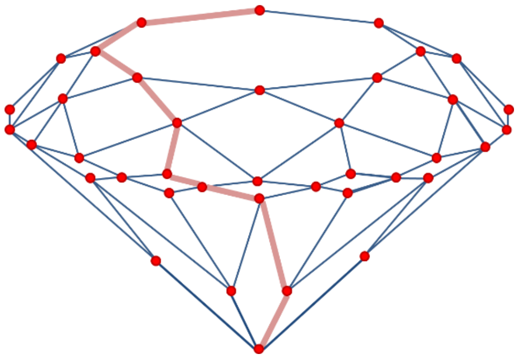
Università Politecnica delle Marche

Programmazione Lineare

ver 3.0.0



Fabrizio Marinelli

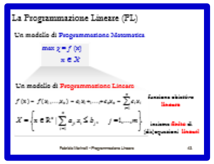
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it

tel. 071 - 2204823

- Richiami di Algebra Lineare
- Introduzione alla Prog. Lineare (PL)
- Ottimizzazione convessa e PL
- Geometria della PL
- Sistemi di eq. Lineari e PL

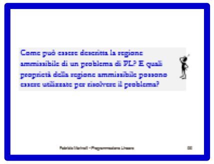
- Richiami di Algebra Lineare

- Introduzione alla Prog. Lineare (PL)

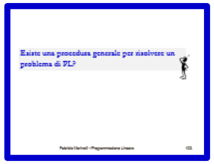


- Ottimizzazione convessa e PL

- Geometria della PL



- Sistemi di eq. Lineari e PL



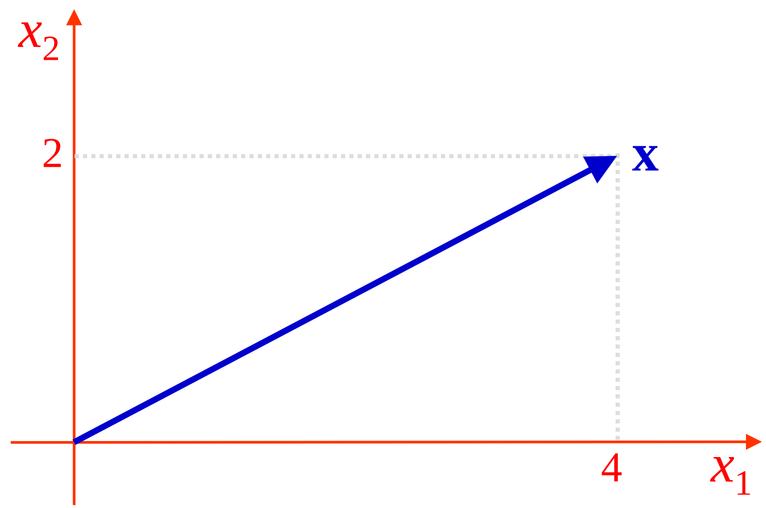
Richiami di Algebra Lineare

Vettori

- **[Definizione]** un vettore $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n$ è una n-pla di numeri reali $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e rappresenta un punto nello spazio R^n .
  Ogni elemento x_i del vettore è detta componente (o coordinata).

- **[Esempio]**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



[Definizioni]

- la trasposta di un vettore $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ (indicata con $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$) è il vettore riga $[x_1 \ldots\ x_n]$.
- Il versore $\mathbf{e}_i$ è il vettore $[0,\ldots,1,\ldots 0]^{\mathrm{T}}$ in cui la componente i-esima è 1

Vettori: operazioni elementari

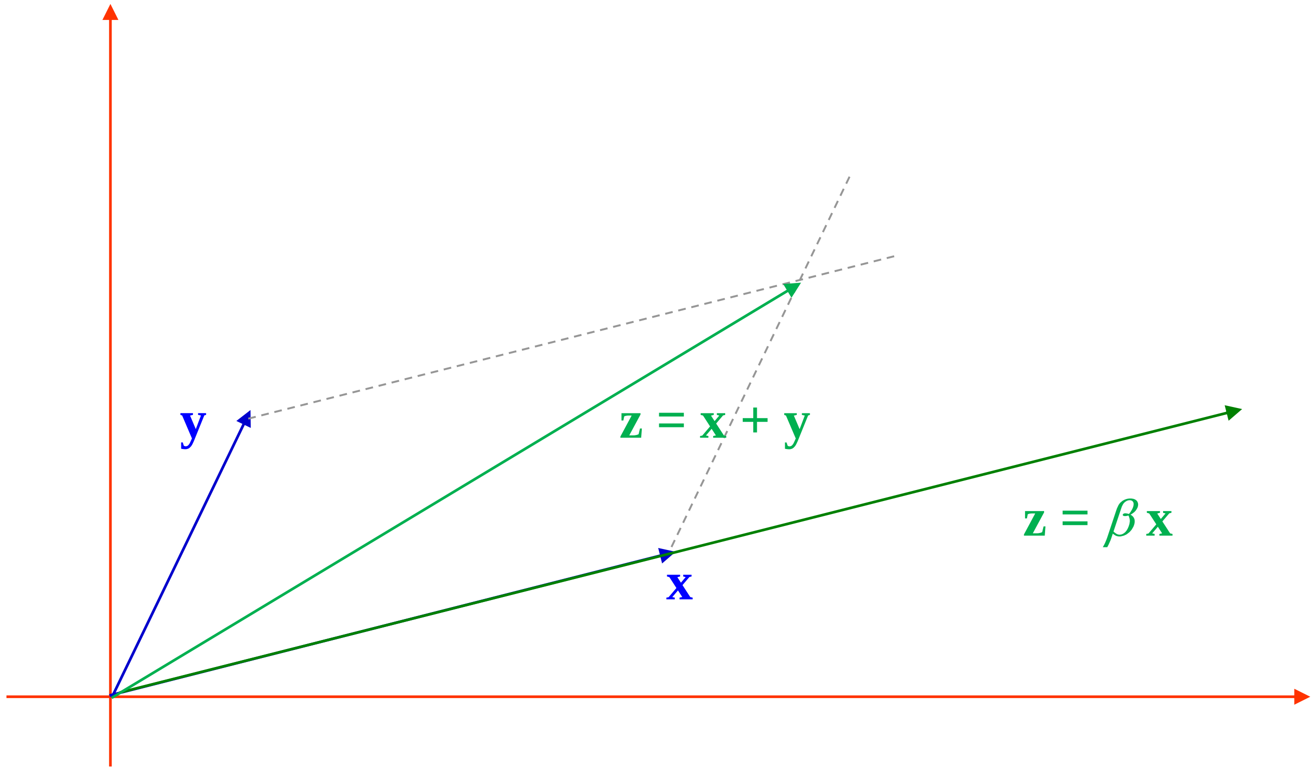
- Somma $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 = x_1 + y_1 \\ \vdots \\ z_n = x_n + y_n \end{bmatrix}$$

- Prodotto per uno scalare $\beta \mathbf{x} = \mathbf{z}$

$$\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 = \beta x_1 \\ \vdots \\ z_n = \beta x_n \end{bmatrix}$$

Vettori: operazioni elementari



$\mathbf{x} = (4,1)$

$\mathbf{y} = (1, 2)$

$\beta = 2$

Combinazioni lineari

- **[Definizione]** il vettore $\mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$ è una combinazione lineare dei k vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathrm{R}^n$ se esistono k valori $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i = \alpha_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{bmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{bmatrix}$$

Vettori e combinazioni lineari: esempi

- **[Esempio 1]**
  Il vettore $\mathbf{y}$ = (5,4) è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_1$ = (4,1) e $\mathbf{x}_2$ = (1, 2) ?
  Si tratta di determinare i coefficienti α_1 e α_2 tali che

$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\alpha_1+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\alpha_2=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \quad \text{ovvero di risolvere il sistema} \quad \begin{cases}4\alpha_1+\alpha_2=5\\ \alpha_1+2\alpha_2=4\end{cases}$$

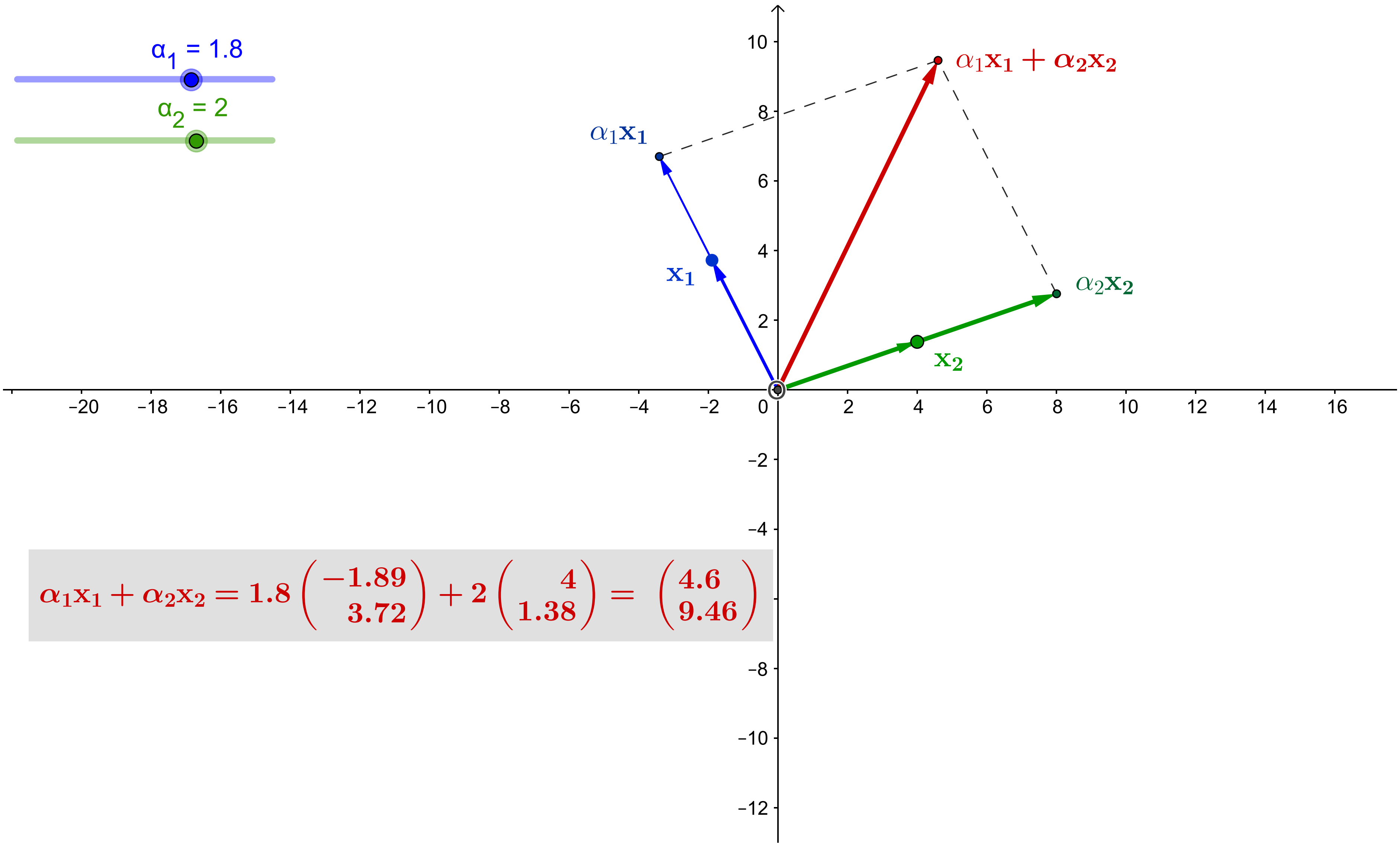
  la cui soluzione è: $\alpha_1 = 6/7$ e $\alpha_2 = 11/7$

- **[Esempio 2]** E il vettore $\mathbf{y}$ = (–2, –1) è combinazione lineare di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$?
  Si tratta di determinare i coefficienti α_1 e α_2 tali che

$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\alpha_1+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} \quad \text{ovvero di risolvere il sistema} \quad \begin{cases}4\alpha_1+\alpha_2=-2\\ \alpha_1+2\alpha_2=-1\end{cases}$$

  la cui soluzione è: $\alpha_1 = -3/7$ e $\alpha_2 = -2/7$

Combinazioni lineari



$$\boldsymbol{\alpha_1}\mathbf{x_1} + \boldsymbol{\alpha_2}\mathbf{x_2} = \mathbf{1.8}\begin{pmatrix} \mathbf{-1.89} \\ \mathbf{3.72} \end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1.38} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4.6} \\ \mathbf{9.46} \end{pmatrix}$$

Spazi lineari

[Definizione] l'insieme $S \subseteq R^n$ è uno spazio lineare reale (o spazio vettoriale) se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione, cioè se ogni combinazione lineare di suoi elementi resta nell'insieme:

$$(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \in S \;\; \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in S \text{ e } \forall \alpha, \beta \in R$$

- **[Osservazione]** ogni spazio lineare contiene il vettore nullo.
- **[Definizione]** $S \subset V$ è un sottospazio lineare dello spazio lineare V se e solo se S è uno spazio lineare

Indipendenza lineare

- **[Definizione]** Un insieme S di m vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ si dice linearmente indipendente <u>se e solo se</u> l'unico modo per esprimere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ è utilizzando coefficienti tutti nulli, cioè

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i}$$

Indipendenza lineare

- **[Osservazioni]**

1. Un sottoinsieme di un insieme S linearmente indipendente è linearmente indipendente.
2. L'insieme $\{\mathbf{0}_n\}$ è linearmente dipendente, quindi
3. ogni insieme S contenente $\mathbf{0}_n$ è linearmente dipendente.
4. Ogni insieme S costituito da un solo elemento diverso dal vettore nullo è linearmente indipendente.

basi

Sia B una collezione di vettori qualsiasi di R^n.

- **[Definizione]** L'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di B si dice involucro lineare di B oppure sottospazio generato da B e si indica con *lin*(B).

- **[Definizione]** L'insieme B si dice base di S se i vettori di B sono linearmente indipendenti e se $S = lin(B)$.

- Data una base $B = \{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\}$ e un vettore $\mathbf{y} \in S \setminus B$, si definisce rappresentazione di $\mathbf{y}$ rispetto a B il vettore $(\alpha_1,\ldots, \alpha_m)$ tale che

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

basi

- **[Teorema]** [**Steinitz**] Tutte le basi di un dato spazio lineare S hanno **lo stesso numero** di elementi.

- **[Definizione]** il numero di elementi di una base di uno spazio lineare S è detto rango lineare (o dimensione) di S e si indica con rango(S).

Esercizi

1. Dimostrare che una qualsiasi retta passante per l'origine è un sottospazio lineare di R^2
2. Dimostrare che ogni coppia di punti che individuano una retta che non passa per l'origine forma una base di R^2.
3. Dimostrare che nessun vettore di una base B può essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori di B.

Matrici

- **[Definizione]** una matrice $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{m \times n}$ è una tabella di $m \cdot n$ scalari organizzati in m righe e n colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

elemento a_{23} — indice di colonna; indice di riga

- $(m \times n)$ è la dimensione della matrice.
- se $m = n$ la matrice è detta quadrate di ordine n.
- un vettore è una matrice di dimensione $(m \times 1)$.

Notazione

- A seconda dei casi una matrice $\mathbf{A}$ con m righe e n colonne può essere rappresentata
  - con un suo elemento generico $\mathbf{A} = [a_{ij}]$
  - con la sua dimensione $\mathbf{A}(m \times n)$
  - per esteso

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  - come collezione di vettori colonna $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 | \quad \cdots \quad | \mathbf{A}_n]$
  - come collezione di vettori riga

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Operazioni su matrici

- Consideriamo due matrici $\mathbf{A}(m \times n)$ e $\mathbf{B}(m \times n)$
  - Somma: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ $\quad [c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Prodotto per uno scalare: $\beta\mathbf{A} = \mathbf{C}$ $\quad [c_{ij} = \beta\, a_{ij}]$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 9 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Operazioni su matrici

- Il prodotto tra le matrici **A**($m \times p$) e **B**($q \times n$), definito se e solo se $p = q$, è la matrice **C**($m \times n$) in cui l'elemento c_{ij} è:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad\qquad i = 1,\ldots, m \quad j = 1,\ldots, n}$$

- **[Osservazione]** Il prodotto scalare di due vettori **x** e **y** è in effetti un prodotto tra matrici di dimensione ($1 \times m$) e ($m \times 1$).

Operazioni su matrici: proprietà del prodotto

- non è commutativo

  in generale $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

in particolare:

- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_i$ (colonna i-esima di $\mathbf{A}$)
- $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$ (riga i-esima di $\mathbf{A}$)

- è associativo

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

- gode della prop. distributiva destra e sinistra

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$$

Matrici particolari: trasposta

- La matrice trasposta $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ di una matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ si ottiene scambiando le righe con le colonne (per ogni elemento si ha quindi $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ha dimensione $(n \times m)$
  - $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
  - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Matrici particolari: nulla

- La matrice nulla $\mathbf{O}(m \times n)$ è quella composta da tutti zero:

$$\mathbf{O}(m \times n) \qquad a_{ij} = 0 \ \forall i, j$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{O}$
- $\mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$

Matrici quadrate

- matrice identità

$\mathbf{I}(n \times n) \qquad a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- matrice diagonale

$\mathbf{A}(n \times n) \qquad a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- matrice triangolare sup.

$\mathbf{A}(n \times n) \quad a_{ij} \geq 0\ \forall i \leq j,\ a_{ij} = 0\ \forall i > j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrici quadrate

- matrice simmetrica

  $\mathbf{A}(n \times n) \qquad a_{ij} = a_{ji}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- matrice invertibile: matrice che ammette la sua inversa
  - $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$
  - $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$
  - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

Determinante di una matrice

- **[Definizione]** Data una matrice quadrata **A** di *ordine* $n \geq 2$, la matrice quadrata di ordine $n-1$ che si ottiene cancellando la k-esima riga e j-esima colonna da **A** si chiama minore $\mathbf{A}_{kj}$ di **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante di una matrice

- Il determinante $\det(\mathbf{A})$ di una matrice quadrata $\mathbf{A}(n \times n)$ di ordine $n \geq 1$ è una funzione lineare delle righe di $\mathbf{A}$ a valori reali. La formula generale per calcolare $\det(\mathbf{A})$ è

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \leq k \leq n \text{ fissato}$$

Determinante di una matrice

- Il determinante $\det(\mathbf{A})$ di una matrice quadrata $\mathbf{A}(n \times n)$ di ordine $n \geq 1$ è una funzione lineare delle righe di $\mathbf{A}$ a valori reali. La formula generale per calcolare $\det(\mathbf{A})$ è

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \boxed{(-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj})} \qquad \text{per } 1 \leq k \leq n \text{ fissato}$$

cofattore dell'elemento a_{kj}

[Nota] Il cofattore di a_{kj} è il determinante della matrice che si ottiene sostituendo la k-esima riga di $\mathbf{A}$ con il vettore unitario $\mathbf{e}_j$

Determinante di una matrice

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \le k \le n \text{ fissato}$$

Il determinante è definito ricorsivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante di una matrice

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \le k \le n \text{ fissato}$$

Il determinante è definito ricorsivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) - a_{12} \det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right) + a_{13} \det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right)$$

Determinante di una matrice

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \leq k \leq n \text{ fissato}$$

[casi particolari]

se **A** è una matrice diagonale o triangolare superiore allora

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

[esercizio] quante operazioni aritmetiche richiede il calcolo del determinante di una matrice di ordine n?

Proprietà del determinante

1. per ogni colonna $\mathbf{A}_k$ e $t \in \mathrm{R}$ si ha

   $\det(\mathbf{A}_1 \,|\, \ldots \,|\, t\mathbf{A}_k \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_n) = t \det(\mathbf{A}_1 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_k \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_n)$

2. per ogni colonna $\mathbf{A}_k$ e $\mathbf{c} \in \mathrm{R}^n$ si ha

   $\det(\mathbf{A}_1 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_k + \mathbf{c} \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_1 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_k \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_n) + \det(\mathbf{A}_1 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{c} \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{A}_n)$

3. $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$ se scambio due colonne di $\mathbf{A}$ tra loro

4. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

5. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ **se e solo se** tutti i vettori colonna di $\mathbf{A}$ sono <u>linearmente indipendenti</u>

6. $\det(\mathbf{I}) = 1$

7. $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

8. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$

- In base alla 4. le proprietà 1., 2., 3. e 5. possono anche essere enunciate per righe.

Rango di una matrice

- **[Definizione]** $\mathbf{A}(n \times n)$ è detta matrice non singolare se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

- **[Definizione]** Il rango di una matrice $\mathbf{A}(m \times n)$, indicato anche con $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$, è il massimo ordine tra tutte le sottomatrici non singolari di $\mathbf{A}$.

- **[Osservazioni]**
  - Dalla definizione segue che $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.
  - Se $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \min(m, n)$ la matrice $\mathbf{A}$ si dice di rango pieno.
  - Una matrice quadrata è di rango pieno se e solo se è non singolare.

Esercizi

1. Verificare le proprietà 1-8 dei determinanti con i seguenti dati

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad t = 4$$

2. Dimostrare la proprietà 8 dei determinanti.
3. Sia $\mathbf{A}'$ la matrice ottenuta da $\mathbf{A}(n \times n)$ sommando ad una riga $\mathbf{a}_j^T$ una combinazione lineare delle righe di $\mathbf{A}$.
   Dimostrare che $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}')$

Trasformazioni lineari e matrici

- **[Definizione]** Siano V e W due spazi lineari. Una trasformazione $T\colon V \to W$ è lineare se conserva l'addizione e la moltiplicazione per scalari

$$T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y}) \qquad a, b \in \mathrm{R}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \qquad T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y}) \in W$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\mathbf{x}_i) \qquad a_i \in \mathrm{R}, \quad \mathbf{x}_i \in V, \qquad T(\mathbf{x}_i) \in W$$

- **[Proposizione]** Ogni trasformazione lineare $T\colon V \to W$ con $V \subseteq \mathrm{R}^n$ e $W \subseteq \mathrm{R}^m$ è rappresentabile da una matrice A con m righe e n colonne detta matrice associata a T

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trasformazioni lineari e matrici

- Infatti se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di V, allora $\mathbf{x} \in V$ può essere scritto come

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ è una base di W e $a_{1i}, \ldots, a_{mi}$ la rappresentazione di $T(\mathbf{e}_i) \in W$, si può scrivere

$$T(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{w}_j$$

$$T(\mathbf{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{w}_j x_i$$

Una matrice **A** che ha n colonne, una per ogni m-pla $(a_{1i}, \ldots, a_{mi})$ che definisce $T(\mathbf{e}_i)$, è una matrice che descrive la trasformazione lineare

Trasformazioni lineari e matrici

- Quindi, se T è una trasformazione lineare da R^n in R^m si ha

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \qquad \text{con } \mathbf{x} \in R^n \text{ e } \mathbf{y} \in R^m$$

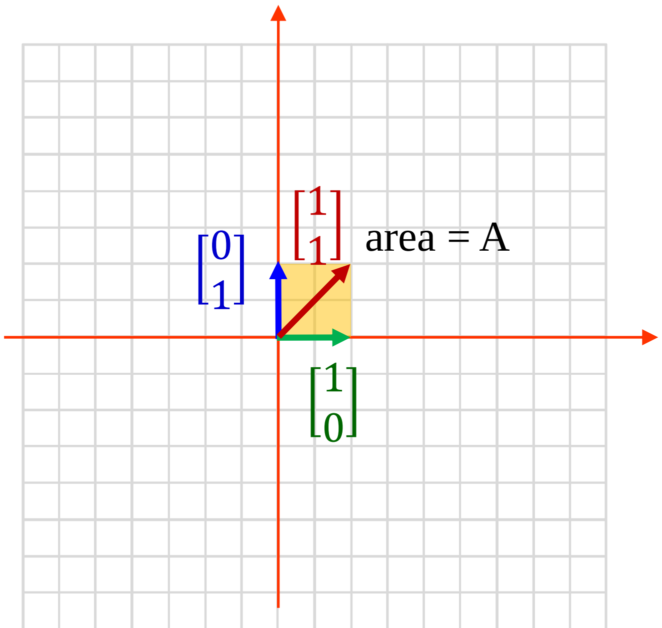
o equivalentemente

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{con } \mathbf{A}\ (m \times n)$$

- In particolare, se T è una trasformazione lineare da R^n in R si ha

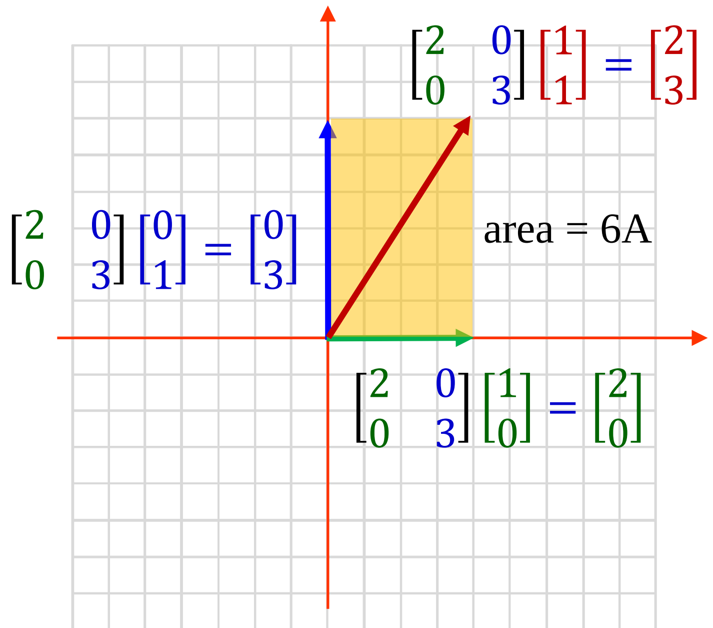
$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = y \qquad \text{con } \mathbf{c} \in R^n$$

Trasformazioni lineari e determinanti: esempi



Trasformazione lineare

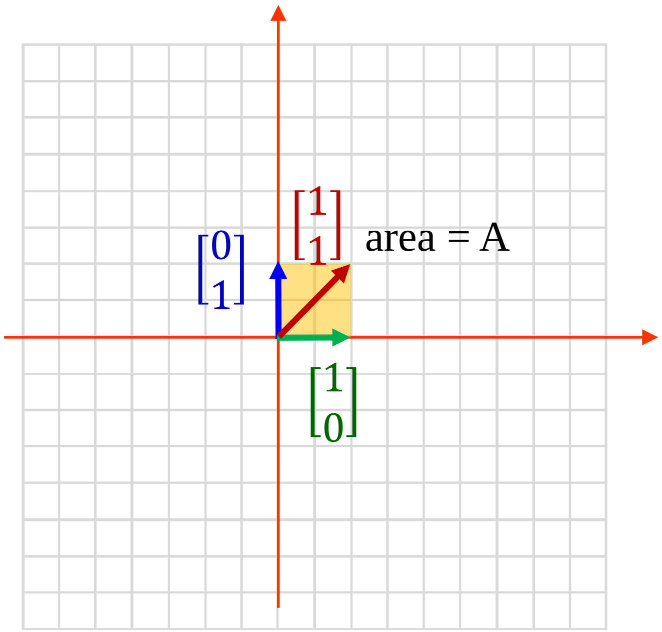
$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$$



Una trasformazione lineare in generale modifica le aree. Il fattore di scala della trasformazione è il determinante della trasformazione

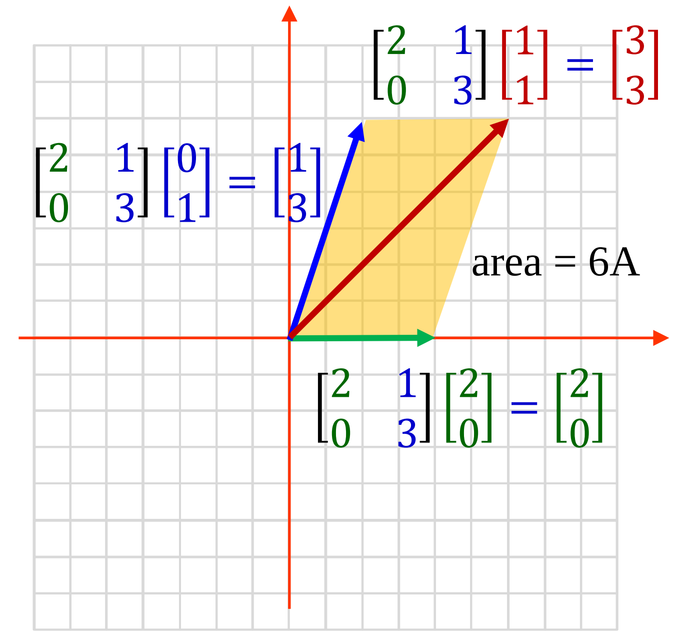
$$det\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\right) = 6$$

Trasformazioni lineari e determinanti: esempi



Trasformazione lineare

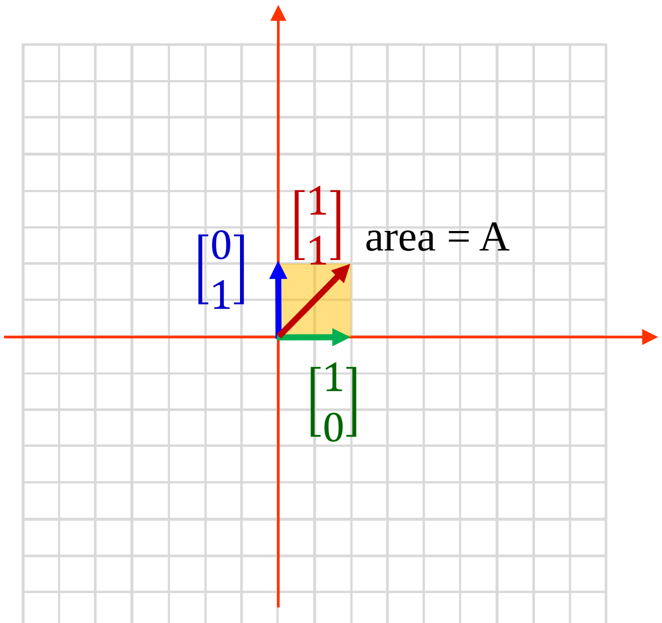
$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$$



Una trasformazione lineare in generale modifica le aree. Il fattore di scala della trasformazione è il determinante della trasformazione

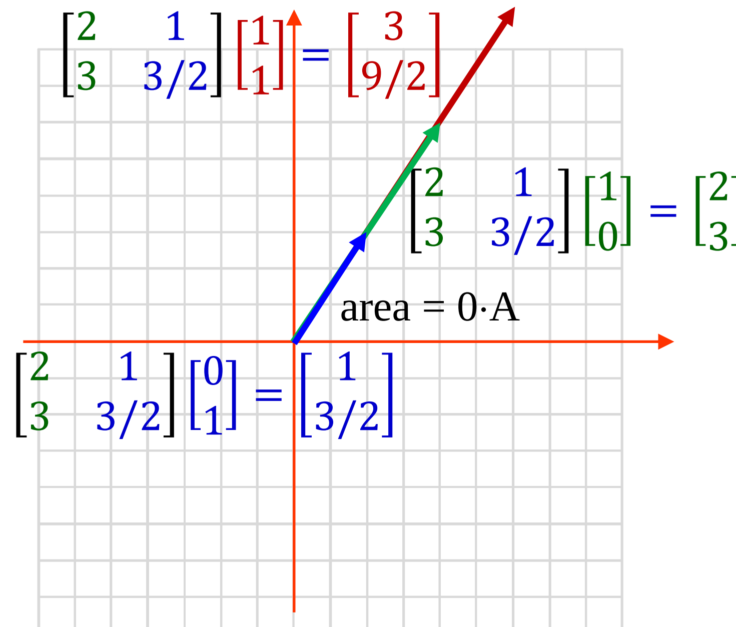
$$det\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\right) = 6$$

Trasformazioni lineari e determinanti: esempi



Trasformazione lineare

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 3/2\end{bmatrix}$$



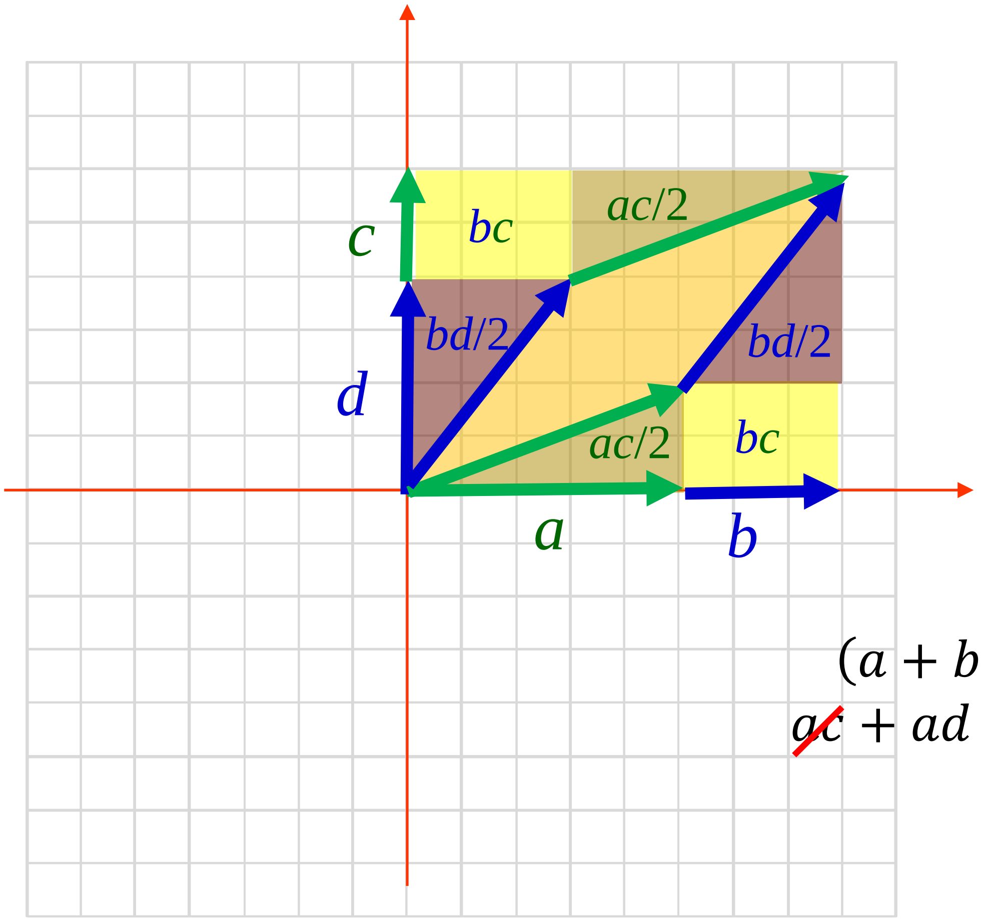
$$det\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 3/2\end{bmatrix}\right)=0$$

Se il determinante è 0, perdo una o più dimensioni e l'area collassa in un segmento o in punto e di conseguenza si annulla.

[**domanda**] Qual è il significato geometrico di un determinante negativo?

determinante: interpretazione geometrica

$$det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - cb$$



$$(a+b)(c+d) - 2bc - ac - bd =$$
$$\cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} - 2bc - \cancel{ac} - \cancel{bd} =$$
$$ad - bc$$