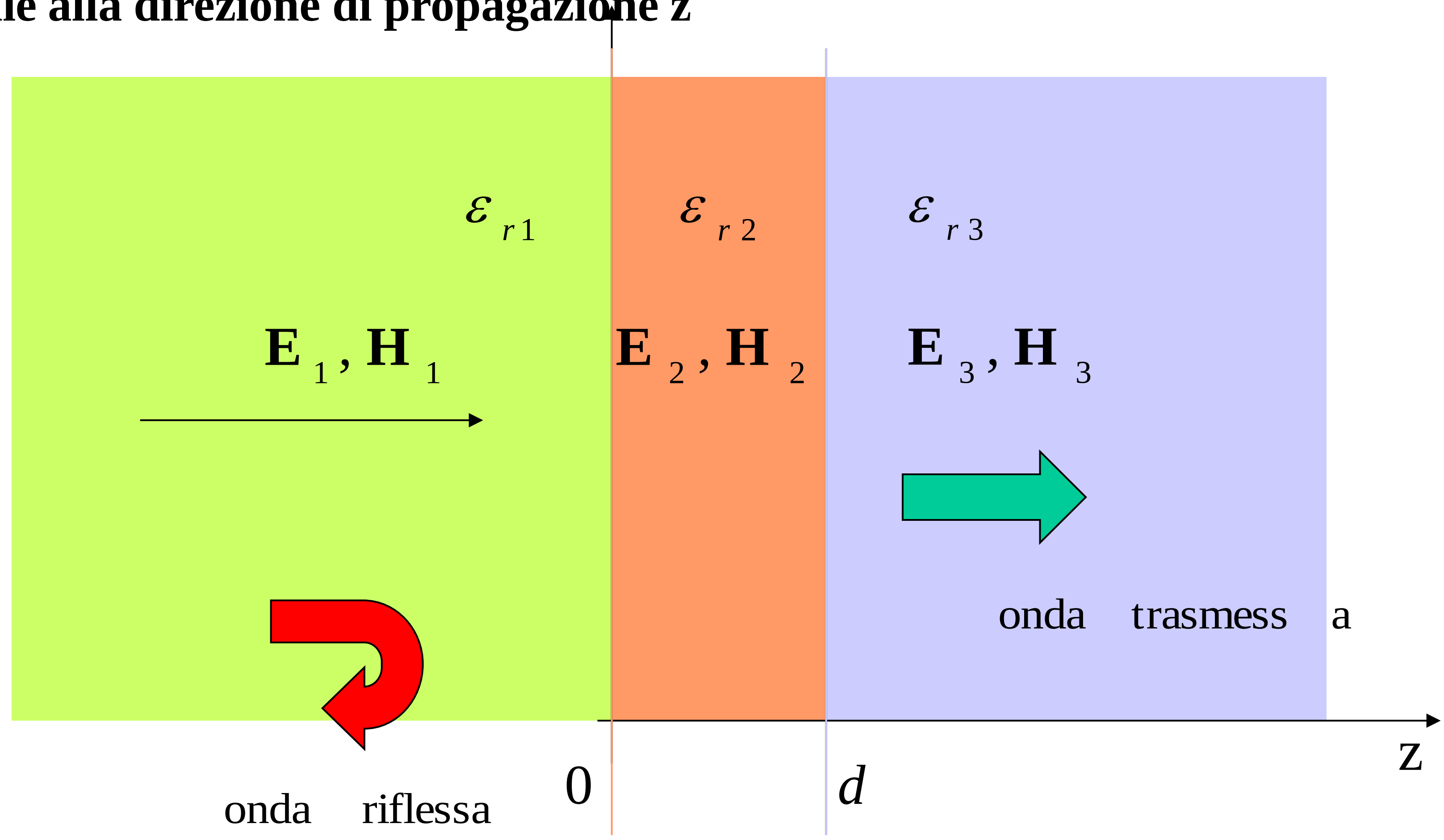
Nel caso di incidenza normale la condizione di continuità dei campi produce una coppia di equazioni che lega solo le ampiezze, incidente, riflessa e trasmessa, delle onde. Nel seguito si assumerà che i campi siano armonici e quindi i campi **E**, **H** dovranno essere intesi come fasori

Riferimento: Ramo, Whinnery, Van Duzer, Fields and waves in communication electronics, 2° Ed. cap 6, Wiley

Onde piane in un mezzo stratificato

Un'onda monocromatica piana polarizzata linearmente, proveniente dal mezzo 1, di permettività relativa ε_{r1}, incide normalmente sullo strato 2 riempito di dielettrico omogeneo ε_{r2} di spessore d. A dx del mezzo 2 vi è un semispazio infinito riempito di dielettrico ε_{r2} . Il campo elettromagnetico giace nel piano ortogonale alla direzione di propagazione z



Campo nelle tre regioni

$$\mathbf{E}_1(z) = \left(E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{+jk_1 z}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_1(z) = \frac{1}{Z_1}\left(E_1^+ e^{-jk_1 z} - E_1^- e^{+jk_1 z}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

$$Z_i = \eta / \sqrt{\varepsilon_{ri}}$$

$$\mathbf{E}_2(z) = \left(E_2^+ e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{+jk_2 z}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_2(z) = \frac{1}{Z_2}\left(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_2^- e^{+jk_2 z}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

$$k_i = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{ri}}$$

$$\mathbf{E}_3(z) = E_3^+ e^{-jk_3 z}\ \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_3(z) = \frac{1}{Z_3} E_3^+ e^{-jk_3 z}\ \hat{\mathbf{y}}$$

Nella regione 3 non vi sono ostacoli che possano riflettere l’onda che, pertanto, si propaga solo verso destra

Continuità delle componenti tangenziali alle interfacce in *z=0 e z=d*

$z = 0$

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-$$

$$\frac{1}{Z_1}\left(E_1^+ - E_1^-\right) = \frac{1}{Z_2}\left(E_2^+ - E_2^-\right)$$

$z = d$

$$E_2^+ e^{-jk_2 d} + E_2^- e^{+jk_2 d} = E_3^+ e^{-jk_3 d}$$

$$\frac{1}{Z_2}\left(E_2^+ e^{-jk_2 d} - E_2^- e^{+jk_2 d}\right) = \frac{1}{Z_3} E_3^+ e^{-jk_3 d}$$

Dividendo la equazione 1 per la 2 otteniamo:

$$Z_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} = Z_2 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}$$

Essendo: $\Gamma_1 = E_1^- / E_1^+$ $\Gamma_2 = E_2^- / E_2^+$

Dividendo la equazione 3 per la 4 :

$$Z_2 \frac{1+\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}}{1-\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}} = Z_3$$

Espressione di $\boxed{\Gamma_2}$

$$\boxed{Z_2\left(1+\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}\right)=Z_3\left(1-\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}\right)}$$

E, dunque:

$$\boxed{Z_2\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}+Z_2\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}=Z_3-Z_2}$$

cioè:

$$\boxed{\Gamma_2=\frac{Z_3-Z_2}{Z_3+Z_2}e^{-2jk_2 d}}$$

Espressione di Γ_1

posto: $Z_{in} = Z_1 \dfrac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1}$

risulta:

$$Z_{in} = Z_2 \frac{1 + \dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2jk_2 d}}{1 - \dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2jk_2 d}} =$$

$$= Z_2 \frac{(Z_3 + Z_2)e^{+jk_2 d} + (Z_3 - Z_2)e^{-jk_2 d}}{(Z_3 + Z_2)e^{+jk_2 d} - (Z_3 - Z_2)e^{-jk_2 d}} =$$

$$= Z_2 \frac{Z_3 + jZ_2 \tan(k_2 d)}{Z_2 + jZ_3 \tan(k_2 d)}$$

Coefficiente di riflessione in z=0

$$\Gamma_1 = \frac{Z_{in}/Z_1 - 1}{Z_{in}/Z_1 + 1} = \frac{\dfrac{Z_2}{Z_1}\dfrac{Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)}{Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)} - 1}{\dfrac{Z_2}{Z_1}\dfrac{Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)}{Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)} + 1} =$$

$$= \frac{Z_2\left[Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)\right] - Z_1\left[Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)\right]}{Z_2\left[Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)\right] + Z_1\left[Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)\right]} =$$

$$= \frac{Z_2\left(Z_3 - Z_1\right) + j\left(Z_2^2 - Z_3 Z_1\right)\tan(k_2 d)}{Z_2\left(Z_3 + Z_1\right) + j\left(Z_2^2 + Z_3 Z_1\right)\tan(k_2 d)}$$

In conclusione:

$$\Gamma(z=0) = \Gamma_1 = \frac{Z_2\left(Z_3 - Z_1\right) + j\left(Z_2^2 - Z_3 Z_1\right)\tan(k_2 d)}{Z_2\left(Z_3 + Z_1\right) + j\left(Z_2^2 + Z_3 Z_1\right)\tan(k_2 d)}$$

In aggiunta, noto Γ_1, risulta

$$\Gamma_2 = \frac{Z_1 \dfrac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} - Z_2}{Z_1 \dfrac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} + Z_2}$$

$$E_2^+ = E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2}$$

E quindi l'ampiezza del campo elettrico trasmesso nella regione 3 in z=d in funzione di quello incidente vale:

$$E_3^+ e^{-jk_3 d} = E_2^+ (e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d}) = E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2} (e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d})$$

Casi particolari: $\Gamma(z=0)=0$

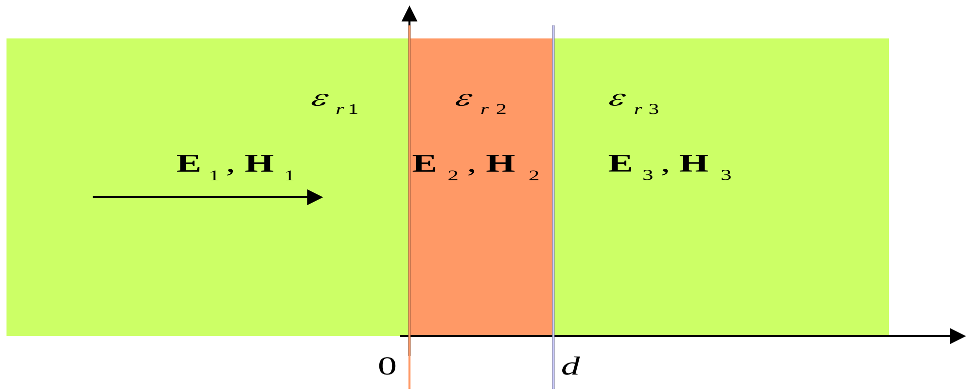
$$k_2 d \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Gamma(z=0) \rightarrow \frac{Z_2^2 - Z_3 Z_1}{Z_2^2 + Z_3 Z_1} = 0 \Leftrightarrow Z_2^2 = Z_3 Z_1$$

Quindi,

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} d = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda_2}{4} \quad \text{e} \quad Z_2 = \sqrt{Z_3 Z_1}$$

Abbiamo, dunque, un adattatore a lambda/4

Casi particolari: $Z_3 = Z_1$

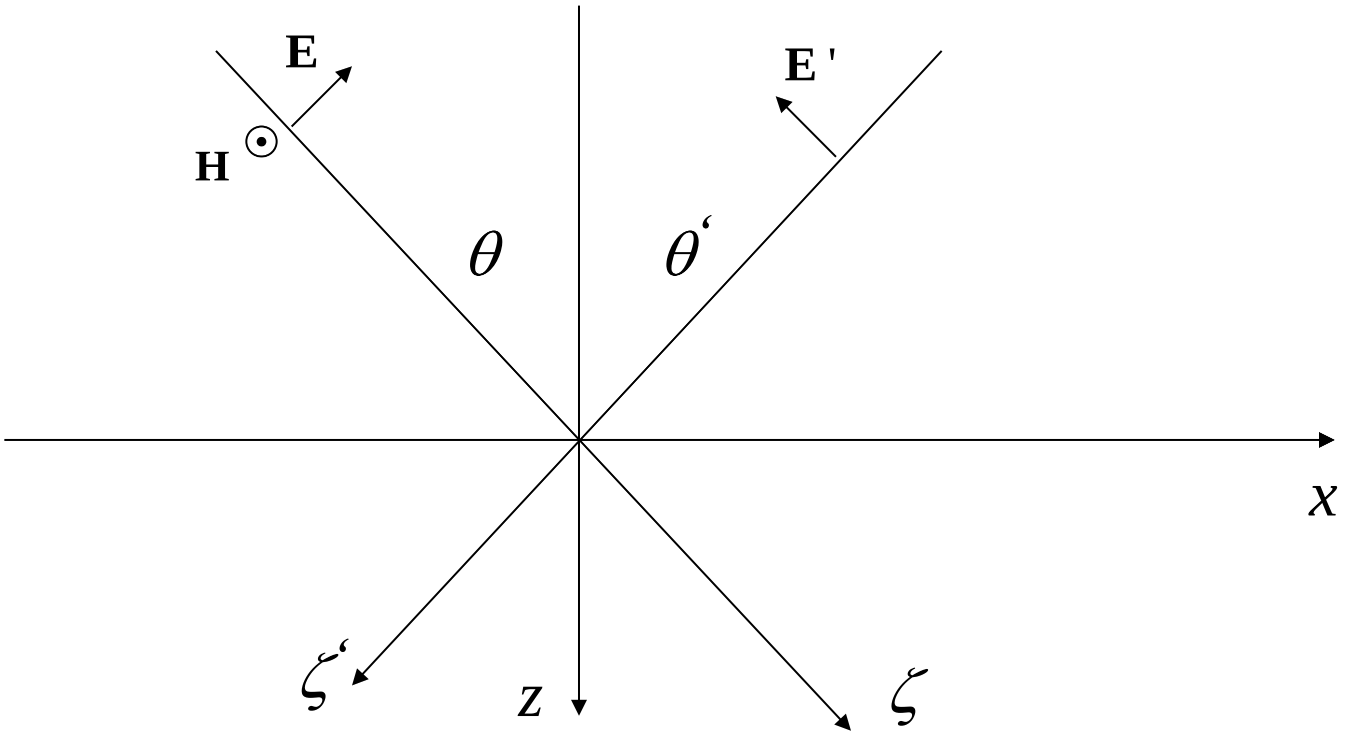


$$\Gamma(z=0) = \frac{j\left(Z_2^2 - Z_1^2\right)\tan(k_2 d)}{2Z_2 Z_1 + j\left(Z_2^2 + Z_1^2\right)\tan(k_2 d)}$$

$$\Gamma(z=0) = 0 \quad \text{se} \quad k_2 d = i\pi$$

Pertanto, se i mezzi 1 e 3 sono uguali è sufficiente che lo spessore del mezzo 2 sia un multiplo intero di $\lambda_2 / 2$

Incidenza Obliqua su un piano di massa (piano z=0; **E** giace nel piano di incidenza, oppure il campo magnetico non ha componente normale al piano z=0, caso TM)



$$\mathbf{u}_{\varsigma} = \left\langle \mathbf{u}_{\varsigma}, \hat{\mathbf{x}} \right\rangle \hat{\mathbf{x}} + \left\langle \mathbf{u}_{\varsigma}, \hat{\mathbf{z}} \right\rangle \hat{\mathbf{z}} = \sin\theta\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\, \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{u}_{\varsigma'} = \left\langle \mathbf{u}_{\varsigma'}, \hat{\mathbf{x}} \right\rangle \hat{\mathbf{x}} + \left\langle \mathbf{u}_{\varsigma'}, \hat{\mathbf{z}} \right\rangle \hat{\mathbf{z}} = -\sin\theta'\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta'\, \hat{\mathbf{z}}$$

Il campo elettrico vale allora

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk\varsigma}\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_\varsigma = E_0 e^{-jk\varsigma}\hat{\mathbf{y}} \times (\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}) = E_0 e^{-jk\varsigma}(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{E}' = -E' e^{jk\varsigma'}\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_{\varsigma'} = -E' e^{jk\varsigma'}\hat{\mathbf{y}} \times (-\sin\theta'\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta'\hat{\mathbf{z}}) = -E' e^{jk\varsigma'}(\sin\theta'\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta'\hat{\mathbf{x}})$$

In $z=0$ la componente tangenziale di E_{tot} deve annullarsi

$$E_0 e^{-jk\varsigma(z=0)}\cos\theta - E' e^{jk\varsigma'(z=0)}\cos\theta' = 0$$

$$\varsigma = \sin\theta\, x + \cos\theta\, z$$

$$\varsigma' = -\sin\theta' x + \cos\theta' z$$

$$E_0 e^{-jkx\sin\theta}\cos\theta - E' e^{-jkx\sin\theta'}\cos\theta' = 0 \qquad \forall x$$

$$\Rightarrow \theta = \theta', \qquad E' = E_0$$

Campo elettromagnetico totale

$$\mathbf{E}_{tot} = E_0 e^{-jk(\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)}(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}}) - E_0\, e^{jk(-\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)}(\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}})$$

$$E_x = E_0 \cos\theta\, e^{-jk(\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)} - E_0 \cos\theta\, e^{jk(-\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)} =$$
$$= E_0 \cos\theta\, e^{-jkx\sin\theta}(-2j\sin(kz\cos\theta))$$

$$E_z = -E_0 \sin\theta\, e^{-jk(\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)} - E_0 \sin\theta\, e^{jk(-\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)} =$$
$$= -E_0 \sin\theta\, e^{-jkx\sin\theta}(2\cos(kz\cos\theta))$$

Il campo elettrico totale è dato dal prodotto fra un’onda progressiva nella direzione x+ e un’onda stazionaria nella direzione z. Il campo magnetico totale si trova immediatamente:

$$\mathbf{H}_{tot} = \mathbf{H} + \mathbf{H}' \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\eta}\mathbf{u}_{\varsigma} \times \mathbf{E} \qquad \mathbf{H}' = -\frac{1}{\eta}\mathbf{u}_{\varsigma'} \times \mathbf{E}'$$

Campo elettrico normale al piano di incidenza (caso TE)

$$\mathbf{E} = E_0 \, e^{-jk\varsigma(x,z)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{E}' = -E' e^{jk\varsigma'(x,z)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\varsigma = \sin\theta \, x + \cos\theta \, z$$

$$\varsigma' = -\sin\theta' x + \cos\theta' z$$

$$E_{\tan}(x,0) = 0 = E_0 \, e^{-jk\sin\theta x} - E' e^{-jk\sin\theta' x}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta' \qquad E_0 = E'$$

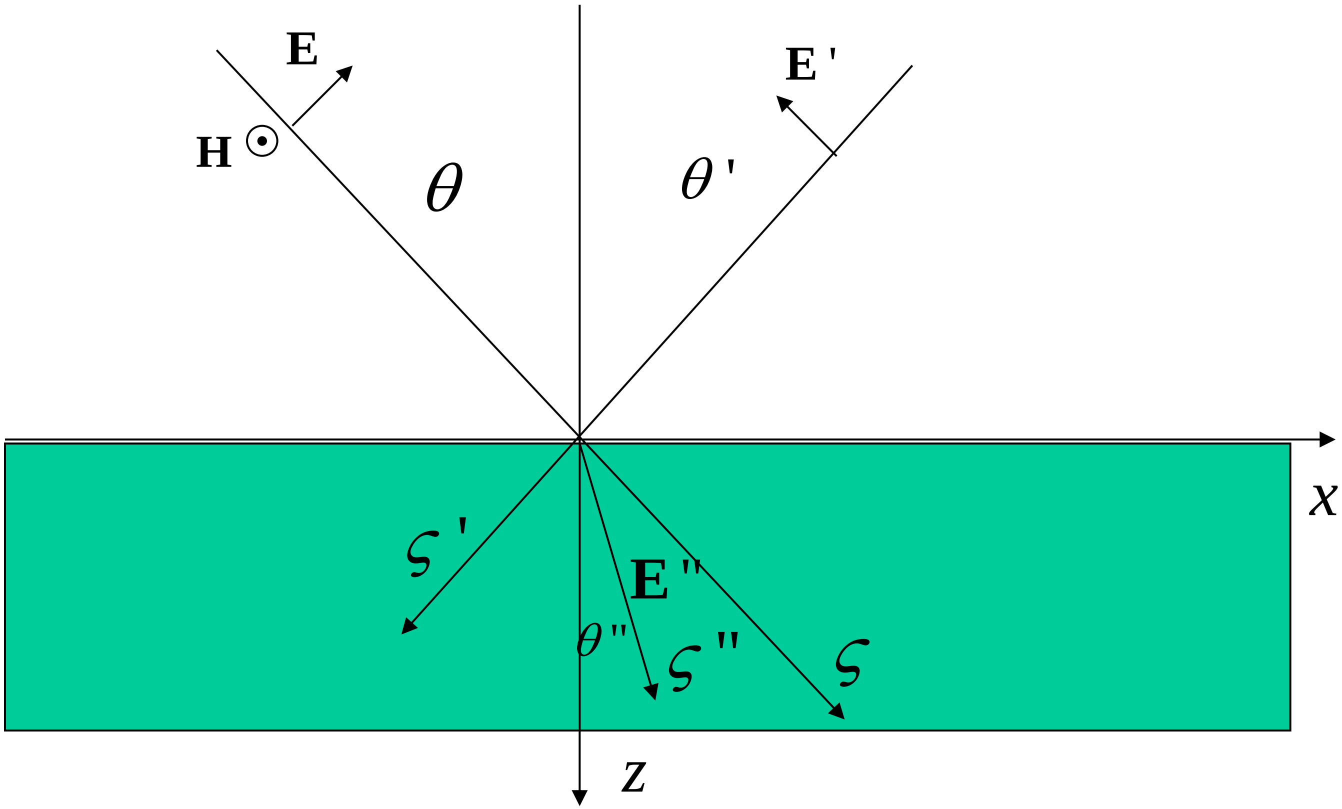
Campo elettromagnetico totale

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \left[e^{-jk(\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)} - e^{jk(-\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)} \right] =$$

$$\hat{\mathbf{y}} E_0 \left[-2j \sin(\cos\theta\, kz) \right] e^{-jk(\sin\theta\, x)}$$

$$\mathbf{H}_{tot} = \mathbf{H} + \mathbf{H}' \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}_{\varsigma} \times \mathbf{E} \qquad \mathbf{H}' = -\frac{1}{\eta} \mathbf{u}_{\varsigma'} \times \mathbf{E}'$$

Incidenza obliqua su un dielettrico che occupa il semispazio z>0 (caso TM, campo magnetico ortogonale al piano di incidenza, campo elettrico parallelo al piano di incidenza).



In $z=0$ le componenti tangenziali di $\mathbf{E}_{tot}$ e $\mathbf{H}_{tot}$ devono essere continue

$$\left[\mathbf{E}(x,0^+) + \mathbf{E}'(x,0^+)\right]\cdot\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{E}''(x,0^+)\cdot\hat{\mathbf{x}} \qquad \left[\mathbf{H}(x,0^+) + \mathbf{H}'(x,0^+)\right]\cdot\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}''(x,0^+)\cdot\hat{\mathbf{y}}$$

Il campo elettrico vale:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk\varsigma}\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_\varsigma = E_0 e^{-jk\varsigma}\hat{\mathbf{y}} \times (\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}) = E_0 e^{-jk\varsigma}(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{E}' = \Gamma E_0 e^{jk\varsigma'}\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_{\varsigma'} = \Gamma E_0 e^{jk\varsigma'}\hat{\mathbf{y}} \times (-\sin\theta'\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta'\hat{\mathbf{z}}) = \Gamma E_0 e^{jk\varsigma'}(\sin\theta'\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta'\hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{E}'' = TE_0 e^{-jk\varsigma''}\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{u}_{\varsigma''} = TE_0 e^{-jk''\varsigma''}(-\sin\theta''\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta''\hat{\mathbf{x}})$$

$$\varsigma = \sin\theta\, x + \cos\theta\, z; \qquad \varsigma' = -\sin\theta' x + \cos\theta' z; \qquad \varsigma'' = \sin\theta'' x + \cos\theta'' z$$

Quindi deve essere:

$$E_0 e^{-jk\varsigma(x,0)}\cos\theta + \Gamma E_0 e^{+jk\varsigma'(x,0)}\cos\theta' = TE_0 e^{-jk''\varsigma''(x,0)}\cos\theta'' \qquad \forall x$$

➡ Tutti gli argomenti degli esponenziali devono essere uguali:

$$k\sin\theta = k\sin\theta' = k''\sin\theta''$$

Legge di Snell: $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$

Dove abbiamo posto θ=θ1, n=n_1, θ”=θ2, n”=n_2

Deve inoltre essere:

$$\cos \theta_1 (1 + \Gamma) = T \cos \theta_2$$

Il campo magnetico:

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{\eta} e^{-jk\varsigma} \hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{H}' = -\frac{\Gamma E_0}{\eta} e^{jk\varsigma'} \hat{\mathbf{y}} = \qquad \mathbf{H}'' = \frac{TE_0}{\eta_2} e^{-jk_2\varsigma} \hat{\mathbf{y}}$$

La continuità del campo magnetico tangenziale:

$$\frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2}$$

Deve essere allora: $$\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{\eta_2 \cos\theta_2}{\eta_1 \cos\theta_1}$$

$$Z_{z1} = \eta_1 \cos\theta_1 \qquad Z_{z2} = \eta_2 \cos\theta_2$$

$$k_{z1} = n_1 k_0 \cos\theta_1 \quad k_{z2} = n_2 k_0 \cos\theta_2$$

Quindi il problema è formalmente analogo a quello che si è incontrato nel caso di incidenza normale. L’unica differenza risiede nella impedenza d’onda che è moltiplicata per cos θ. D’altra parte, il fattore cos θ fa nascere altre possibilità. Infatti,

$$\Gamma^{(TM)} = \frac{\eta_2 \cos\theta_2 - \eta_1 \cos\theta_1}{\eta_2 \cos\theta_2 + \eta_1 \cos\theta_1}$$

Dalla quale si vede come Γ possa annullarsi anche
Se i due dielettrici sono diversi

Infatti, ciò accade quando: $$\eta_2 \cos\theta_2 = \eta_1 \cos\theta_1$$

Dalla legge di Snell, abbiamo che $$\sin\theta_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\sin\theta_1$$

quindi
$$\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\cos\theta_1\right)^2 = 1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\sin\theta_1\right)^2$$

Vera se: $$\left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - 1\right]\cos^2\theta_1 = \left[1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2\right]\sin^2\theta_1$$

$$\tan^2\theta_B = \frac{\left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - 1\right]}{1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_2^2}\right)}{\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}} = \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Angolo di Brewster θ_B (o angolo di polarizzazione) per il quale la riflessione è nulla

$$\tan\theta_B = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

L'angolo di Brewster esiste soltanto per la polarizzazione **TM**. Infatti, nel caso di polarizzazione TE, la condizione di riflessione nulla produce la coppia di equazioni:

$$\eta_2 / \cos\theta_2 = \eta_1 / \cos\theta_1 \qquad \sin\theta_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\sin\theta_1$$

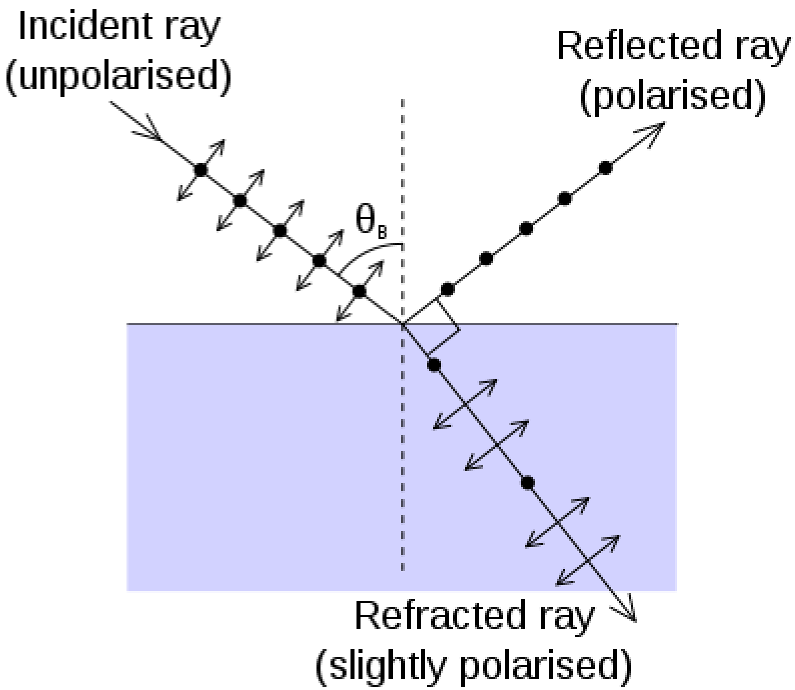
Nel caso **TE**,

$$\eta_2^2\cos^2\theta_1 = \eta_1^2\cos^2\theta_2 = \eta_1^2\left(1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2}\sin^2\theta_1\right) =$$

$$= \left(\eta_1^2 - \eta_2^2\sin^2\theta_1\right) \Rightarrow \eta_1^2 = \eta_2^2$$

Quindi, nel caso TE, non esiste un angolo di incidenza per il quale si abbia riflessione nulla

Polarizzatore: Se un’onda incide non polarizzata (TE+TM) incide con l’angolo di Brewster, solanto la componente TE viene riflessa (mentre passa tutta la componente TM e parte di quella TE). Così la parte riflessa è polarizzata!



Le due fotografie sono ottenute senza (sx) e con (dx) un filtro polarizzatore della luce (davanti all’obiettivo) che lascia passare la componente TM mentre è opaco alla componente TE.

Riflessione totale

$$n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2$$

Se $n_1 > n_2$, allora se $\vartheta_1 \geq \vartheta_c = \sin^{-1}(\frac{n_2}{n_1}) \Rightarrow \sin\vartheta_2 \geq 1$

$\vartheta_2 = \vartheta_{2R} + j\,\vartheta_{2I}$

$$\sin\vartheta_2 = \sin\vartheta_{2R}\cos(j\vartheta_{2I}) + \sin(j\vartheta_{2I})\cos(\vartheta_{2R}) =$$

$$= \sin\vartheta_{2R}\cosh(\vartheta_{2I}) + j\sinh(\vartheta_{2I})\cos(\vartheta_{2R}) \in \mathbb{R}$$

Pertanto $\vartheta_{2R} = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_{2I} = \cosh^{-1}(\frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_1)$

$$\zeta_2 = x\sin\vartheta_2 + z\cos\vartheta_2 = x\cosh\vartheta_{2I} - z\sin\vartheta_{2R}\,\sin(j\vartheta_{2I}) =$$

$$= x\cosh\vartheta_{2I} - j\,z\sinh(\vartheta_{2I})$$

Onda incidente nella regione 1

$$\mathbf{E}_{1i}(x,y,z)=E_1 e^{-jk_1\varsigma(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_\varsigma=E_1 e^{-jk_1\varsigma(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}}\times(\sin\vartheta_1\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\vartheta_1\hat{\boldsymbol{z}})=$$

$$=E_1\, e^{-jk_1\varsigma(x,z)}(-\sin\vartheta_1\hat{\boldsymbol{z}}+\cos\vartheta_1\hat{\boldsymbol{x}})$$

$$\mathbf{H}_{1i}\,(x,y,z)=\frac{E_1}{\eta_1}e^{-jk_1\varsigma(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}}$$

Dove: $\varsigma(x,z)=\sin\vartheta_1 x+\cos\vartheta_1 z$

Vettore di Poynting complesso

$$\mathbf{S}_{1i}(x,y,z)=\mathbf{E}_{1i}(x,y,z)\times\mathbf{H}^*{}_{1i}(x,y,z)=\frac{|E_1|^2}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_\varsigma\times\hat{\boldsymbol{y}}=\frac{|E_1|^2}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{u}}_\varsigma$$

Onda riflessa nella regione 1

$$\mathbf{E}_{1r}(x,y,z)=\Gamma E_1 e^{+jk_1\varsigma'(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_\varsigma=\Gamma\, E_1 e^{+jk_1\varsigma'(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}}\times(-\sin\vartheta_1\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\vartheta_1\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$=\Gamma E_1\; e^{+jk_1\varsigma'(x,z)}\,(\sin\vartheta_1\hat{\boldsymbol{z}}+\cos\vartheta_1\hat{\boldsymbol{x}})$$

$$\mathbf{H}_{1r}\,(x,y,z)=-\frac{\Gamma E_1}{\eta_1}e^{+jk_1\varsigma'(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}}$$

Dove: $\varsigma'(x,z)=-\sin\vartheta_1 x+\cos\vartheta_1 z$

Vettore di Poynting complesso

$$\mathbf{S}_{1r}(x,y,z)=\mathbf{E}_{1r}(x,y,z)\times\mathbf{H}^*{}_{1r}(x,y,z)=\frac{-|\Gamma E_1|^2}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_{\varsigma'}\,\widehat{\times\,\boldsymbol{y}}=-\frac{|\Gamma E_1|^2}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{u}}_{\varsigma'}$$

Onda trasmessa nella regione 2

$\mathbf{E}_2(x,y,z) = TE_1 e^{-jk_2\varsigma''(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{u}}_\varsigma = TE_1 e^{-jk_2\varsigma''(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}} \times (\sin\vartheta_2\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\vartheta_2\hat{\boldsymbol{z}}) =$

$= TE_1\ e^{-jk_2\varsigma''(x,z)}\ (-\sin\vartheta_2\hat{\boldsymbol{z}} + \cos\vartheta_2\hat{\boldsymbol{x}})$

$\mathbf{H}_2\ (x,y,z) = \dfrac{TE_1}{\eta_2} e^{-jk_2\varsigma''(x,z)}\hat{\boldsymbol{y}}$

Dove: $\varsigma''(x,z) = \sin\vartheta_2 x + \cos\vartheta_2 z$

Se $\vartheta_1 > \vartheta_c \Rightarrow \vartheta_2 = \pi/2 + \mathrm{i}\ \vartheta_{2i}$

$\vartheta_{2i} = \cosh^{-1}(n_1/n_2 \sin\vartheta_1)$

Essendo:

$n_1/n_2 \sin\vartheta_1 = \sin(\pi/2 + \mathrm{i}\ \vartheta_{2i}) = \cosh\vartheta_{2i}$

Continuità in z=0

$[\mathbf{E}_{1i}(x,y,0)+\mathbf{E}_{1r}(x,y,0)] \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{E}_2(x,y,0) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}$

$[\mathbf{H}_{1i}(x,y,0)+\mathbf{H}_{1r}(x,y,0)] \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{H}_2(x,y,0) \cdot \hat{\boldsymbol{y}}$

$$E_1 \cos\vartheta_1 (e^{-jk_1\varsigma(x,0)} + \Gamma e^{jk_1\varsigma'(x,0)}) = T E_1 e^{-jk_2\varsigma''(x,0)} \cos\vartheta_2$$

Vera se: $-k_1\varsigma(x,0) = k_1\varsigma'(x,0) = -k_2\varsigma''(x,0)$

$$E_1 \cos\vartheta_1 (1 + \Gamma) = T E_1 \cos\vartheta_2$$

$$\frac{E_1}{\eta_1}(1 - \Gamma) = T \frac{E_2}{\eta_2}$$

$$\Gamma^{(TM)}(\vartheta_1)=\frac{\eta_2\cos\vartheta_2-\eta_1\cos\vartheta_1}{\eta_2\cos\vartheta_2+\eta_1\cos\vartheta_1}=\frac{-j\eta_2\sinh\vartheta_{2I}(\vartheta_1)-\eta_1\cos\vartheta_1}{-j\eta_2\sinh\vartheta_{2I}(\vartheta_1)+\eta_1\cos\vartheta_1}$$

NB $|\Gamma^{(TM)}| = 1$

$$\vartheta_{2I}=\cosh^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_1\right)$$

$$T^{(TM)}=(1+\Gamma^{(TM)})\ \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2}=-(1+\Gamma^{(TM)})\ \frac{\cos\vartheta_1}{j\sinh\vartheta_{2I}}$$

$\Gamma^{(TM)}(\vartheta_c)=-1$ e $\quad T^{(TM)}(\vartheta_c)=2$

$$\mathbf{E}_2(x,y,z)=TE_1e^{-jk_2\varsigma''(x,z)}\ (-\sin\vartheta_2\hat{\boldsymbol{z}}+\cos\vartheta_2\hat{\boldsymbol{x}})$$

$$\varsigma''(x,z)=\sin\vartheta_2 x+\cos\vartheta_2 z = x\cosh\vartheta_{2i}\text{-}jz\sinh\vartheta_{2i}$$

$$\mathbf{E}_2(x,y,z)=TE_1e^{-jk_2x\cosh\vartheta_{2i}}e^{-k_2z\sinh\vartheta_{2i}}(-\cosh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{z}}-j\sinh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{x}})$$

$$\mathbf{E}_2(x,y,z) = TE_1 e^{-jk_2 x\cosh\vartheta_{2i}} e^{-k_2 z\sinh\vartheta_{2i}}(-\cosh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{z}} - j\sinh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{x}})$$

$$\mathbf{H}_2\,(x,y,z) = \frac{TE_1}{\eta_2} e^{-jk_2 x\cosh\vartheta_{2i}} e^{-k_2 z\sinh\vartheta_{2i}}\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\mathbf{S}_2(x,y,z) = \mathbf{E}_2(x,y,z) \times \mathbf{H}_2^*(x,y,z) =$$

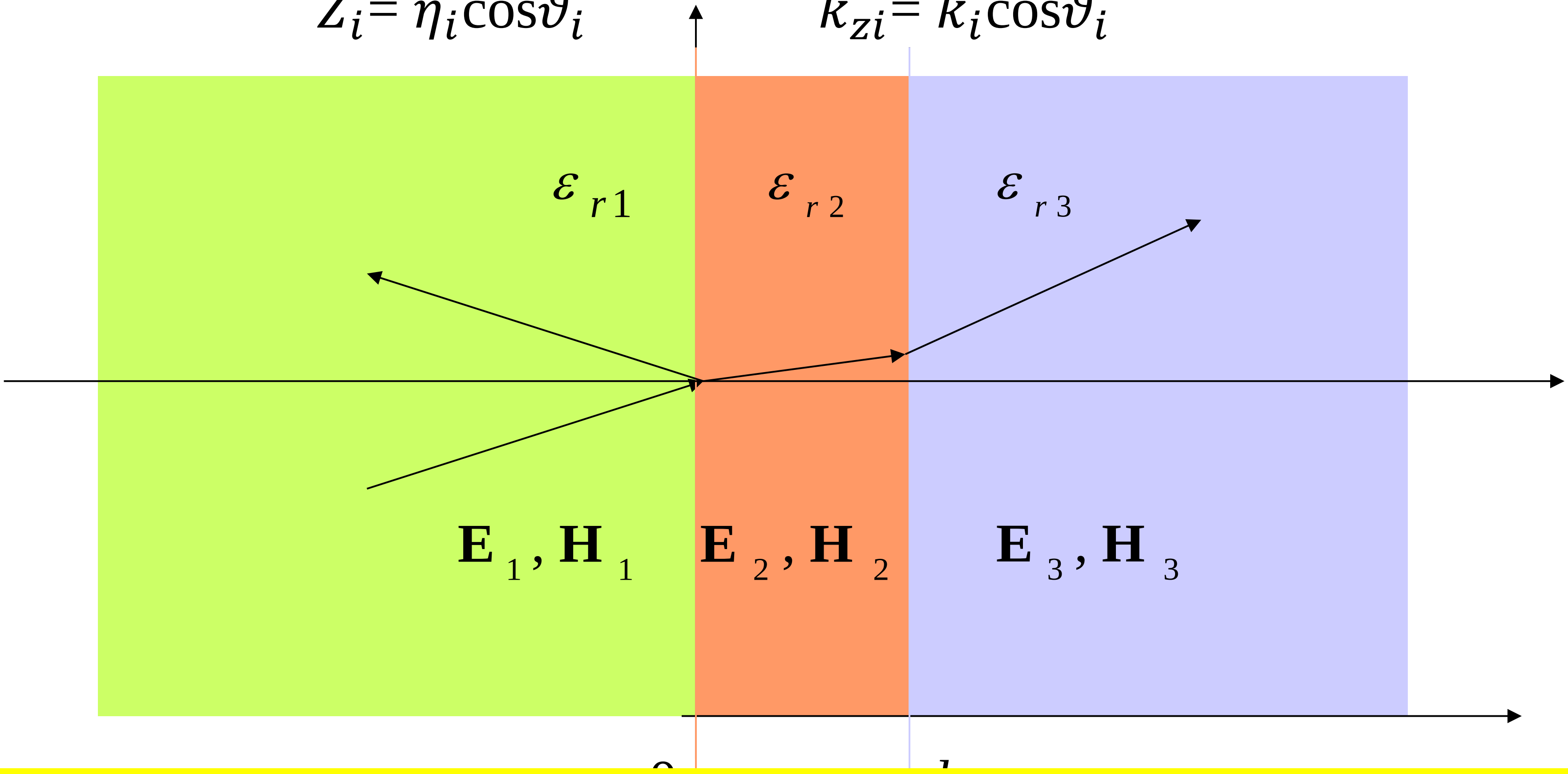
$$\frac{|TE_1|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 z\sinh\vartheta_{2i}}(\cosh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{x}} + j\sinh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{z}})$$

$$Re(\mathbf{S}_2) = \frac{|TE_1|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 z\sinh\vartheta_{2i}}\cosh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{x}}$$ Densità di potenza attiva

$$Im(\mathbf{S}_2) = \frac{|TE_1|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 z\sinh\vartheta_{2i}}\sinh\vartheta_{2i}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Incidenza obliqua TM su un mezzo stratificato

$Z_i = \eta_i \cos\vartheta_i$ $\qquad$ $k_{zi} = k_i \cos\vartheta_i$



$$\Gamma(z=0) = \Gamma_1 = \frac{Z_2\left(Z_3 - Z_1\right) + j\left(Z_2^2 - Z_3 Z_1\right)\tan(k_{z2} d)}{Z_2\left(Z_3 + Z_1\right) + j\left(Z_2^2 + Z_3 Z_1\right)\tan(k_{z2} d)}$$

$$\Gamma(z{=}0) = \frac{E_{1xr}(x,y,0)}{E_{1xi}(x,y,0)} = \frac{Z_2(Z_3 - Z_1) + j\left(Z_2^2 - Z_3 Z_1\right)\tan(k_{z2}d)}{Z_2(Z_3 + Z_1) + j\left(Z_2^2 + Z_3 Z_1\right)\tan(k_{z2}d)} \qquad k_{z2}{=}k_2\cos\vartheta_2$$

CASO TM

$$Z_i = \eta_i \cos\vartheta_i$$

CASO TE

$$Z_i = \eta_i / \cos\vartheta_i$$

Se i mezzi sono senza perdite (ε_{ri} *reale*) la densità di potenza attiva trasmessa al mezzo 3 vale:

$$(1 - |\Gamma|^2)\ p_{inc}$$

Essendo p_{inc} la densità di potenza attiva media incidente.

In altre sezioni *z*

$$\Gamma(z) = \frac{E_{1xr}(x,y,z)}{E_{1xi}(x,y,z)} = e^{-2jk_{1z}z}\ \Gamma(z{=}0)$$

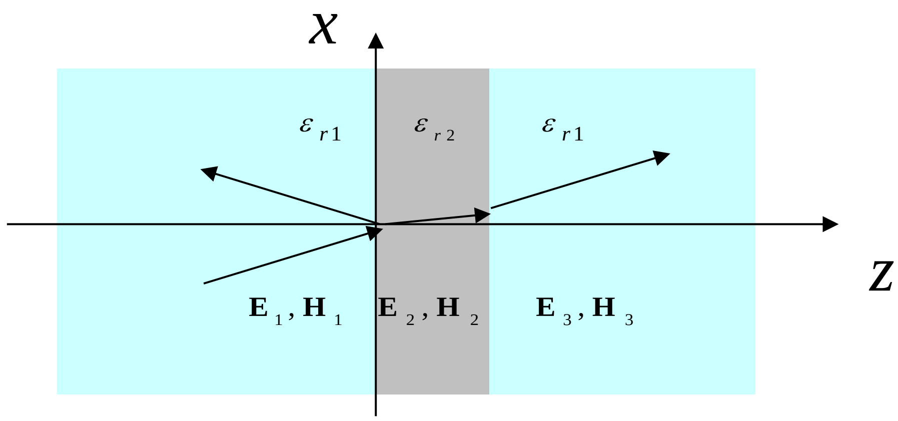
Esempio di scritto

Un'onda piana con polarizzazione TM alla frequenza di 1000 MHz e densità di potenza 20 W/m^2 incide con un angolo di 30° su una lastra di Allumina (εr=10) dello spessore di 1 cm. Si calcolino:

a) espressione dell'onda riflessa;

b) densità di potenza trasmessa;

c) se esiste, l'angolo di incidenza per il quale la riflessione è nulla, indipendentemente dallo spessore del dielettrico.



$$p_{inc}=\frac{1}{2}\frac{|E_1|^2}{\eta_1}=20\ W/m^2 \Rightarrow |E_1|=\sqrt{20\cdot 2\cdot 377}=122.8V/m$$

$$\vartheta_2 = 9.1°$$

$$\Gamma = \frac{j\left(Z_2^2 - Z_1^2\right)\tan(k_0 n_2 \cos\vartheta_2 d)}{2Z_2 Z_1 + j\left(Z_2^2 + Z_1^2\right)\tan(k_0 n_2 \cos\vartheta_2 d)}$$

1) Campo nella regione 1

$$\Gamma = -0.455 - i0.38$$

$$E_{1zi}(x,y,z) = -E_1\, e^{-jk_1 \varsigma(x,z)} \sin\vartheta_1$$

$$E_{1xi}(x,y,z) = E_1 e^{-jk_1 \varsigma(x,z)} \cos\vartheta_1$$

$$H_{1yi}\,(x,y,z) = \frac{E_1}{\eta_1} e^{-jk_1 \varsigma(x,z)}$$

$$\varsigma(x,z) = \sin\vartheta_1 x + \cos\vartheta_1 z$$

$$E_{1zr}(x,y,z) = \Gamma E_1 e^{jk_1 \varsigma'(x,z)} \sin\vartheta_1$$

$$E_{1xr}(x,y,z) = \Gamma E_1 e^{jk_1 \varsigma'(x,z)} \cos\vartheta_1$$

$$H_{1yr}\,(x,y,z) = -\frac{\Gamma E_1}{\eta_1} e^{jk_1 \varsigma'(x,z)}$$

$$\varsigma'(x,z) = -\sin\vartheta_1 x + \cos\vartheta_1 z$$

2) Densità di potenza trasmessa $\quad p_T = (1-|\Gamma|^2)p_{inc} = 0.65p_{inc}$

3) Angolo di Brewster $\quad \vartheta_B = \tan^{-1}\frac{n_2}{n_1} = 1.265 \text{ rad} = 72.45°$

Il campo nella regione 3 si ricava come già mostrato quando si è studiata l’incidenza normale in un mezzo stratificato

$$\Gamma_2 = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2jk_2 d}$$

$$E_3^+ e^{-jk_3 d} = E_2^+ (e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d}) = E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2} (e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d})$$

Avendo posto $k_2 = k_0 n_2 \cdot \cos\vartheta_2$