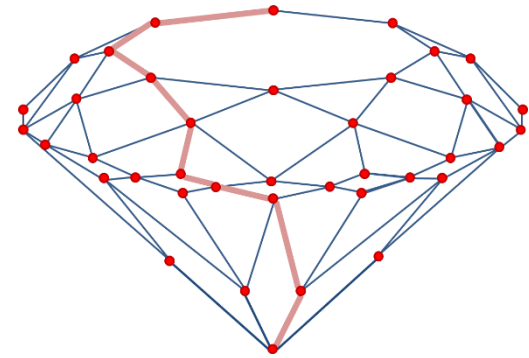


# Richiami di programmazione lineare e teoria della dualità

ver 2.0.0



Fabrizio Marinelli

[fabrizio.marinelli@univpm.it](mailto:fabrizio.marinelli@univpm.it)

tel. 071 - 2204823



# Perché ?

- Alcuni problemi combinatorici (modellati con Programmazione Lineare Intera) possono essere **risolti anche nel continuo** e quindi con algoritmi per la Programmazione Lineare.
- In alcuni casi (per esempio nell'ottimizzazione su reti) alcuni algoritmi utilizzati sono **specializzazioni dell'algoritmo del simplesso**
- Negli algoritmi enumerativi generali per la Prog. Lineare Intera, la Prog. Lineare è utilizzata per calcolare **una stima del valore ottimo** del problema intero
- Le condizioni di ottimalità, derivanti dalla teoria della dualità, sono utilizzate per **progettare algoritmi esatti** per problemi combinatorici

- Programmazione Lineare
- Geometria della PL
- Sistemi di equazioni lineari e PL
- Algoritmo del simplesso
- Teoria della dualità

- 

**Programmazione Lineare e dualità**

Dato un programma lineare  $\mathcal{P}$  (problema primale)

$$\mathcal{P}: z^* = \max_{x \in \mathcal{P}} c^T x$$

si può definire un programma lineare associato  $\mathcal{D}$  (problema duale)

$$\mathcal{D}: w^* = \min_{y \in \mathcal{D}} b^T y$$

che soddisfa lele e utili proprietà

Roberto Tamara - P.O. e Dualità (tamara)

# Programmazione Lineare

# Notazione e definizioni di base

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} \leq & \mathbf{b} \end{aligned}$$

- $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  *funzione obiettivo*
- $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$  *regione ammissibile*

## Incognite del problema

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vettore delle *variabili decisionali*. Ogni  $\mathbf{x} \in X$  è una *soluzione ammissibile* (cioè un vettore che soddisfa tutti i vincoli) mentre ogni  $\mathbf{y} \notin X$  è una *soluzione inammissibile*.
- $z \in \mathbb{R}$  *valore* che assume la funzione obiettivo in corrispondenza di una soluzione  $\mathbf{x} \in X$

## Parametri del problema

- $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  vettore dei coefficienti (di *costo* o di *profitto*) della f.o.
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  vettore dei *termini noti* dei vincoli
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrice dei coefficienti dei vincoli (matrice *tecnologica*)

# Programmazione lineare (PL): esempio

Un esempio di problema di programmazione lineare con 2 variabili e 4 vincoli:

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{C1:} \quad 6x_1 + 10x_2 \leq 30$$

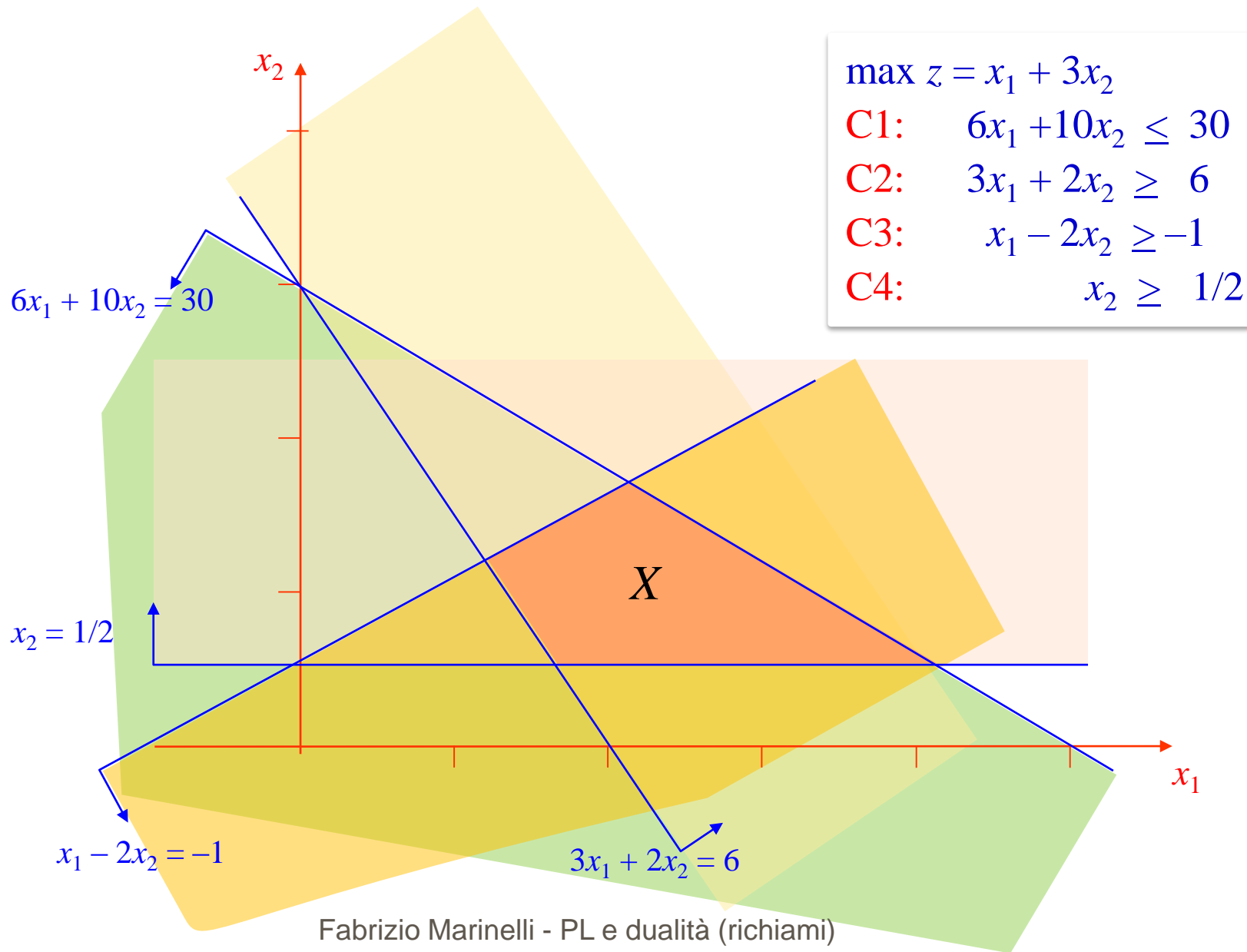
$$\text{C2:} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$\text{C3:} \quad x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$\text{C4:} \quad x_2 \geq 1/2$$

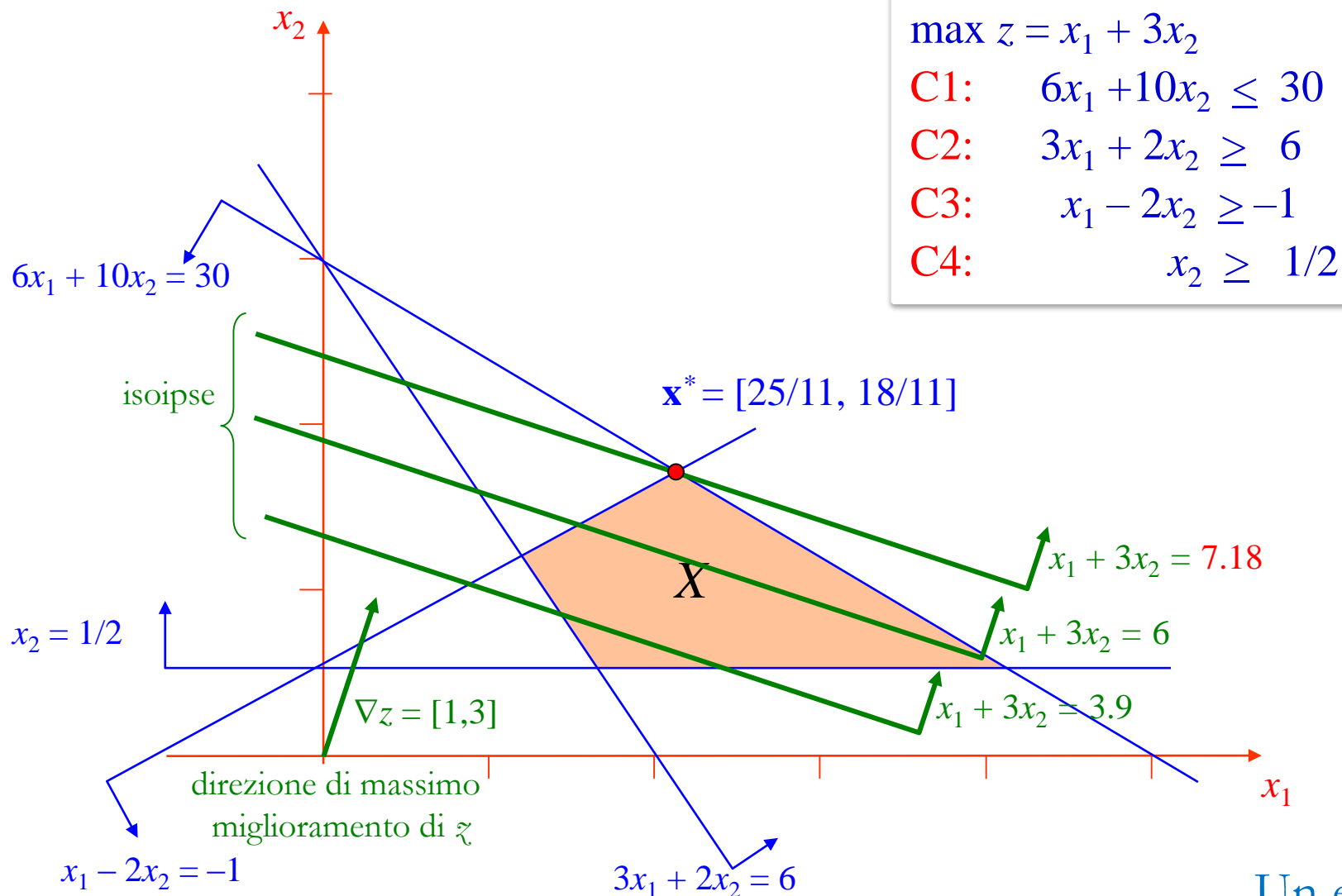
Possiamo rappresentare graficamente il problema...

# Esempio: un problema di PL in $\mathbf{R}^2$





# Esempio: un problema di PL in $\mathbf{R}^2$



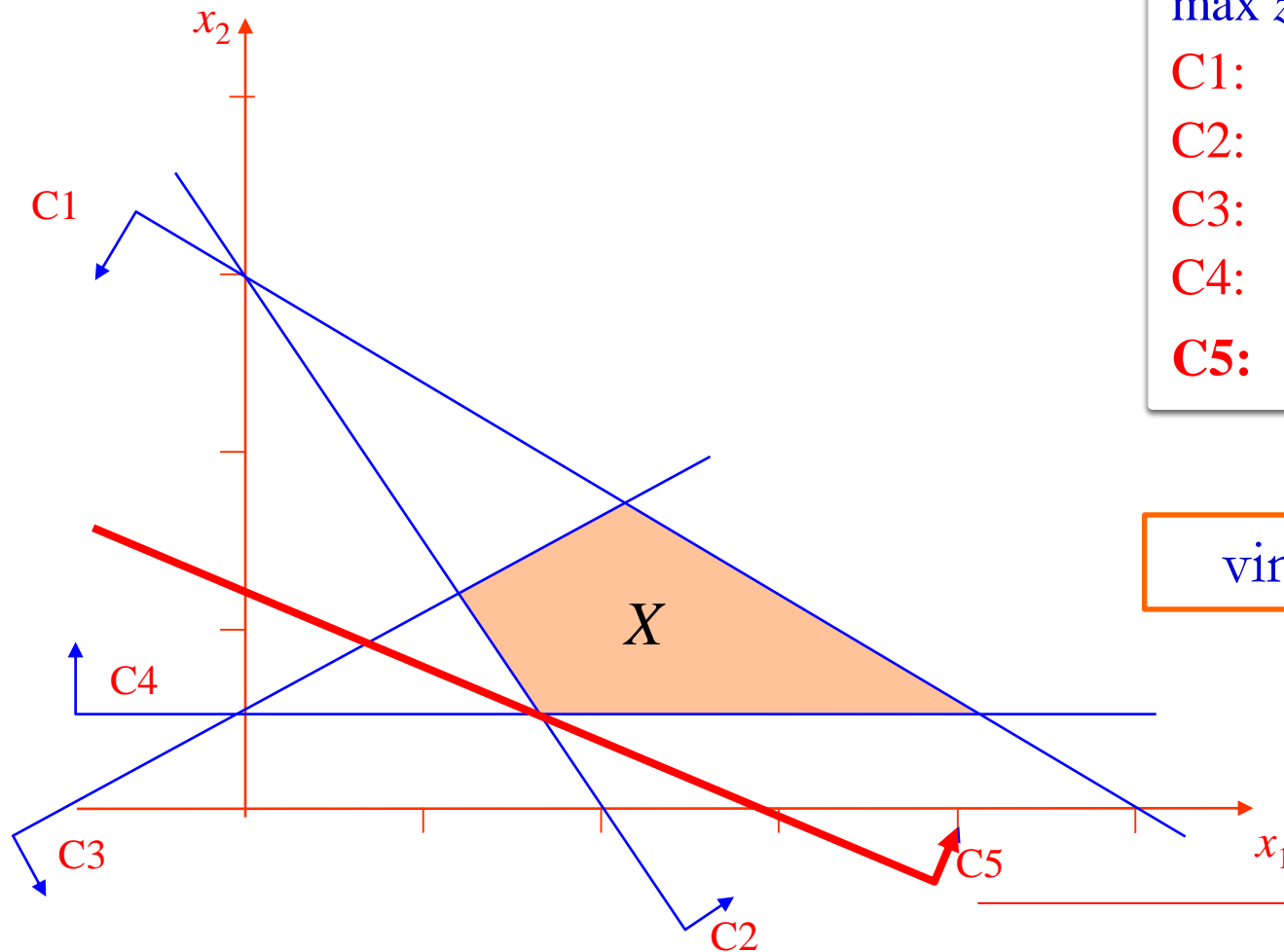
Un esempio

# Notazione e definizioni di base

## [Definizioni]

- La soluzione  $\mathbf{y}$  rende **attivo** il vincolo  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$  se  $\mathbf{a}^T \mathbf{y} = b$
- La soluzione  $\mathbf{y}$  rende **inattivo** il vincolo  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$  se  $\mathbf{a}^T \mathbf{y} < b$
- Il vincolo  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$  è **ridondante** rispetto al sistema di vincoli  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$  se ogni soluzione di  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$  è anche una soluzione di  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$

# Notazione e definizioni di base



$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{C1: } 6x_1 + 10x_2 \leq 30$$

$$\text{C2: } 3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

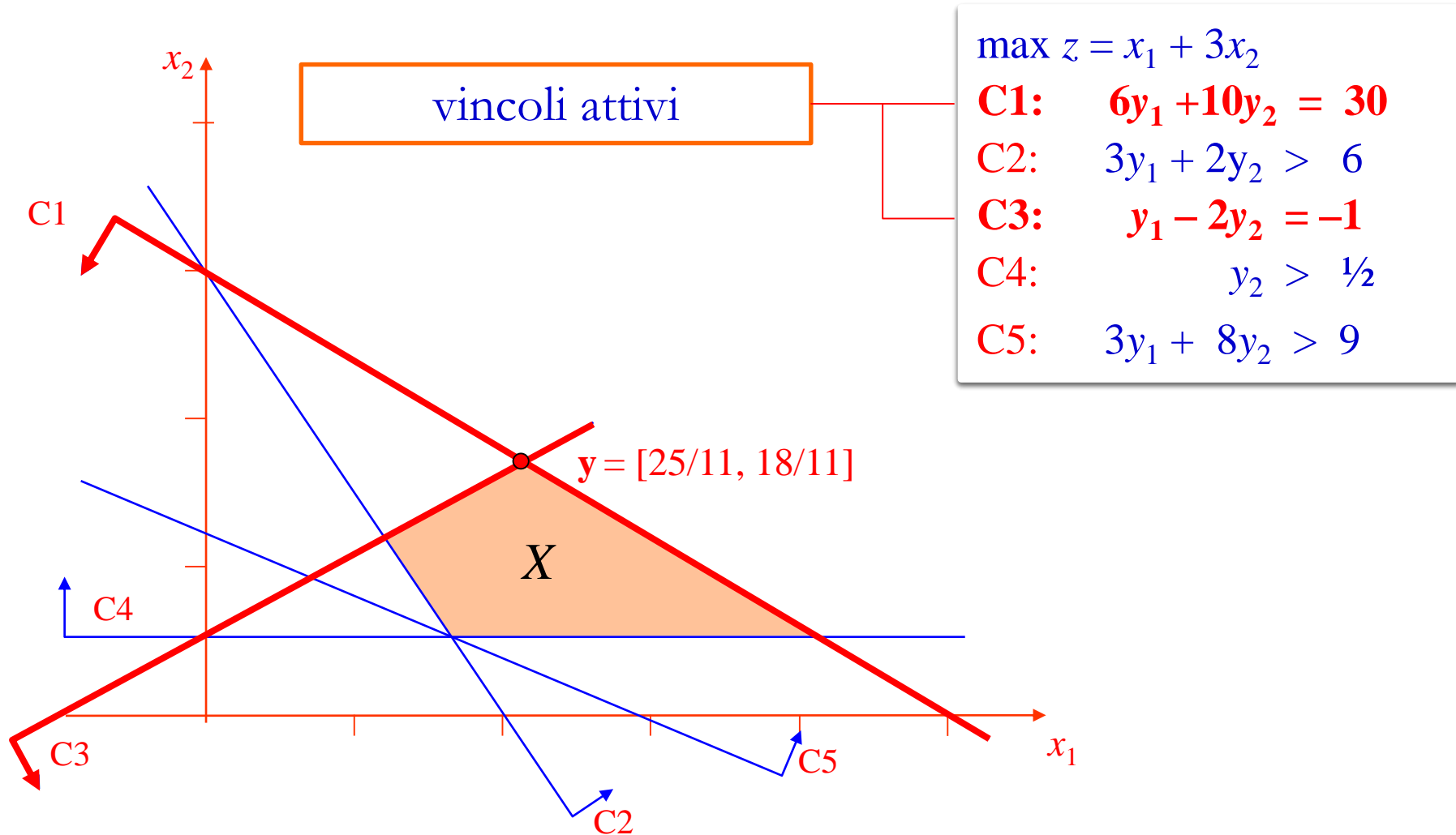
$$\text{C3: } x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$\text{C4: } x_2 \geq \frac{1}{2}$$

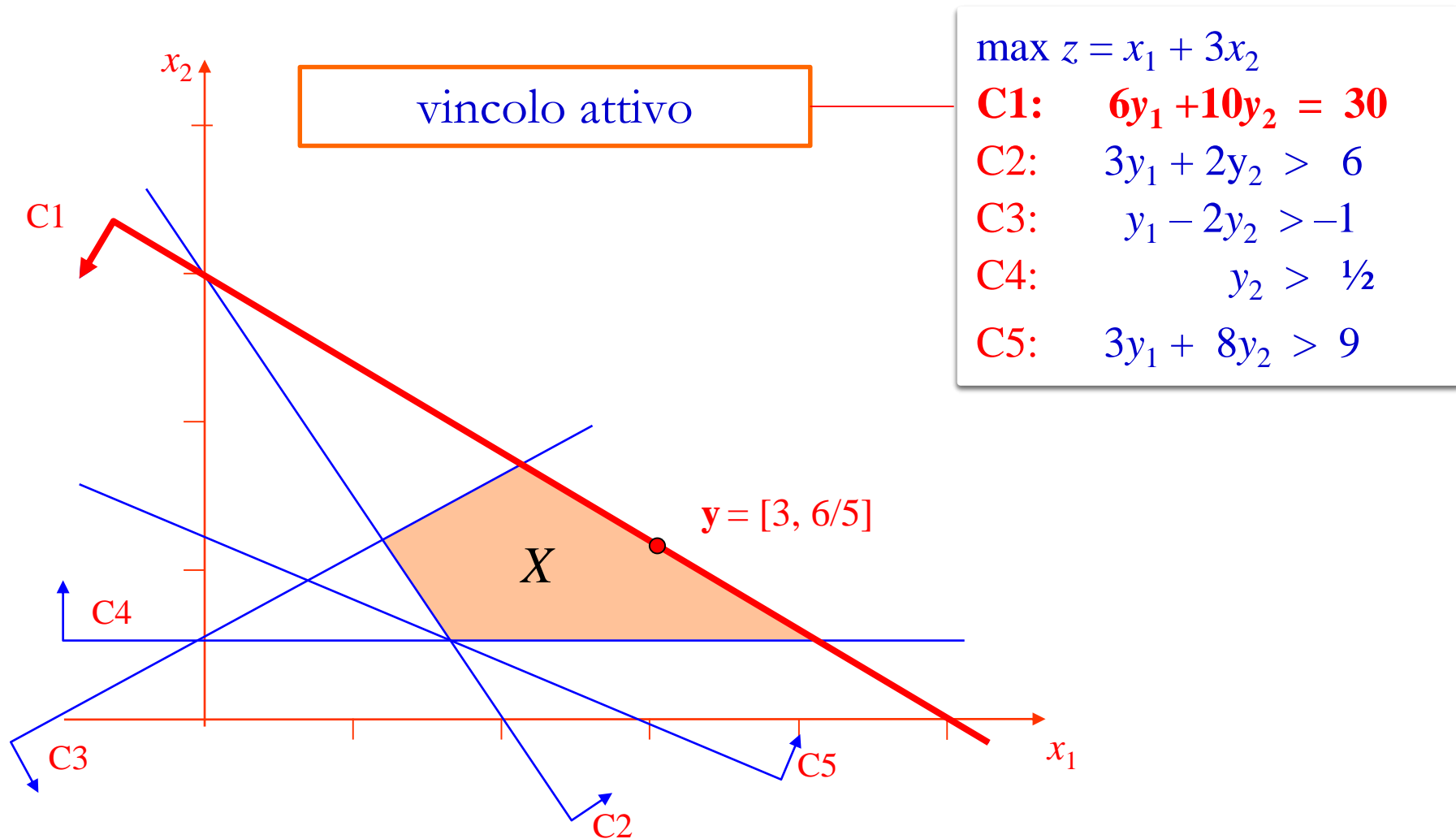
$$\text{C5: } 3x_1 + 8x_2 \geq 9$$

vincolo ridondante

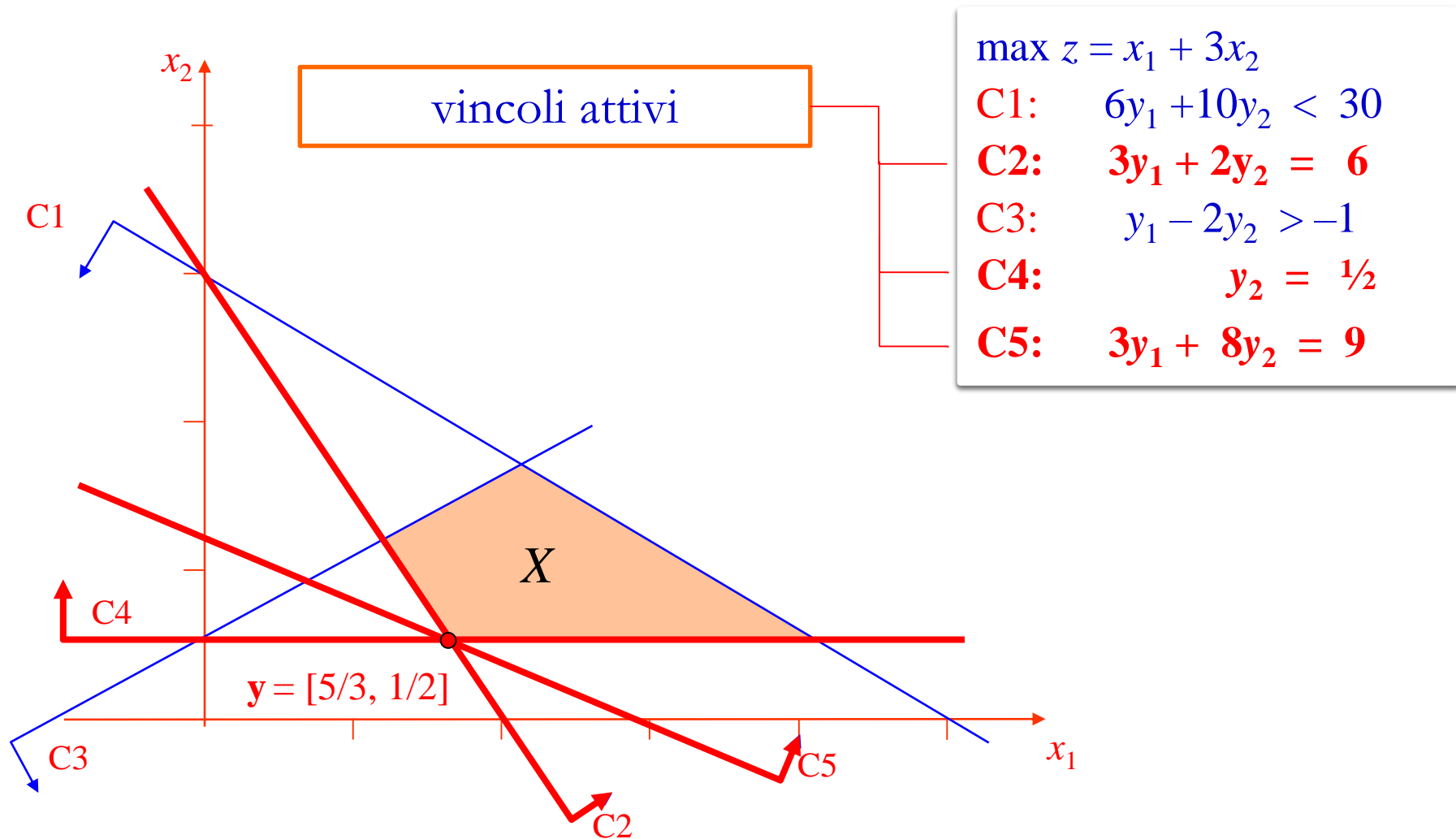
# Notazione e definizioni di base



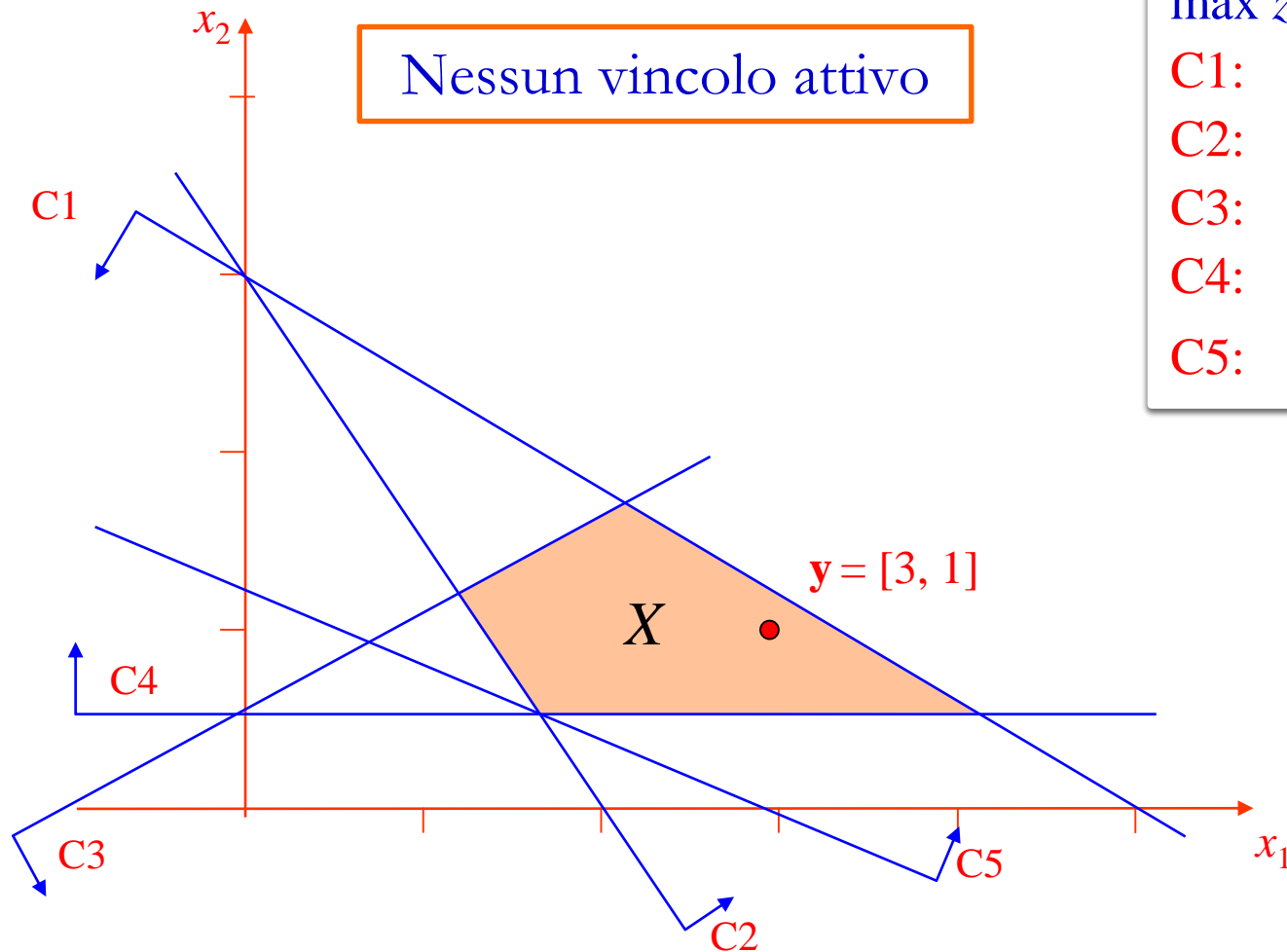
# Notazione e definizioni di base



# Notazione e definizioni di base



# Notazione e definizioni di base



$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{C1: } 6y_1 + 10y_2 < 30$$

$$\text{C2: } 3y_1 + 2y_2 > 6$$

$$\text{C3: } y_1 - 2y_2 > -1$$

$$\text{C4: } y_2 > \frac{1}{2}$$

$$\text{C5: } 3y_1 + 8y_2 > 9$$

# Soluzione di un problema di PL

► Un problema di PL (in forma di **massimo**) può

1. essere *ammissibile* con una o più *soluzioni ottime finite*.

La soluzione  $\mathbf{x} \in X$  è ottima se  $\forall \mathbf{y} \in X \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ .

2. essere vuoto o *inammissibile* ( $X = \emptyset$ )

3. essere *illimitato* superiormente; ciò accade quando

$$\forall \delta \in \mathbb{R} \quad \exists \mathbf{x} \in X : \mathbf{c}^T \mathbf{x} > \delta$$

Risolvere un problema di PL significa determinare se è *illimitato* o *inammissibile*, ovvero produrre **una** soluzione *ottima finita*.



# Equivalenza tra problemi di PL

Due problemi di PL,  $P_1$  con regione ammissibile  $X_1$  e  $P_2$  con regione ammissibile  $X_2$ , sono *equivalenti* se e solo se

- sono entrambi inammissibili, oppure se
- sono entrambi illimitati, oppure se
- esistono due trasformazioni  $\theta: X_1 \rightarrow X_2$  e  $\sigma: X_2 \rightarrow X_1$  tali che  
 $\forall \mathbf{x} \in P_1$  esiste una soluzione  $\theta(\mathbf{x})$  di  $P_2$  di pari costo e  
 $\forall \mathbf{x} \in P_2$  esiste una soluzione  $\sigma(\mathbf{x})$  di  $P_1$  di pari costo

**[Nota]** L'equivalenza dei problemi di PL non riguarda la dimensione dei problemi (numero di variabili e vincoli)

# Trasformazioni (1)

Le seguenti regole trasformano un problema di PL in uno equivalente che tuttavia può avere un **numero diverso** di variabili e vincoli.

- [Regola 1]

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \equiv - \min (-\mathbf{c})^T \mathbf{x}$$

Un problema di massimo si trasforma in un problema di minimo equivalente cambiando il segno ai coefficienti di costo

- [Regola 2]

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^T \mathbf{x} + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Un vincolo di  $\leq$  si trasforma in un vincolo di uguaglianza sommando a  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$  una variabile non negativa (detta *variabile di slack*)

- [Regola 3]

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^T \mathbf{x} - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Un vincolo di  $\geq$  si trasforma in un vincolo di uguaglianza sottraendo a  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$  una variabile non negativa (detta *variabile di surplus*)

# Trasformazioni (2)

- [Regola 4]

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \equiv (-\mathbf{a})^T \mathbf{x} \leq -b$$

Un vincolo di  $\geq$  si trasforma in un vincolo di  $\leq$  (e viceversa) cambiando il segno dei coefficienti e del termine noto

- [Regola 5]

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b \\ \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \end{cases}$$

Un vincolo di uguaglianza può essere sostituito da una coppia di vincoli di  $\leq$  e  $\geq$

- [Regola 6]

$$x \in \mathbb{R} \equiv \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+ \geq 0, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Una variabile non vincolata può essere rimpiazzata dalla differenza di due variabili vincolate.

In alternativa  $x$  può essere ricavata da una equazione e sostituita negli altri vincoli.

# Forme dei problemi di PL

- Problema in *forma generale*:

$$z = \max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

$$z = \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

- Problema in *forma standard*:

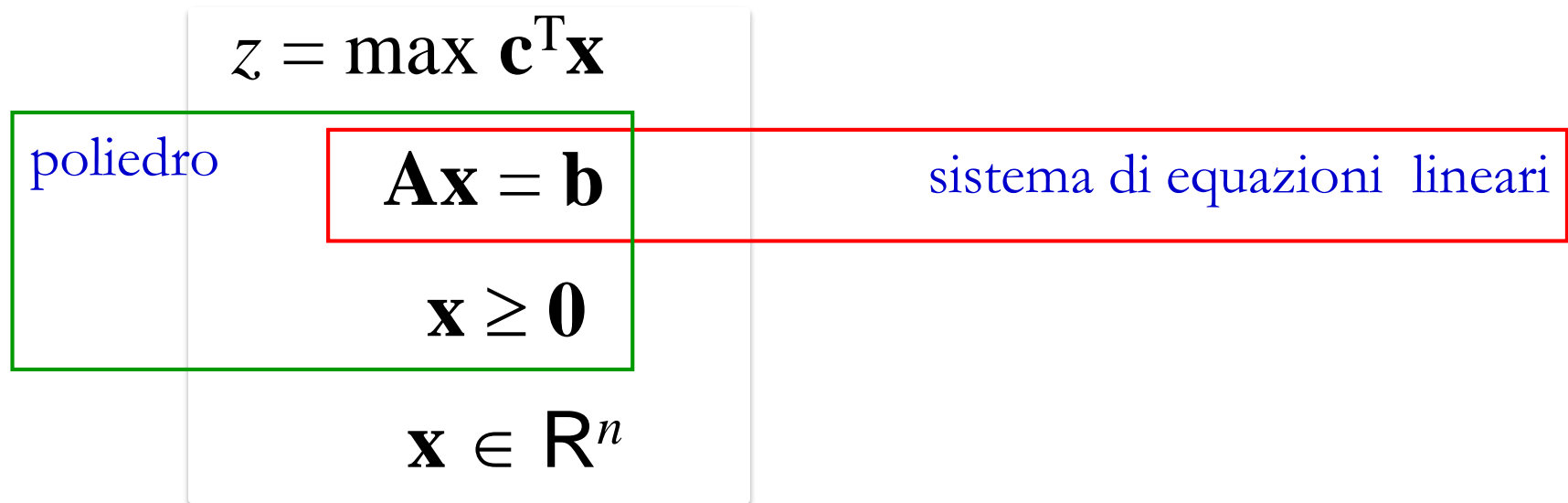
$$z = \max / \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

- Utilizzando le Regole 1 – 6, un problema in forma generale può sempre essere posto in forma standard e viceversa.

**[Proposizione]** Ogni problema di PL può essere posto in forma generale o standard.

# La Programmazione Lineare (PL)

Un modello di **Programmazione Lineare**



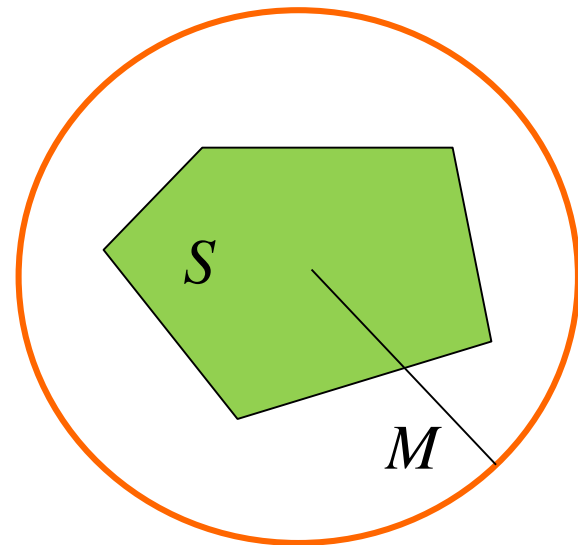
# Geometria della PL

# poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

**[Definizione]** Un **poliedro** è l'intersezione di un numero finito  $m$  di semispazi affini di  $\mathbb{R}^n$ .

**[Definizione]** Un **politopo** è un poliedro limitato.

Un insieme  $S \subset \mathbb{R}^n$  si dice **limitato** se esiste una costante  $M$  tale che ogni componente di ogni elemento di  $S$  è limitato, in valore assoluto, da  $M$ .



# poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

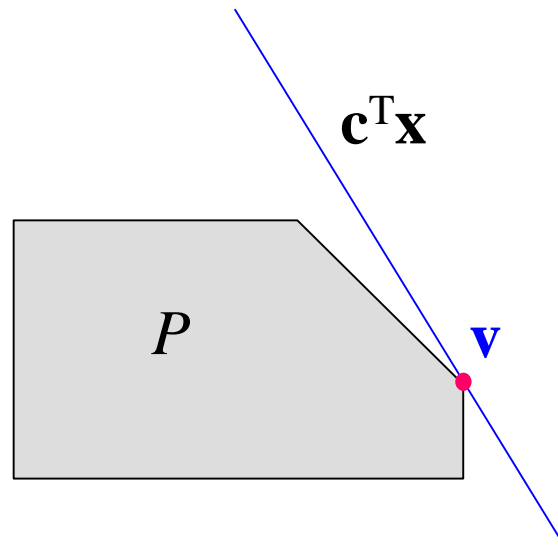
**[Osservazione]** Ogni sistema di equazioni/disequazioni lineari definisce un poliedro. In particolare:

- $\emptyset, \mathbf{R}^n$  sono poliedri;
- la regione ammissibile  $X = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} \subseteq \mathbf{R}^n$  di un problema di PL è un poliedro indicato con  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ;
- una sfera **non è** un poliedro.



vertici

**[Definizione]** un punto  $\mathbf{v}$  di un poliedro  $P$  si dice **vertice** di  $P$  se esiste un vettore  $\mathbf{c}$  tale che  $\mathbf{c}^T \mathbf{v} < \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  per tutti gli  $\mathbf{x} \in P$  diversi da  $\mathbf{v}$



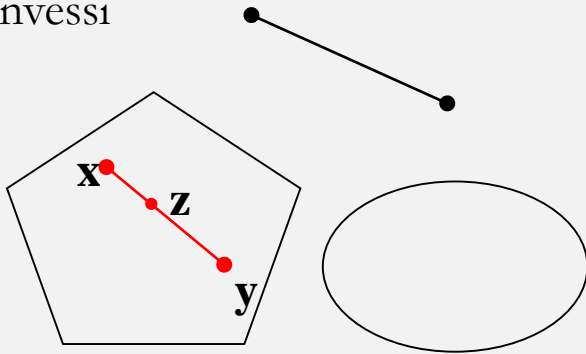
In altre parole  $\mathbf{v}$  è un vertice di  $P$  se esiste **una qualche** funzione obiettivo  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  per la quale  $\mathbf{v}$  è **l'unica** soluzione ottima del problema di PL associato a  $P$ .

# Insiemi convessi

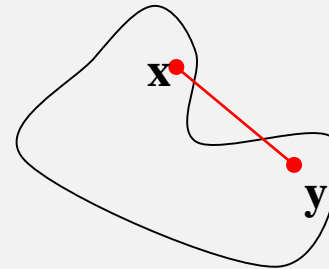
**[Definizione]** un insieme  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  è **convesso** se  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  ogni loro *combinazione convessa* appartiene a  $Q$ , cioè:

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in Q \quad \text{per ogni } \lambda \in [0,1]$$

insiemi convessi



insieme non convesso

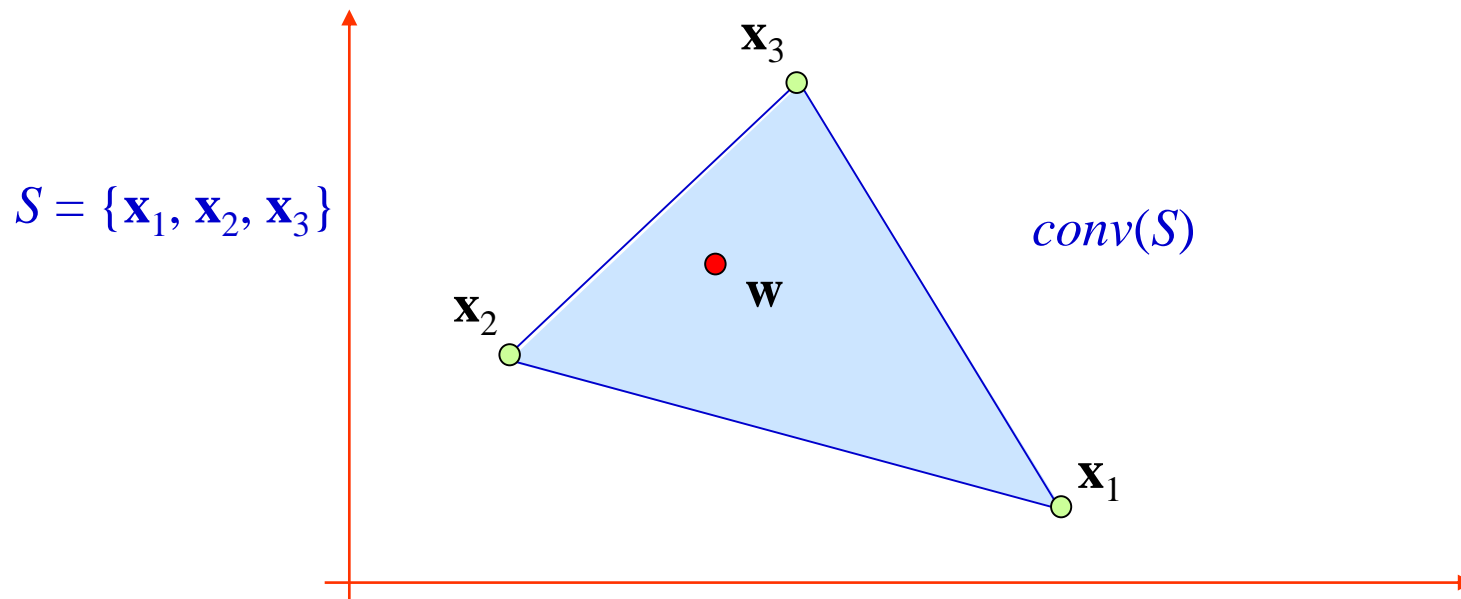


in generale un vettore  $\mathbf{w}$  è **combinazione convessa** di  $m$  vettori  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$  se

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$$

# Involucro convesso

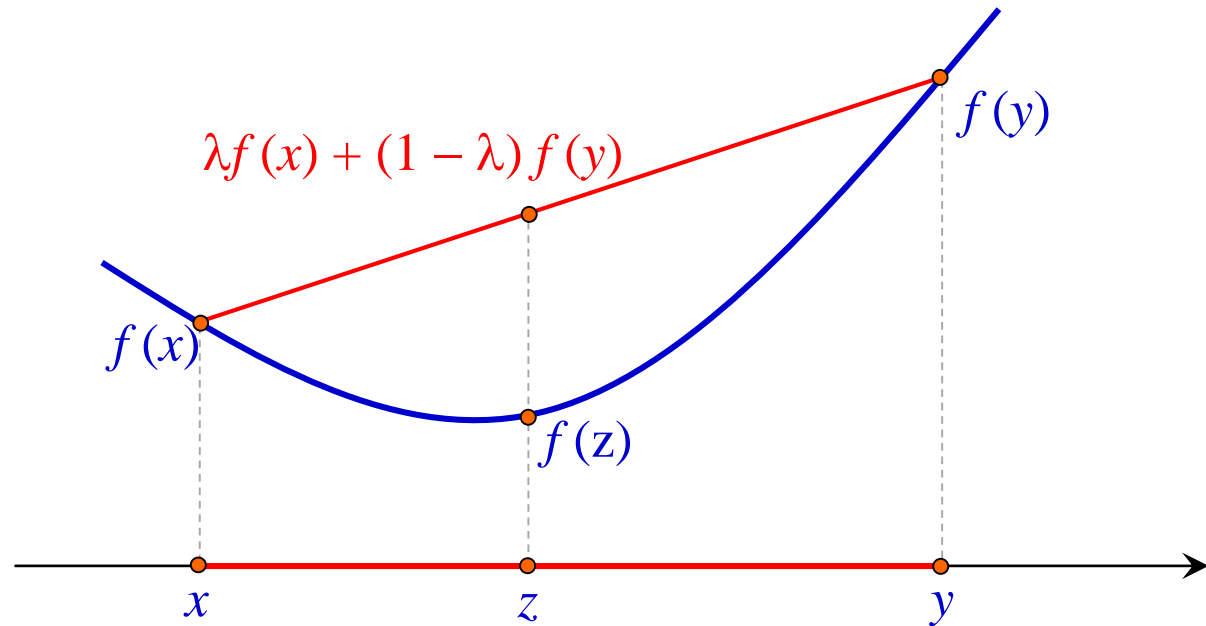
**[Definizione]** L'involucro convesso di  $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$  è l'insieme  $\text{conv}(S) \subseteq \mathbb{R}^n$  di tutte le combinazioni convesse di vettori in  $S$ .



# Funzioni convesse

**[Definizione]** una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è **convessa** se  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in [0,1]$  e  $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$  si ha

$$f(\mathbf{z}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$$



**[Proposizione]** Un problema di PL è un problema di ottimizzazione convessa.

# Ottimizzazione convessa

Consideriamo un problema  $P$  di **ottimizzazione convessa**, cioè un problema in cui la funzione obiettivo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa e la regione ammissibile  $X$  è un insieme convesso

$$z = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$$

**[Proposizione]** Ogni ottimo locale  $\mathbf{x}'$  di  $P$  è anche un ottimo globale.

# Teorema fondamentale della PL

**[Teorema]** di rappresentazione *interna* (Weyl-Minkowski, 1936)

(caso limitato):

Un poliedro  $P$  non vuoto e limitato (*polìtopo*) coincide con l'inviluppo convesso dei suoi vertici

**[Teorema]** fondamentale della PL

Se un problema di PL ammette un ottimo finito allora esiste una soluzione ottima che è un *vertice* di  $P$ .

# Osservazioni

- Il teorema fondamentale della PL richiede la conoscenza della *rappresentazione interna* del poliedro. In generale però un problema di PL è descritto da un sistema di equazioni/disequazioni lineari (*rappresentazione esterna*).
- Se il problema è posto in forma standard  $P: \max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$ , una qualsiasi soluzione ammissibile di  $P$  è *anche* una soluzione del sistema di equazioni lineari  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  (ma **attenzione!** non vale il viceversa)

# Sistemi di equazioni lineari e Programmazione lineare



# Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari in  $m$  equazioni e  $n$  incognite (con  $m \leq n$ ) ha la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

# Sistemi di equazioni lineari

In forma compatta il sistema si scrive

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{con } \mathbf{A} (m \times n), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

oppure

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \dots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{b}$$

o anche

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = b_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} = b_m \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{A} | \mathbf{b}$  ottenuta giustapponendo il vettore  $\mathbf{b}$  alla matrice  $\mathbf{A}$  viene detta *matrice estesa* (o *completa*).

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_3 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_4 = \frac{47}{5} \\ x_5 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{73}{5} \end{cases}$$

# Matrice di base

**[Definizione]** Una matrice di base è una sottomatrice quadrata  $\mathbf{B}$  di  $\mathbf{A}(m \times n)$  non singolare, cioè con  $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ , e di ordine  $m$ .

Si dice che  $\mathbf{B}(m \times m)$  è una matrice *di base* perché è formata da  $m$  vettori linearmente indipendenti che quindi costituiscono una base per lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^m$ .

$\mathbf{A}(3 \times 5)$					$\mathbf{b}$
1	2	0	1	0	7
0	1	1	1	1	24
1	0	-3	0	2	8
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	

$$\mathbf{B}(3 \times 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$  è una matrice *di base* perché è quadrata di ordine 3 e non singolare

# Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Una volta individuata una matrice di base **B**, la matrice **A** può essere riscritta separando le colonne in base dalle colonne fuori base:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}] \quad \text{con } \mathbf{B}(m \times m) \text{ e } \mathbf{N}(m \times n - m)$$

<b>B</b> (3×3)			<b>N</b> (3×2)		<b>b</b>
1	0	0	2	1	7
0	1	1	1	1	24
1	-3	2	0	0	8
$x_1$	$x_3$	$x_5$	$x_2$	$x_4$	

# Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Coerentemente, il vettore  $\mathbf{x}$  delle incognite può essere scritto come:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m \text{ componenti:} \\ n - m \text{ componenti:} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{variabili di base} \\ \text{variabili fuori base} \end{array}$$

$\mathbf{B}(3 \times 3)$			$\mathbf{N}(3 \times 2)$		$\mathbf{b}$
1	0	0	2	1	7
0	1	1	1	1	24
1	-3	2	0	0	8
$x_1$	$x_3$	$x_5$	$x_2$	$x_4$	

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{array}$$

# Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Con questa notazione, il sistema lineare

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  può essere riscritto come:  $[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b}$  cioè

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

# Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Applicare il metodo di Gauss-Jordan equivale a invertire  $\mathbf{B}$  (l'inversa  $\mathbf{B}^{-1}$  esiste perché  $\mathbf{B}$  è non singolare). Analiticamente:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

pre-moltiplicando per  $\mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

cioè

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A}^{(3)} | \mathbf{b}^{(3)}) = \begin{array}{c|cc|cc|c} & \mathbf{I} & & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} & & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ & 0 & 1 & 0 & 4/5 & 3/5 & 47/5 \\ & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 73/5 \\ \hline x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 47/5 \\ 73/5 \end{bmatrix}$$



# Soluzione di sistemi di equazioni lineari

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

da cui

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N$$

Segue che la soluzione del sistema associata alla base  $\mathbf{B}$  è :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$$

Il sistema ha  $n - m > 0$  gradi di libertà (e quindi infinite soluzioni) dato che le  $n - m$  componenti non in base di  $\mathbf{x}_N$  possono assumere valori arbitrari.

Ponendo  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  si ottiene la soluzione:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

# Soluzione di Base (Ammissibile) – SBA

**[Definizione]** La particolare soluzione  $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$  del sistema, che si ottiene annullando le componenti fuori base, è detta **soluzione di base** associata alla matrice di base  $\mathbf{B}$

Considerando il problema di PL in **forma standard**

$$P: \max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \quad \text{allora}$$

**[Definizione]** Se  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  allora  $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$  è *anche* una soluzione del problema  $P$  e per questo è detta **soluzione di base ammissibile**, in breve **SBA**, di  $P$

# Soluzione di Base (Ammissibile) – SBA

Il sistema finale rispetto alla Base  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$  è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 47/5 \\ 73/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_3 + 4/5 x_2 + 3/5 x_4 = 47/5 \\ x_5 + 1/5 x_2 + 2/5 x_4 = 73/5 \end{cases}$$

Ponendo  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_3 = 47/5 \\ x_5 = 73/5 \end{cases}$$

La **soluzione di base** è  $\mathbf{x} = [7 \quad \underbrace{47/5 \quad 73/5}_{\mathbf{x}_B} \quad \underbrace{0 \quad 0}_{\mathbf{x}_N}]$

La soluzione è anche una **soluzione di base ammissibile**

# Il ponte tra geometria e algebra

Il teorema fondamentale della PL afferma che se esiste una soluzione ottima, esiste un vertice ottimo.

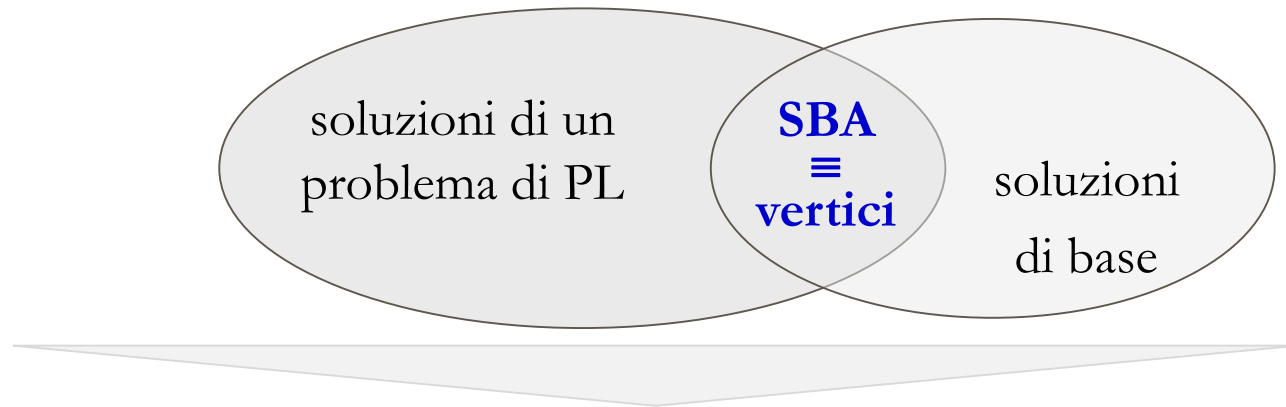
Se il problema è posto in forma standard, il metodo di Gauss-Jordan permette di calcolare analiticamente una soluzione (ammissibile) di base



Qual è il legame tra **vertici** e **SBA** ?

# Vertici e SBA

**[Teorema]** Un vettore  $\mathbf{v}$  è una **SBA** di un problema  $P$  di PL se e solo se è un **vertice** del poliedro associato  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .



Enumerare le **SBA** di  $P$  equivale a enumerare i **vertici** del poliedro  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Nonostante le variabili siano **continue**, un problema di PL ha una struttura **discreta**: se esiste, si può ottenere una soluzione ottima **generando esplicitamente tutte le SBA**

# Un algoritmo per la PL

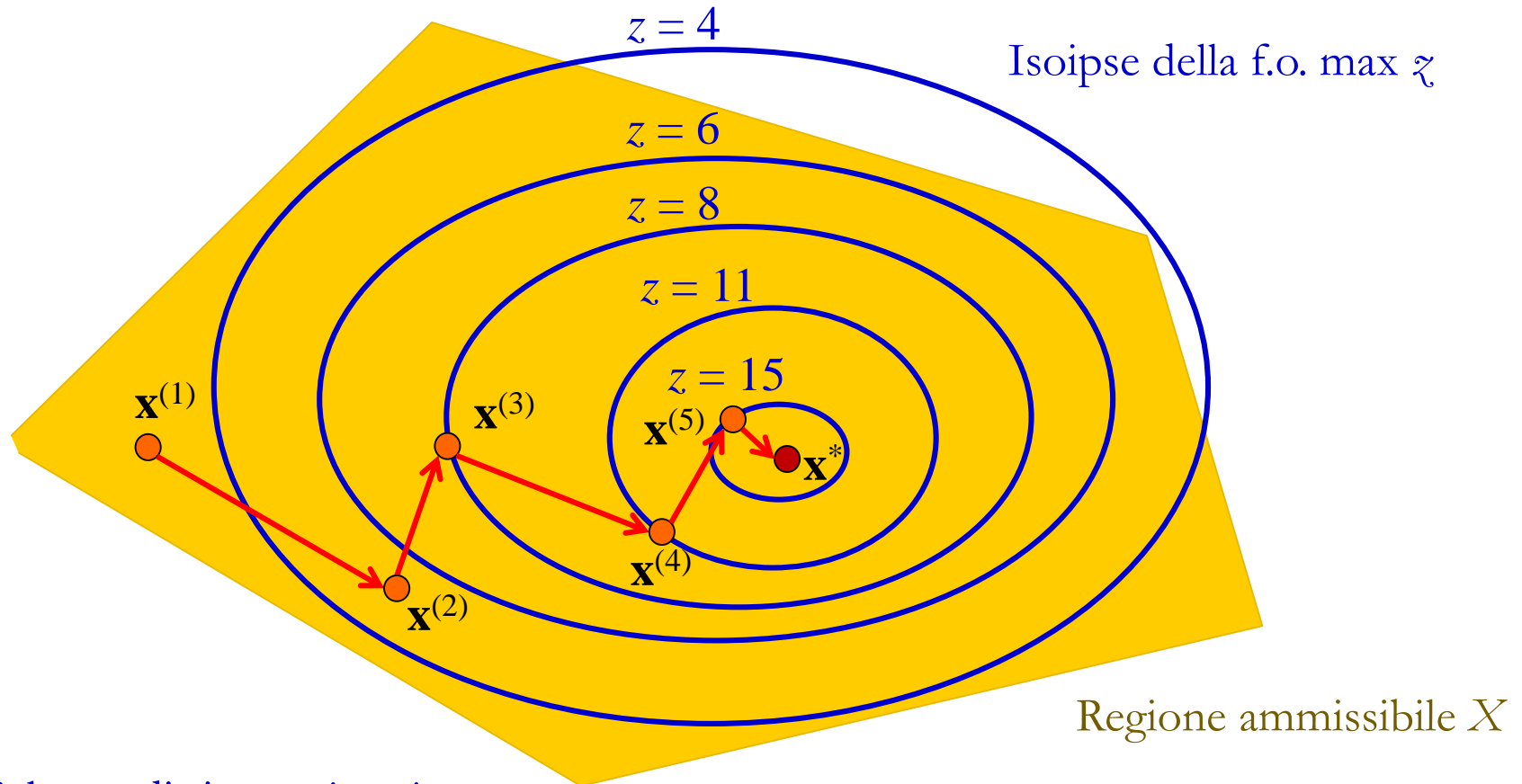
Il numero di **basi** (e di **SBA**) è al più pari ai possibili modi di scegliere  $m$  tra le  $n$  colonne della matrice  $\mathbf{A}(m \times n)$  – le *combinazioni semplici*. Questa quantità è data dal *coefficiente binomiale*

$$C_{(n,m)} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Il coefficiente binomiale è un numero che cresce *molto velocemente*

# Algoritmo del simplesso

# Algoritmi iterativi di ottimizzazione



## ► Schema di ricerca *iterativo*

Idea generale: determinare una successione di soluzioni ammissibili che converga a un punto stazionario (o a una soluzione che soddisfi un criterio di ottimalità prestabilito)

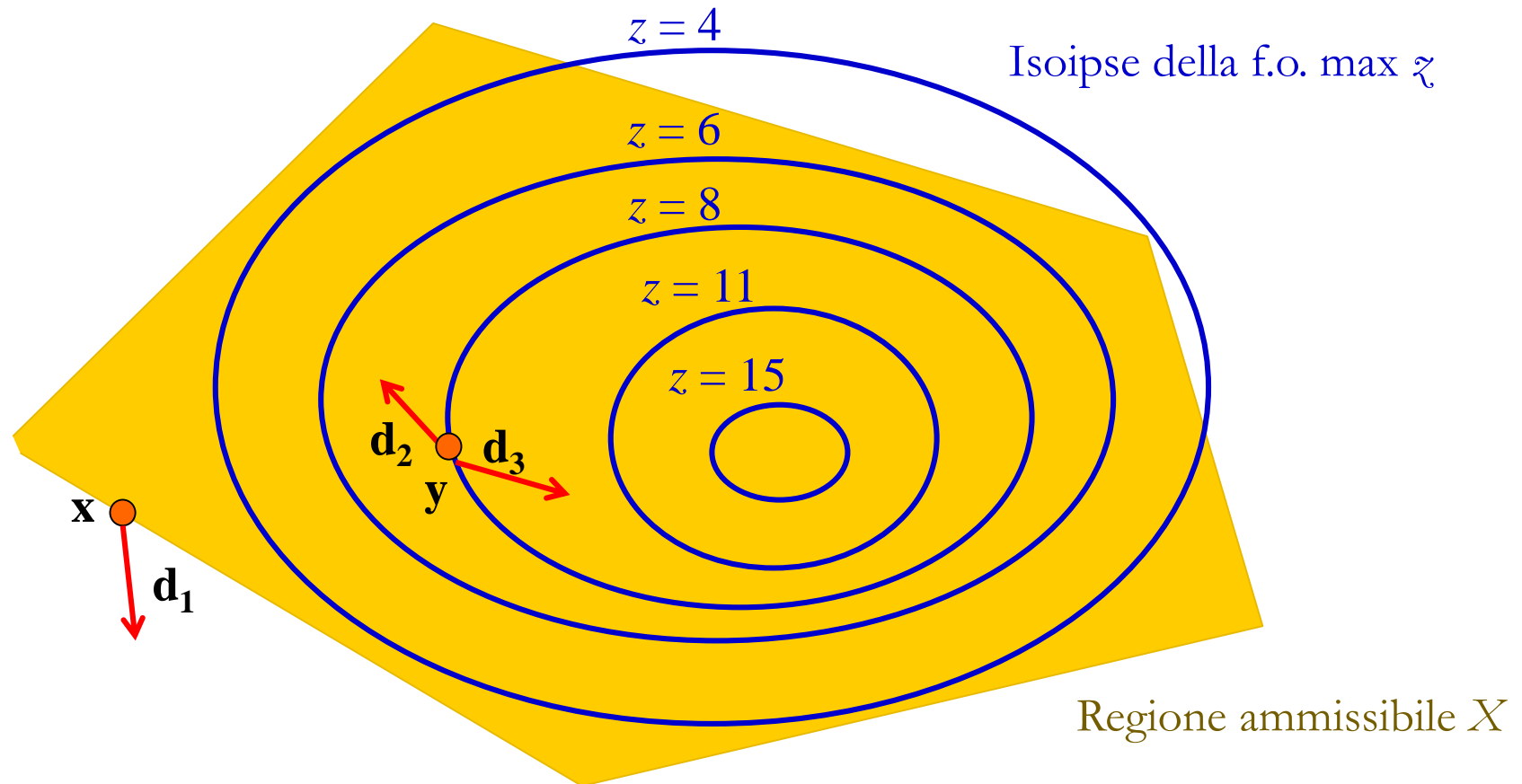


# Algoritmi iterativi di ottimizzazione

► Algoritmo *iterativo di discesa (o di ascesa)*:

1. Si parte da una soluzione ammissibile  $\mathbf{x}$  (se esiste)
2. Si esplora un opportuno **intorno** di  $\mathbf{x}$  allo scopo di individuare una **direzione**  $\mathbf{d}$  che sia *ammissibile* e *migliorante* rispetto alla funzione obiettivo
3. se  $\mathbf{d}$  esiste ci si sposta di una certa **ampiezza** lungo tale direzione in un nuovo punto ammissibile  $\mathbf{x}'$  e si torna al punto 2.
4. se  $\mathbf{d}$  non esiste,  $\mathbf{x}'$  è un minimo locale; l'algoritmo termina.

# Esempio: direzioni ammissibili e miglioranti



- $d_1$  è una direzione non ammissibile
- $d_2$  è una direzione ammissibile ma non migliorante
- $d_3$  è una direzione ammissibile e migliorante

# Algoritmi iterativi e algoritmo del simplesso

## Algoritmo del simplesso (Dantzig, 1947)

algoritmo iterativo di discesa in cui:

- le soluzioni ammissibili esplorate sono i **vertici** del poliedro;
- le direzioni ammissibili sono gli **spigoli** del poliedro.

### ► Caratteristiche principali

- termina sempre in un numero finito di passi;
- Oltre al calcolo della soluzione ottima, è in grado di individuare i casi di inammissibilità e illimitatezza;
- anche se di natura esponenziale, è mediamente efficiente (risolve problemi con milioni di variabili e vincoli in pochi secondi)

# Algoritmo del simplesso

1. **Inizializzazione:** Si individua (se esiste) un vertice  $\mathbf{v}$  di partenza.
2. **Valutazione dell'intorno:** Si valutano le direzioni  $\mathbf{d}$  corrispondenti agli spigoli che toccano  $\mathbf{v}$  (**intorno** di  $\mathbf{v}$ )
  - a) **Illimitatezza:** Se una di queste è un «raggio del poliedro» lungo il quale la funzione obiettivo migliora, il problema è illimitato.
  - b) **Spostamento:** se esiste una direzione  $\mathbf{d}$  che conduce a un vertice  $\mathbf{w}$  in cui la funzione obiettivo migliora,  $\mathbf{w}$  diventa il nuovo vertice corrente e si torna al punto 2.
  - c) **Ottimalità:** se tale direzione non esiste,  $\mathbf{v}$  è la soluzione ottima del problema.

# Forma *canonica*

$$\begin{aligned}\max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Una volta individuata una matrice di base  $\mathbf{B}$ , il problema può essere riscritto in funzione di  $\mathbf{B}$  come (*problema ridotto*)

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + \max (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Ponendo  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  si ottiene la soluzione di base:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

# Tabella *canonica*

I dati del problema in forma canonica possono essere organizzati in una tabella detta *tabella canonica* o *tableau*

$$\max \mathbf{0}^T \mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{I} \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

# Tabella *canonica*

I dati del problema in forma canonica possono essere organizzati in una tabella detta *tabella canonica* o *tableau*

$\max$	$\mathbf{0}^T \mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N$	$= -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
	$\mathbf{I} \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}_N$	$= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

# Tabella *canonica*

I dati del problema in forma canonica possono essere organizzati in una tabella detta *tabella canonica* o *tableau*

<i>costi ridotti <math>\pi</math></i> delle variabili <u>in base</u>	<i>costi ridotti <math>\pi</math></i> delle variabili <u>fuori base</u>	valore della f.o. (cambiato di segno) in corrispondenza della SBA
<b>0</b>	<b><math>(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})</math></b>	<b><math>-\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}</math></b>
<b><math>\mathbf{I}(m \times m)</math></b>	<b><math>\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}</math></b>	<b><math>\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}</math></b>
variabili <u>in base</u>	variabili <u>fuori base</u>	soluzione di base ammissibile



# Illimitatezza, ottimalità, spostamento

Sia  $\mathbf{B}$  una base ammissibile e  $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$  la corrispondente SBA.

**[Teorema (prob. di max)]** Se  $\pi \leq 0$  allora  $\mathbf{x}$  è ottima.

**[Teorema (prob. di max)]** Se esiste un  $\pi_j > 0$  e  $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_j \leq \mathbf{0}$  allora il problema è illimitato superiormente.

Se la base corrente non è ottima e il problema non è illimitato allora esiste una base  $\mathbf{B}'$  *adiacente* a  $\mathbf{B}$  (cioè che differisce di una sola colonna) alla quale corrisponde una SBA  $\mathbf{x}'$  non peggiore di  $\mathbf{x}$ .

Il passaggio da  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{B}'$  (lo spostamento o *cambiamento di base*) si effettua mediante una *operazione di pivot*

# Teoria della dualità

# Programmazione Lineare e dualità

Dato un programma lineare  $P$  (*problema primale*)

$$P) \quad z^* = \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad | \quad \mathbf{x} \in P$$

si può definire un programma lineare associato  $D$  (*problema duale*)

$$D) \quad w^* = \min \mathbf{y}^T \mathbf{b} \quad | \quad \mathbf{x} \in D$$

che soddisfa belle e utili proprietà

# Motivazione

$$z = \max 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\text{Errore } E \leq (z^1_U - z^3_L)$$

bound duali (... non immediati da calcolare e verificare)

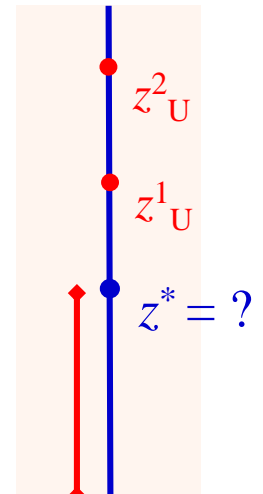
$$\text{Errore } E = (z^* - z^3_L) ?$$

soluzioni ammissibili (...di solito  
facili da calcolare e verificare)

$$\mathbf{x}^3_L = (3, 0, 2, 0) \quad z^3_L = 22$$

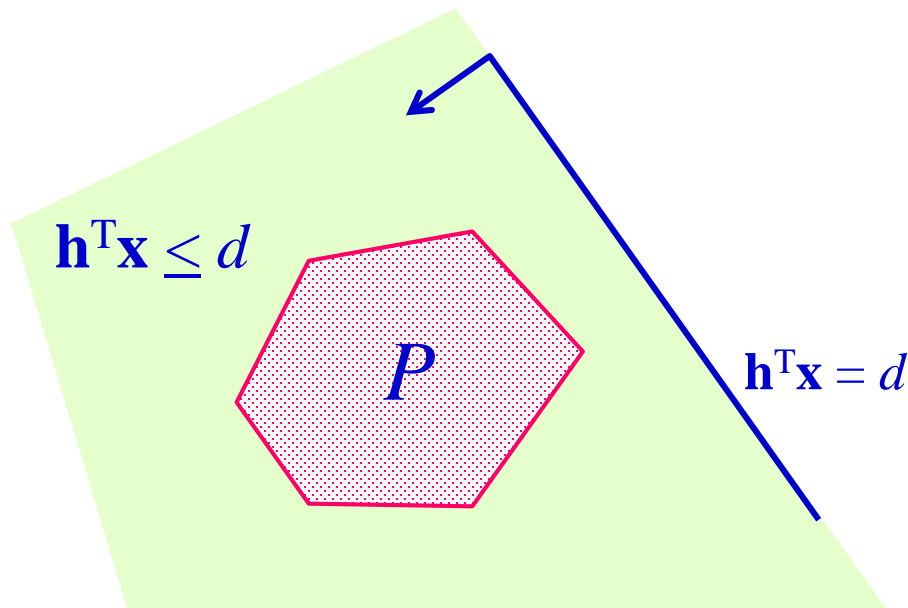
$$\mathbf{x}^2_L = (2, 1, 1, 1/3) \quad z^2_L = 15$$

$$\mathbf{x}^1_L = (0, 0, 1, 0) \quad z^1_L = 5$$



# disuguaglianze valide e combinazioni coniche

**[Definizione]**  $\mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq d$  è una **disuguaglianza valida** per un poliedro  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$  se  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq d\}$ .



Una disuguaglianza  $\mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq d$  **valida** per  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  è soddisfatta da ogni punto di  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , cioè  $\mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq d$  è un vincolo ridondante di  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

# disuguaglianze valide e combinazioni coniche

**[Teorema]** Ogni combinazione conica dei *vettori riga* della matrice estesa  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  è una disuguaglianza valida per  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**[Recall]** una disequazione  $\mathbf{d}^T \mathbf{x} \leq \delta$  è combinazione conica delle  $m$  disequazioni del sistema  $\{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i=1, \dots, m\}$  se

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i \\ \delta &= \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \end{aligned} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$$

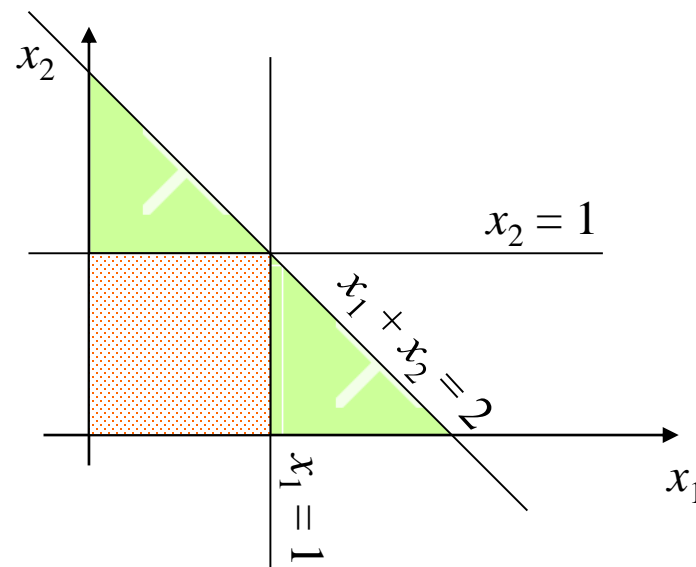
# Disuguaglianze valide: esempio

Consideriamo il poliedro  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  definito dal seguente sistema di disequazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{che in forma matriciale assume la seguente forma} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La combinazione conica dei vettori riga di  $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  con coefficienti  $\lambda = (1, 1, 0, 0)$  produce la disuguaglianza valida  $x_1 + x_2 \leq 2$

$$\begin{aligned} & 1 (1, 0, 1) + \\ & 1 (0, 1, 1) + \\ & 0 (-1, 0, 0) + \\ & \underline{0 (0, -1, 0)} = \\ & (1, 1, 2) \end{aligned}$$



# Bound duale

$$z = \max \quad 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Una combinazione conica dei vincoli che «domina la funzione obiettivo termine a termine», può essere utilizzata per derivare un bound duale

$$\lambda_1 = 0 \quad (1, -1, -1, 3, 1) +$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (5, 1, 3, 8, 55) +$$

$$\lambda_3 = 1/2 \quad (-1, 2, 3, -5, 3) =$$

$$(9.5, 3, 7.5, 13.5, 108.5)$$

dominanza termine a termine e

$$x_i \geq 0$$

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 9.5x_1 + 3x_2 + 7.5x_3 + 13.5x_4 \leq 108.5$$

$$z^* \leq 108.5 = z_U$$



# Problema duale

Il problema *duale*  $D$  di un problema di PL  $P$  (detto problema *primale*) consiste nel determinare i coefficienti  $\lambda$  che, tra tutte le disuguaglianze valide che dominano la funzione obiettivo di  $P$ , generano quella che produce il miglior bound duale per  $P$ .

# Regole generali per la costruzione del duale

- ▶ Supponiamo il primale in forma di minimo  
(il caso in forma di massimo è perfettamente speculare)

Regola 1: Il **duale** è in forma di **massimo**.

Regola 2: Esiste una **variabile duale**  $y_i$  per ogni **vincolo primale**:  
 $y_i$  sarà

- $\geq 0$  se il vincolo primale è di  $\geq$
- $\leq 0$  se il vincolo primale è di  $\leq$
- **non vincolata in segno** se il vincolo primale è di  $=$

# Regole generali per la costruzione del duale

Regola 3: i coefficienti della **funzione obiettivo duale** sono i **termini noti** del **primale**. I **termini noti** del **duale** sono i coefficienti della **funzione obiettivo primale**.

Regola 4: Esiste un **vincolo duale** per ogni **variabile primale**  $x_j$ : il vincolo sarà

- $d_i \leq$  se  $x_j$  è  $\geq 0$
- $d_i \geq$  se  $x_j$  è  $\leq 0$
- $d_i =$  se  $x_j$  è **non vincolata** in segno.
- I coefficienti dell' $i$ -esimo vincolo del duale sono i coefficienti della variabile  $x_i$  nel primale (la matrice dei coefficienti del duale è la trasposta della matrice dei coefficienti del primale)

# Schema riassuntivo

PRIMALE (P)	min	max	DUALE (D)
Coeff. costo	<b>c</b>	<b>c</b>	Termini noti
Termini noti	<b>b</b>	<b>b</b>	Coeff. costo
Vincoli	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	$\geq 0$ $\leq 0$ libera	Variabili
Variabili	$\geq 0$ $\leq 0$ libera	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	Vincoli
Coefficienti	$a_{ij}$  $\mathbf{A}(m \times n)$	$a_{ji}$  $\mathbf{A}^T(n \times m)$	Coefficienti

# Un esempio

Problema primale	P)	min	$5x_1 - x_2 + 2x_3$		
	$y_1$ :		$x_1 + 4x_2 - 6x_3$	$\leq$	6
	$y_2$ :		$2x_1 - x_3$	$=$	4
	$y_3$ :		$2x_1 + 3x_2$	$\geq$	5
			$x_2, x_3$	$\geq$	0

Il duale è un problema di **massimizzazione** con variabili  $y_1, y_2, y_3$ .

- 1° vincolo del primale è  $\leq$  quindi  $y_1 \leq 0$ .
- 2° vincolo del primale è  $=$  quindi  $y_2$  è libera.
- 3° vincolo del primale è  $\geq$  quindi  $y_3 \geq 0$ .

Problema primale	P)	min	$5x_1 - x_2 + 2x_3$	
	$\mathcal{J}_1:$		$x_1 + 4x_2 - 6x_3$	$\leq 6$
	$\mathcal{J}_2:$		$2x_1 - x_3$	$= 4$
	$\mathcal{J}_3:$		$2x_1 + 3x_2$	$\geq 5$
			$x_2, x_3$	$\geq 0$

- I coeff. della f. obiettivo del duale sono i termini noti del primale.
- i termini noti del duale sono i coeff. della f. obiettivo del primale.
- $x_1$  è libera, quindi il 1° vincolo del duale è di  $=$ .
- $x_2, x_3 \geq 0$ , quindi il 2° e 3° vincolo del duale sono di  $\leq$ .

Problema primale      P)      min       $5x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + 4x_2 - 6x_3 & \leq & 6 \\
 2x_1 & - & x_3 = 4 \\
 2x_1 + 3x_2 & \geq & 5 \\
 x_2, x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

- I coeff. del 1° vincolo del duale sono i coeff. di  $x_1$ .
- I coeff. del 2° vincolo del duale sono i coeff. di  $x_2$ .
- I coeff. del 3° vincolo del duale sono i coeff. di  $x_3$ .

Problema primale      P)      min       $5x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 6x_3 &\leq 6 \\ 2x_1 &\quad - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\quad &\geq 5 \\ x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema duale      D)      max       $6y_1 + 4y_2 + 5y_3$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 2y_3 &= 5 \\ 4y_1 &\quad + 3y_3 &\leq -1 \\ -6y_1 &\quad - y_2 &\leq 2 \\ y_1 &\leq 0, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$



# La teoria della dualità in una slide

Si consideri una coppia *primale-duale* di problemi di PL

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in P \qquad \min w = \mathbf{y}^T \mathbf{b} \mid \mathbf{y} \in D$$

## [Teorema] reciprocità (o idempotenza)

Il problema  $P$  è il duale del problema  $D$

## [Teorema] dualità debole

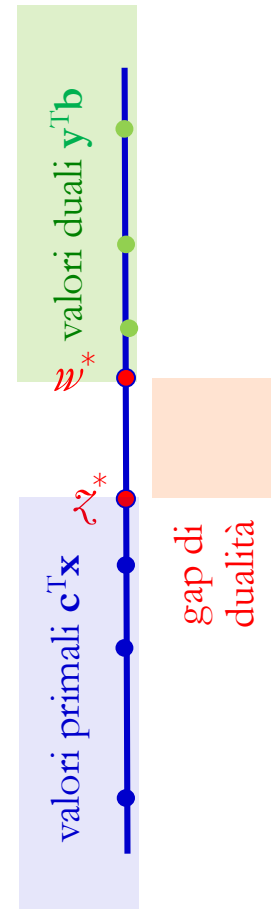
Per ogni coppia di soluzioni  $\mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in D$  si ha  $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

## [Corollario]

Se  $\mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in D$  e  $\mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , allora  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono soluzioni ottime rispettivamente per  $P$  e per  $D$ .

## [Corollario]

- Se  $P$  è *illimitato superiormente* allora  $D$  non ammette soluzione.
- Se  $D$  è *illimitato inferiormente* allora  $P$  non ammette soluzione.



# La teoria della dualità in una slide... due slide

Si consideri una coppia *primale-duale* di problemi di PL

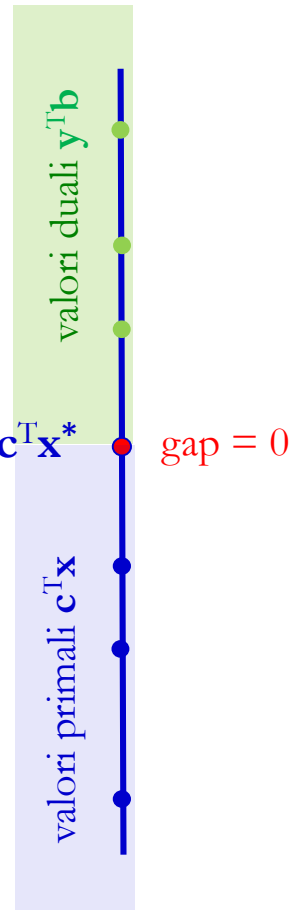
$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in P \qquad \min w = \mathbf{y}^T \mathbf{b} \mid \mathbf{y} \in D$$

$$z^* = w^* = \mathbf{y}^{*T} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \quad \text{gap} = 0$$

## [Teorema] dualità forte

Se  $\mathbf{x}^* \in P$  è una soluzione ottima per il problema primale, allora esiste una soluzione ottima  $\mathbf{y}^* \in D$  per il problema duale, e

$$\mathbf{y}^{*T} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*.$$



# Prospetto riassuntivo

	P illimitato	$P = \emptyset$	P ammette ottimo finito
D illimitato	impossibile	possibile	impossibile
$D = \emptyset$	possibile	possibile	impossibile
D ammette ottimo finito	impossibile	impossibile	possibile

# Condizioni di ortogonalità

$$P: \quad z^* = \max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$D: \quad w^* = \min \mathbf{y}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

- $p_i = b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}$  slack dell' $i$ -esimo vincolo di  $P$
- $s_j = \mathbf{y}^T \mathbf{A}_j - c_j$  surplus del  $j$ -esimo vincolo di  $D$

## [Teorema] ortogonalità o complementarità

$\mathbf{x} \in P$  e  $\mathbf{y} \in D$  sono ottime se e solo se

- $x_j s_j = 0 \quad \forall j$
- $y_i p_i = 0 \quad \forall i$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{s} = 0$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{p} = 0$$

All'ottimo, non possono essere contemporaneamente  $> 0$

- una variabile primale  $x_j$  e la surplus  $s_j = \mathbf{y}^T \mathbf{A}_j - c_j$  del vincolo corrispondente duale (quindi se  $x_j > 0$ , l' $i$ -esimo vincolo del duale deve essere attivo);
- una variabile duale  $y_i$  e la slack  $p_i = b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}$  del vincolo corrispondente primale (quindi se  $y_j > 0$ , l' $i$ -esimo vincolo del primale deve essere attivo).

# Testi di approfondimento

1. A. Sassano  
***Modelli e Algoritmi della Ricerca Operativa***  
Franco Angeli, Milano, 1999
2. M. Fischetti  
***Lezioni di Ricerca Operativa***  
Edizioni Libreria Progetto Padova, 1999
3. D. Bertsimas and J.N. Tsitsiklis  
***Introduction to Linear Optimization***  
Athena Scientific, Belmont, Massachusetts
4. Nemhauser G.L. and L. A. Wolsey  
***Integer and Combinatorial Optimization***  
John Wiley & Sons, Inc, New York, 1988.