

- nel caso di un'onda progressiva:

$$P = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0}, \quad \frac{V^+}{I^+} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2\pi} \underbrace{\ln(\rho_e/\rho_i)}_{\text{tiene conto della geometria}}$$

- a parità di potenza trasportata, possiamo avere rapporti tra V ed I diversi.

Ej: $P = 100 \text{ W}$

$$|V^+| = \sqrt{2 \cdot 100 \text{ W} \cdot Z_0}, \quad |I^+| = \frac{|V^+|}{Z_0}$$

- se $Z_0 = 50 \Omega \rightarrow |V^+| = 141 \text{ V}, |I^+| = 2.8 \text{ A}$

- se $Z_0 = 200 \Omega \rightarrow |V^+| = 200 \text{ V}, |I^+| = 1 \text{ A}$

- Dovremo scegliere Z_0 per prediligere una maggiore tensione / corrente a parità di potenza trasportata in base a vari fattori (tra cui le perdite nel mezzo).

RELAZIONE COSTITUTIVA DEI MEZZI CONDUTTORI REALI

LEGGE DI OHM:

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

$$\sigma \text{ [S/m]}$$

condutibilità elettrica

- Consideriamo le equazioni di Maxwell ai notori:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H}$$

conduttore reale

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \epsilon \bar{E} = (\sigma + j\omega \epsilon) \bar{E}$$

$$\bar{J} \text{ [A/m]}$$

$$\bar{E} \text{ [V/m]}$$

$$\sigma_{Cu} = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$$

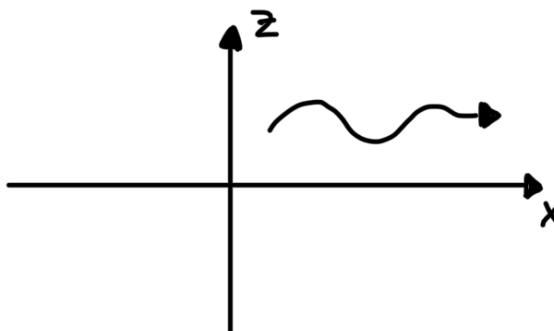
$$\sigma_{Ag} = 6.15 \cdot 10^7 \text{ S/m}$$

$$\sigma_{Al} = 3 \cdot 10^7 \text{ S/m}$$

- Fino ad alte frequenze, $\sigma \gg \omega \epsilon$, quindi:

$$\nabla \times \bar{H} \approx \sigma \bar{E}$$

- Proviamo a trovare una soluzione a queste due equazioni nel caso di un conduttore reale.



x asse di propagazione

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = -\sigma \mu \omega \nabla \times \bar{H} = -\sigma \mu \omega \sigma \bar{E} = \cancel{\nabla \nabla \cdot \bar{E}} - \nabla^2 \bar{E}$$



gradiante della
divergenza di \bar{E} → $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ in un conduttore

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{E} = \sigma \mu \omega \bar{E} \\ \bar{E} = \bar{E}(x) \end{cases}$$

E_z, H_y

- Supponendo $\bar{E} = E_z \hat{z}$:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) E_z = \sigma \mu \omega E_z$$

dipendenza
da x

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \sigma \mu \omega E_z$$

Perdite nel cavo coassiale...

Quando le pareti sono fatte di un conduttore non perfetto

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} = j \omega \mu \sigma E_z$$



$$E_z(x) = E_0 e^{-\gamma x} = E_0 \cdot e^{-x/\delta} e^{-j x/\delta}$$

$\gamma^2 = j \omega \mu \sigma = \frac{j \pi}{2} \omega \mu \sigma$
 $\delta = \pm \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{\frac{j \pi}{4}} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu \sigma}$

$J_z = \sigma E_z$

attenuazione *fattore propagativo*

Profondità di penetrazione

$$\gamma = \frac{1 + j}{\delta}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \text{ [m]}$$

Alla profondità di penetrazione il campo è circa il 36.9% del valore sulla superficie

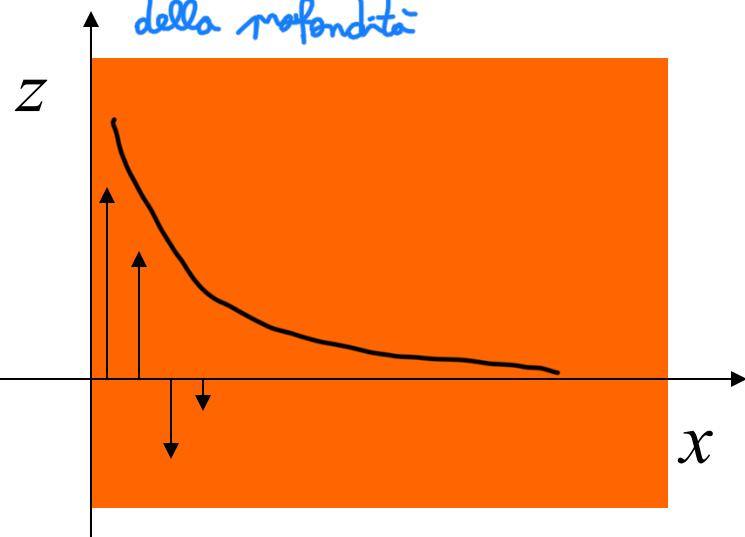
60 Hz, $\delta=8.57$ mm; 10 MHz, $\delta=21$ μm

La densità di corrente che fluisce nella sezione z vale:

$$J_z(x, y)$$

$$[\text{A/m}^2]$$

diminuisce all'aumentare
della profondità



Possiamo allora definire la densità di corrente per unità di larghezza (y) del conduttore come:

$$\underbrace{J_{sz}(y)}_{\substack{\text{densità di} \\ \text{corrente superficiale}}} = \int_0^\infty dx J_z(x, y) = \int_0^\infty dx J_z(x, y) = \frac{J_0 \delta}{1 + j}, \quad J_0 = \sigma \cdot E_{z0}$$

*densità di
corrente superficiale*

$$[\text{A/m}]$$

$$= \int_0^\infty \sigma E_0 e^{-\frac{1+j}{\sigma} x} dx = \sigma E_0 \cdot \frac{\sigma}{1+j} = \frac{J_0 \sigma}{1+j}$$

Impedenza interna per unità di lunghezza e di larghezza

$$Z_s = \frac{E_{z0}}{J_{sz}} = \frac{1 + j}{\sigma\delta} = R_s + j\omega L_i$$

Resistenza superficiale:

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} [\Omega]$$

Effetto PELLE: la corrente si concentra sulla superficie del conduttore

- Calcoliamo le perdite del piano conduttore andando a calcolare il flusso del vett. di Poynting attraverso una sezione S_0 .

Perdite in un piano conduttore

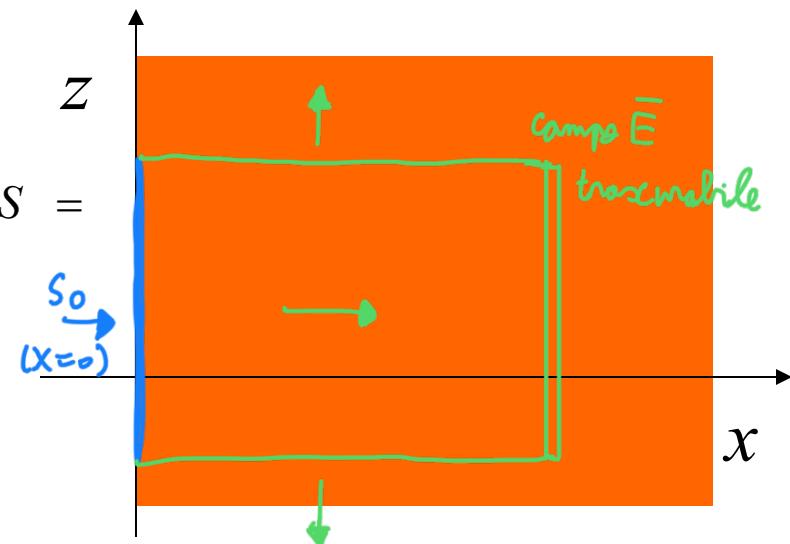
$$P_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\partial V} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\partial V} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{u}_x dS$$

$\circlearrowleft S_0 \rightarrow \text{piano } z-y$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z \int_{S_0} \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{H}}^* dS \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{Z\} \int_{S_0} |\hat{\mathbf{H}}|^2 dS =$$

potenza media dissipata \rightarrow

$$= \frac{1}{2} R_s \int_{S_0} |\hat{\mathbf{J}}_s|^2 dS$$

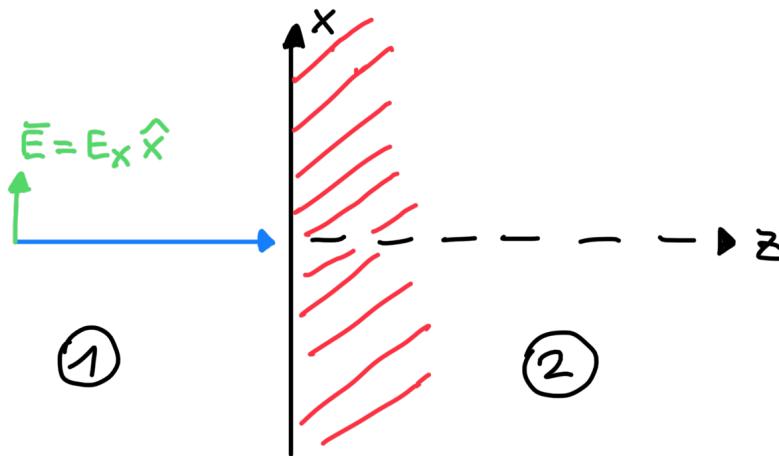


$$\hat{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{H}}$$

Essendo:

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \frac{1 + j}{\sigma\delta} = Z_s$$

es: propagazione di un'onda piana in un conduttore reale



mezzo ① :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_1(x, y, z) = (E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{+jk_1 z}) \hat{x} \\ \bar{H}_1(x, y, z) = \frac{1}{\eta_1} (E_1^+ e^{-jk_1 z} - E_1^- e^{+jk_1 z}) \hat{y} \end{array} \right.$$

mezzo ② :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_2(x, y, z) = E_2^+ e^{-jk_2 z} \hat{x} \\ \bar{H}_2(x, y, z) = \frac{1}{Z_2} E_2^+ e^{-jk_2 z} \hat{y} \end{array} \right.$$

- Calcolo di Z_2 : (impedenza superficiale)

$$\nabla \times \bar{E} = -\sigma w \mu_0 \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = -\frac{1}{\sigma w \mu_0} \nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{\sigma w \mu_0}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & 0 & 0 \end{array} \right| = \frac{\partial_z E_x}{-\sigma w \mu_0} \hat{u}_y$$

- Da cui:

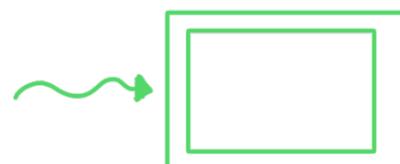
$$Z_2 = \frac{w \mu_0}{\sigma_2} = \frac{w \mu_0 \sigma}{1 + \sigma}$$

- Applicando la continuità del campo tangenziale:

$$\begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \\ \frac{1}{Z_1} (E_1^+ - E_1^-) = \frac{E_2^+}{Z_2} \end{cases} \rightarrow \Pi = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \Rightarrow E_2^+ = E_1^+ (1 + \Pi)$$

$\boxed{[2]} \quad Z_2 = \frac{\sqrt{\mu} \cdot w \sqrt{\mu \epsilon} \cdot \sigma}{1 + \sigma}, \quad |Z_2| = 0 \Rightarrow \Pi \approx -1 \rightarrow$ ad alta frequenza il conduttore è un buono schermo

↑ conduttore buono $\Rightarrow \sigma \downarrow$



Ritorniamo alle Potenza dissipata nel cavo coassiale per unità di lunghezza

HP: dielettrico di riempimento = aria ($\epsilon_r=1$)

$$P_\ell = \frac{1}{2} R_s \int_{S_0} \left| \hat{\mathbf{J}}_s \right|^2 dS$$

$(z=1\text{m})$

$$\hat{\mathbf{H}}(r, \phi, z) = \frac{I(z)}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi$$

superficie laterale del conduttore
interno/esterno

$$P_\ell = \frac{1}{2} R_s |I(z)|^2 \left[\int_0^{2\pi} \frac{R_i}{(2\pi R_i)^2} d\phi + \int_0^{2\pi} \frac{R_e}{(2\pi R_e)^2} d\phi \right] =$$

APPROSSIMO \mathbf{J}_s : $\bar{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{u}}_n \times \bar{\mathbf{H}}$

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{I(z)}{2\pi R_s} \hat{\phi}, \quad \bar{\mathbf{J}}_{s1} = \frac{I(z)}{2\pi R_i} \hat{\mathbf{u}}_n, \quad \bar{\mathbf{J}}_{s2} = \frac{I(z)}{2\pi R_e} \hat{\mathbf{u}}_n$$

$$= \frac{R_s}{2} |I(z)|^2 \left[\frac{1}{2\pi R_i} + \frac{1}{2\pi R_e} \right]$$

Quindi il rapporto tra la potenza dissipata (per unità di lunghezza) e quella incidente (nel caso di un'onda progressiva) vale:

$$\frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} = \frac{1}{2} |I^+|^2 \cdot Z_0$$

$$2\alpha_c = \frac{\frac{P_\ell}{P_{inc}}}{\frac{\frac{1}{2} R_s |I^+|^2}{\frac{1}{2} Z_0 |I^+|^2}} = \frac{\frac{R_s}{2\pi} \left[\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right]}{\frac{\eta}{2\pi} \ln(R_e / R_i)}$$

potenza attiva media che fluisce lungo la guida d'onda ciascuale:

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$$

Lo diminuisce con Z (vi è l'ratio delle cariche nel conduttore con quelle del dielettrico e la potenza si tramuta in calore)

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Distribuzione di potenza, considerando solo un'onda progressiva..

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$$

Perdita di potenza per unità di lunghezza lungo il cavo

$$P_\ell(z) = \frac{-\partial P}{\partial z} = 2\alpha P(z)$$

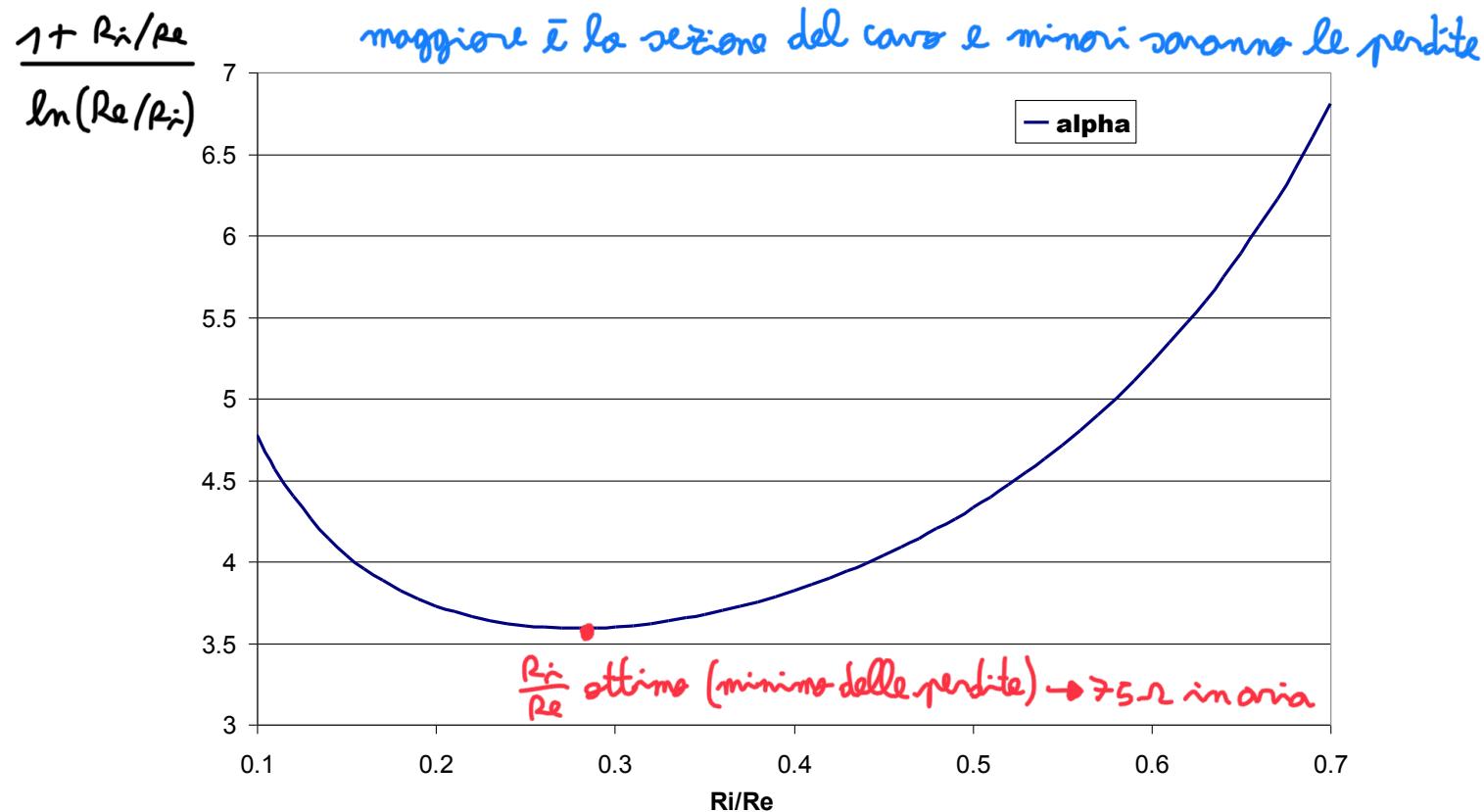
$$\approx \frac{\frac{R_s}{4\pi} \left[\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right]}{\frac{\eta}{2\pi} \ln(R_e/R_i)} = \frac{\frac{R_s}{4\pi R_i} \left[1 + \frac{R_i}{R_e} \right]}{\frac{\eta}{2\pi} \ln(R_e/R_i)}$$

\downarrow
 $\alpha = \frac{P_\ell(z)}{2P(z)}$

\uparrow
 costante di attenuazione
 $(R_e, R_i \downarrow \Rightarrow \alpha \uparrow)$

$= \alpha$

Attenuazione in funzione del rapporto tra i raggi del coax



$$\frac{377}{2\pi} \ln(R_e/R_i) = 75 \Omega \rightarrow R_e/R_i = e^{\frac{2\pi \cdot 75}{377}} \simeq 3.5$$

RIGIDITÀ DI ELETTRICA

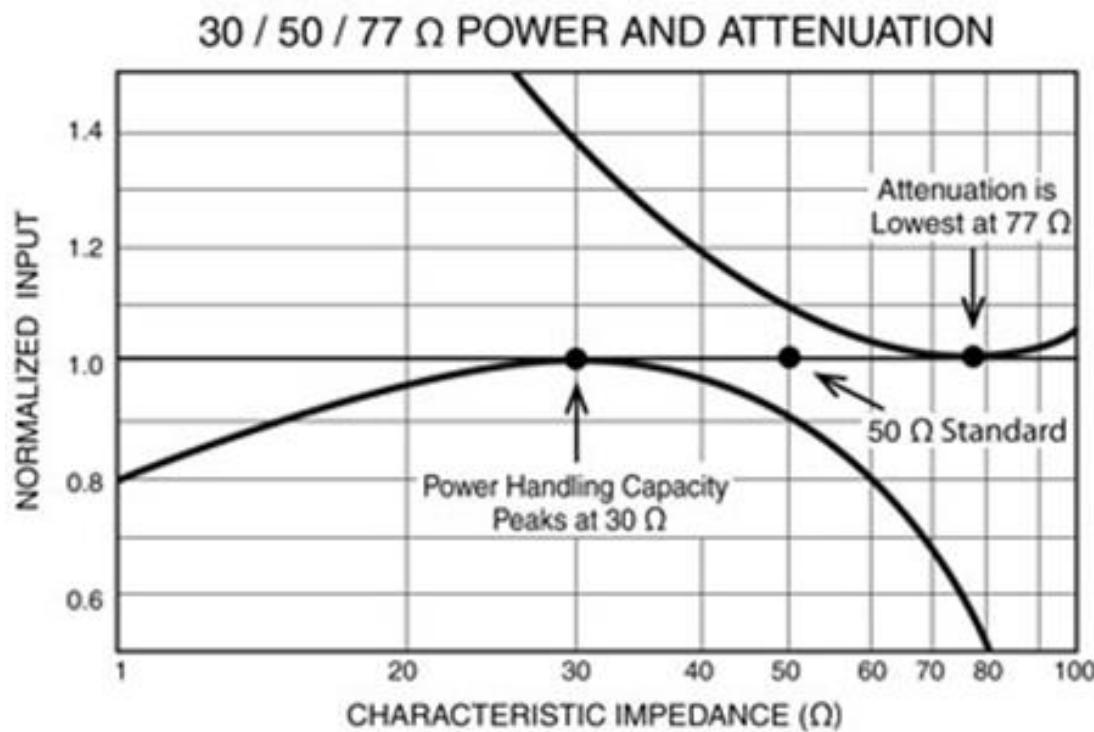
- Massima potenza di picco che può essere trasportata in una guida d'onda coassiale
- In aria è pari a $2 \cdot 7 \cdot 10^6 \text{ V/m} \Rightarrow E_{MAX} = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$

$$\bar{E}(r) = \frac{V^+ e^{-jkz}}{r \ln(R_e/R_i)} \hat{r} \rightarrow \bar{E}_{MAX} = \bar{E}(R_i)$$

$$|V_{MAX}^+| = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m} \cdot R_i \cdot \ln(R_e/R_i)$$

$$P_{MAX} = \frac{|V_{MAX}^+|^2}{Z_0}$$

Perché 50 Ω ?



$$\text{dati: } R_i = 1 \text{ mm}, R_o = 3 \text{ mm}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}, \sigma = 6.15 \cdot 10^7 \frac{\Omega}{\text{m}} \text{ (argento)}, f = 10 \text{ GHz}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} = 6.418 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0.64 \mu\text{m}$$

$$Z_0 = \frac{377}{2\pi} \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) = 65 \Omega \quad R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = 0.025 \Omega$$

$$\alpha = \frac{\frac{R_s}{4\pi R_i} \left(1 + \frac{R_i}{R_o}\right)}{Z_0} = 0.041 \text{ Np/m}$$

Perdite in dB: $20 \cdot \log_{10} \left(e^{2\alpha} \right) = 0.708 \text{ dB/m} \rightarrow 1 \text{ m di cavo perde il } 14\% \text{ della potenza}$
 $20 \cdot \log_{10} \left(e^{2\alpha \cdot 5} \right) = 3.542 \text{ dB / 5 m}$

$$\bar{E}_n(r, z) = \frac{V^+ e^{-\gamma z}}{r \cdot \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)}, \quad \gamma = \alpha + j + K_0, \quad K_0 = \frac{2\pi f}{c}$$

$$\bar{H}_\phi(r, z) = \frac{V^+ e^{-\gamma z}}{2\pi r Z_0}$$

Se $V^+ \in \mathbb{R} \rightarrow$

$$P(n, z) = \frac{V^{+2} e^{-2\alpha z}}{2 n^2 2\pi \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) \cdot Z_0}$$

↓
densità di
potenza

$$P(z) = \frac{V^{+2} e^{-2\alpha z}}{2 Z_0}$$

↓
potenza media attiva in una sezione z
(decrece all'aumentare di z)

Perdite nel dielettrico

- I due conduttori che costituiscono un cavo coassiale sono tenuti separati mediante l'interposizione di un dielettrico di bassa permittività relativa (es. Teflon).

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e$$

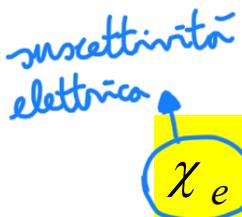
vettore polarizzazione elettrica

- gli atomi del dielettrico possono essere assimilati a dipoli
- \mathbf{P}_e rappresenta la polarizzazione delle molecole a causa di un campo \mathbf{E} esterno

In un mezzo lineare

$$\mathbf{P}_e = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

Può essere complesso. La parte immaginaria (negativa, per la conservazione dell'energia) tiene conto dell'energia elettromagnetica dissipata sotto forma di calore (trasferita alla vibrazione meccanica delle molecole (assimilati a dipoli)).



$$\text{Im}[\chi_e] = -\tan(\delta)$$

profondità di
penetrazione

Permittività Complessa $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r (1-j \tan \delta)$

costante di propagazione

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} \cong \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(1 - j \frac{\tan \delta}{2}\right)$$

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{rln(\frac{Re}{Ri})} V^+ e^{-jkz} e^{-\alpha z}$$

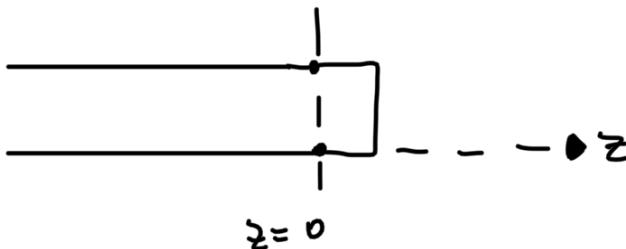
$$\alpha_d \cong k \frac{\tan \delta}{2}$$

Teflon $\tan \delta = 0.0002$

Perdite totali (per unità di lunghezza) $\alpha_{dB} = -20 \log e^{-(\alpha_c + \alpha_d)}$

perdite nel dielettrico
perdite di condizione

- Aumentando la sezione della guida coassiale:
 - le perdite si riducono
 - aumenta la potenza trasportabile
- Conviene quindi aumentare il diametro il più possibile? (*C'è qualcosa che lo impedisce*)
- Più si sale in frequenza e più la sezione deve diminuire.
- Ha rigidità dielettrica da prendere in considerazione quando devo calcolare la massima potenza trasportabile da una guida coassiale è quella dell'aria (tra connettore e il dielettrico vi è un sottile gap).
- Condizioni peggiori: $T=1$ (c.c.)



$$V^+ = -V^-, \quad V(t) = V^+ (-2\pi \sin(kz))$$

$$V_{MAX} = 2|V^+|$$

- Quindi nel calcolo della potenza max., considerando le condizioni peggiori, devo dividere P_{MAX} di un fattore 4.

18 GHz

$$Ri = 0.415 \text{ mm}$$

$$\text{Re}=1.38 \text{ mm}$$

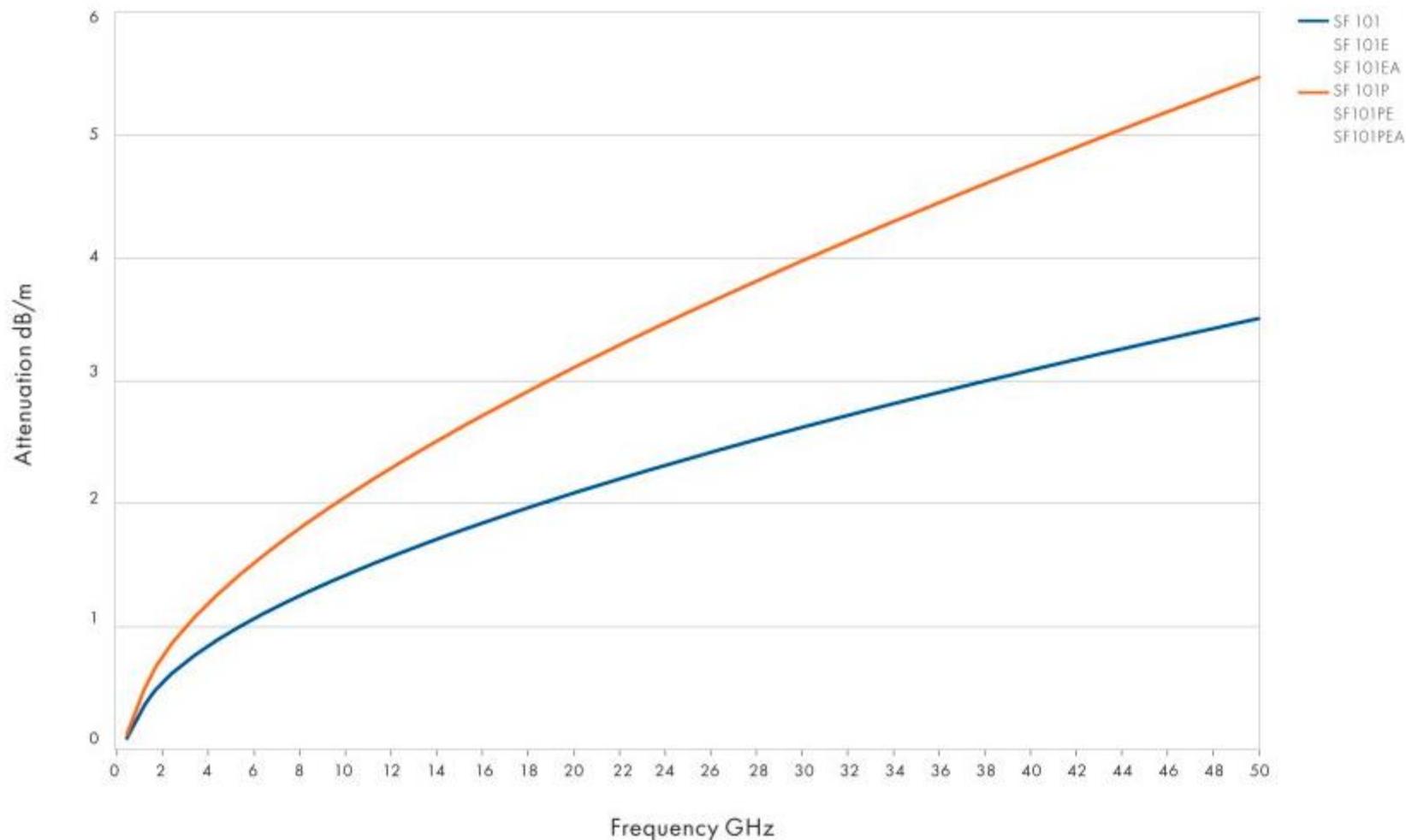
$$\tan \delta = 0.0002$$

$$\text{Ag } \sigma = 63000000 \text{ S/m}$$

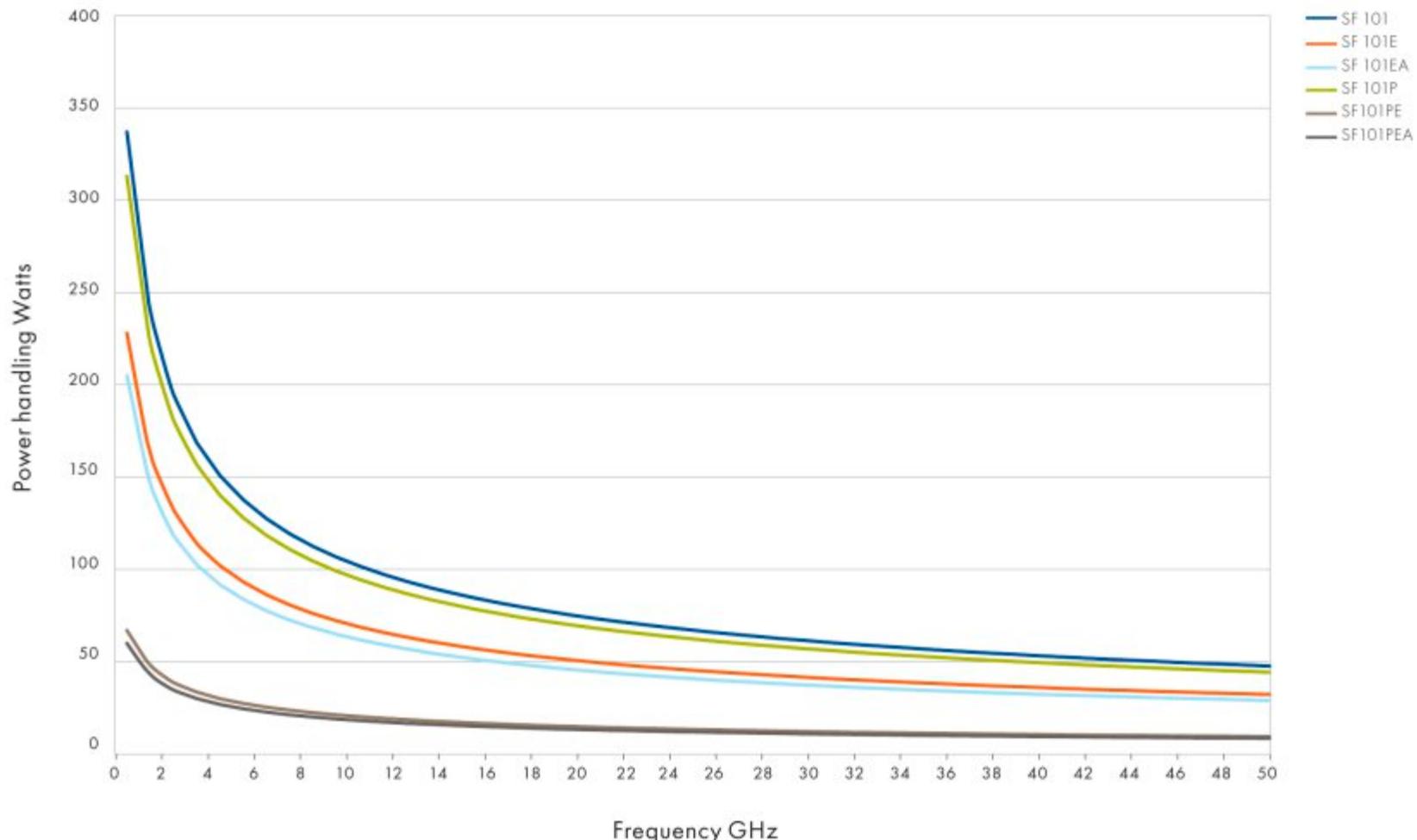
$$\alpha_{cdB} = 1.45 \text{ dB/m}$$

$$\alpha_{ddB} = 0.47 \text{ dB/m}$$

Attenuation (nominal values at +25 °C ambient temperature)



Power handling (maximum values at 25 °C ambient temperature and sea level)



Sebbene la rigidità dielettrica di alcuni materiali come il teflon sia elevatissima 10.000 kV/m Nel calcolo della potenza max bisogna considerare la presenza di parti non omogenee (es. in prox dei connettori) e mettersi nelle condizioni di max VSWR

Connector species (outer diameter)	Inner diameter	Voltage at breakdown	Max power (low VSWR load)	Maximum power (high VSWR load)
3.5 mm	1.52 mm	634 V	4023 W	1005 W
2.92 mm	1.27 mm	529 V	2098 W	524 W
2.4 mm	1.04 mm	435 V	1886 W	471 W
1.85 mm	0.80 mm	335 V	1118 W	279 W
1 mm	0.43 mm	181 V	325 W	81 W

How about PTFE-filled coax? The breakdown field strength of PTFE is about 10,000,000 volts per meter! So "049" cable (0.049 inches "D", 0.015 inches "d") can withstand 2260 volts and pass almost 50,000 watts peak. This seems to good to be true, doesn't it? It is. The problem is that with voltage breakdown, the limitation of the weakest link in the chain is what you need to focus on. Your semi-rigid cable might be able to pass thousands of watts, but as soon as that signal crosses a path where the PTFE dielectric fill is interrupted by air, it will spark. At the end of the cable, where the connector is soldered on, there is surely going to be a gap in the dielectric. You need to revise the calculation for air dielectric, in which case you'll see 256 volts is the maximum voltage, 358 watts is the maximum power into a good load, and 89 watts is the maximum into an unmatched load. Note that at this interface the coax presents 71 ohms impedance.

Da Microwaves 101, <https://www.microwaves101.com/encyclopedia/coaxial-cables>