Una carica (ferma o in movimento) produce forze su altre cariche

In presenza di una densità di carica $\rho(\mathbf{r},t)$ *e di una densità di corrente di conduzione* $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, *una carica puntiforme* q, *nel punto* $\mathbf{r}$ *all'istante* t, *subisce una forza che è conveniente esprimere attraverso il campo elettrico* $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ *e l'induzione magnetica* $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ (per i fisici, campo magnetico):

$$\underbrace{\mathbf{F}}_{\text{forza di Lorentz}} = \underbrace{q}_{\text{carica di prova}}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Il campo elettromagnetico è legato puntualmente alle sorgenti attraverso le equazioni di Maxwell: (equazioni PUNTUALI)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r},t) \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \end{cases}$$

eq. vett. (prime due equazioni)

eq. scalari (ultime due equazioni)

vettore posizione

- $\bar{r} = x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} + z \cdot \hat{z}$
- $\bar{E}, \bar{B}$ dipendono da
  - → sorgenti dei campi
  - → mezzo di propagazione

Le quantità in grassetto sono vettori, quelle in italico scalari

dove:

$\mathbf{E}$ *campo elettrico* (V/m)
$\mathbf{H}$ *campo magnetico* (A/m)
$\mathbf{D}$ *induzione elettrica* (C/m^2)
$\mathbf{B}$ *induzione magnetica* (Wb/m^2)

sorgenti dei campi e.m.

$\mathbf{j}$ *densità di corrente elettrica* (A/m^2)
ρ *densità di carica elettrica* (C/m^3)

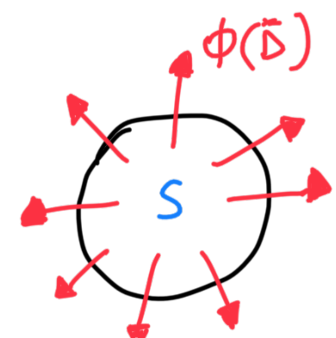
DIVERGENZA

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{D} = \rho} \longrightarrow \iiint_V \nabla \cdot \bar{D} \, dv = \iiint_V \rho \, dv = Q_{TOT}$$ → carica racchiusa nel volume V

↓ teorema divergenza

flusso di $\bar{D}$ → $$\phi(\bar{D}) = \iint_S \bar{D} \cdot \bar{n} \, ds \neq 0$$ (è nullo solo se non ci sono cariche)

- Il flusso del vettore $\bar{D}$, attraverso la superficie che delimita il volume V, è pari alla carica totale contenuta in V.
- Indica quanto più la somma algebrica delle cariche interne a V sia $\neq 0$.
- $\nabla \cdot \bar{D} \neq 0 \iff \rho \neq 0$ in determinati punti



$$\boxed{\nabla \cdot \bar{B} = 0}$$

- non esistono monopoli magnetici

Le espressioni degli operatori rot e div in coordinate curvilinee ortogonali (u_i) di versori $(\mathbf{e}_i)$ sono:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ h_1 F_{u_1} & h_2 F_{u_2} & h_3 F_{u_3} \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\partial_{u_1}(h_2\ h_3 F_{u_1}) + \partial_{u_2}(h_1\ h_3 F_{u_2}) + \partial_{u_3}(h_1\ h_2 F_{u_3})$$

$$\partial_{u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Coordinate rettangolari:

$$u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, \mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{z}}, h_i = 1$$

Coordinate cilindriche:

$$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = z, \mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{e}_2 = \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{z}}, h_1 = h_3 = 1, h_2 = r$$

Coordinate sferiche:

$$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi, \mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{e}_2 = \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{e}_3 = \widehat{\boldsymbol{\phi}}, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin\theta$$

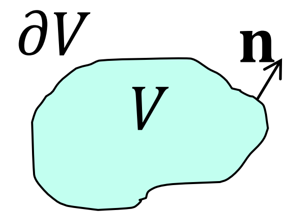
Relazione tra densità di carica e densità di corrente, equazione di continuità:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \boxed{0 =} \nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{D} = \boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho}$$

$$\Downarrow$$

Quindi, $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho$

In forma integrale,



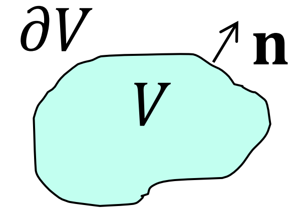
$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j}\, dV = \iint_{\underbrace{\partial V}_{\text{contorno di } V}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\partial_t \iiint_V \rho\, dV = -\partial_t Q_{Tot}$$

CONSERVAZIONE DELLA CARICA

*Il flusso di **J** attraverso ∂V è la carica totale uscente dal volume V nell'unità di tempo. Tale flusso è uguale alla variazione di carica contenuta in V nell'unità di tempo. Nel caso la derivata sia nulla, abbiamo la I legge di Kirchoff :* $\iint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$, *la somma delle correnti entranti in un nodo è zero*

Integrando le equazioni della divergenza in un volume fisso V, otteniamo:

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{D}\,dV = \iint_{\partial V} \underbrace{\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}}_{\phi(\bar{D})}\,dS = \iiint_V \rho\,dV = Q_{TOT}$$



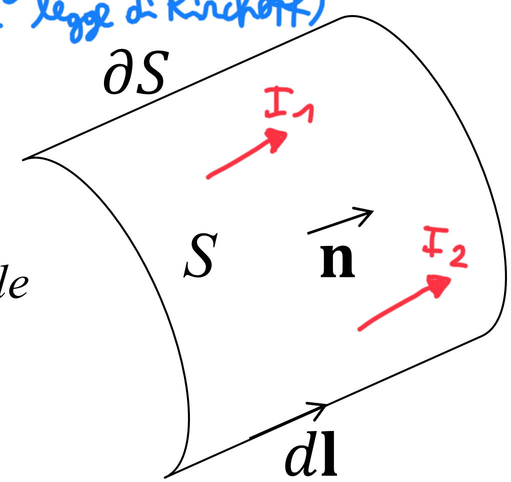
$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dV = \iint_{\partial V} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

→ non esistono cariche magnetiche libere (sono linee che si racchiudono su se stesse)

Integrando le equazioni dei rotori su una superficie *fissa* *S delimitata dalla curva chiusa ∂S, si ha :*

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS \overset{\text{STOKES}}{=} \oint_{\partial S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \overbrace{-\partial_t \iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS}^{=0 \text{ in condizioni statiche (2° legge di Kirchhoff)}}$$

LEGGE DI FARADAY-LENZ



La circuitazione di H su un percorso chiuso ∂S è pari alla somma delle correnti concatenate I + la derivata del flusso del vettore induzione elettrica attraverso una superficie S qualunque delimitata da ∂S

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial S} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \underset{\text{(scalare)}}{I_{TOT}} + \underbrace{\partial_t \iint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,dS}_{\text{variazione del flusso di } \bar{D} \text{ nel tempo attraverso } S \text{ (correnti di spostamento)}}$$

→ LEGGE DI AMPERE-MAXWELL

Equazioni costitutive

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \end{cases}$$

tiene conto della polarizzazione dei materiali

tiene conto della magnetizzazione

Considerando la polarizzazione elettrica **P**, *se il mezzo è* ***lineare***, *vi è una relazione di tipo:*

(P è in funzione di $\bar{E}$)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{V} \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')\, dt' d\mathbf{r}'$$ (convoluzione)

P(**r**,t) *non varia istantaneamente al variare di* **E**, *né dipende solamente dal valore che* **E** *ha nel punto* **r**. *Se il mezzo è* ***stazionario***, *come accade nei casi pratici:*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{V} \mathbf{g}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')\, dt' d\mathbf{r}'$$

(funzioni cosinusoidali)

Nel caso di **sorgenti armoniche**, se il mezzo è stazionario

trasf. di Fourier

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) = \int_V \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)\cdot\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}',\omega)\,dr'$$

Dove: $\boxed{\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \mathbf{P}(\mathbf{r},t)\cdot e^{-j\omega t}}$ e, $\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega)\cdot e^{j\omega t}}$

Se il mezzo è **spazialmente non dispersivo**, allora la polarizzazione **P** nel punto **r** dipende solo da **E** nello stesso punto:

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{r},\omega)\cdot\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$$

Ovvero, in termini del vettore induzione elettrica, abbiamo:

$$\widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}} + \widetilde{\mathbf{P}} = \varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{r},\omega)\cdot\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega)$$

Per molti mezzi e per campi non troppo intensi, vi è un legame di proporzionalità tra $\widehat{\mathbf{P}}$ e $\hat{\mathbf{E}}$ (**mezzi lineari, stazionari, isotropi**):

proporzionale e parallelo ad $\tilde{E}$

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) = \underbrace{\varepsilon_0 \chi_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},\omega)}_{\text{costante di proporzionalità}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$$

χ_{e} *(adimensionale) Suscettibilità Elettrica. Quando la suscettibilità non dipende dal punto, il mezzo è omogeneo*

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} + \widetilde{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{\mathrm{e}}) \tilde{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tilde{\mathbf{E}}$$

ε_o *Permettività nel vuoto* $8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m

ε_r*(adimensionale) Permettività relativa*

In questo corso verranno considerati per lo più mezzi non magnetici per i quali la magnetizzazione è trascurabile $\boxed{\mathbf{M}=\mathbf{0}}$ *e quindi* $\boxed{\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.}$

Le equazioni di Maxwell + relazioni costitutive sono sufficienti a determinare i campi? In altre parole, noti $\nabla \cdot \mathbf{F}$ *e* $\nabla \times \mathbf{F}$, *possiamo determinare* $\mathbf{F}$ *?*

$$\left[\nabla \cdot \hat{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{z}\right]$$

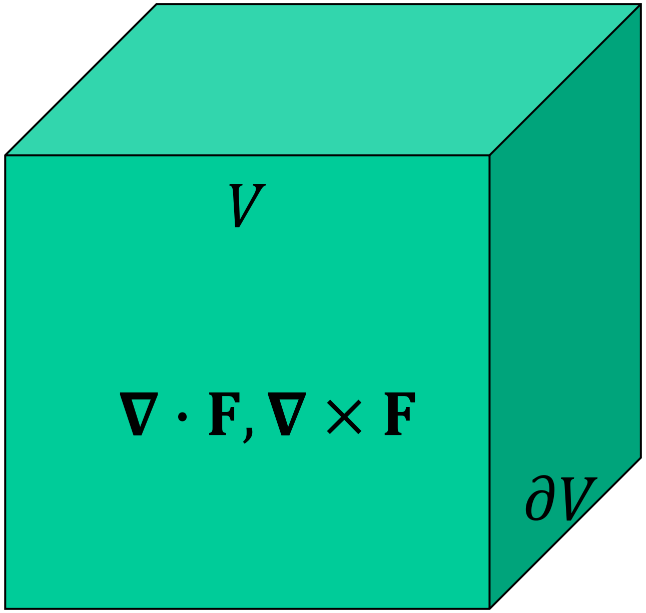
$$\mathbf{A} = yz\,\hat{\mathbf{x}} + xz\,\hat{\mathbf{y}} + xy\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \sin x \cosh y \;\; \hat{\mathbf{x}} - \cos x \sinh y \; \hat{\mathbf{y}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}, \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

(divergenza e rotore sono gli stessi, ma i campi di partenza sono diversi)

Quindi, la determinazione dei campi richiede ulteriori vincoli che sono le **CONDIZIONI AL CONTORNO**



Specificare $\nabla \cdot \mathbf{F}, \nabla \times \mathbf{F}$ non è sufficiente a determinare univocamente $\mathbf{F}$

Bisogna conoscere anche $\mathbf{F}$ *sulla superficie ∂V che delimita il volume V,* nel quale si risolvono le equazioni di Maxwell.

Infatti sia A che B rispettano le equazioni:

$$\boxed{\nabla \times A} = \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix} = \hat{x}(x-x) + \hat{y}(y-y) + \hat{z}(z-z) = \boxed{0}$$

$$\boxed{\nabla \times B} = \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \sin x \cosh y & -\cos x \sinh y & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \hat{x} \cdot 0 + \hat{y} \cdot 0 + \hat{z} \cdot (\sin x \sinh y - \sin x \sinh y) = \boxed{0}$$