

- Fino ad ora abbiamo assunto come ipotesi semplificative:

$$E_z = 0, \quad H_z = 0, \quad \partial \psi = 0$$

- Possiamo trovare altre soluzioni rinnovando queste ipotesi, in particolare dimostreremo che, nel caso di una gerida d'onda di sezione qualsiasi, le componenti trasversali (r, ϕ) possono essere espresse in funzione di quelle longitudinali (z).

• Cerchiamo soluzioni di tipo onda: $\bar{E} = f(r, \phi) e^{-j\beta z}$

struttura guida uniforme lungo z
variazione di fase svolgendo lungo z (propagatore)

Teoria generale dei modi in guida d'onda

I campi trasversali possono esprimersi attraverso le sole componenti longitudinali:

$$E_r = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad H_r = \frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

$$k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$$

Teoria generale dei modi in guida d'onda

- Riscriviamo le equazioni ai nostri:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \bar{e}(x, y) e^{-j\beta z} = \mathbf{e}(r, \varphi) e^{-j\beta z} \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}(r, \varphi) e^{-j\beta z}$$

$\mathbf{e} = (e_r, e_\varphi, e_z)$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ e_r e^{-j\beta z} & r e_\varphi e^{-j\beta z} & e_z e^{-j\beta z} \end{vmatrix} = -j\omega\mu_0 \bar{\mathbf{H}}$$

$$\partial_\varphi e_z e^{-j\beta z} - \partial_z (r e_\varphi e^{-j\beta z}) = -j\omega\mu_0 r h_r e^{-j\beta z}$$

$$-\partial_r e_z e^{-j\beta z} + \partial_z (e_r e^{-j\beta z}) = -j\omega\mu_0 h_\varphi e^{-j\beta z}$$

$$\partial_r (r e_\varphi e^{-j\beta z}) - \partial_\varphi (e_r e^{-j\beta z}) = -j\omega\mu_0 r h_z e^{-j\beta z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\varphi e_z e^{-j\beta z} = -j\omega\mu_0 r h_r e^{-j\beta z} - j\beta r e_\varphi e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_r e_z e^{-j\beta z} = -j\omega\mu_0 h_\varphi e^{-j\beta z} + j\beta e_r e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (2)$$

Analogamente, da $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ h_r e^{-j\beta z} & r h_\varphi e^{-j\beta z} & h_z e^{-j\beta z} \end{vmatrix}$

Si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\varphi h_z e^{-j\beta z} = j\omega\epsilon_0 r e_r e^{-j\beta z} - j\beta r h_\varphi e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_r h_z e^{-j\beta z} = j\omega\epsilon_0 e_\varphi e^{-j\beta z} + j\beta h_r e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (4)$$

E pure

$$\partial_r (r h_\varphi e^{-j\beta z}) - \partial_\varphi (h_r e^{-j\beta z}) = j\omega\epsilon_0 r e_z e^{-j\beta z}$$

- Consideriamo le equazioni corrispondenti alle componenti e_r , h_φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} j\omega\varepsilon_0 r e_r - j\beta r h_\varphi = \partial_\varphi h_z \quad (3) \\ -j\omega\mu_0 h_\varphi + j\beta e_r = -\partial_r e_z \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} j\omega\varepsilon_0 r & -j\beta r \\ j\beta & -j\omega\mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r \\ h_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_\varphi h_z \\ -\partial_r e_z \end{bmatrix} \rightarrow \text{eq. algebrica}$$

$$\begin{bmatrix} e_r \\ h_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega\varepsilon_0 r & -j\beta r \\ j\beta & -j\omega\mu_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_\varphi h_z \\ -\partial_r e_z \end{bmatrix} \rightarrow e_r, h_\varphi \text{ in funzione di derivate di } h_z, e_z$$

↑ INVERSA $\left(\frac{1}{\det(A)} \mathbf{T} \right)$

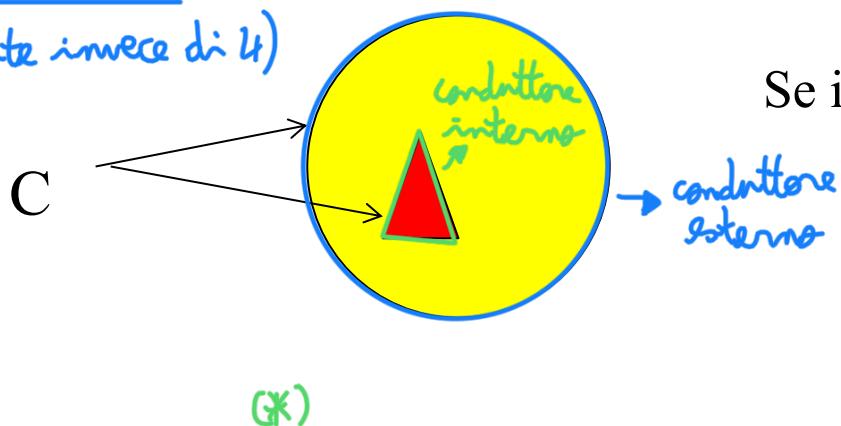
$$\begin{bmatrix} e_r(r, \varphi) \\ h_\varphi(r, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1/r}{k_0^2 - \beta^2} \begin{bmatrix} -j\omega\mu_0 & +j\beta r \\ -j\beta & j\omega\varepsilon_0 r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\varphi h_z(r, \varphi) \\ -\partial_r e_z(r, \varphi) \end{bmatrix}$$

• Analogamente, per e_φ , h_r si ottiene:

$$\begin{bmatrix} e_\varphi(r, \varphi) \\ h_r(r, \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1/r}{k_0^2 - \beta^2} \begin{bmatrix} -j\omega\mu_0 r & -j\beta \\ j\beta r & j\omega\epsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial_r h_z(r, \varphi) \\ \partial_\varphi e_z(r, \varphi) \end{bmatrix}$$

Quindi, le componenti trasversali sono funzioni di quelle longitudinali h_z e e_z , che sono le vere incognite. Come si comportano sul contorno C che delimita la guida d'onda?

(2 incognite invece di 4)



Se i conduttori sono ideali, \Rightarrow componenti tangenziali nulle

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} e_z = 0 \text{ su } C \\ \partial_n h_z = 0 \text{ normale al conduttore} \end{array} \right.$$

Attenzione, le condizioni al contorno per e_z e h_z sono disgiunte e quindi ci sono due famiglie di soluzioni:

1) TE TRASVERSO ELETTRICO $e_z = 0, h_z \neq 0$

(o modi H)

2) TM TRASVERSO MAGNETICO $e_z \neq 0, h_z = 0$

(o modi E)

Diversamente, si avrebbe un'equazione di tipo $F(e_z, h_z) = 0$ su C

Le componenti longitudinali soddisfano
l'equazione d'onda

MODI TM

$$\nabla^2 E_z + k_0^2 E_z = 0 \quad E_z(\text{contorno}) = 0$$

$E_z \rightarrow$ componenti trasversali (modi TM)

MODI TE

$$\nabla^2 H_z + k_0^2 H_z = 0 \quad \frac{\partial H_z(\text{contorno})}{\partial n} = 0$$

$H_z \rightarrow$ componenti trasversali (modi TE)

MODI TE

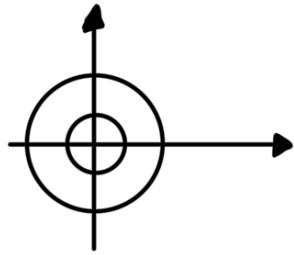
(1) Calcolo di H_z

$$H_z(r, \phi, z) = h_z(r, \phi) e^{-j\beta z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 H_z + k_0^2 H_z = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \phi^2} - \beta^2 h_z \right] e^{-j\beta z} + k_0^2 h_z e^{-j\beta z} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \phi^2} + (k_0^2 - \beta^2) h_z = 0$$



$$\partial_n h_z = \partial_n h_z \Big|_{\begin{array}{l} r=R_i \\ r=R_o \end{array}} \quad \forall \phi = 0$$

Variabili separabili → le cond. al contorno
NON dipendono da ϕ

$$h_z(r, \phi) = R(r) \cdot P(\phi)$$

Riscrivo l'eq. d'onda:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 P} \frac{d^2 P}{d\phi^2} + k_c^2 = 0$$

$$k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$$

numero d'onda
in aria

Moltiplicando per r^2

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2 k_c^2 = - \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\phi^2}$$

dipende da r

dipende da ϕ



i due termini devono essere pari ad una costante

Equazioni per R e P

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\phi^2} = k_\phi^2 \\ \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2 k_c^2 = k_\phi^2 \end{array} \right.$$

funzione periodica in $\phi \rightarrow P(\phi) = P(\phi + 2k\pi)$

$$\frac{d^2 P}{d\phi^2} + k_\phi^2 P = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\phi) = A \sin(k_\phi \phi) + B \cos(k_\phi \phi)$$

$$k_\phi = n$$

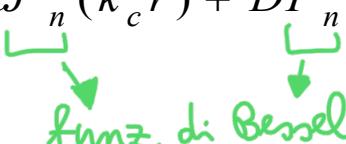
$$\Rightarrow P(\phi) = A \sin n\phi + B \cos n\phi$$

Equazione per R

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \left(r^2 k_c^2 - k_\phi^2 \right) = 0$$

EQ. di BESSEL → $\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \left(r^2 k_c^2 - \underline{\underline{n}}^2 \right) = 0$

$$R(r) = C J_n(k_c r) + D Y_n(k_c r)$$


funz. di Bessel

$$k_c^2 = k_o^2 - \beta_o^2$$

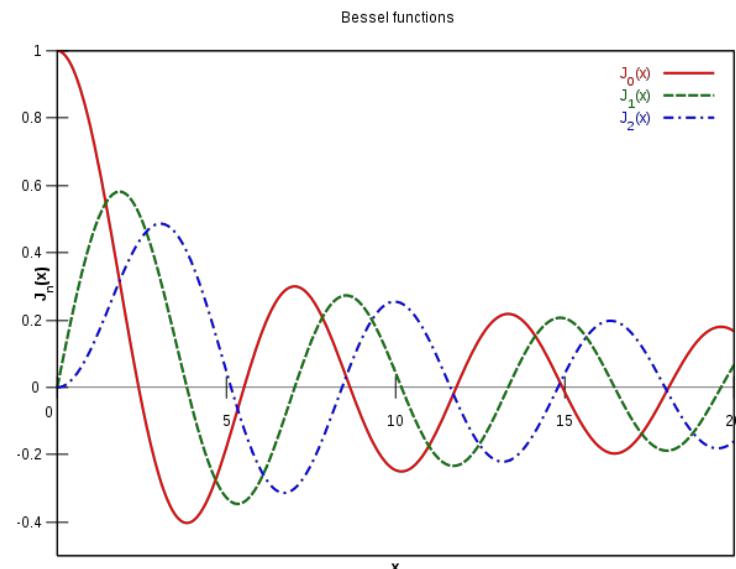
$$h_{Z_m}(r, \varphi) = (A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)) (C J_m(k_c r) + D Y_m(k_c r))$$

• D'infinità numerabile di soluzioni possibili

Funzioni di Bessel

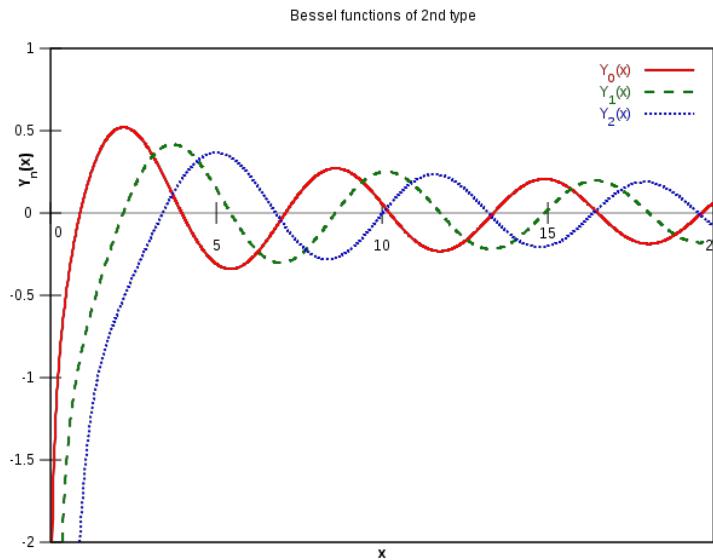
- Si esprimono in serie di potenze
- Divergono per $x \rightarrow 0$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+p}$$



$$Y_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_p(x) = \infty$$



Ricordando che: $\partial_n h_z = \partial_n h_z \Big|_{\substack{n=R_i \\ n=R_e}} \quad \forall \phi = 0$

Si deve avere che:

$$R(n) = C J_m(k_c n) + D Y_m(k_c n) \rightarrow$$

$$R'(n) = k_c C J_m(k_c n) + k_c D Y_m(k_c n) = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} n = R_i \\ n = R_e \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow J_m'(k_c R_i) C + Y_m'(k_c R_i) D = 0 \\ \rightarrow J_m'(k_c R_e) C + Y_m'(k_c R_e) D = 0 \end{array} \right\}$$

- Dobbiamo cercare le soluzioni non nulle; scriviamo il sistema in forma matriciale e studiamone il determinante:

$$\begin{bmatrix} J_m'(k_c R_i) & Y_m'(k_c R_i) \\ J_m'(k_c R_e) & Y_m'(k_c R_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = 0$$

k_c incognita

$$C, D \neq 0 \iff \det[\dots] = 0 \iff -J_m'(k_c R_i) Y_m'(k_c R_e) - Y_m'(k_c R_i) J_m'(k_c R_e) = 0$$

$$k_c = \bar{k}_{c_{nm}} \rightarrow \text{autovalori}$$

↳ ne abbiamo un'infinità numerabile

↳ a ciascuno corrisponde una soluzione dell'eq. d'onda (detto MODO)

- Per soddisfare le cond. al contorno:

$$\bar{k}_{c_{nm}}^2 = k_0^2 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = k_0^2 - \bar{k}_{c_{nm}}^2 \quad (\text{MODO})$$

$$\boxed{\beta^2 > 0} \Rightarrow \text{soluzione propagativa} \quad (\text{rappresenta una soluzione che trasporta potenza media attiva})$$



$$k_0^2 > \bar{k}_{c_{nm}}^2$$

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c}$$

- Del valore più piccolo di $\bar{k}_{c_{nm}}$ si ha per $n=1, m=1 \rightarrow \bar{k}_{c_{11}} \quad (\text{modo TE}_{11})$
- " valore più piccolo di k_0 in propagazione

- Per valori di $k_0 < k_{c_{TE11}}$ non è possibile la propagazione di alcun modo TE/TM,
(f) (detti di "ordine superiore")
 può propagarsi solo la soluzione TEM.
- Frequenza di taglio del modo nm: valore di frequenza per cui $k_0 (f_{c_{TE11}}) = \bar{k}_{c_{TE11}}$
- Soluzione non propagativa $\Rightarrow \beta$ immaginario \Rightarrow nessun trasporto di potenza attiva.

- Per poter lavorare (= far propagare) solo il modo TEM (regime di monomodalità) si deve avere:

$$k_0 < k_c \simeq \frac{2}{R_i + R_e} \quad (*)$$

$$k_0 = 20.958 \cdot f \Rightarrow 20.958 \cdot f < \frac{2}{R_i + R_e} \rightarrow f < \frac{2}{R_i + R_e} \cdot \frac{1000}{20.958}$$

$[m^{-1} GHz^{-1}] [GHz]$

- Da **(*)**, per garantire di lavorare in regime monomodale, più si sale in frequenza e più si è costretti a diminuire il valore di R_i, R_e .
- In presenza di più di una soluzione propagativa (la propagazione di più modi) comporta una distorsione non accettabile.

es:

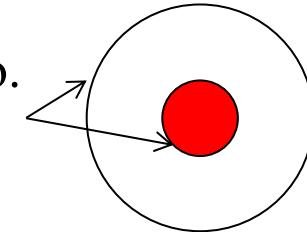
$$f = 10 \text{ GHz} \rightarrow R_i + R_e \leq \frac{2}{20.958 \cdot 10} \simeq 10 \text{ mm}$$

$$f = 40 \text{ GHz} \rightarrow R_i + R_e \leq \frac{2}{20.958 \cdot 40} \simeq 2.5 \text{ mm}$$

Cavo coassiale: condizioni al contorno: $\partial_r H_z = 0$

Il contorno è conforme al sistema di coordinate cilindrico.

Soluzione a variabili separabili.



$$R'(R_i) = CJ_n'(k_c R_i) + DY_n'(k_c R_i) = 0$$

$$R'(R_e) = CJ_n'(k_c R_e) + DY_n'(k_c R_e) = 0$$

$$\begin{bmatrix} J_n'(k_c R_i) & Y_n'(k_c R_i) \\ J_n'(k_c R_e) & Y_n'(k_c R_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione non nulla per quei valori
di k_c tali che

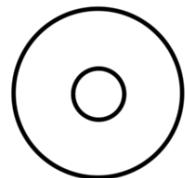
$$J_n'(k_c R_i)Y_n'(k_c R_e) - Y_n'(k_c R_i)J_n'(k_c R_e) = 0$$

Per il I modo superiore ($n=1 \rightarrow TE_{11}$)

$$k_c \approx \frac{2}{R_i + R_e}$$

$$f_c (\text{GHz}) \approx \frac{190 \cdot .85}{2 \cdot (R_i + R_e) \sqrt{\epsilon_r}} \Big|_{R_i, R_e \text{ in mm}}$$

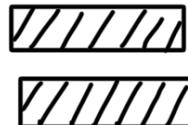
- Applicando una differenza di potenziale ad una linea composta da due conduttori, all'altro capo si ritroverà la stessa d.d.p. \rightarrow l'onda e.m. si è propagata a frequenza zero
- Ciò vale per:



cavo coassiale



linea bifilare



strip line



- Questi campi e.m. sono prodotti da onde di tipo TEM (campi \bar{E}, \bar{H} ortogonali all'asse della guida d'onda).

$$\bar{E} = \bar{e}(x, y) e^{-j\beta z}, \quad \bar{H} = \bar{h}(x, y) e^{-j\beta z}$$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}, \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$$

$$e_z, h_z \begin{cases} h_z \neq 0, e_z = 0 \rightarrow \text{MODI TE (o H)} \\ h_z = 0, e_z \neq 0 \rightarrow \text{MODI TM (o E)} \end{cases}$$

- Nel caso di guida d'onda coassiale, la forma dei campi è data da una combinazione di funzioni di Bessel di I e II specie (funzioni oscillanti con ampiezze decrescenti per $r \uparrow$ come $1/\sqrt{x}$, combinazioni di seni e coseni)

- Ad ogni soluzione non TEM corrisponde una frequenza di taglio $f_{c,n,m}^{TE/TM}$, che possono essere ordinate sull'asse delle frequenze.
- La frequenza di taglio più bassa è quella relativa al modo TE₁₁ e vale:

$$K_{c,11}^{TE} \approx \frac{2}{R_i + R_e}$$

→ f_c indicata con il numero d'onda
 → R_i, R_e ↑ ⇒ freq. di propagazione ↓

Eg: R_i = 1 mm, R_e = 3 mm

$$K_{c,11}^H = \frac{2}{(1+3) \cdot 10^{-3}} \text{ m}^{-1} = 0.5 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = 500 \text{ m}^{-1}$$

$$k_0 > K_{c,11}^H \Rightarrow f > \frac{500 \text{ m}^{-1}}{20.958 \text{ m}^{-1}/\text{GHz}} \simeq 24 \text{ GHz}$$

$$k_0 = f(\text{GHz}) \cdot 20.958 \text{ m}^{-1}/\text{GHz}$$

f < 24 GHz → può propagarsi solo il modo TEM

→ $\beta = \sqrt{k_0^2 - k_c^2}$ immaginaria ($e^{-\alpha z}$ → decadimento del campo per z↑)



campo elettrico e magnetico sono in quadratura di fase



non si ha trasporto di potenza media attiva

- Perdite di una guida d'onda coassiale in aria:

$$\alpha_c = \frac{R_s \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right)}{4\pi Z_0}, \quad R_s = \frac{1}{\sigma \delta}$$

- Più si aumenta la sezione della guida, più diminuiscono le perdite.
- D'altra parte, oltre un certo spessore, ci si potrebbe trovare alla frequenza di lavoro il modo TE_{11} in propagazione.

E: $f = 28 \text{ GHz}$, voglio che: $K_o(f) \leq \frac{2}{R_i + R_e} \Rightarrow R_i + R_e \leq \frac{2}{K_o(f)}$

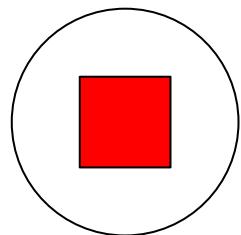
In aria le perdite più basse si hanno per:

$$Z_0 = 75 \Omega = \frac{377}{2\pi} \ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right) \Rightarrow \frac{R_e}{R_i} \simeq e^{\frac{2\pi \cdot 75}{377}} = 3.49$$

$$R_i (1 + 3.49) \leq \frac{2}{K_o(f)} = \frac{2}{20.958 \cdot 28} \Rightarrow R_i \leq \frac{2}{4.5 \cdot 20.958 \cdot 28} = 0.757 \text{ mm}$$

TEM: $\begin{cases} \bar{E} = \frac{V(z)}{n \ln(R_e/R_i)} \hat{z} \\ \bar{H} = \frac{I(z)}{2\pi n} \hat{\phi} \end{cases} \rightarrow e^{-\alpha z}, \alpha = \sqrt{k_c^2 - k_o^2}$ (soluzione evanescente)

Cavo coassiale con conduttore interno a sezione quadrata: Il contorno del conduttore interno non è conforme sistema di coordinate cilindrico.
Soluzione a variabili non separabili.



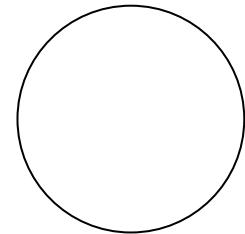
Soluzione numerica, non esiste una funzione semplice per descrivere il campo. Questo avviene in quasi tutti i casi eccetto le geometrie più semplici: rettangolare, circolare ellittico e pochi altri.

$$\gamma = 371.86 \text{ m}^{-1} \quad k_0 = 20.958 \text{ m}^{-1}*20$$

$$k_c^2 - k_0^2 = -\beta^2 = \gamma^2$$

$$k_c^2 = k_0^2 + \gamma^2 =$$

Guida Circolare $D = 0$



Condizioni al contorno:

$$\frac{d}{dr} R(r) = 0$$

$$R'(a) = 0 \Rightarrow J_n^{'}(k_c a) = 0$$

Esempio

RG-142

$$a = 0.035 \text{ "}$$

$$b = 0.116 \text{ "}$$

$$\varepsilon_r = 2.2$$

$$f_c \approx \frac{c_0 \left(\frac{2}{a+b} \right)}{2\pi \sqrt{\varepsilon_r}} \approx 17 \text{ GHz}$$

Ritornando all'equazione d'onda...

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \phi^2} + (k_0^2 - \beta^2) h_z = 0$$

$$k_0^2 - \beta^2 = k_c^2 \text{ (sezione trasversa le della guida)}$$

$$k_c = k_c^{nm} \qquad \qquad \beta^2 = k_0^2 - k_c^2$$

Modi propagativi e modi evanescenti

Se $k_0^2 > k_c^2 \Rightarrow \beta^2 > 0 \quad e^{-j\beta z} \quad \beta \in \Re$

Se $k_0^2 < k_c^2 \Rightarrow \beta^2 < 0 \quad e^{-\gamma z} \quad \gamma = -j\beta \in \Re$

MODI TM

$$E_z(r, \phi, z) = e_z(r, \phi) e^{-j\beta z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 E_z + k_0^2 E_z = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial e_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \phi^2} - \beta^2 e_z \right] e^{-j\beta z} + k_0^2 e_z e^{-j\beta z} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial e_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \phi^2} + (k_0^2 - \beta^2) e_z = 0$$

Variabili separabili

$$e_z(r, \phi) = R(r) \cdot P(\phi)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 P} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + k_c^2 = 0$$

Moltiplicando per r^2

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 k_c^2 = - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}$$

Equazioni per R e P

$$-\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} = k_\phi^2$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 k_c^2 = k_\phi^2$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + k_\phi^2 P = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\phi) = A \sin k_\phi \phi + B \cos k_\phi \phi$$

$$k_\phi = n$$

$$\Rightarrow P(\phi) = A \sin n \phi + B \cos n \phi$$

Equazione per R

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(r^2 k_c^2 - k_\phi^2 \right) = 0$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(r^2 k_c^2 - n^2 \right) = 0$$

$$R(r) = CJ_n(k_c r) + DY_n(k_c r)$$

Condizioni al contorno:

$$R(r) = 0 \quad \text{sulla superficie del conduttore interno/es terno}$$

Guida Circolare $D = 0$

$$R(R_e) = 0 \Rightarrow J_n(k_c R_e) = 0$$

Cavo coassiale

$$R(R_i) = R(R_e) = 0 \Rightarrow J_n(k_c R_i)Y_n(k_c R_e) - J_n(k_c R_e)Y_n(k_c R_i) = 0$$

Cavo coassiale

$$R(R_i) = CJ_n(k_c R_i) + DY_n(k_c R_i) = 0$$

$$R(R_e) = CJ_n(k_c R_e) + DY_n(k_c R_e) = 0$$

$$\begin{bmatrix} J_n(k_c R_i) & Y_n(k_c R_i) \\ J_n(k_c R_e) & Y_n(k_c R_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_n(k_c R_i)Y_n(k_c R_e) - Y_n(k_c R_i)J_n(k_c R_e) = 0$$

La soluzione di quest'ultima equazione trascendente si ha per valori k_c maggiori che per il I modo superiore TE

Zeri delle funzioni di Bessel

| n | p_{n1} | p_{n2} | p_{n3} | p_{n4} |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 3.832 | 7.016 | 10.174 | 13.324 |
| 1 | 1.841 | 5.331 | 8.536 | 11.706 |
| 2 | 3.054 | 6.706 | 9.970 | 13.170 |

| n | p_{n1} | p_{n2} | p_{n3} | p_{n4} |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 2.405 | 5.520 | 8.654 | 11.792 |
| 1 | 3.832 | 7.016 | 10.174 | 13.324 |
| 2 | 5.135 | 8.417 | 11.620 | 14.796 |