Dipartimento di Elettronica e Informazione
POLITECNICO DI MILANO

Automazione industriale
dispense del corso

13. Reti di Petri: analisi strutturale – sifoni e trappole

Luigi Piroddi
piroddi@elet.polimi.it

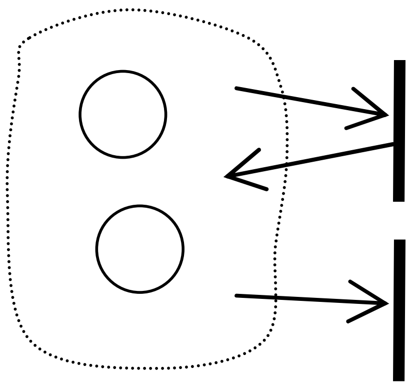
Introduzione

Abbiamo visto in precedenza il ruolo dei P-invarianti nel caratterizzare la limitatezza e la conservatività di una rete di Petri e quello dei T-invarianti riguardo alla reversibilità di una rete.

I sifoni e le trappole sono utili per l'analisi di vivezza e di non bloccaggio:

- un *sifone* è un insieme di posti che una volta persi tutti i gettoni non è più in grado di riacquistarne
- analogamente, una *trappola* è un insieme di posti che una volta acquisito almeno un gettone non è più in grado di smarcare completamente tutti i suoi posti
- un sifone inizialmente marcato che perde tutti i gettoni o una trappola inizialmente vuota che ne acquista qualcuno ci dicono che è avvenuto qualcosa di *irreversibile* nell'evoluzione della rete

Sifone



Un insieme di posti S è un sifone se e solo se:

$\bullet S \subseteq S\bullet$

Tutte le transizioni di ingresso per un sifone (ovvero, il cui scatto immette gettoni) sono anche transizioni di uscita.

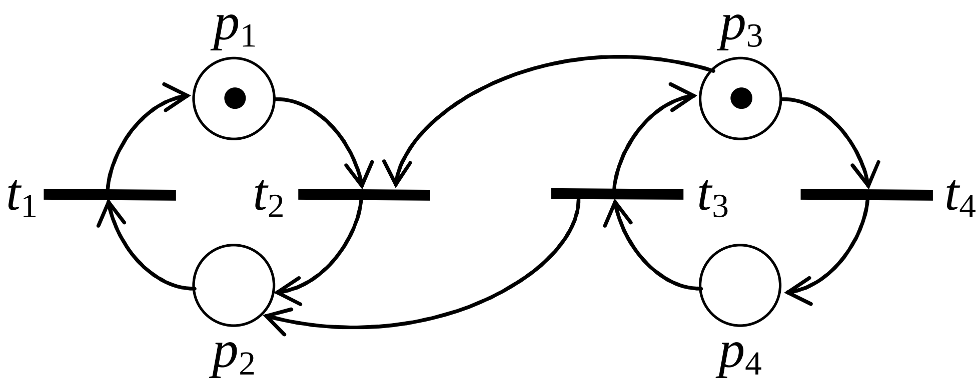
Lo scatto di una transizione appartenente all’insieme $S\bullet \setminus \bullet S$ (transizione solo in uscita da posti del sifone) tende a svuotare di gettoni il sifone.

Se S è un sifone privo di gettoni in una certa marcatura M, allora è privo di gettoni in ogni marcatura $M' \in R(N, M)$ raggiungibile da M. Infatti,

- se un sifone S è smarcato, nessuna delle transizioni di $S\bullet$ è abilitata
- poiché $S\bullet$ contiene l’insieme delle transizioni che potenzialmente potrebbero marcare S (per la definizione di sifone, $S\bullet \supseteq \bullet S$), nessuna di queste ultime può scattare e il sifone rimane permanentemente vuoto

In presenza di un sifone S non marcato, tutte le transizioni di $S\bullet$ sono morte, e la rete non è viva.

Esempio



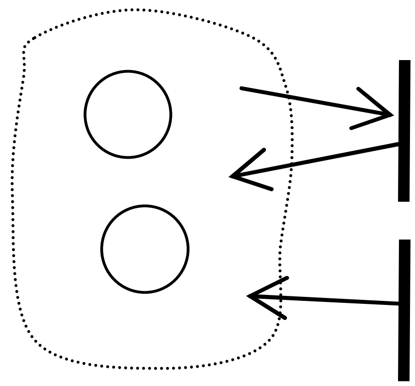
Esempi di sifoni:

$S_1 = \{p_3, p_4\} \rightarrow \bullet S_1 = \{t_3, t_4\} \subset \{t_2, t_3, t_4\} = S_1\bullet$

$S_2 = \{p_2, p_3, p_4\} \rightarrow \bullet S_2 = \{t_2, t_3, t_4\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = S_2\bullet$

$S_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \rightarrow \bullet S_3 = \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = S_3\bullet$

Trappola



Un insieme di posti S è una trappola se e solo se:

$S\bullet \subseteq \bullet S$

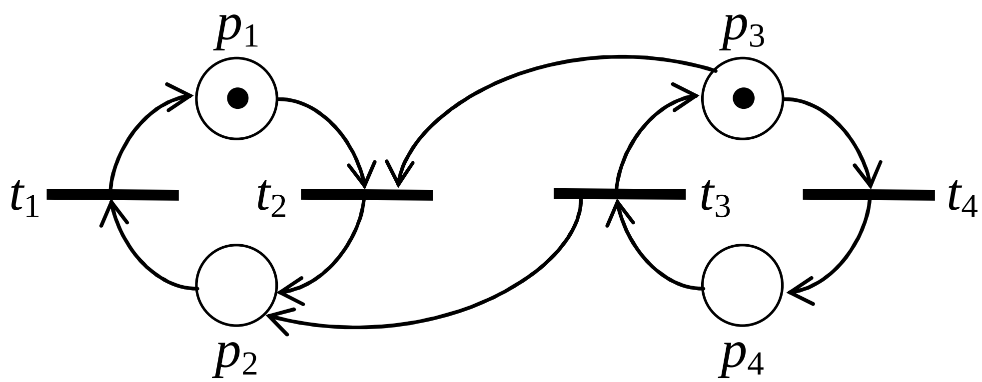
Tutte le transizioni in uscita da posti della trappola sono anche transizioni in ingresso per posti della trappola.

Lo scatto di una transizione appartenente all’insieme $\bullet S \setminus S\bullet$ (solo in ingresso per posti della trappola) tende a riempire di gettoni la trappola.

Proprietà di una trappola:

- ogni transizione il cui scatto potenzialmente fa diminuire il numero di gettoni appartiene a $S\bullet$
- ma se S è una trappola, tale transizione appartiene anche a $\bullet S$, quindi il suo scatto ha anche come effetto di generare dei gettoni in S
- se S è una trappola marcata in una certa marcatura M, allora rimane marcata in ogni marcatura $M' \in R(N,M)$ raggiungibile da M

Esempio (cont.)



Esempi di trappole:

$S_4 = \{p_1, p_2\} \quad \rightarrow \quad S_4\bullet = \{t_1, t_2\} \subset \{t_1, t_2, t_3\} = \bullet S_4$

$S_5 = \{p_1, p_2, p_4\} \quad \rightarrow \quad S_5\bullet = \{t_1, t_2, t_3\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \bullet S_5$

$S_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \quad \rightarrow \quad S_3\bullet = \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \bullet S_3$

Si osservi che S_3 è sia un sifone che una trappola:

- poiché è una trappola inizialmente marcata, non si svuota mai completamente
- è un sifone che non si può svuotare

Legami tra sifoni, trappole e P-invarianti

Il supporto di un P-invariante positivo è sia un sifone che una trappola

- se $M_0 = 0$ l’insieme di posti rimane permanentemente vuoto, come un sifone
- se $M_0 > 0$ l’insieme di posti non si può mai smarcare del tutto, come una trappola
- non vale il viceversa: nell’esempio precedente S_3 è un sifone e una trappola, ma non coincide con il supporto di un P-invariante

Quindi, non tutti i sifoni di una rete sono “pericolosi” ai fini della vivezza.

Un sifone contenente una trappola marcata non si può mai svuotare del tutto.

Che legame c’è, allora, tra i sifoni di una rete (ordinaria) e la sua vivezza?

- se M è una marcatura morta, allora l’insieme $S = \{p \in P \mid M(p) = 0\}$ dei posti privi di gettoni in M è un sifone non marcato
- se ogni sifone contiene una trappola marcata in una marcatura M, allora non esiste in $R(N,M)$ una marcatura morta
- infatti, se esistesse tale marcatura (M'), allora i posti privi di gettoni in M' costituirebbero un sifone smarcato, contraddicendo l’ipotesi

In generale, una rete in cui non esiste nessuna marcatura raggiungibile morta non è necessariamente una rete viva (una rete è viva se tutte le marcature raggiungibili sono vive, che è una condizione molto più forte che l’assenza di marcature morte).

Casi particolari:

- una rete a scelta libera estesa è viva se e solo se tutti i suoi sifoni contengono una trappola marcata (*teorema di Commoner*).
- una rete a scelta asimmetrica è viva se (ma non solo se) tutti i suoi sifoni contengono una trappola marcata

I risultati precedenti valgono solo per reti ordinarie.

- in una rete generalizzata un deadlock può anche essere causato da sifoni non vuoti, ma non sufficientemente marcati
- anche nel caso di una rete generalizzata rimane però vero che il completo svuotamento di un sifone determina un blocco (parziale o totale) della rete, perché in tali condizioni le transizioni di $S\bullet$ sono morte

Sifoni di base, sifoni minimi e sifoni *p*-minimi

Il calcolo dei sifoni è un problema combinatorio complesso, ma per fortuna non serve calcolare tutti i sifoni. Infatti:

- l'unione di sifoni è un sifone
- un sifone *di base* è un sifone non ottenibile come unione di altri sifoni
- tutti i sifoni di una rete possono essere generati per unione di sifoni di base

Perciò è sufficiente calcolare i sifoni *di base*.

Dal punto di vista del problema della prevenzione dei deadlock non servono nemmeno tutti i sifoni di base, ma solo i sifoni *minimi*:

- un sifone S è detto *minimo* se e solo se non esiste un altro sifone S' tale che $S' \subset S$
- ciascun sifone della rete o è minimo o contiene uno o più sifoni minimi
- se si impedisce che tutti i sifoni minimi si svuotino, nessun sifone della rete potrà svuotarsi del tutto
- un sifone minimo è anche di base, ma non tutti i sifoni di base sono minimi

In conclusione: {sifoni} $\supseteq$ {sifoni di base} $\supseteq$ {sifoni minimi}.

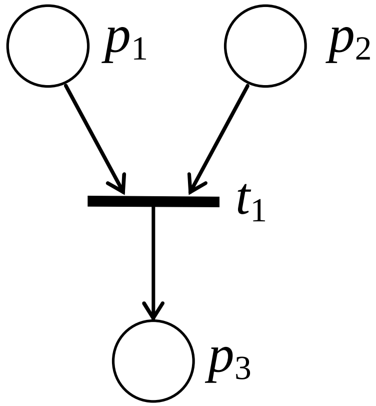
I sifoni di base non sono tutti minimi, ma sono tutti *p*-minimi:

- un sifone *p-minimo* con riferimento ad un posto p_i è un sifone contenente il posto p_i e un insieme minimo di posti
- tutti i sifoni *p*-minimi sono anche di base
- un sifone è di base se e solo se è *p*-minimo rispetto a qualche posto

In altre parole: $\{\text{sifoni di base}\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\text{sifoni } p_i\text{-minimi}\}$

Analoghe definizioni si possono fornire anche per le trappole.

Esempio



	$\bullet S$	$S\bullet$
p_1	$\varnothing$	t_1
p_2	$\varnothing$	t_1
p_3	t_1	$\varnothing$

Sifoni p_1-minimi: $\{p_1\}$
Sifoni p_2-minimi: $\{p_2\}$
Sifoni p_3-minimi: $\{p_1, p_3\}$, $\{p_2, p_3\}$

Altri sifoni: $\{p_1, p_2\}$, $\{p_1, p_2, p_3\}$

Sifoni di base: $\{p_1\}$, $\{p_2\}$, $\{p_1, p_3\}$, $\{p_2, p_3\}$
Infatti, gli altri sifoni si ottengono per unione di sifoni di base

Sifoni minimi: $\{p_1\}$, $\{p_2\}$
Infatti, tutti gli altri sifoni contengono p_1 e/o p_2

Calcolo dei sifoni (e delle trappole)

Esistono diversi modi per calcolare i sifoni:

1. calcolo dei sifoni minimi mediante l'uso diretto della definizione
2. calcolo di alcuni sifoni tramite simulazione
3. calcolo di tutti i sifoni per via algoritmica

Per calcolare le trappole di una rete di Petri si può usare lo stesso metodo usato per trovare i sifoni:

- se si cambia il verso di tutti gli archi (p.es. cambiando di segno la matrice di incidenza), si scambiano pre-set e post-set di tutti i posti
- le trappole della rete di partenza coincidono con i sifoni della rete così trasformata
- pertanto, il calcolo dei sifoni della rete trasformata fornisce le trappole della rete di partenza

Metodo ❶: calcolo dei sifoni minimi mediante la definizione

Il procedimento per il calcolo dei sifoni di base consiste nel calcolare iterativamente i sifoni *p-minimi* per ogni posto della rete, escludendo via via i posti già esaminati (evitando così di trovare sifoni *p*-minimi ma non minimi):

- si calcolano prima i sifoni p_1-minimi, aggiungendo a p_1 i posti necessari (in tutte le possibili combinazioni) ad includere nel post-set dell’insieme considerato tutte le transizioni contenute nel pre-set
- poi si cercano i sifoni p_2-minimi non contenenti p_1, ovvero si elimina p_1 dalla rete e si procede come al passo precedente per p_2;
  in questo modo si escludono automaticamente
  - sifoni p_2-minimi già trovati (sifoni *p*-minimi sia per p_1 che p_2)
  - (alcuni) sifoni p_2-minimi ma non minimi (contenenti sifoni p_1-minimi)
- poi si cercano i sifoni p_3-minimi non contenenti né p_1, né p_2, e così via

Al termine della procedura si saranno ottenuti tutti i sifoni minimi, più eventualmente qualche sifone di base (*p*-minimo), non minimo, da eliminare a posteriori.

Metodo ❷: calcolo per simulazione

Se simulando la rete si individua uno stato di blocco, l’insieme di posti privo di gettoni in quello stato costituisce un sifone che si è smarcato.

Problemi:

- si individuano solo gli stati di blocco totale della rete, non quelli di blocco parziale
- l’analisi dipende dalla marcatura iniziale
- è di fatto un’analisi di raggiungibilità (che noi volevamo evitare con l’analisi strutturale)

Metodo ❸: calcolo per via algoritmica

Esistono diversi algoritmi per il calcolo dei sifoni. Uno relativamente semplice è quello descritto di seguito, basato sulla modifica della matrice di incidenza.

- richiede la soluzione di un sistema di disequazioni lineari omogeneo
- è un metodo complesso, ma completo (fornisce tutte le soluzioni)

Procedimento:

❶ Si costruisce una nuova rete di Petri a partire da quella in esame.

- la rete trasformata ha gli stessi posti, transizioni e archi della rete di partenza
- il peso di ogni arco entrante in una transizione viene moltiplicato per un coefficiente pari alla *somma* di tutti i pesi degli archi uscenti dalla medesima transizione
- in termini della matrice C, si moltiplicano gli elementi negativi di ogni colonna (archi entranti nella transizione corrispondente) per la somma degli elementi positivi della stessa colonna (archi uscenti)

❷ Si scrive la matrice di incidenza C' della rete trasformata.

❸ Un insieme di posti $S = \|x\|$, con $x \geq 0$, è un sifone della rete originaria se e solo se $x^T C' \leq 0$.

Ora, risolvere direttamente l’insieme di disequazioni $x^T C' \leq 0$ non è sempre facile.

Un approccio alternativo è il seguente:

$$x^T C' \leq 0 \quad \rightarrow \quad [x^T\ z^T]\begin{bmatrix} C' \\ I \end{bmatrix} = 0$$

dove $z \geq 0$ rappresenta un vettore (di dimensioni pari al numero delle transizioni) di variabili di slack non negative.

Risolvere questo sistema di equazioni è equivalente al calcolo dei P-invarianti della rete trasformata a cui si aggiungano per ogni transizione un posto e un arco diretto dalla transizione al posto.

Con riferimento ai posti originali della rete, occorre poi calcolare i supporti dei P-invarianti così ottenuti: questi rappresentano dei sifoni per la rete originaria (famiglia generatrice di sifoni).