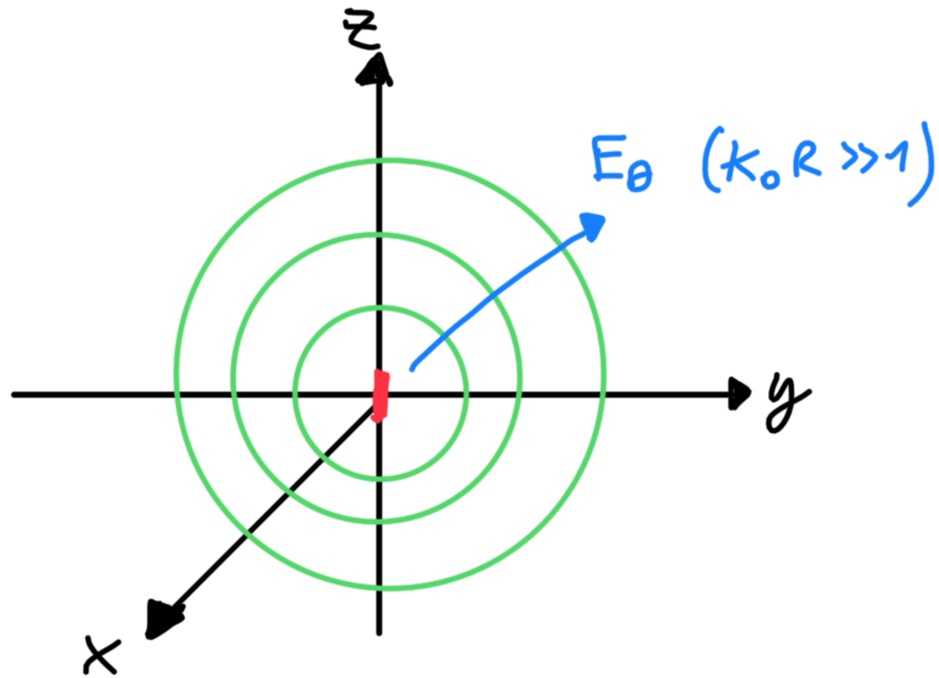
Campi Elettromagnetici
lez. 13 22.04.2022

Osserviamo che a grande distanza:

$$E_\vartheta \approx -\frac{k^2}{j\omega\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{I_0 h}{4\pi}\sin\vartheta$$

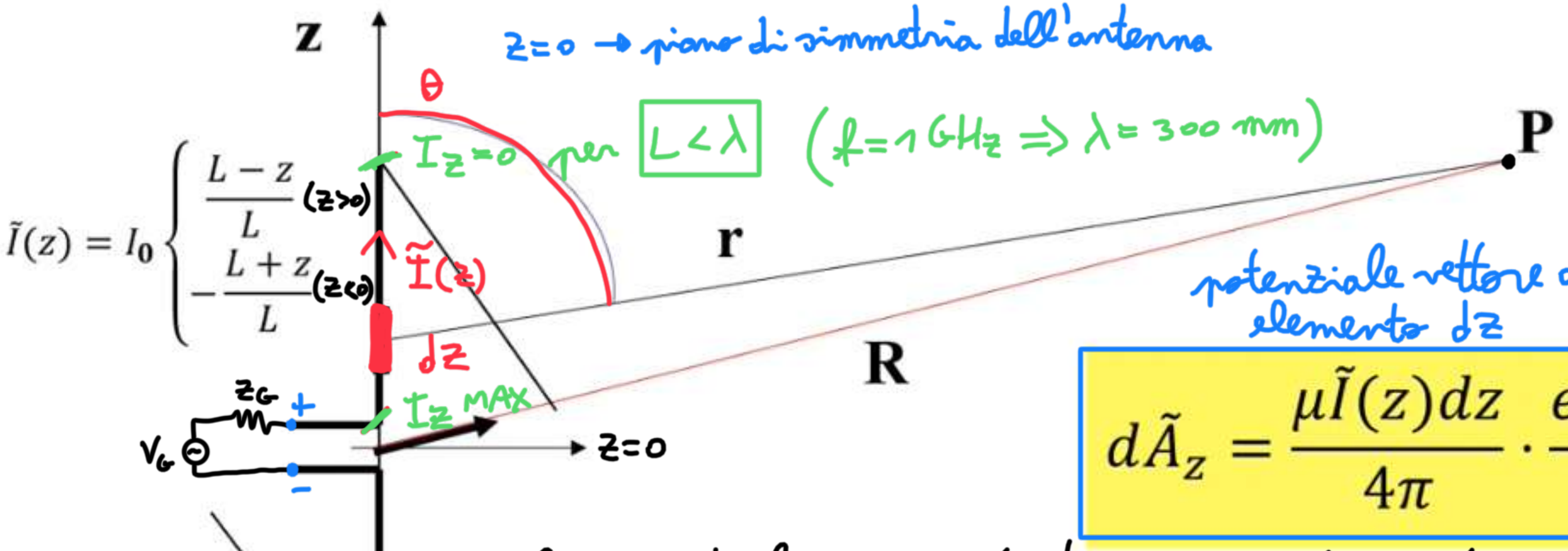
E quindi,

$$E_\vartheta = j\omega\mu_0 A_z \sin\vartheta$$



Antenna Filiforme

$z=0 \rightarrow$ piano di simmetria dell'antenna



$$\tilde{I}(z) = I_0 \begin{cases} \dfrac{L-z}{L} & (z>0) \\ -\dfrac{L+z}{L} & (z<0) \end{cases}$$

potenziale vettore di un elemento dz

$$\boxed{d\tilde{A}_z = \frac{\mu \tilde{I}(z)dz}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 r}}{r}}$$

- Se il circuito fosse concentrato $\Rightarrow$ circuito aperto $\Rightarrow$ corrente nulla
- Però siamo nel caso di tensioni variabili nel tempo $\Rightarrow$ c'è un effetto propagativo
- all'estremità dell'antenna la corrente è nulla
- ci mettiamo nelle condizioni di campo lontano : $k_0 R >> 1$

$$\mathbf{k_0} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k_0} \cdot (\mathbf{R} - \underbrace{z\mathbf{u}_z}_{\text{posizione di dz lungo z}}) = k_0 \cdot \sqrt{(R\cos\vartheta - z)^2 + (R\sin\vartheta)^2} \approx k_0 R - k_0 z\cos\vartheta$$

$$= k_0 \sqrt{R^2 - 2zR\cos\theta + \cancel{z^2}}$$

approssimazione 1° ordine

$$d\tilde{A}_z = \frac{\mu \tilde{I} dz}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 R}}{R} e^{jk_0 z\cos\vartheta} \Rightarrow \tilde{A}_z = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkR}}{R} \underbrace{\int_{-L}^{+L} \tilde{I}(z)dz \cdot e^{jkz\cos\vartheta}}_{\text{somma ampiezze singoli potenziali vettori}}$$

$$\tilde{A}_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \int_{-L}^{+L} \tilde{I}(z) \cdot e^{jkz\cos\vartheta}\, dz =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R} e^{-jkR} \left[\int_0^{+L} \frac{L-z}{L} e^{jkz\cos\vartheta} dz + \int_{-L}^{0} \frac{L+z}{L} e^{jkz\cos\vartheta} dz \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R} e^{-jkR} \left[\left. \frac{e^{jkz\cos\vartheta}}{jk\cos\vartheta} \right|_{-L/2}^{+L/2} + \int_0^{+L} -\frac{z}{L} e^{jkz\cos\vartheta} dz + \int_{-L}^{0} \frac{z}{L} e^{jkz\cos\vartheta} dz \right] =$$

Antenna filiforme

Essendo: $\int_0^{+L} z e^{\alpha z} dz \overset{\text{parti}}{=} \left.\frac{z e^{\alpha z}}{\alpha}\right|_0^L - \int_0^{+L} \frac{e^{\alpha z}}{\alpha} dz = \frac{L e^{\alpha L}}{\alpha} - \left.\frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2}\right|_0^L = \frac{e^{\alpha L} L}{\alpha} - \frac{e^{\alpha L} - 1}{\alpha^2}$

$$\alpha = jk\cos\vartheta$$

$$\int_0^{+L} \frac{L-z}{L} e^{\alpha z} dz + \int_{-L}^{0} \frac{L+z}{L} e^{\alpha z} dz = 2\frac{\cosh \alpha L - 1}{L\alpha^2}$$

$$\tilde{A}_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \int_{-L}^{+L} \tilde{I}(z) \cdot e^{jkz\cos\vartheta} dz =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R} e^{-jkR} 2\frac{\cos(kL\cos\vartheta) - 1}{L(k\cos\vartheta)^2} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R} e^{-jkR} 2\frac{\sin^2(\frac{kL\cos\vartheta}{2})}{L(k\cos\vartheta)^2}$$

$\bar{E}$ diminuisce per R grande

$L\uparrow \Rightarrow E_\theta \uparrow$

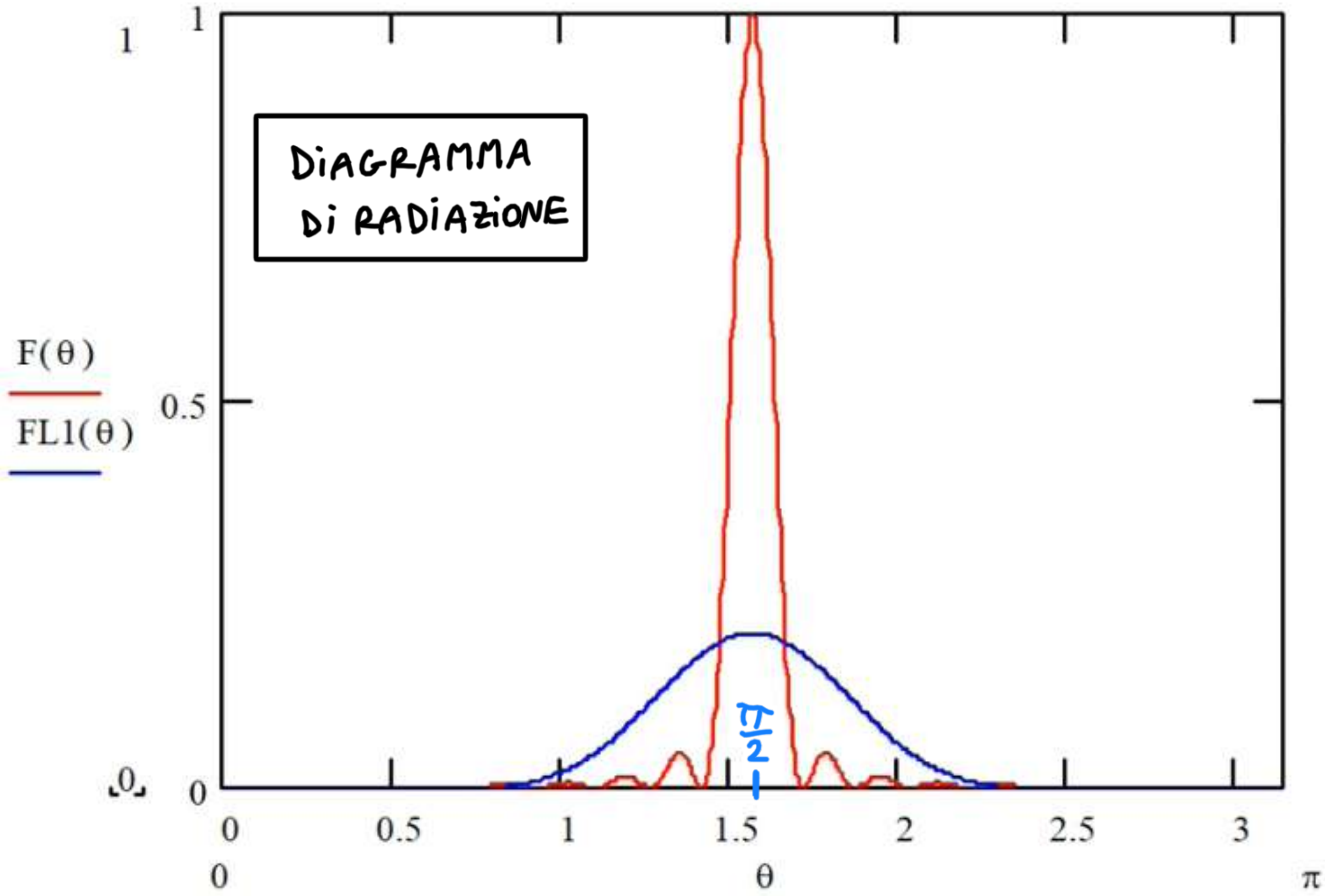
$$E_\vartheta = j\omega\mu_0\tilde{A}_z \sin\vartheta = E_0 \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\sin^2(\frac{kL\cos\vartheta}{2})}{(Lk\cos\vartheta)^2} \sin\vartheta$$

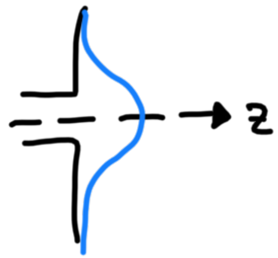
- E_θ proporzionale ad F_θ

- $E_\theta = E(\theta, \varphi)$

$$F(\theta) := \frac{2}{L} \cdot \frac{\left(\sin\left(k \cdot L \cdot \frac{\cos(\theta)}{2}\right)\right)^2}{(k \cdot \cos(\theta))^2} \cdot \sin(\theta)$$

- Plot di E_θ, $\theta \in [0, 2\pi]$ (massimo della radiazione per $\theta = \frac{\pi}{2}$)



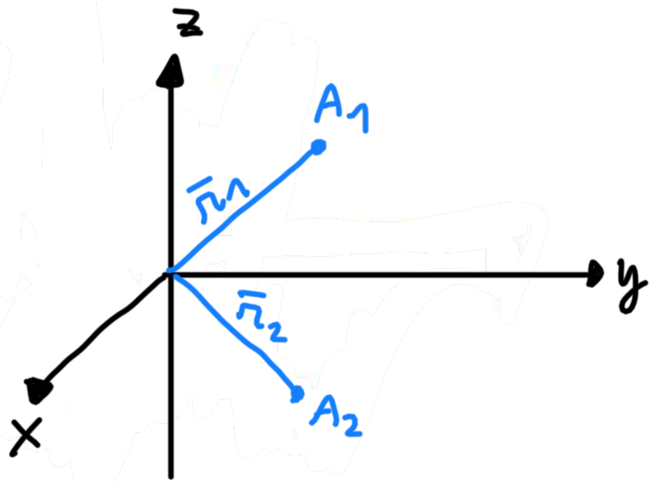


Coppia di antenne poste in $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$

$$\mathbf{E}_1(r,\vartheta,\varphi) = \overbrace{f(\vartheta,\varphi)}^{E(\theta,\varphi)} \frac{j e^{-j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\mathbf{u}_\vartheta$$

punto di osservazione

$$\mathbf{E}_2(r,\vartheta,\varphi) = f(\vartheta,\varphi) \frac{j e^{-j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}\mathbf{u}_\vartheta$$



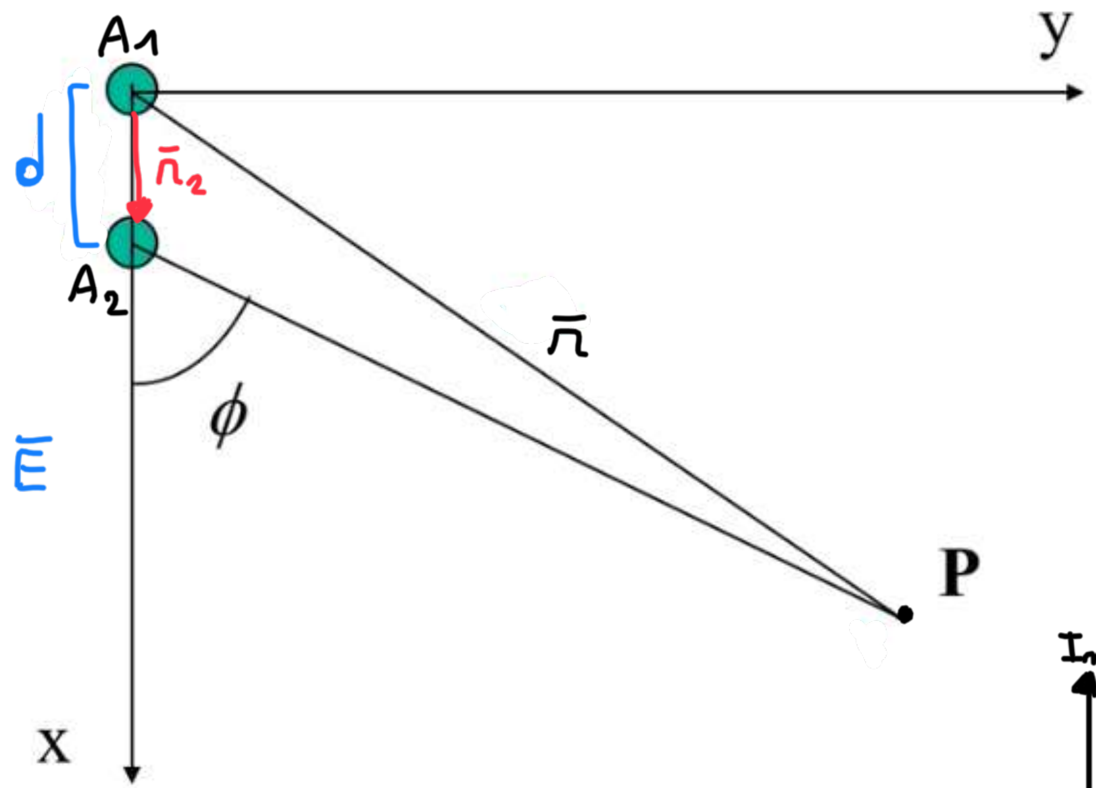
$$\mathbf{E}(r,\vartheta,\phi) = \mathbf{E}_1(r,\vartheta,\phi) + \mathbf{E}_2(r,\vartheta,\phi)$$

$$\mathbf{E}(r,\vartheta,\phi) = f(\vartheta,\phi)\, j \left[\frac{e^{-j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{e^{-j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} \right] \mathbf{u}_\vartheta$$

- Vogliamo calcolare il campo nel punto P

$$\mathbf{r}_2 = d\mathbf{u}_x$$

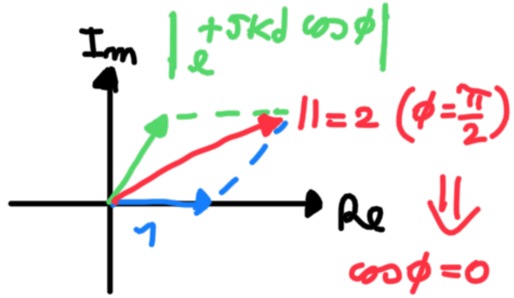
$$r >> d$$



- Max interferenza distruttiva:

$$\begin{cases} \cos\phi = 1 & (\phi = n\pi) \\ d = \dfrac{\pi}{k} = \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$\Downarrow$ zeri di $\bar{E}$



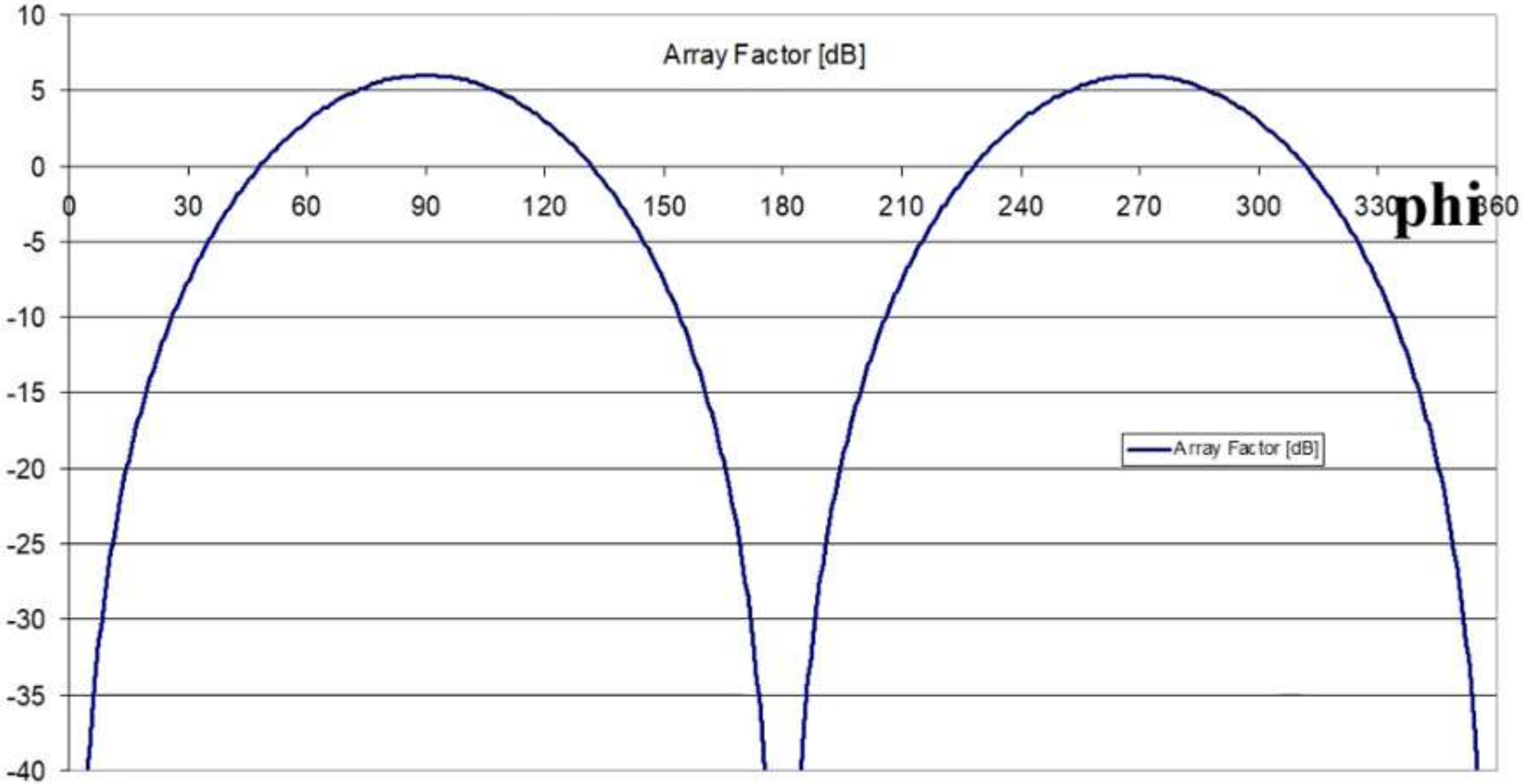
$$\mathbf{E}(r,\vartheta,\phi) \approx f(\vartheta,\phi)\, j\,\frac{e^{-jkr}}{r}\left[1 + e^{+j\mathbf{k}\cdot d\mathbf{u}_x}\right]\mathbf{u}_\vartheta = f(\vartheta,\phi)\, j\,\frac{e^{-jkr}}{r}\left[1 + e^{+jkd\cos\phi}\right]\mathbf{u}_\vartheta$$

Array FACTOR g

(fattore di schiera)

$$g(\vartheta,\phi) = 20\log\left|1 + e^{+jkd\cos\phi}\right|$$

2-element Array Factor d=lambda/2

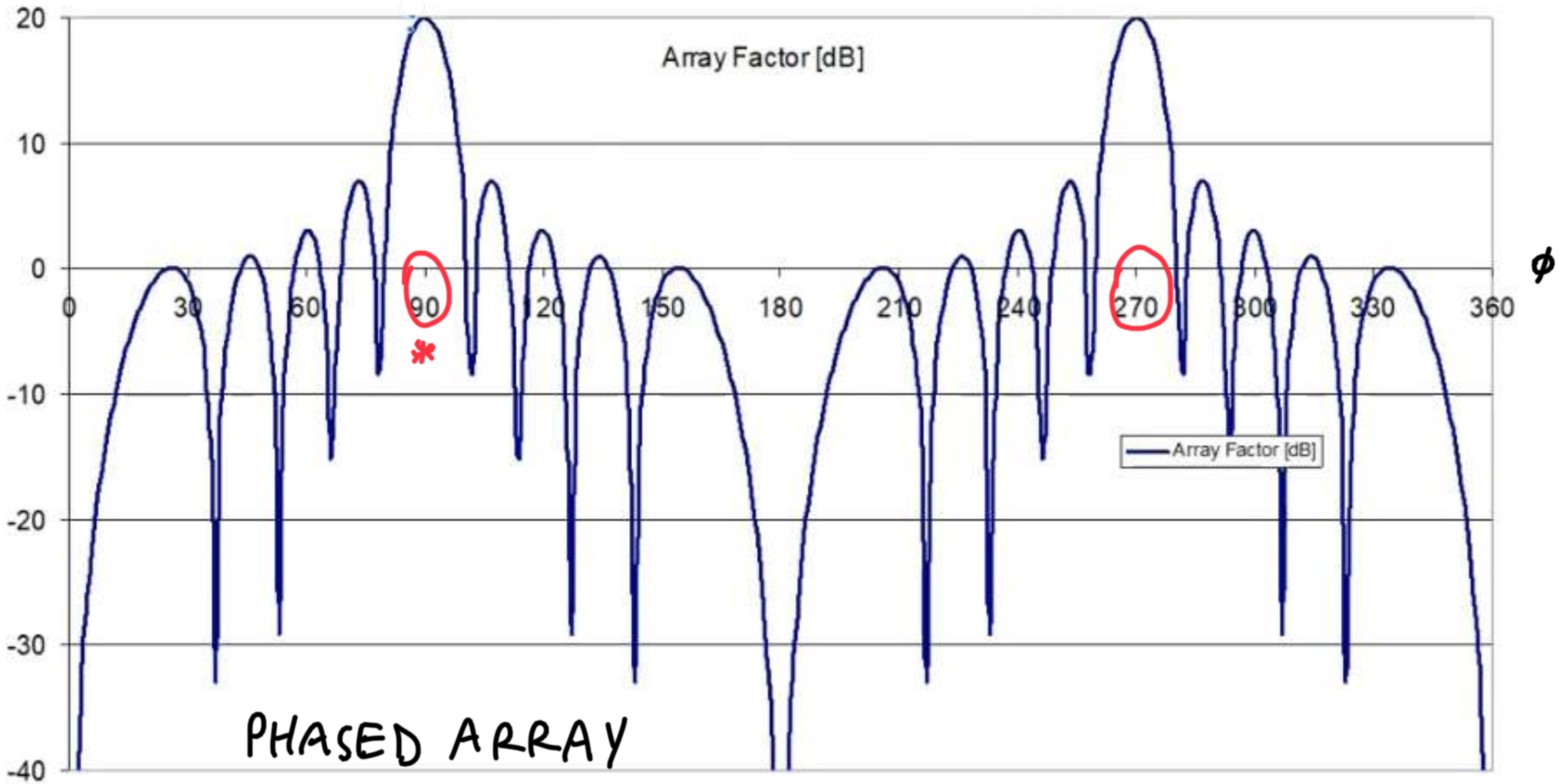


N elementi uguali equispaziati

$$g(\vartheta, \varphi) = 20 \log \left| \sum_{m=0}^{N-1} \quad e^{+jk\underset{\substack{\shortparallel \\ \text{spaziatura}}}{\underline{d}}m \cos \varphi} \right|$$

10-element uniform Array Factor

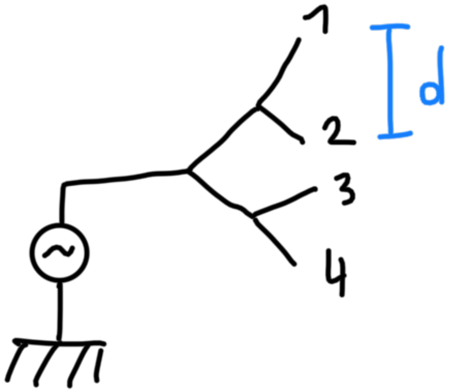
- mettendo più elementi in schiera, posso costruire trasmettitori che irradiano a potenze inferiori per ottenere lo stesso risultato di antenne più potenti:

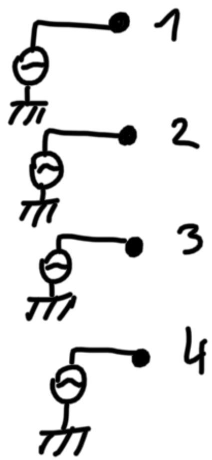


* valori di ϕ per cui ho la massima irradiazione per un certo elemento

- Percorsi dal generatore alle antenne identici $\Rightarrow$ le antenne hanno la <u>stessa fase</u>

(è importante se voglio irradiare in una particolare direzione)





$\frac{1}{4}$ di potenza ciascuno

Controllando le eccitazioni degli elementi, il diagramma di radiazione di una schiera lineare assume la forma desiderata

$$g(\vartheta,\phi) = 20\log\left|\sum_{m=0}^{N-1} I_m e^{+jkdm\cos\phi}\right|$$

- Il fattore di schiera non viene sintetizzato solo agendo sulle fasi degli elementi, ma anche sull'<u>ampiezza delle correnti</u> irradiate da ciascun elemento.

Schiere Planari → allineamento lungo un piano (più gradi di libertà)

$$g(\vartheta,\phi) = 20\log\left|\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} I_{nm} e^{+j\mathbf{k}\cdot(nd_x\mathbf{u}_x + md_y\mathbf{u}_y)}\right| =$$

$$20\log\left|\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} I_{nm} e^{+jk\cos\vartheta\cdot(nd_x\cos\varphi + md_y\sin\varphi)}\right|$$