(elemento di corrente)

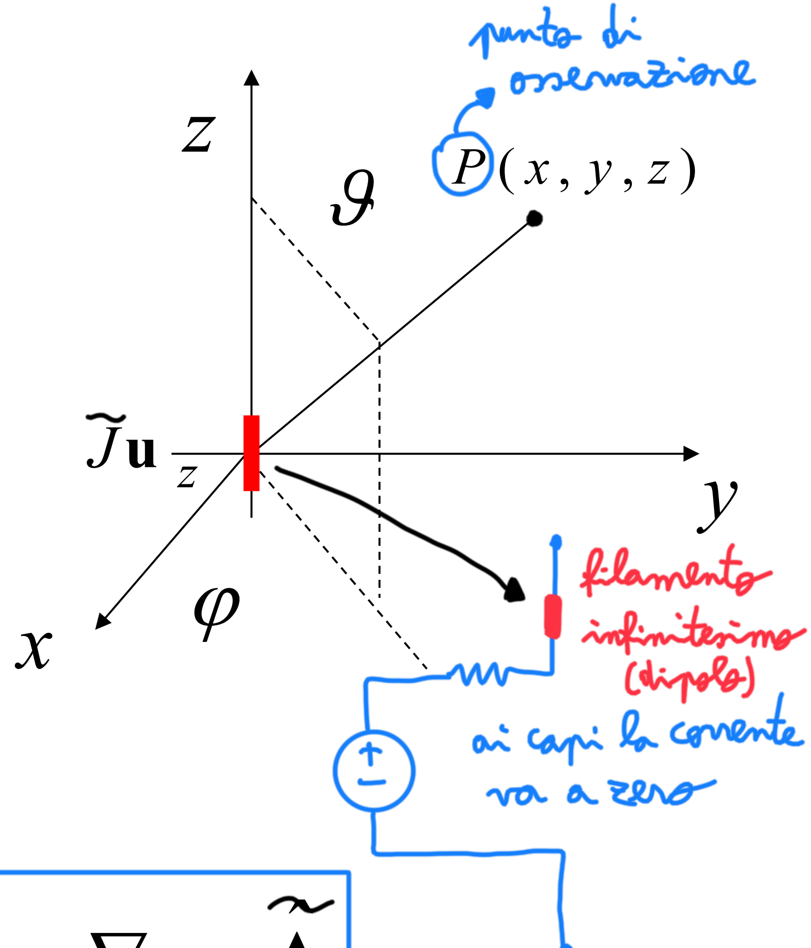
Campo di un dipolo elementare nell'origine

(propagazione nel vuoto)

$\tilde{J} u_z \neq 0$ solo nell'origine

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = \mu_0 \boxed{\tilde{\mathbf{J}}} + j\omega\varepsilon_0\mu_0 \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}} = -j\omega\tilde{\mathbf{B}}$$



- Immaginiamo che nel dipolo (segmento rosso) vi sia impressa una densità di corrente rappresentata dal fasore $\tilde{J}\bar{u}_z$ ($J(t) = \tilde{J}\cos(\omega t)$, $\tilde{J} \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}} \end{cases}$$

introduco il vettore $\bar{A}$ tale che:

$$\begin{cases} \tilde{B} = \nabla \times \tilde{A} \\ \nabla \times \tilde{E} = -j\omega \tilde{B} \end{cases}$$

potenziale vettore (associato a $\tilde{B}$)

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} \Rightarrow \nabla \times \left(\tilde{\mathbf{E}} + j\omega \tilde{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$\tilde{\mathbf{E}} + j\omega \tilde{\mathbf{A}} = \nabla \tilde{\phi}$$

$\to$ potenziale scalare

- Il rotore di un gradiente è sempre nullo, quindi posso scrivere $\tilde{E} + j\omega \tilde{A}$ come il gradiente di una <u>funzione scalare</u> ϕ che dipende da x, y, z.

$$\begin{cases} \tilde{B} = \nabla \times \tilde{A} \\ \tilde{E} = \nabla \tilde{\phi} - j\omega \tilde{A} \end{cases}$$

$\left(\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{A}) \right)$

$\left(\tilde{E} = \tilde{E}(\underbrace{\tilde{A}}_{\text{3 funz. scalari}}, \underbrace{\tilde{\phi}}_{\text{1 funz. scalare}}) \right)$

<u>VANTAGGIO</u>: 4 eq. al posto delle 6 originali (usando direttamente $\tilde{E}$ e $\tilde{B}$)

- Un altro vantaggio è che:

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \tilde{B}) = \mu_0 \nabla \times \tilde{J} + j\omega \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \tilde{E} \\ \nabla \times \tilde{E} = -j\omega \mu_0 \tilde{H} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \tilde{B}) = \mu_0 \nabla \times \tilde{J} + \underbrace{j\omega \varepsilon_0 \mu_0 (-j\omega)}_{-k_0^2} \tilde{B} = \mu_0 \nabla \times \tilde{J} - k_0^2 \tilde{B} \\ \text{"} \end{cases}$$

- Vorremmo ottenere un'equazione che leghi il campo $\tilde{B}$ alla funz. vettoriale di interesse $\tilde{J}$ (in questo caso ottengo solo un legame tra rotori)

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{B}) - k_0^2 \tilde{B} = \mu_0 \nabla \times \tilde{J}$$

• Ripetendo l'operazione con $\tilde{A}$ e $\tilde{\phi}$:

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = \mu_0 \tilde{\mathbf{J}} + j\omega\varepsilon_0\mu_0 \underbrace{(\nabla \tilde{\phi} - j\omega \tilde{\mathbf{A}})}_{\tilde{E}} =$$

$$= \underbrace{\nabla\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}}_{\text{gradiente della divergenza di } \tilde{A}} - \underbrace{\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}}}_{\text{Laplaciano di } \tilde{A}} = \mu_0 \tilde{\mathbf{J}} + j\omega\varepsilon_0\mu_0 \nabla \tilde{\phi} + k_0^2 \tilde{\mathbf{A}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = j\omega\varepsilon_0\mu_0 \tilde{\phi}}$$

(la divergenza può essere scelta a piacimento, l'importante è che $\nabla \times \tilde{A} = \tilde{B}$)

Scelta di Lorentz

$$\cancel{j\omega\varepsilon_0\mu_0\nabla\tilde{\phi}} - \nabla^2\tilde{A} - k_0^2\tilde{A} = \mu_0\tilde{J} + \cancel{j\omega\varepsilon_0\mu_0\nabla\tilde{\phi}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} + k_0^2 \tilde{\mathbf{A}} = -\mu_0 \tilde{\mathbf{J}}}$$

EQUAZIONE D'ONDA

lega il potenziale vettore $\tilde{A}$ direttamente alla densità di corrente $\tilde{J}$

- Proviamo a risolverla:

$$\nabla^2 \tilde{A} + k_0^2 \tilde{A} = -\mu_0 \tilde{J} \Rightarrow \begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\tilde{A}_x + k_0^2 \tilde{A} = 0 \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\tilde{A}_y + k_0^2 \tilde{A} = 0 \\ \underbrace{(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)}_{\nabla^2}\tilde{A}_z + k_0^2 \tilde{A} = -\mu_0 \tilde{J}_z \end{cases}$$

($\tilde{J}$ non ha componenti lungo x, y)

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{I_0}{S} f(z) g(x,y) \mathbf{u}_z \qquad f(z) = \begin{cases} 1 & |z| < \frac{h}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2+y^2} \le R \\ 0 & \sqrt{x^2+y^2} > R \end{cases}$$

sezione del filo dove fluisce la corrente

carica distribuita uniformemente in S

Essendo R il raggio (piccolo) del filo

- Proviamo a porre A_x, $A_y = 0$ e supponiamo che la soluzione abbia simmetria sferica:

$$\tilde{J}_x = \tilde{J}_y = 0 \Rightarrow \tilde{A}_x = \tilde{A}_y = 0$$

Simmetria sferica $\boxed{\partial_\varphi = \partial_\vartheta = 0}$

La proiezione dell'equazione di Helmoltz in *z* diventa:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)}\tilde{A}_z + k_0^2\tilde{A}_z = -\mu_0 \boxed{\frac{I_0 f(z)}{S} g(x,y)} \;\tilde{J}$$

laplaciano sferico

Una possibile soluzione…

$$\tilde{A}_z = \underbrace{C}_{\text{funzione della sorgente } \tilde{J}} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

rappresenta un'onda

fronte d'onda sferica progressiva (esce dall'origine)

Nel dominio del tempo….. (antitrasformando il fasore $\tilde{A}$)

$$C \in \Re$$

$$A_z(r,t) = C \, \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-jkr}}{r} e^{j\omega t} \right) = \frac{C}{r} \cos(\omega t - kr)$$

La velocità di propagazione dell'onda si ottiene derivando l'argomento della funzione trigonometrica rispetto al tempo

con questa velocità mi troverò sempre in un punto equifase

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kr) = \omega - k\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} = c_0}$$

$$\partial_r \hat{A}_z = C\left(- jk \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r^2} \right)$$

$$r^2 \partial_r \hat{A}_z = -Ce^{-jkr}\left(jkr + 1 \right)$$

$$\partial_r \left(r^2 \partial_r \hat{A}_z \right) = - jk\left(- Ce^{-jkr}\left(jkr + 1 \right) \right) - jkCe^{-jkr} =$$

$$= -k^2 rCe^{-jkr} \quad \Rightarrow \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \hat{A}_z \right) = -k^2 \frac{Ce^{-jkr}}{r}$$

Infatti, l'equazione omogenea

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\hat{A}_z + k^2\hat{A}_z = 0 = \frac{1}{r}\partial_r^2(r\hat{A}_z) + k^2\hat{A}_z$$

essendo

$$\partial_r\left(r^2\partial_r\hat{A}_z\right) = 2r\partial_r\hat{A}_z + r^2\partial_r^2\hat{A}_z = r\partial_r^2(r\hat{A}_z)$$

E, quindi

$$\partial_r^2(r\hat{A}_z) + k^2(r\hat{A}_z) = 0$$

Cioè rA_z soddisfa l'equazione dell'onda 'piana'

$$\hat{A}_z = C\frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\int_{-l/2}^{+l/2} dl \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-l/2}^{+l/2} dl \int_S \frac{I_0}{S} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z \, d\mathbf{S} = \int_{-h/2}^{+h/2} dl \, I_0 = I_0 h$$

D’altra parte, nell’ipotesi che V sia piccolo:

$$\int_V \left(\nabla \cdot \nabla \hat{A}_z + k^2 \hat{A}_z \right) dV = \int_{\partial V} \nabla \hat{A}_z \cdot d\mathbf{S} = -\mu I_0 h$$

poiché $$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

E, conseguentemente, $\int_V k^2 \hat{A}_z dV \rightarrow 0$ quando $V \rightarrow 0$

$$\nabla \hat{A}_z = \partial_r \frac{Ce^{-jkr}}{r}\mathbf{u}_r = \frac{C\left(-jke^{-jkr} - 1/re^{-jkr}\right)}{r}\mathbf{u}_r$$

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, \mathbf{u}_r$$

$$r \to 0$$

$$\nabla \hat{A}_z \cdot d\mathbf{S} = \frac{C\left(-jke^{-jkr} - 1/re^{-jkr}\right)}{r} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= -C \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\int_{\partial V} \nabla \hat{A}_z \cdot d\mathbf{S} == \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-C \sin \vartheta\right) = -4\pi C$$

$$4\pi C = \mu I_0 h \Rightarrow \boxed{C = \frac{\mu I_0 h}{4\pi}}$$

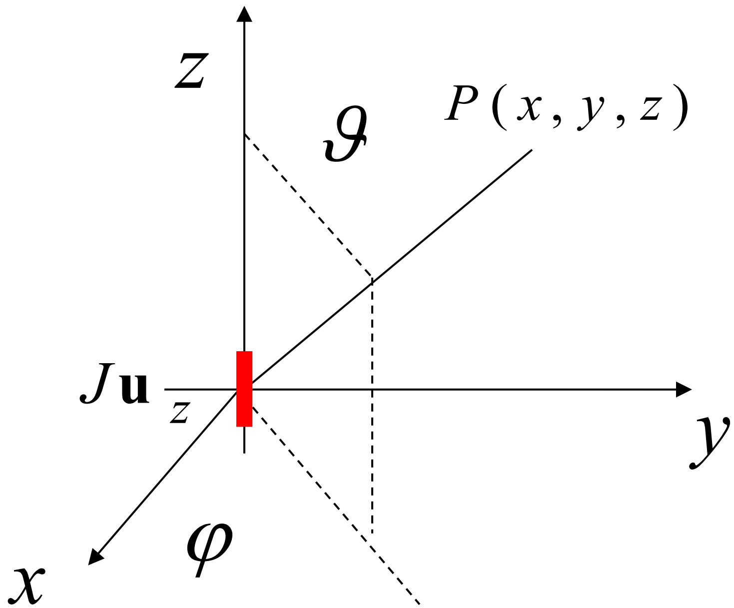
Espressione del potenziale

$$\hat{A}_z(k,r) = \frac{\mu I_0 h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

Nel dominio del tempo:

$$A_z(r,t) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mu I_0 h}{4\pi} \frac{e^{-jkr} e^{j\omega t}}{r} \right) = \frac{\mu I_0 h}{4\pi} \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}$$

Le componenti del potenziale in coordinate sferiche valgono allora,



$$\hat{A}_r = \hat{A}_z \cos\vartheta$$

$$\hat{A}_\vartheta = -\hat{A}_z \sin\vartheta$$

$$\hat{A}_\varphi = 0$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \nabla \times (A_r \mathbf{u}_r + A_\vartheta \mathbf{u}_\vartheta)$$

Espressione del campo magnetico

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r^2 \sin\vartheta}\mathbf{u}_r & \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta & \dfrac{1}{r}\mathbf{u}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\vartheta & \partial_\varphi \\ A_r & rA_\vartheta & r\sin\vartheta A_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\mathbf{u}_r(-\partial_\varphi rA_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta \partial_\varphi A_r + \frac{1}{r}\mathbf{u}_\varphi\left(\partial_r\left(rA_\vartheta\right) - \partial_\vartheta A_r\right)$$

$$\hat{A}_z(k,r) = \frac{\mu I_0 h}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}(-\partial_\varphi r(-\hat{A}_z \sin\vartheta)) = 0$$

$$B_\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \hat{A}_z \cos\vartheta = 0$$

$$B_\varphi = \frac{1}{r}\left(\partial_r\left(r(-\hat{A}_z \sin\vartheta)\right) - \partial_\vartheta(\hat{A}_z \cos\vartheta)\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(-\hat{A}_z \sin\vartheta - r\sin\vartheta\,\partial_r \hat{A}_z + \hat{A}_z \sin\vartheta - \cos\vartheta\,\partial_\vartheta \hat{A}_z\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\mu I_0 h}{4\pi}\left(-\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\vartheta - r\sin\vartheta\,\frac{e^{-jkr}}{r}(-jk - \frac{1}{r}) + \frac{e^{-jkr}}{r}\sin\vartheta\right) =$$

$$H_\varphi = \frac{B_\varphi}{\mu} = \frac{I_0 h}{4\pi}\sin\vartheta\,\frac{e^{-jkr}}{r}\left(jk + \frac{1}{r}\right)$$

Condizioni statiche k=0

$$H_{\varphi}^{statico}\,(k=0)=\frac{I_0 h}{4\pi}\sin\vartheta\,\frac{1}{r^2}$$

Cfr I legge di Ampere-Laplace

$$h=dl$$

$$d\mathbf{H}=\frac{I_0}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}=\frac{I_0}{4\pi}\frac{h}{r^2}\sin\vartheta\,\mathbf{u}_{\varphi}$$

Contributo dinamico k

$$H_{\varphi}^{dinamico} = \frac{B_{\varphi}}{\mu} = \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\vartheta \; jk \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\left| \frac{H_{\varphi}^{dinamico}}{H_{\varphi}^{statico}} \right| = kr$$

Allontanandosi dalla sorgente il contributo dinamico diventa dominante. Tale contributo è tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza

Campo elettrico

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla \times \hat{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\mathbf{u}_r & \frac{1}{r\sin\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta & \frac{1}{r}\mathbf{u}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\vartheta & \partial_\varphi \\ 0 & 0 & r\sin\vartheta \hat{H}_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\mathbf{u}_r(\partial_\vartheta(r\sin\vartheta\hat{H}_\varphi)) - \frac{1}{r\sin\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta(\partial_r(r\sin\vartheta\hat{H}_\varphi))$$

$$H_{\varphi} = \frac{B_{\varphi}}{\mu} = \frac{I_0 h}{4\pi} \sin \vartheta \, \frac{e^{-jkr}}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \mathbf{u}_r (\partial_{\vartheta} (r \sin \vartheta \hat{H}_{\varphi})) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \mathbf{u}_{\vartheta} (\partial_r (r \sin \vartheta \hat{H}_{\varphi}))$$

Pertanto..

$$E_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{I_0 h}{4\pi} e^{-jkr} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \approx 0$$

a grande distanza

$$E_{\vartheta} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{I_0 h}{4\pi} \left[jk \left(jk + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right] \sin \vartheta \approx - \frac{k^2}{j\omega\varepsilon} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{I_0 h}{4\pi} \sin \vartheta$$

Densità di potenza (1)

$$H_{\varphi} = jk \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$E_{\vartheta} = j\omega\mu \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\frac{E_{\vartheta}}{H_{\varphi}} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

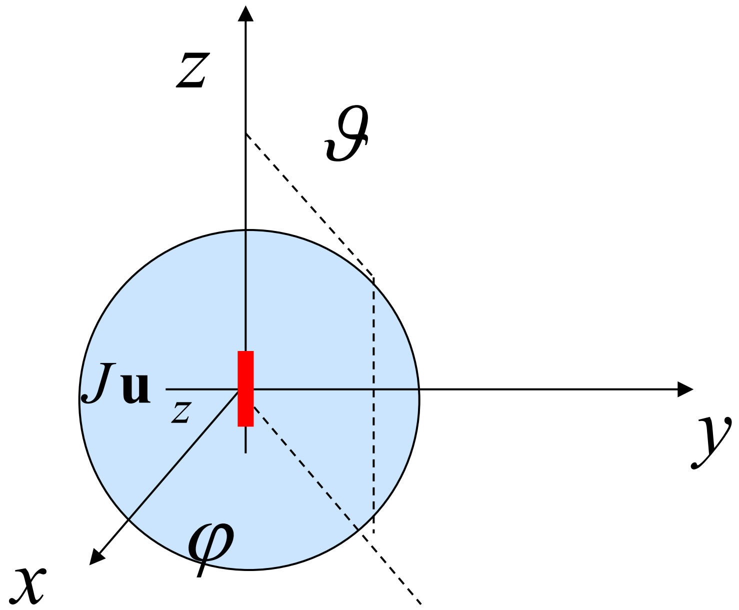
Densità di potenza (2)

$$E_{\vartheta} H_{\varphi}^{*} = j\omega\mu \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left(-jk \frac{I_0^{*} h}{4\pi} \sin\vartheta \frac{e^{+jkr}}{r} \right) =$$

$$= \eta k^{2} \left(\frac{\left| I_0 \right| h}{4\pi} \right)^{2} \sin^{2}\vartheta \frac{1}{r^{2}}$$

$$p(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(E_{\vartheta} H_{\varphi}^{*} \right) = \frac{\eta k^{2}}{2} \left(\frac{\left| I_0 \right| h}{4\pi} \right)^{2} \sin^{2}\vartheta \frac{1}{r^{2}}$$

Flusso di potenza attiva su una superficie sferica concentrica con l'origine 1



$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_S \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \cdot d\mathbf{S}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_S E_\vartheta H_\varphi^* \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r \, dS\right) = \frac{1}{2}\eta k^2 \left(\frac{|I_0| h}{4\pi}\right)^2 \mathrm{Re}\left(\int_S \sin^2\vartheta \frac{1}{r^2} dS\right)$$

Flusso di potenza attiva su una superficie sferica concentrica con l'origine 2

$$= \left(\frac{|I_0| h}{4\pi}\right)^2 \eta k^2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{r^2} r^2 \sin^3\vartheta = \left(\frac{I_0 h}{4\pi}\right)^2 \eta k^2 \, 2\pi \, \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\overline{P} = \eta \frac{\pi}{3} I_0^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \quad [\mathrm{W}]}$$

Direttività nella direzione (θ_0, ϕ_0) per un dipolo hertziano

$$D(\vartheta_0, \phi_0) = \frac{4\pi r^2 p(r, \vartheta_0, \phi_0)}{\overline{P}} = \frac{3}{2}\sin^2\vartheta_0$$

- Nel caso di incidenza di un'onda piana TM con angolo di incidenza pari all'angolo di Brewster, i dipoli che vengono indotti sulla superficie di separazione fra i due mezzi non irradiano in una direzione ortogonale all'angolo di rifrazione.

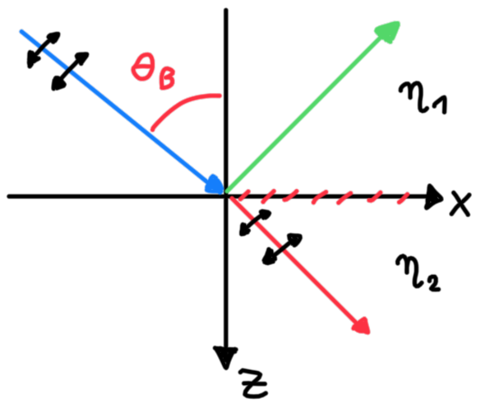
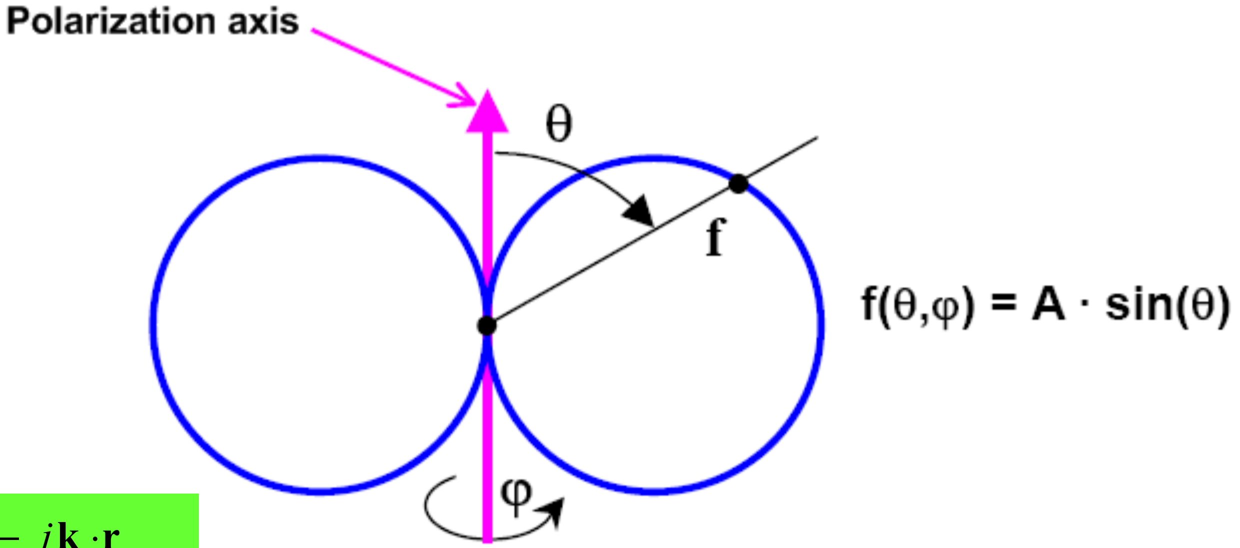


Diagramma di Radiazione



$$E_{\vartheta} = f(\vartheta, \phi) \frac{j e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}$$

$$f(\vartheta, \phi) = \omega\mu \frac{I_0 h}{4\pi} \sin \vartheta$$