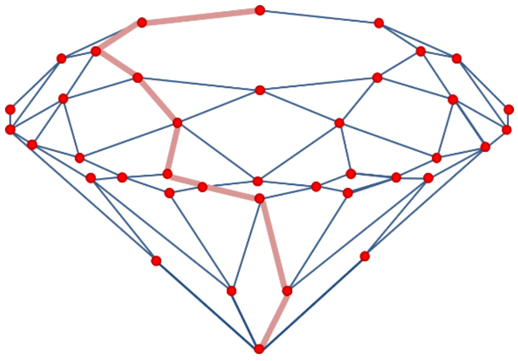
Università Politecnica delle Marche

Programmazione Lineare

ver 3.0.0



Fabrizio Marinelli

fabrizio.marinelli@staff.univpm.it

tel. 071 - 2204823

Programmazione Lineare
(introduzione)

(Vercellis cap. 3.1)

La Programmazione Lineare (PL)

Un modello di Programmazione Matematica

$$\max z = f(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \in X$$

Un modello di Programmazione Lineare

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + , \ldots, + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

funzione obiettivo **lineare**

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \quad j = 1, \ldots, m \right\}$$

insieme **finito** di (dis)equazioni **lineari**

Notazione e definizioni di base

$$\max z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

- $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ *funzione obiettivo*
- $X = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ *regione ammissibile*

Incognite del problema

- $\mathbf{x} \in R^n$ vettore delle *variabili decisionali*. Ogni $\mathbf{x} \in X$ è una soluzione ammissibile (cioè un vettore che soddisfa tutti i vincoli) mentre ogni $\mathbf{y} \notin X$ è una soluzione inammissibile.
- $z \in R$ *valore* che assume la funzione obiettivo in corrispondenza di una soluzione $\mathbf{x} \in X$

Parametri del problema

- $\mathbf{c} \in R^n$ vettore dei coefficienti (di *costo* o di *profitto*) della f.o.
- $\mathbf{b} \in R^m$ vettore dei *termini noti* dei vincoli
- $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ matrice dei coefficienti dei vincoli (matrice *tecnologica*)

Ipotesi della Programmazione Lineare

- Un problema è rappresentato correttamente da un modello di programmazione lineare se
  - **Divisibilità:** variabili con valori frazionari
  - **Certezza:** coefficienti costanti e noti a priori
  - **Linearità:** relazioni esclusivamente di tipo lineare:

$$c_1 x_1 +, \dots, + c_n x_n$$

- **Proporzionalità**: contributo proporzionale al valore assunto: non ci sono economie di scala
- **Additività**: i contributi possono essere solo sommati

"In un'approssimazione del primo ordine il mondo è lineare"
Robert Simons

Programmazione lineare (PL): esempio

Un esempio di problema di programmazione lineare con 2 variabili e 4 vincoli:

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{C1:} & 6x_1 + 10x_2 & \leq & 30 \\
\text{C2:} & 3x_1 + 2x_2 & \geq & 6 \\
\text{C3:} & x_1 - 2x_2 & \geq & -1 \\
\text{C4:} & x_2 & \geq & 1/2
\end{array}
$$

Possiamo rappresentare graficamente il problema…

Esempio: un problema di PL in R^2

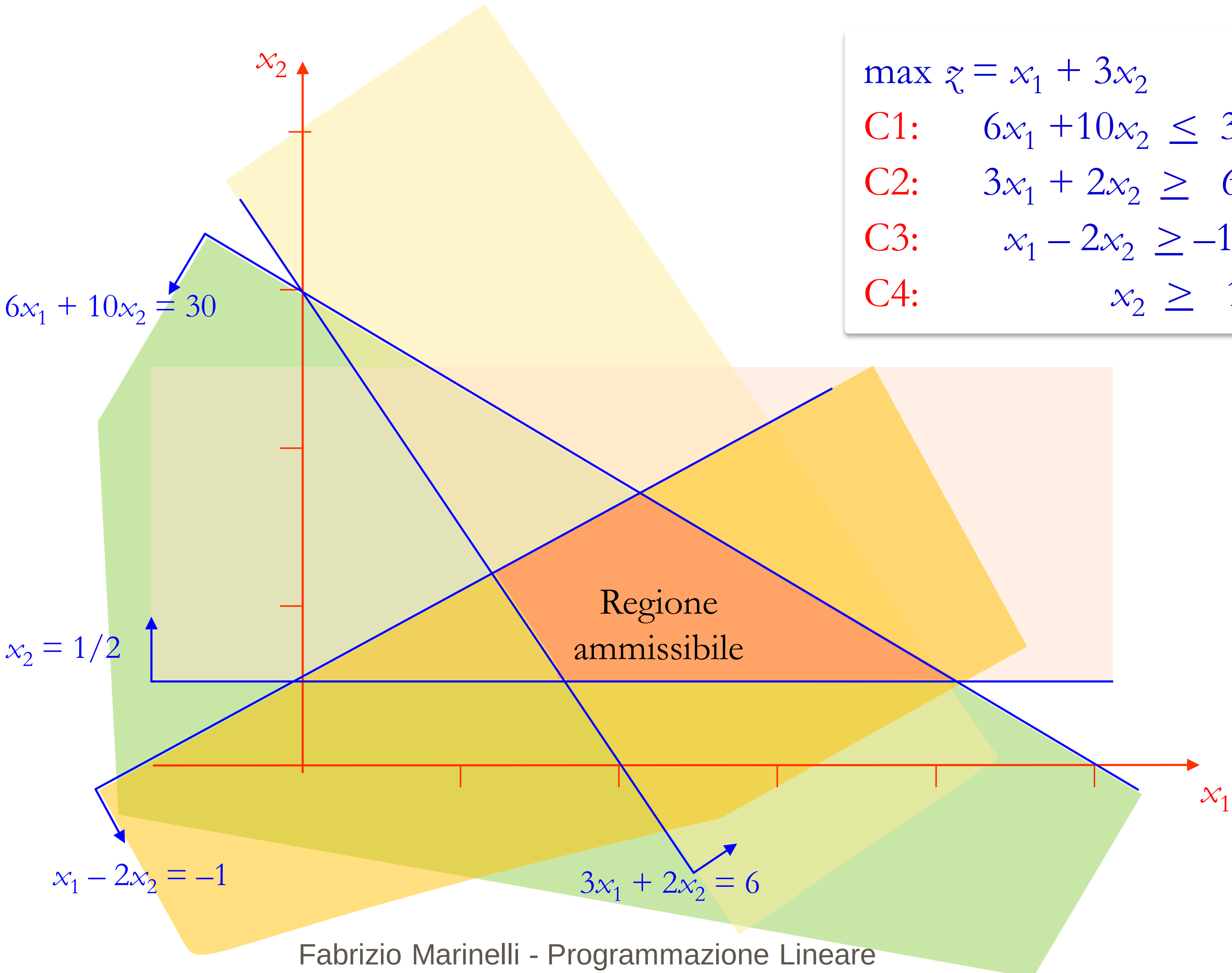
$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $6x_1 + 10x_2 \leq 30$

C2: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

C3: $x_1 - 2x_2 \geq -1$

C4: $x_2 \geq 1/2$



Esempio: un problema di PL in R^2

$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $6x_1 + 10x_2 \leq 30$

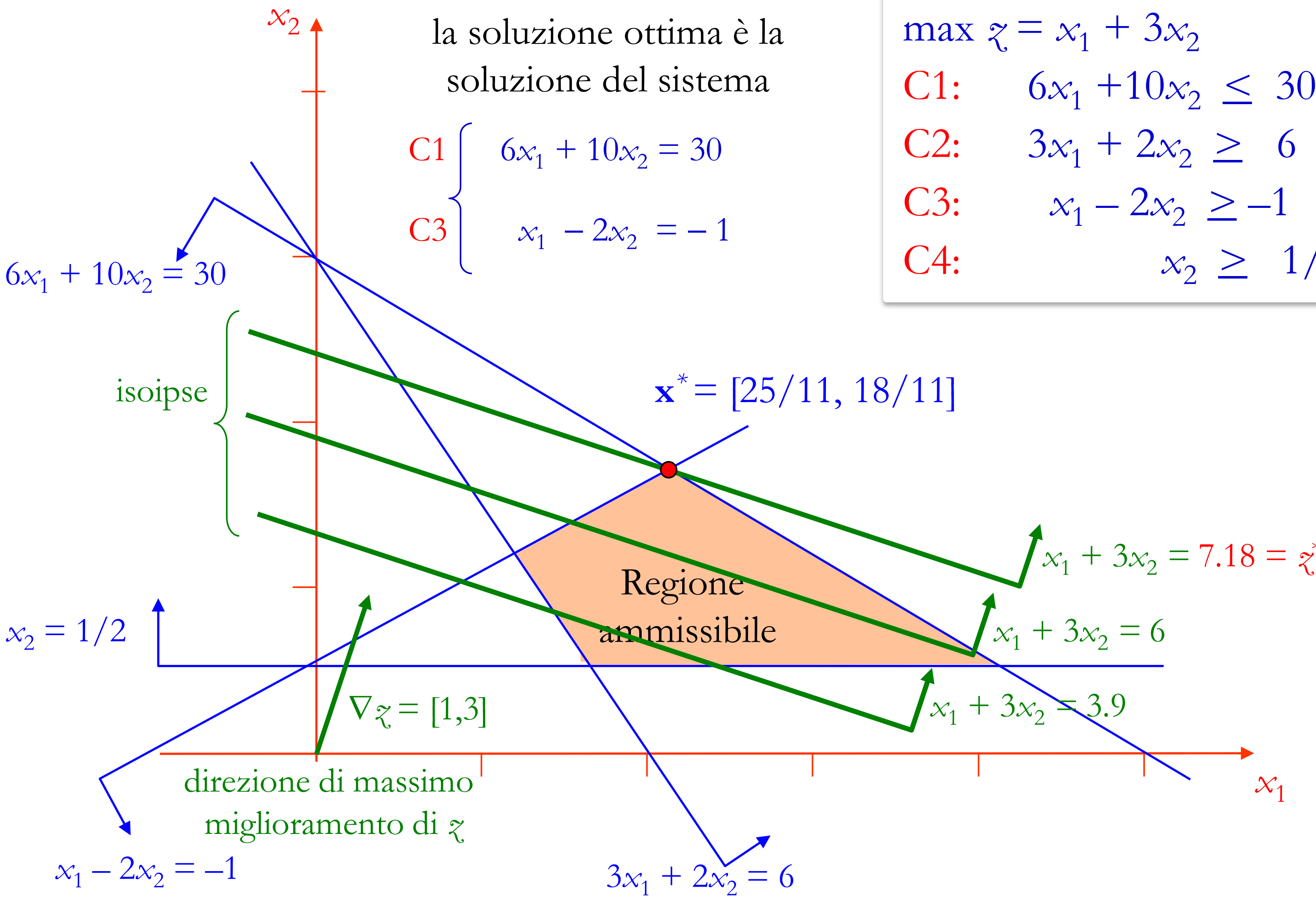
C2: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

C3: $x_1 - 2x_2 \geq -1$

C4: $x_2 \geq 1/2$

la soluzione ottima è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 = 30 & \text{C1} \\ x_1 - 2x_2 = -1 & \text{C3} \end{cases}$$



Esempio: un problema di PL in R^2

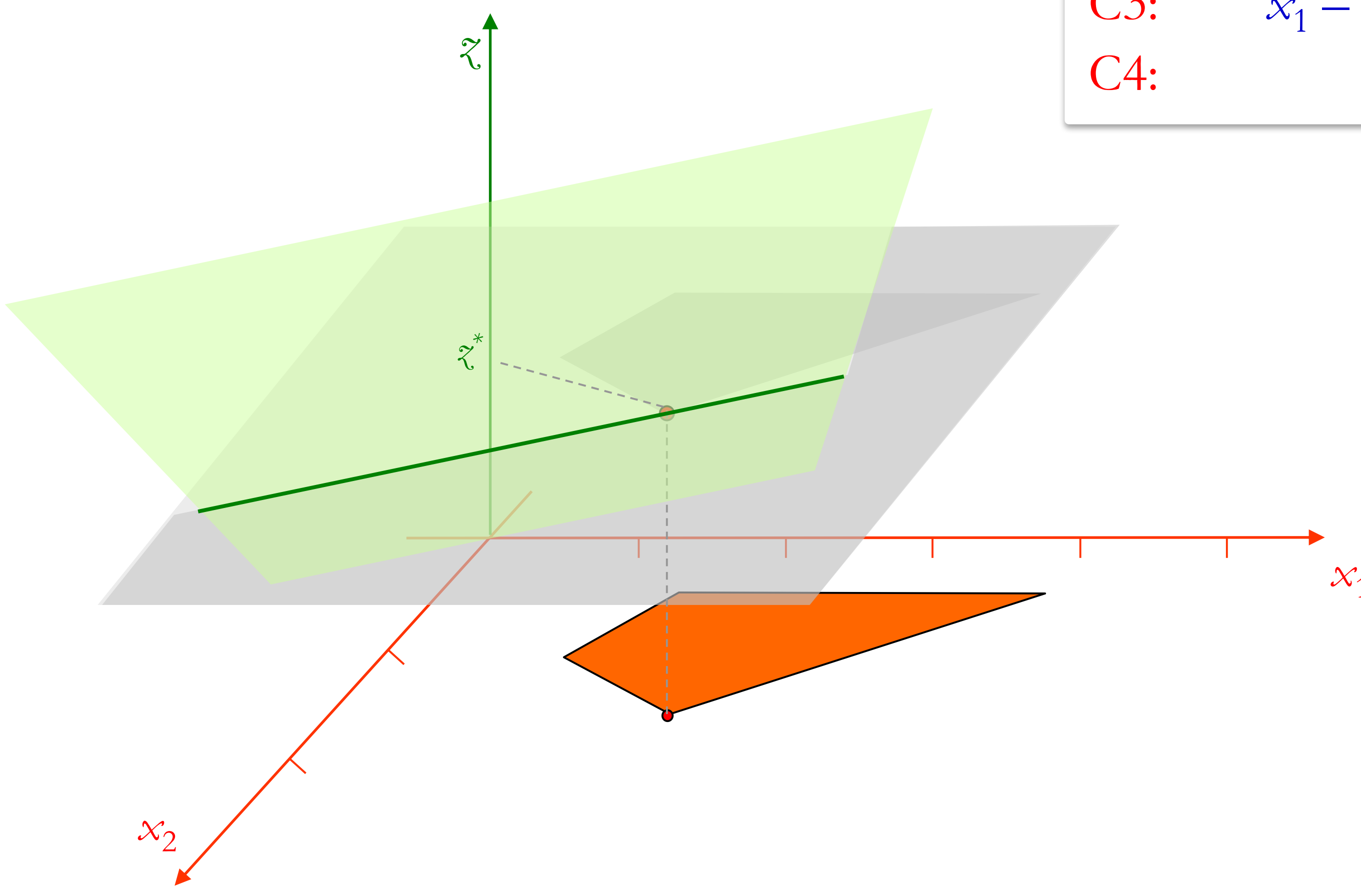
$\max\ z = x_1 + 3x_2$

C1: $6x_1 + 10x_2 \leq 30$

C2: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

C3: $x_1 - 2x_2 \geq -1$

C4: $x_2 \geq 1/2$



Notazione e definizioni di base

- Isoipsa: luogo dei punti nei quali la funzione obiettivo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ assume un prefissato valore z' (in R^2 ogni isoipsa è una retta).
  L'intersezione di una isoipsa $z' = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ con la *regione ammissibile* determina tutte le soluzioni del problema di valore z'.

- Direzione di massimo miglioramento: in un problema di massimo è dato dal gradiente della funzione obiettivo:

$$\boxed{\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad i = 1,\ldots,n}$$

Nel caso di problema di minimo è l'antigradiente

Notazione e definizioni di base

- La soluzione $\mathbf{y}$ rende attivo il vincolo $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$ se $\mathbf{a}^T\mathbf{y} = b$
- La soluzione $\mathbf{y}$ rende inattivo il vincolo $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$ se $\mathbf{a}^T\mathbf{y} < b$

- Il vincolo $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$ è ridondante rispetto al sistema di vincoli $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ se ogni soluzione di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ è anche una soluzione di $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$

Notazione e definizioni di base

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

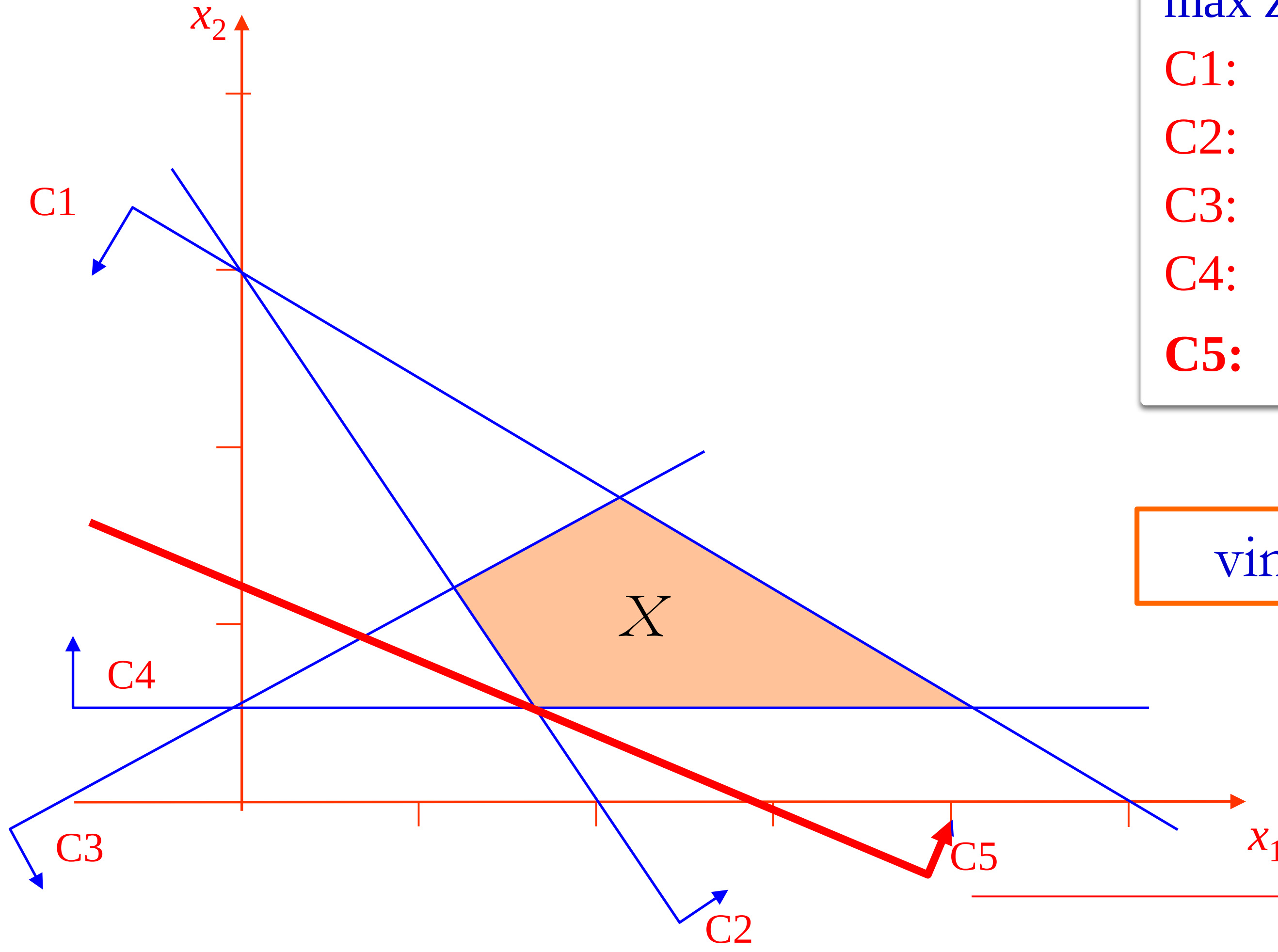
C1: $6x_1 + 10x_2 \leq 30$

C2: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

C3: $x_1 - 2x_2 \geq -1$

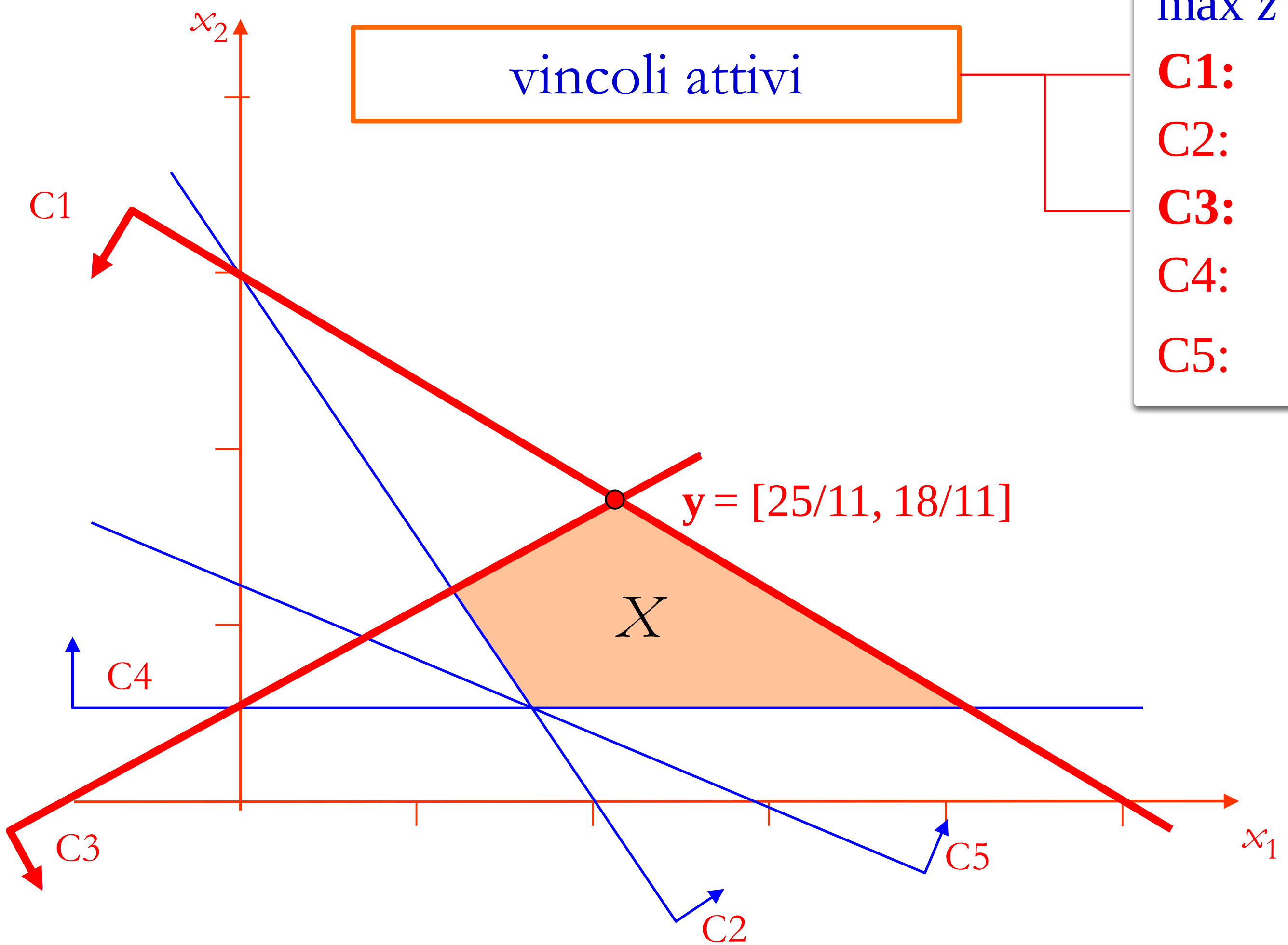
C4: $x_2 \geq ½$

C5: $\mathbf{3x_1 + 8x_2 \geq 9}$



vincolo ridondante

Notazione e definizioni di base



$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $6y_1 + 10y_2 = 30$

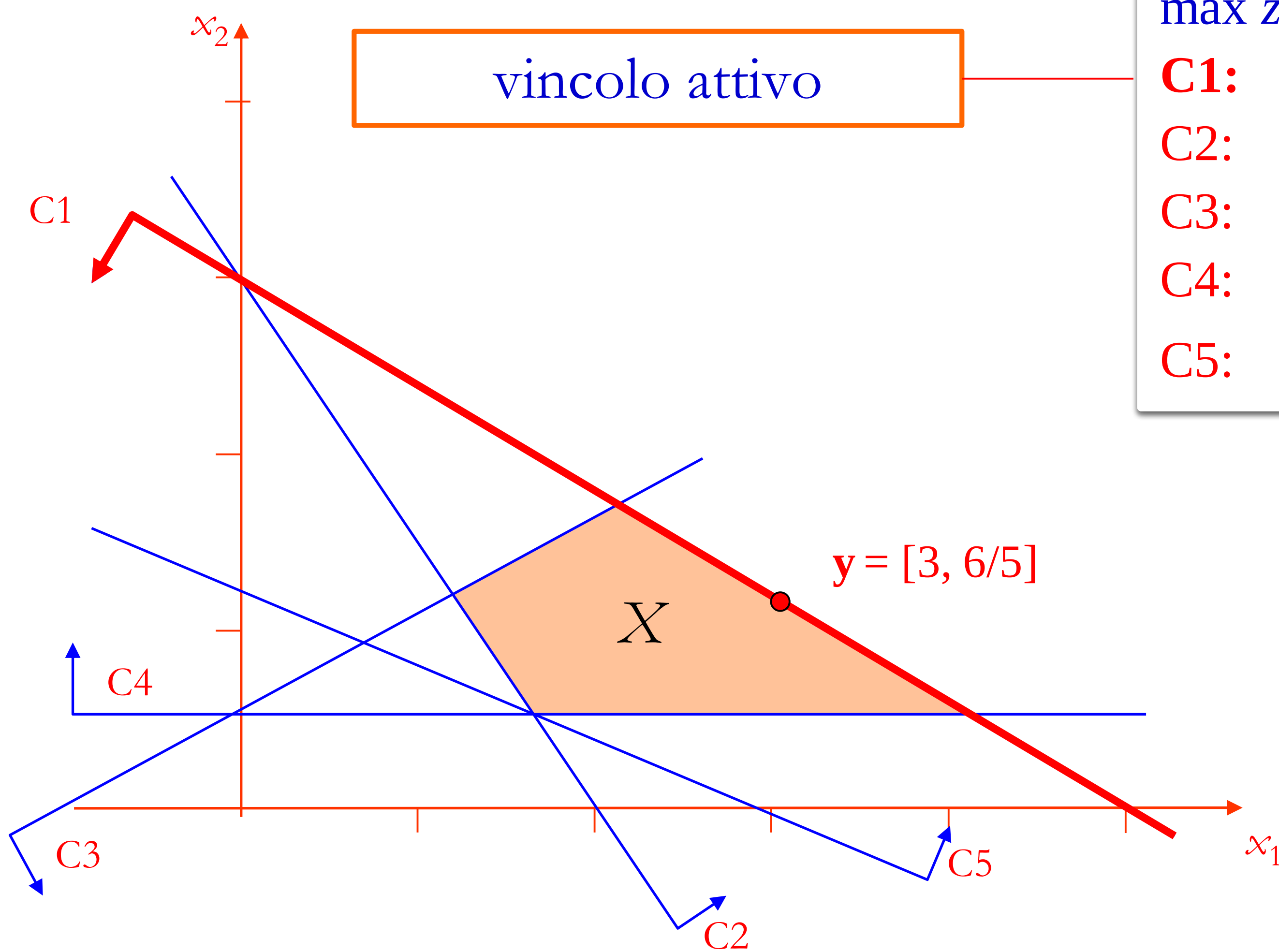
C2: $3y_1 + 2y_2 > 6$

C3: $y_1 - 2y_2 = -1$

C4: $y_2 > ½$

C5: $3y_1 + 8y_2 > 9$

Notazione e definizioni di base



$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $\mathbf{6y_1 + 10y_2 = 30}$

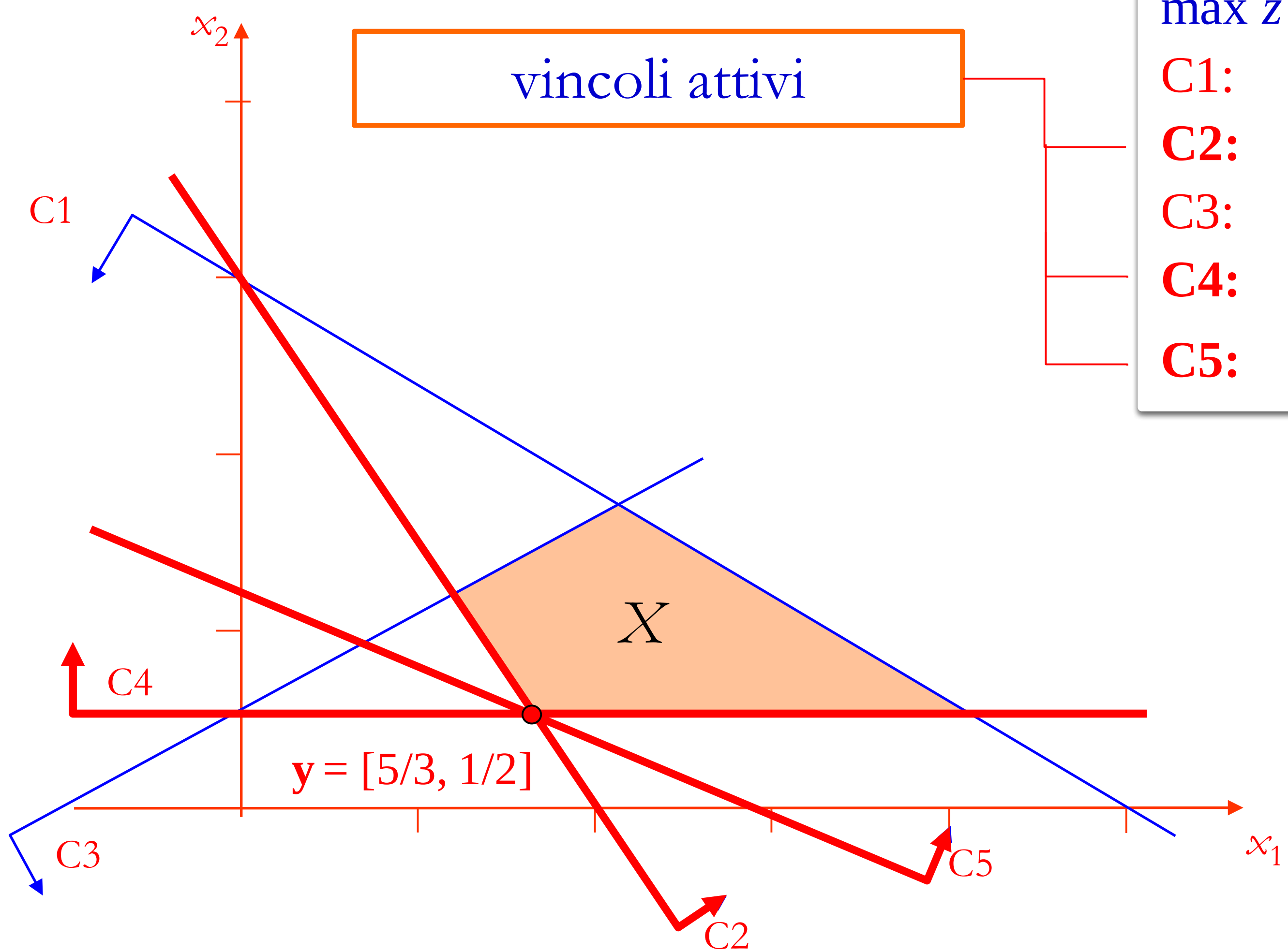
C2: $3y_1 + 2y_2 > 6$

C3: $y_1 - 2y_2 > -1$

C4: $y_2 > ½$

C5: $3y_1 + 8y_2 > 9$

Notazione e definizioni di base



$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $6y_1 + 10y_2 < 30$

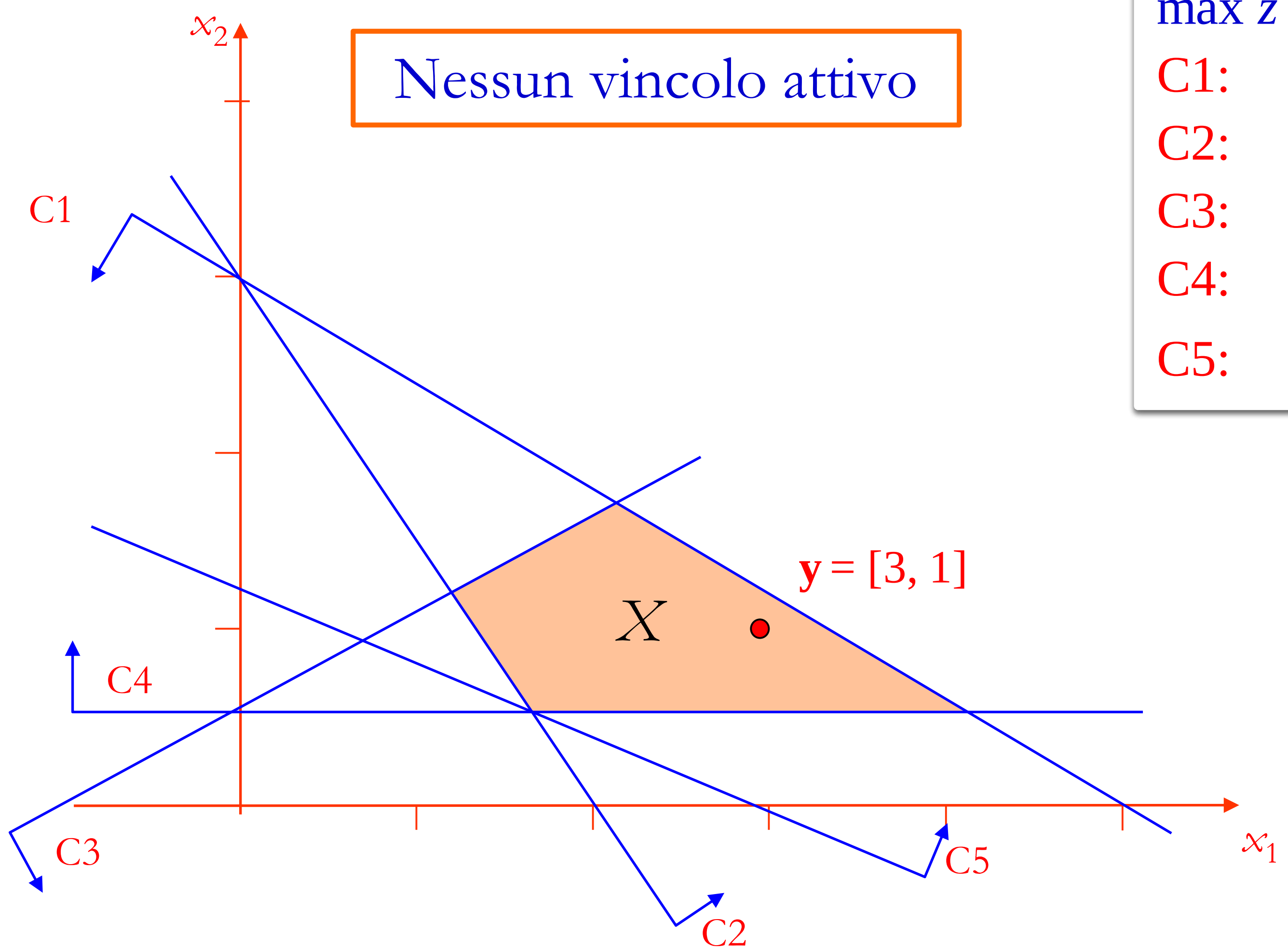
C2: $\mathbf{3y_1 + 2y_2 = 6}$

C3: $y_1 - 2y_2 > -1$

C4: $\mathbf{y_2 = ½}$

C5: $\mathbf{3y_1 + 8y_2 = 9}$

Notazione e definizioni di base



max $z = x_1 + 3x_2$

C1: $6y_1 + 10y_2 < 30$

C2: $3y_1 + 2y_2 > 6$

C3: $y_1 - 2y_2 > -1$

C4: $y_2 > ½$

C5: $3y_1 + 8y_2 > 9$

Esempio: mix produttivo

[Problema] La società *Merlin* produce i concimi *prato starter* (tipo A) e *prato estate* (tipo B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. Considerando la composizione dei singoli concimi e le disponibilità in magazzino (vedi tabella) quanti Kg di tipo A e B deve produrre la società (ipotizzando una domanda illimitata) per massimizzare il ricavo dal magazzino esistente?

	qtà per Kg		
	Azoto	Potassio	Magnesio
tipo A	0.40	0.10	0.10
tipo B	0.24	0.31	0.00
disponibilità	240	160	50

Mix produttivo: modello

Variabili decisionali

$x_A \in R$ = quantità (in Kg) che si decide di produrre del concime di tipo A
$x_B \in R$ = quantità (in Kg) che si decide di produrre del concime di tipo B

Funzione obiettivo

Il ricavo totale (che si vuole massimizzare) è dato da $25x_A + 28x_B$

Vincoli

1. La quantità totale di azoto richiesta non può essere superiore alla disponibilità di azoto in magazzino

$$0.4x_A + 0.24x_B \leq 240$$

Lo stesso tipo di limitazione vale per il potassio e il magnesio

2. Le quantità che si decide di produrre non possono essere negative

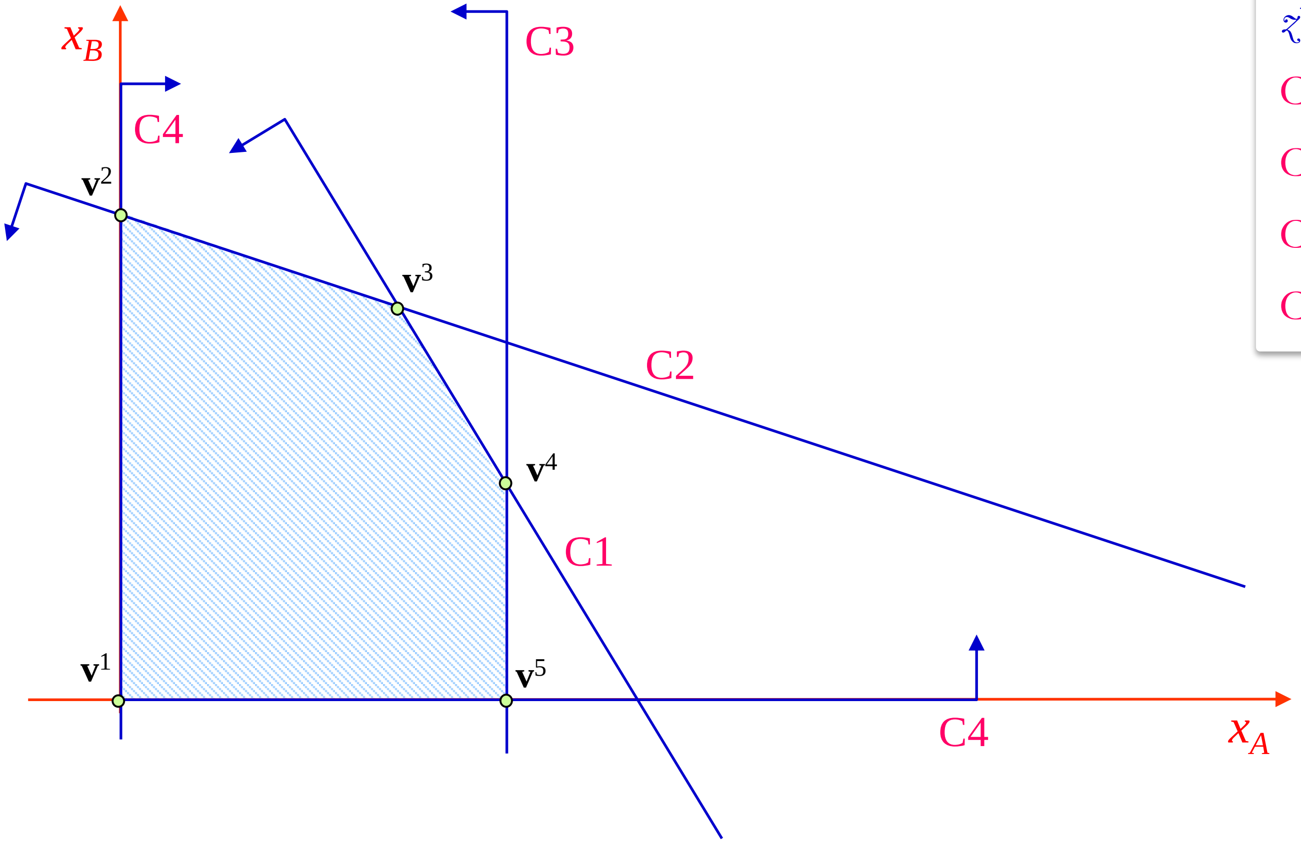
$$x_A , x_B \geq 0$$

Mix produttivo: modello completo

$$z^* = \max 25x_A + 28x_B$$

C1:	$0.4x_A + 0.24x_B \leq 240$	Vincolo sulla disponibilità di azoto
C2:	$0.1x_A + 0.31x_B \leq 160$	Vincolo sulla disponibilità di potassio
C3:	$0.1x_A \leq 50$	Vincolo sulla disponibilità di magnesio
C4:	$x_A , x_B \geq 0$	Vincoli di non negatività

Mix produttivo: soluzione geometrica



$z^* = \max 25x_A + 28x_B$

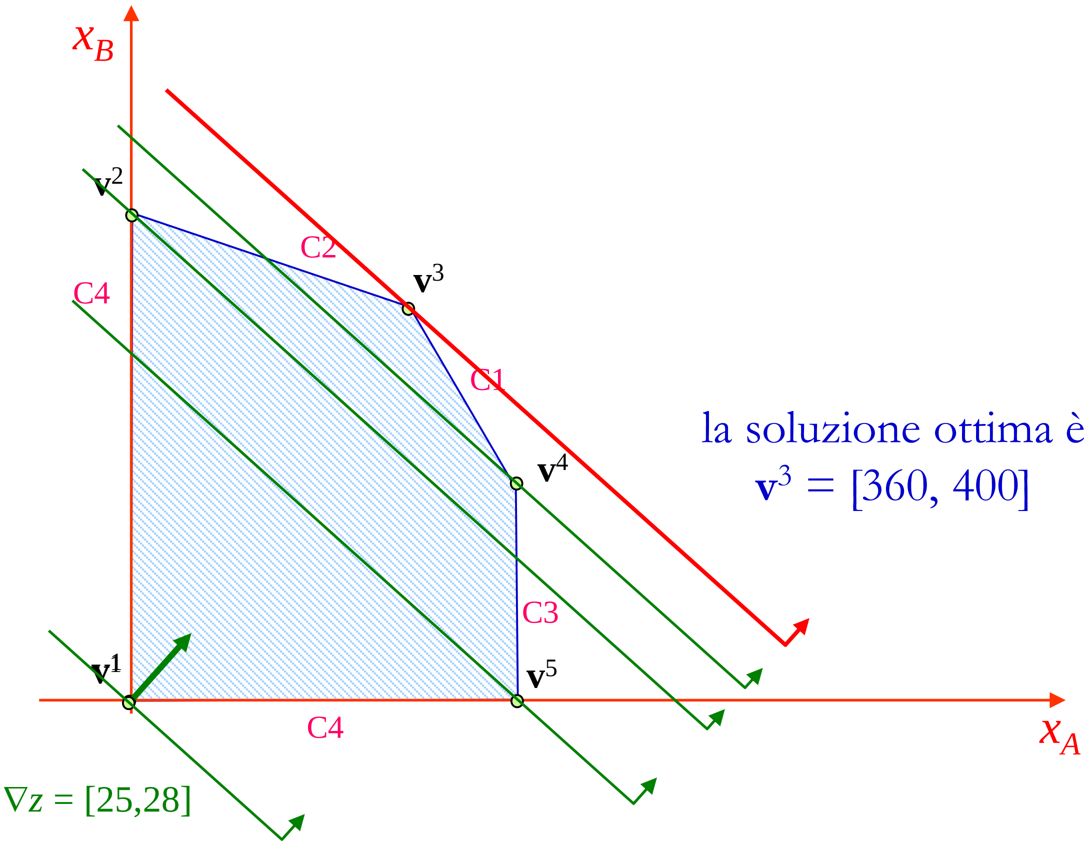
C1: $0.4x_A + 0.24x_B \leq 240$

C2: $0.1x_A + 0.31x_B \leq 160$

C3: $0.1x_A \leq 50$

C4: $x_A , x_B \geq 0$

Mix produttivo: soluzione geometrica



la soluzione ottima è
$\mathbf{v}^3 = [360, 400]$

$z^* = \max 25x_A + 28x_B$

C1: $0.4x_A + 0.24x_B \leq 240$

C2: $0.1x_A + 0.31x_B \leq 160$

C3: $0.1x_A \leq 50$

C4: $x_A, x_B \geq 0$

la soluzione ottima è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 0.4x_A + 0.24x_B = 240 & \text{C1} \\ 0.1x_A + 0.31x_B = 160 & \text{C2} \end{cases}$$

- Si trasla la funzione obiettivo lungo la direzione di crescita fintanto che l'intersezione con la regione ammissibile risulti non vuota. L'ultimo punto "toccato" è la soluzione ottima.

Algoritmo geometrico del simplesso (prob. max)

Step 1: definizione di regione ammissibile e funzione obiettivo

1. disegna la retta associata ad ogni vincolo e individua la regione del piano che soddisfa il vincolo:
   - un vincolo di uguaglianza è soddisfatto solo dai punti della retta;
   - un vincolo di $\geq$ o $\leq$ è soddisfatto da tutti i punti di un semipiano; per capire quale, prova il punto (0,0).
2. Evidenzia la regione ammissibile (l'intersezione di tutti i semipiani che soddisfano i vincoli)
3. Disegna la funzione obiettivo e il suo gradiente

Algoritmo geometrico del simplesso (prob. max)

Step 2: determinazione della soluzione ottima

1. Individua un vertice $\mathbf{x}$ di partenza e calcola il valore z della funzione obiettivo
2. Individua la coppia di vertici $\mathbf{y}$ e $\mathbf{w}$ adiacenti al vertice corrente e calcola i valori y e w della funzione obiettivo

   un vertice si determina risolvendo un sistema lineare di (almeno) 2 equazioni in 2 incognite.

3. Se $z \geq y$ e $z \geq w$ allora $\mathbf{x}$ è una soluzione ottima e z è il valore ottimo. FINE
4. Se $z < y$ il punto $\mathbf{y}$ è il nuovo vertice corrente altrimenti $\mathbf{w}$ è il nuovo vertice corrente
5. Torna al passo 2.

Informazioni fornite dalla soluzione

- Il ricavo massimo è $z^* = 25 \cdot 360 + 28 \cdot 400 = 20200$ € e si ottiene producendo $x_A = 360$ Kg di *prato starter* e $x_B = 400$ Kg di *prato estate*.

- Le disponibilità critiche di magazzino sono l'azoto e il potassio, infatti i vincoli C1 e C2 sono soddisfatti all'uguaglianza dalla soluzione ottima.

- D'altra parte il magnesio è disponibile in quantità sovrabbondante: all'ottimo si ha:
  - $0.1 \cdot 360 = 36 < 50$

  e quindi avanzano 14 Kg di magnesio

Esercizi

Risolvere geometricamente i seguenti problemi di PL:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 6x_1 + 5x_2 \\
&\frac{5}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 \le 10 \\
&\frac{5}{3}x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 15x_2 \\
&x_2 \le 5 \\
&x_1 + x_2 \le 8 \\
&\frac{16}{3}x_1 + 2x_2 \le 32 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min z &= x_1 + 4x_2 \\
&x_1 \ge 2 \\
&x_1 + 4x_2 \ge 8 \\
&x_1 - x_2 \le 4 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min z &= x_1 + x_2 \\
&2x_1 + x_2 \ge 16 \\
&x_1 + \frac{3}{2}x_2 \ge 12 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Domande

- Esiste sempre una soluzione ottima di un problema di PL? E le soluzioni ottime hanno proprietà particolari ?

- Come può essere descritta la regione ammissibile di un problema di PL? E quali proprietà della regione ammissibile possono essere utilizzate per risolvere il problema?

- Esiste una procedura generale per risolvere un problema di PL? Se sì, quanto è onerosa in termini di tempo di calcolo?

- Come cambiano le soluzioni ottime quando cambiano i parametri del problema?

Programmazione lineare con $n > 3$ variabili

Per esempio in un problema di PL con 4 variabili

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 7x_4$$

C1: $5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 7$

C2: $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 12$

C3: $-x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 9$

la funzione obiettivo e i vincoli definiscono oggetti 3-dimensionali in $\mathbb{R}^4$ la cui intersezione… cos'è ?

Esiste sempre una soluzione ottima di un problema di PL? E le soluzioni ottime hanno proprietà particolari ?

Ottimizzazione convessa e Programmazione Lineare

(Vercellis cap. 7.3)

Ottimizzazione convessa

problema di ottimizzazione convessa (in forma di minimo)

$$z = \min \boxed{f(\mathbf{x})}$$
$$\mathbf{x} \in \boxed{X}$$

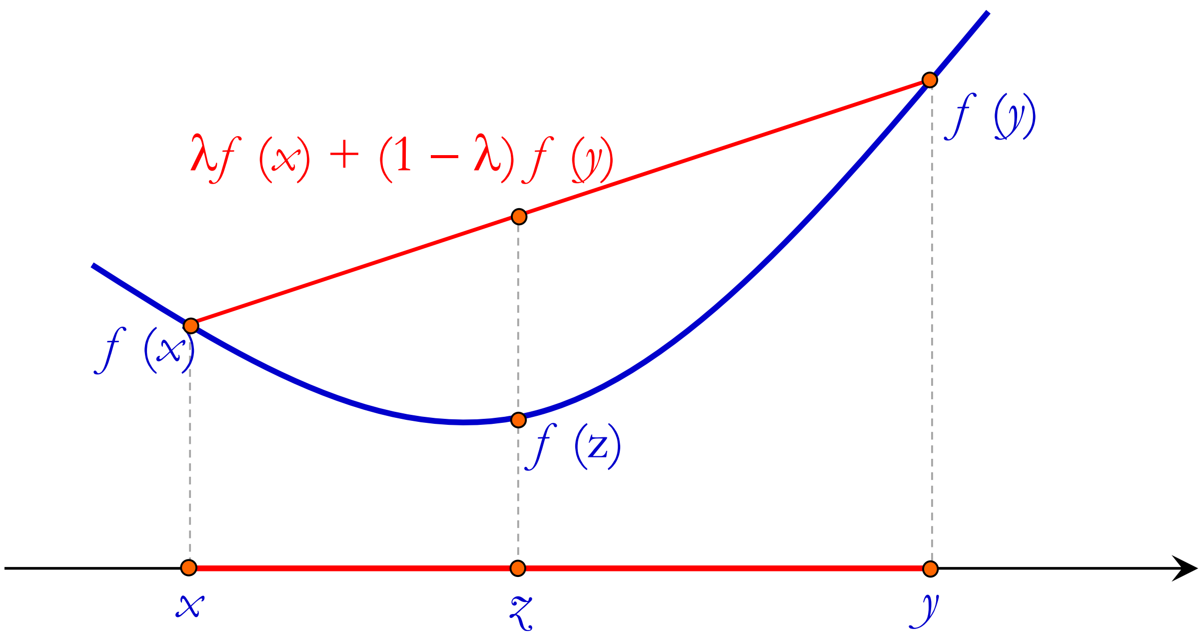
la funzione obiettivo
$f : X \to \mathbb{R}$ è convessa

la regione ammissibile X è un
insieme convesso

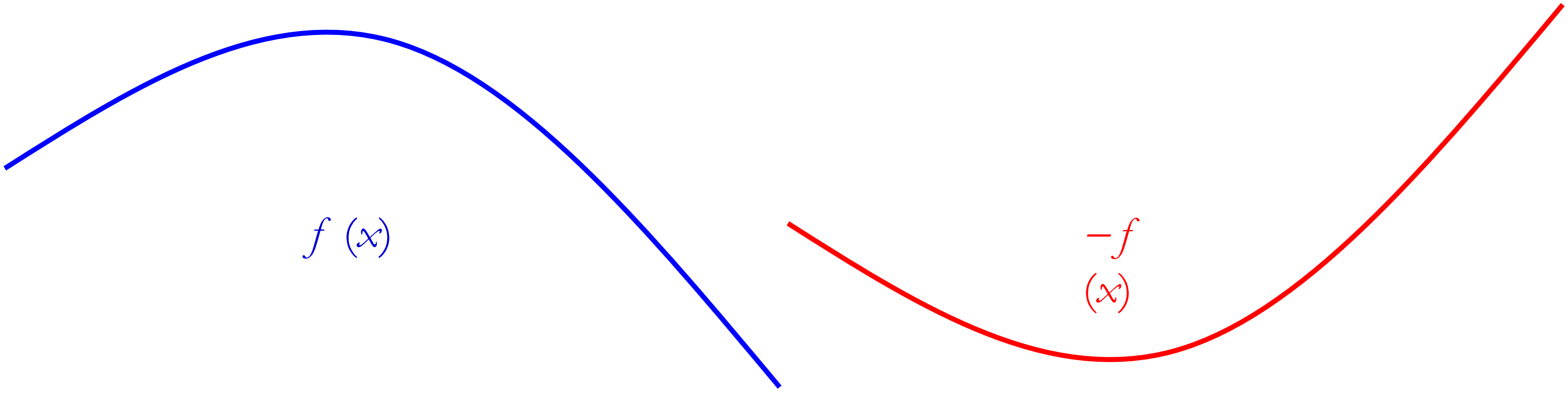
Funzioni convesse

[Definizione] una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è convessa se $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$ e $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ si ha

$$\boxed{f(\mathbf{z}) \quad \leq \quad \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})}$$



Funzioni convesse



- una funzione f è concava se $-f$ è convessa.
- Una funzione lineare è contemporaneamente concava e convessa

Combinazioni *convesse*

[Definizione] il vettore $\mathbf{w}$ è combinazione convessa di m vettori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ se e solo se può essere scritto come

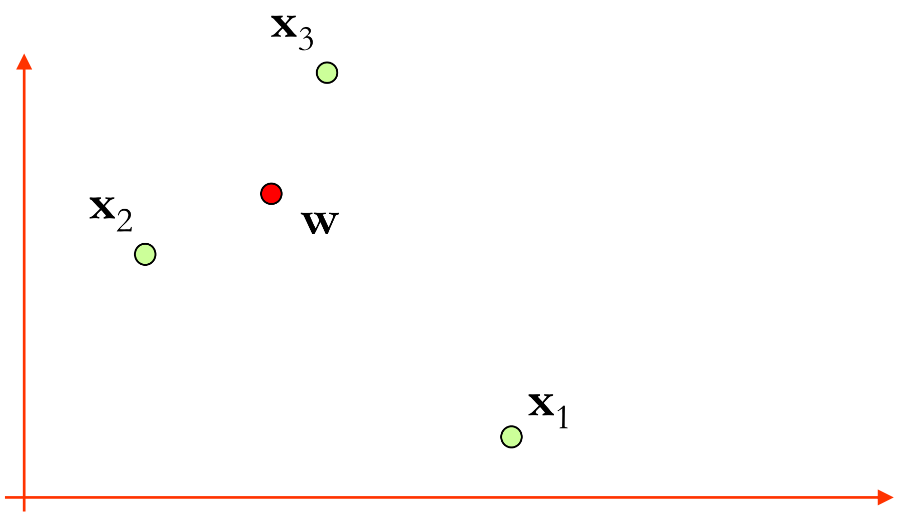
$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \qquad \text{con} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0}$$

il vettore $\mathbf{w} = (4,5)$ è combinazione convessa dei vettori

$\mathbf{x}_1 = (8,1)$, $\mathbf{x}_2 = (2,4)$ e $\mathbf{x}_3 = (5,7)$

con coefficienti

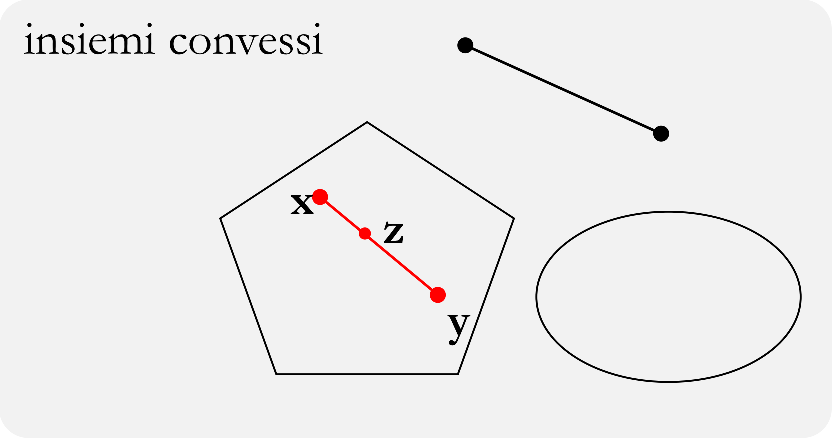
$\lambda_1 = 1/9$, $\lambda_2 = 4/9$, $\lambda_3 = 4/9$

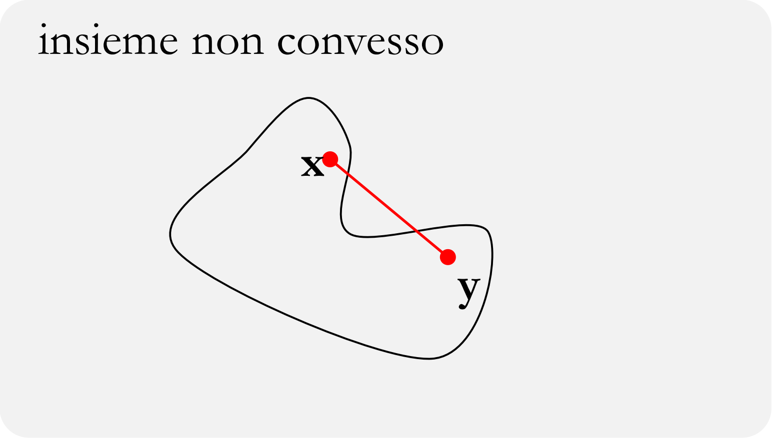


Insiemi convessi

[Definizione] un insieme $Q \subseteq R^n$ è convesso se $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ogni loro combinazione convessa appartiene a Q, cioè:

$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in Q \quad \text{per ogni } \lambda \in [0,1]$$



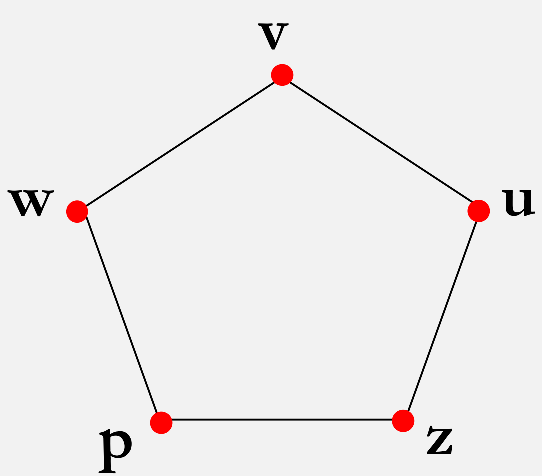


Punti estremi

[Definizione] un punto **w** di un insieme convesso Q si dice estremo se non esiste alcuna coppia di punti distinti **x**, **y** $\in$ Q tale che **w** sia combinazione convessa *non banale* di **x** e **y** cioè:

$$\forall\ 0 < \lambda < 1 \text{ e } \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in Q \quad \text{risulta} \quad \mathbf{w} \neq \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$$

L'insieme dei punti estremi di Q si indica con *ext*(Q).



$ext(Q) = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}\}$

Insiemi convessi

[Proposizione] L'intersezione di 2 insiemi convessi X e Y è un insieme convesso.

[Dim]

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due punti arbitrari dell'insieme $X \cap Y$.

Per ogni $\lambda \in [0,1]$

- il punto $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in X$ perché X è convesso
- il punto $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in Y$ perché Y è convesso

quindi il punto $\mathbf{z} \in X \cap Y$ ■

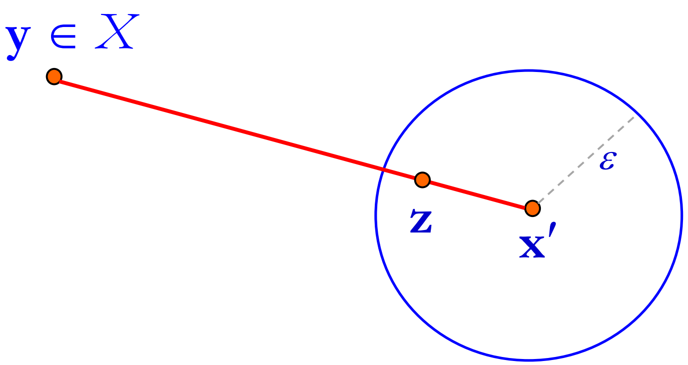
[Corollario] Date m funzioni convesse g_i: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, l'insieme

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1,.., m\}$$

è un insieme convesso

Minimi locali e globali

[Proposizione] Sia P un problema di ottimizzazione convessa (in forma di minimo). Ogni minimo locale $\mathbf{x}'$ di P è anche un minimo globale.



Sia $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ con $\lambda \in (0,1)$ una comb. convessa di $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}$ contenuta nell'intorno di ottimalità di $\mathbf{x}'$

- $\mathbf{z} \in X$ perché X è un insieme convesso;
- $f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{z})$ dato che $\mathbf{x}'$ è un minimo locale;
- $f(\mathbf{z}) = f(\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{y})$
  $\leq \lambda f(\mathbf{x}') + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$ dato che f è convessa;

cioè $(1 - \lambda) f(\mathbf{x}') \leq (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$

dividendo per $(1 - \lambda) > 0$ si ottiene la tesi.

■

iperpiani e semispazi affini

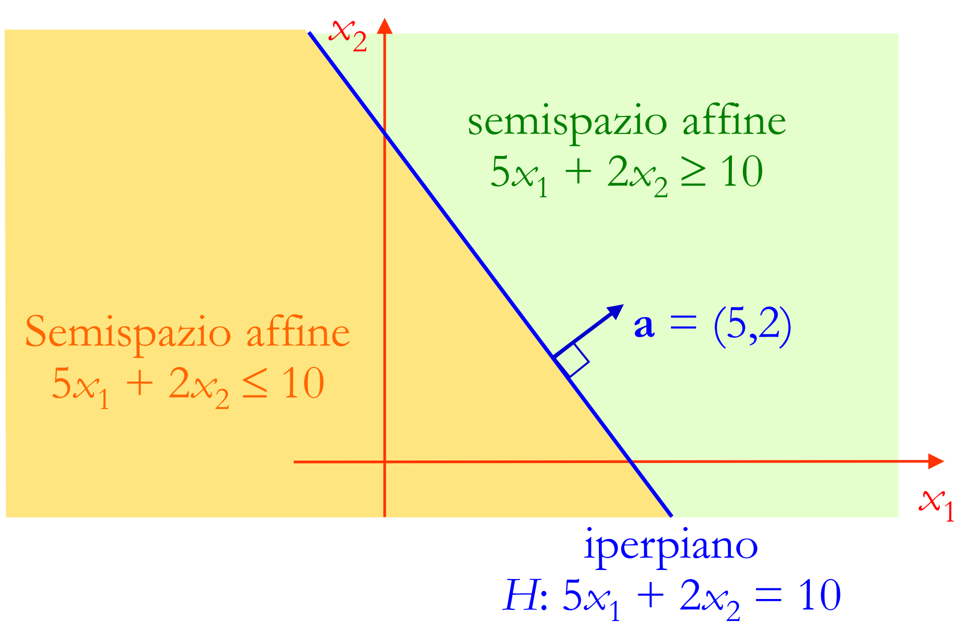
- **[Definizione]** Siano $\mathbf{a} \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $b \in \mathrm{R}$.

  L'insieme $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\} \subseteq \mathrm{R}^n$ si dice iperpiano.

  L'insieme $S = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b\} \subseteq \mathrm{R}^n$ si dice semispazio (affine) chiuso.

- **[Esempio]** In R^2 gli iperpiani sono rette e i semispazi affini sono semipiani.

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : 5x_1 + 2x_2 = 10\}$$



Il vettore $\mathbf{a}$ è detto vettore normale di H perché è sempre ortogonale a H

[Dim]
- se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in H$ allora $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ e $\mathbf{a}^T\mathbf{y} = b$
- segue che $\mathbf{a}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$
- cioè $\mathbf{a}$ è ortogonale al vettore $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ che evidentemente giace su H

iperpiani e semispazi affini: convessità

[Proposizione] semispazi chiusi e iperpiani sono insiemi convessi

[Dim] applicazione diretta della definizione di convessità

- Sia $S = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b\} \subseteq \mathrm{R}^n$ un semispazio chiuso.

  Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \\ = \; & \lambda\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ \leq \; & \lambda b + (1-\lambda)b = b \end{aligned}$$

  Quindi $\mathbf{z} = (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \in S$.

- Essendo un iperpiano l'intersezione di due semispazi chiusi segue che anche l'iperpiano è un insieme convesso.

Ottimizzazione convessa e PL

- **[Proposizione]** Un problema di PL è un problema di ottimizzazione convessa. Infatti,
  1. la f.o. è lineare quindi convessa;
  2. ogni vincolo è un iperpiano o un semispazio affine quindi un insieme convesso;
  3. l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

- **[Corollario]** Un ottimo locale di un problema di PL è una soluzione ottima del problema

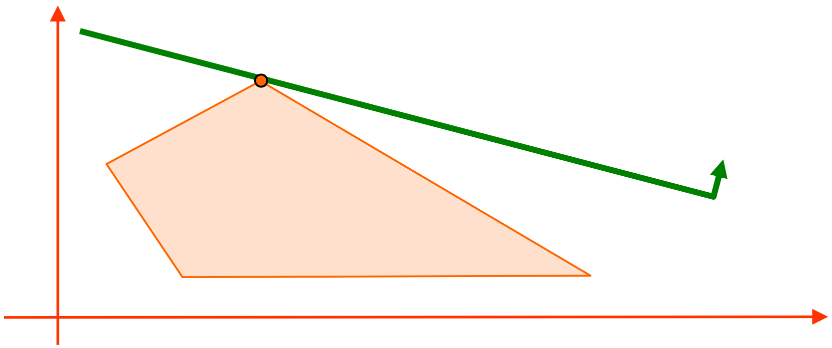
- **[Corollario]** Le soluzioni ottime di un problema di PL sono *punti di frontiera* della sua regione ammissibile.

Soluzione di un problema di PL

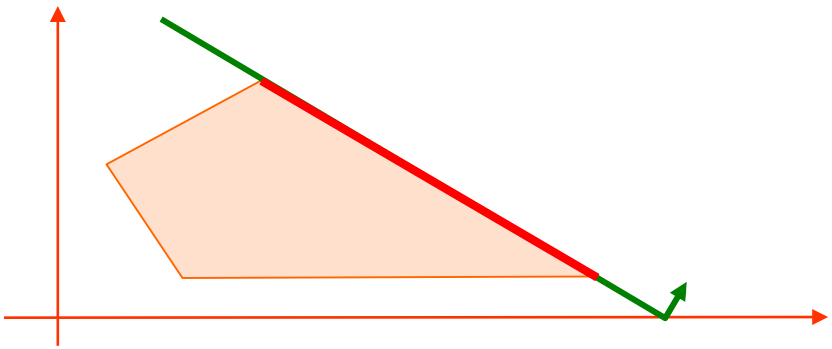
- Un problema di PL (in forma di massimo) può
  1. essere *ammissibile* con una o più *soluzioni ottime finite*.
     La soluzione $\mathbf{x} \in X$ è ottima se $\forall \mathbf{y} \in X \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{y}$.
  2. essere vuoto o *inammissibile* ($X = \emptyset$)
  3. essere *illimitato* superiormente; ciò accade quando
     $\forall \delta \in R \quad \exists \mathbf{x} \in X \; : \; \mathbf{c}^T\mathbf{x} > \delta$

Risolvere un problema di PL significa determinare se è *illimitato* o *inammissibile*, ovvero produrre **una** soluzione *ottima finita*.

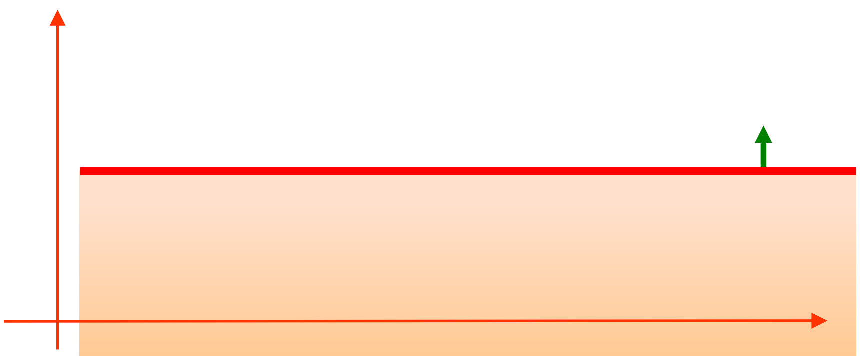
Soluzione: ottimo di valore finito



- soluzione ottima unica

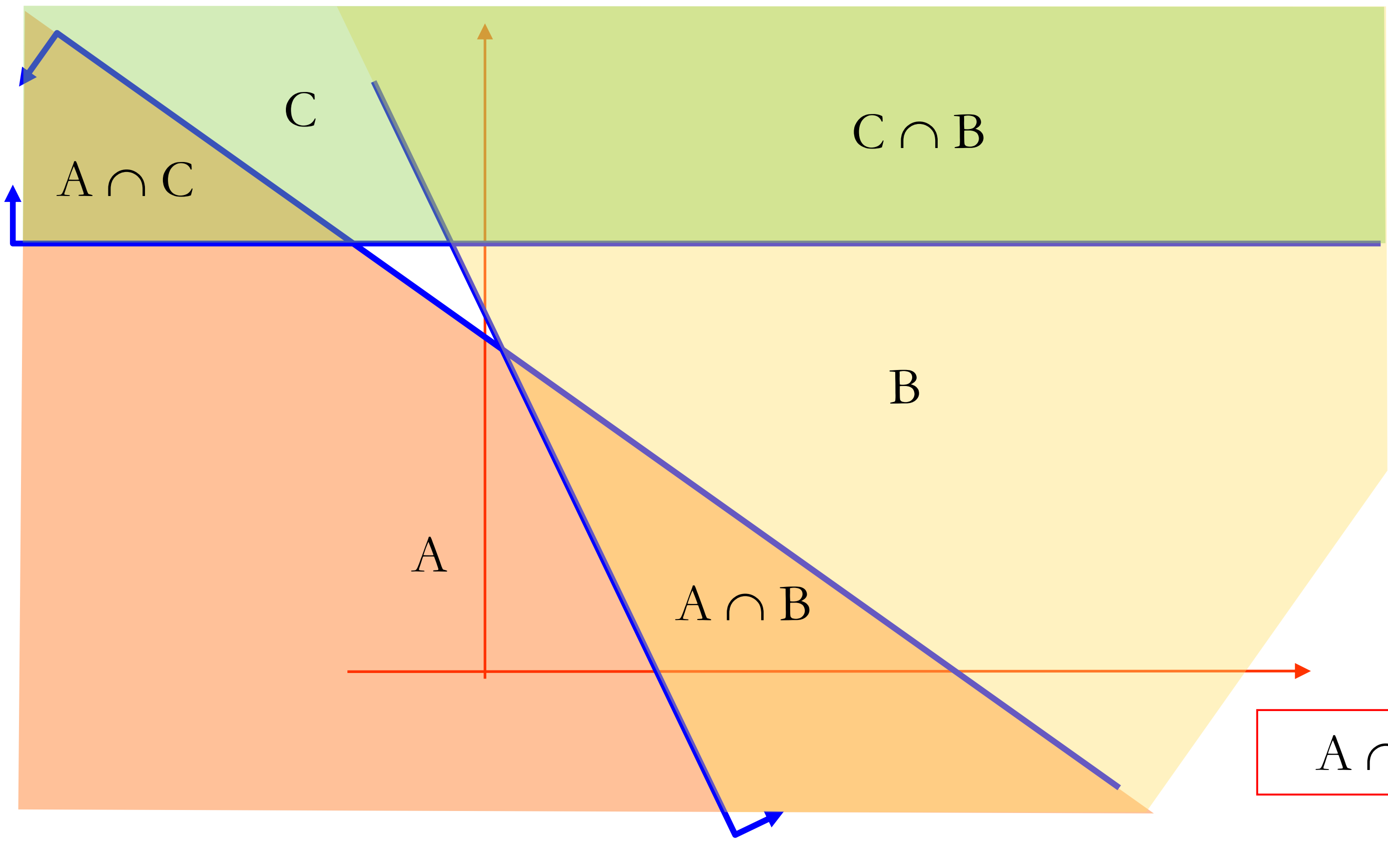


- Se le soluzioni ottime sono più di una, sono necessariamente in numero infinito e formano un insieme convesso limitato (es. in R^2 è un segmento)



- o non limitato (es in R^2 è una (semi)-retta)

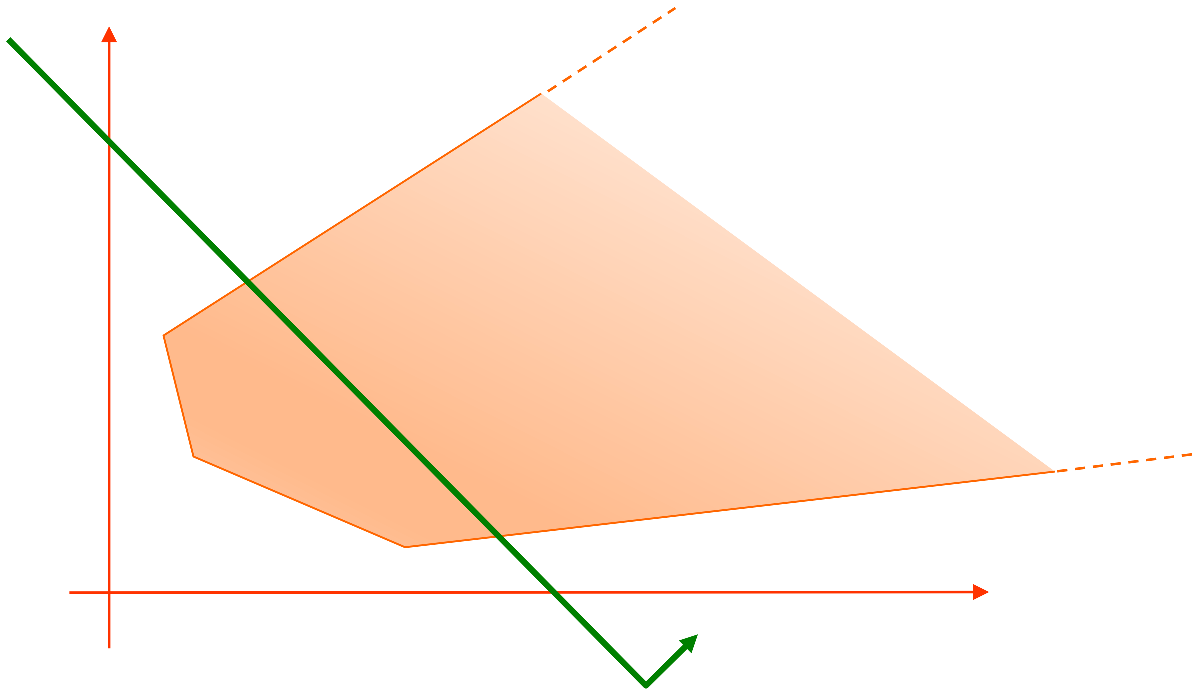
Soluzione: problema inammissibile



$A \cap B \cap C = \varnothing$

- L'intersezione dei tre semipiani A, B e C è vuota; nessun punto soddisfa <u>contemporaneamente</u> i tre vincoli del problema

Soluzione: problema illimitato



- Il valore della funzione obiettivo può crescere senza limite.
- **[Nota]** Un problema illimitato ha necessariamente una regione ammissibile illimitata ma in generale non è vero il contrario: un problema con regione ammissibile illimitata può avere una soluzione ottima finita.

Soluzione di un problema di PL (…ancora)

- Un problema di PL (in forma di minimo) può
  1. essere *ammissibile* con una o più *soluzioni ottime finite*.
     La soluzione $\mathbf{x} \in X$ è ottima se $\forall \mathbf{y} \in X \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{y}$.
  2. essere vuoto o *inammissibile* ($X = \emptyset$)
  3. essere *illimitato* inferiormente; ciò accade quando
     $\forall \delta \in \mathbb{R} \quad \exists \mathbf{x} \in X : \mathbf{c}^T\mathbf{x} < \delta$

Soluzione di un problema di PL *in pratica*

- Nella maggior parte dei casi pratici (**<u>ma non sempre</u>!**) un problema reale di ottimizzazione ammette una soluzione ottima finita (non ha molto senso un profitto che tende a +∞ o impossibile da realizzare …). Tuttavia il modello di PL che descrive il problema potrebbe
  1. avere *infinite soluzioni ottime*: il modello probabilmente non tiene conto di ulteriori criteri di utilità e/o vincoli che nel problema reale sono rilevanti.
  2. essere *inammissibile*: alcuni vincoli sono erroneamente in contraddizione.
  3. essere *illimitato*: il modello non tiene conto di vincoli che nel problema reale sono rilevanti.

Equivalenza tra problemi di PL

Due problemi di PL, P_1 con regione ammissibile X_1 e P_2 con regione ammissibile X_2, sono *equivalenti* se e solo se

- sono entrambi inammissibili, oppure se
- sono entrambi illimitati, oppure se
- esistono due trasformazioni $\theta: X_1 \rightarrow X_2$ e $\sigma: X_2 \rightarrow X_1$ tali che

  $\forall \mathbf{x} \in P_1$ esiste una soluzione $\theta(\mathbf{x})$ di P_2 di pari costo e

  $\forall \mathbf{x} \in P_2$ esiste una soluzione $\sigma(\mathbf{x})$ di P_1 di pari costo

[Nota] L'equivalenza dei problemi di PL non riguarda la dimensione dei problemi (numero di variabili e vincoli)

Equivalenza tra problemi di PL: esempio

P_1: $\min z = 2\, x_1$

$x_1 \leq 3$

$x_1 \geq 1$

$\theta(x_1) = (x_1, 3 - x_1)$

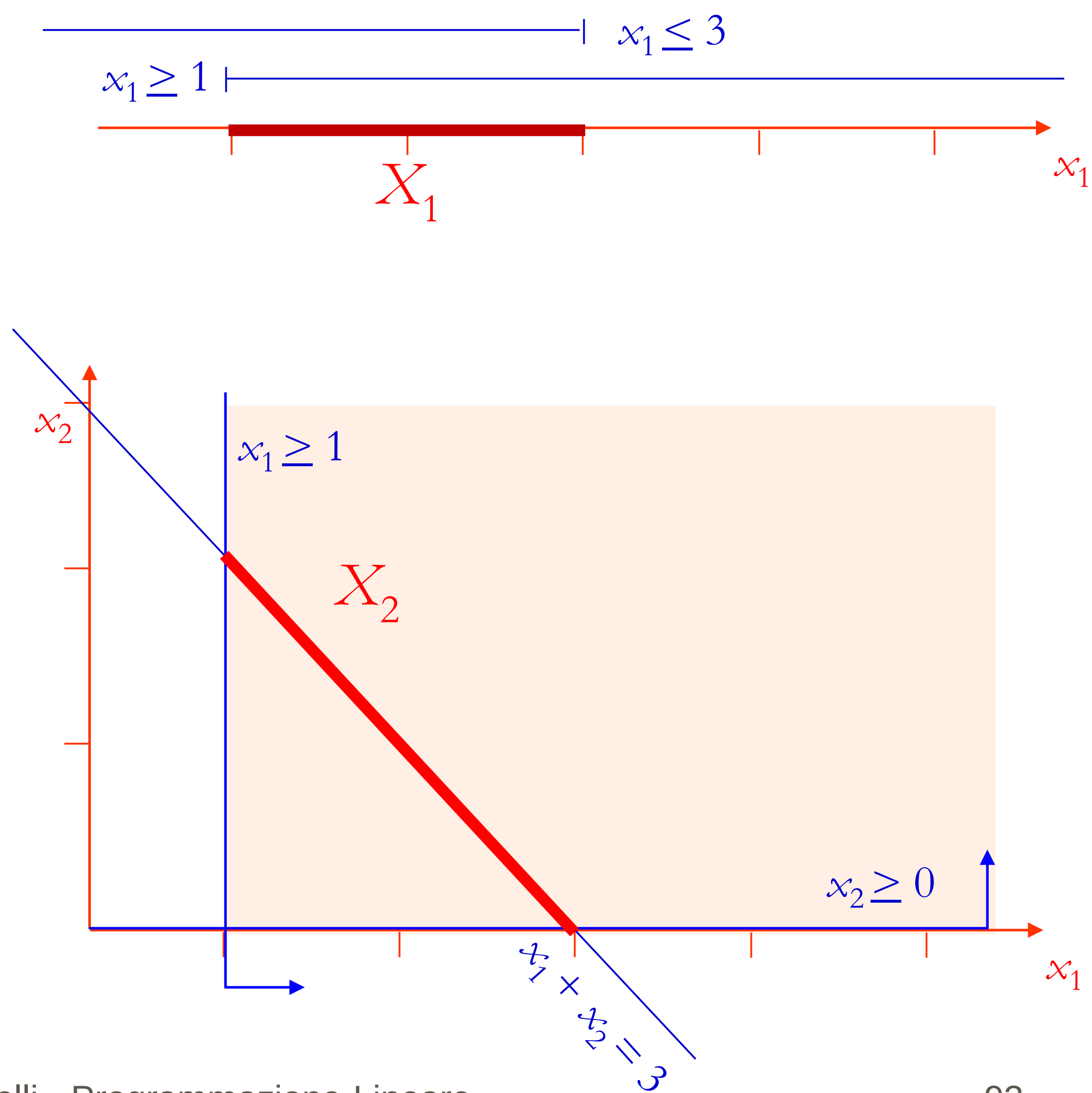
$\sigma(x_1, x_2) = (x_1)$

P_2: $\min z = 2\, x_1$

$x_1 + x_2 = 3$

$x_1 \geq 1$

$x_2 \geq 0$



Trasformazioni (1)

Le seguenti regole trasformano un problema di PL in uno equivalente che tuttavia può avere un **numero diverso** di variabili e vincoli.

- **[Regola 1]**

$$\max \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \equiv -\min\,(-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

Un problema di massimo si trasforma in un problema di minimo equivalente cambiando il segno ai coefficienti di costo

- **[Regola 2]**

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Un vincolo di $\leq$ si trasforma in un vincolo di uguaglianza sommando a $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ una variabile non negativa (detta *variabile di slack*)

- **[Regola 3]**

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Un vincolo di $\geq$ si trasforma in un vincolo di uguaglianza sottraendo a $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ una variabile non negativa (detta *variabile di surplus*)

Trasformazioni (2)

- **[Regola 4]**

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b \equiv (-\mathbf{a})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq -b$$

Un vincolo di $\geq$ si trasforma in un vincolo di $\leq$ (e viceversa) cambiando il segno dei coefficienti e del termine noto

- **[Regola 5]**

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b \\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b \end{cases}$$

Un vincolo di uguaglianza può essere sostituito da una coppia di vincoli di $\leq$ e $\geq$

- **[Regola 6]**

$$x \in \mathrm{R} \equiv \begin{cases} x = x^{+} - x^{-} \\ x^{+} \geq 0, x^{-} \geq 0 \end{cases}$$

Una variabile non vincolata può essere rimpiazzata dalla differenza di due variabili vincolate.
In alternativa x può essere ricavata da una equazione e sostituita negli altri vincoli.

Forme dei problemi di PL

- Problema in *forma generale*: $z = \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\colon \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in R^n\}$

  $z = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\colon \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in R^n\}$

- Problema in *forma standard*: $z = \max/\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\colon \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in R^n\}$

- Utilizzando le Regole 1 – 6, un problema in forma generale può sempre essere posto in forma standard e viceversa.

[Proposizione] **Ogni** problema di PL può essere posto in forma generale o standard.

Esempio

Si vuole trasformare il seguente problema in forma standard di max

$$
\begin{aligned}
z = \min\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 & \\
5x_1 - 2x_2 &\le 15 \\
x_1 + 2x_3 &\ge 9 \\
4x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= 13 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_3 &\le 0
\end{aligned}
$$

1. Trasformo il problema in problema di massimo
   [Regola 1]

$$
\begin{aligned}
z = -\max - 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 & \\
5x_1 - 2x_2 &\le 15 \\
x_1 + 2x_3 &\ge 9 \\
4x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= 13 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_3 &\le 0
\end{aligned}
$$

Esempio (cont.)

2. Cambio il segno alla variabile x_3 [Regola 4]

$$
\begin{aligned}
z = -\max -5x_1 - 8x_2 - 3x_3 \\
5x_1 \; - 2x_2 \le 15 \\
x_1 - 2x_3 \ge 9 \\
4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 13 \\
x_1 \ge 0 \\
x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

3. Elimino la variabile libera x_2 [Regola 6]

$$
\begin{aligned}
z = -\max -5x_1 - 8(x^+_2 - x^-_2) - 3x_3 \\
5x_1 - 2(x^+_2 - x^-_2) \le 15 \\
x_1 \; - 2x_3 \ge 9 \\
4x_1 - 7(x^+_2 - x^-_2) + 2x_3 = 13 \\
x_1, x^-_2, x^+_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Esempio (cont.)

4. Trasformo il vincolo di ≤ in un vincolo di uguaglianza [Regola 2]

$$z = -\max -5x_1 - 8x^+_2 + 8x^-_2 - 3x_3$$
$$5x_1 - 2x^+_2 + 2x^-_2 + s_1 = 15$$
$$x_1 - 2x_3 \geq 9$$
$$4x_1 - 7x^+_2 + 7x^-_2 + 2x_3 = 13$$
$$x_1, x^-_2, x^+_2, x_3, s_1 \geq 0$$

5. Trasformo il vincolo di ≥ in un vincolo di uguaglianza [Regola 3]

$$z = -\max -5x_1 - 8x^+_2 + 8x^-_2 - 3x_3$$
$$5x_1 - 2x^+_2 + 2x^-_2 + s_1 = 15$$
$$x_1 - 2x_3 - s_2 = 9$$
$$4x_1 - 7x^+_2 + 7x^-_2 + 2x_3 = 13$$
$$x_1, x^-_2, x^+_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$