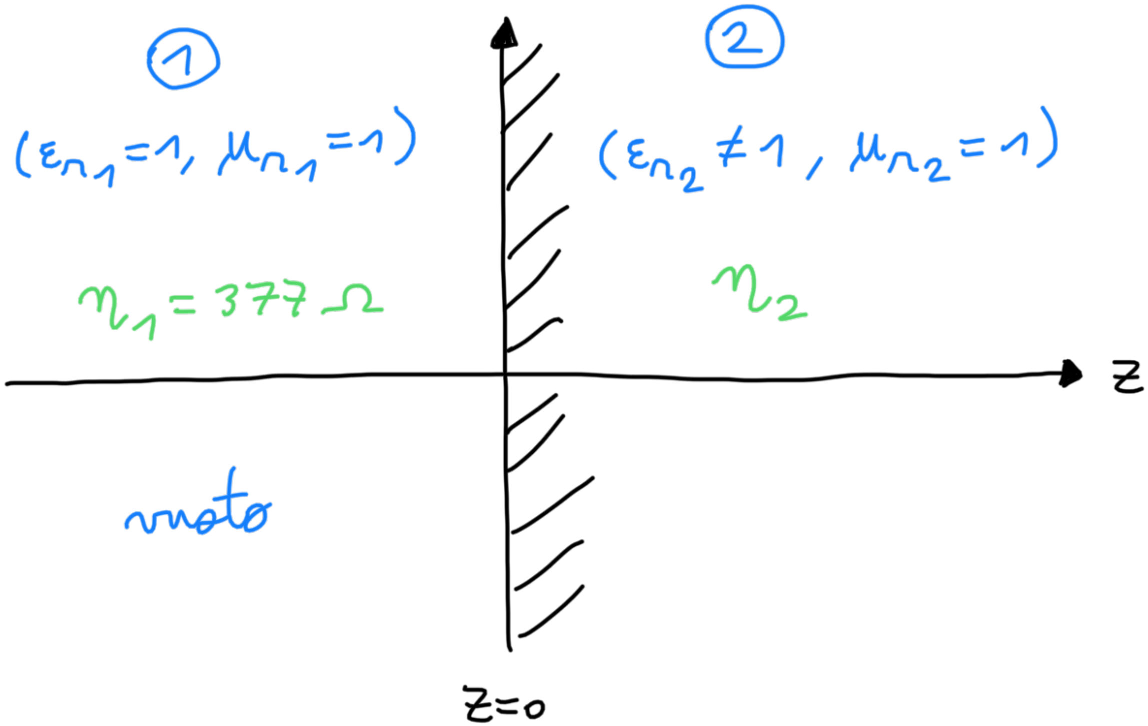
- Consideriamo il caso di un onda e.m. piana che si propaga in direzione (in ogni piano $z = z^*$, campo $\bar{E}$ e $\bar{H}$ rimangono identici a se stessi).
- L'onda sarà caratterizzata da un fasore: e^{-jkz}



<u>REGIONE 1</u>: $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1^+ \cdot e^{-jk_1 z}\,\hat{x}$, $\tilde{H}_1 = \dfrac{\tilde{E}_1^+}{\eta_1} \cdot e^{-jk_1 z}\,\hat{y}$

<u>REGIONE 2</u>: $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_2^+ \cdot e^{-jk_2 z}\,\hat{x}$, $\tilde{H}_2 = \dfrac{\tilde{E}_2^+}{\eta_2} \cdot e^{-jk_2 z}\,\hat{y}$

Le condizioni al contorno sanciscono che il campo deve assumere un certo valore, le condizioni di continuità no

- Dalle condizioni di continuità:

$$\begin{cases} \tilde{E}_{t_1}(z=0^-) = \tilde{E}_{t_2}(z=0^+) \\ \tilde{H}_{t_1}(z=0^-) = \tilde{H}_{t_2}(z=0^+) \end{cases}$$

→ la continuità dei campi $\bar{E}$, $\bar{H}$ all'interfaccia tra due mezzi vale indipendentemente da come rappresento il campo e.m.

ottengo:

$$\begin{cases} \tilde{E}_1^+ = \tilde{E}_2^+ \\ \dfrac{\tilde{E}_1^+}{\eta_1} = \dfrac{\tilde{E}_2^+}{\eta_2} \end{cases}$$

→
- queste equazioni non ammettono soluzioni
- la soluzione di tipo progressiva non mi basta, devo considerare anche il termine regressivo

$$\boxed{\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_i}}}}$$

- Quindi, nella regione 1:

$$\begin{cases} \tilde{E}_1 = \left(\tilde{E}_1^+ e^{-jk_1 z} + \tilde{E}_1^- e^{+jk_1 z} \right) \hat{x} \\ \tilde{H}_1 = \dfrac{1}{\eta_1} \left(\tilde{E}_1^+ e^{-jk_1 z} - \tilde{E}_1^- e^{+jk_1 z} \right) \hat{y} \end{cases}$$

- nella regione 2 non ho un altro mezzo che può riflettere l'onda e, quindi, creare una componente regressiva:

$$\begin{cases} \tilde{E}_2 = \tilde{E}_2^+ e^{-jk_2 z} \hat{x} \\ \tilde{H}_2 = \dfrac{\tilde{E}_2^+}{\eta_2} e^{-jk_2 z} \hat{y} \end{cases}$$

- Imponiamo la continuità del campo $\bar{E}$ tangenziale: $(\tilde{E}_1(z=0^-) = \tilde{E}_1(z=0^+))$

$$\begin{cases} \tilde{E}_1^+ + \tilde{E}_1^- = E_2^+ \\ \dfrac{1}{\eta_1} \left(\tilde{E}_1^+ - \tilde{E}_1^- \right) = \dfrac{\tilde{E}_2^+}{\eta_2} \quad (= \tilde{H}_2) \end{cases}$$

incognite

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \longrightarrow \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{u}_y \partial_z E_x$$

$$\bar{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\partial_z E_x = -\frac{1}{j\omega\mu}\partial_z\left(E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{+jk_1 z}\right)$$

- Conoscendo la potenza dell'onda incidente è possibile ricavare $\tilde{E}_1^+$:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\frac{\tilde{E}_1^{+\,2}}{\eta_1}} \Rightarrow \boxed{\tilde{E}_1^+ = \sqrt{2\eta_1 \cdot P}} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

ampiezza dell'onda e.m. incidente

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}^* = \bar{E}_1 \times \frac{\bar{E}_1}{\eta_1} = \frac{\bar{E}_1^2}{\eta_1}$$ (si mette $\frac{1}{2}$ per la potenza media)

- Dividendo la 1° eq. per la 2° si ottiene:

$$\frac{\hat{E}_1^+ + \hat{E}_1^-}{\hat{E}_1^+ - \hat{E}_1^-} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

- Introduciamo il coefficiente di riflessione in $z=0$: (adimensionale)

$$\boxed{\Gamma = \frac{E_1^-}{E_1^+}} \Rightarrow \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \Rightarrow \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

($=0$ se $\eta_1 = \eta_2$)

$\Downarrow$

(stesso mezzo)

- Si ha che:

$$0 \leq |\Gamma| \leq 1$$

↳ $\eta_2 = 0$ oppure $\eta_2 \to \infty \Rightarrow \boxed{|\Gamma| \to 1}$

$\eta_2 \to 0 \Rightarrow \hat{E}_2^+ = 0$, $\eta_2 \to \infty \Rightarrow \hat{H}_2^+ = 0$

- $(1+\Gamma)\,\tilde{E}_1^+ = \tilde{E}_2^+$

  - se $\boxed{\eta_2 \to 0} \Rightarrow \boxed{\Gamma = -1}$

    $$\Downarrow$$

    $$\boxed{\tilde{E}_2^+} = (1+\Gamma)\,\tilde{E}_1^+ \boxed{= 0}$$

    → condizione di cortocircuito (riflessione totale)
    (piani elettrici perfetti)

  - se $\boxed{\eta_2 \to \infty} \Rightarrow \boxed{\Gamma = 1}$

    $$\Downarrow$$

    $$\boxed{\tilde{H}_2^+} = \frac{1}{\eta_1}\left(\tilde{E}_1^+ - \tilde{E}_1^-\right) = \frac{\tilde{E}_1^+}{\eta_1}(1-\Gamma) \boxed{= 0}$$

    → condizione di circuito aperto
    (piani magnetici perfetti)

- In questo caso specifico, la geometria del mezzo incidente non varia la natura dell'onda (rimane sempre un fronte d'onda piano).

• Analogamente possiamo definire il coefficiente di trasmissione:

$$\boxed{T = \frac{E_2^+}{E_1^+} = 1 + \Gamma}$$

• Quanto vale la densità di potenza media ?

$$P = \frac{1}{2} Re\left(\tilde{E}_1 \times \tilde{H}_1^*\right) =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left[\left(E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{+jk_1 z}\right)\left(\frac{E_1^+}{\eta_1} e^{-jk_1 z} - \frac{E_1^-}{\eta_1} e^{+jk_1 z}\right)^*\right](\hat{x} \times \hat{y}) =$$

raccolgo

$$= \frac{1}{2} Re\left[\frac{1}{\eta_1} E_1^+ E_1^{+*} e^{-jk_1 z} e^{+jk_1 z}\left(1 + \Gamma \cdot e^{2jk_1 z}\right)\left(1 - \Gamma^* \cdot e^{-2jk_1 z}\right)\right]\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left[\frac{1}{\eta_1} |E_1^+|^2 \left(1 - |\Gamma|^2 + \Gamma \cdot e^{2jk_1 z} - \Gamma^* \cdot e^{-2jk_1 z}\right)\right]\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left[\frac{1}{\eta_1} |E_1^+|^2 \left(1 - |\Gamma|^2 + \underbrace{2\, Im\left[\Gamma \cdot e^{2jk_1 z}\right] j}_{\text{scompare}}\right)\right]\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\eta_1} |E_1^+|^2 (1 - |\Gamma|^2) \hat{z}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\eta_1} |E_1^+|^2}_{} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\eta_1} |E_1^+|^2 |\Gamma|^2}_{} \rightarrow$$ ampiezza del vett. di Poynting dell'onda incidente / riflessa
(progressiva) (regressiva)

- In altri termini si ha la differenza tra la densità di potenza media incidente e quella riflessa.
- Mi aspetto che questa quantità sia uguale alla densità di potenza trasmessa nel mezzo 2:

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\eta_1} (1 - |\Gamma|^2)}_{} |E_1^+|^2 \hat{z} = \frac{1}{2} \frac{|E_2^+|^2}{\eta_2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\eta_2} |1 + \Gamma|^2}_{} |E_1^+|^2 \hat{z}$$

l'equazione vale se e solo se questi due termini sono uguali

$$\boxed{P_{INC} + P_{RIFL} = P_{TRAS}}$$

- Quindi si deve avere che:

$$\frac{1}{\eta_2}|1+\Gamma|^2 = \frac{1}{\eta_1}\left(1-|\Gamma|^2\right)$$

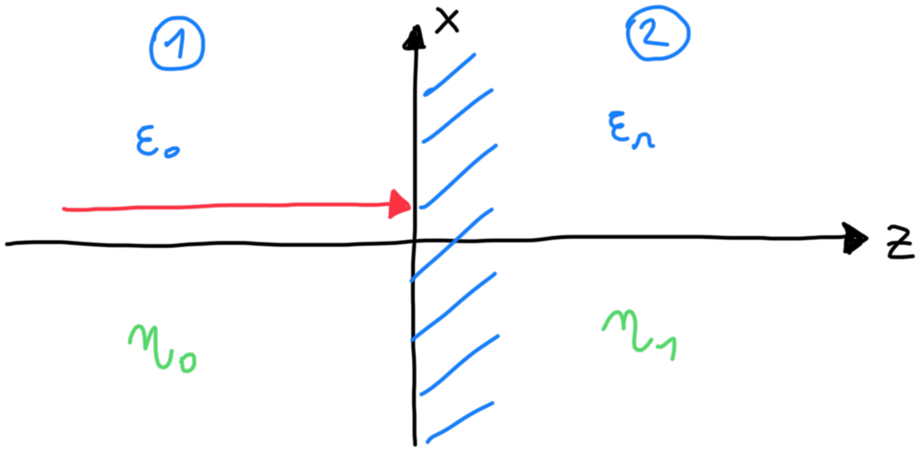
$$\Gamma = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} \longrightarrow 1+\Gamma = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$$

$$1-|\Gamma|^2 = \frac{(\eta_2+\eta_1)^2-(\eta_2-\eta_1)^2}{(\eta_2+\eta_1)^2} = \frac{4\,\eta_2\eta_1}{(\eta_2+\eta_1)^2}$$

$$|1+\Gamma|^2 = \frac{4\,\eta_2^2}{(\eta_2+\eta_1)^2}$$

- Quindi:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}|1+\Gamma|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}\,\frac{4\,\eta_2^2}{(\eta_2+\eta_1)^2} = \frac{4\,\eta_1\eta_2}{(\eta_2+\eta_1)^2}$$



- In questa situazione, nella regione 1, l'onda incidente può essere espressa come:

$$\begin{cases} \bar{E}_0^+ = (E_x^+ \hat{x} + E_y^+ \hat{y})\, e^{-jk_0 z} \\ \bar{H}_0^+ = \dfrac{1}{\eta_0} \hat{z} \times \bar{E}^+ = \dfrac{1}{\eta_0} (E_x^+ \hat{y} - E_y^+ \hat{x})\, e^{-jk_0 z} \end{cases} \rightarrow z < 0$$

N.B: $H_x^+ = -\dfrac{E_y^+}{\eta_0}$, $H_y^+ = \dfrac{E_x^+}{\eta_0}$

- L'onda è polarizzata:

  - linearmente: $\boxed{\angle E_x^+ = \angle E_y^+}$

  - circolarmente: $\boxed{\angle E_x^+ = \angle E_y^+ = \pm \frac{\pi}{2}} \wedge \boxed{|E_x^+| = |E_y^+|}$

- L'onda riflessa invece vale:

$$\begin{cases} E_{x_0}^- = \Gamma \cdot E_x^+ e^{+jk_0 z} \\ H_{y_0}^- = \dfrac{-\Gamma}{\eta_0} E_x^+ e^{+jk_0 z} \end{cases}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0}} \qquad \boxed{\eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$$

- L'onda trasmessa si esprime come un solo contributo progressivo:

$$\begin{cases} E_{x_1} = T \cdot E_x^+ e^{-jk_1 z} \\ H_{y_1} = \dfrac{T}{\eta_1} E_x^+ e^{-jk_1 z} \end{cases} \rightarrow z > 0$$

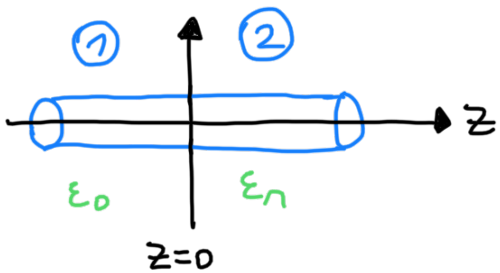
$$\boxed{k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r}}$$

- Dalla continuità del campo $\bar{E}$ in $z=0$ avevamo ottenuto che:

$$1+\Gamma = T = \frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_0} \rightarrow \begin{cases} \underbrace{\eta_1 = 0}_{\text{mezzo conduttore}} \Rightarrow \boxed{\Gamma = -1} & \text{(riflessione totale)} \\ \eta_1 = \eta_2 \Rightarrow \boxed{\Gamma = 0} & \text{(non vi è riflessione)} \\ \eta_1 \to \infty \Rightarrow \boxed{\Gamma = 1} & \end{cases}$$

- La <u>forma del campo</u> (vettorialità e funzione del punto) rimane <u>uguale</u> passando dalla regione $z<0$ a $z>0$ (nei nostri esempi), si hanno sempre fronti d'onda piani.
- Quando la forma rimane invariata, bisogna solo aggiustare le <u>ampiezze</u> del campo, quindi il problema diventa <u>scalare</u>. ($\Gamma, T \in \mathbb{C}$)

<u>Es</u>: Propagazione di un'onda in un tubo idraulico con pareti metalliche



- In questo caso rappresentare la forma del campo $\bar{E}$ è più difficile (al di fuori del tubo il campo è nullo).
- Tuttavia, la forma del campo <u>non varia</u> da $z<0$ a $z>0$.
- Se cambiassi la sezione trasversale in $z=0$ (es: diminuendo il diametro del tubo), allora la forma del campo cambierebbe.

$$\boxed{\text{omogeneità del mezzo} \Rightarrow \text{stessa forma del campo}}$$

- Consideriamo ora la coppia E_y, H_x :

$$\begin{cases} E_y(z) = E_y^+ e^{-jk_0 z} + \Gamma E_y^+ e^{+jk_0 z} \\ H_x(z) = \frac{1}{\eta_0}\left(-E_y^+ e^{-jk_0 z} + \Gamma E_y^+ e^{jk_0 z}\right) \end{cases} \rightarrow z<0$$

- I segni sono stati scelti in modo che il vett. di Poynting punti in direzione z:

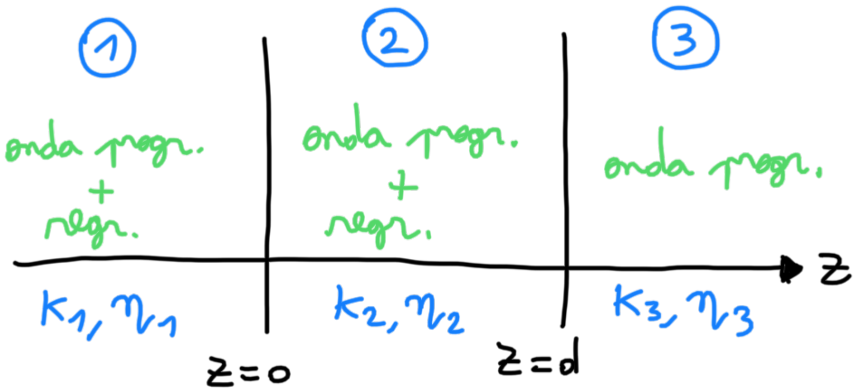
$$\bar{S} = \hat{y} E_y \times H_x^* \hat{x} = -\hat{z}(E_y H_x^*) = \underbrace{\frac{|E_y^+|^2}{\eta_0}}_{\text{termine progressivo}} - \underbrace{\frac{|\Gamma|^2 |E_y^+|^2}{\eta_0}}_{\text{termine regressivo}}$$

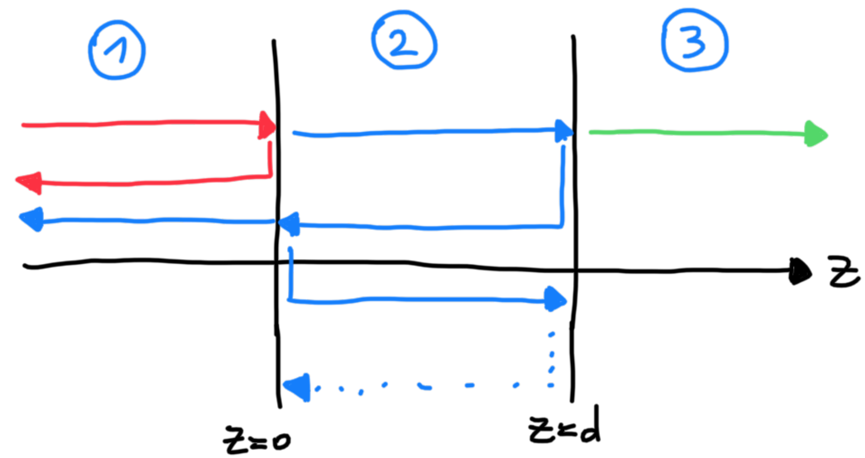
- In $z>0$ abbiamo solo il termine progressivo:

$$\begin{cases} E_y(z) = E_y^+ T e^{-jk_1 z} \\ H_x(z) = -\frac{1}{\eta_1} E_y^+ T e^{-jk_1 z} \end{cases}$$

$$\boxed{E_x^+ = j E_y^+} \rightarrow \text{condizione di polarizzazione circolare}$$

- Supponiamo di avere tre regioni :





- Anche in caso dinamico, deve essere soddisfatta sempre la continuità del campo tangenziale all'interfaccia tra due mezzi omogenei.

- nella regione 2 si ha una combinazione di fronti d'onda generati in tempi diversi.

- L'ampiezza dell'onda che viene continuamente riflessa diminuisce mano a mano e si entra in una condizione di regime.

- Il campo nella <u>regione 1</u> è dato da:

$$\begin{cases} E_{x_1} = E_{x_1}^+ e^{-jk_1 z} + E_{x_1}^- e^{+jk_1 z} \\ H_{y_1} = \dfrac{1}{\eta_1}\left(E_{x_1}^+ e^{-jk_1 z} - E_{x_1}^- e^{+jk_1 z}\right) \end{cases}$$

- nella <u>regione 2</u> la situazione è simile:

$$\begin{cases} E_{x_2} = E_{x_2}^+ e^{-jk_2 z} + E_{x_2}^- e^{+jk_2 z} \\ H_{y_2} = \dfrac{1}{\eta_2}\left(E_{x_2}^+ e^{-jk_2 z} - E_{x_2}^- e^{+jk_2 z}\right) \end{cases}$$

- nella <u>regione 3</u> avrò solo il termine progressivo:

$$\begin{cases} E_{x_3} = E_{x_3}^+ e^{-jk_3 z} \\ H_{y_3} = \dfrac{1}{\eta_3} E_{x_3}^+ e^{-jk_3 z} \end{cases}$$

INCOGNITE: $E_{x_1}^-$, $E_{x_2}^+$, $E_{x_2}^-$, $E_{x_3}^+$ (suppongo di conoscere $E_{x_1}^+$)

- Avrò bisogno quindi di 4 equazioni (devo calcolare 4 coefficienti complessi)
- Dalla continuità del campo e.m. in $z=0$, $z=d$ ottengo due coppie di equazioni.
- Visto che il campo non cambia forma, avrò equazioni lineari e algebriche.

- Si ottengono quindi:

$$\left.\begin{cases} E_{x_1}(z=0^-) = E_{x_2}(z=0^+) \\ H_{y_1}(z=0^-) = H_{y_2}(z=0^+) \end{cases}\right] \quad z=0$$

$$\left.\begin{cases} E_{x_2}(z=d^-) = E_{x_3}(z=d^+) \\ H_{y_2}(z=d^-) = H_{y_3}(z=d^+) \end{cases}\right] \quad z=d$$

- Sostituendo:

$$\left.\begin{cases} E_{x_1}^+ + E_{x_1}^- = E_{x_2}^+ + E_{x_2}^- \\ \dfrac{1}{\eta_1}\left(E_{x_1}^+ - E_{x_1}^-\right) = \dfrac{1}{\eta_2}\left(E_{x_2}^+ - E_{x_2}^-\right) \end{cases}\right] \quad z=0$$

$$\left.\begin{cases} E_{x_2}^+ e^{-jk_2 d} + E_{x_2}^- e^{+jk_2 d} = E_{x_3}^+ e^{-jk_3 d} \\ \dfrac{1}{\eta_2}\left(E_{x_2}^+ e^{-jk_2 d} - E_{x_2}^- e^{+jk_2 d}\right) = \dfrac{E_{x_3}^+}{\eta_3} e^{-jk_3 d} \end{cases}\right] \quad z=d$$

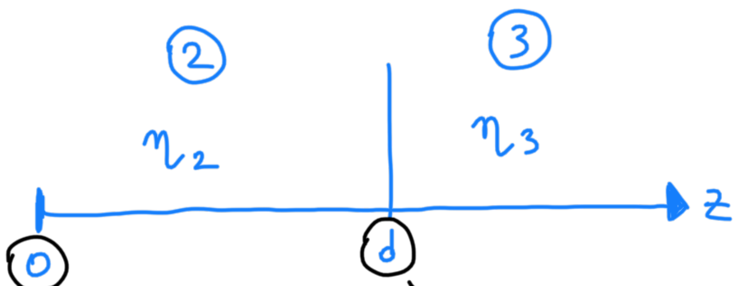
- Dividendo la 2° equazione per la 3° si ottiene che:

$$\eta_2 \frac{e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d}}{e^{-jk_2 d} - \Gamma_2 e^{+jk_2 d}} = \eta_3$$

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{E_{x_2}^-}{E_{x_2}^+}}$$

• Da cui:

$$\Gamma_2 \, e^{2jk_2 d} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_2 = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \, e^{-2jk_2 d}}$$



$$\Gamma_2 = \frac{E_{x_2}^-}{E_{x_2}^+}$$

$$\Gamma_2 = \frac{E_{x_2}^-}{E_{x_2}^+} \cdot \overbrace{\frac{e^{+jk_2 d}}{e^{-jk_2 d}}}^{=\,e^{2jk_2 d}} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}$$

salto di impedenza (sempre derivante dalla continuità del campo tangenziale)

termine di sfasamento dell'onda derivante dal passaggio fra l'impedenza d'onda η_2 e η_3

- Calcoliamo ora Γ_1 dividendo la 1° equazione per la 2°:

$$\eta_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} = \eta_2 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}$$

$$\boxed{\Gamma_1 = \frac{E_{x_1}^-}{E_{x_1}^+}} \qquad \boxed{\Gamma_2 = \frac{E_{x_2}^-}{E_{x_2}^+}}$$

$$\frac{1+x}{1-x} = y \implies x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\Gamma_1 = \frac{\frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2} - 1}{\frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2} + 1} = \boxed{\Gamma} \rightarrow$$

coefficiente di riflessione complessivo alla sezione $z=0$

- Visto che consideriamo mezzi senza perdite, la conoscenza di Γ ci permette di ottenere qualsiasi altra grandezza.

NOTA: In $z=0$: $E_{x_1}^{+}(1+\Gamma) \overset{\text{continuità campo}}{=} E_{x_2}^{+}(1+\Gamma_2) \Rightarrow \boxed{E_{x_2}^{+} = E_{x_1}^{+} \dfrac{1+\Gamma}{1+\Gamma_2}}$

- Quindi l'ampiezza dell'onda progressiva nella regione 2 potrebbe essere leggermente <u>diversa</u> da quella dell'onda incidente nella regione 1.

Onde piane in un mezzo stratificato

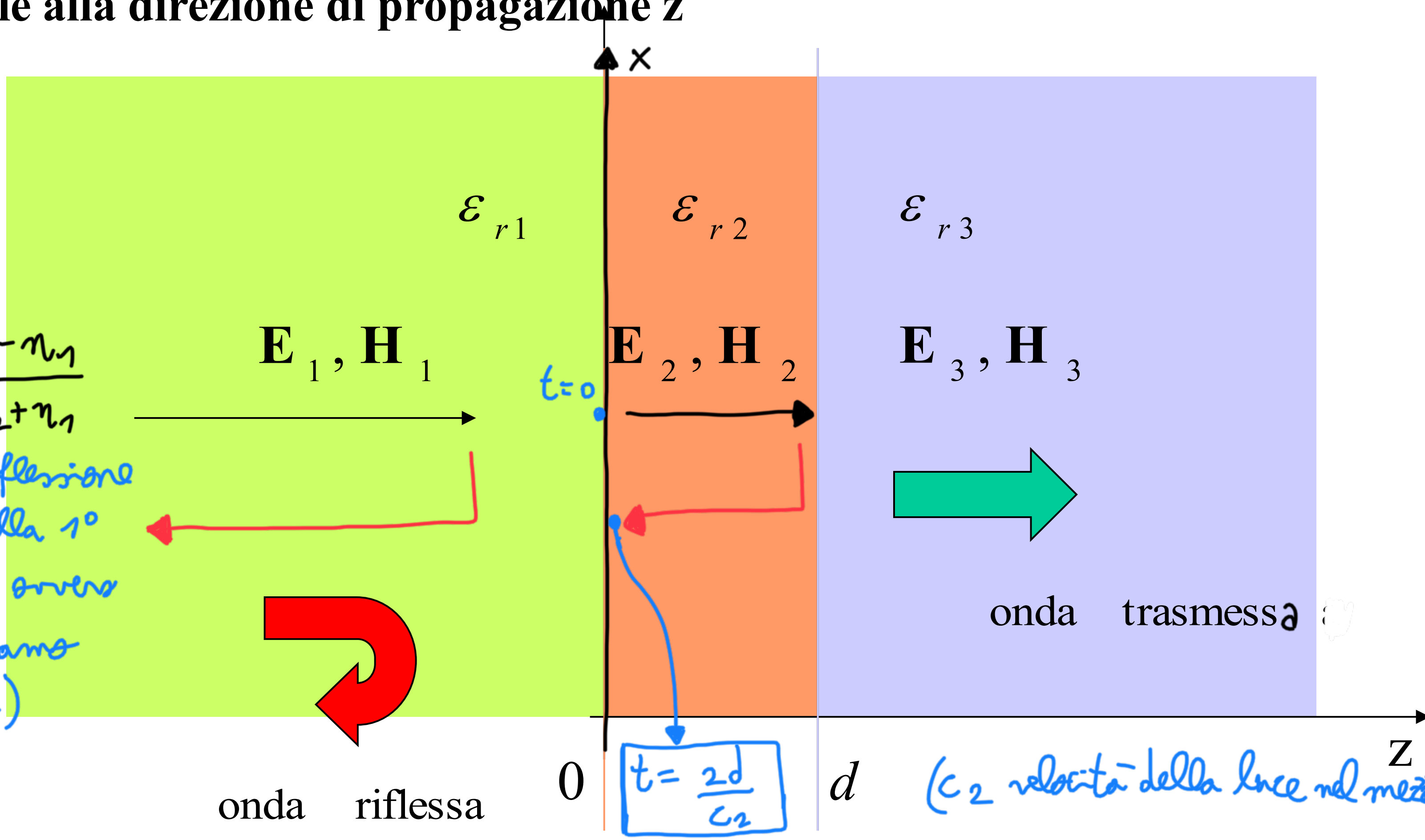
Un'onda monocromatica piana polarizzata linearmente, proveniente dal mezzo 1, di permettività relativa ε_{r1}, incide normalmente sullo strato 2 riempito di dielettrico omogeneo ε_{r2} di spessore d. A dx del mezzo 2 vi è un semispazio infinito riempito di dielettrico ε_{r2}. Il campo elettromagnetico giace nel piano ortogonale alla direzione di propagazione z

$\boxed{E_x, H_y}$

In $t=0$:

$$\Gamma_{21} = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$$

(coeff. di riflessione parziale alla 1° riflessione, ovvero non ci troviamo a regime)



(c_2 velocità della luce nel mezzo 2)

- Cerchiamo, nelle tre regioni, soluzioni alle eq. di Maxwell nelle quali compaiano solo E_x e H_y:

$$\begin{cases} \dfrac{dE_x}{dz} = -jW\mu_0 H_y \\[2ex] \dfrac{dH_y}{dz} = -jW\varepsilon_0\varepsilon_r E_x \end{cases}$$

Campo nelle tre regioni

$$\mathbf{E}_1(z) = \left(E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{+jk_1 z}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_1(z) = \frac{1}{Z_1}\left(E_1^+ e^{-jk_1 z} - E_1^- e^{+jk_1 z}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

η_1

$z<0$

$$Z_i \overset{\eta_i}{=} \eta_0 / \sqrt{\varepsilon_{ri}}$$

$$\mathbf{E}_2(z) = \left(E_2^+ e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{+jk_2 z}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_2(z) = \frac{1}{Z_2}\left(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_2^- e^{+jk_2 z}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

η_2

$0<z<d$

$$k_i = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{ri}}$$

$\to$ costante di propagazione nel mezzo i-esimo

$\varepsilon_{ri} \in \mathbb{C}$ in alcuni casi per denotare perdite nei materiali

$$\mathbf{E}_3(z) = E_3^+ e^{-jk_3 z}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_3(z) = \frac{1}{Z_3} E_3^+ e^{-jk_3 z}\,\hat{\mathbf{y}}$$

η_3

$z>d$

Nella regione 3 non vi sono ostacoli che possano riflettere l'onda che, pertanto, si propaga solo verso destra

Continuità delle componenti tangenziali alle interfacce in *z=0 e z=d*

tiene conto delle riflessioni multiple

$z = 0$

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-$$

$$\frac{1}{Z_1}\left(E_1^+ - E_1^-\right) = \frac{1}{Z_2}\left(E_2^+ - E_2^-\right)$$

$z = d$

$$E_2^+ e^{-jk_2 d} + E_2^- e^{+jk_2 d} = E_3^+ e^{-jk_3 d}$$

$$\frac{1}{Z_2}\left(E_2^+ e^{-jk_2 d} - E_2^- e^{+jk_2 d}\right) = \frac{1}{Z_3} E_3^+ e^{-jk_3 d}$$

Dividendo la equazione 1 per la 2 otteniamo:

$$Z_{in} = \boxed{Z_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1}} = Z_2 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}$$

Γ_1 tiene conto delle riflessioni

Essendo: $\Gamma_1 = E_1^- / E_1^+$ $\qquad$ $\Gamma_2 = E_2^- / E_2^+$

Dividendo la equazione 3 per la 4 :

$$Z_2 \frac{1+\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}}{1-\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}} = Z_3$$

Espressione di $\boxed{\Gamma_2}$

$$\boxed{Z_2\left(1+\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}\right)=Z_3\left(1-\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}\right)}$$

E, dunque:

$$\boxed{Z_2\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}+Z_2\Gamma_2 e^{+2jk_2 d}=Z_3-Z_2}$$

cioè:

$$\boxed{\Gamma_2=\frac{Z_3-Z_2}{Z_3+Z_2}e^{-2jk_2 d}}$$

Espressione di Γ_1 (a regime)

posto: $$Z_{in} = Z_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} = Z_2 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}$$

$$\boxed{\Gamma_1 = \frac{Z_{in} - Z_1}{Z_{in} + Z_1}}$$

(*)

$$Z_{in} = Z_2 \frac{1 + \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2jk_2 d}}{1 - \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2jk_2 d}} =$$

$$= Z_2 \frac{(Z_3 + Z_2)e^{+jk_2 d} + (Z_3 - Z_2)e^{-jk_2 d}}{(Z_3 + Z_2)e^{+jk_2 d} - (Z_3 - Z_2)e^{-jk_2 d}} =$$

$$= Z_2 \frac{Z_3 + jZ_2 \tan(k_2 d)}{Z_2 + jZ_3 \tan(k_2 d)}$$

Coefficiente di riflessione in z=0

$$(*) = \Gamma_1 = \frac{Z_{in}/Z_1 - 1}{Z_{in}/Z_1 + 1} = \frac{\dfrac{Z_2}{Z_1}\dfrac{Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)}{Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)} - 1}{\dfrac{Z_2}{Z_1}\dfrac{Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)}{Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)} + 1} =$$

$$= \frac{Z_2\left[Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)\right] - Z_1\left[Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)\right]}{Z_2\left[Z_3 + jZ_2\tan(k_2 d)\right] + Z_1\left[Z_2 + jZ_3\tan(k_2 d)\right]} =$$

$$= \frac{Z_2\left(Z_3 - Z_1\right) + j\left(Z_2^2 - Z_3 Z_1\right)\tan(k_2 d)}{Z_2\left(Z_3 + Z_1\right) + j\left(Z_2^2 + Z_3 Z_1\right)\tan(k_2 d)}$$

In conclusione: (a regime)

tiene conto dello spessore del dielettrico

$$\Gamma(z=0) = \Gamma_1 = \frac{Z_2\left(Z_3 - Z_1\right) + j\left(Z_2^2 - Z_3 Z_1\right)\overbrace{\tan(k_2 d)}}{Z_2\left(Z_3 + Z_1\right) + j\left(Z_2^2 + Z_3 Z_1\right)\tan(k_2 d)}$$

- Noto Γ_1 risulta che:

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{Z_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} - Z_2}{Z_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} + Z_2}}$$

- Dalla continuità del campo tangenziale in $z=0$ si ha:

$$\begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \\ \frac{1}{\eta_1}\left(E_1^+ - E_1^-\right) = \frac{1}{\eta_2}\left(E_2^+ - E_2^-\right) \end{cases} \qquad \boxed{E_i^- = \Gamma_i E_i^+}$$

- L'ampiezza del campo $\bar{E}$ nella regione 2 vale:

$$\boxed{E_2^+ = E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2}} \qquad \boxed{E_2^-} = \Gamma_2 E_2^+ = \boxed{\Gamma_2 E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2}}$$

da cui:

$$\boxed{E_2(z)} = E_2^+\left(e^{-jk_2 z} + \Gamma_2 e^{+jk_2 z}\right) = \boxed{E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2}\left(e^{-jk_2 z} + \Gamma_2 e^{+jk_2 z}\right)}$$

- In generale quindi, E_2^+ potrà essere molto diverso da E_1^+.
- Qual è il piano $\bar{z}$ nella regione 2 tale per cui il campo $E_2(z)$ è massimo?

$$|E_2(z)| = \left| E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2} \right| \cdot \left| 1 + \Gamma_2 e^{2jk_2 \bar{z}} \right|$$

incognita

– Il massimo si ha quando i due numeri complessi sono in fase tra loro, ovvero:

$$|\Gamma_2| e^{j\angle\Gamma_2 + 2jk_2\bar{z}} = |\Gamma_2| e^{j2n\pi} \Rightarrow \boxed{\angle\Gamma_2 + 2k_2\bar{z} = 2n\pi} \quad n \in \mathbb{Z}$$

– Il minimo si ha per:

$$\boxed{\angle\Gamma_2 + 2k_2\bar{z} = 2n\pi \pm \pi}$$

DOMANDA ESAME !!

ovvero $\Gamma_2 e^{+jk_2\bar{z}}$ deve essere sfasato di 180° rispetto a $e^{-jk_2\bar{z}}$, in modo che il loro rapporto restituisca un numero reale negativo.

- L'ampiezza del campo $\bar{E}$ trasmesso nella regione 3 in $z=d$ vale:

$$\boxed{\bar{E}_3(z=d)} = E_3^+ e^{-jk_3 d} = E_2^+ \left(e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d}\right) = \boxed{E_1^+ \frac{1+\Gamma_1}{1+\Gamma_2}\left(e^{-jk_2 d} + \Gamma_2 e^{+jk_2 d}\right)}$$

CASI PARTICOLARI

(1) $\boxed{Z_3 = 0} \Rightarrow \boxed{|\Gamma| = 1} \rightarrow$ riflessione totale

Infatti: $$\Gamma = \frac{-Z_1 Z_2 + j Z_2^2 t}{Z_1 Z_2 + j Z_2^2 t} = \frac{j Z_2^2 t + j Z_1 Z_2}{j Z_2^2 t - j Z_1 Z_2}$$ $(t = \tan(k_2 d))$

(2) $\boxed{Z_3 = Z_1} \Rightarrow \boxed{|\Gamma| = 0} \rightarrow$ trasmissione totale

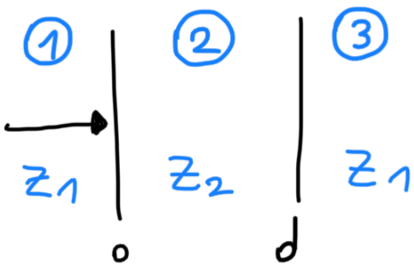
mezzo 1 = mezzo 3

Infatti: $$\Gamma = \frac{j(Z_2^2 - Z_1^2)t}{2Z_1 Z_2 + j(Z_2^2 + Z_1^2)t} \longrightarrow 0 \text{ per } t \to 0 \equiv \boxed{k_2 d \to n\pi}$$

$\Gamma = \Gamma(t)$ dove $\Gamma(0) = 0$

$$k_2 d = \frac{2\pi}{\lambda_2} d = 2\pi \frac{d}{\lambda_2} \rightarrow$$ se lo spessore del dielettrico è un <u>multiplo intero</u> di $\frac{\lambda_2}{2}$ (mezza lunghezza d'onda), allora $\Gamma = 0$ (<u>CONDIZIONE DI ADATTAMENTO</u>)

- la situazione è la seguente:



$\rightarrow \Gamma = 0 \Rightarrow$ tutta l'onda viene trasmessa, quindi nella regione 1 ho <u>solo un'onda progressiva</u>

- <u>Cosa succede al campo nella regione 2</u>?

$$Z_{in} = Z_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} = Z_2 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}$$

$$\Gamma_1 = 0 \Rightarrow Z_1 = Z_2 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2} \Rightarrow \boxed{\Gamma_2 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

In questo caso:

$$E_2(z) = E_2^+ e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{+jk_2 z} = E_2^+ \left(e^{-jk_2 z} + \Gamma_2 e^{+jk_2 z} \right) =$$

$$= E_2^+ \left(e^{-jk_2 z} + \boxed{\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}} e^{-jk_2 z} \right) =$$

$$= E_2^+ e^{-jk_2 z} \left(1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{2jk_2 z} \right) \rightarrow$$

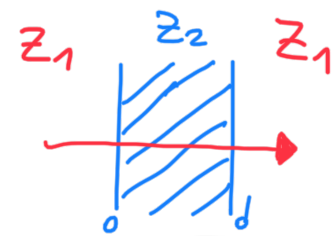
per trovare il massimo dovrò mettermi nelle condizioni in cui questa quantità sia <u>positiva reale</u>

- Se $Z_1 > Z_2$ e $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{MAX} |E_2(z)| = |E_2^+| \left(1 + \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right| \right)$

$$E_2^+ + E_2^- = E_2^+ (1 + \Gamma_2) = E_1^+ \Rightarrow \boxed{E_2^+ = \frac{E_1^+}{1 + \Gamma_2}} \rightarrow \text{perché } \Gamma_1 = 0$$

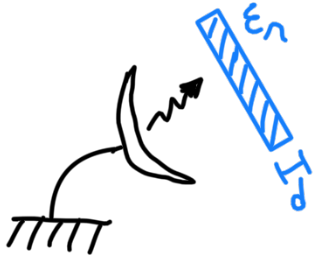
- $\boxed{\theta = kd}$ → <u>spessore elettrico</u> (≠ spessore fisico del dielettrico)

Se $Z_1 = Z_3$, alle <u>frequenze</u> per le quali $\theta = n\pi$ la riflessione dell'onda è <u>nulla</u>.



$\boxed{\theta = n\pi}$

Es: $\theta = n\pi$ è utile quando, ad esempio, voglio proteggere un'antenna con un dielettrico in modo che l'onda prodotta non venga riflessa.



$f = 10\,GHz$, $\varepsilon_r = 2$

$d = ?$

In aria: $\lambda_0 (f = 10\,GHz) = 30\,mm \implies \lambda(10\,GHz) = \dfrac{30\,mm}{\sqrt{2}} = 20\,mm$

Scelgo quindi: $d = \dfrac{\lambda}{2} = 10\,mm$

- Nel caso migliore ho effettivamente riflessione nulla dell'onda e si ha per:

$$\boxed{\theta = n\pi} \implies \boxed{\Gamma = 0}$$

- Nel caso peggiore, $\Gamma = 1$ (riflessione totale) e si ha quando:

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi} \implies \boxed{\Gamma = \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{Z_2^2 + Z_1^2}}$$

Es: $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 9 \longrightarrow Z_1 = \eta_0$, $Z_2 = \dfrac{\eta_0}{3}$

$$\Gamma_{peggiore} = \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{Z_2^2 + Z_1^2} = \frac{1/9 - 1}{1/9 + 1} = -\frac{8}{10} = -0.8$$ → riflessione del 64% della potenza

$$\Gamma_{21} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{1/3 - 1}{1/3 + 1} = -\frac{1}{2} = -0.5$$ → riflessione del 25% della potenza

caso con solo due regioni

(3) $\tan(k_2 d) \to +\infty$, $Z_3 Z_1 \to Z_2^2$ $\Longrightarrow$

$$\Gamma(z=0)=0$$

$$k_2 d \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Gamma(z=0) \to \frac{Z_2^2 - Z_3 Z_1}{Z_2^2 + Z_3 Z_1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{Z_2^2 = Z_3 Z_1}$$

media geometrica dell'impedenza d'onda del mezzo 1 e 3

Quindi,

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} d = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda_2}{4} \quad \text{e} \quad Z_2 = \sqrt{Z_3 Z_1}$$

Abbiamo, dunque, un adattatore a lambda/4

PARALLELO CIRCUITALE (linee di trasmissione)

- Definisco:

$$\begin{cases} V_1 = E_{x_1}(z=0) = E_1^+ + E_1^- \\ I_1 = H_{y_1}(z=0) = \dfrac{1}{Z_1}\left(E_1^+ - E_1^-\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V = [V] \longleftrightarrow E = \left[\frac{V}{m}\right] \\ I = [A] \longleftrightarrow H = \left[\frac{A}{m}\right] \\ \text{risolveremo in seguito} \end{array}}$$

$$\begin{cases} V_2 = E_{x_1}(z) = \underbrace{E_1^+ e^{-jk_1 z}} + \underbrace{E_1^- e^{+jk_1 z}} \\ I_2 = H_{y_1}(z) = \underbrace{\dfrac{1}{Z_1}\left(\underbrace{E_1^+ e^{-jk_1 z}} - \underbrace{E_1^- e^{+jk_1 z}}\right)} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} V_2 + Z_1 I_2 = \underbrace{2 E_1^+ e^{-jk_1 z}} \\ V_2 - Z_1 I_2 = \underbrace{2 E_1^- e^{+jk_1 z}} \end{cases}$$

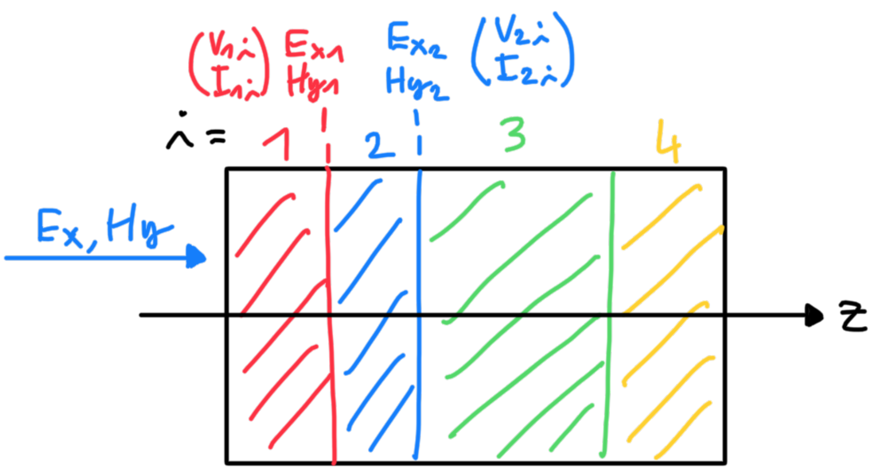
$$\Rightarrow E_1^+ = \frac{V_2 + Z_1 I_2}{2} e^{+jk_1 z}$$

$$\Rightarrow E_1^- = \frac{V_2 - Z_1 I_2}{2} e^{-jk_1 z}$$

- Sostituendo nelle espressioni di V_1, I_1:

$$\begin{cases} V_1 = E_1^+ + E_1^- = \left(\dfrac{V_2 + Z_1 I_2}{2} e^{+jk_1 z} + \dfrac{V_2 - Z_1 I_2}{2} e^{-jk_1 z} \right) \\ I_1 = \dfrac{1}{Z_1}(E_1^+ - E_1^-) = \dfrac{1}{Z_1}\left(\dfrac{V_2 + Z_1 I_2}{2} e^{+jk_1 z} - \dfrac{V_2 - Z_1 I_2}{2} e^{-jk_1 z} \right) \end{cases}$$

- Consideriamo un'onda e.m. piana polarizzata linearmente che incide normalmente su un mezzo stratificato composto da <u>n strati</u>.
- allora, in ogni mezzo i-esimo, la relazione che lega il <u>campo e.m. tangenziale</u> a <u>sinistra e a destra</u> del mezzo



$n = 4$

i = indice di strato

d_i = spessore strato i-esimo

- allora si può scrivere che:

$$\begin{bmatrix} V_{1i} \\ I_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_i d_i) & j \overset{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}}{\overset{\|}{Z_i}} \sin(k_i d_i) \\ j \underset{\underset{\frac{1}{Z_i}}{\|}}{Y_i} \sin(k_i d_i) & \cos(\underbrace{k_i}_{} d_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2i} \\ I_{2i} \end{bmatrix}$$

$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \rightarrow$ impedenza d'onda

$k_i \rightarrow$ costante di propagazione nello spessore omogeneo i-esimo

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= -j\omega\mu_0 I \\ \frac{dI}{dz} &= -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r V \end{aligned}}$$

- Le correnti sono <u>tutte</u> dirette da <u>sinistra verso destra</u> (verso le z positive).
- Si nota che: $\boxed{V_{2i} = V_{1\,i+1}}$ $\boxed{\vec{I}_{2i} = \vec{I}_{1\,i+1}}$ → continuità del campo tangenziale

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_{11} \\ I_{11} \end{bmatrix}}_{\text{tensione e corrente in una certa sezione } z=0} = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \cos(k_i d_i) & j Z_i \sin(k_i d_i) \\ j Y_i \sin(k_i d_i) & \cos(k_i d_i) \end{bmatrix} \right)}_{\text{MATRICE DI TRASMISSIONE}} \begin{bmatrix} V_{2n} \\ I_{2n} \end{bmatrix}$$

MATRICE DI TRASMISSIONE

(restituisce immediatamente l'ampiezza di campo $\bar{E}, \bar{H}$)

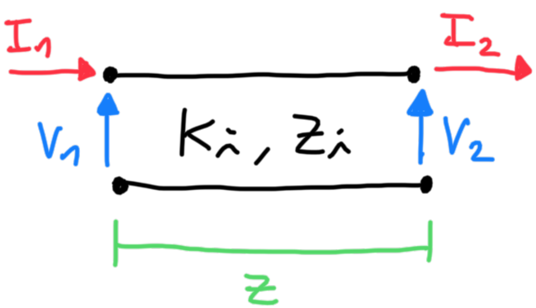
- In questo modo ho trasformato il problema e.m. in uno circuitale (più facile da risolvere), tenendo conto che $V \longleftrightarrow E_x$, $I \longleftrightarrow H_y$.

- Possiamo quindi definire un elemento circuitale, chiamato <u>linea di trasmissione</u>, nel quale tensione e corrente sono legate tra loro da:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dz} = -j\omega L I \\[2ex] \dfrac{dI}{dz} = -j\omega C V \end{cases} \longrightarrow \text{equazioni dei telegrafisti}$$

$$[L] = \left[\frac{H}{m}\right] \qquad [C] = \left[\frac{F}{m}\right]$$

- Le eq. dei telegrafisti soddisfano la seguente <u>linea di trasmissione</u>:



- Queste equazioni sono analoghe a quelle che legano l'ampiezza del campo e.m. nel caso di propagazione di un'onda piana in un mezzo con permettività ε_r:

$$\begin{cases} \dfrac{dE_x}{dz} = -jw\mu_0 H_y \\ \dfrac{dH_y}{dz} = -jw\varepsilon_0\varepsilon_r E_x \end{cases}$$

- Quindi, le soluzioni saranno le stesse delle onde piane:

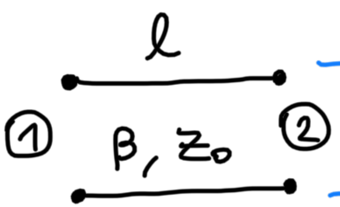
$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} & \rightarrow \text{onda di tensione} \\ I(z) = I^+ e^{-j\beta z} + I^- e^{+j\beta z} & \rightarrow \text{onda di corrente} \end{cases}$$

• Derivando nuovamente rispetto a z:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\dfrac{dV}{dz} = -jwL\dfrac{dI}{dz} \\ \dfrac{dI}{dz} = -jwCV \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{d^2V}{dz^2}} = -jwL\dfrac{dI}{dz} = -jwL\left(-jwCV\right) =$$

$$= \boxed{-w^2LCV}$$

$$\Downarrow$$



linea di trasm. di lunghezza l

$$\boxed{\beta = w\sqrt{LC} = w\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} \rightarrow \text{costante di propagazione}$$

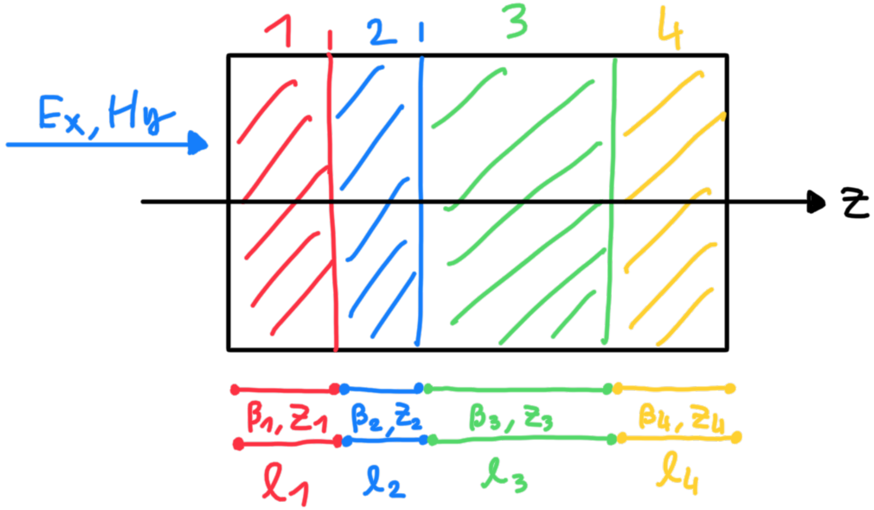
$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

• La matrice che lega tensione e corrente alle porte ① e ② vale:

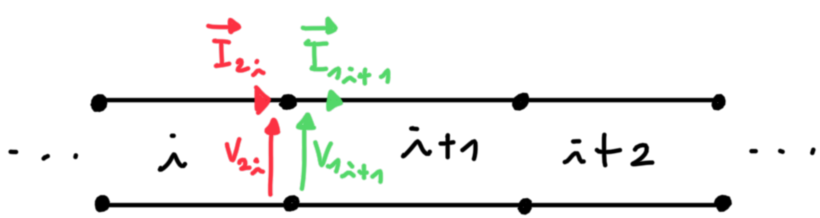
ampiezza dell'onda di tensione/corrente nella sezione z=0 →

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & jZ_0\sin(\beta z) \\ jY_0\sin(\beta z) & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

- Quindi, il corrispettivo circuitale del mezzo stratificato investito da un'onda piana iniziale è proprio un tratto di linea di trasm. (di lunghezza pari allo spessore dello strato) per ogni strato.



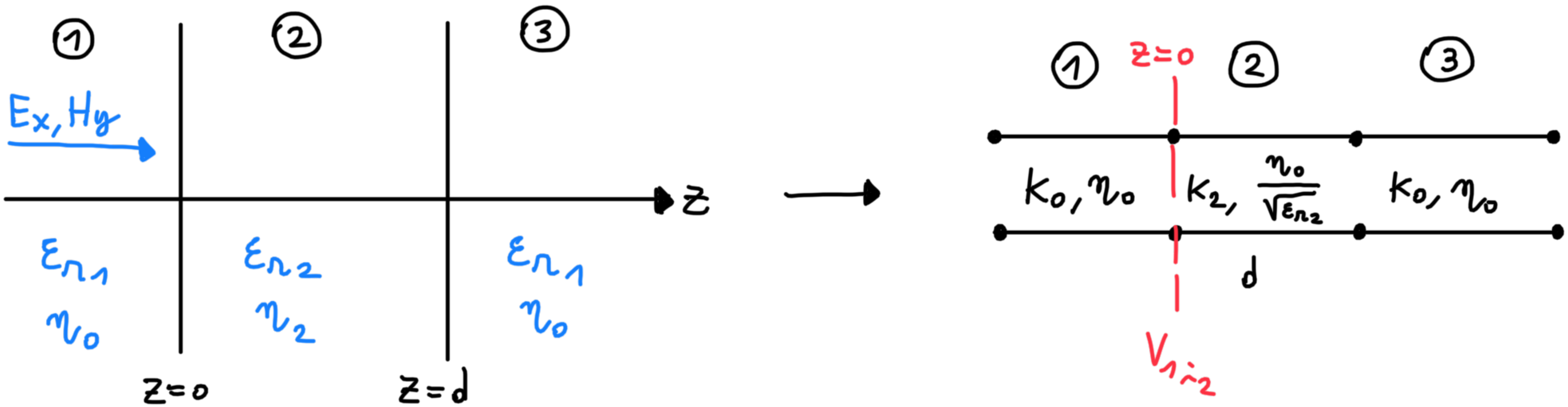
- Inoltre, per la continuità del campo tangenziale:



$$\boxed{V_{2i} = V_{1\,i+1}}$$

$$\boxed{\vec{I}_{2i} = \vec{I}_{1\,i+1}}$$

E5: Calcolo coeff. di riflessione in $z=0$ con linee di trasmissione



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_2 d) & j\eta_2 \sin(k_2 d) \\ \frac{j}{\eta_2}\sin(k_2 d) & \cos(k_2 d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

- Qual è il legame $V_2(\vec{I}_2)$ in $z=d^+$?

Per $\boxed{z>d}$ ho <u>solo un'onda progressiva</u>, quindi: $\boxed{V_2 = \eta_0 \cdot \vec{I}_2}$

$$\begin{cases} V_1 = \cos(k_2 d)\cdot V_2 + j\eta_2 \sin(k_2 d)\,\vec{I}_2 \\ I_1 = \frac{j}{\eta_2}\sin(k_2 d)\,V_2 + \cos(k_2 d)\,\vec{I}_2 \end{cases}$$

in $z=d^+$ si deve avere che $\frac{E_3^+}{H_3^+} = \eta_0$ $\left(= \frac{V_2}{\vec{I}_2}\right)$ visto che non ho riflessioni

• Sostituendo:

tensione e corrente in $z=0^+$

$$\begin{cases} V_1 = \left(\eta_0 \cos(k_2 d) + j\,\eta_2 \sin(k_2 d)\right)\vec{I}_2 \\ I_1 = \left(j\,\dfrac{\eta_0}{\eta_2}\sin(k_2 d) + \cos(k_2 d)\right)\vec{I}_2 \end{cases}$$

• nella regione 1:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jk_0 z} + V^- e^{+jk_0 z} \\ I(z) = I^+ e^{-jk_0 z} - I^- e^{+jk_0 z} \end{cases}$$

e si deve avere che: $\boxed{V(0^-) = V(0^+) = V_1}$ $\boxed{I(0^-) = I(0^+) = I_1}$

• Quindi:

$$\begin{cases} V_1 = V^+ + V^- = \left(\eta_0 \cos(k_2 d) + j\,\eta_2 \sin(k_2 d)\right)\vec{I}_2 \\ I_1 = \dfrac{1}{\eta_0}\left(V_1^+ - V_1^-\right) = \left(j\,\dfrac{\eta_0}{\eta_2}\sin(k_2 d) + \cos(k_2 d)\right)\vec{I}_2 \end{cases}$$

- Il coeff. di riflessione è definito come:

$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+}$$

- Dividendo la 1° equazione per la 2° e raccogliendo V^+ si ha:

$$\cancel{\eta_0}\,\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \boxed{\frac{\eta_0 \cos(k_2 d) + j\,\eta_2 \sin(k_2 d)}{j\,\frac{\eta_0}{\eta_2}\sin(k_2 d) + \cos(k_2 d)}} \cdot \frac{1}{\eta_0}$$

$$\boxed{Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1}} \neq \eta_0$$

(tiene conto di ciò che vi è dopo $z=0$, ovvero delle riflessioni multiple)

impedenza di ingresso alla sezione $z=0$

$$\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = x \Rightarrow \Gamma = \frac{x-1}{x+1}$$

- Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{Z_{IN}}{\eta_0} \Rightarrow \boxed{\Gamma} = \frac{Z_{IN}/\eta_0 - 1}{Z_{IN}/\eta_0 + 1} = \boxed{\frac{Z_{IN} - \eta_0}{Z_{IN} + \eta_0}}$$

- La riflessione si ha solo per $Z_{IN} \neq \eta_0$, ovvero solo se l'impedenza di ingresso nella regione 2 è diversa dall'impedenza d'onda della regione 1.

- <u>Nota per semplificare i conti</u>:
  - $\boxed{k_2 d = n\pi} \Rightarrow \boxed{Z_{IN} = \eta_0}$ (nessuna rifflessione a regime)
  - $\boxed{k_2 d = \frac{\pi}{2} + n\pi} \Rightarrow \boxed{Z_{IN} = \frac{\eta_2^2}{\eta_0}}$