

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(w) \cdot e^{j\omega t} dw \rightarrow \text{transf. di Fourier (somma di funz. ortogonali tra loro)}$$

REGIME SINUOSIDALE: sorgenti che variano nel tempo con legge sinusoidale, tutte alla stessa pulsazione $\omega = 2\pi f$
 Se il mezzo è lineare \Rightarrow i campi variano con la medesima legge temporale. \rightarrow non ha più l'incognita di come varia \bar{E}

Ex: $\bar{E}(\bar{n}, t) = \bar{E}_0(\bar{n}) \cos(\omega t + \varphi(\bar{n}))$, φ è la fase

$$\Downarrow \quad \tilde{F}[\bar{E}] = \underline{\text{fase di } \bar{E}}$$

$$\bar{E}(\bar{n}, t) = \text{Re} [\tilde{E} \cdot e^{j\omega t}]$$

Dl vettore, funzione del punto :

$$\tilde{E}(\bar{n}) = E_0(\bar{n}) e^{j\varphi(\bar{n})}$$

si dice fase corrispondente al campo \bar{E}

SUPERFICIE EQUIFASE:

- luogo dei punti in cui $\varphi(\vec{r}) = \text{costante}$

- piani ortogonali alla direzione di propagazione (la fase si mantiene costante)

FASE ISTANTANEA: $wt + \varphi(\vec{r})$

FRONTE D'ONDA: $wt + \varphi(\vec{r}) = \varphi_0$

all'istante t il fronte d'onda corrispondente alla fase istantanea φ_0 coincide con la superficie equifase $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 - wt$

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \operatorname{Re}(\tilde{E} \cdot e^{j\omega t}) \\ \bar{H} &= \operatorname{Re}(\tilde{H} \cdot e^{j\omega t})\end{aligned} \Rightarrow \nabla \times \bar{E} = \nabla \times \operatorname{Re}[\tilde{E} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\tilde{e}^{j\omega t} \cdot \nabla \times \tilde{E}] = -\mu_0 \partial_t \operatorname{Re}[\tilde{H} \cdot e^{j\omega t}] = -\mu_0 \cdot \operatorname{Re}[j\omega \cdot \tilde{H} \cdot \tilde{e}^{j\omega t}]$$

$$\operatorname{Re}[\tilde{e}^{j\omega t} \cdot \nabla \times \tilde{E} + j\omega \mu_0 \tilde{H}] = 0$$

Analogamente:

$$\nabla \times \tilde{E} = -j\omega \mu_0 \tilde{H}$$

$$\nabla \times \tilde{H} = j\omega \epsilon_0 \tilde{E}$$

(caso E_x, H_y)

Equazione d'onda per i fasori

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Re} \left\{ \tilde{E}_x \exp(j\omega t) \right\}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \left\{ \tilde{E}_x \exp(j\omega t) \right\}}{\partial t^2}$$
$$= -\omega^2 \mu\epsilon \operatorname{Re} \left\{ \tilde{E}_x \exp(j\omega t) \right\}$$

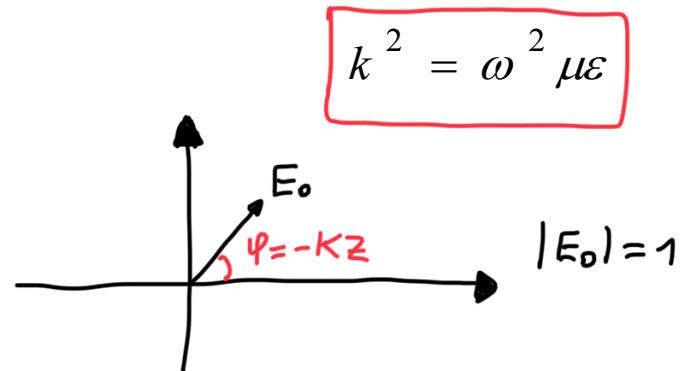
Vera se:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu\epsilon \hat{E}_x$$

eq. d'onda in un mezzo lineare
con sorgenti che variano come
 $\cos(\omega t + \psi)$

$$\tilde{E}_x = \tilde{E}_x^+ + \tilde{E}_x^- = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}$$

$$\eta \tilde{H}_y = E_0^+ e^{-jkz} - E_0^- e^{jkz}$$



Come posso calcolare \tilde{H}_y dato \tilde{E}_x ?

$$\nabla \times \tilde{E} = -\omega \mu_0 \tilde{H} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tilde{H}} = -\frac{1}{\omega \mu_0} \nabla \times \tilde{E} = -\frac{1}{\omega \mu_0} \cdot \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \tilde{E}_x & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{-\frac{1}{\omega \mu_0} \partial_z \tilde{E}_x \hat{y}}$$

In assenza di sorgenti (le sorgenti ci sono eccome, sono sinusoidali e variano con pulsazione ω . Semplicemente non sono nella porzione di spazio che stiamo osservando!)

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \tilde{\mathbf{H}}$$

$$\partial_x = \partial_y = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu \tilde{H}_y$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = j\omega\mu \tilde{H}_x$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = -j\omega\epsilon \tilde{E}_x$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} = j\omega\epsilon \tilde{E}_y$$

$$\tilde{E}_z = \tilde{H}_z = 0$$

Equazione di Helmholtz monodimensionale

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \tilde{E}_x$$

$$\tilde{E}_x(z) = E_0^+ \exp(-jkz) + E_0^- \exp(+jkz)$$

$[z] = m$

\uparrow
 $[k] = m^{-1}$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

NUMERO D'ONDA o COSTANTE DI FASE

$$E_x(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{E}_x(z) \exp(j\omega t) \right\} =$$

$$\operatorname{Re} \left\{ E_0^+ \exp[j(\omega t - kz)] + E_0^- \exp[j(\omega t + kz)] \right\} =$$

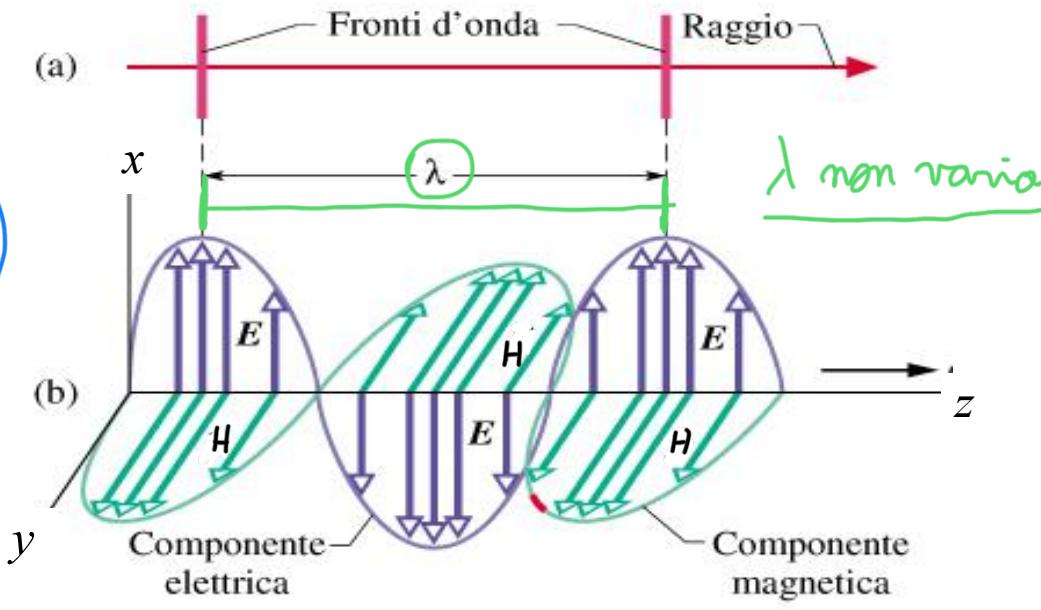
E_0^+ e E_0^- reali

$$wt - kz = w(t - \frac{k}{w}z) \Rightarrow r = \frac{w}{k} = \frac{w}{w\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$= \overbrace{E_0^+ \cos(\omega t - kz)}^{\text{onda progressiva}} + \overbrace{E_0^- \cos(\omega t + kz)}^{\text{onda regressiva}} =$$

$$= E_0^+ \cos [\omega(t - z/v)] + E_0^- \cos [\omega(t + z/v)]$$

Bprendendo dei piani trasversali a z , otterrei valori di \bar{E} ed \bar{H} identici per ognuno di loro



$$\frac{E_x(z,t)}{H_y(z,t)} = \eta$$

campo \bar{E} e \bar{H}
proportionali tra loro

- Il disegno precedente può rappresentare una onda progressiva?

Sì, perché campi \bar{E} e \bar{H} sono in fase (può accadere solo nel caso di un'onda progressiva \neq regressiva)

- Considerando i fatti:

$$\tilde{E}_x = E_0^+ \cdot e^{-jkz}$$

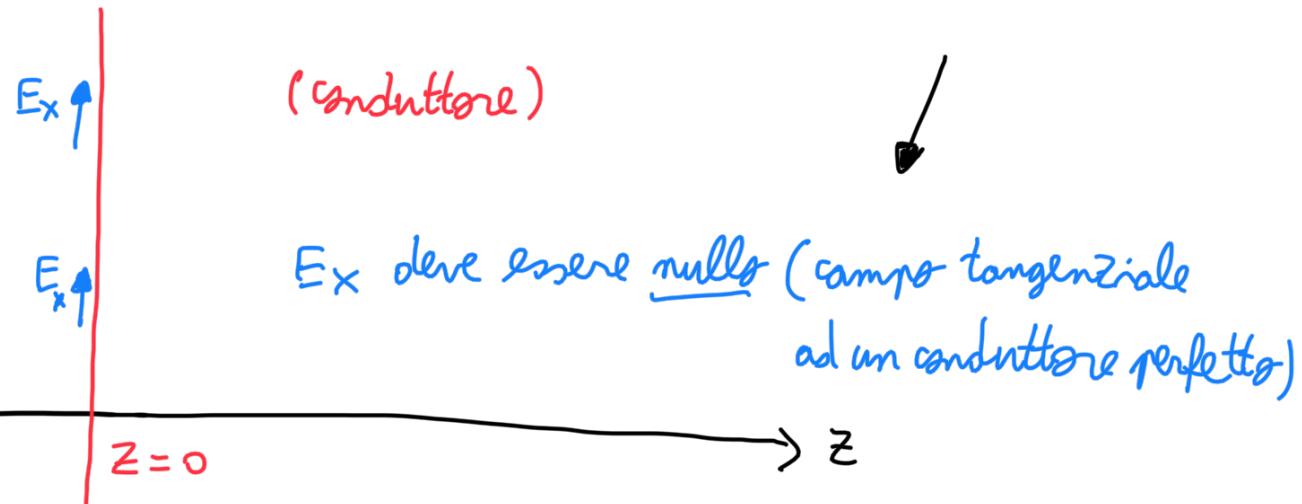
$$\tilde{H}_y = -\frac{1}{\sigma w \mu_0} \partial_z \tilde{E}_x = E_0^+ \cdot \frac{k}{w \mu_0} \cdot e^{-jkz}$$

$$E_x(z, t) = E_0^+ \cos(wt - kz) \quad (E_0^+ \in \mathbb{R})$$

$$H_y(z, t) = \frac{E_0^+}{\eta_0} \cos(wt - kz)$$

Ex:

HP: E_x, H_y



- Non vale più $\tilde{E}_x(z) = E_0^+ \cdot e^{-jkz}$, perché in $z=0$ E_x deve essere nullo (campo tangenziale ad un conduttore perfetto).
- Quindi: $\tilde{E}_x(z) = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{+jkz}$
- Dn $z=0$: $\tilde{E}_x(z=0) = E_0^+ - E_0^- \Rightarrow \boxed{E_0^+ = E_0^-}$

$$\tilde{H}_y(z) = \frac{1}{m_0} \left[E_0^+ e^{-jkz} - E_0^- e^{+jkz} \right] = \frac{1}{\eta} E_0^+ \cdot 2 \cos(kz)$$

Quindi:

- E_x varia come un sens
- H_y " " cosens

$$\frac{\tilde{E}_x(z)}{\tilde{H}_y(z)} = \eta \underbrace{j \cdot \tan(kz)}$$

→ il rapporto lungo z varia come la $\tan(kz)$ quando vi è sia la componente progressiva, che quella regressiva

- L'ampiezza dell'onda progressiva è uguale a quella dell'onda regressiva
(onda stazionaria)

Il campo magnetico

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu \tilde{H}_y \Rightarrow \tilde{H}_y = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}$$

$$\tilde{E}_x(z) = E_0^+ \exp(-jkz) + E_0^- \exp(+jkz)$$

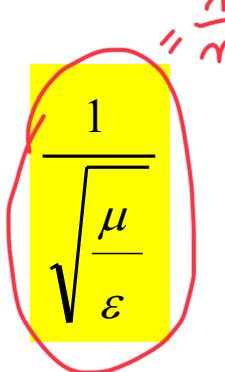
$$\begin{aligned}\tilde{H}_y(z) &= \frac{-jk}{-j\omega\mu} [E_0^+ \exp(-jkz) - E_0^- \exp(+jkz)] = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [E_0^+ \exp(-jkz) - E_0^- \exp(+jkz)]\end{aligned}$$

Dal fasore di H a H(z,t)

$$H_y(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [E_0^+ \exp(-jkz) - E_0^- \exp(+jkz)] \exp(j\omega t) \right\} =$$

$$H_y(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [E_0^+ \exp[j(\omega t - kz)] - E_0^- \exp[j(\omega t + kz)]] \right\} =$$

$$H_y(z, t) = \left[E_0^+ \cos(\omega t - kz) - E_0^- \cos(\omega t + kz) \right]$$


 $\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$

La quantità

$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{j\omega\mu}{jk}$

viene detta impedenza d'onda

Per un'onda progressiva, se $E_0 \in \mathbb{C}$:

$$E_x^+(z,t) = (E_R + \sigma E_{im}) \cdot e^{-jkz} \cdot e^{\sigma wt}$$

$$\tilde{E}_x^+(z) = \operatorname{Re} \left[(E_R + \sigma E_{im}) e^{-jkz} \cdot e^{\sigma wt} \right] = \operatorname{Re} \left[(E_R + E_{im}) e^{-j(wt - kz)} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[(E_R + \sigma E_{im}) \cos(wt - kz) + \sigma \sin(wt - kz) \right] =$$

$$= E_R \underbrace{\cos \left(\underbrace{wt - kz}_{t - \frac{z}{v}} \right)}_{\text{t - } \frac{z}{v}} - E_{im} \underbrace{\sin \left(\underbrace{wt - kz}_{t - \frac{z}{v}} \right)}_{\text{t - } \frac{z}{v}}$$

→ il tipo di soluzione
è sempre quella

Esercizio- Un'onda elettromagnetica piana armonica (o sinusoidale), di frequenza $f=100$ KHz, con il campo elettrico diretto lungo y , si propaga nel verso positivo dell'asse x , in un mezzo omogeneo $\mu_r = 1$; $\epsilon_r = 3$.

$$\text{a } 14 \text{ GHz} \rightarrow k_0 = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 20.958 \text{ m}^{-1}$$

Calcolare:

- 1) v
- 2) l'ampiezza del campo magnetico H , sapendo che l'ampiezza del campo elettrico $E=10$ V/m
- 3) l'espressione nel tempo di E e di H , se all'istante $\bar{t}=7.5$ μs nel punto di ascissa $\bar{x}=57$ m $\mathbf{E}(\bar{x},y,z,\bar{t})=\mathbf{u}_y 10$ V/m

$$1) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ m/s} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ m/s} = 1.73 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$k = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon} = 20.958 \sqrt{\epsilon_r} 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

Essendo l'onda sinusoidale e progressiva, il campo elettrico deve avere forma:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{u}_y E \cos(\omega t - kx - \alpha) =$$

$$\mathbf{u}_y [E_c \cos(\omega t - kx) + E_s \sin(\omega t - kx)]$$

considero entrambe le situazioni
di seno e coseno

Il campo magnetico si ottiene considerando che:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$$

$$\mathbf{u}_z \partial_x [E \cos(\omega t - kx - \alpha)] = \mathbf{u}_z k [E \sin(\omega t - kx - \alpha)] = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$$

Pertanto $\mathbf{H} = \frac{k}{\omega \mu_0} \mathbf{u}_z [E \cos(\omega t - kx - \alpha)] =$

$$\frac{\sqrt{\epsilon_r}}{\eta_0} \mathbf{u}_z [E \cos(\omega t - kx - \alpha)] = \mathbf{u}_z [H \cos(\omega t - kx - \alpha)]$$

$$H = E \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{\eta_0} = 10 \text{ V/m} \cdot 1.732 / 377 \Omega \cong 0.046 \text{ A/m}$$

Quindi, l'espressione del campo magnetico è

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_x \times \mathbf{E}$$

Ovvero, i vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{u}_x formano una terna ortogonale destrorsa

2)

$$H = \frac{E}{\eta} = \frac{10 \sqrt{3}}{377} = 0.046 \text{ A/m}$$

$$B = \mu_0 H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.046 \text{ A/m} = 5.77 \cdot 10^{-8} \text{ Wb/m}^2$$

3)

$$\mathbf{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \mathbf{u}_y 10 \text{ V/m} = \mathbf{u}_y 10 \text{ V/m} \cos(\omega \bar{t} - k \bar{x} - \alpha)$$

Ne consegue che: $\omega \bar{t} - k \bar{x} - \alpha = 2n\pi$

$\alpha = \omega \bar{t} - k \bar{x} - 2n\pi$ con n arbitrario

Se prendiamo $n=0$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{u}_x \partial_z E_y + \mathbf{u}_z \partial_x E_y$$

$$\partial_z E_y = 0$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{u}_z}{-\mu_0} \int dt (\partial_x E_y) = \mathbf{u}_z \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} E_0 \cos \left[2 \cdot \pi \cdot f \cdot \left(\frac{x_1}{c} - t_1 \right) \right]}{\mu_0}$$

$$= \mathbf{u}_z \frac{1}{\eta} E_0 \cos \left[2 \cdot \pi \cdot f \cdot \left(\frac{x_1}{c} - t_1 \right) \right]$$

Usando una notazione vettoriale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_x E_x(z, t) = \mathbf{u}_x \left\{ E_0^+ \cos [\omega(t - z/v)] + E_0^- \cos [\omega(t + z/v)] \right\}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_y H_y(z, t) = \mathbf{u}_y \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[E_0^+ \cos(\omega t - kz) - E_0^- \cos(\omega t + kz) \right]$$

$$\mathbf{H}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) \quad essendo$$

$$\mathbf{k} = k_0 \mathbf{u}_z$$

$$kz = k \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad \text{Dove: } \mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$$

Onda piana che si propaga in direzione \mathbf{k} $\mathbf{H}^\pm(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_k \times \mathbf{E}^\pm(\mathbf{r}, t)$

Propagazione di un'onda piana in direzione arbitraria \mathbf{k} Si suppone che \mathbf{E} e \mathbf{H} non cambino nel piano ortogonale a \mathbf{k}

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y + k_z \mathbf{u}_z$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_k \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

↑

Algebrizzazione eq Maxwell

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu \mathbf{H}_0 \\ -\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = \omega\epsilon \mathbf{E}_0 \end{array} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \times \mathbf{k} = \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E}_0$$

↓

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \end{array} \quad \mathbf{E} \text{ ed } \mathbf{H} \text{ ortogonali a } \mathbf{k} \quad \left(k^2 - \omega^2 \mu\epsilon \right) \mathbf{E}_0 = 0$$

Polarizzazione

a diverse frequenze

Un insieme di onde piane che si propagano nella stessa direzione, ma con orientazioni e fasi arbitrarie dei campi, generano un'onda **non polarizzata**

MONOCROMATICA \Rightarrow una sola w

Consideriamo invece un'onda piana progressiva, monocromatica che si propaghi lungo z:

$$E_x(z, t) = E_{x0}^+ \cos [\omega(t - z/v)]$$

$$E_y(z, t) = E_{y0}^+ \cos [\omega(t - z/v) + \psi]$$

Gli effetti sugli oggetti investiti da un'onda e.m. dipendono dalla sua polarizzazione.

Polarizzazione lineare

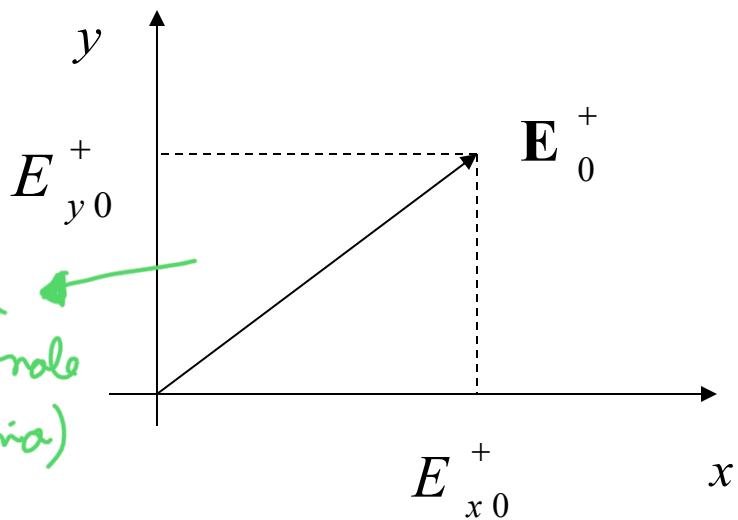
$$\psi = 0$$

sono in fase
↑

$$E_x(z, t) = E_{x0}^+ \cos [\omega(t - z/v)] \Rightarrow \frac{E_x(z, t)}{E_y(z, t)} = \frac{E_{x0}^+}{E_{y0}^+}$$

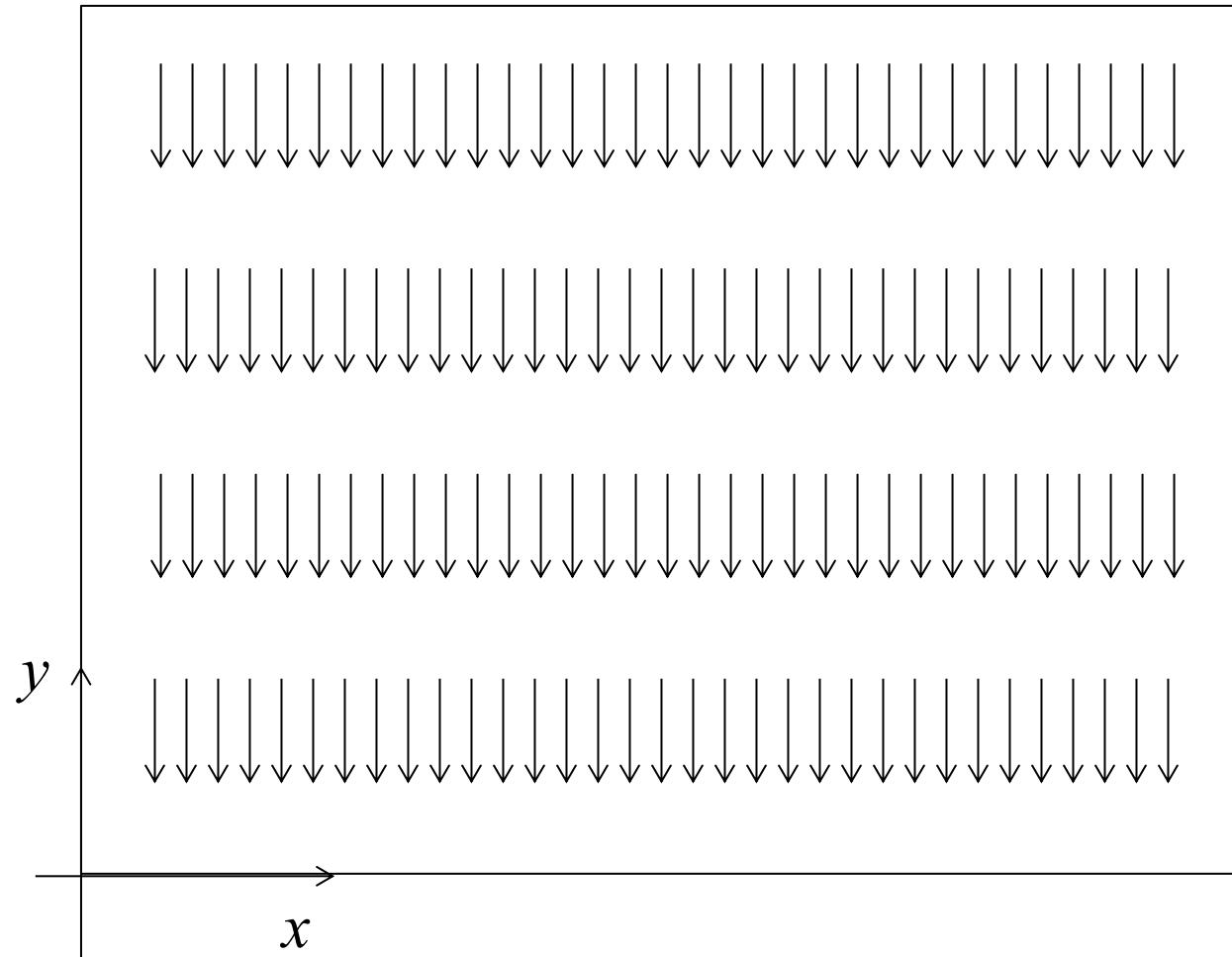
$$E_y(z, t) = E_{y0}^+ \cos [\omega(t - z/v)]$$

quantità costante
al variare di z, t



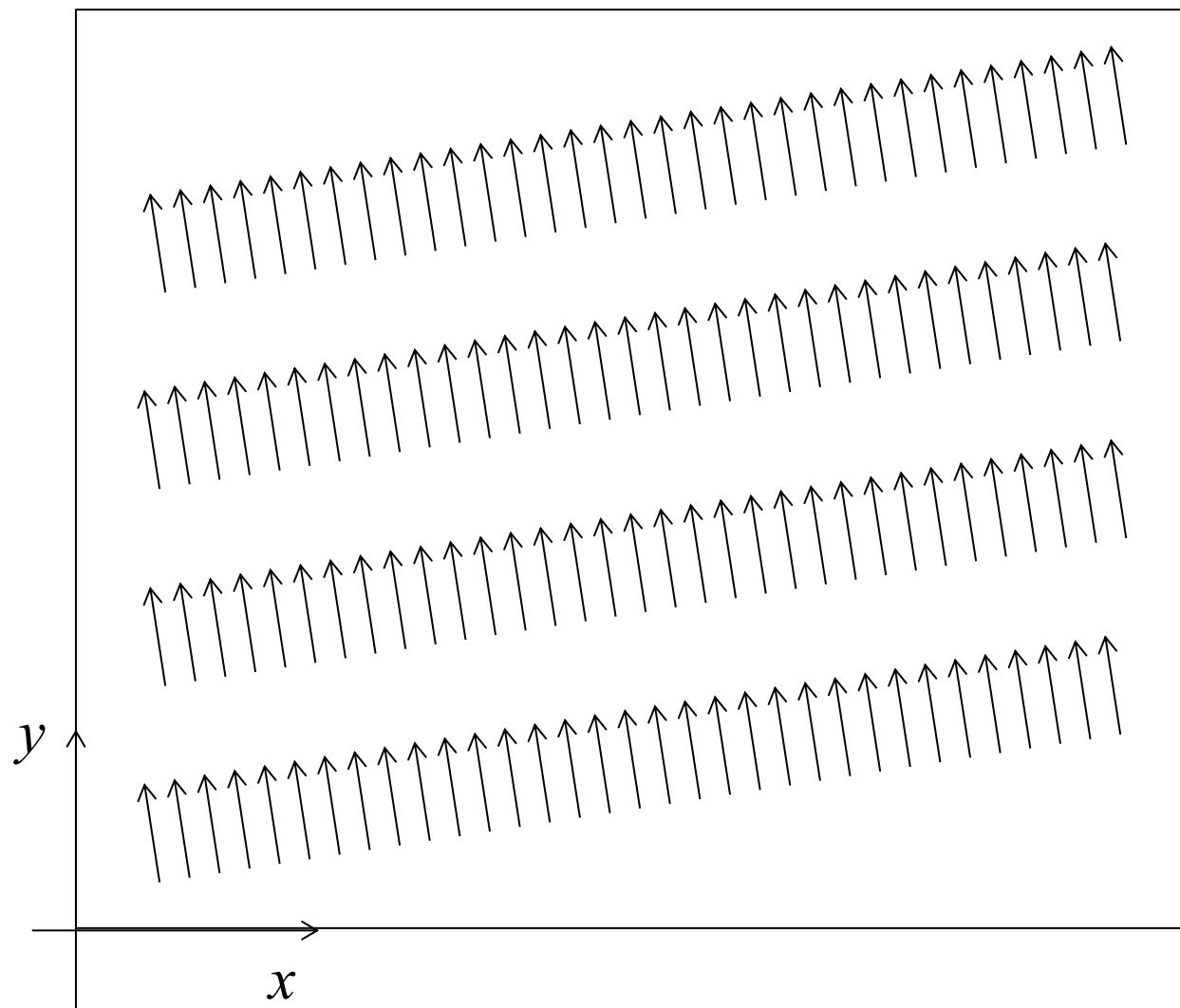
inclinazione identica
per ogni sezione ortogonale
a z (l'ampiezza varia)

PORZIONE DI FRONTE D'ONDA PIANA POLARIZZATA LINEARMENTE



VISUALIZZAZIONE DEL CAMPO E nei punti di applicazione dei vettori

PORZIONE DI FRONTE D'ONDA PIANA POLARIZZATA LINEARMENTE



VISUALIZZAZIONE DEL CAMPO E nei punti di applicazione dei vettori

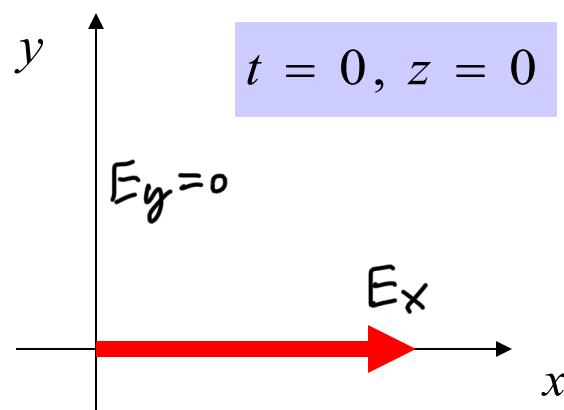
Polarizzazione circolare

$$E_{x0}^+ = E_{y0}^+$$

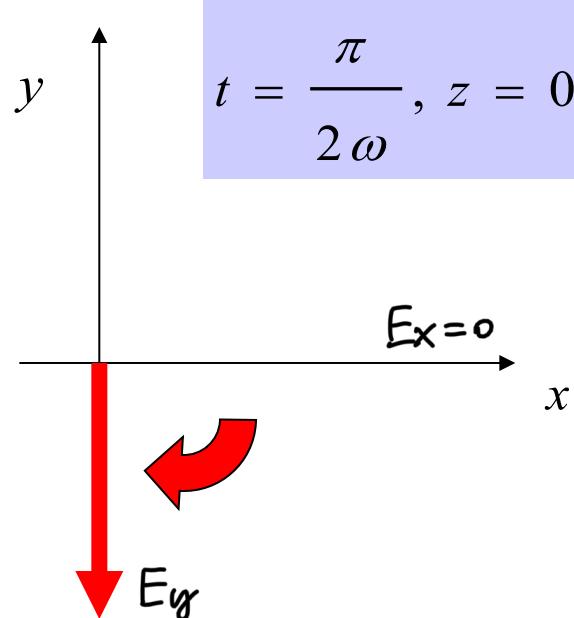
$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

$$E_x(z, t) = E_{x0}^+ \cos [\omega(t - z/v)] + \frac{\pi}{2}$$
$$E_y(z, t) = -E_{x0}^+ \sin [\omega(t - z/v)]$$

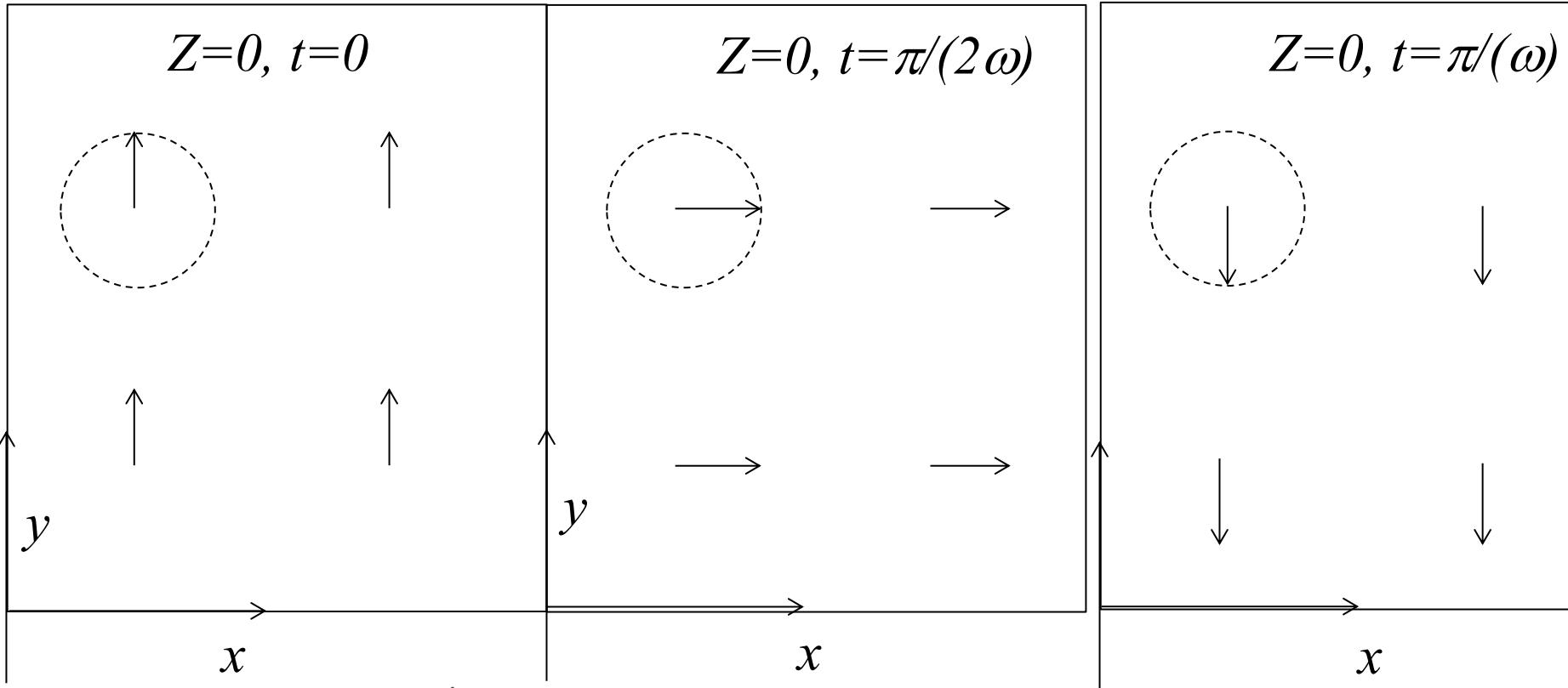
$$\Rightarrow E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t) = E_{x0}^{+2}$$



Il campo \vec{E} ruota in senso orario



PORZIONE DI FRONTE D'ONDA PIANA POLARIZZATA CIRCOLARMENTE



Si possono utilizzare due pol. circ. (una oraria, l'altra antioraria), essendo ortogonali tra loro esse costituiranno due canali di trasmissione.

VISUALIZZAZIONE DEL CAMPO E nei punti di applicazione dei vettori

Polarizzazione ellittica (caso generale)

$$E_x(z,t) = E_{x0}^+ \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y(z,t) = E_{y0}^+ \cos(\omega t - kz + \psi)$$

(nemmeno letta)

$$\bar{E}_x = \cos(\omega t - kz)$$

$$\bar{E}_y = \cos(\omega t - kz) \cos\psi - \sin(\omega t - kz) \sin\psi =$$

$$\bar{E}_x \cos\psi - \sqrt{1 - \bar{E}_x^2} \sin\psi$$

$$\Rightarrow \bar{E}_y^2 + \bar{E}_x^2 \cos^2\psi - 2\bar{E}_x\bar{E}_y \cos\psi = \left(1 - \bar{E}_x^2\right) \sin^2\psi$$

$$\Rightarrow \bar{E}_y^2 + \bar{E}_x^2 - 2\bar{E}_x\bar{E}_y \cos\psi = \sin^2\psi$$

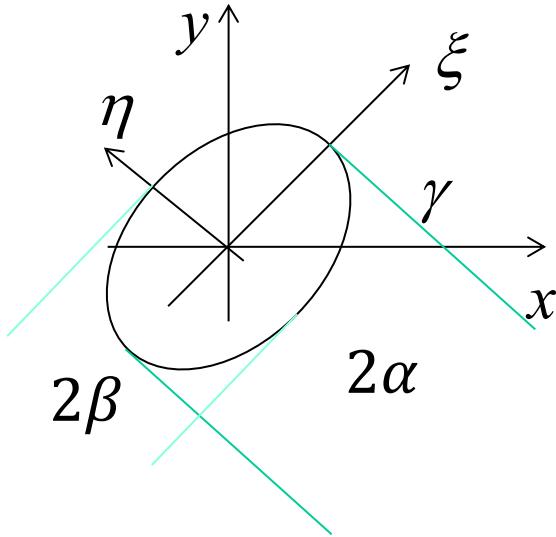
Dividendo per $\sin^2\psi$

$$\check{E}_y^2 + \check{E}_x^2 - 2\check{E}_y\check{E}_x \cos\psi = 1$$

$$\check{E} = \bar{E} / \sin\psi$$

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 = 1$$

$$\begin{aligned}\xi(x, y) &= x \cos \gamma + y \sin \gamma \\ \eta(x, y) &= -x \sin \gamma + y \cos \gamma\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}& \left(\frac{x \cos \gamma + y \sin \gamma}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{-x \sin \gamma + y \cos \gamma}{\beta} \right)^2 = 1 = \\& \left[\left(\frac{\cos \gamma}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\sin \gamma}{\beta} \right)^2 \right] x^2 + \left[\left(\frac{\sin \gamma}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos \gamma}{\beta} \right)^2 \right] y^2 + \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right] 2xy \sin \gamma \cos \gamma \\& = \check{E}_y^2 + \check{E}_x^2 - 2\check{E}_y \check{E}_x \cos \psi = 1\end{aligned}$$

Posto $x = E_x$ e $y = E_y$

$$\gamma = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{-2 \cos \psi / (E_{x0}^+ E_{y0}^+)}{1/E_{x0}^{+2} - 1/E_{y0}^{+2}} \right]$$

Rapporto Assiale (Axial Ratio)

$$AR = 20 \cdot \left| \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \right|$$

TEOREMA DI POYNTING: il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie deve uguagliare la variazione di energia all'interno del volume V , più l'energia dissipata nell'unità di tempo (= potenza dissipata) per effetto Joule all'interno del volume.

Teorema di Poynting

flesso del
rett. di Poynting

TH. DIVERGENZA

$$\underset{\partial V}{\int} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS \stackrel{\text{TH. DIVERGENZA}}{=} \underset{V}{\int} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV =$$

$$= - \underset{V}{\int} (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) dV =$$

$$= - \underset{V}{\int} (\mathbf{E} \cdot (\mathbf{j} + \epsilon \partial_t \mathbf{E}) - \mathbf{H} \cdot (-\mu_0 \partial_t \mathbf{H})) dV =$$

$$= - \underset{V}{\int} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV - \frac{1}{2} \partial_t \left[\underset{V}{\int} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \underset{V}{\int} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \right]$$

$$\partial_t (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \partial_t (\mathbf{H})$$

variazione temporale dell'energia
immagazzinata nel volume V

Teorema di Poynting II

il th. stabilisce la conservazione dell'energia di un campo E.M.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV + \frac{1}{2} \partial_t \left[\int_V \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \int_V \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \right] = - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV$$

energia che fuoriesce

$$-\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \partial_t \left[\int_V \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \int_V \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \right] + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV$$

energia totale dissipata in V

energia dissipata per effetto Joule

||

$$\text{dove } \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = \int_V \mathbf{E} \cdot nq\mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{E} \cdot nq\mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV$$

n : numero di cariche per unità di volume, \mathbf{F} : forza agente sulle cariche nell'unità di volume, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$: potenza dissipata per unità di volume per effetto Joule

lavoro effettuato sulle cariche

Teorema di Poynting: media temporale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS dt + \frac{1}{T} \int_0^T \partial_t \left[\frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) dV \right] dt + \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) dV \right] dt = 0 \end{aligned}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$|\mathbf{E}|^2 \simeq \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \partial_t \left[\int_V \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \int_V \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \right] dt = 0$$

Teorema di Poynting: media temporale

Considerando i fasi:

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) dV \right] dt$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) dV \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_V \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{E}} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{j}} e^{i\omega t}) dV \right] dt =$$

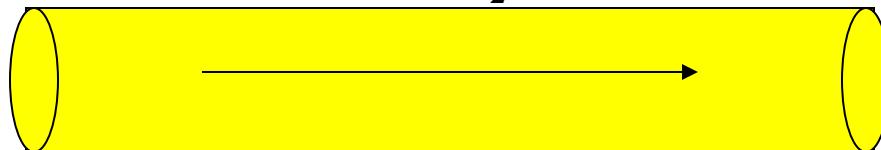
=

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_V (\tilde{\mathbf{E}}_R \cos(\omega t) - \tilde{\mathbf{E}}_I \sin(\omega t)) (\tilde{\mathbf{j}}_R \cos(\omega t) - \tilde{\mathbf{j}}_I \sin(\omega t)) dV \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_V (\tilde{\mathbf{E}}_R \hat{\mathbf{j}}_R + \tilde{\mathbf{E}}_I \hat{\mathbf{j}}_I) dV = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{j}}^* dV \right]$$

Perdite Ohmiche

filo conduttore nel quale fluisce una corrente I_z sostenuta da E lungo z



$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{u}_z = RI_z \mathbf{u}_z$$

R = resistenza per unità di lunghezza

$$\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{u}_\phi = \frac{I_z}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi$$

si avvia attorno a I_z

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = RI_z \mathbf{u}_z \times H_\phi \mathbf{u}_\phi = -RI_z \frac{I_z}{2\pi r} \mathbf{u}_r$$

Flusso del vettore di Poynting nel cilindro:

$$\int_{\text{Cilindro}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r ds = -RI_z \frac{\frac{I_z}{2\pi r}}{2\pi r} 2\pi r = -RI_z^2 = \underline{-W}$$

potenza dissipata
per effetto Joule
(per unità di lunghezza)

Teorema di Poynting per i fasori

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{j}} + j\omega\epsilon \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \tilde{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) = \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}^* \stackrel{\text{eq. maxwell}}{=}$$

$$= \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot (-j\omega\mu \tilde{\mathbf{H}}) - \tilde{\mathbf{E}} \cdot (\tilde{\mathbf{j}}^* - j\omega\epsilon \tilde{\mathbf{E}}^*) =$$

$$= -j\omega \left[\mu |\tilde{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \right] - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{j}}^* =$$

$$\int_{\partial V} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{n} dS = -j\omega \int_V \left[\mu |\tilde{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \right] dV - \int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{j}}^* dV$$

$$\int_{\partial V} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{n} dS = -j\omega \int_V \left[\mu \left| \tilde{\mathbf{H}} \right|^2 - \varepsilon \left| \tilde{\mathbf{E}} \right|^2 \right] dV - \int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{j}}^* dV$$

Perdite ohmiche:

$$\tilde{\mathbf{j}} = \sigma \tilde{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \int_V \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{j}}^* dV = \int_V \sigma \left| \tilde{\mathbf{E}} \right|^2 dV$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\partial V} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{n} dS \right\} = -\frac{1}{2} \int_V \sigma \left| \tilde{\mathbf{E}} \right|^2 dV = \overline{P}_{joule}$$

*Potenza media
dissipata nel periodo
per effetto Joule*


$$\overline{p} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \right\} \text{ W/m}^2$$

Parte immaginaria

Rappresenta la differenza tra l'energia immagazzinata nel campo $\tilde{\mathbf{E}}$ e quella in $\tilde{\mathbf{H}}$

$$\text{Im} \left\{ \int_{\partial V} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{n} dS \right\} = 4\omega \int_V \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \varepsilon |\tilde{\mathbf{E}}|^2 - \frac{1}{2} \mu |\tilde{\mathbf{H}}|^2 \right] dV = \\ = 4\omega (\overline{U}_E - \overline{U}_H)$$

Potenza media in un'onda piana polarizzata linearmente

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_x \left(E_0^+ \exp(-jkz) + E_0^- \exp(+jkz) \right)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_y \left(E_0^+ \exp(-jkz) - E_0^- \exp(+jkz) \right)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_z \left(E_0^+ \exp(-jkz) + E_0^- \exp(+jkz) \right) \left(E_0^{+*} \exp(+jkz) - E_0^{-*} \exp(-jkz) \right) =$$

$$= \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_z \left[\left(\left| E_0^+ \right|^2 - \left| E_0^- \right|^2 \right) + \left(- E_0^+ E_0^{-*} \exp(-2jkz) + E_0^- E_0^{+*} \exp(+2jkz) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_z \left[\left(\left| E_0^+ \right|^2 - \left| E_0^- \right|^2 \right) + 2j \operatorname{Im} \left(E_0^- E_0^{+*} \exp(+2jkz) \right) \right]$$

Potenza media in un'onda piana polarizzata linearmente II

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \right) = \frac{1}{2\eta} \mathbf{u}_z \left(\left| E_0^+ \right|^2 - \left| E_0^- \right|^2 \right)$$

$$\operatorname{Im} \left(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \right) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_z 2 \operatorname{Im} \left(E_0^- E_0^{+*} \exp(+2jkz) \right)$$

Ex: Potenza irradiata dal Sole P_S , sapendo che la densità di potenza media che illumina la Terra \bar{S} è pari a circa 1 kW/m^2 e che $R_S = 1.5 \cdot 10^8 \text{ Km}$

$$\bar{P}_S = \bar{S} \cdot 4\pi \cdot R_S^2 = 2.8 \cdot 10^{26} \text{ W} = 2.8 \cdot 10^{14} \text{ TW}$$

distanza Terra-Sole

- Potenza media intercettata dalla Terra:

$$\bar{P}_t = \bar{S} \cdot \pi \cdot R_E^2 = 1.28 \cdot 10^{17} \text{ W} = 128.000 \text{ TW} \quad [R_E = 6380 \text{ Km}]$$

Raggio terrestre

- Energia ricevuta in Italia giornalmente (considerando 3 ore di luce diurna)

$$S = 1 \text{ kW/m}^2, \quad A_I = 300.000 \text{ km}^2 = 300 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \quad (\text{superficie italiana})$$

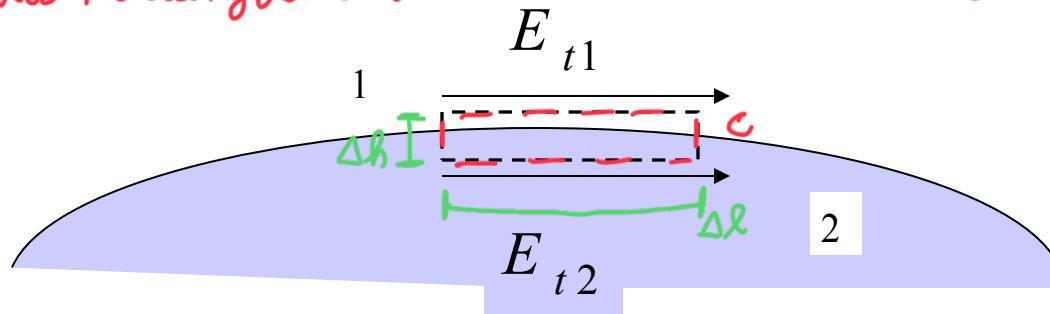
$$P_I \approx 300 \text{ GW} \quad (S \cdot A_I)$$

$$E_u = 300 \cdot 10^9 \cdot (3 \cdot 3600) = 32.000 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

- Campi dinamici all'interfaccia tra due mezzi dielettrici

Condizioni di continuità dei campi: E tangenziale

Creiamo un circuito rettangolare la cui altezza tende a zero.



- Calcolando la circuazione su quel percorso:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_{t1} - E_{t2}) \Delta l = -\partial_t \Phi_B = 0$$

derivata temporale del flusso su una superficie che
tende a zero è nulla

↓
 elemento
 infinitesimo
 del percorso

↓
 base
 rettangolo

$E_{t1} = E_{t2}$

- Questo risultato vale in ogni punto all'interfaccia ed in ogni istante, sia per campi statici, che dinamici.

$j_s \Delta l$ tiene conto di un'eventuale densità di corrente superficiale

Condizioni di continuità dei campi: H tangenziale

Analogamente,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{t1} - H_{t2})\Delta l = j_s \Delta l + \underbrace{\partial_t \Phi_D}_{\text{perché siamo in un dielettrico} \rightarrow 0}$$

$\rightarrow 0$ per superficie $\rightarrow 0$

$$\Phi_D = 0 \Rightarrow H_{t1} - H_{t2} = j_s$$

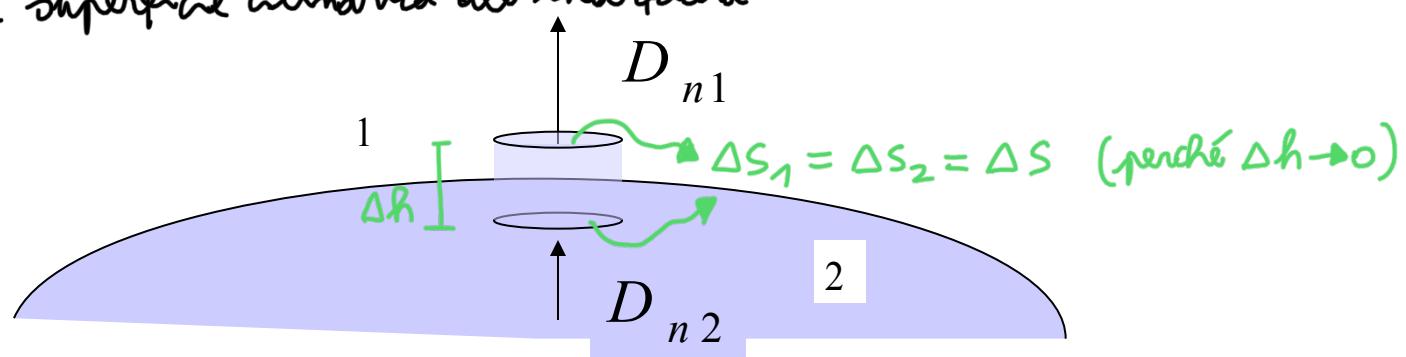
$$\Phi_D = 0, j_s = 0$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

all'interfaccia tra due dielettrici

Condizioni di continuità dei campi: componenti normali

- Consideriamo una superficie cilindrica all'interfaccia



$(\Delta h \rightarrow 0)$

carica contenuta nel
volume del cilindro

$$(D_{n1} - D_{n2})\Delta S = \boxed{\sigma \Delta S} \Rightarrow D_{n1} - D_{n2} = \sigma$$

Se $\boxed{\sigma = 0}$

assenza di carica
superficiale

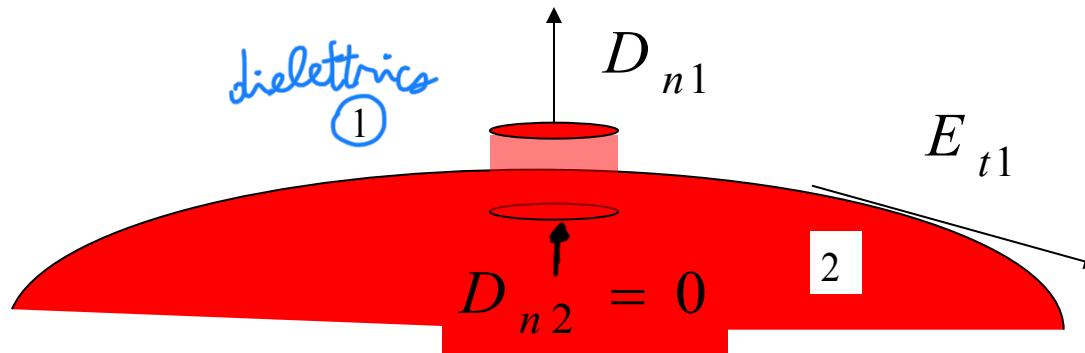
$$D_{n1} = D_{n2} \xrightarrow{\text{mezzi isotropi, omogenei}} \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$

mezzi non magnetici, isotropi e omogenei

Analogamente, $B_{n1} = B_{n2} \xrightarrow{\text{mezzi non magnetici, isotropi e omogenei}} \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$

Condizioni al contorno sulla superficie di un conduttore *ideale*

$$E = 0 \text{ nel conduttore ideale} \Rightarrow D_{n2} = 0$$



$$D_{n1} = \sigma \quad B_{n1} = 0 = \mu_1 H_{n1} = 0$$

$$E_{t1} = 0 \quad H_{t1} = j_s$$

- Le condizioni di continuità da rispettare sono quelle tangenziali.