamma(z=0) = \frac{E_{1xr}(x,y,0)}{E_{1xi}(x,y,0)} = \frac{Z_2(Z_3-Z_1)+j(Z_2^2-Z_3Z_1)\tan(k_{z2}d)}{Z_2(Z_3+Z_1)+j(Z_2^2+Z_3Z_1)\tan(k_{z2}d)} \quad k_{z2}=k_2\cos\vartheta_2$$

CASO TM

$$Z_i = \eta_i \cos\vartheta_i \leq Z_i$$

CASO TE

$$Z_i = \eta_i / \cos\vartheta_i \geq Z_i$$

Se i mezzi sono senza perdite (ε_{ri} reale) la densità di potenza attiva trasmessa al mezzo 3 vale:

$$(1 - |\Gamma|^2) p_{\text{inc}}$$

→ conservazione dell'energia

Essendo p_{inc} la densità di potenza attiva media incidente.

In altre sezioni z

$$\Gamma(z) = \frac{E_{1xr}(x,y,z)}{E_{1xi}(x,y,z)} = e^{-2jk_{1z}z} \Gamma(z=0)$$

- fronte d'onda riflesso ritardato di $k_{1z} \cdot z$
- " " " incidente anticipato di $k_{1z} \cdot z$

Il campo nella regione 3 si ricava come già mostrato quando si è studiata l'incidenza normale in un mezzo stratificato

$$\Gamma_2 = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2jk_2 d}$$

$$E_3^+ e^{-jk_3 d} = E_2^+ (e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d}) = E_1^+ \frac{1 + \Gamma_1}{1 + \Gamma_2} (e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d})$$

Avendo posto $k_2 = k_0 n_2 \cdot \cos \vartheta_2$

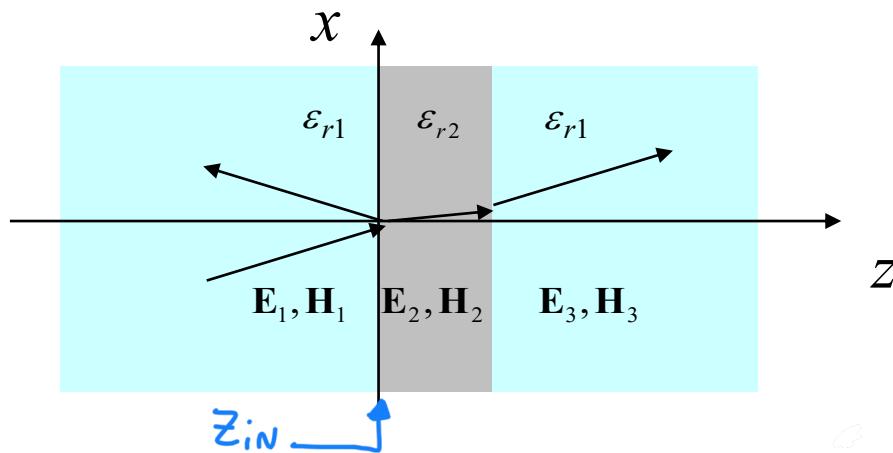
Esempio di scritto

Un'onda piana con polarizzazione TM alla frequenza di 1000 MHz e densità di potenza 20 W/m² incide con un angolo di 30° su una lastra di Allumina ($\epsilon_r=10$) dello spessore di 1 cm. Si calcolino:

- a) espressione dell'onda riflessa;
- b) densità di potenza trasmessa;
- c) se esiste, l'angolo di incidenza per il quale la riflessione è nulla, indipendentemente dallo spessore del dielettrico.

$$Z_{in} = Z_2 \frac{Z_1 + jZ_2 t_2}{Z_2 + jZ_1 t_2}$$

$$Z_{in}^T M = \frac{\eta_0 \cos \theta_i}{\eta_i}$$



$$P_{inc} = \frac{1}{2} \frac{|E_1|^2}{\eta_1} = 20 \text{ W/m}^2 \Rightarrow |E_1| = \sqrt{20 \cdot 2 \cdot 377} = 122.8 \text{ V/m}$$

$\underline{m_1 = 1}$

- Calcola il coeff. di riflessione:

$$\vartheta_2 = 9.1^\circ$$

$$\Gamma = \frac{j(Z_2^2 - Z_1^2) \tan(k_0 n_2 \cos \vartheta_2 d)}{2Z_2 Z_1 + j(Z_2^2 + Z_1^2) \tan(k_0 n_2 \cos \vartheta_2 d)}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right)$$

1) Campo nella regione 1

$$\Gamma = -0.455 - i0.38$$

$$E_{1zi}(x,y,z) = -E_1 e^{-jk_1 \zeta(x,z)} \sin \vartheta_1$$

$$E_{1xi}(x,y,z) = E_1 e^{-jk_1 \zeta(x,z)} \cos \vartheta_1$$

$$H_{1yi}(x,y,z) = \frac{E_1}{\eta_1} e^{-jk_1 \zeta(x,z)}$$

$$\zeta(x,z) = \sin \vartheta_1 x + \cos \vartheta_1 z$$

$$E_{1zr}(x,y,z) = \Gamma E_1 e^{jk_1 \zeta'(x,z)} \sin \vartheta_1$$

$$E_{1xr}(x,y,z) = \Gamma E_1 e^{jk_1 \zeta'(x,z)} \cos \vartheta_1$$

$$H_{1yr}(x,y,z) = -\frac{\Gamma E_1}{\eta_1} e^{jk_1 \zeta'(x,z)}$$

$$\zeta'(x,z) = -\sin \vartheta_1 x + \cos \vartheta_1 z$$

2) Densità di potenza trasmessa

$$p_T = (1 - |\Gamma|^2)p_{inc} = 0.65p_{inc}$$

3) Angolo di Brewster

$$\vartheta_B = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1} = 1.265 \text{ rad} = 72.45^\circ$$

4) Campo nella regione 2 (conviene prendere \bar{H} perché ha una sola componente)

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{2y}(x, y, z) = H_{2y}^+ e^{-jk_2(\sin \theta_2 x + \cos \theta_2 z)} + H_{2y}^- e^{+jk_2(-\sin \theta_2 x + \cos \theta_2 z)} \\ \nabla \times \bar{H} = jw \epsilon \bar{E} \end{array} \right.$$

• Pertanto:

$$jw \epsilon E_{2x} = -\partial_z H_{2y} = jk_2 \cos \theta_2 e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} \left(H_{2y}^+ e^{-jk_2 \cos \theta_2 z} - H_{2y}^- e^{+jk_2 \cos \theta_2 z} \right)$$

- In particolare, in $z=0$ si ha:

$$\begin{cases} H_{2y}(x, 0) = \underbrace{(H_{2y}^+ + H_{2y}^-)}_{\text{red}} e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} \\ E_{2x}(x, 0) = \underbrace{n_2 \cos \theta_2 (H_{2y}^+ - H_{2y}^-)}_{\text{blue}} e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} \end{cases}$$

- Dalle espressioni precedenti si ricava che:

$$\begin{cases} \underbrace{H_{2y}^+ + H_{2y}^-}_{\text{red}} = \frac{E_1}{n_1} (1 - \Gamma) \\ \underbrace{n_2 \cos \theta_2 (H_{2y}^+ - H_{2y}^-)}_{\text{blue}} = E_1 \cos \theta_1 (1 + \Gamma) \end{cases}$$

Termini noti: $E_1, \theta_1, \theta_2, n_1, n_2$

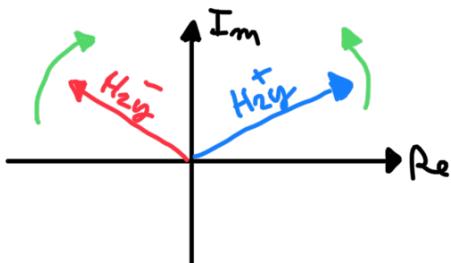
- Dividendo la 2° eq. per $n_2 \cos \theta_2$:

$$2H_{2y}^{\pm} = \frac{E_1}{n_1} (1 - \Gamma) \pm \frac{E_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2} (1 + \Gamma)$$

- Da qui possiamo ricavare la sezione in cui si ha il campo E trasversale massimo, che corrisponde a quella in cui il campo H è minimo e viceversa.
- Campo H_{\max} nella regione 2: devo trovare il massimo dell'equazione:

$$\underset{z}{\text{MAX}} \left| H_{2y} + e^{-jk_2 \cos \theta_2 z} + H_{2y} e^{+jk_2 \cos \theta_2 z} \right|$$

che ottengo quando i due numeri complessi sono in fase tra loro:



- una variazione di z corrisponde ad una rotazione (in senso orario ed antiorario) dei due vettori.
- il modulo rimane costante, cambia solo la fase.

- Quindi trovare il massimo del campo H vuol dire trovare i valori di z per cui i due valori complessi sono tra loro in fase.
- Dl minimo si ottiene quando sono in opposizione di fase (sfasati di 180°).

- Per ottenere il massimo, quindi, la condizione da imporre è:

$$\angle H_2 y^+ - k_2 \cos \theta_2 z = \angle H_2 y^- + k_2 \cos \theta_2 z + 2n\pi$$

$\Downarrow (n=0)$

$$z_{MAX} = \frac{\angle H_2 y^+ - \angle H_2 y^-}{2 k_2 \cos \theta_2}$$

$\Leftrightarrow \min |E_x|$

(corrisponde allo stesso tempo al minimo di campo \bar{E})

- Per ottenere il minimo, invece:

$$\angle H_2 y^+ - k_2 \cos \theta_2 z = \angle H_2 y^- + k_2 \cos \theta_2 z + 2n\pi + \pi$$

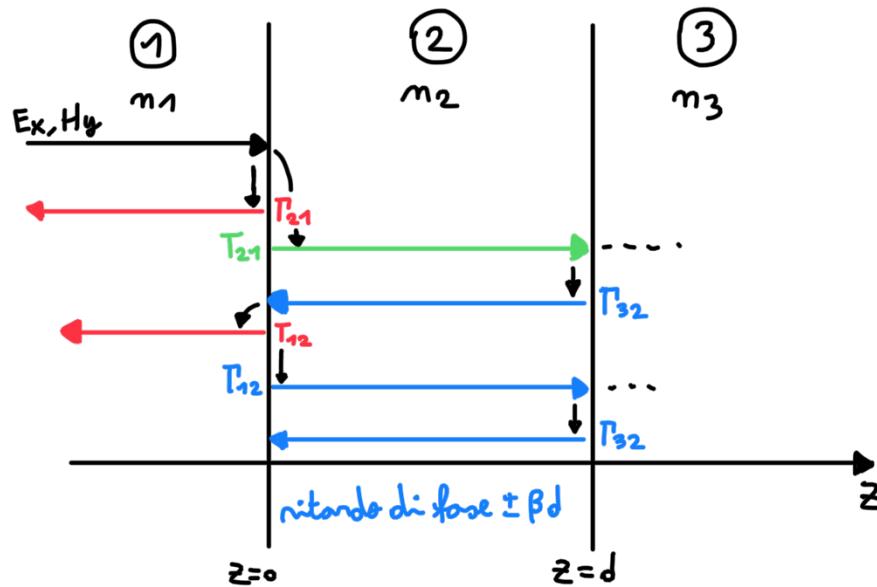
$\Downarrow (n=0)$

$$z_{MIN} = \frac{\angle H_2 y^+ - \angle H_2 y^- - \pi}{2 k_2 \cos \theta_2}$$

$\Leftrightarrow \max |E_x|$

NOTA: il coeff. di riflessione nel caso del campo \bar{E} ha un segno opposto a quello del campo \bar{H}

E: Calcolo di T sommando le onde riflesse parziali



$$\Gamma_{i,j} = \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}$$

da strato j ad i

coefficiente di riflessione parziale
(non tiene conto di ciò che c'è dopo)

somma dei fasori dei coeff. di riflessione/trasmissione all'interfaccia $z=0^-$

II

ritardo di fase

$$\begin{aligned} \boxed{\Gamma_{TOT}} &= \Gamma_{21} + \underbrace{\Gamma_{21} \cdot e^{-j\beta d}}_{\text{ritardo di fase}} \cdot \underbrace{\Gamma_{32} \cdot e^{-j\beta d}}_{\text{ritardo di fase}} \cdot \Gamma_{12} + \\ &+ \underbrace{\Gamma_{21} \cdot e^{-j\beta d}}_{\text{ritardo di fase}} \underbrace{\Gamma_{32} \cdot e^{-j\beta d}}_{\text{ritardo di fase}} \underbrace{\Gamma_{12} \cdot e^{-j\beta d}}_{\text{ritardo di fase}} \underbrace{\Gamma_{32} \cdot e^{-j\beta d}}_{\text{ritardo di fase}} \Gamma_{12} + \dots \end{aligned}$$

$$= \Gamma_{21} + \underbrace{\Gamma_{21}}_{\text{ritardo di fase}} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\Gamma_{32} \cdot e^{-j2\beta nd}}_{\text{ritardo di fase}} \underbrace{\Gamma_{12} \cdot \Gamma_{12}^{n-1}}_{\text{ritardo di fase}} =$$

$$= \Gamma_{21} + \Gamma_{21} \cdot \Gamma_{12} \underbrace{\Gamma_{32} \cdot e^{-j2\beta d}}_{\text{ritardo di fase}} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\Gamma_{32}^n}_{\text{ritardo di fase}} \underbrace{\Gamma_{12}^n}_{\text{ritardo di fase}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{SERIE GEOMETRICA con} \\ \text{ragione } \Gamma_{32} \Gamma_{12} \cdot e^{-j2\beta d} \end{array}$$

- Dove:

$$T_{21} = 1 + T_{21}$$

$$T_{12} = 1 + T_{12}$$

$$T_{12} = -T_{21}$$

}

=

$$T_{21} \cdot T_{12} = 1 - T_{21}^2$$

- Per $|T_{32} T_{21}| < 1 \rightarrow$ la serie converge e

$$\sum_{n=0}^M x^n = \frac{1-x^{M+1}}{1-x}$$

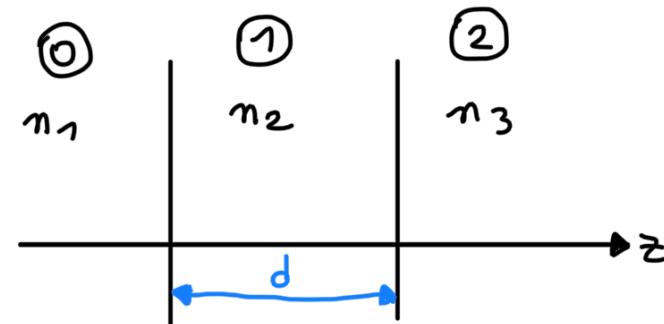
- Da ciò si ha che:

$$T_{\text{tot}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[T_{21} + (1 - T_{21}^2) T_{32} e^{-j2\beta d} \cdot \frac{1 - (T_{32} T_{21} e^{-j2\beta d})^{M+1}}{1 - T_{32} T_{21} e^{-j2\beta d}} \right]$$

- Formalmente dovremmo aspettare un'infinità di rimbalzi, ma la convergenza della serie avviene molto rapidamente (dipende da $T_{32} T_{21}$).

E: Incidenza normale con:

- $\epsilon_{n_0} = 1, \epsilon_{n_1} = 10, \epsilon_{n_2} = 1$
- $k_0 = 20.958 \text{ m}^{-1}$ (ad 1 GHz)
- $\beta = k_1 = K_0 \cdot \sqrt{\epsilon_{n_1}} = 66.2750 \text{ m}^{-1}$
- $K_2 = K_0 \sqrt{\epsilon_{n_2}} = K_0$
- $d = \frac{2\pi}{K_1}$



$$\boxed{K_0 = \frac{w}{c} = \frac{2\pi \cdot f}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow f = \frac{k_0 \cdot c}{2\pi}}$$

$[c] = [m/s]$

• Consideriamo le impedenze normalizzate $(\bar{n}_i = \frac{n_i}{377} = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_{n_i}}} \cdot \frac{1}{377} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{n_i}}})$

$$\bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{n_0}}} = 1, \quad \bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \bar{n}_2 = 1$$

- Se spessore d è pari ad una lunghezza d'onda (d multiplo di $\frac{\lambda}{2} \Rightarrow T=0$ a regime)
- Essendo in condizioni di risonanza, cerca un T nullo.

- Calcoliamo i coefficienti di riflessione parziali:

$$R_{10} = \frac{z_1 - z_0}{z_1 + z_0} = \frac{1/m_1 - 1}{1/m_1 + 1} = -0.5194$$

$$T_{10} = \frac{2 z_1}{z_1 + z_0}$$

$$R_{01} = -R_{10}$$

$$T_{01} = \frac{2 z_0}{z_1 + z_0}$$

$$T_{21} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = 0.5194$$

$$T_{21} = \frac{2 z_2}{z_2 + z_1}$$

- Calcoliamo T approssimato ai primi M termini:

$$T_{App}(M) = T_{10} + T_{10} \cdot T_{01} \sum_{n=1}^M \left(e^{-j2k_1 d} T_{21} \right)^n T_{01}^{n-1}$$

\Downarrow

$$-T_{App}(1) = -0.1401$$

$$-T_{App}(2) = -0.0378$$

$$-T_{App}(3) = -0.0102$$

$$-T_{App}(4) = -0.0027$$

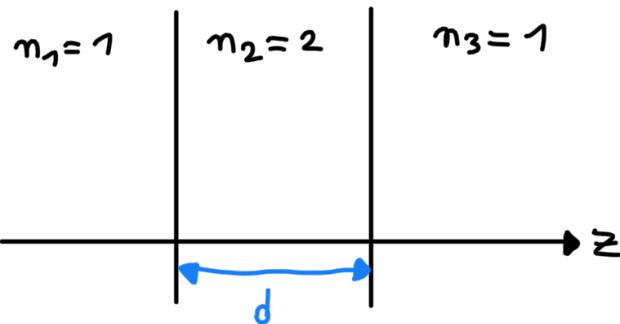
$$-T_{App}(5) = -0.0007$$

- Per notare una variazione apprezzabile della riflessione basta cominciare la frequenza, quindi ciò che conta è la larghezza di banda.

- Nell'ipotesi di piccole riflessioni ($T_{21} \text{ e } T_{32} \ll 1$):

$$T_{\text{TOT}} \approx T_{21} + T_{32} e^{-2\pi\beta d}$$

Ej:



- $f = 1 \text{ GHz}$
- $d \approx ?$ (in modo da ottenere $T = T_{\text{MAX}}$)
(per $d=0$, $T_{\text{TOT}}=0$)

- Il massimo di T ce l'ha a $\frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{n_2 k_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{2} \cdot k_0} = 0.212 \text{ m}$$

$$d(T_{\text{MAX}}) = \frac{\lambda_2}{4} = 0.053 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} T_{21} &= \frac{1/\sqrt{2} - 1}{1/\sqrt{2} + 1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -0.17 \\ T_{32} &= -T_{21} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_{TOT} \approx 2T_{21} = \boxed{-0.34}$$

per $2\beta d = \pi$

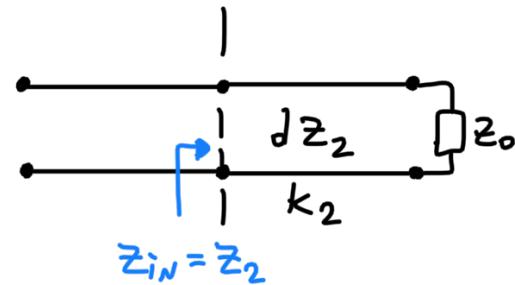


$$d = \frac{\lambda}{4}$$

- Calcolo del valore vero di T_{TOT} :

$$\boxed{Z_{IN}} = Z_2 \cdot \frac{Z_0 + jZ_2 t_2}{Z_2 + jZ_0 t_2} \stackrel{(t_2 \rightarrow \infty)}{=} \boxed{\frac{Z_2^2}{Z_0}}$$

$\tan(k_2 d)$

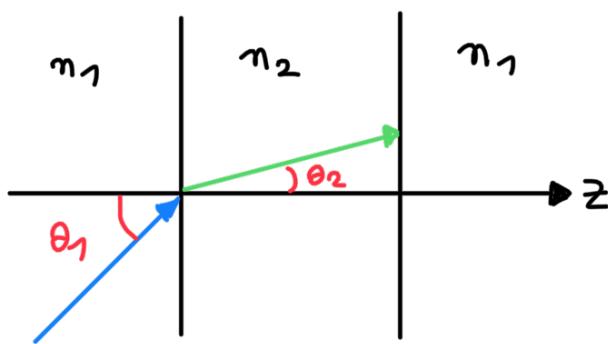


$$T_{TOT}(t_2 \rightarrow \infty) = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0} = \frac{Z_2^2 - Z_0^2}{Z_2^2 + Z_0^2} = \frac{1/2 - 1}{1/2 + 1} = -\frac{1}{3} = -0.\overline{3}$$

(-0.34 valore approssimato)

- Supponiamo ora che l'incidenza sia obliqua

CASO TM



- $n_1 = 1$
- $n_2 = \sqrt{2}$
- $\theta_1 = 30^\circ$
- $\eta_{l1} = \eta_0$
- $\eta_{l2} = \frac{1}{n_2}$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0.36 \text{ rad}$$

$$z_1 = \eta_1 \cos \theta_1 \rightarrow \bar{z}_1 = \cos \theta_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \simeq 0.85$$

$$z_2 = \eta_2 \cos \theta_2 \rightarrow \boxed{\bar{z}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_2 \simeq 0.67$$

$$t_2 = \tan(k_{z_2} d) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.95\right) = 12.706$$

$$\bar{z}_{IN} = \frac{0.67 + j(0.67) \cdot 12.706}{0.67 + j(0.85) \cdot 12.706} t_2$$

$(\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \text{ per } x \text{ piccoli})$

$$\Pi = \frac{\bar{z}_{in} - 0.85}{\bar{z}_{in} + 0.85} \simeq -0.212$$

- Cambiando l'inclinazione dell'onda incidente, T è più bassa.
- Ciò avviene perché, nel caso di incidenza normale, tutto ciò che non passa nel 2° mezzo viene riflesso;
- Nel caso di incidenza obliqua ciò che non passa non viene totalmente riflesso in direzione z , ma una parte viaggia lungo la direzione x .
(questa parte non viene vista dal fronte d'onda incidente, nel calcolo di T si osserva solo la potenza riflessa lungo z)