

# budget\_optimization

October 8, 2020

```
[1]: %reload_ext ampl
```

## 1 1. budget optimization

Un budget di  $b$  Euro è disponibile per realizzare  $n$  progetti. Ogni progetto è descritto da un costo di  $c_i$  Euro e un profitto atteso di  $p_i$  Euro. Quali progetti devono essere selezionati per massimizzare il profitto atteso nei limiti del budget disponibile?

Partiamo con questa piccola istanza: budget di  $b = 63$  Euro e progetti potenziali riportati in tabella

progetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
profitto	1	2	3	7	10	15	16	17	19	21	22	23	25	27	28
costo	2	4	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	22	23

giochiamoci un po'...

```
[2]: import os
os.startfile("zaino.xlsx")
```

Qual è la soluzione migliore?

### 1.1 2. Metodi di soluzione

Proviamo ad utilizzare algoritmi e modelli:

- strategia 1: scegli prima il progetto più economico (euristico?);
- strategia 2: scegli prima il progetto più vantaggioso, cioè con il profitto atteso più alto (euristico?);
- strategia 3: scegli prima il progetto con il *profitto specifico* più alto (euristico?);
- enumerazione completa (esatto)
- programmazione matematica

```
[2]: %%ampl
reset;

#instance =====
set projects ordered;
param profits{projects} >= 0;
```

```

param costs{projects} >= 0;
param budget;
#=====

param curr_b;           #working variable
param i_iter;           #working variable
param ratios{projects}; #working variable
set b_argmax ordered;

var x{projects}, binary; #project selection

data;

param budget := 63;
param: projects: profits costs:=
1 1 2
2 2 4
3 3 6
4 7 7
5 10 9
6 15 10
7 16 12
8 17 13
9 19 14
10 21 16
11 22 17
12 23 19
13 25 20
14 27 22
15 28 23;

display profits, costs;

```

```

: profits costs :=
1      1      2
2      2      4
3      3      6
4      7      7
5     10      9
6     15     10
7     16     12
8     17     13
9     19     14
10    21     16
11    22     17
12    23     19

```

```

13    25    20
14    27    22
15    28    23
;

```

### 1.1.1 strategia 1: scegli prima il progetto più economico

(osservazione: i progetti sono ordinati per valori crescenti sia di profitto sia di costo)

```

[3]: %%ampl
include AMPL_cheapest_project_first.run;

```

selected projects:

```

[1] p = 1 c = 2
[2] p = 2 c = 4
[3] p = 3 c = 6
[4] p = 7 c = 7
[5] p = 10 c = 9
[6] p = 15 c = 10
[7] p = 16 c = 12
[8] p = 17 c = 13

```

tot: p = 71 c = 63

### 1.1.2 strategia 2: scegli prima il progetto più remunerativo

```

[4]: %%ampl
include AMPL_most_profitable_project_first.run;

```

selected projects:

```

[15] p = 28 c = 23
[14] p = 27 c = 22

```

tot: p = 55 c = 45

### 1.1.3 strategia 3: scegli prima il progetto con il profitto specifico più alto

seleziona i progetti in ordine non crescente del rapporto  $p_i/c_i$ .

```

[5]: %%ampl
include AMPL_Dantzig.run;

```

ratios [\*] :=

```

1  0.5
2  0.5
3  0.5

```

```

4  1
5  1.11111
6  1.5
7  1.33333
8  1.30769
9  1.35714
10 1.3125
11 1.29412
12 1.21053
13 1.25
14 1.22727
15 1.21739
;

```

selected projects:

```

[6] p = 15 c = 10
[9] p = 19 c = 14
[7] p = 16 c = 12
[10] p = 21 c = 16
[5] p = 10 c = 9
[1] p = 1 c = 2

```

```
tot: p = 82 c = 63
```

#### 1.1.4 algoritmo di enumerazione completa (esatto)

```

[18]: import os
      os.startfile("knap_15.exe")

```

#### 1.1.5 Programmazione Matematica

$$\begin{aligned}
 z = \max \quad & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\
 \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \leq b \\
 \quad & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

```

[6]: %%ampl

maximize profit_tot: sum {i in projects} profits[i] * x[i];
subject to knap: sum {i in projects} costs[i]*x[i] <= budget;

option solver cplex;
solve;
display x;

```

```

CPLEX 12.10.0.0: optimal integer solution; objective 83
6 MIP simplex iterations

```

0 branch-and-bound nodes

x [\*] :=

```
1 0
2 0
3 0
4 0
5 1
6 1
7 0
8 1
9 1
10 0
11 1
12 0
13 0
14 0
15 0
;
```

Risultati:

- strategia 1: scegli prima il progetto più economico: soluzione 71, sì è euristico
- strategia 2: scegli prima il progetto più profittevole: soluzione 55, sì è decisamente euristico
- strategia 3: scegli prima il progetto con il profitto specifico più alto: soluzione 82, euristico, ma abbastanza buono
- algoritmo di enumerazione completa (esatto): soluzione ottima 83
- programmazione matematica: soluzione ottima 83

## 1.2 3. Efficacia e efficienza

### 1.2.1 3.1. Efficacia, ossia qualità delle soluzioni

La Strategia 1 è sempre migliore della strategia 2?

```
[10]: %%ampl
include AMPL_efficacy_heuristics.run;
```

```
option randseed 1601914073;
```

Cheapest	Most_profit	Dantzig	Opt
2889 ( 64.52%)	2558 ( 57.12%)	4478 (100.00%)	4478
2518 ( 69.77%)	2127 ( 58.94%)	3602 ( 99.81%)	3609
2520 ( 61.63%)	2869 ( 70.16%)	4089 (100.00%)	4089
2911 ( 66.90%)	2323 ( 53.39%)	4343 ( 99.82%)	4351
2562 ( 61.44%)	2425 ( 58.15%)	4170 (100.00%)	4170
2645 ( 63.23%)	2352 ( 56.23%)	4183 (100.00%)	4183
2487 ( 63.41%)	2433 ( 62.03%)	3922 (100.00%)	3922

2834 ( 62.46%)	2689 ( 59.27%)	4536 ( 99.98%)	4537
2521 ( 65.40%)	2403 ( 62.33%)	3845 ( 99.74%)	3855
2592 ( 63.84%)	2310 ( 56.90%)	4059 ( 99.98%)	4060
3169 ( 73.87%)	2408 ( 56.13%)	4290 (100.00%)	4290
2085 ( 54.03%)	2582 ( 66.91%)	3859 (100.00%)	3859
2126 ( 51.51%)	2958 ( 71.67%)	4114 ( 99.69%)	4127
2730 ( 66.02%)	2542 ( 61.48%)	4134 ( 99.98%)	4135
2239 ( 55.26%)	2550 ( 62.93%)	4052 (100.00%)	4052
2046 ( 53.66%)	2501 ( 65.59%)	3808 ( 99.87%)	3813
3202 ( 71.57%)	2278 ( 50.92%)	4461 ( 99.71%)	4474
2596 ( 64.24%)	2426 ( 60.03%)	4039 ( 99.95%)	4041
2257 ( 60.44%)	2365 ( 63.34%)	3728 ( 99.84%)	3734
2562 ( 67.74%)	2315 ( 61.21%)	3779 ( 99.92%)	3782
2285 ( 56.35%)	2614 ( 64.46%)	4055 (100.00%)	4055
2863 ( 67.64%)	2442 ( 57.69%)	4212 ( 99.50%)	4233
2304 ( 55.69%)	2615 ( 63.21%)	4135 ( 99.95%)	4137
2532 ( 61.86%)	2504 ( 61.18%)	4085 ( 99.80%)	4093
2806 ( 72.96%)	1799 ( 46.78%)	3840 ( 99.84%)	3846
2287 ( 55.48%)	2584 ( 62.69%)	4122 (100.00%)	4122
2489 ( 57.94%)	2726 ( 63.45%)	4290 ( 99.86%)	4296
2637 ( 66.74%)	2278 ( 57.66%)	3940 ( 99.72%)	3951
2469 ( 64.01%)	2315 ( 60.02%)	3857 (100.00%)	3857
2603 ( 59.69%)	2765 ( 63.40%)	4354 ( 99.84%)	4361
2734 ( 59.22%)	3040 ( 65.84%)	4617 (100.00%)	4617
2953 ( 69.19%)	2238 ( 52.44%)	4265 ( 99.93%)	4268
2356 ( 55.09%)	2902 ( 67.85%)	4277 (100.00%)	4277
2273 ( 53.67%)	2796 ( 66.02%)	4235 (100.00%)	4235
2540 ( 61.95%)	2732 ( 66.63%)	4082 ( 99.56%)	4100
2634 ( 65.83%)	2319 ( 57.96%)	3994 ( 99.83%)	4001
2431 ( 57.69%)	2628 ( 62.36%)	4207 ( 99.83%)	4214
2529 ( 67.24%)	2097 ( 55.76%)	3748 ( 99.65%)	3761
2318 ( 53.09%)	3034 ( 69.49%)	4362 ( 99.91%)	4366
2633 ( 62.11%)	2751 ( 64.90%)	4239 (100.00%)	4239
2483 ( 60.59%)	2366 ( 57.74%)	4091 ( 99.83%)	4098
2475 ( 62.95%)	2317 ( 58.93%)	3920 ( 99.69%)	3932
2486 ( 58.80%)	2842 ( 67.22%)	4224 ( 99.91%)	4228
2590 ( 65.35%)	2188 ( 55.21%)	3961 ( 99.95%)	3963
2746 ( 63.95%)	2483 ( 57.82%)	4289 ( 99.88%)	4294
2552 ( 60.12%)	2692 ( 63.42%)	4240 ( 99.88%)	4245
2550 ( 59.85%)	2967 ( 69.63%)	4250 ( 99.74%)	4261
2828 ( 70.38%)	2187 ( 54.43%)	4006 ( 99.70%)	4018
2657 ( 67.11%)	2395 ( 60.50%)	3952 ( 99.82%)	3959
2587 ( 66.13%)	2264 ( 57.87%)	3912 (100.00%)	3912

La strategia 3 sembra essere sempre quasi-ottima. E' vero in generale?

```

[12]: %%ampl
reset;

#instance =====
set projects ordered;
param profits{projects} >= 0;
param costs{projects} >= 0;
param budget;
#=====

param curr_b;                #working variable
param i_iter;                #working variable
param ratios{projects};     #working variable
param z_dantzig;
set b_argmax ordered;

var x{projects}, binary;     #project selection

/*
data;
param budget := 100;
param: projects: profits costs:=
1 9 10
2 80 100
3 8 9
4 7 8
5 6 7
;
*/

# things can getting worse!!

data;
param budget := 100;
param: projects: profits costs:=
1 0.1 0.2
2 99.9 100
3 0.1 0.3
4 0.1 0.4
5 0.1 0.5
6 0.1 0.1
7 0.1 0.2
8 0.1 0.3
9 0.1 0.4
10 0.1 0.3

```

```

;

include AMPL_dantzig.run;
let z_dantzig := sum{i in projects}profits[i]*x[i];

maximize profit_tot: sum {i in projects} profits[i] * x[i];
subject to knap: sum {i in projects} costs[i]*x[i] <= budget;

option solver cplex;
solve > log.txt;

printf "\n\n\n      Dantzig      opt";
printf "\n-----";
printf "\n%6f (%6.2f%%) %6ld", z_dantzig, 100 - 100*(profit_tot - z_dantzig)/
  ↪profit_tot,profit_tot;

```

```
ratios [*] :=
```

```

1  0.5
2  0.999
3  0.333333
4  0.25
5  0.2
6  1
7  0.5
8  0.333333
9  0.25
10 0.333333
;

```

```
selected projects:
```

```

[6] p = 0 c = 0
[1] p = 0 c = 0
[7] p = 0 c = 0
[3] p = 0 c = 0
[8] p = 0 c = 0
[10] p = 0 c = 0
[4] p = 0 c = 0
[9] p = 0 c = 0
[5] p = 0 c = 0

```

```
tot: p = 0 c = 2
```



Dantzig	opt
0.900000 ( 0.90%)	99

### 1.2.2 3.2. Efficienza

Le strategie 1,2 e 3 sono molto veloci ma sono solo euristiche.

Qual è l'efficienza degli approcci esatti?

Proviamo con questa (piccola) istanza con 50 progetti.

```
[13]: %%ampl
reset;

#instance =====
set projects ordered;
param profits{projects} >= 0;
param costs{projects} >= 0;
param budget;
#=====

param curr_b;           #working variable
param i_iter;           #working variable
param ratios{projects}; #working variable
set b_argmax ordered;

var x{projects}, binary; #project selection

data;

param budget := 153;
param: projects: profits costs:=
1 1 2
2 2 4
3 3 6
4 7 7
5 10 9
6 15 10
7 16 12
8 17 13
9 19 14
10 21 16
11 22 17
12 23 19
13 25 20
14 27 22
15 28 23
```

```

16 30 24
17 31 25
18 33 28
19 34 29
20 36 30
21 38 32
22 39 33
23 41 35
24 42 36
25 43 37
26 45 38
27 47 39
28 48 40
29 49 41
30 50 42
31 51 43
32 52 44
33 53 46
34 54 47
35 55 48
36 56 49
37 58 50
38 59 51
39 60 53
40 62 54
41 63 55
42 64 57
43 66 58
44 67 59
45 68 60
46 69 62
47 70 63
48 72 64
49 73 65
50 75 67;

```

```

display costs;
display profits;

```

```

costs [*] :=
  1  2    6 10   11 17   16 24   21 32   26 38   31 43   36 49   41 55   46 62
  2  4    7 12   12 19   17 25   22 33   27 39   32 44   37 50   42 57   47 63
  3  6    8 13   13 20   18 28   23 35   28 40   33 46   38 51   43 58   48 64
  4  7    9 14   14 22   19 29   24 36   29 41   34 47   39 53   44 59   49 65
  5  9   10 16   15 23   20 30   25 37   30 42   35 48   40 54   45 60   50 67
;

```

```

profits [*] :=
  1  1    6 15   11 22   16 30   21 38   26 45   31 51   36 56   41 63   46 69
  2  2    7 16   12 23   17 31   22 39   27 47   32 52   37 58   42 64   47 70
  3  3    8 17   13 25   18 33   23 41   28 48   33 53   38 59   43 66   48 72
  4  7    9 19   14 27   19 34   24 42   29 49   34 54   39 60   44 67   49 73
  5 10   10 21   15 28   20 36   25 43   30 50   35 55   40 62   45 68   50 75
;

```

```

[14]: %%ampl
      option solver_msg 1;

      maximize profit_tot: sum {i in projects} profits[i] * x[i];
      subject to knap: sum {i in projects} costs[i]*x[i] <= budget;

      option solver cplex;
      solve;
      display x;

```

CPLEX 12.10.0.0: optimal integer solution; objective 198

2 MIP simplex iterations

0 branch-and-bound nodes

```

x [*] :=
  1  0    6  1   11  1   16  1   21  0   26  0   31  0   36  0   41  0   46  0
  2  0    7  1   12  0   17  1   22  0   27  0   32  0   37  0   42  0   47  0
  3  0    8  1   13  0   18  0   23  0   28  0   33  0   38  0   43  0   48  0
  4  0    9  1   14  1   19  0   24  0   29  0   34  0   39  0   44  0   49  0
  5  0   10  1   15  0   20  0   25  0   30  0   35  0   40  0   45  0   50  0
;

```

```

[15]: import os
      os.startfile("knap_50.exe")

```

```

[16]: 1000000/60

```

```

[16]: 16666.666666666668

```

```

[17]: 16666/24

```

```

[17]: 694.4166666666666

```

```

[ ]:

```