

Introduzione alla Teoria dei Grafi – parte I

ver 2.5.0



Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it
tel. 071 - 2204823

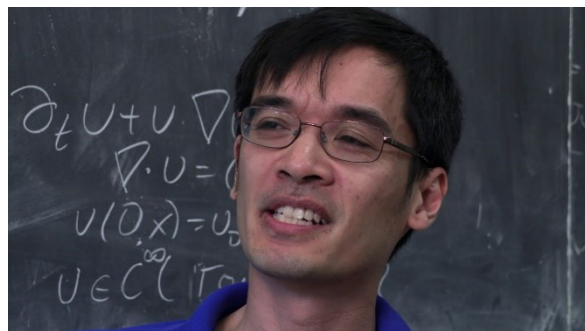


Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

Un po' di enigmistica

...



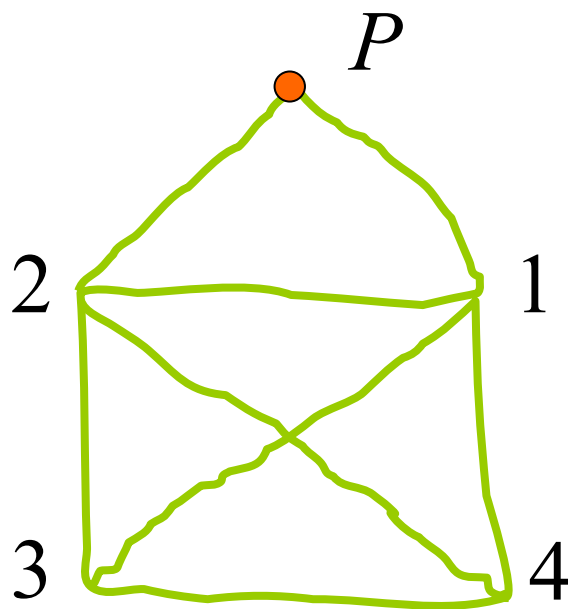
Terence Tao

(medaglia Fields - 2006)

«Per uno studente i puzzle matematici sono importanti per capire come risolvere i problemi reali così come per un bambino le favole e gli aneddoti sono importanti per capire la vita reale»

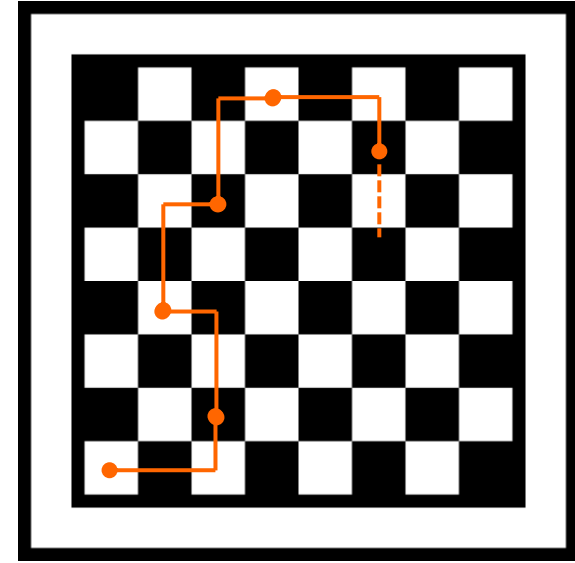
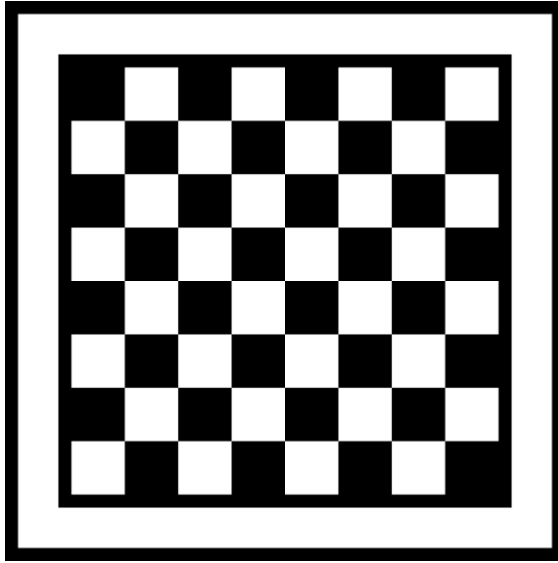
Un po' di enigmistica

- Fare questo disegno partendo dal punto P e **tornando al punto P** senza staccare la penna dal foglio e senza ripassare mai su linee già tracciate



...un argomento generale?

Un po' di enigmistica (scacchi... un classico)

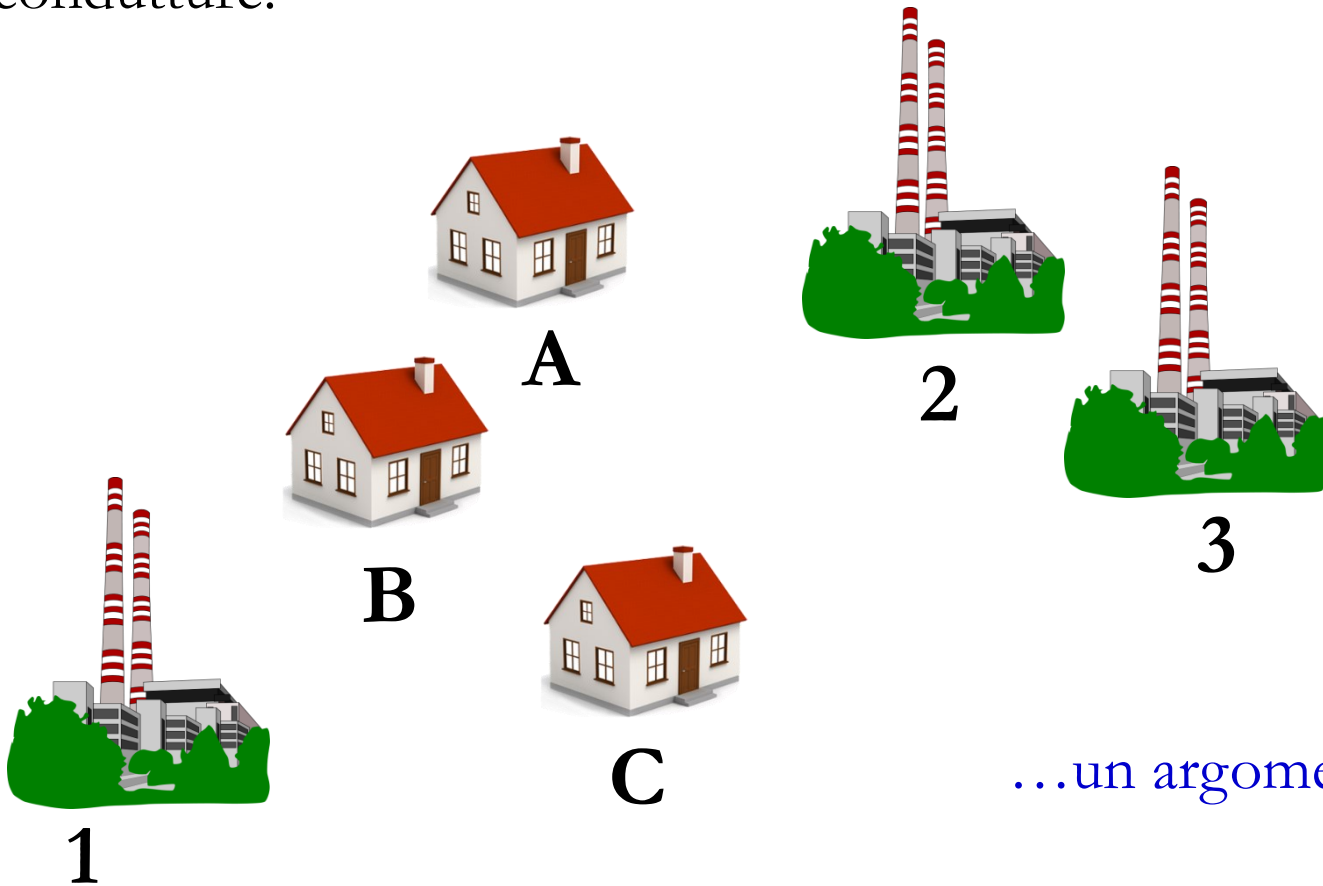


- Un cavallo può toccare tutte la case di una scacchiera, ognuna esattamente una volta, e tornare al punto di partenza?

...un argomento generale?

Un po' di enigmistica

- Tre edifici devono essere collegati alle centrali di energia elettrica, acqua e gas. E' possibile che ciò venga fatto senza intersecare le condutture?



...un argomento generale?

Un po' di (social) enigmistica

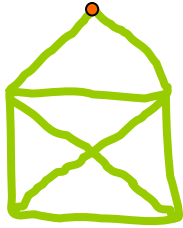
- In un gruppo arbitrario di persone qual è la probabilità che ce ne siano due che conoscono lo stesso numero di persone all'interno del gruppo ?



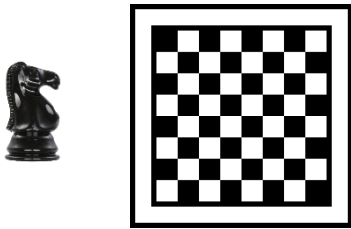
	A	B	C	D	E
A		×		×	
B	×		×		
C		×			
D	×				×
E				×	

Qui, A e D conoscono entrambi 2 persone... ma anche B e D, e C e E conoscono lo stesso numero di persone

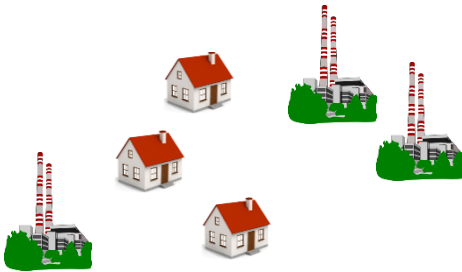




- Il problema può essere risolto ricorrendo all'enumerazione sistematica dei casi



- L'enumerazione è possibile in principio ma è impraticabile data l'ampiezza dello spazio di ricerca. Occorre qualche idea.



- L'enumerazione è impossibile: potenzialmente i casi da verificare sono infiniti. E' necessaria qualche idea...



Un po' di enigmistica

- Ordina un insieme dato di numeri in modo tale che la somma di ogni coppia di numeri adiacenti sia un quadrato. Prova con l'insieme $\{1, 2, \dots, 15\}$

...un metodo generale?

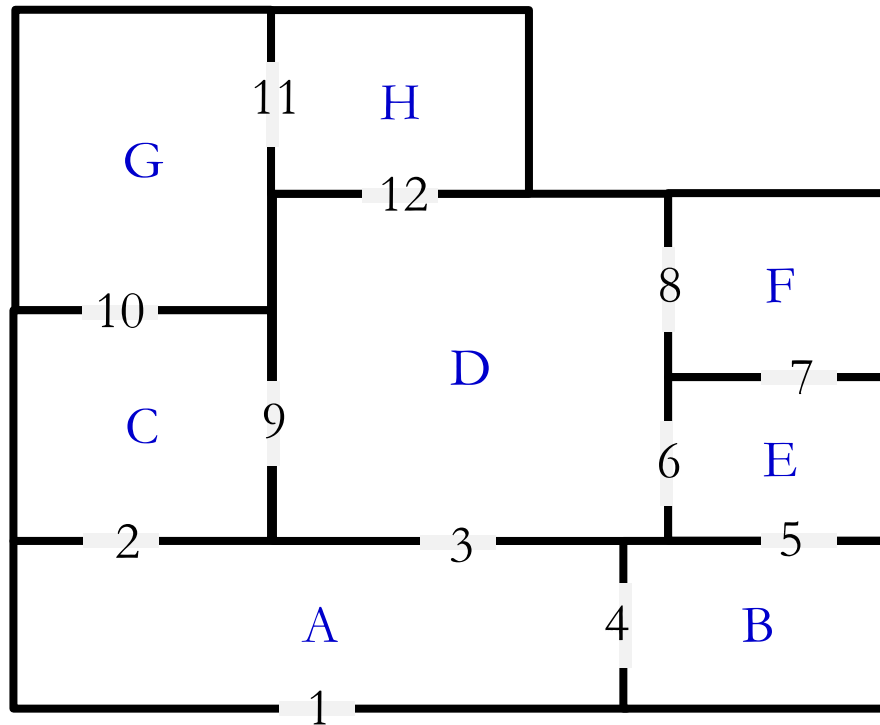
Un po' di enigmistica nello sport

- Un torneo di calcio è formato da due gironi (A e B) ognuno composto da 13 squadre. Ogni squadra deve disputare 14 partite, di cui 11 con squadre del proprio girone e 3 con squadre dell'altro girone. Due squadre non si possono incontrare più di una volta. Sapreste definire un calendario?

...di nuovo: un metodo generale?

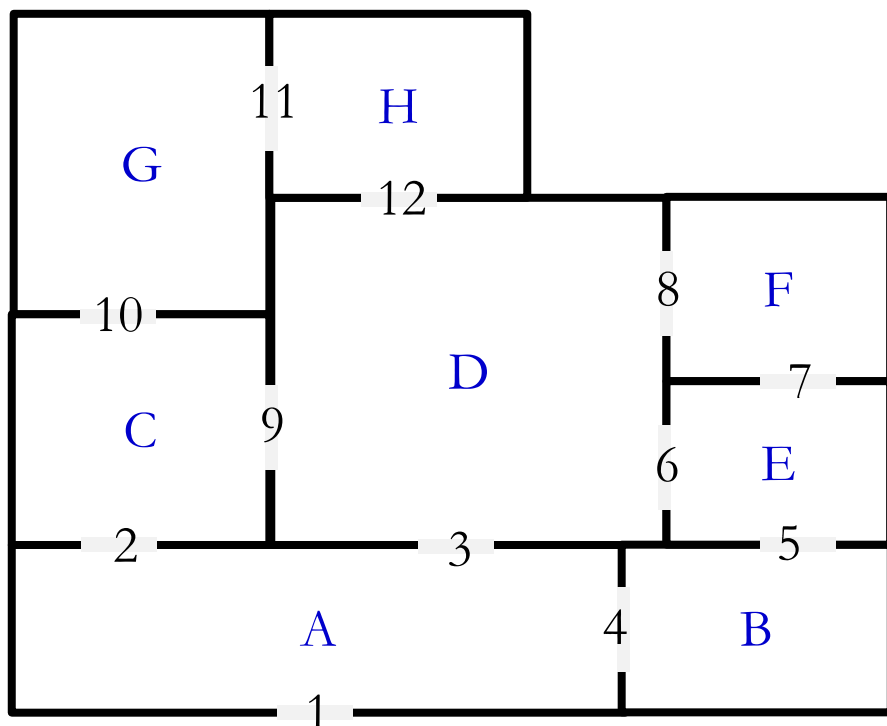
Un po' di enigmistica: una notte al museo

- Di notte tardi, l'ultima guardia deve chiudere tutte le porte. Che giro deve fare se le porte chiuse non si aprono più e se per chiuderle occorre attraversarle?



Un po' di enigmistica: una notte al museo

- Qual è il minimo numero di guardie necessarie per controllare tutte le stanze del museo? (una guardia alla porta controlla le due stanze che la porta collega)

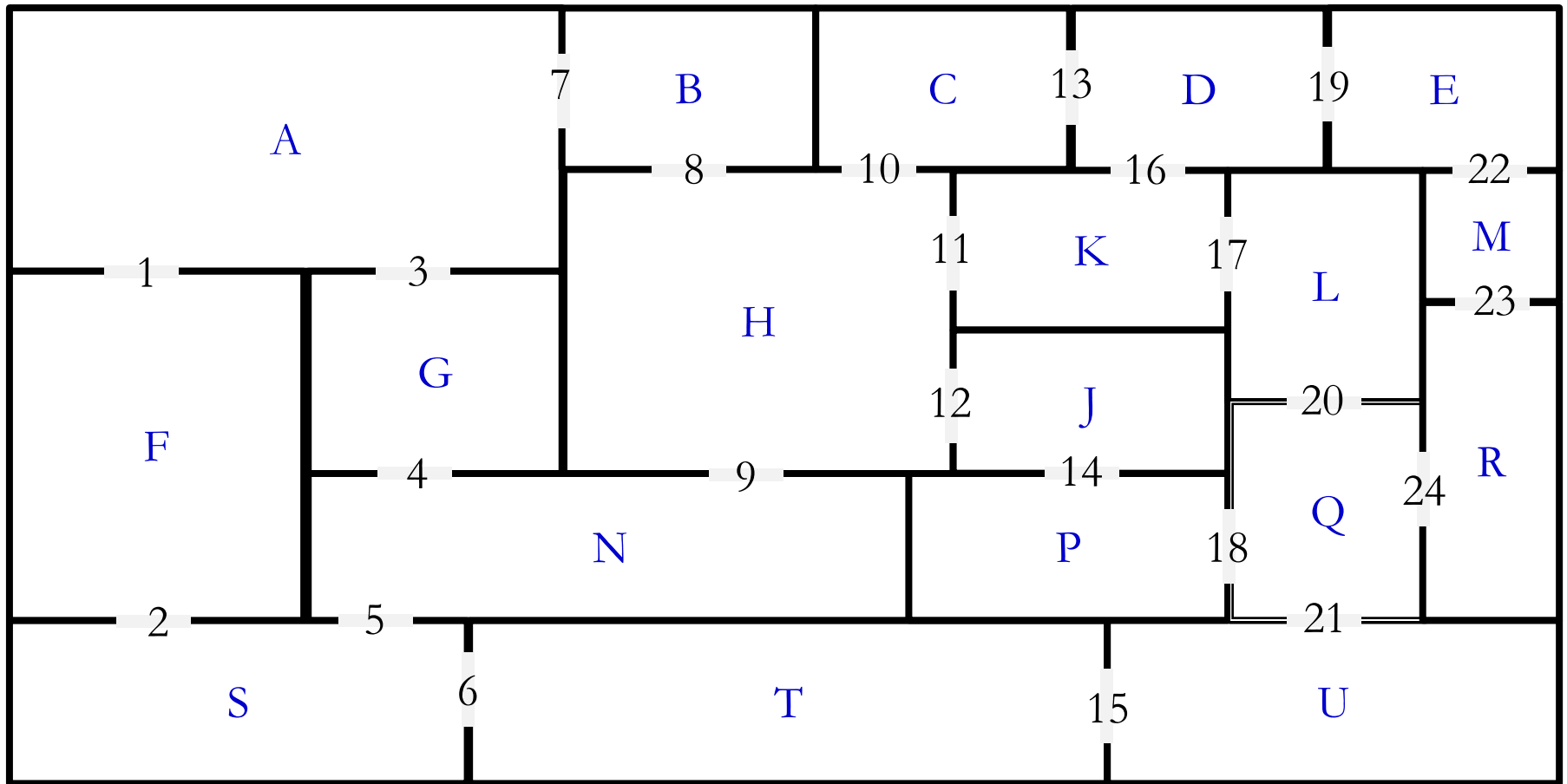


Uno scenario alternativo: qual è il minimo numero di guardie se ognuna deve stare in una stanza e può controllare tutte le stanze «adiacenti»?

...un metodo generale?

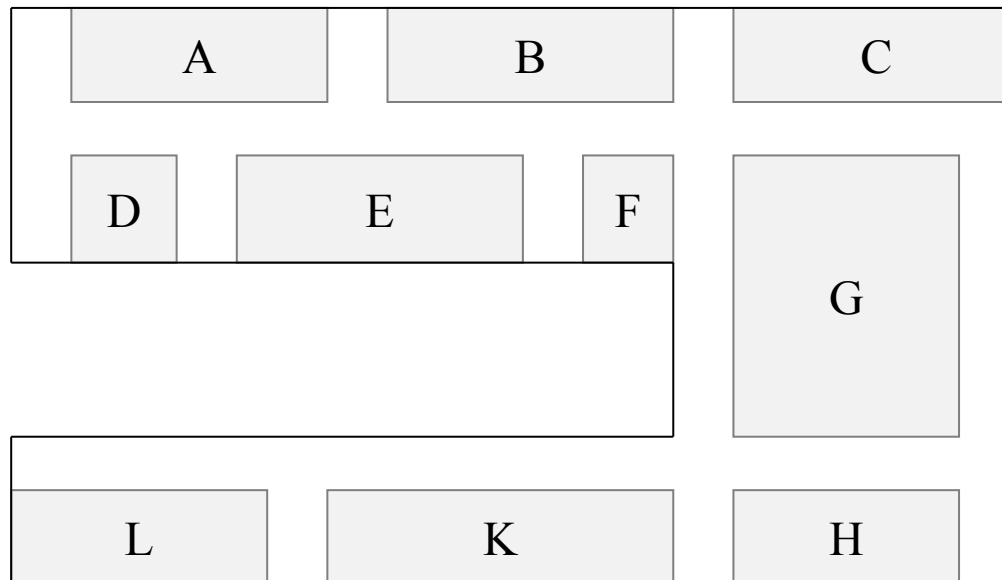
Un po' di enigmistica: una notte al museo

- Cosa riusciamo a dire su questa mappa?



Problemi (semiseri) di un ingegnere

- Si vuole dotare un museo di un sistema di telecamere per la sorveglianza in assenza di personale. Sapendo che una telecamera posta all'incrocio di due corridoi è in grado, con opportune rotazioni, di sorvegliarli entrambi, qual è il minimo numero di telecamere necessarie?

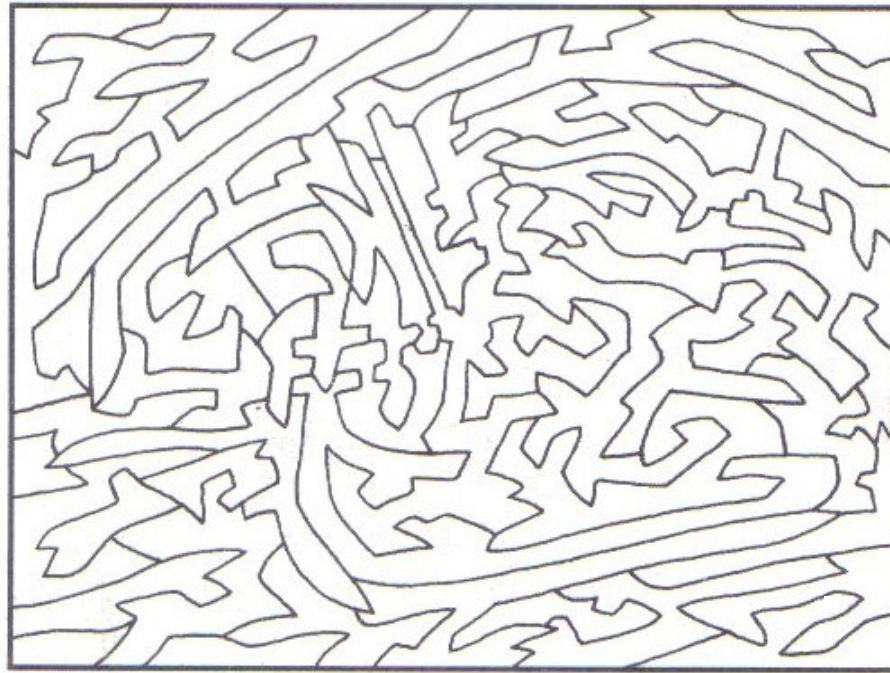


Problemi (semiseri) di un ingegnere

- Una grande potenza (...) vuole creare una grande coalizione per “sconfiggere il male”. Per avere successo però deve stare attenta a non coinvolgere stati in conflitto reciproco. Con chi si coalizza?
- In un dato gruppo di persone, come si individua la *cricca* più grande di amici? Cioè come si calcola il massimo numero di persone che non hanno bisogno di presentazione reciproca?

Problemi (semiseri) di un ingegnere

- Di solito, per evitare confusione, le regioni confinanti di una mappa hanno colori diversi. Volendo rispettare questo vincolo, qual è il minimo numero di colori necessari per colorare questa mappa?



Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

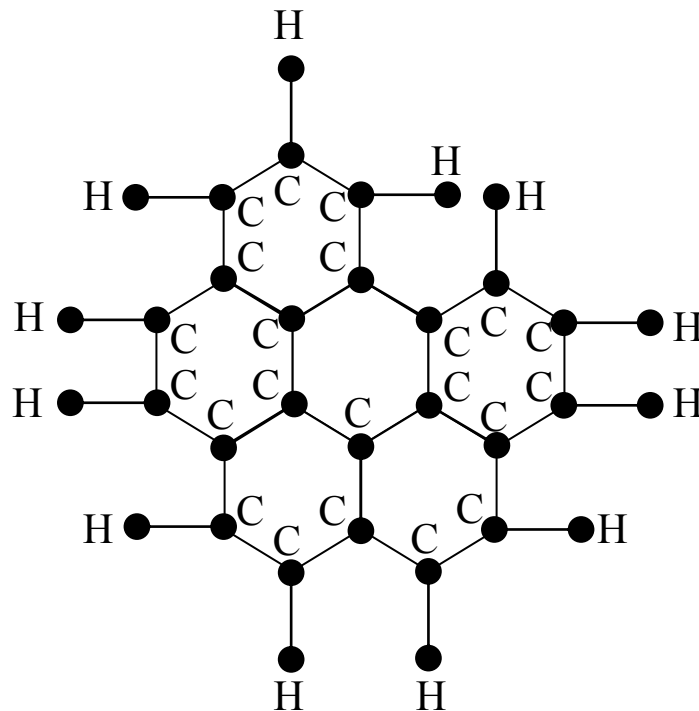
- Un manager deve assegnare un insieme di progetti a un team di ingegneri. In base alle competenze e alle compatibilità attitudinali ogni progetto deve essere svolto da un dato gruppo di ingegneri ma ogni ingegnere può eseguire un solo progetto. Qual è il massimo numero di progetti che possono essere svolti contemporaneamente?

griglia di assegnamento

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
<i>Claudio</i>	●		●	●	
<i>Gino</i>	●	●		●	●
<i>Luca</i>			●	●	
<i>Andrea</i>		●			

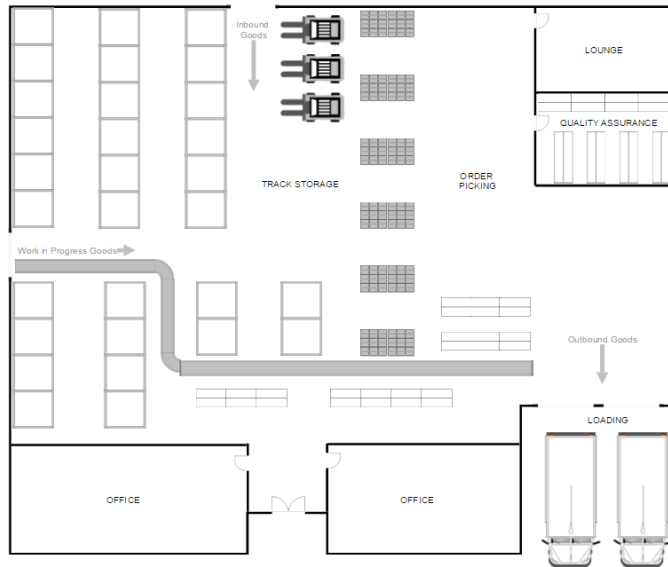
Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

- Data la seguente struttura parziale (il carbonio ha valenza 4) di una molecola di un idrocarburo, quale composto può essere sintetizzato?



Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

- **Smart factories:** Un magazzino vede operare degli *AGVs* (*automated guided vehicles*) che si muovono su tracciati prestabiliti

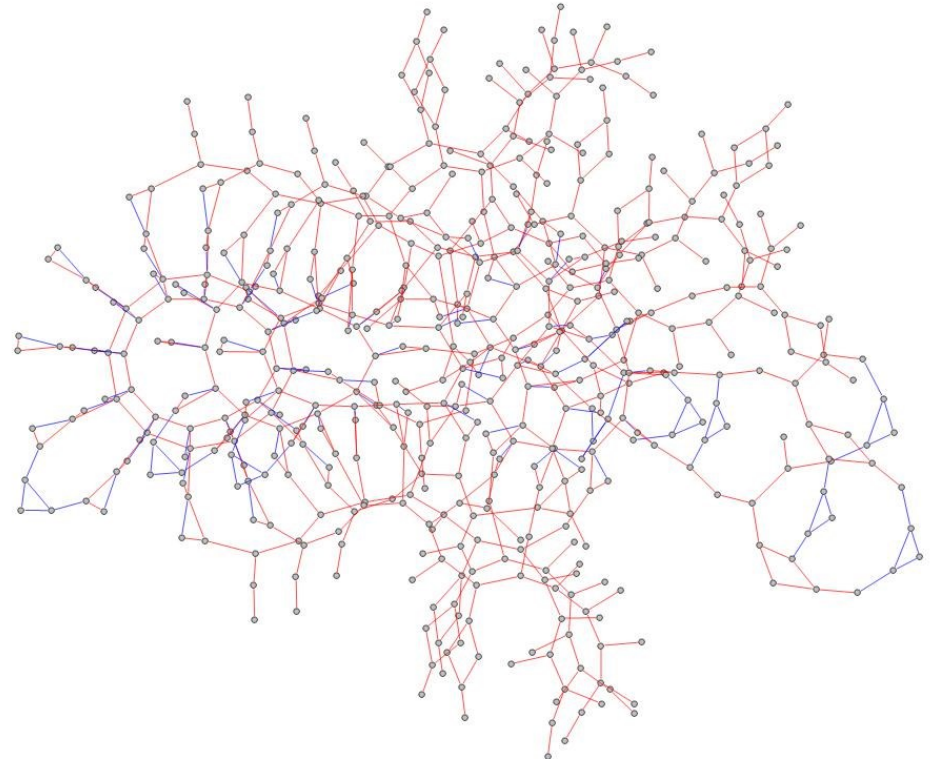


Qual è il **massimo numero di AGVs** che possono muoversi tra 2 punti dati A e B **senza alcun rischio di collisione?**

Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

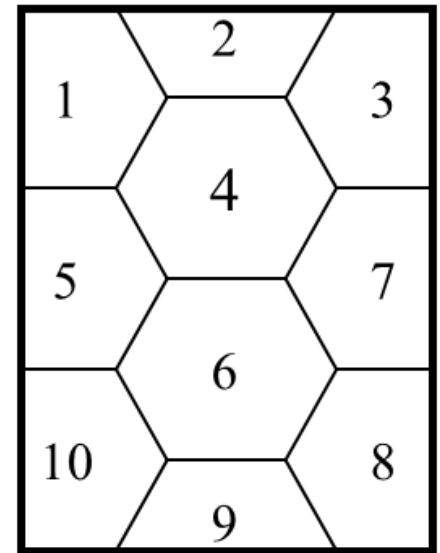
- **Social influencer**: consideriamo un *social network* in cui ogni individuo ha un'opinione su un argomento specifico. Le connessioni in **rosso** indicano **accordo** sull'argomento; quelle in **blu** indicano **disaccordo**

Qual è potenzialmente il **gruppo coeso più numeroso**? E a **quali individui** devo far cambiare **opinione** per ottenere tale gruppo?



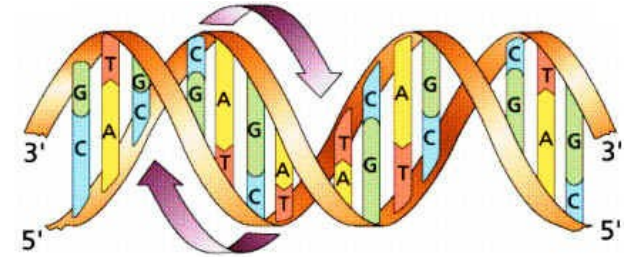
Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

- **Assegnamento di frequenze:** Qual è il minimo numero di frequenze e come devono essere assegnare alle celle di una rete di trasmissione in modo che celle adiacenti abbiano frequenze diverse (e quindi non ci siano interferenze)?



Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

- **Genome assembly problem:** Un genoma (semplificato) è una lunga stringa (milioni o anche miliardi) di *simboli* A, C, G e T



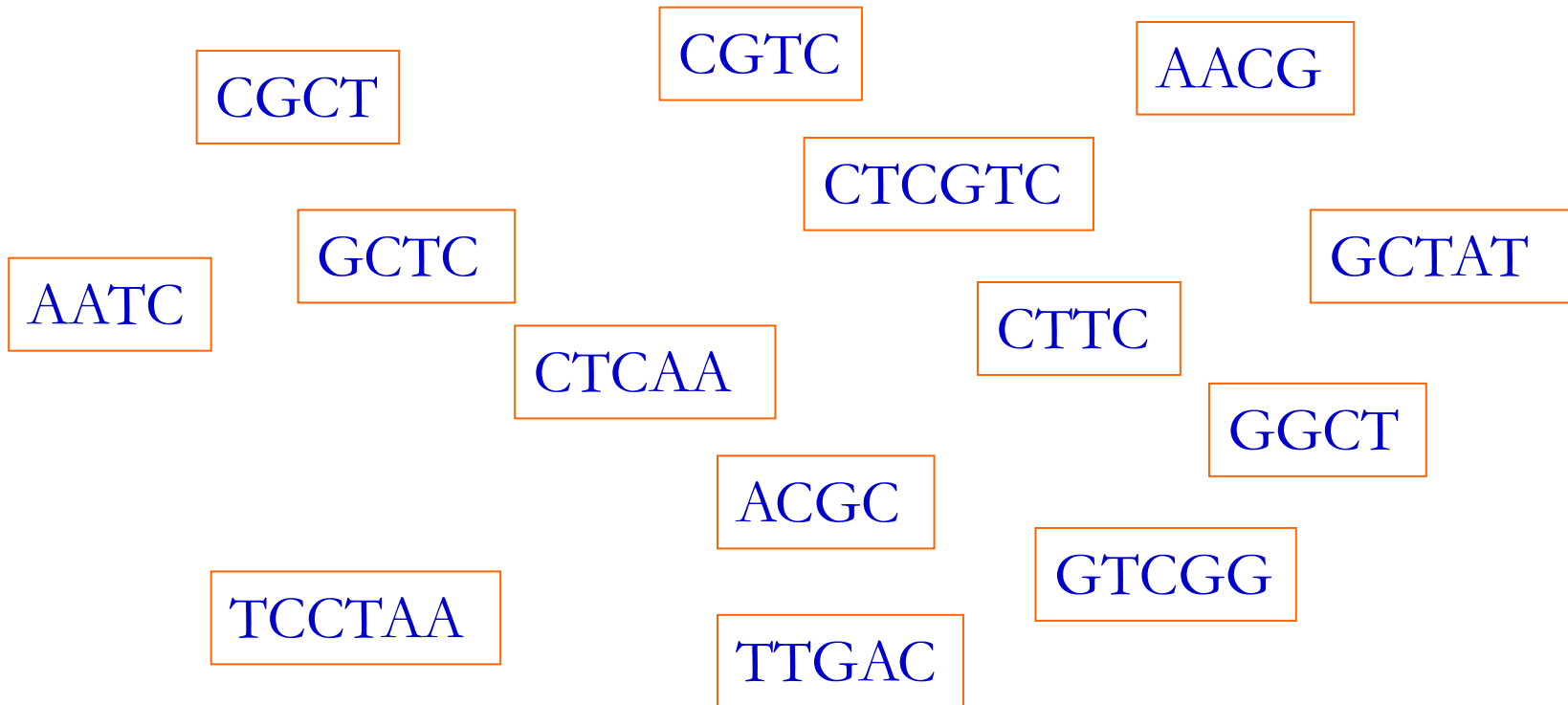
- L'intero genoma è in generale sconosciuto ma piccoli frammenti (sottostringhe) possono essere ottenuti con tecniche di sequenziamento dei geni.

- Come può essere ricostruito un genoma assemblando le sequenze disponibili?

Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

Un caso giocattolo

- Sottosequence disponibili di A, C, G e T

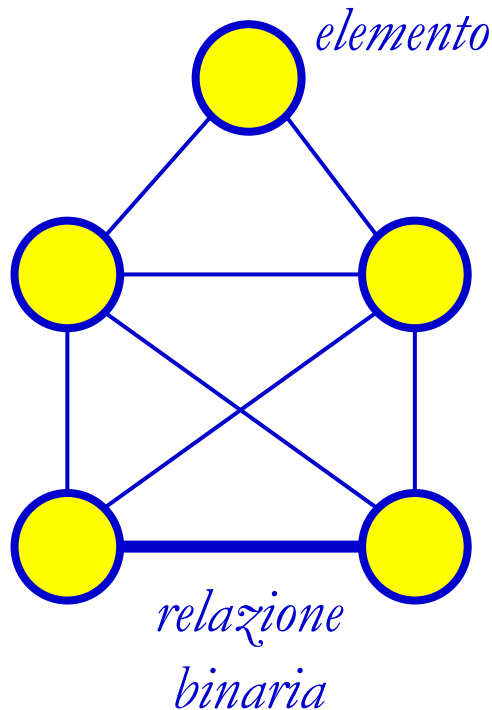


Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

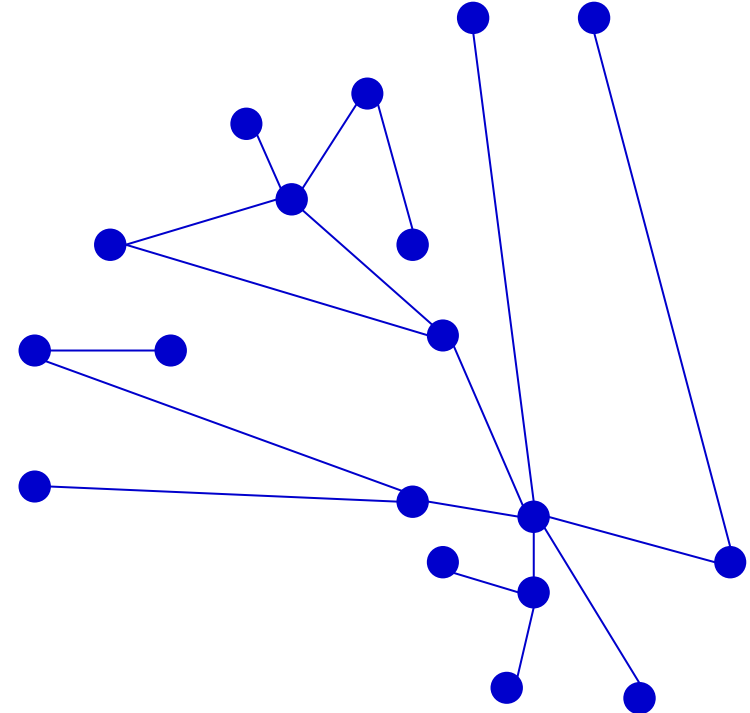
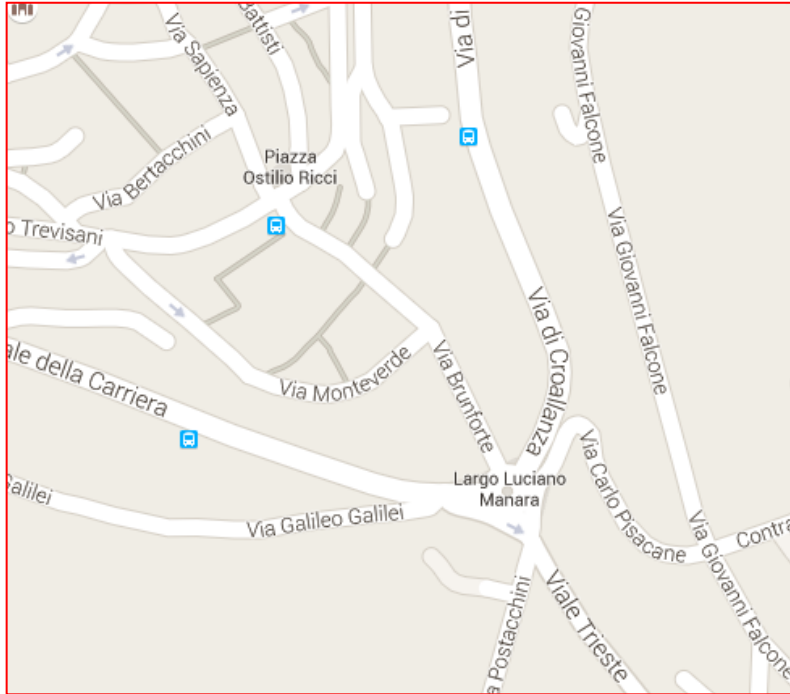
Cos'è un grafo

Un *grafo* è un formalismo (grafico) utile per **descrivere** e **rappresentare** una *relazione binaria* su una collezione finita e discreta di *elementi*.



- Rete (stradale, di calcolatori,...)
- Circuiti elettrici
- Relazioni tra persone
- Attività di progetto
- Giochi
- Automi
- Mappe
- Algoritmi e strutture dati
- ...

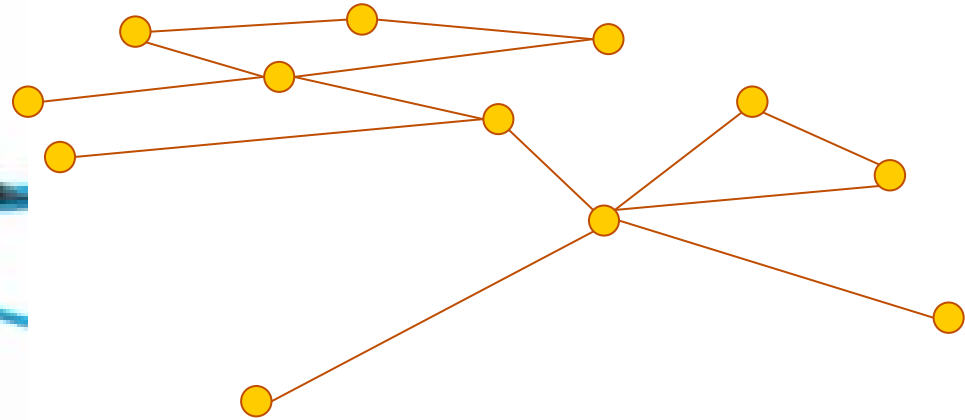
Rappresentazione di reti stradali



punti: crocevia

segmenti: strade che collegano i crocevia

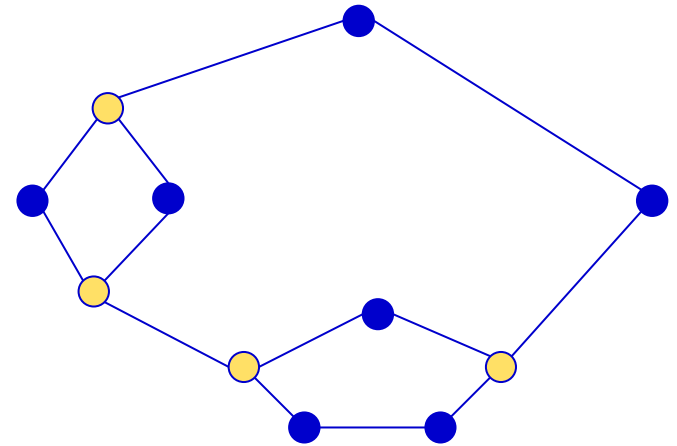
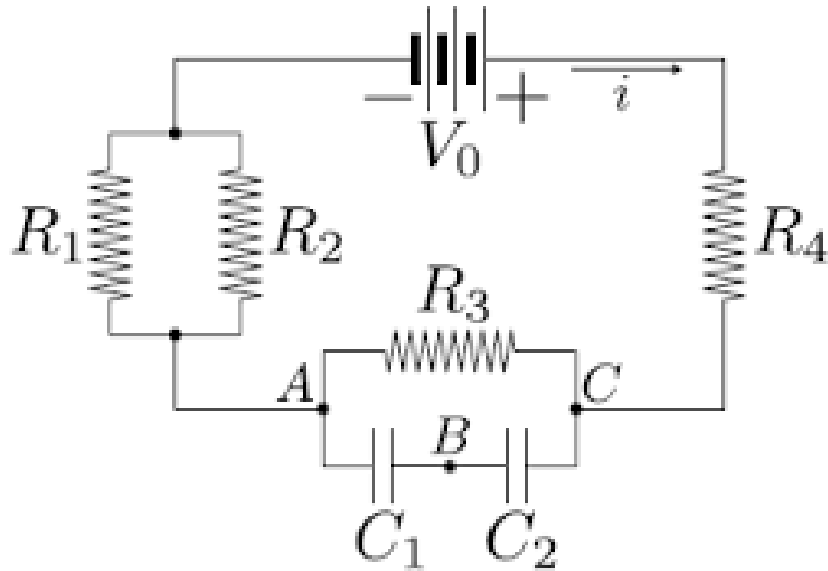
Rappresentazione di reti di calcolatori



punti: computer e server

segmenti: link e connessioni

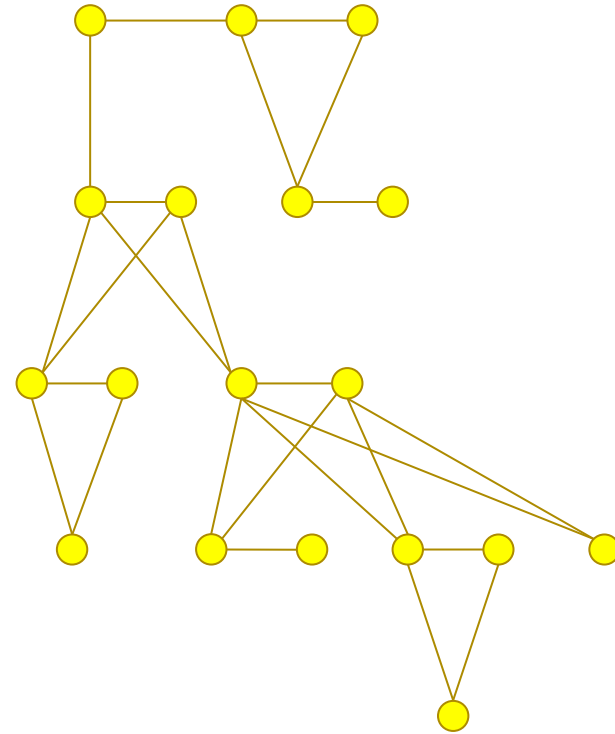
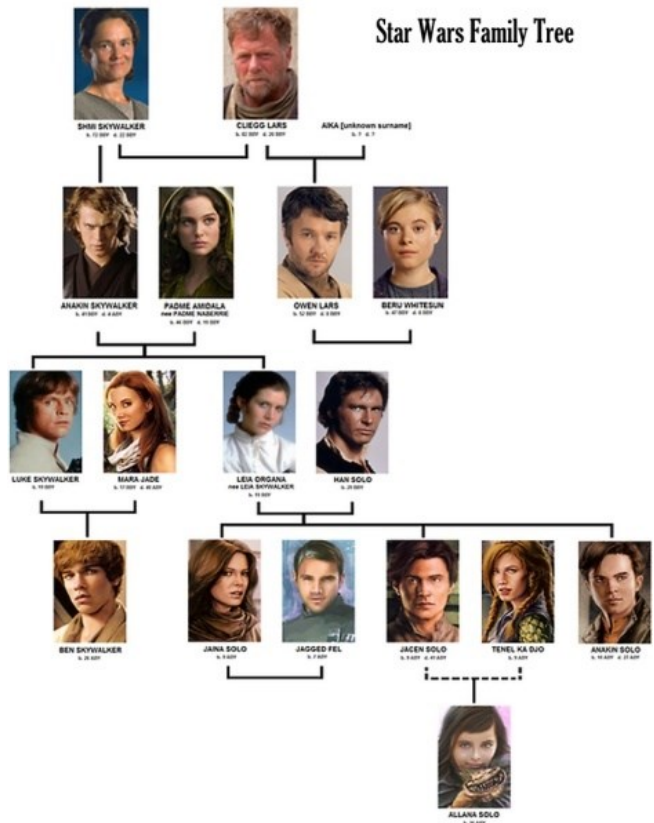
Rappresentazione di circuiti elettrici



punti: componenti elettrici / giunzioni

segmenti: collegamenti

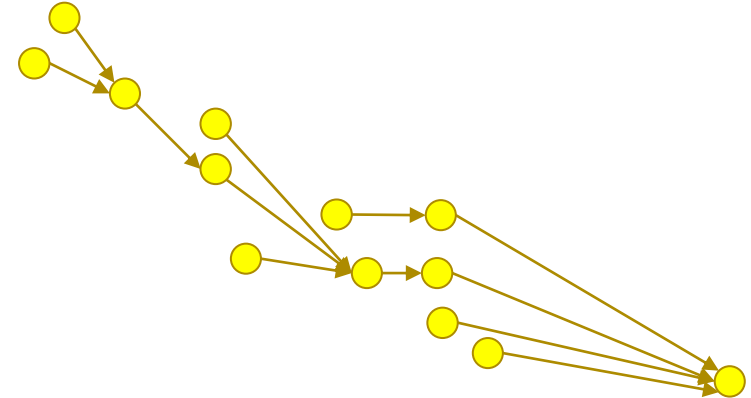
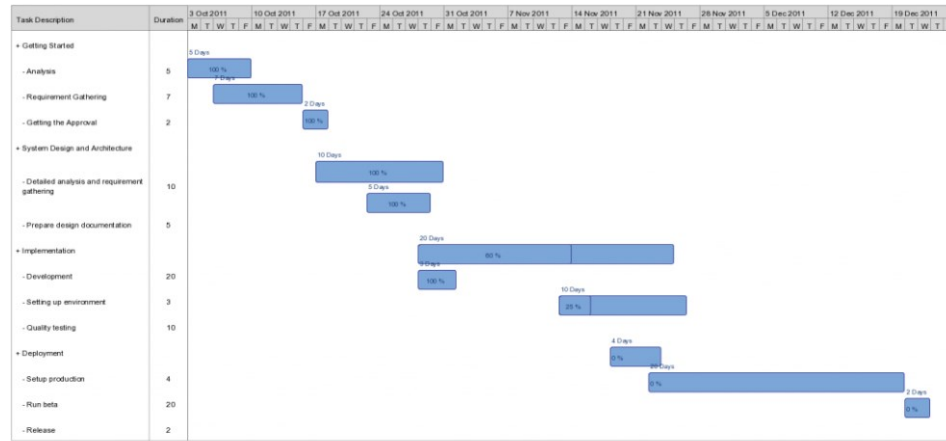
Rappresentazione di relazioni tra persone



punti: persone

segmenti: relazione (per esempio di parentela)

Rappresentazione di attività di progetto

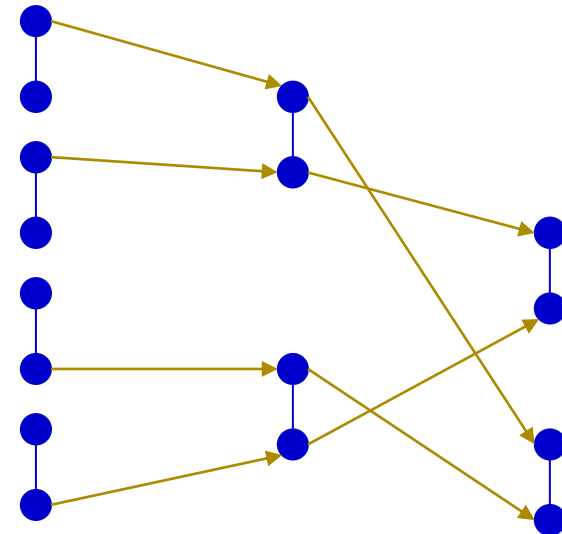


punti: attività

frecce: relazioni di precedenza

Tabellone di un torneo sportivo

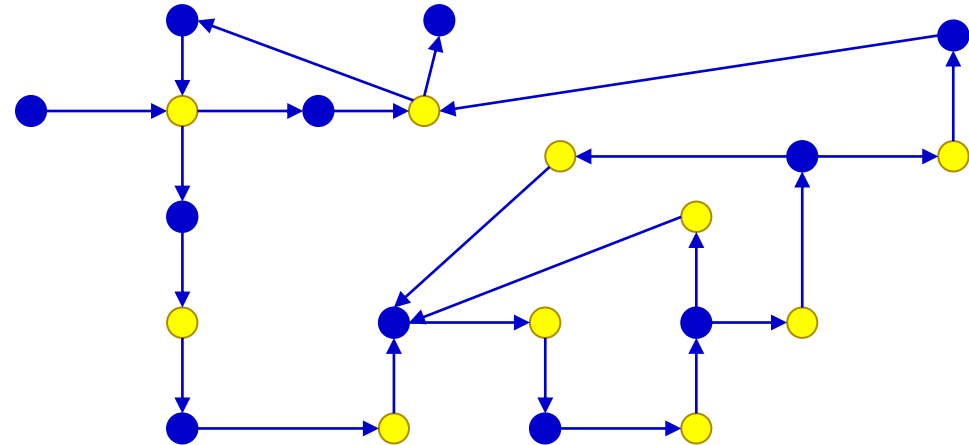
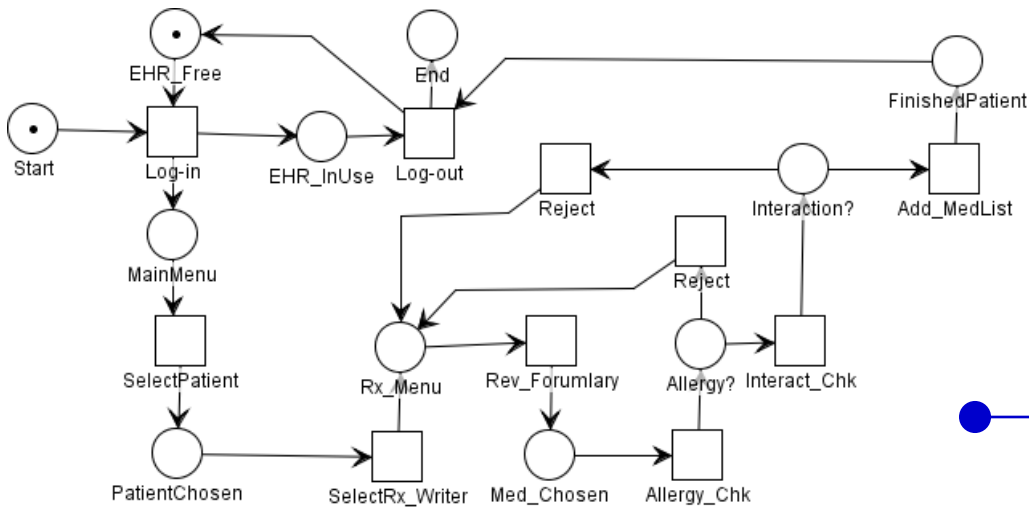
Ottavi di finale	Quarti di finale	Semifinali	Finale
24 giugno - 17:00 1A. Germania 2 2B. Svezia 0 24 giugno - 21:00 1C. Argentina 2 2D. Messico 1	30 giugno - 17:00 Germania 1 (4) Argentina 1 (2)	4 luglio - 21:00 Germania 0 Italia 2	
26 giugno - 17:00 1E. Italia 1 2F. Australia 0 26 giugno - 21:00 1G. Svizzera 0 (0) 2H. Ucraina 0 (3)	30 giugno - 21:00 Italia 3 Ucraina 0		9 luglio - 20:00 Italia 1 (5) Francia 1 (3)
25 giugno - 17:00 1B. Inghilterra 1 2A. Ecuador 0 25 giugno - 21:00 1D. Portogallo 1 2C. Paesi Bassi 0	1° luglio - 17:00 Inghilterra 0 (1) Portogallo 0 (3)	5 luglio - 21:00 Portogallo 0 Francia 1	
27 giugno - 17:00 1F. Brasile 3 2E. Ghana 0 27 giugno - 21:00 1H. Spagna 1 2G. Francia 3	1° luglio - 21:00 Brasile 0 Francia 1		Incontro per il terzo posto 8 luglio - 21:00 Germania 3 Portogallo 1



punti: squadre

segmenti/frecce: partite / passaggio di turno

Automa a stati finiti



punti: stati / azioni

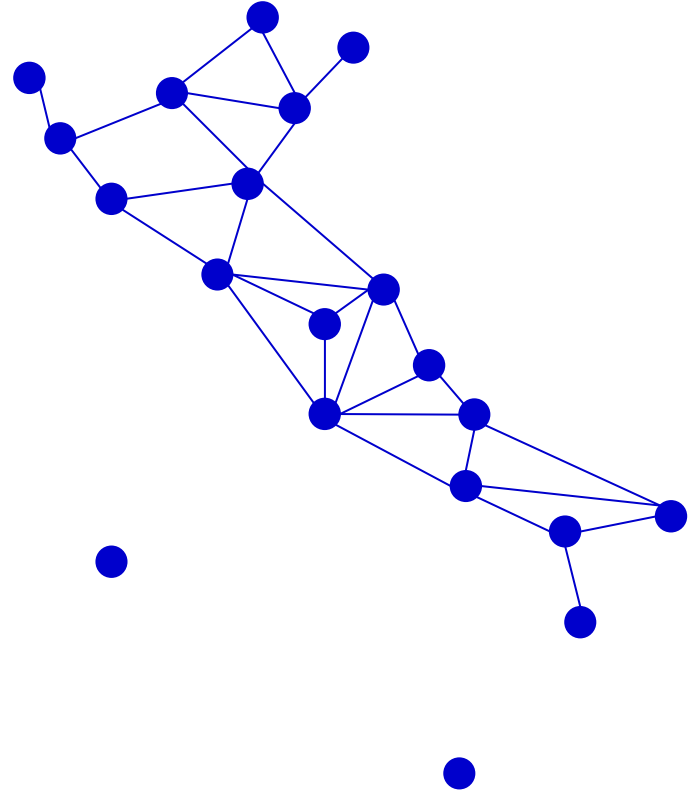
frecce: transizioni

Rappresentazione di mappe

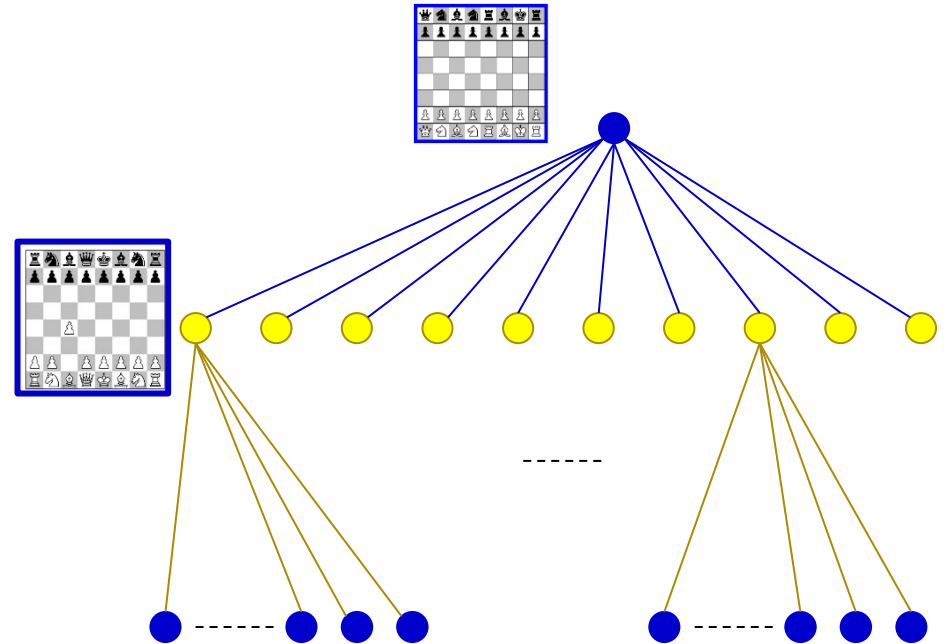


punti: regioni

segmenti: confini



Sequenza di decisioni



punti: stato della scacchiera (disposizione dei pezzi)

frecce: possibili mosse

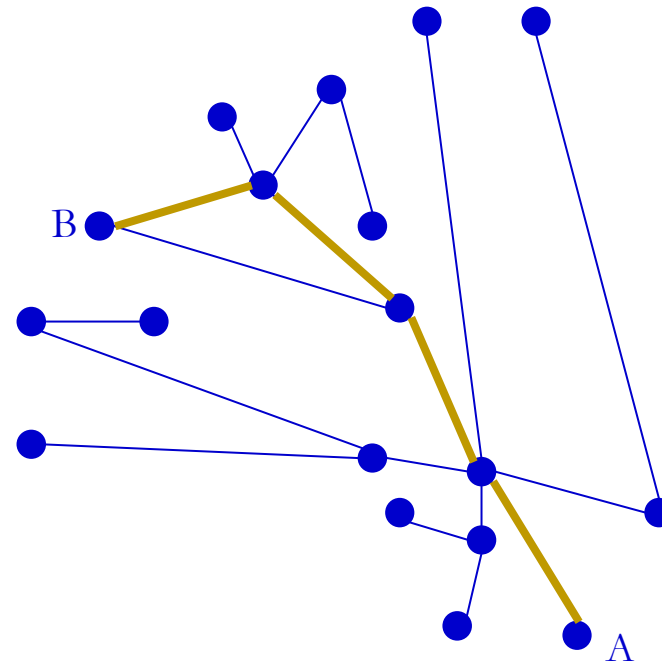
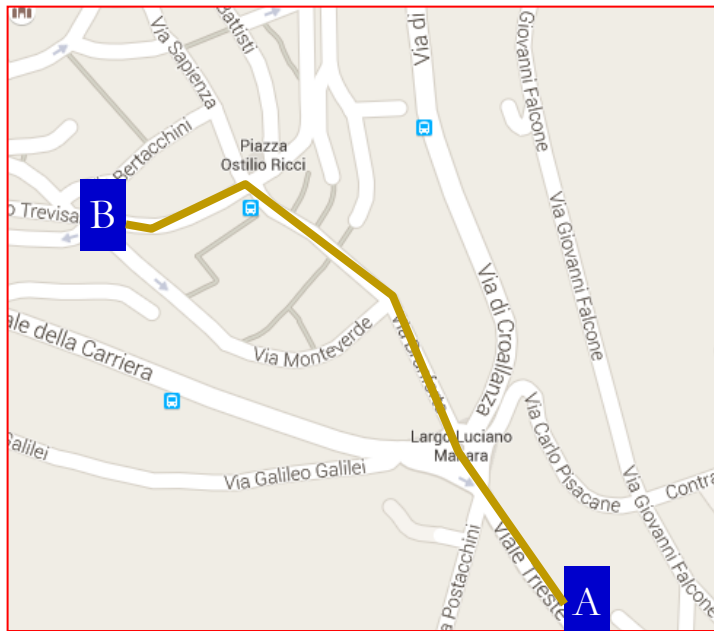
Cos'è un grafo

Un *grafo* è un formalismo (grafico) utile per **descrivere** e **rappresentare** una *relazione binaria* su una collezione finita e discreta di *elementi*.

... ma non solo!

Un grafo è un mezzo di astrazione: aiuta a **comprendere** e **studiare** la *struttura matematica* e la *complessità* di un problema.

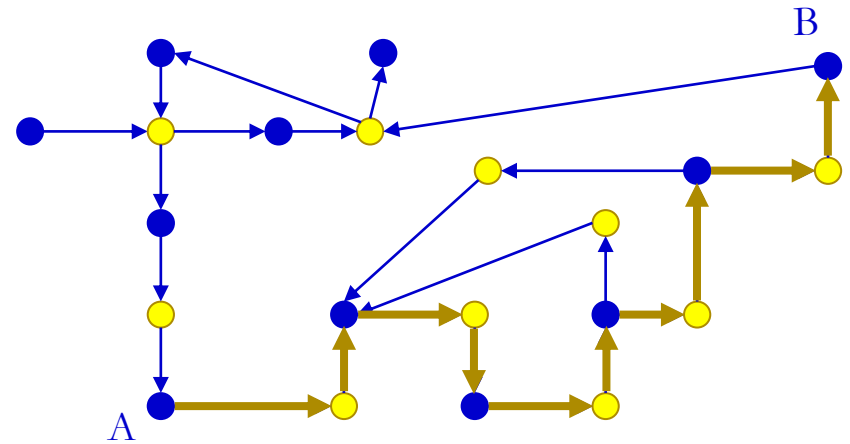
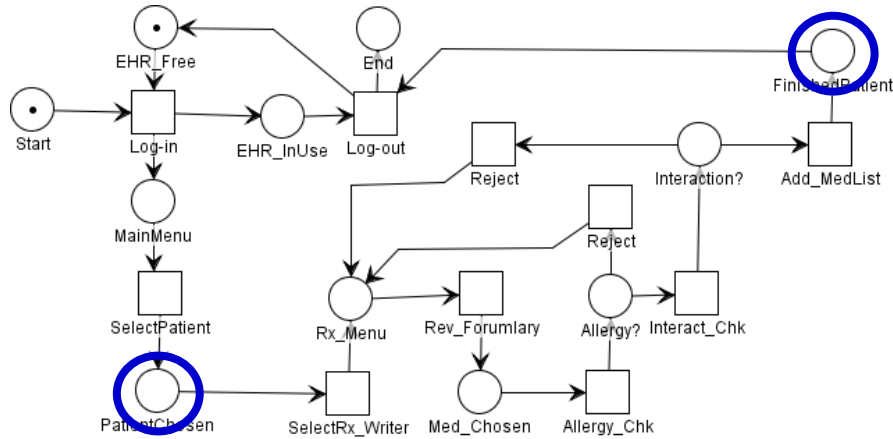
Problemi reali e problemi su grafo



Qual è la strada più breve
dall'indirizzo A all'indirizzo B?

Qual è il *percorso minimo* tra
i nodi A e B?

Problemi reali e problemi su grafo



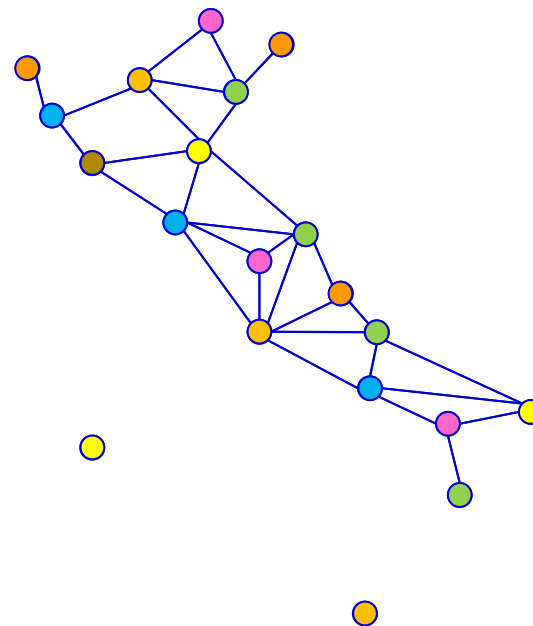
Una volta **scelto** un
paziente, riesco a
completare la visita?

Esiste un *cammino diretto* tra
i nodi **A** e **B** ?

Problemi reali e problemi su grafo



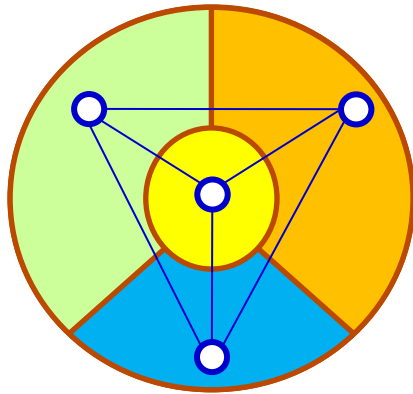
Quanti colori mi servono
per colorare una mappa
«decentemente» ?



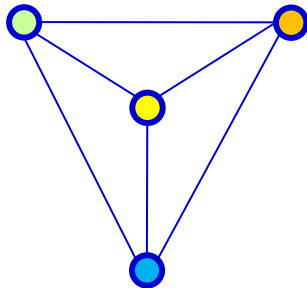
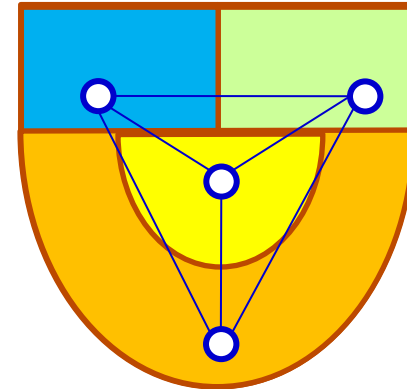
Qual è il *numero cromatico*
del grafo?

Perché la teoria dei grafi: astrazione

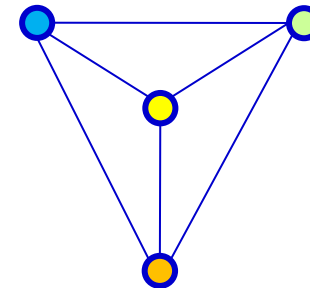
Coloriamo queste mappe



mappe **diverse...**



...ma grafi **identici**



Il problema sul grafo individua l'essenza del problema decisionale

Perché la teoria dei grafi: astrazione

... e colorare una mappa «equivale» a

- colorare imballi, manifesti, libri,...
- allocare variabili a registri di una CPU (compilatori)
- testare circuiti elettronici
- assegnare frequenze radio
- determinare tabelle orarie
- ...

Perché la teoria dei grafi

Nella teoria dei grafi, il grafo è l'oggetto di studio.

- I problemi di ottimizzazione su grafo costituiscono molto spesso l'essenza di un problema decisionale concreto.
- Lo studio delle proprietà dei grafi aiuta ad analizzare la complessità di problemi/algoritmi in casi particolari.

I padri della teoria dei grafi



L. Eulero
(1707 – 1783)



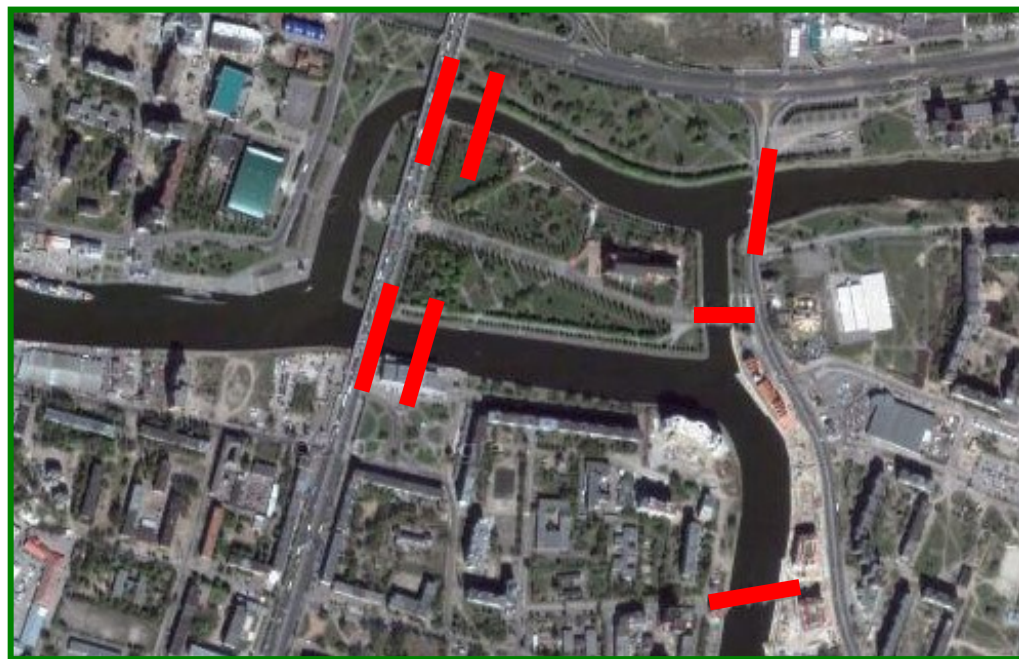
W. R. Hamilton
(1805 – 1865)

I padri della teoria dei grafi: Eulero



L. Eulero
(1707 – 1783)

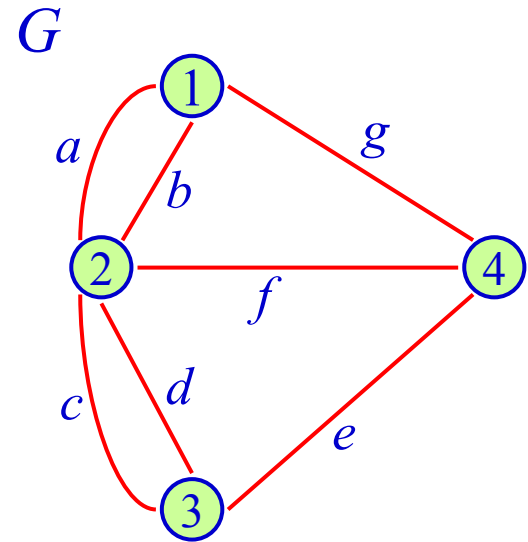
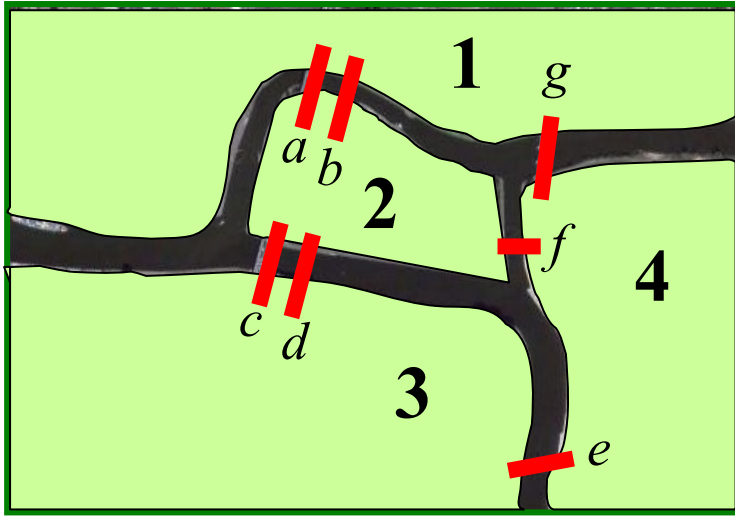
- Il problema dei **ponti di Königsberg** (1736)



Königsberg (attualmente Kaliningrad)

E' possibile fare una passeggiata attraversando **ogni** ponte **esattamente una volta** e tornare al punto di partenza?

Eulero e i ponti di Königsberg



Il grafo G ammette un *ciclo* che attraversa
ogni arco esattamente una volta?

Hamilton e l'*icosian* game

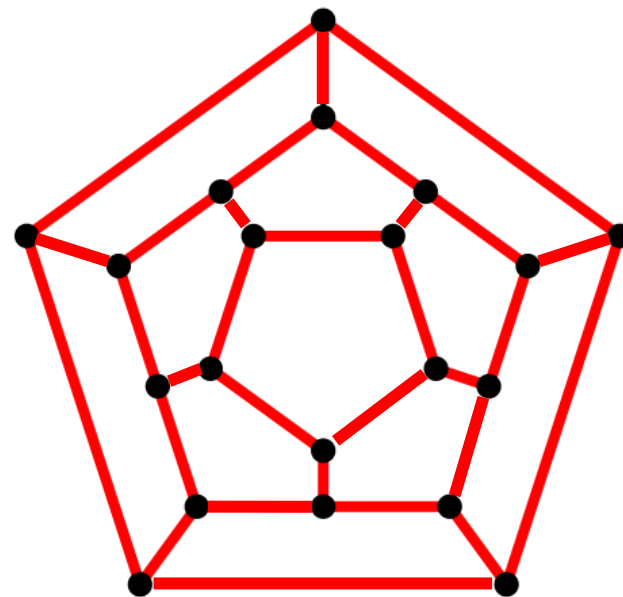
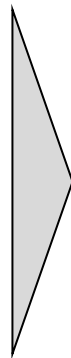
► Icosian game ([app per Android](#)):



W. R. Hamilton
(1805 – 1865)

E' possibile, passando per gli spigoli, toccare tutti i vertici di un dodecaedro esattamente una volta?

Hamilton e l'*icosian* game



Il grafo G ammette un *ciclo* che tocca
ogni nodo esattamente una volta?

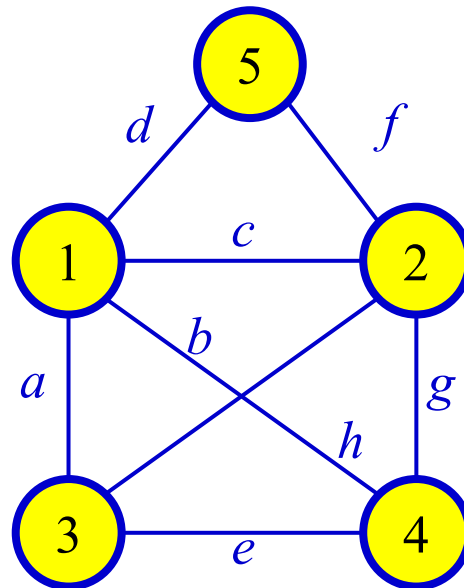
Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

Grafi non orientati (o simmetrici)

Un **grafo** $G = (V, E)$ è una coppia di insiemi finiti

- **nodi** o (**vertici**) $V = \{1, 2, \dots\}$
- **archi** o (**spigoli**) $E = \{a, b, \dots\} \subseteq V \times V$



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

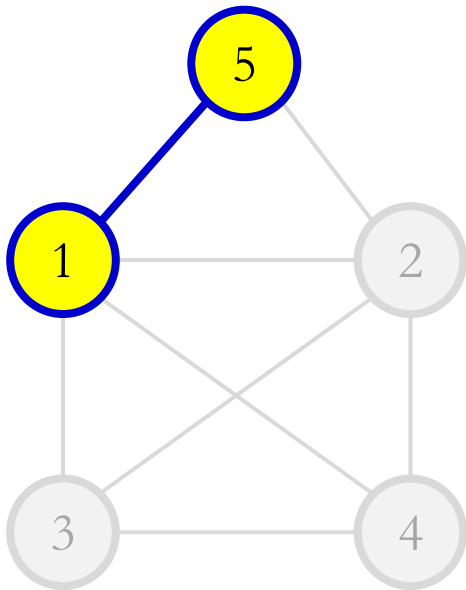
$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$a = \{1, 3\} \equiv \{3, 1\} = a$$

Definizioni: adiacenza e incidenza

I nodi $u, v \in V$ sono detti **adiacenti** se sono collegati da un arco.

L'arco $\{u, v\}$ si dice **incidente** sul nodo u e sul nodo v



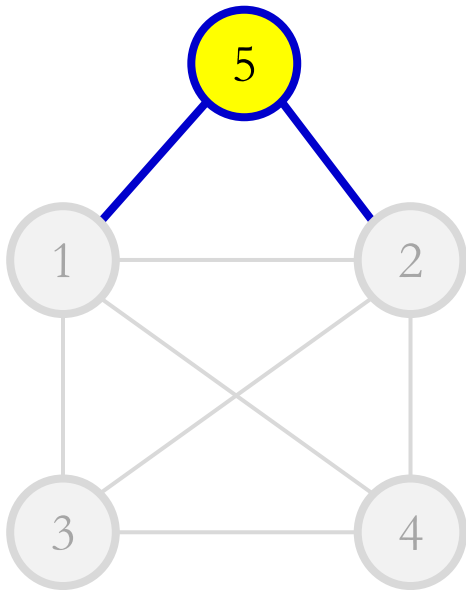
1 e 5 sono nodi adiacenti.

L'arco $\{1, 5\}$ è incidente sui nodi 1 e 2

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow u, v \text{ nodi adiacenti}$$

Definizioni: adiacenza e incidenza

Gli archi $e, f \in E$ sono detti **adiacenti** (o **consecutivi**) se sono incidenti su un nodo comune

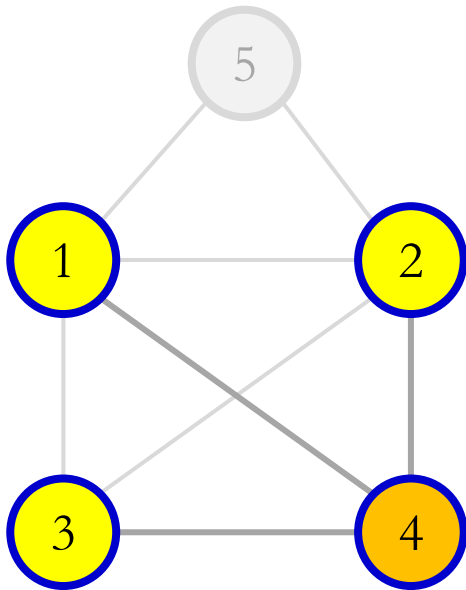


Gli archi $\{1,5\}$ e $\{2,5\}$ sono adiacenti perché entrambi incidenti sul nodo 5

$\{u,v\}, \{w,v\}$ sono **archi adiacenti**

Definizioni: intorno e stella

L' **intorno** $N(v)$ di un nodo v è l'insieme di nodi **adiacenti** a v



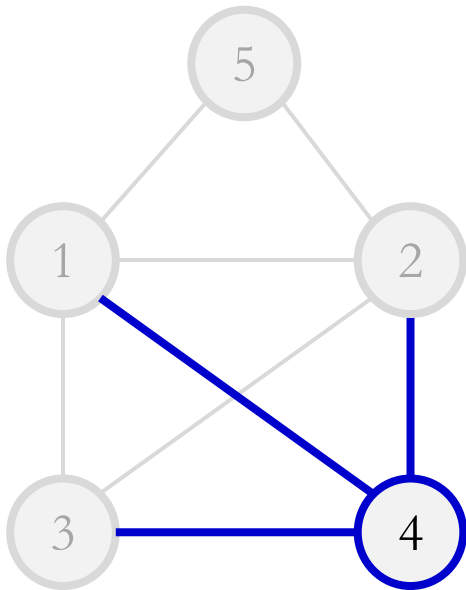
$$N(4) = \{1, 2, 3\}$$

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

Definizioni: intorno e stella

La **stella** $\delta(v)$ di un nodo v è l'insieme di archi incidenti su v

Il **grado** $d(v)$ di un nodo v è la **cardinalità** di $d(v)$



$$\delta(4) = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

$$d(4) = |\delta(4)| = 3$$

$$\delta(v) = \{\{u, v\} \in E\}$$

Grafi: proprietà elementari

Sia $G = (V, E)$ un grafo simmetrico con n nodi e m archi

- $d(v) \leq n - 1 \quad \forall v \in V$

- $m \leq \frac{n(n - 1)}{2}$

- $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ (la somma dei gradi è pari)

Grafi: proprietà elementari

...

In ogni grafo G esistono sempre almeno 2 nodi che hanno lo stesso grado.

Se G ha n nodi (ed è *connesso*), si ha $1 \leq d(v) \leq n - 1, \forall v \in V$.

n interi (i gradi dei nodi) assumono valori compresi tra 1 e $n - 1$.

Ciò implica che almeno 2 interi coincidono.

Se G non è *connesso*, il ragionamento vale per ogni *comp. connessa*.

Grafi: proprietà elementari

...

Ogni grafo G ha sempre un numero
pari di nodi di **grado dispari**

$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ è pari, e un numero pari non si può ottenere sommando un numero dispari di numeri dispari.

Enigmistica nello sport

...

- Un torneo di calcio è formato da due gironi (A e B) ognuno composto da 13 squadre. Ogni squadra deve disputare 14 partite, di cui 11 con squadre del proprio girone e 3 con squadre dell'altro girone. Due squadre non si possono incontrare più di una volta. Sapreste definire un calendario?



Elementare! Non esistono grafi con un numero dispari di nodi di grado dispari!

Un po' di (social) enigmistica

...

- In un gruppo **arbitrario** di persone qual è la probabilità che ce ne siano due che conoscono lo stesso numero di persone all'interno del gruppo ?



Elementare! La probabilità è 1 perchè **ogni** grafo ha almeno 2 nodi con lo stesso grado!

... scaldiamo i muscoli

...

- **[Problema]** Data una popolazione (per esempio quella italiana), si vuole conoscere il rapporto R tra il numero medio $E(P_M)$ di partners femminili che gli uomini hanno avuto in un dato periodo di tempo (per esempio negli ultimi 10 anni) e il numero medio $E(P_F)$ di partners maschili che le donne hanno avuto nello stesso periodo di tempo.

$$R = \frac{E(P_M)}{E(P_F)}$$

- La letteratura popolare suggerisce che mediamente gli uomini hanno più partners delle donne (harem, poligamia,...)

$$R > 1$$

... scaldiamo i muscoli

...

Indagini statistiche riportano che in media gli uomini eterosessuali hanno avuto più partners delle donne eterosessuali

- [Australian survey](#) (20.000 persone, 5 anni):
uomini 3.9 partners, donne 1.9 partners

$$R = \frac{3.9}{1.9} = 2.05$$

- [Chicago University survey](#) (2500 persone):
gli uomini hanno il 74% in più di partners rispetto alle donne, vedi [“The soul of social organization of sexuality: sexual practices in the US”](#)

$$R = 1.74$$

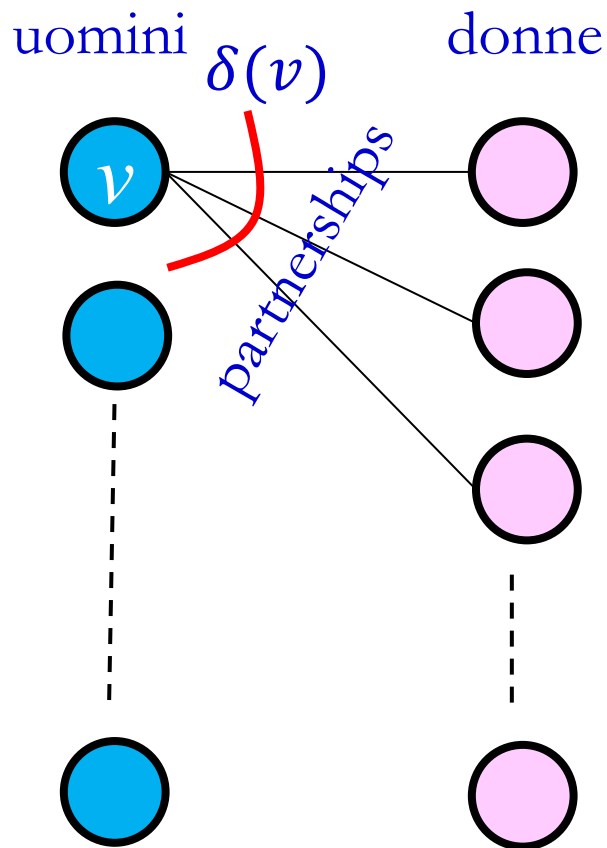
- [ABC news survey](#) (1500 persone):
gli uomini hanno 20 partners e le donne 6.
ABC news afferma di avere un margine di errore del 2.5%

$$R = \frac{20}{6} = 3.33$$

[Problema] chi ha ragione?

... scaldiamo i muscoli

...



$$E(P_M) = \frac{\sum_{v \in V_M} d(v)}{|V_M|} = \frac{|E|}{|V_M|}$$

$$E(P_F) = \frac{\sum_{v \in V_F} d(v)}{|V_F|} = \frac{|E|}{|V_F|}$$



$$R = \frac{E(P_M)}{E(P_F)} = \frac{|V_F|}{|V_M|}$$

Australia: $R = 1.015$

Usa: $R = 1.041$

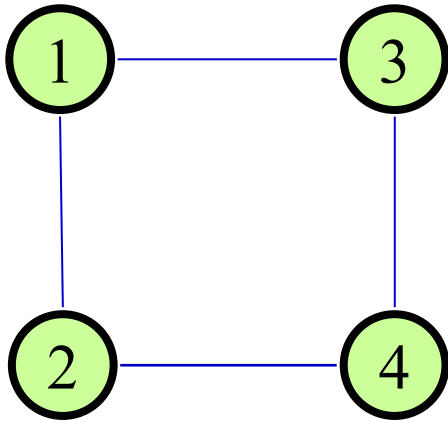
Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

Grafi diversi o uguali?

Questi 2 grafi sono lo stesso grafo ?

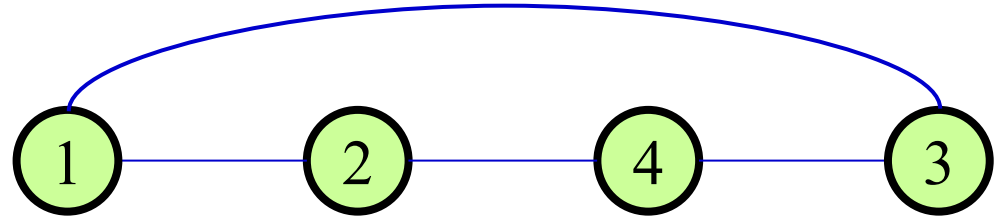
$G = (V, E)$



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\}$$

$H = \{V', E'\}$



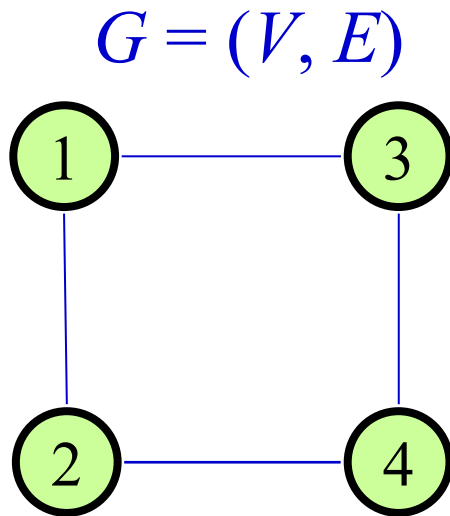
$$V' = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E' = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\}$$

Stesso grafo ma disegnato (o embedded nel piano) diversamente

Grafi diversi o uguali?

Questi 2 grafi sono lo stesso grafo ?



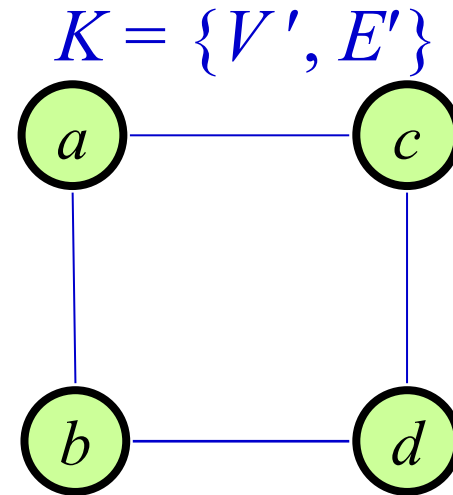
$V \mapsto V'$

$1 \mapsto a$

$2 \mapsto b$

$3 \mapsto c$

$4 \mapsto d$

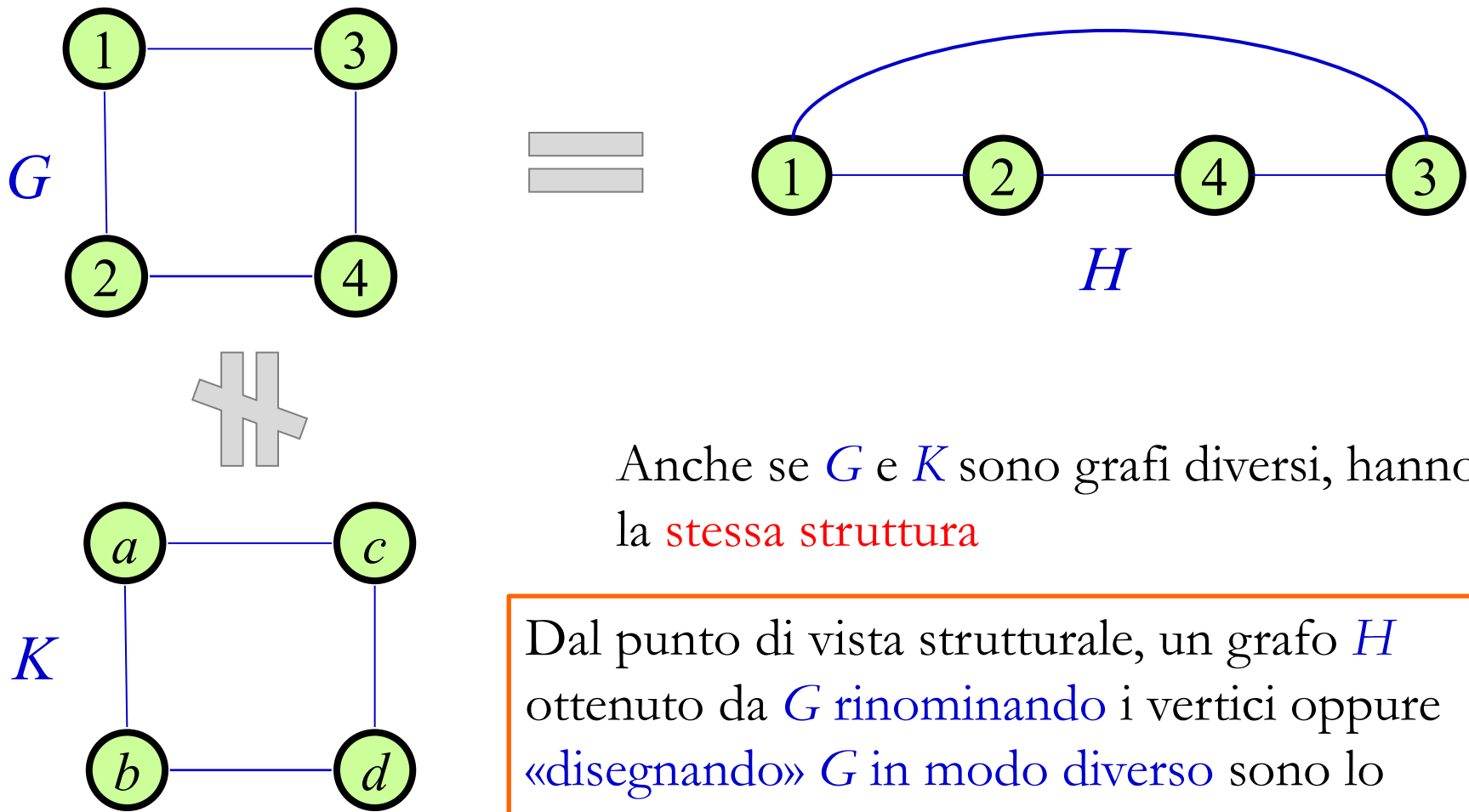


$E = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,3\}\}$

$E' = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,c\}\}$

Grafi diversi (insieme di vertici diversi) ma stessa struttura

Grafi diversi o uguali?



Isomorfismi

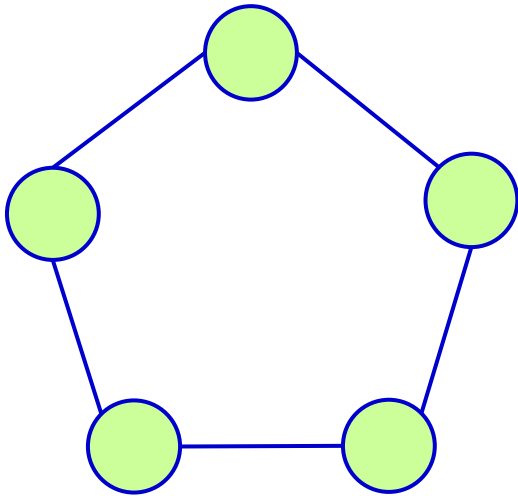
[Definizione] Due grafi $H = (\mathcal{W}, F)$ e $G = (\mathcal{V}, E)$ sono detti **isomorfi** ($H \cong G$) se esiste una biiezione $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ tale che

$$\{u, v\} \in F \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E$$

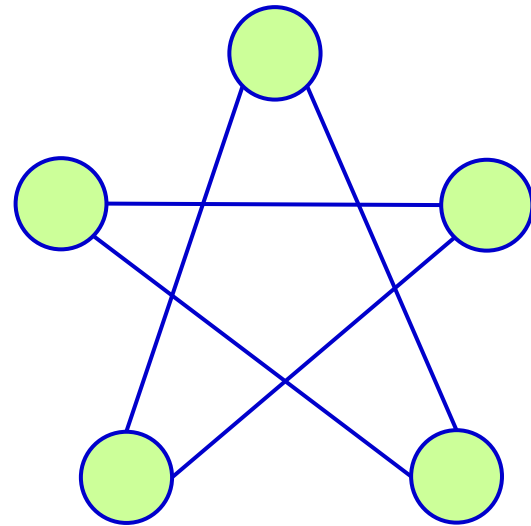
In altri termini, H è **isomorfo** a G se esiste una «etichettatura» dei nodi di H e G che definisce esattamente lo stesso insieme di archi

Grafi isomorfi, esempio

H e G sono isomorfi?



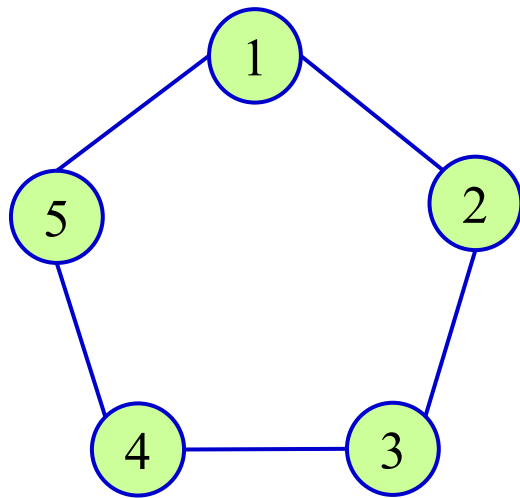
H



G

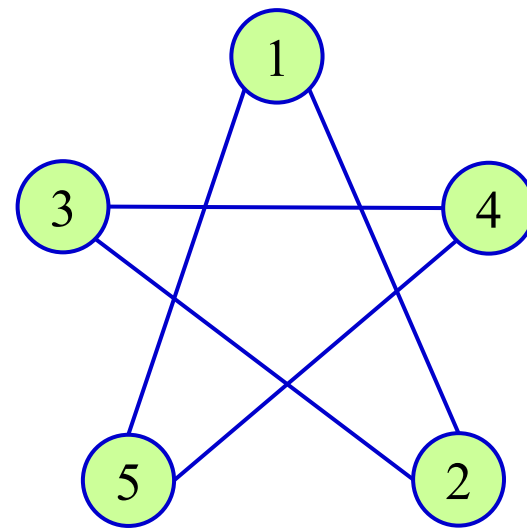
Grafi isomorfi, esempio

...



H

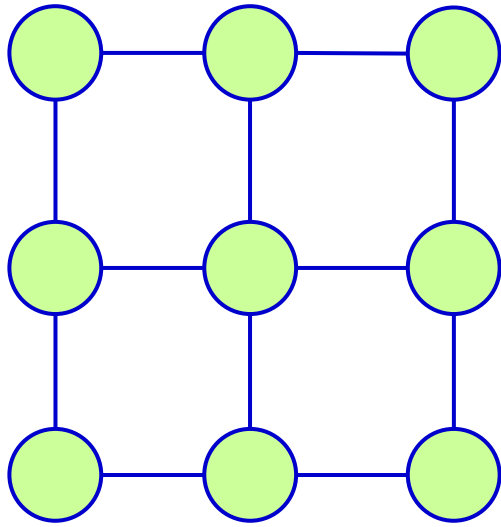
\cong



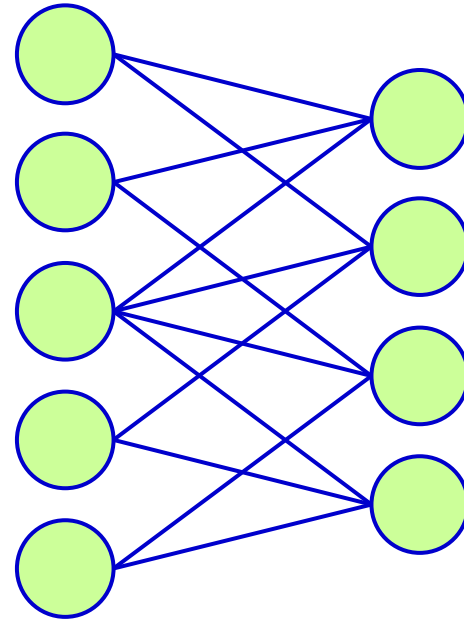
G

Grafi isomorfi, esempio

H e G sono isomorfi?



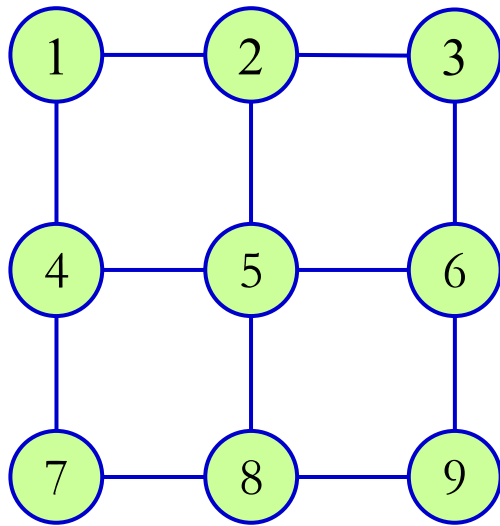
H



G

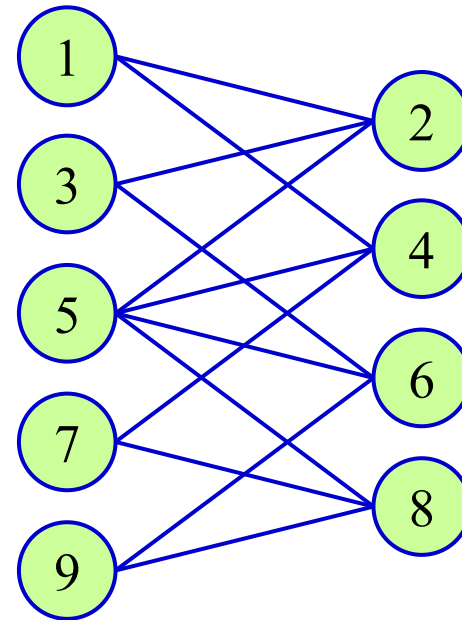
Grafi isomorfi, esempio

...



H

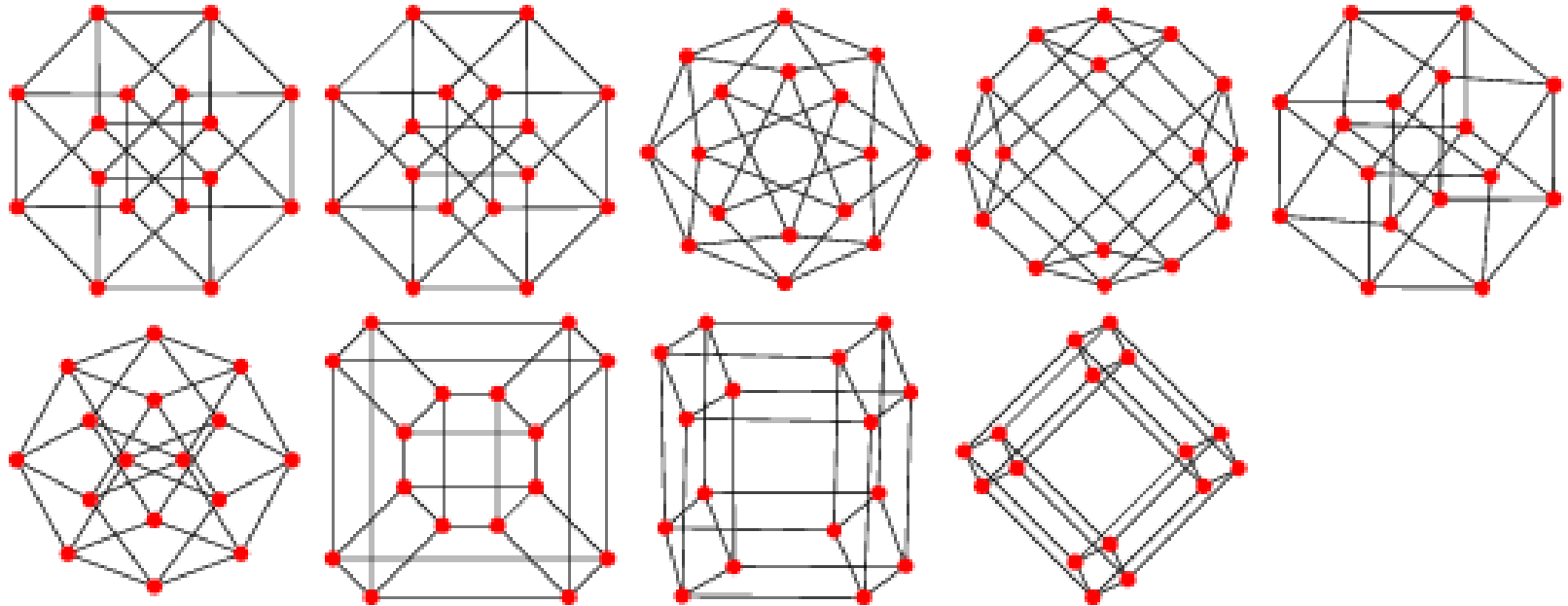
\cong



G

Isomorfismi

Il *Tesseract*



grafi **isomorfi** rappresentano la stessa relazione
(quindi sono **equivalenti** dal punto di vista matematico).

Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

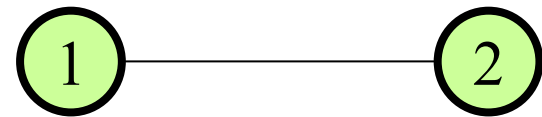
Grafo completo

Un grafo con n vertici si dice **completo** (e si indica con K_n) se ha un arco per ogni coppia di nodi. $K_n = (V, (V \times V))$

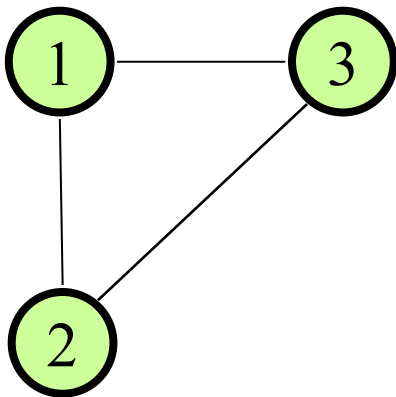
K_1



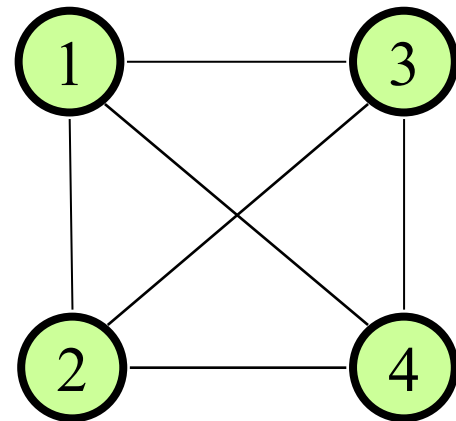
K_2



K_3



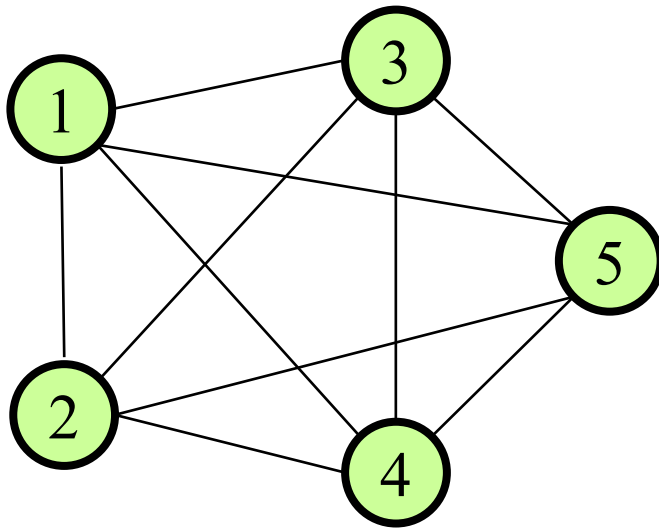
K_4



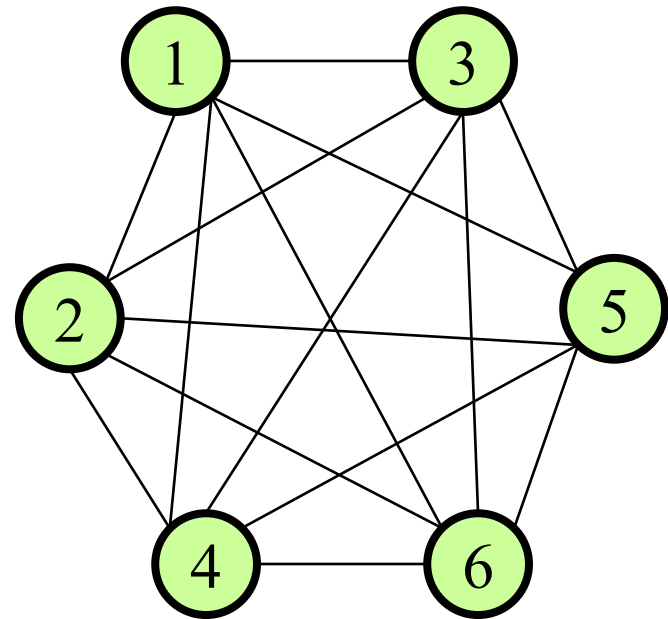
Grafo completo

Un grafo con n vertici si dice **completo** (e si indica con K_n) se ha un arco per ogni coppia di nodi. $K_n = (V, (V \times V))$

K_5

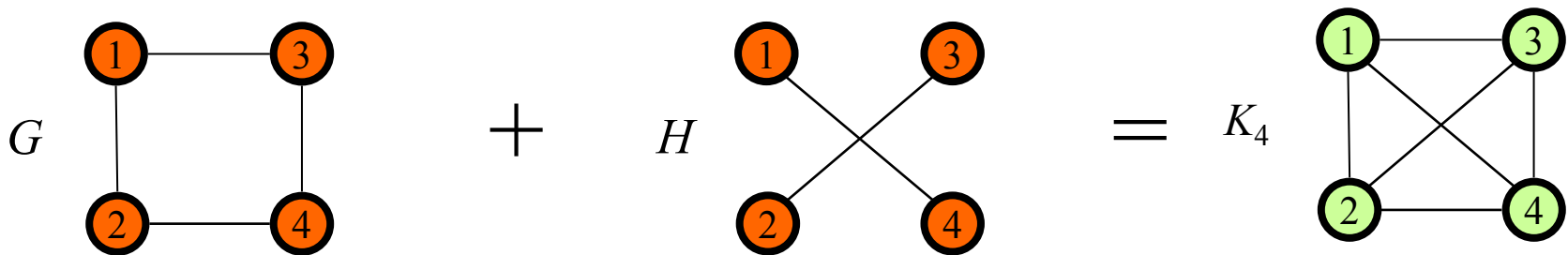


K_6



Grafo complemento, grafo vuoto

Un grafo H è il **complemento** di un grafo G se ha gli stessi vertici di G e solo gli archi che mancano a G per renderlo completo.



$H = (V, (V \times V) \setminus E)$ è il complemento di $G = (V, E)$

Il complemento \underline{K} di un grafo completo si dice grafo **vuoto**.

$$\underline{K} = (V, \emptyset)$$

Percorso

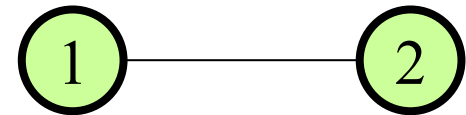
Un **percorso** P è un grafo costituito da una sequenza di archi (o nodi) **adiacenti**. Il **primo** e **ultimo** nodo del percorso si chiamano **estremi**. La **lunghezza** $l(P)$ di P è data dal numero di archi che lo compongono.

$$P_0 \equiv K_1$$



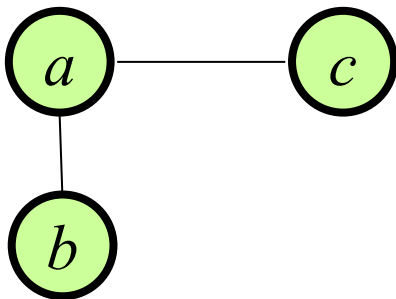
$$l(P_0) = 0$$

$$P_1 \equiv K_2$$



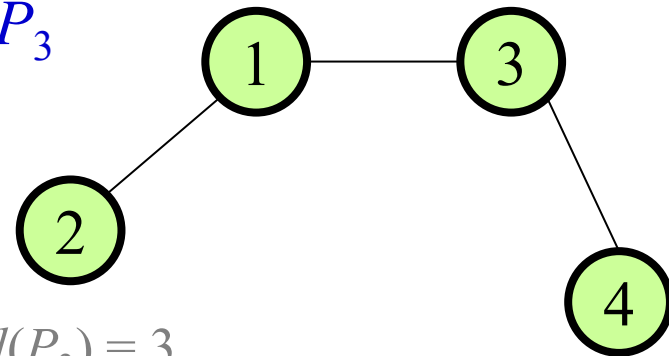
$$l(P_1) = 1$$

$$P_2$$



$$l(P_2) = 2$$

$$P_3$$

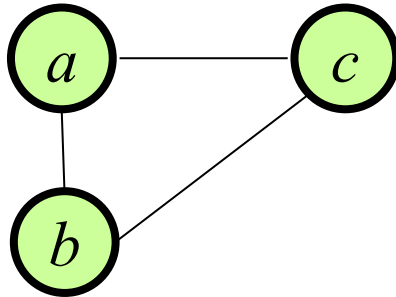


$$l(P_3) = 3$$

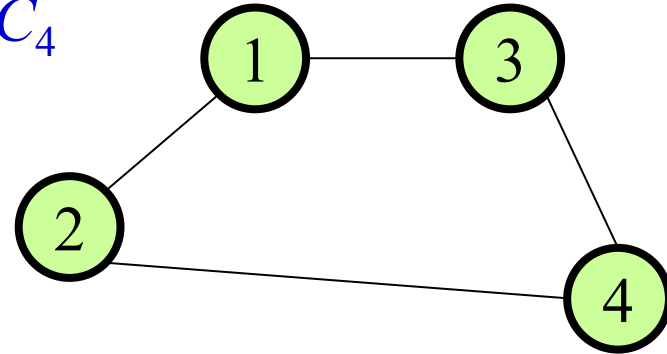
Ciclo

Un **ciclo** C (o **percorso chiuso**) è un **percorso** P con estremi coincidenti.

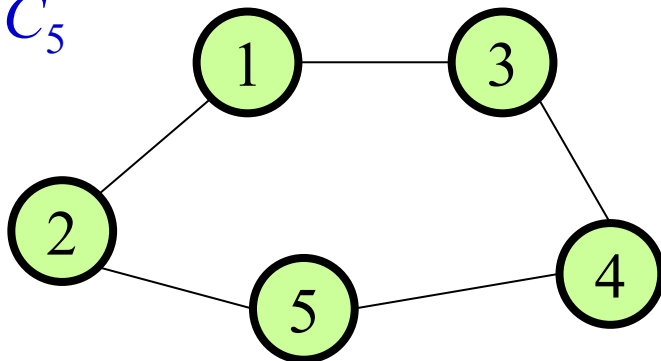
$C_3 \equiv K_3$



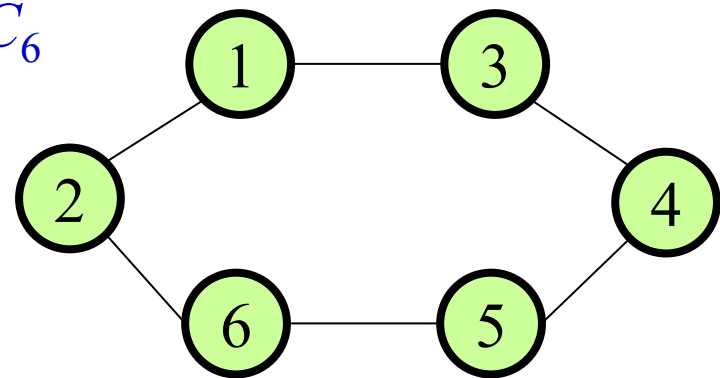
C_4



C_5

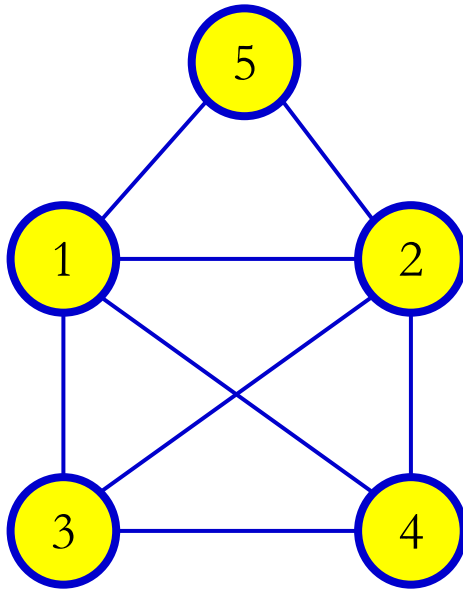


C_6

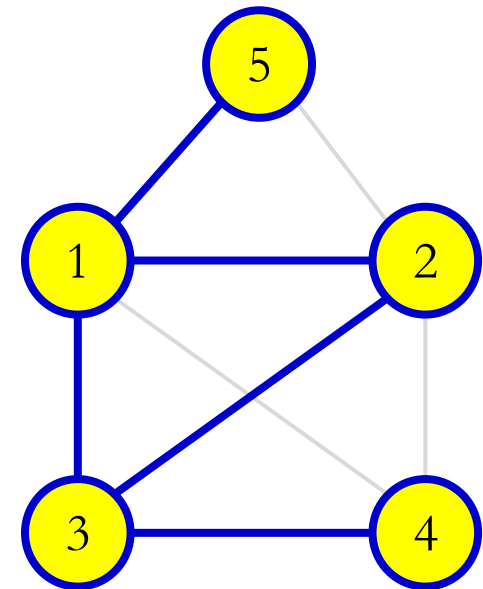


Grafo parziale

$$G = (V, E)$$



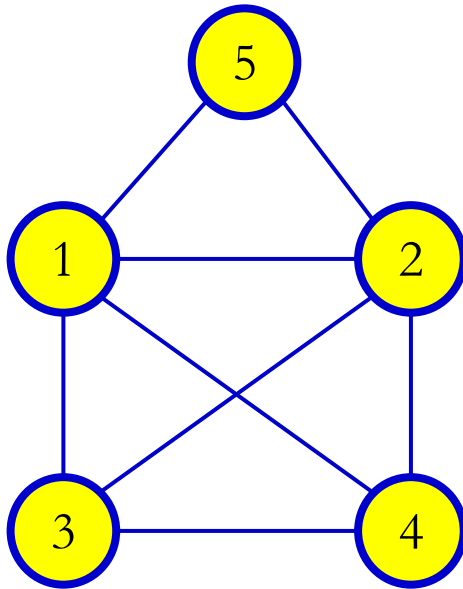
$$H = (V, F) \text{ con } F \subset E$$



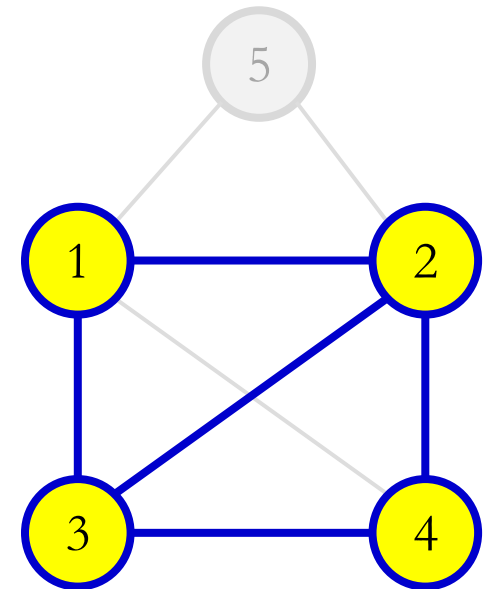
H è un **grafo parziale** di G se ha gli **stessi nodi** di G e solo una **parte degli archi**.

Sottografo

$$G = (V, E)$$



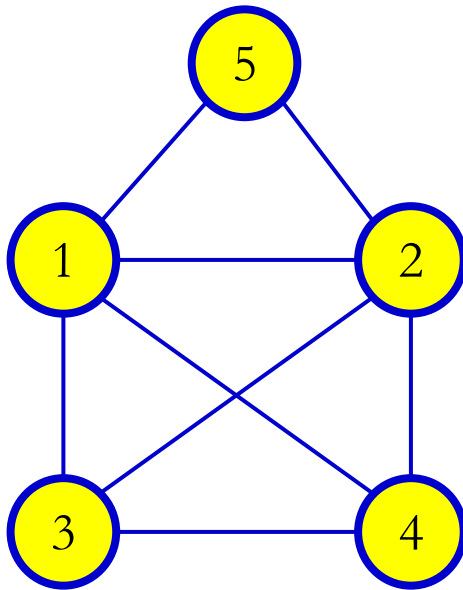
$$H = (W, F) \text{ con } W \subset V \text{ e } F \subset E$$



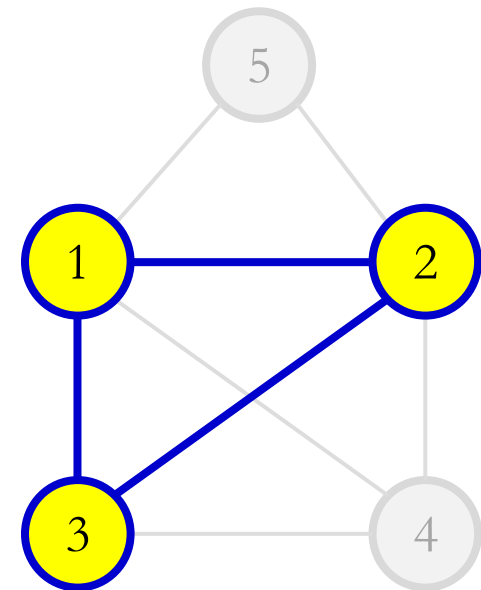
H è un **sottografo** di G se ha solo una parte dei nodi di G e solo una parte degli archi.

Sottografo indotto (da nodi)

$$G = (V, E)$$



$$H = (W, F) \text{ con } F = E \cap \binom{W}{2}$$



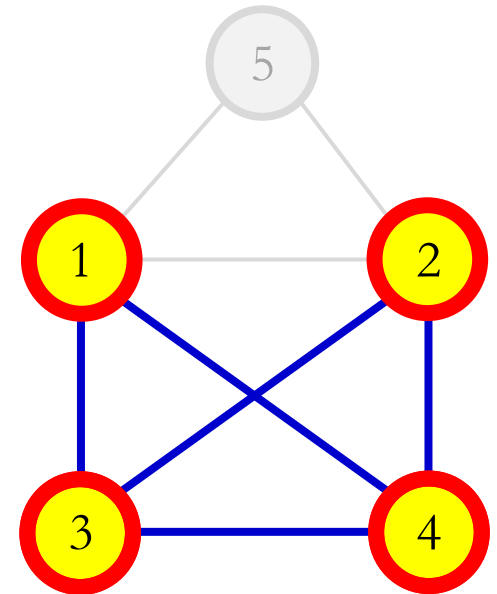
$H = (W, F)$ è un **sottografo** di $G = (V, E)$ **indotto** dai **nodi** $W \subseteq V$ se F contiene solo archi $\{u, v\} \in E$ tali che $u, v \in W$.

H è indicato con $G[W]$

Cammini, passeggiate e percorsi di un grafo

Un **cammino** (*walk*) di un grafo G è una sequenza finita di **archi** (o nodi) **adiacenti** $[\{u,v\}, \{v,w\}, \dots]$.

$P = [\{4,1\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{4,2\}, \{2,3\}]$
Estremi: nodi 4 e 3

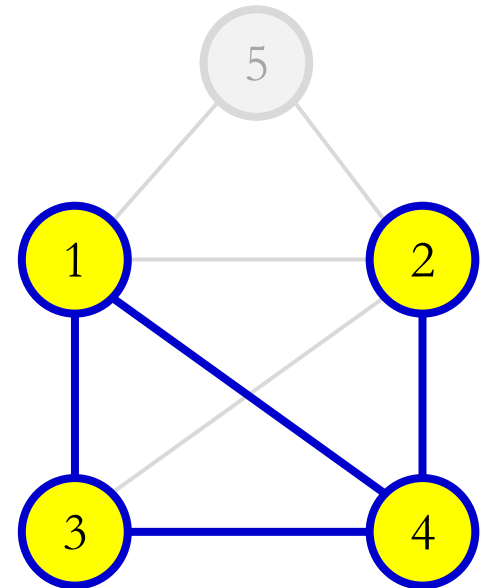


[Nota] il sottografo corrispondente al cammino in generale **non è isomorfo** a un percorso

Cammini, **passeggiate** e percorsi di un grafo

Un cammino di un grafo G è una **passeggiata** (*trail*) o **cammino elementare** se gli archi (ma non necessariamente i nodi) sono tutti distinti

$P = [\{4,1\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{4,2\}]$
Estremi: nodi 4 e 2



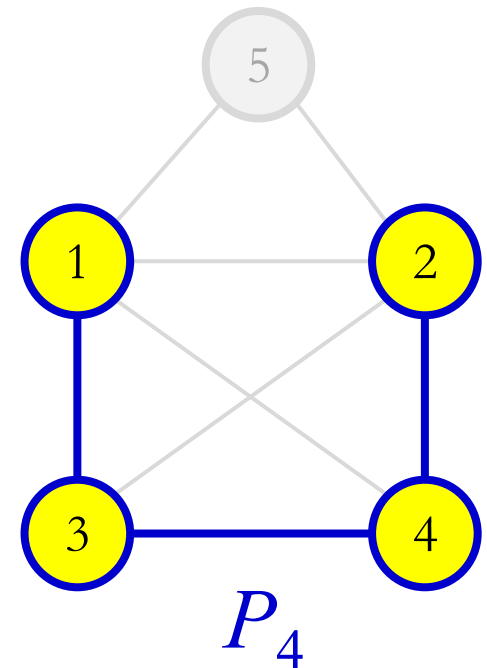
[Nota] il sottografo corrispondente alla passeggiata in generale **non è isomorfo** a un percorso

Cammini, passeggiate e percorsi di un grafo

Un cammino di un grafo G è
un **percorso** (*path*) o **cammino semplice**
se gli archi e i nodi sono tutti distinti

$$P = [\{1,3\}, \{3,4\}, \{4,2\}]$$

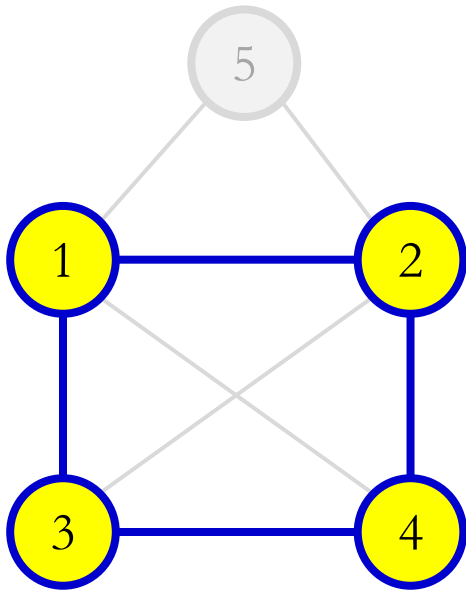
Estremi: nodi 1 e 2



[Nota] il sottografo corrispondente al percorso è **isomorfo** a un percorso P_k . Si dice anche che un grafo G **contiene** un percorso P_k

Cammini, passeggiate e percorsi **chiusi**

Un cammino, passeggiata o percorso
è **chiuso** se gli estremi coincidono

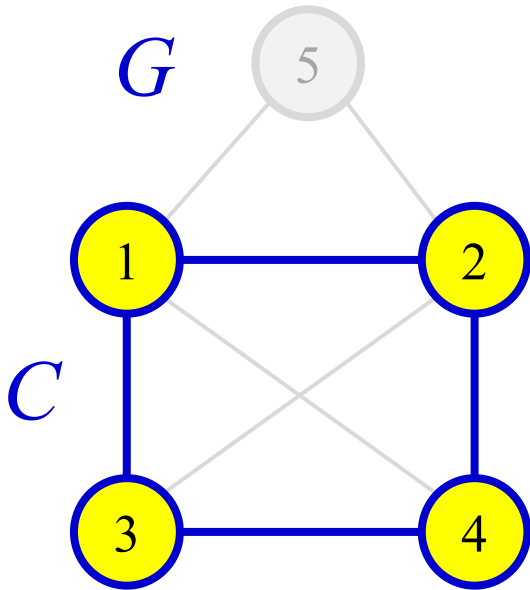


$$C = [\{1,3\}, \{3,4\}, \{4,2\}, \{2,1\}]$$

[Nota] il sottografo corrispondente a un cammino (o passeggiata)
chiuso/a in generale **non è isomorfo** a un ciclo

Grafi aciclici

Un grafo G **contiene** un ciclo C_k se ammette un sottografo isomorfo a C_k

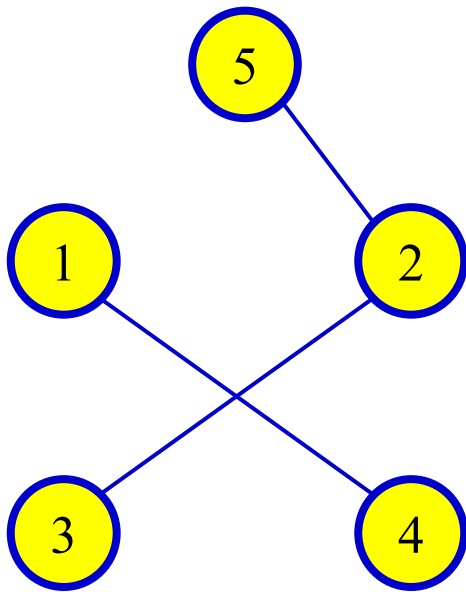


Un grafo G è detto **aciclico** se non contiene alcun ciclo

Connessione

Due nodi $u, v \in V$ di un grafo simmetrico G si dicono **connessi** se esiste in G un cammino tra u e v

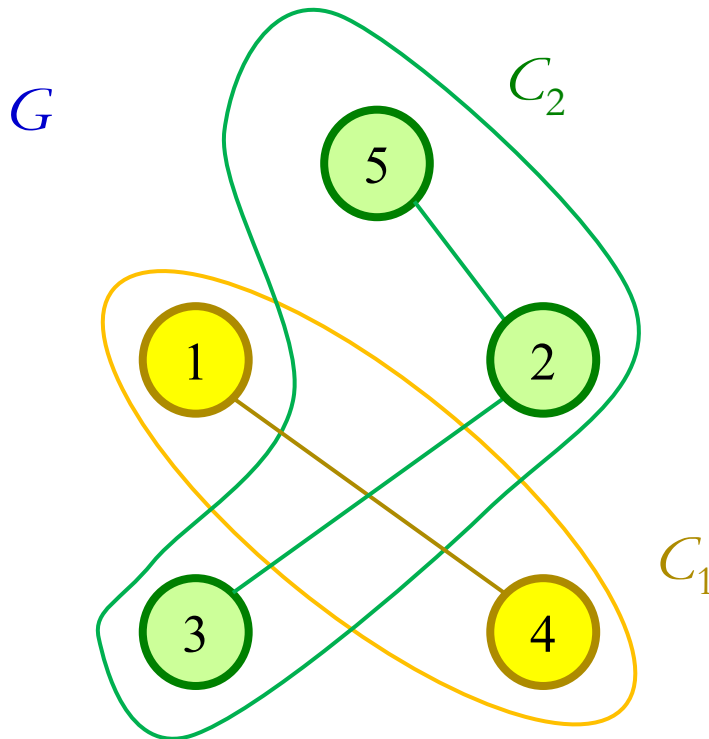
G



- I nodi 3 e 2 sono connessi
- I nodi 1 e 5 **non** sono connessi

Connessione

La relazione di connessione partiziona G in **componenti connesse**



G è formato dalle 2 componenti connesse C_1 e C_2

G si dice **connesso** se è composto da una sola componente connessa

Connessione: ipotesi di lavoro

Dato che tutti i problemi su grafo discussi in seguito sono facilmente decomponibili per componenti connesse, se non diversamente specificato

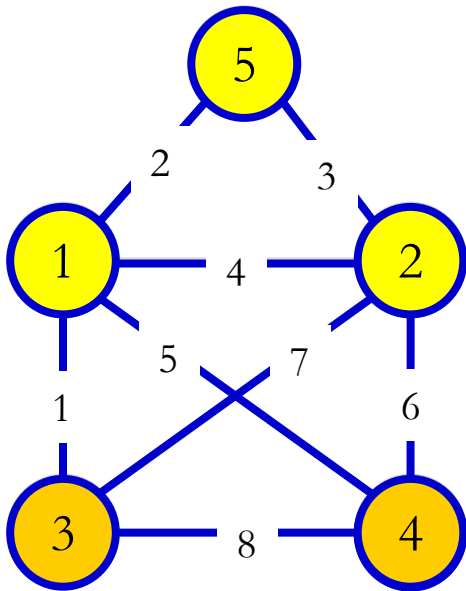
i grafi riportati sono sempre intesi come
grafi connessi

Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

Cammino e ciclo *euleriano*

Un **cammino** (**ciclo**) è **euleriano** se e solo se attraversa **tutti** gli **archi** del grafo **una e una sola** volta

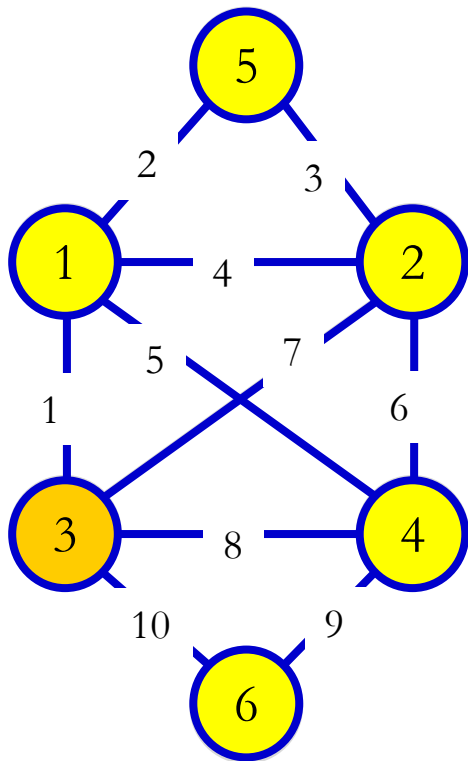


$P = [\{3, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}]$

è un cammino euleriano

Cammino e ciclo *euleriano*

Un **cammino** (**ciclo**) è **euleriano** se e solo se attraversa **tutti** gli **archi** del grafo **una e una sola** volta

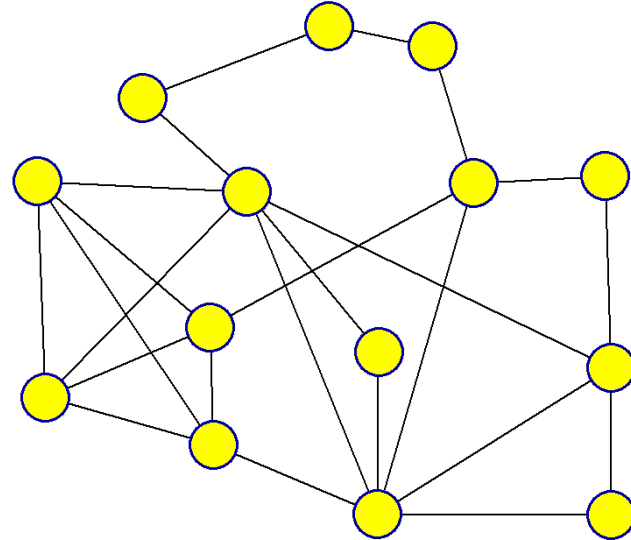
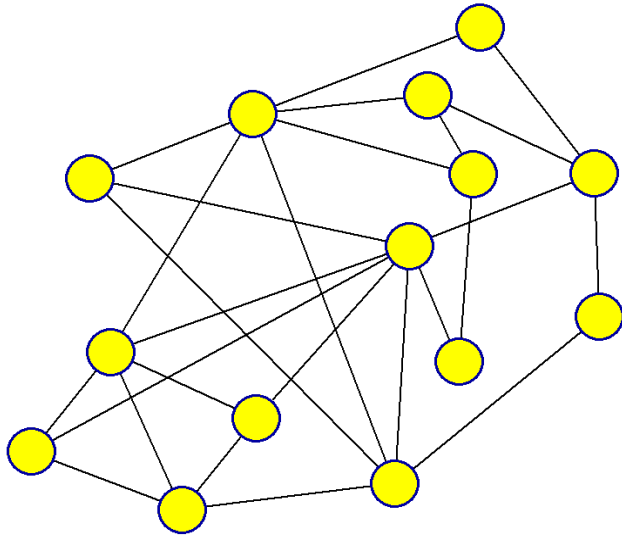


$C = [\{3, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 4\},$
 $\{4, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 3\}]$

è un ciclo euleriano

Caratterizzazione dei grafi euleriani

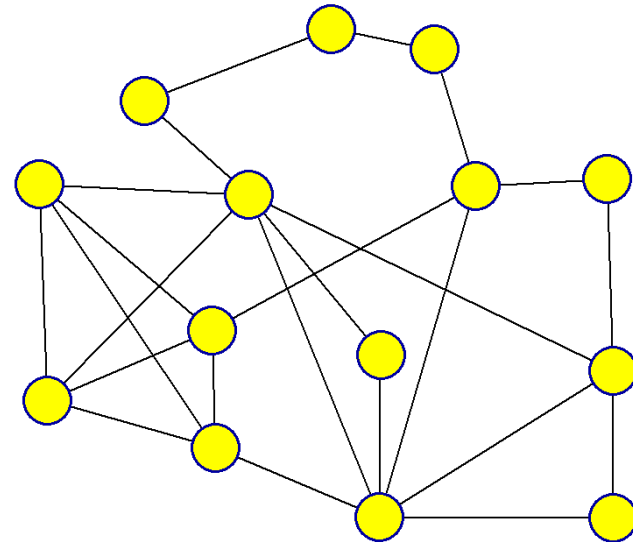
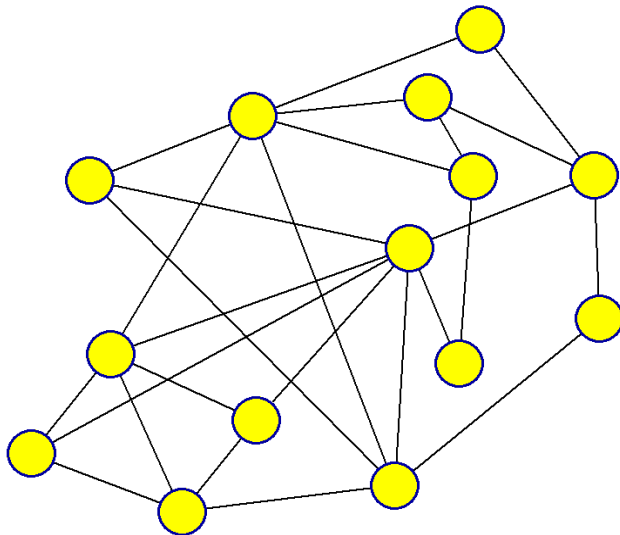
Su quali di questi grafi è possibile costruire un **ciclo euleriano**?



Caratterizzazione dei grafi euleriani

...

Su quali di questi grafi è possibile costruire un **ciclo euleriano**?



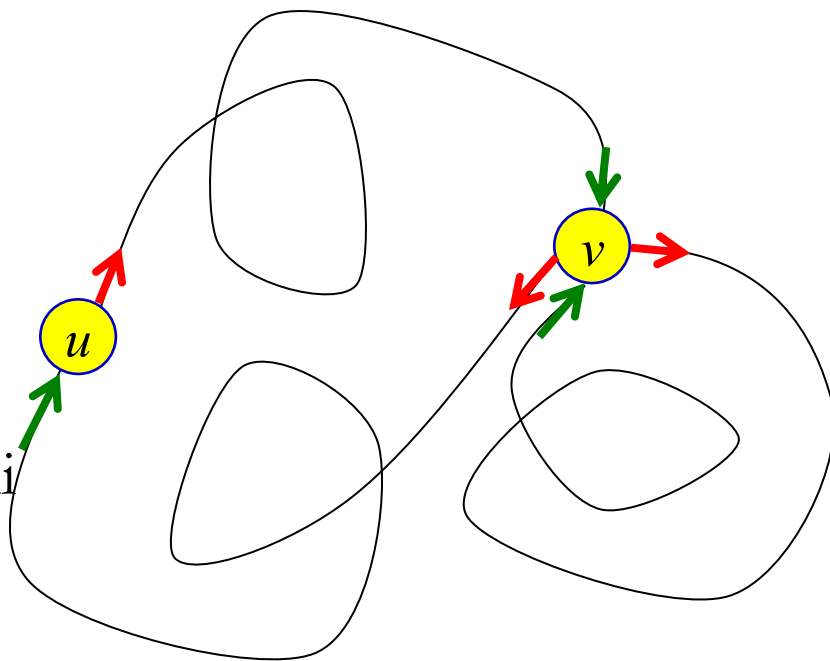
[Teorema di Eulero] Un grafo simmetrico è *euleriano*, cioè ammette un ciclo euleriano, se e solo se è **connesso** e ogni suo nodo ha **grado pari**.

[Teorema di Eulero] Un grafo simmetrico è *euleriano*, cioè ammette un ciclo euleriano, se e solo se è **connesso** e ogni suo nodo ha **grado pari**.

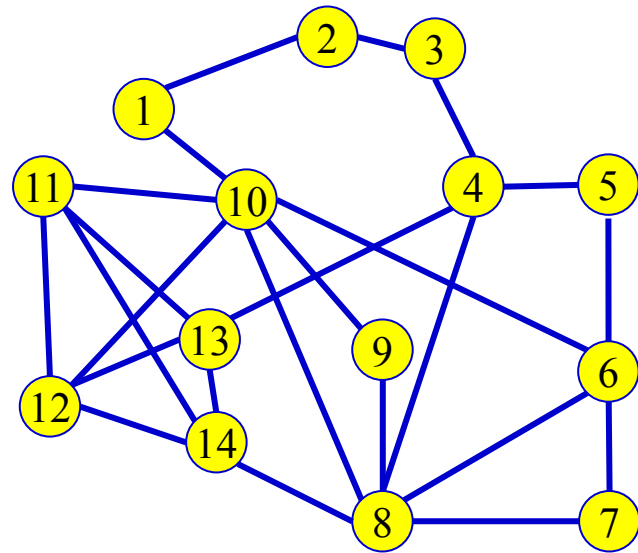
G euleriano $\Rightarrow G$ connesso e con nodi di grado pari.

Sia C un ciclo euleriano di G

- Ogni nodo $v \in V$ è **attraversato** da C , quindi gli archi di $\delta(v)$ sono presenti in coppie C (archi *entranti* e *uscenti*)
- Siccome C contiene tutti gli archi di G , la stella $\delta(v)$ ha un multiplo di coppie di archi, quindi $d(v)$ è pari.

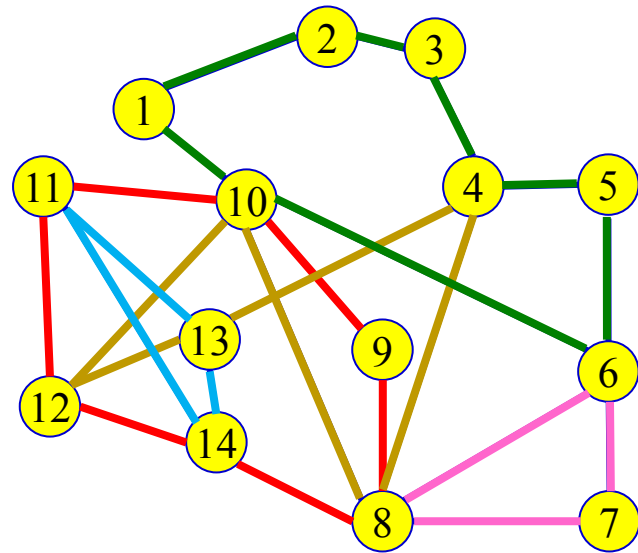


G connesso e con nodi di grado pari $\Rightarrow G$ euleriano



G connesso e con nodi di grado pari $\Rightarrow G$ euleriano

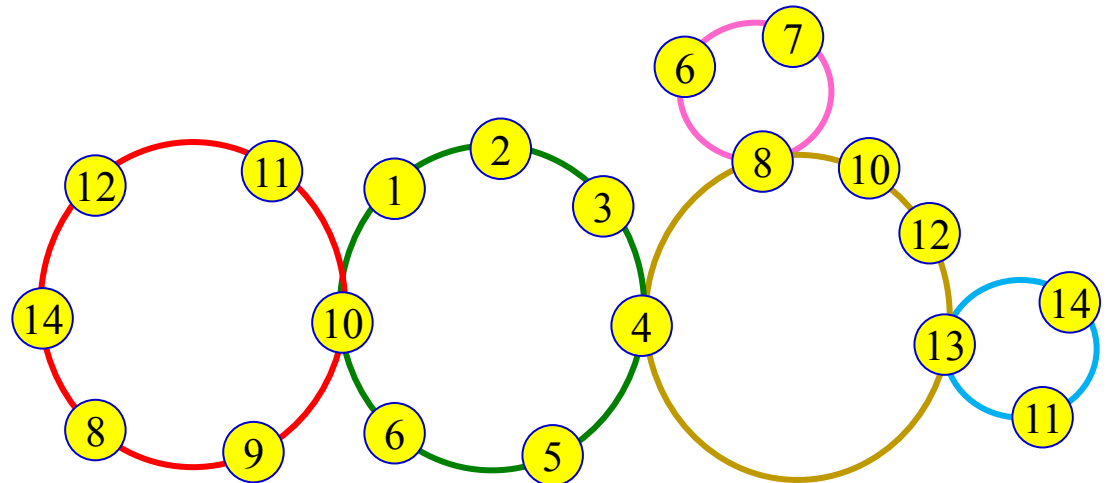
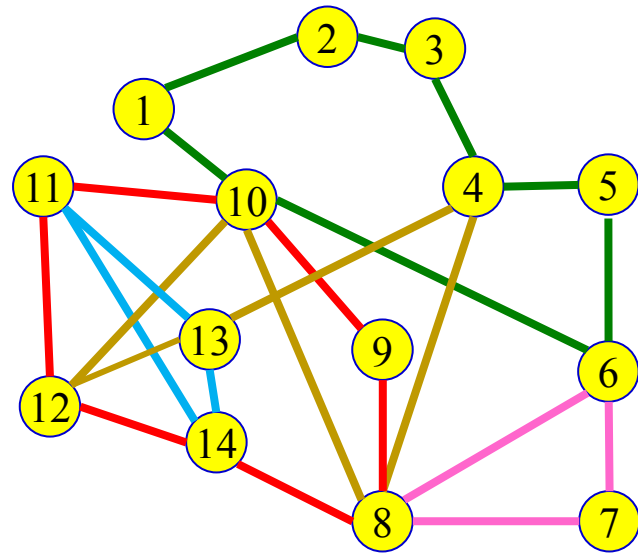
- Dato che ogni nodo è di grado pari, G può essere decomposto in cicli



1. (almeno un ciclo esiste sempre: infatti dal grado pari si deduce che $\delta(v) \geq 2 \forall v$ e quindi $|E| \geq |V|$. Segue che G non è un albero e quindi ammette un ciclo)
2. Una volta rimosso un ciclo, di nuovo ho un grafo con tutti nodi di grado pari

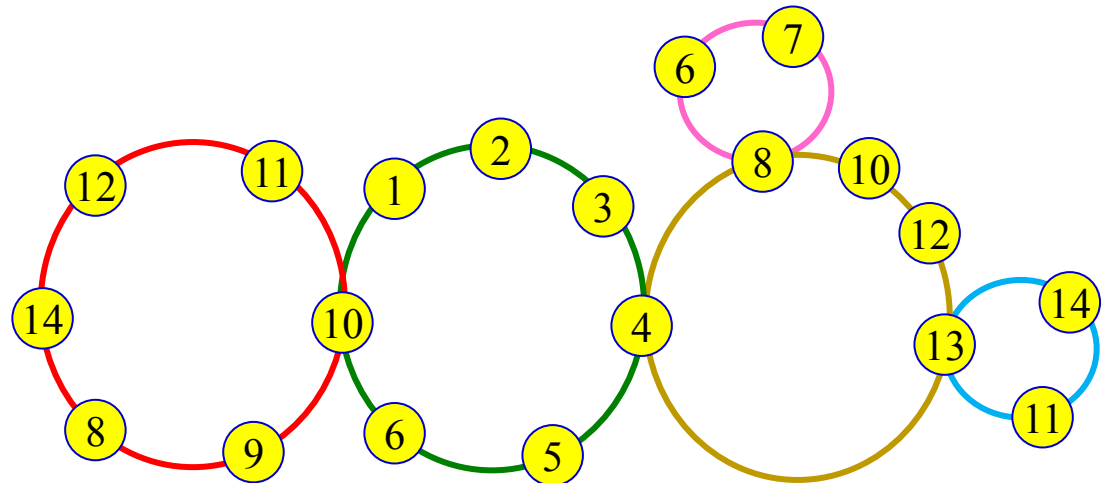
G connesso e con nodi di grado pari $\Rightarrow G$ euleriano

- Dato che ogni nodo è di grado pari, G può essere decomposto in cicli
- I cicli non sono disgiunti perché G è connesso



G connesso e con nodi di grado pari $\Rightarrow G$ euleriano

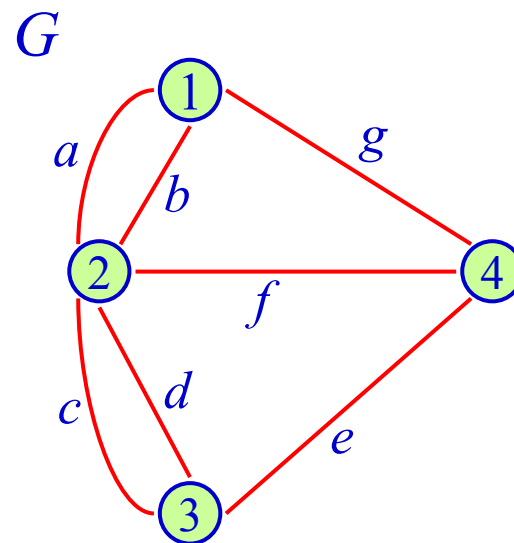
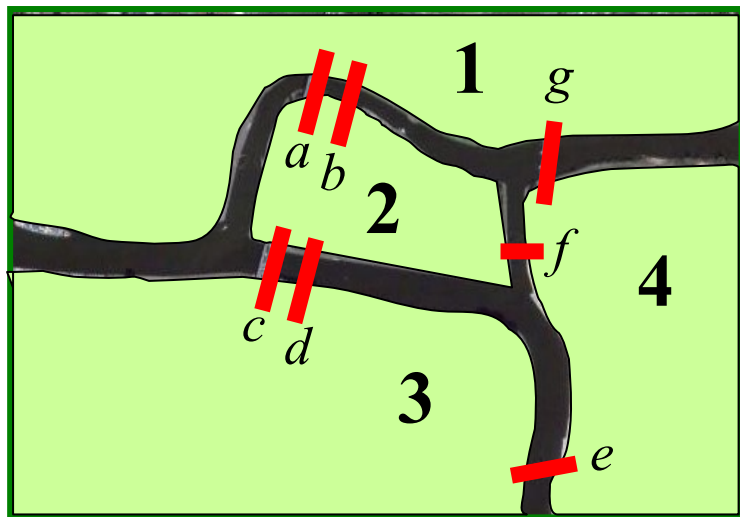
- Si noti che ogni arco di G è presente una e una sola volta, quindi è facile ottenere un ciclo euleriano di G



v.l.a.d.

i ponti di Königsberg: soluzione

...

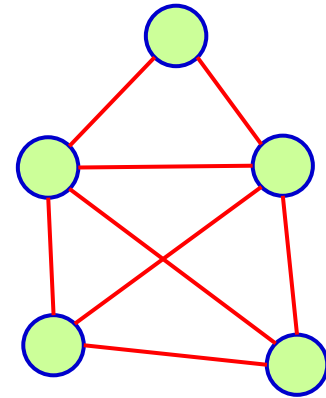
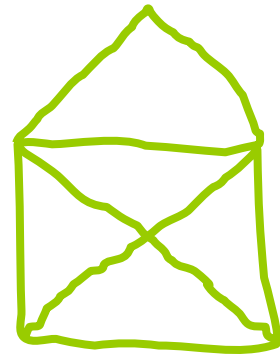


Elementare! Il giro non è possibile
perchè G non è euleriano

Enigmistica e teoria dei grafi: soluzioni

...

- E' possibile fare questo disegno senza staccare la penna dal foglio, senza ripassare mai su linee già tracciate e tornando al punto di partenza?

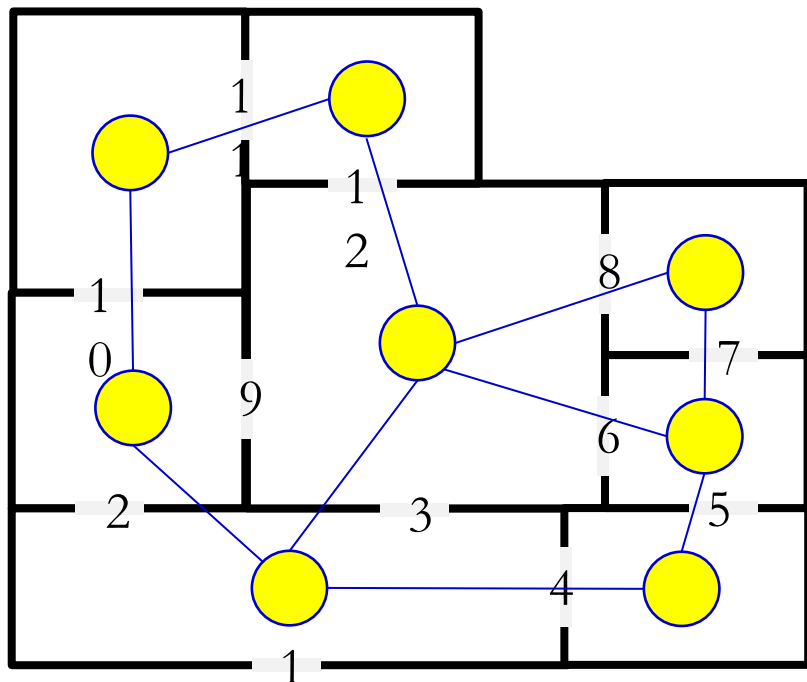


Elementare! Il disegno non è possibile
perchè il grafo non è euleriano

Enigmistica e teoria dei grafi: soluzioni ...

- Riuscite a chiudere tutte le porte se le porte chiuse non si aprono più e se potete chiuderle solo attraversandole?

G



G è un grafo euleriano?

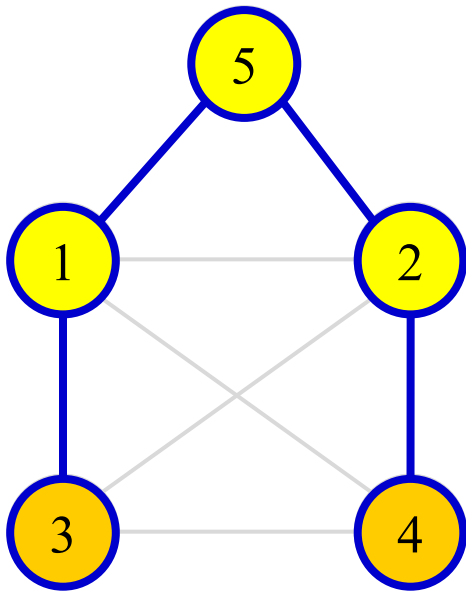
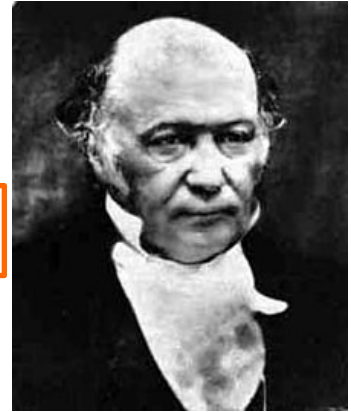


Elementare! Il giro non è possibile perchè il grafo non è euleriano

Percorso *hamiltoniano*

Un percorso è **hamiltoniano** se e solo se attraversa tutti i **nodi** del grafo una e una sola volta

Un percorso hamiltoniano è un sottografo isomorfo a P_{n-1}



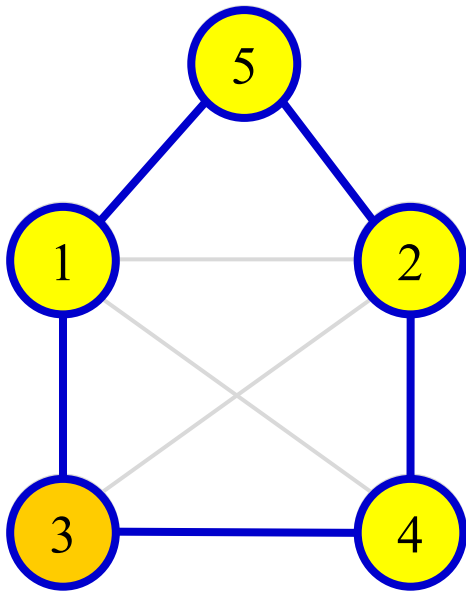
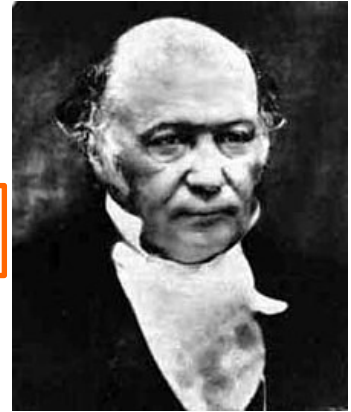
$$P = [\{3, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 4\}]$$

è un percorso hamiltoniano

Ciclo *hamiltoniano*

Un **ciclo** è **hamiltoniano** se e solo se attraversa tutti i **nodi** del grafo una e una sola volta

Un **ciclo hamiltoniano** è un sottografo isomorfo a C_n

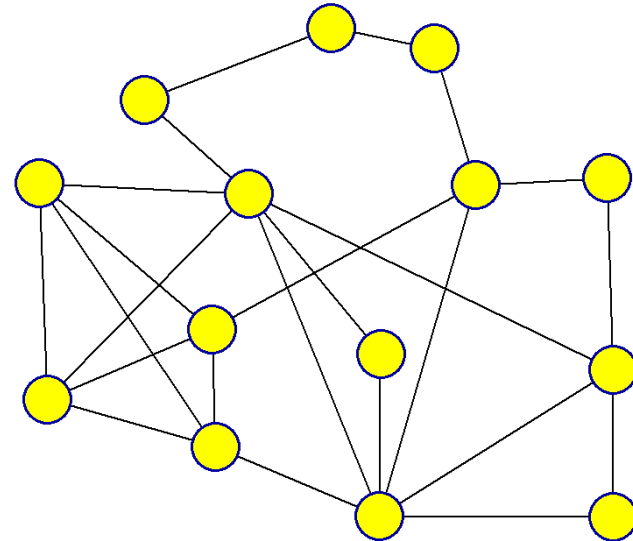
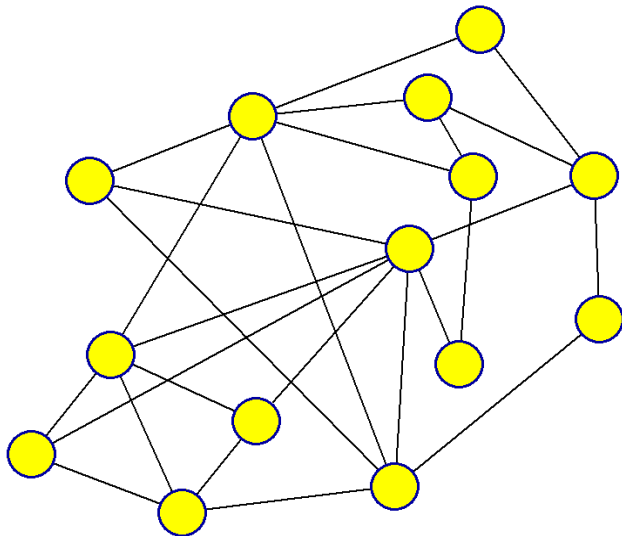


$$P = [\{3, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 1\}]$$

è un ciclo (o *tour*) hamiltoniano

Grafi *hamiltoniani*

un grafo G è **hamiltoniano** se contiene un **ciclo hamiltoniano**

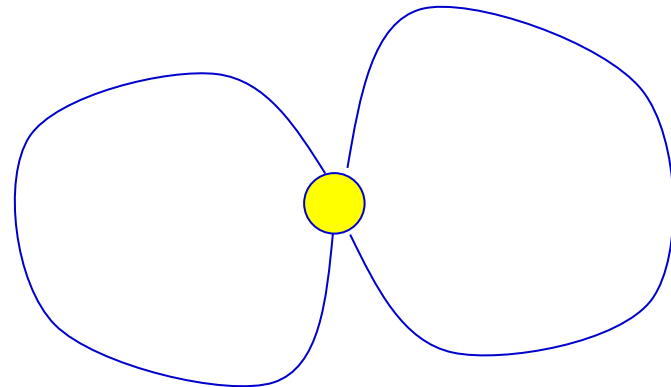
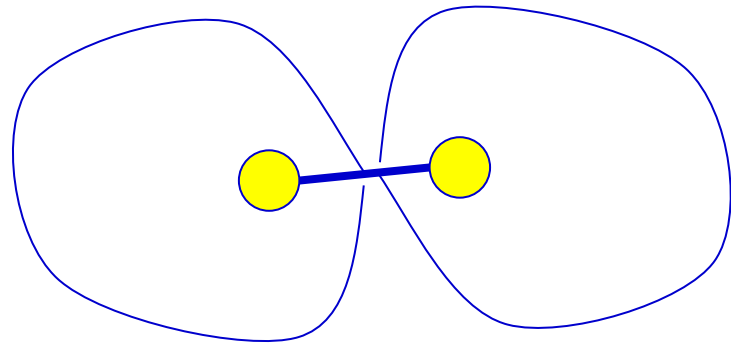


Quali di questi grafi è **hamiltoniano**?

Grafi *hamiltoniani* : condizioni necessarie

Se $G = (V, E)$ è **hamiltoniano** allora

- $d(v) \geq 2 \quad \forall v \in V$
- G non ha *cut-edges*
- G non ha *cut-vertices*



Grafi *hamiltoniani* : condizioni sufficienti

[Teorema di Ore (1960)]

Un grafo $G = (V, E)$ con almeno 3 vertici e $d(u) + d(v) \geq n$ per ogni coppia u, v di vertici non adiacenti è hamiltoniano

grafi hamiltoniani:
una condizione sufficiente

Fabrizio Marinelli - Introduzione alla Teoria dei Grafi

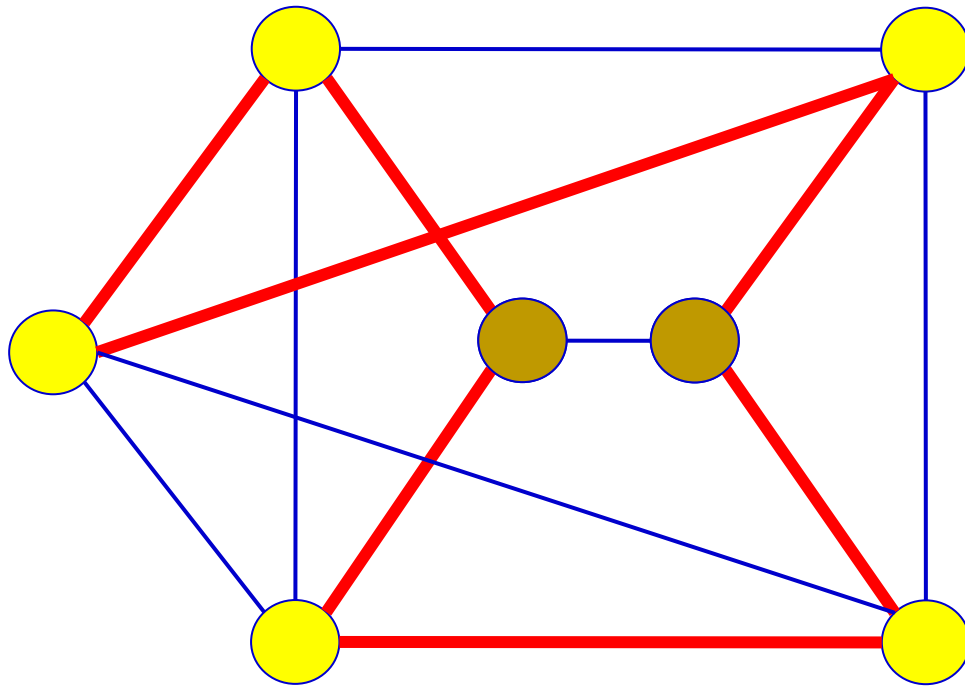
187

Corollario [Teorema di Dirac (1952)]

Un grafo $G = (V, E)$ con almeno 3 vertici e $d(u) \geq n / 2$ per tutti $u \in V$ è hamiltoniano

Il Teorema di Dirac è un caso speciale del teorema di Ore: se $d(u) \geq n / 2$ per tutti i $u \in V$ allora per qualsiasi coppia di vertici vale la condizione del teorema di Ore.

Condizioni di Ore e Dirac

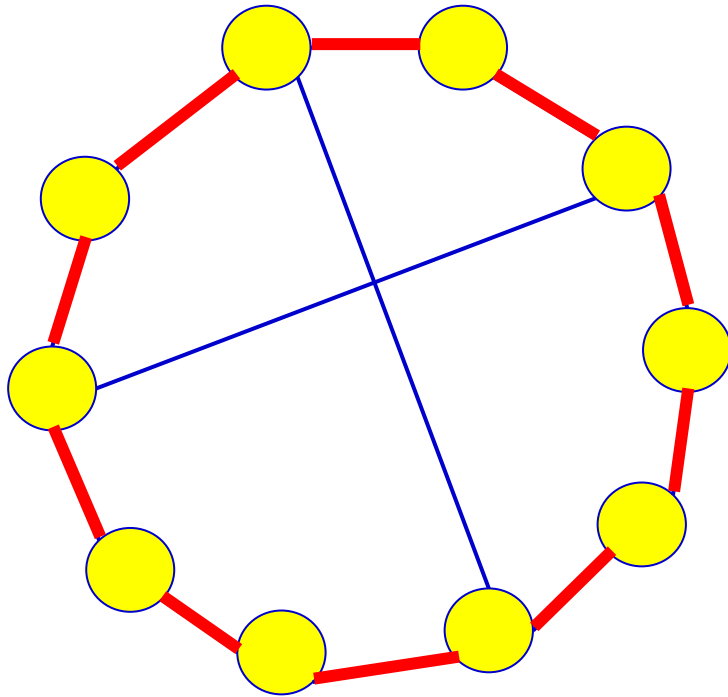


Questo grafo non soddisfa la condizione di Dirac...

Ma soddisfa la condizione di Ore

Infatti è hamiltoniano

Teorema di Ore: solo una condizione sufficiente



Questo grafo non soddisfa la condizione di Ore ma è hamiltoniano!

Non esiste una caratterizzazione dei grafi hamiltoniani !

Un po' di enigmistica

...

- Ordina un insieme dato di numeri in modo tale che la somma di ogni coppia di numeri adiacenti sia un quadrato. Prova con l'insieme $\{1, 2, \dots, 15\}$

Definisci un grafo G dove i vertici sono numeri e c'è un arco $\{u, v\}$ se i numeri u e v sommano a un quadrato

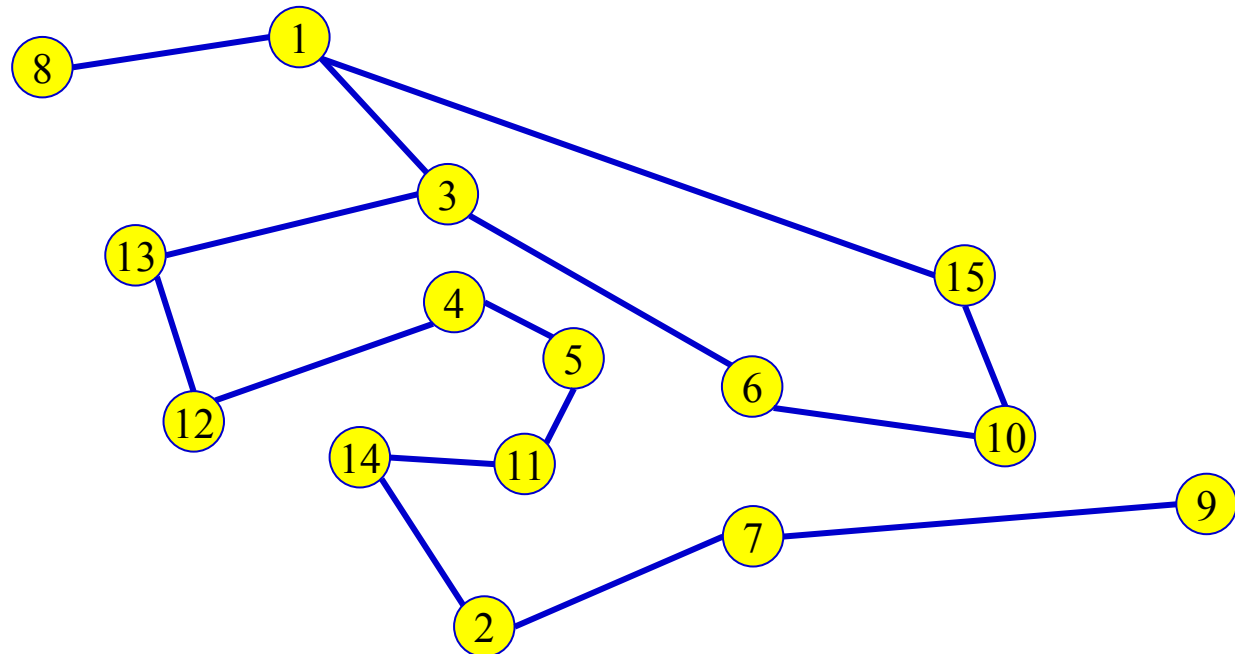


L'ordinamento è possibile se e solo se G contiene un cammino hamiltoniano

Un po' di enigmistica

...

- Ordina un insieme dato di numeri in modo tale che la somma di ogni coppia di numeri adiacenti sia un quadrato. Prova con l'insieme $\{1, 2, \dots, 15\}$



Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

- **Genome assembly problem:** Un genoma (semplificato) è una lunga stringa (milioni o anche miliardi) di *simboli* A, C, G e T (i nucleotidi Adenina, Citosina, Guanina e Timina)
- L'intero genoma è in generale sconosciuto ma piccoli frammenti (sottostringhe) possono essere ottenuti con tecniche di sequenziamento dei geni.

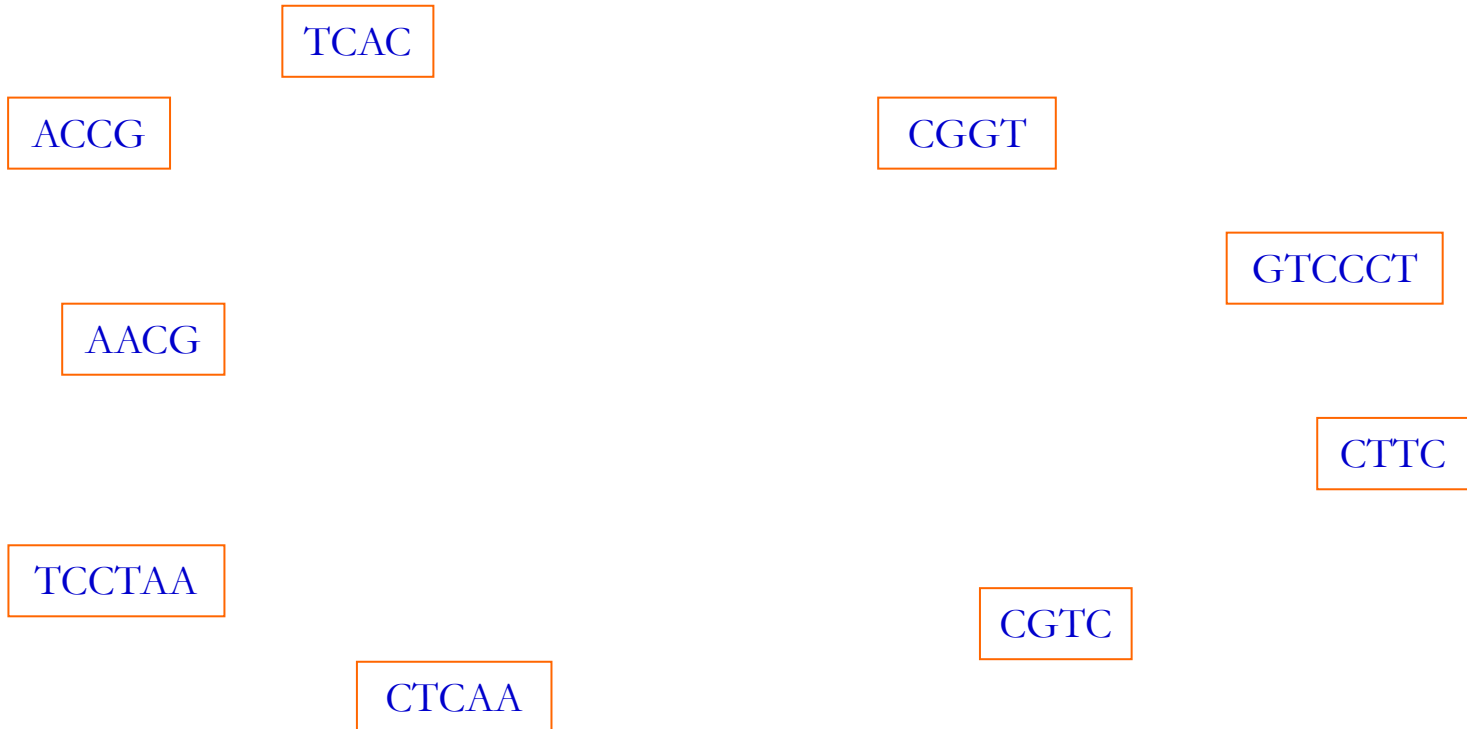


Qual è una stringa verosimile di genoma che può essere **ricostruita** a partire dai frammenti disponibili?

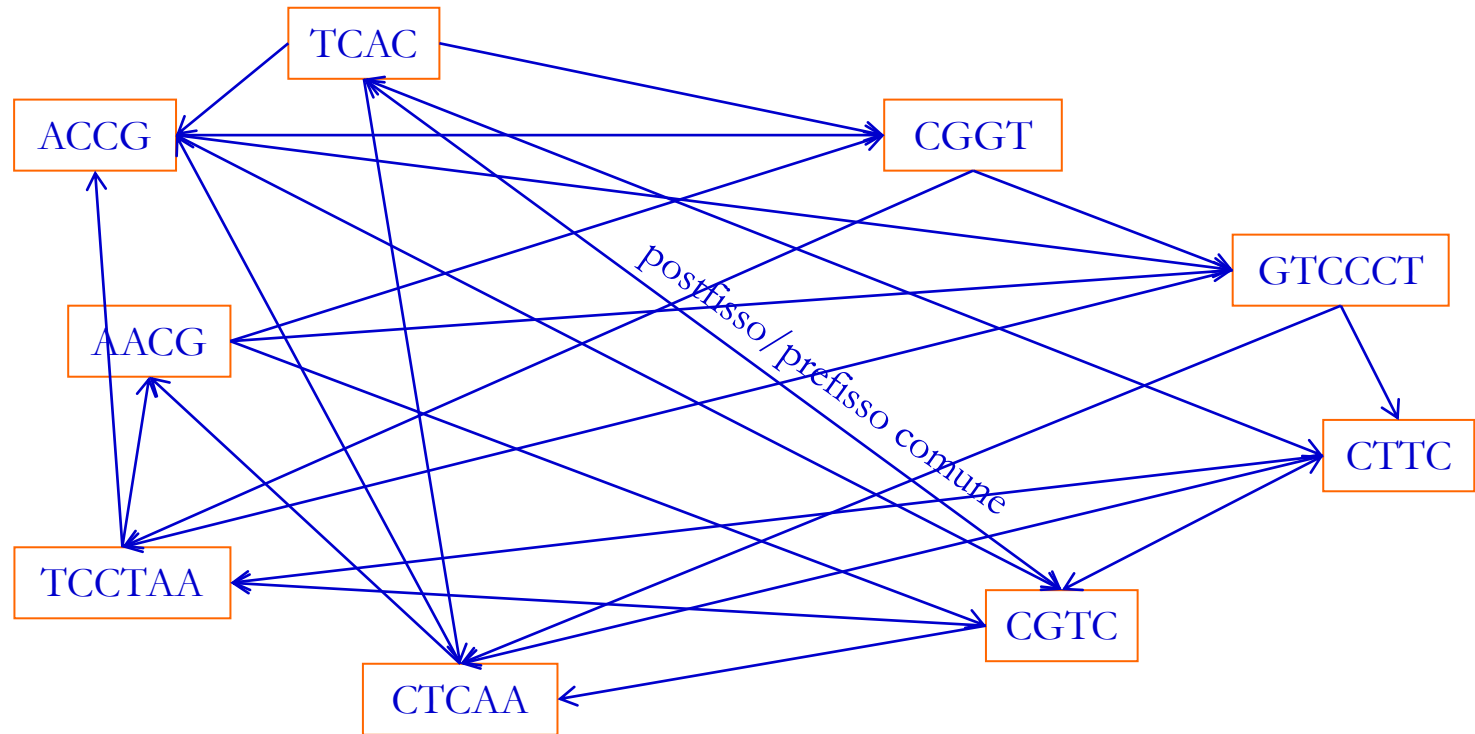
Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

Un caso giocattolo

- Sottosequence disponibili di A, C, G e T

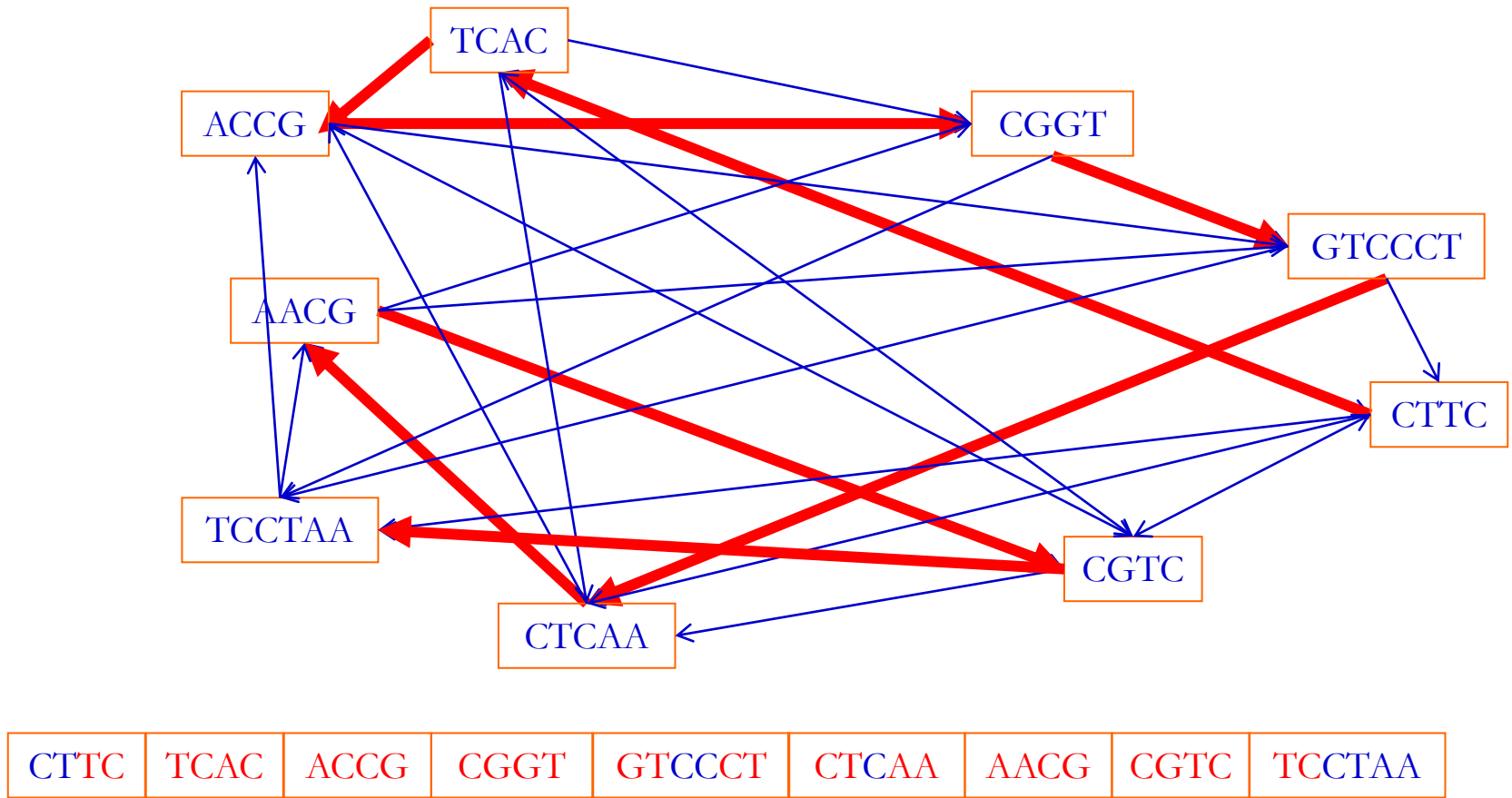


Problemi (un po' più seri) di un ingegnere



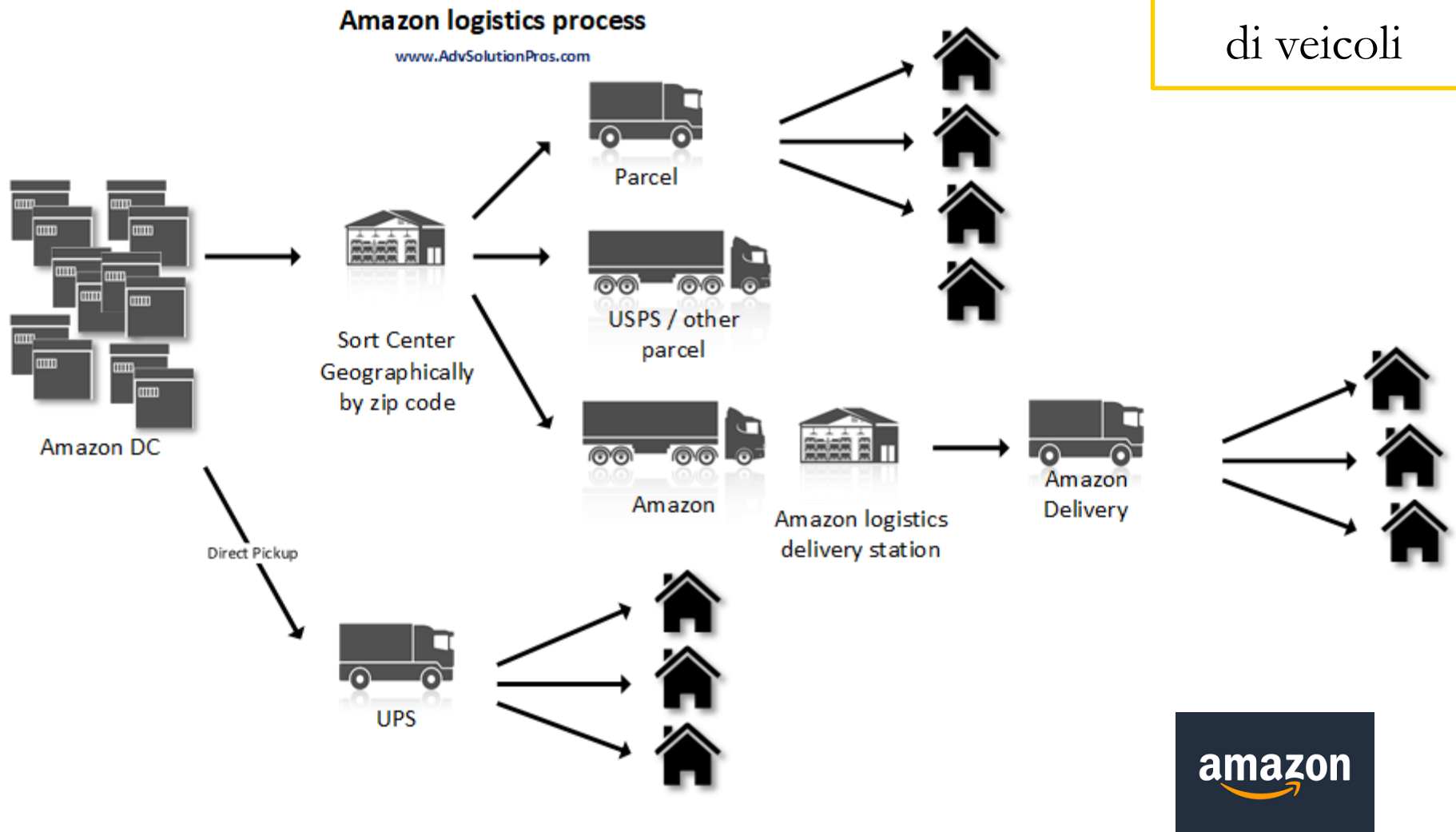
- Una ricostruzione completa del genoma è possibile se e solo se il grafo ammette un *cammino diretto hamiltoniano*

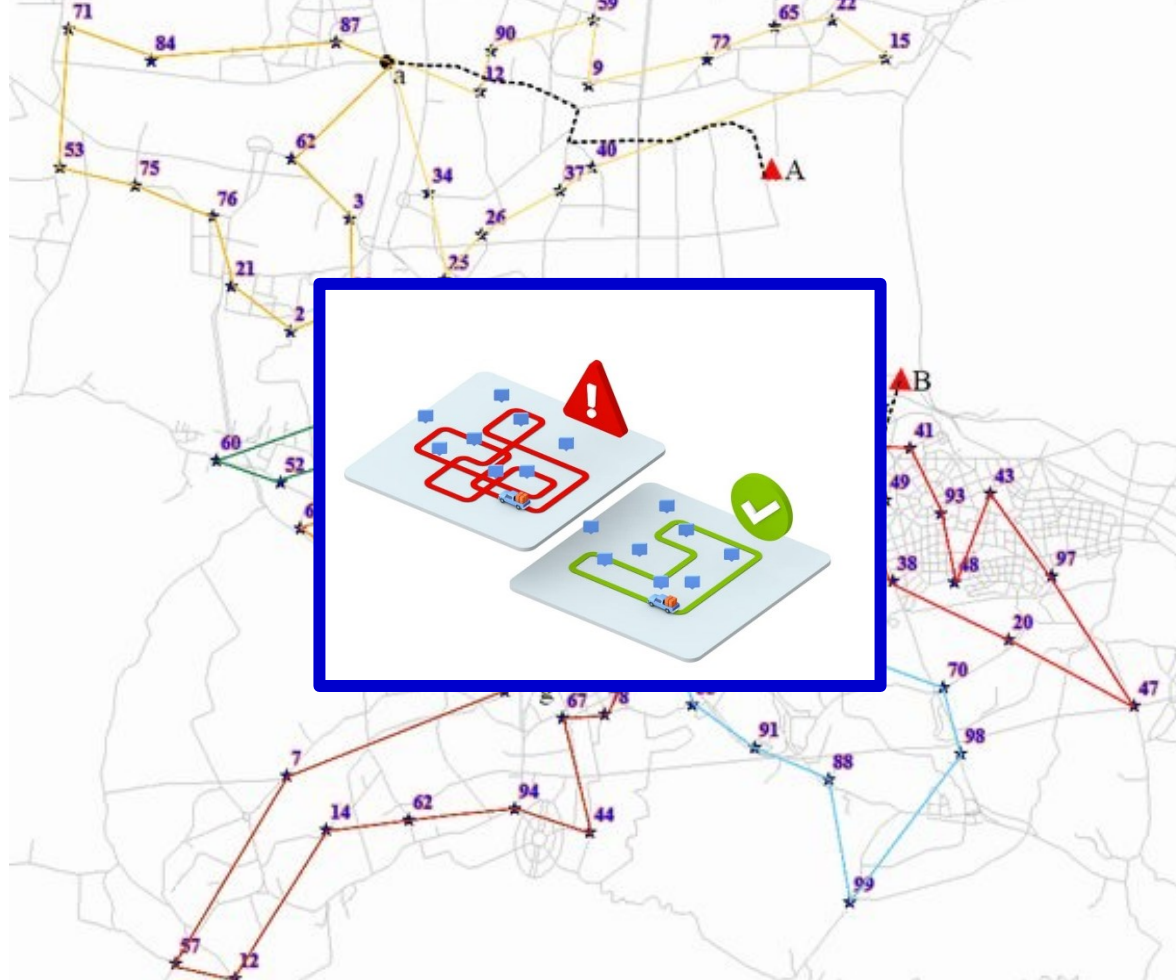
Problemi (un po' più seri) di un ingegnere



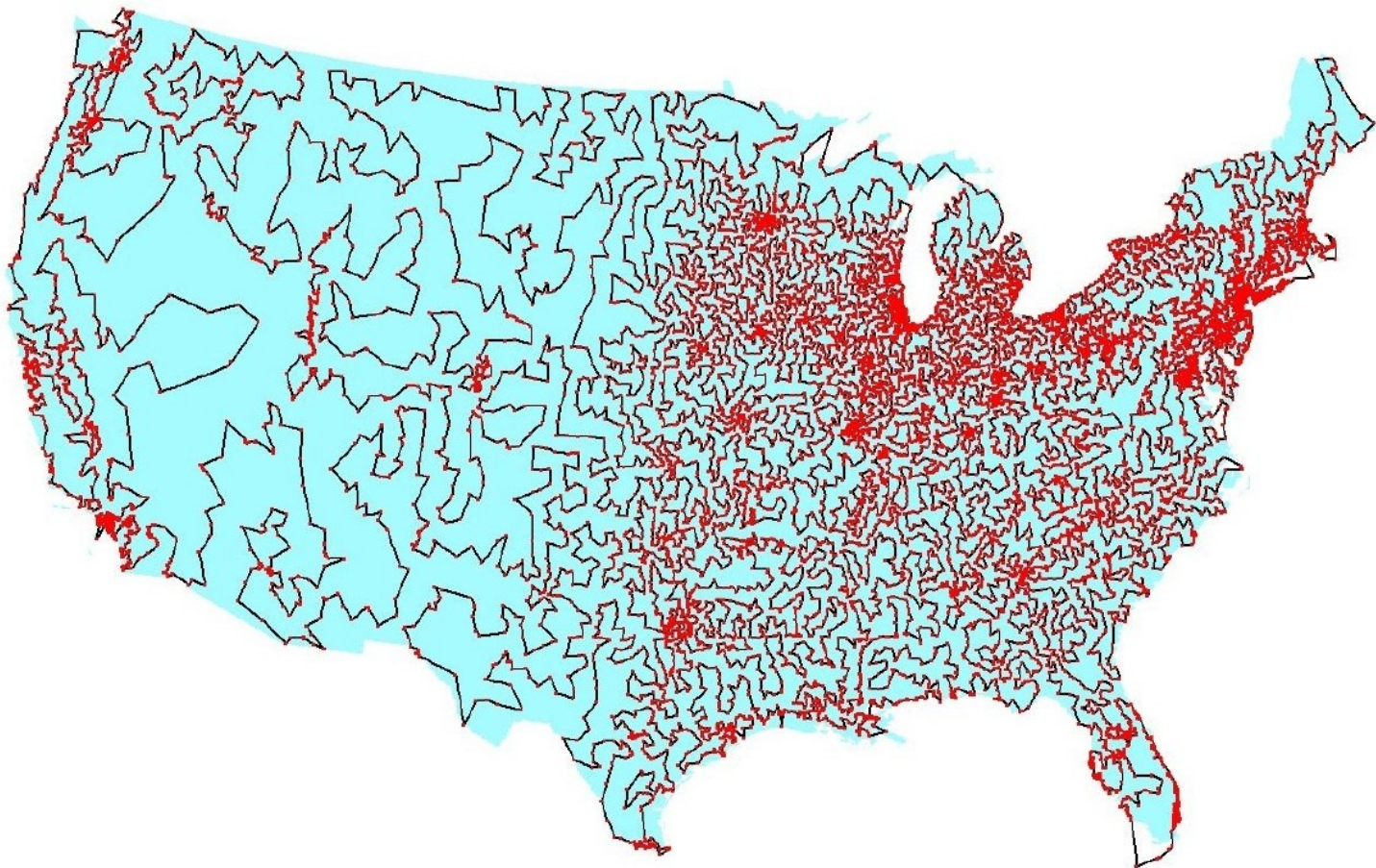
Problemi (un po' più seri) di un ingegnere

Instradamento
di veicoli





Quali sono i giri di consegna ottimali?



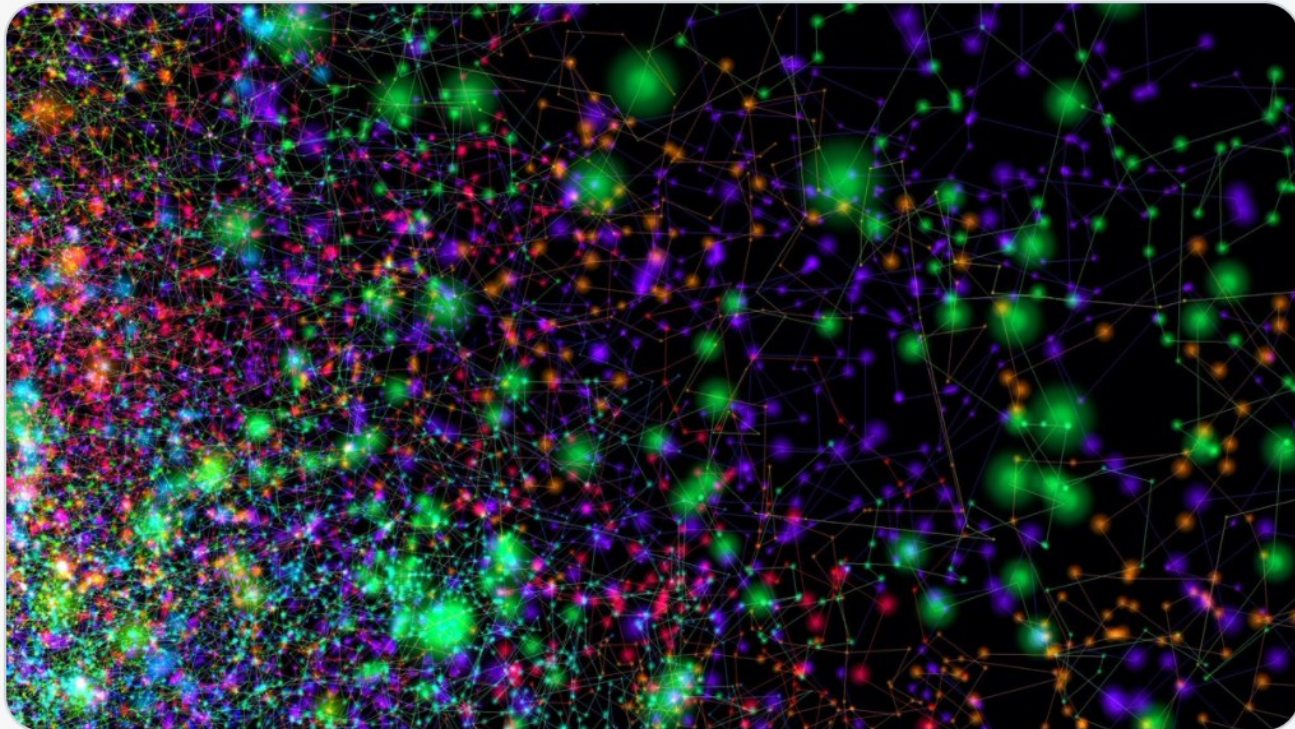
- Questo è il “miglior giro di consegna” che tocca le 13.509 città americane con più di 500 abitanti (calcolato nel 1998)

Problemi (un po' più seri) di un ingegnere



Bill Cook @wjcook · 16 ott

Keld Helsgaun and I have a traveling salesman problem tour through the 3D positions of 2,079,471 stars. And a proof that its length is within a factor of 0.0000074 of optimal. Like a NYC to LA drive off by at most half a block.
math.uwaterloo.ca/tsp/star/gaia1...



2



41



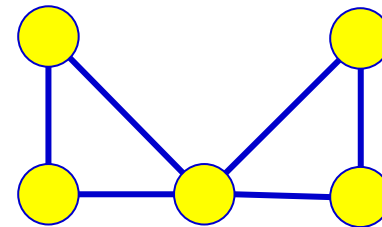
143



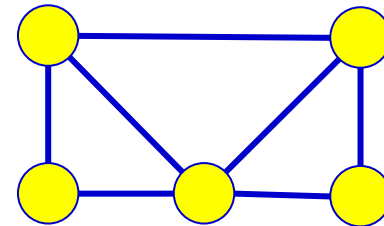
Grafi *hamiltoniani* e grafi *euleriani*

La classe dei **grafi hamiltoniani** non contiene né è contenuta nella classe dei **grafi euleriani**

Ci sono **grafi euleriani** che non sono **hamiltoniani**



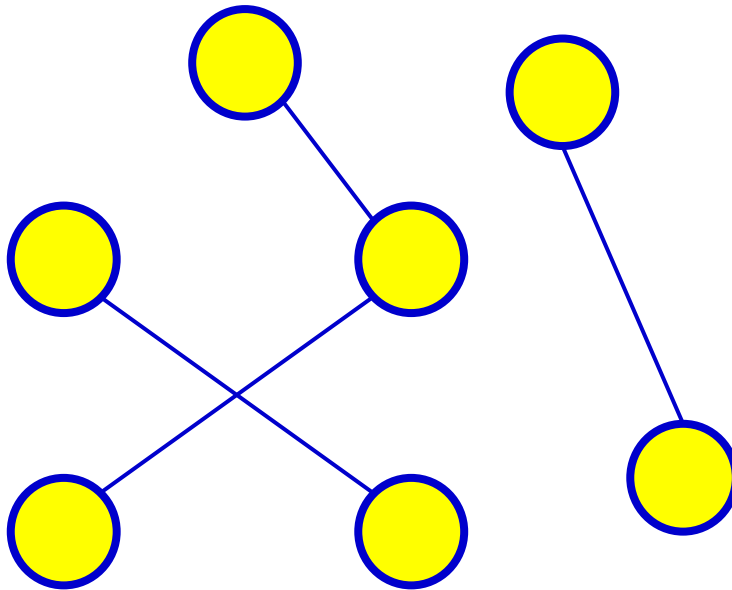
Ci sono **grafi hamiltoniani** che non sono **euleriani**



Foreste e alberi

Una foresta F è un grafo non orientato aciclico

F

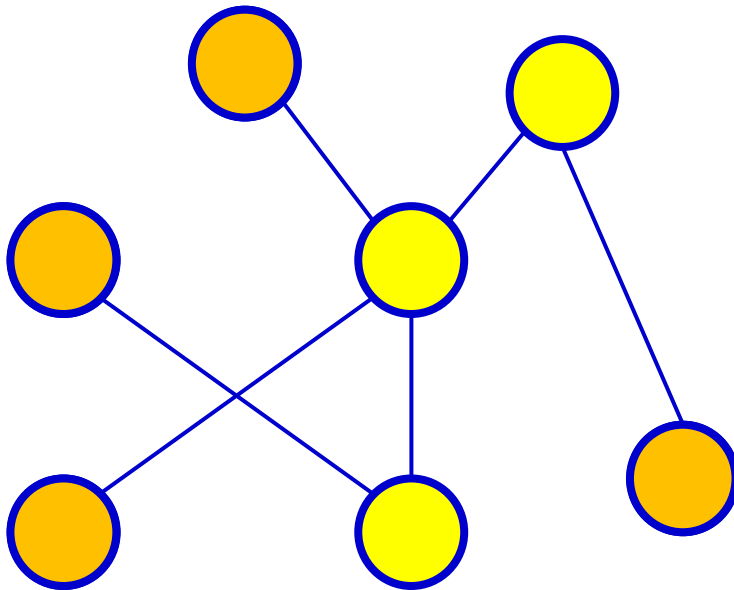


una foresta è un grafo
non necessariamente
connesso

Foreste e alberi

Una **albero** è una foresta con **una unica componente connessa**, quindi un **albero** è un grafo **connesso** e **aciclico**

T



I nodi v di grado 1 sono chiamati **foglie**

Alberi: caratterizzazione e proprietà

[Caratterizzazione] Un grafo simmetrico $G = (V, E)$ è un albero se e solo se è **connesso** e ha $|V| - 1$ archi.

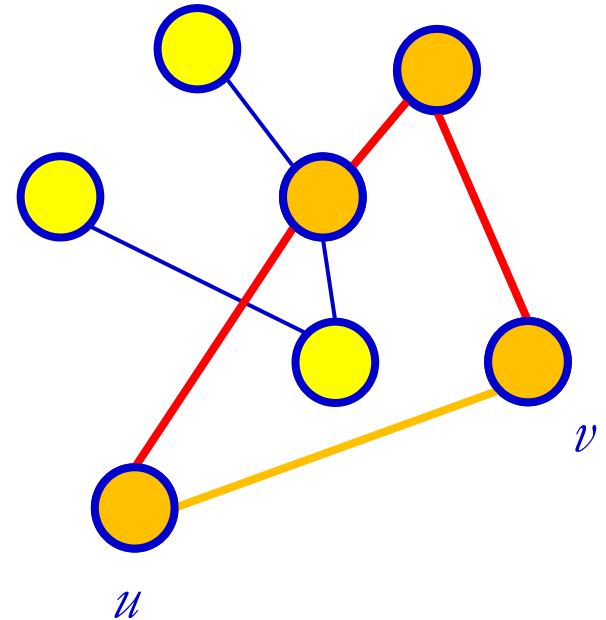
Caratterizzazione
degli alberi

Fabrizio Marinelli - Introduzione alla Teoria dei Grafi

165

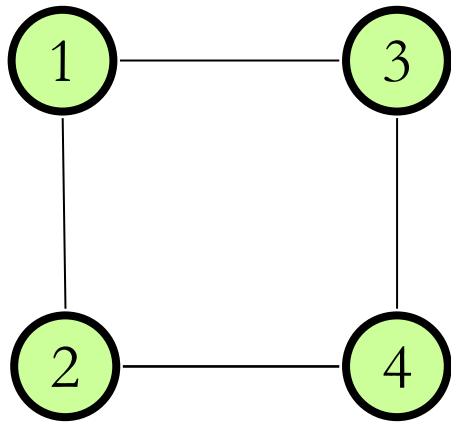
[Proprietà] sia $T = (V, E)$ un albero

- T ha almeno una foglia.
- esiste un unico cammino da u a v , per ogni $u, v \in V$
- Se aggiungiamo un arco a E , il grafo risultante ha esattamente un ciclo.
- Se rimuovo una arco E , il grafo non è più connesso.

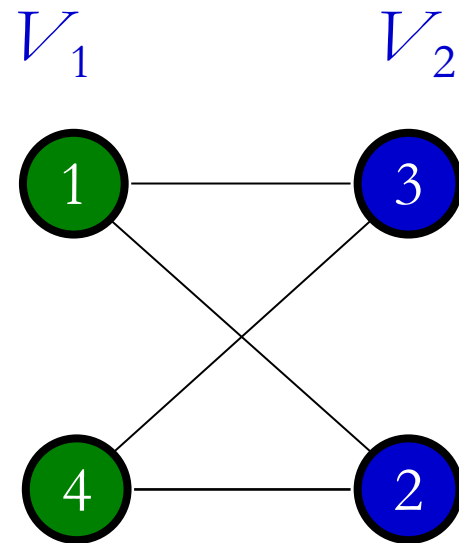


Grafo bipartito

Un grafo $G = (V, E)$ è **bipartito** se ogni arco ha un estremo in V_1 e l'altro in V_2 con $V_1 \cup V_2 = V$



C_4 è un grafo *bipartito*

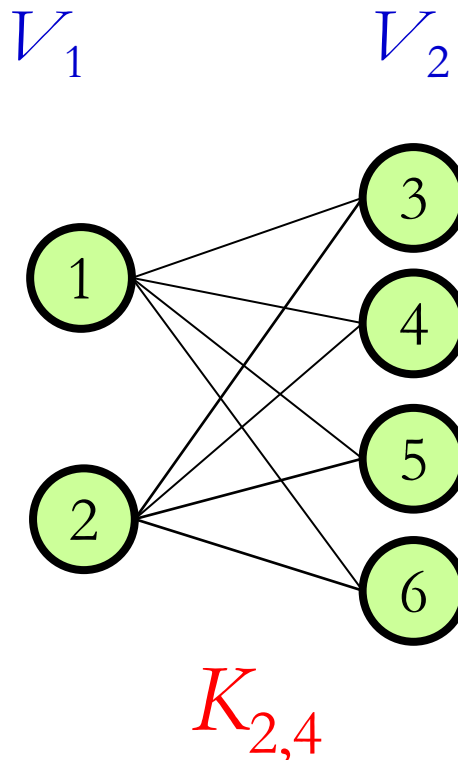


... infatti

Grafo bipartito

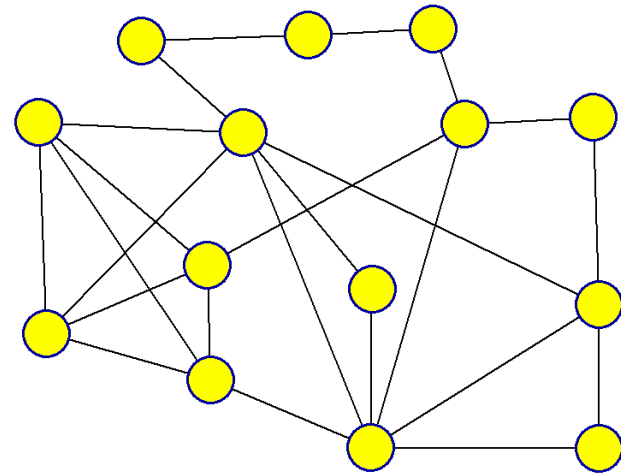
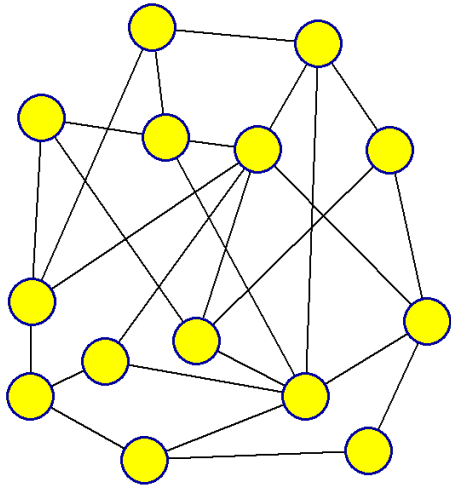
Un grafo bipartito $G = (V, E)$ è **completo** se ogni nodo in V_1 è adiacente a tutti i nodi di V_2 e viceversa.

Il grafo bipartito completo con $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$ si indica con $K_{p,q}$



Caratterizzazione dei grafi bipartiti

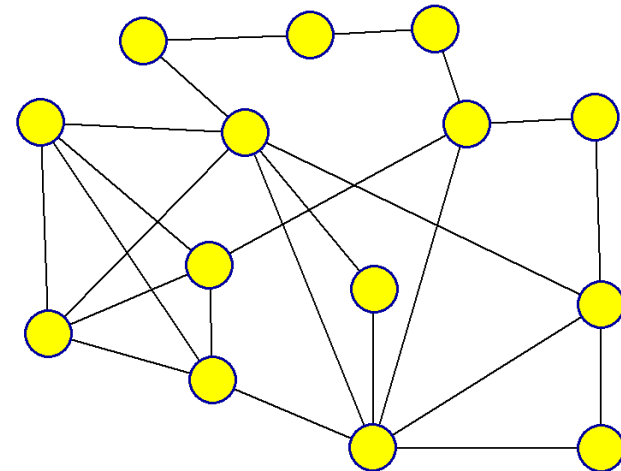
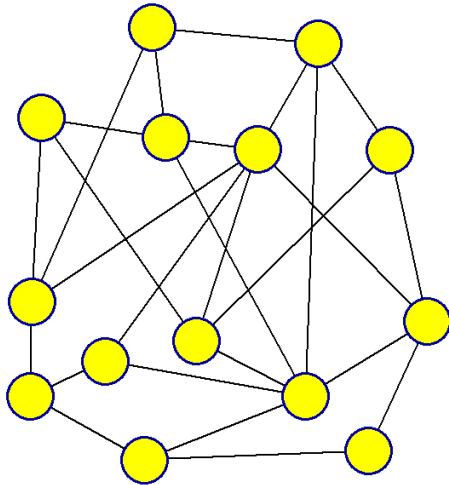
Quali di questi grafi è **bipartito**?



Caratterizzazione dei grafi bipartiti

...

Quali di questi grafi è *bipartito*?

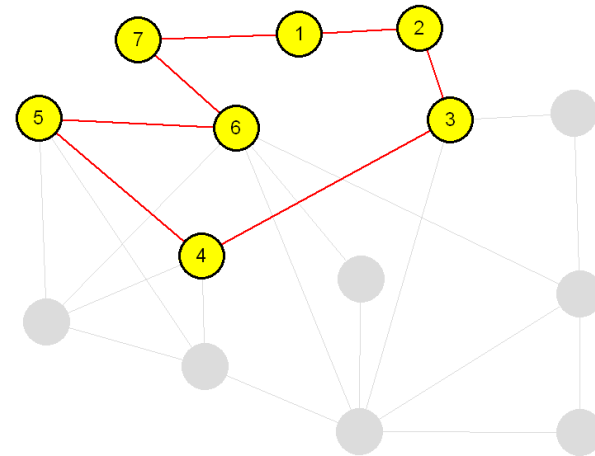
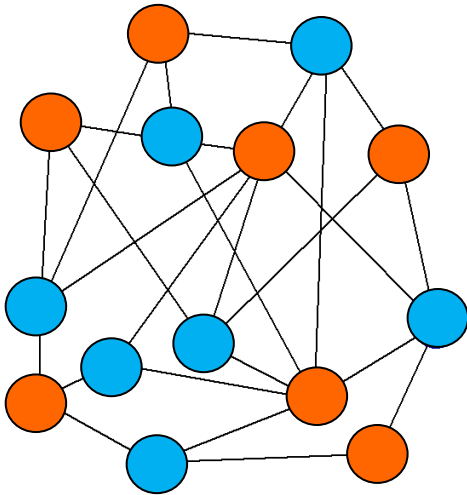


[Teorema] Un grafo è *bipartito* se e solo se non ammette cicli di lunghezza *dispari*

Caratterizzazione dei grafi bipartiti

...

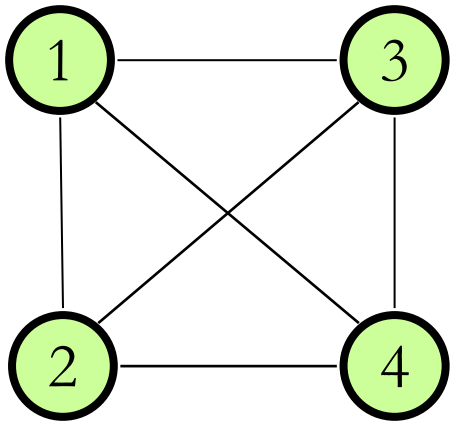
Quali di questi grafi è *bipartito*?



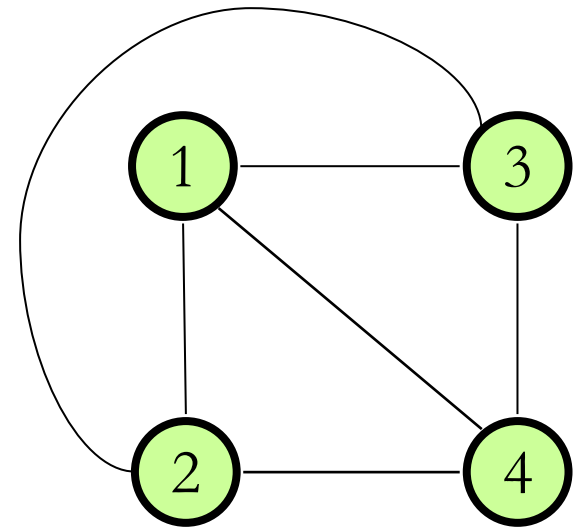
[Teorema] Un grafo è *bipartito* se e solo se non ammette cicli di lunghezza *dispari*

Grafo planare

Un grafo $G = (V, E)$ è **planare** se può essere disegnato nel piano in modo che nessuna coppia di archi si intersechi.



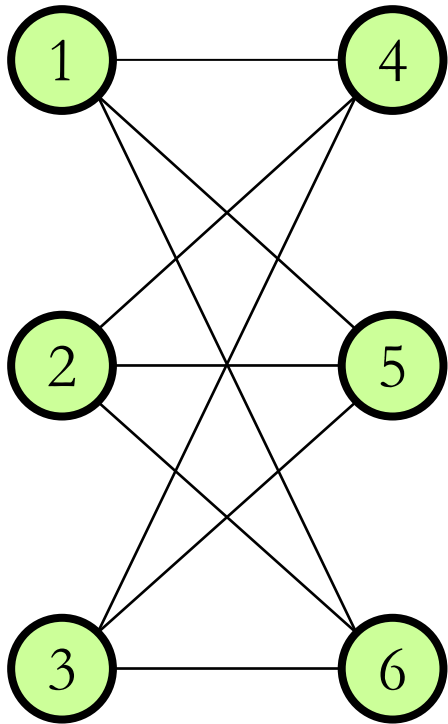
K_4 è un grafo *planare*



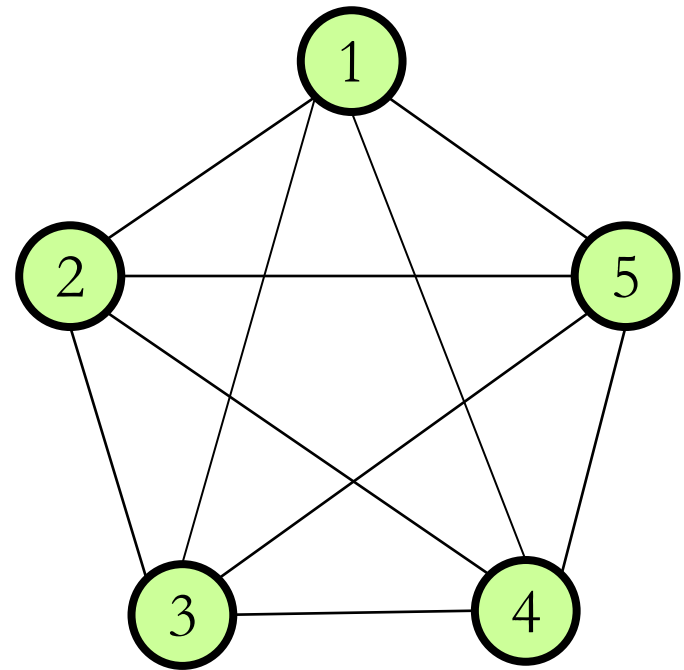
...infatti

Grafo planare

Un grafo $G = (V, E)$ è **planare** se può essere disegnato nel piano in modo che nessuna coppia di archi si intersechi.



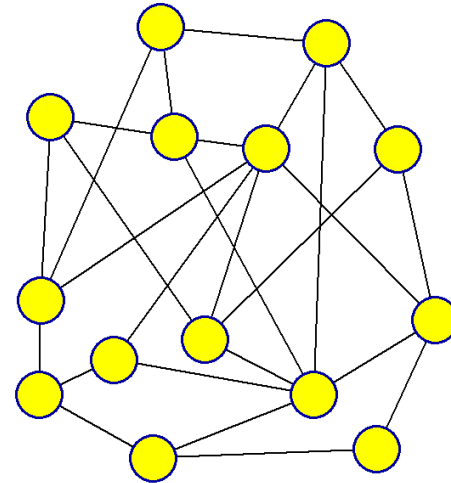
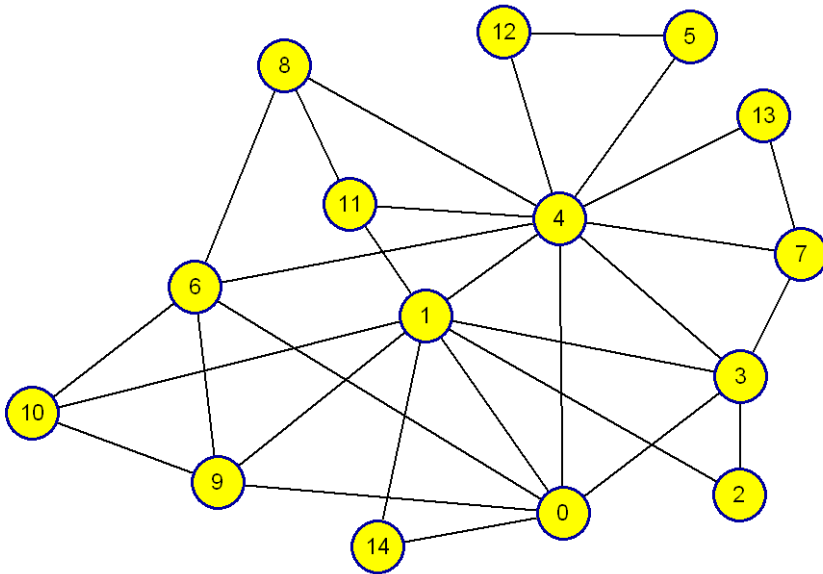
$K_{3,3}$ **non** è un grafo *planare*



K_5 **non** è un grafo *planare*

Caratterizzazione dei grafi planari

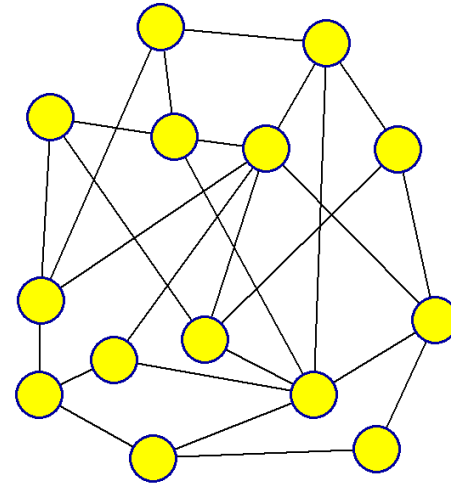
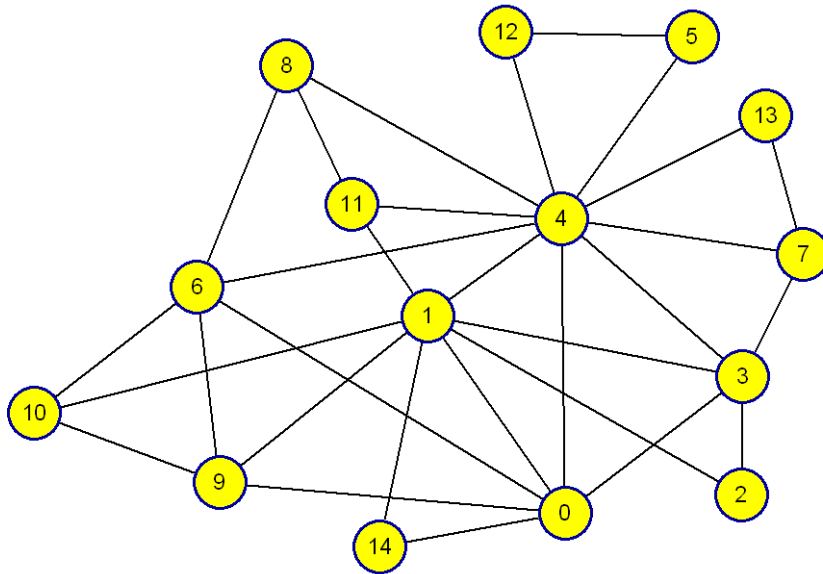
Quali di questi grafi è **planare**?



Caratterizzazione dei grafi planari

...

Quali di questi grafi è *planare*?

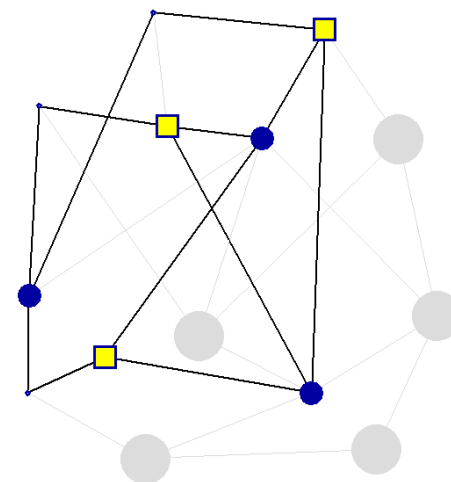
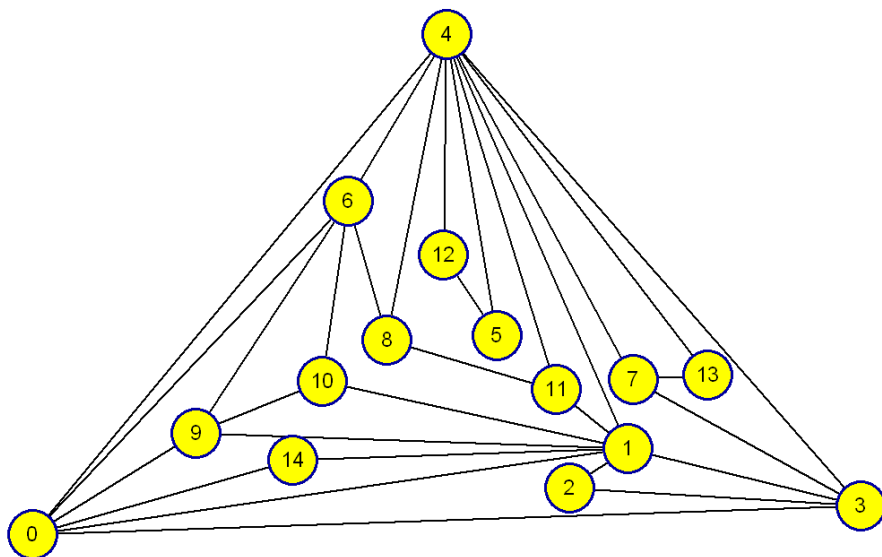


[Teorema di Kuratowski] Un grafo è *planare* se e solo se **non** ammette alcun sottografo omeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$

Caratterizzazione dei grafi planari

...

Quali di questi grafi è *planare*?

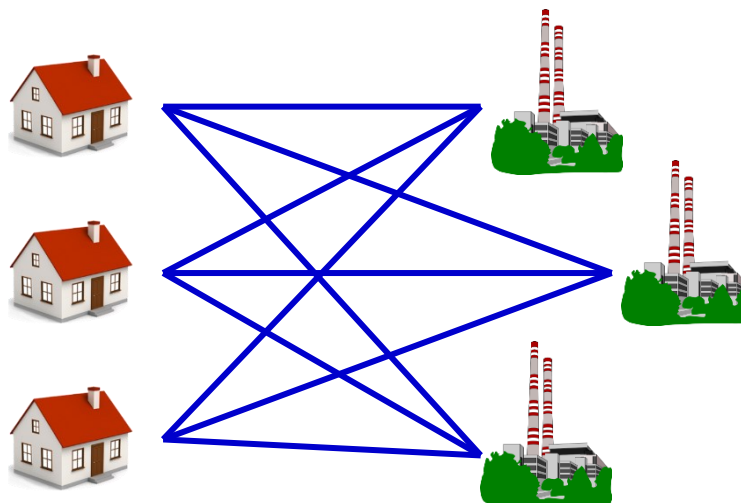


[Teorema di Kuratowski] Un grafo è *planare* se e solo se **non** ammette alcun sottografo omeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$

Un po' di enigmistica

...

- Tre edifici devono essere collegati alle centrali di energia elettrica, acqua e gas. E' possibile che ciò venga fatto senza intersecare le condutture?



Elementare! Il grafo corrispondente è $K_{3,3}$ che non è planare: non è possibile realizzare le condutture senza intersezione!



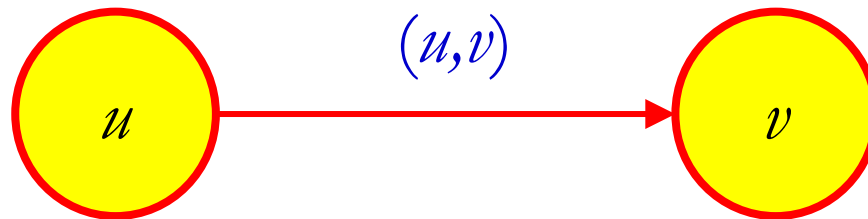
Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

Grafi orientati (o diretti, o asimmetrici)

Un arco **orientato** (u, v) è una coppia ordinata di nodi

arco **uscente** da u e **entrante** in v



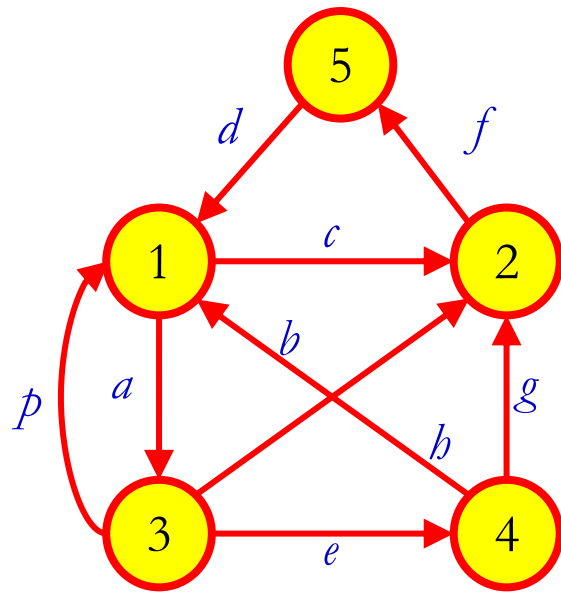
nodo di partenza
(o **coda**)

nodo di arrivo
(o **testa**)

$$(u, v) \neq (v, u)$$

Grafi orientati (o diretti o asimmetrici)

Un grafo $G = (V, E)$ è **orientato** se tutti gli archi sono orientati

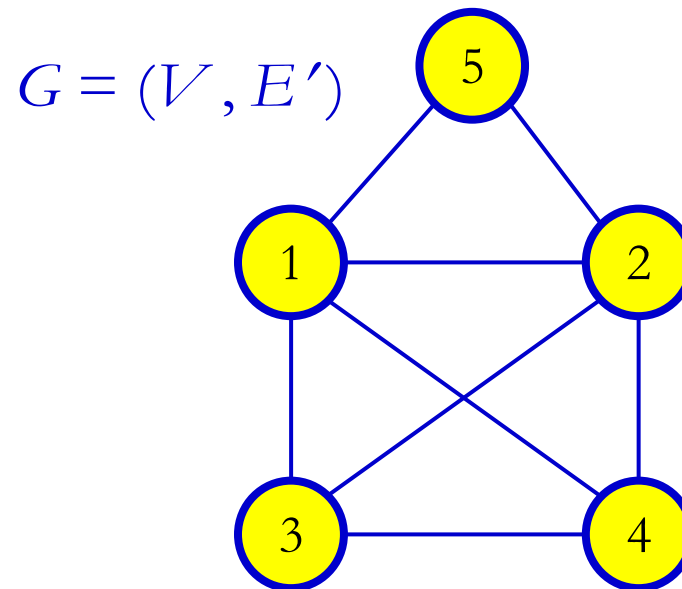
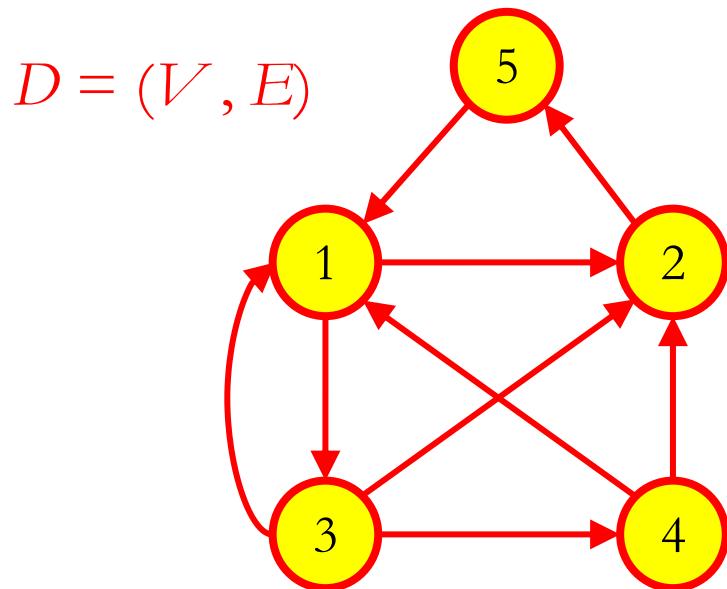


$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, p\}$$

$$a = (1, 3) \neq (3, 1) = p$$

Grafi orientati e supporto simmetrico

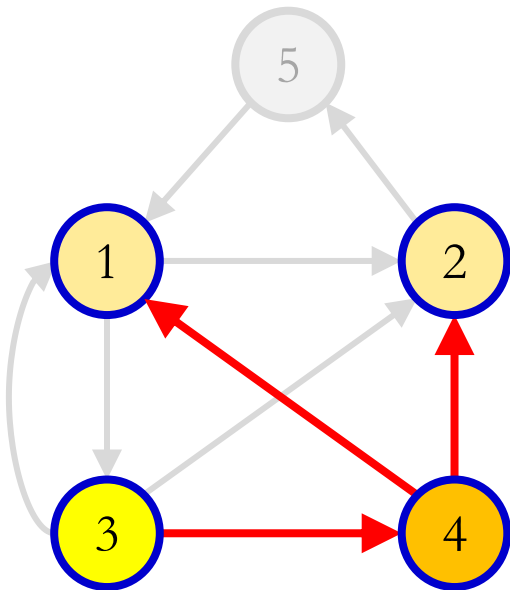


Il **supporto simmetrico** di un grafo **orientato** $D = (V, E)$ è il grafo **simmetrico** $G = (V, E')$ ottenuto ignorando l'orientamento degli archi di D e eliminando gli archi duplicati

Definizioni: intorno e stella di grafi orientati

$$N(v) = I(v) \cup O(v)$$

- $I(v)$ = nodi di arrivo in v
- $O(v)$ = nodi di partenza da v



$$I(4) = \{3\}$$

$$O(4) = \{1, 2\}$$

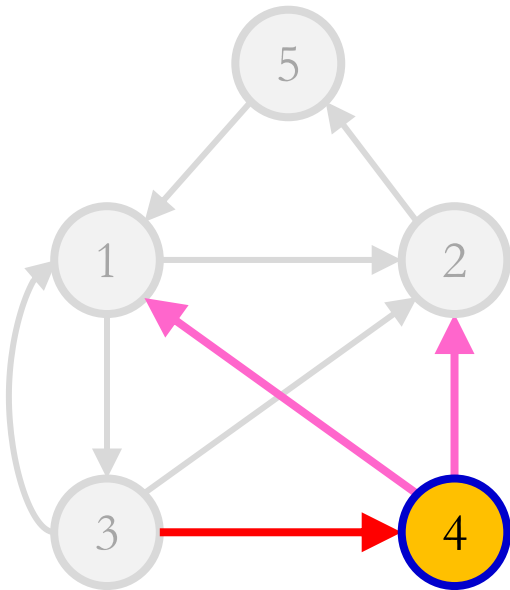
$$I(v) = \{u \in N \mid (u, v) \in E\}$$

$$O(v) = \{u \in N \mid (v, u) \in E\}$$

Definizioni: intorno e stella di grafi orientati

$$\delta(v) = \delta^+(v) \cup \delta^-(v)$$

- $\delta^+(v)$ = stella uscente da v
- $\delta^-(v)$ = stella entrante in v



$$\delta^+(4) = \{(4, 1), (4, 2)\}$$

$$\delta^-(4) = \{(3, 4)\}$$

$$\delta^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$$

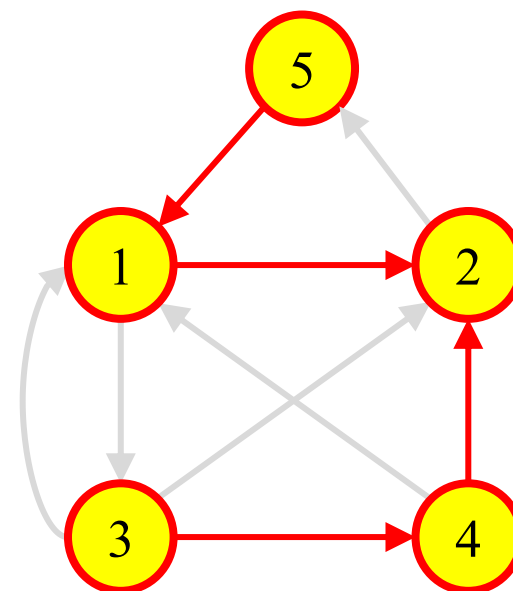
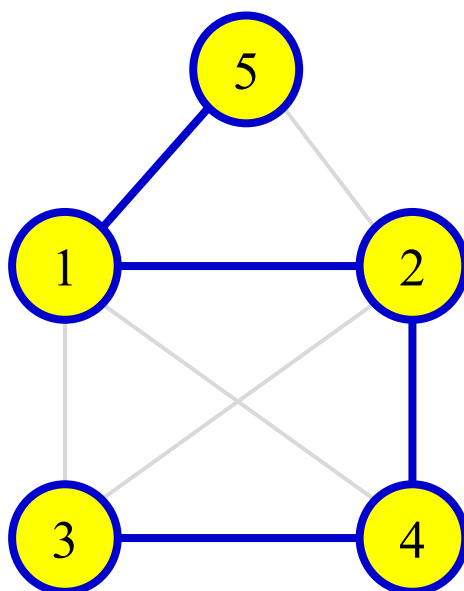
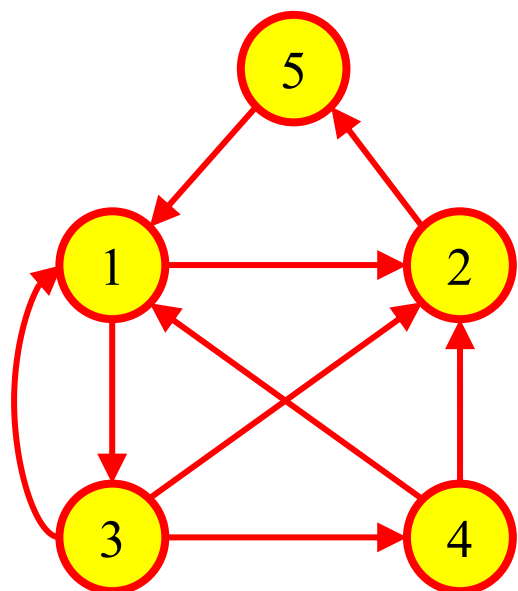
$$\delta^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$$

Grafi orientati: cammini e cicli

I **cammini**, **percorsi** e **cicli** di un grafo orientato $D = (V, E)$ sono tutti e soli quelli definiti sul supporto simmetrico di D .

$D = (V, E)$

supporto simm. di D



$P = [\{5, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 3\}]$

Grafi orientati: cammini e cicli

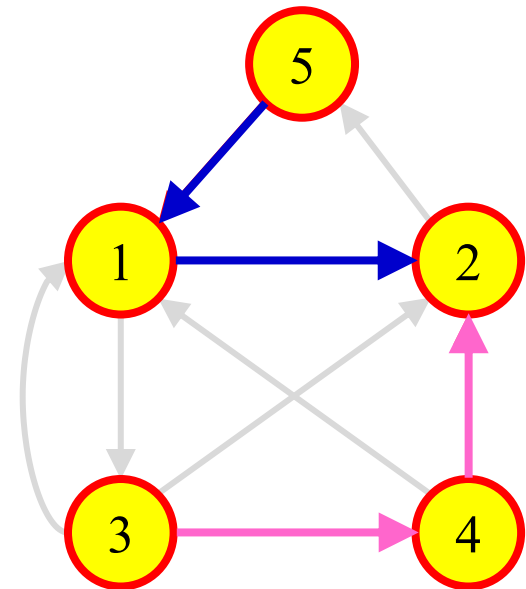
I **cammini**, **percorsi** e **cicli** di un grafo orientato $D = (V, E)$ sono tutti e soli quelli definiti sul supporto simmetrico di D .

arco in avanti: orientato concordemente a P

arco all'indietro: orientato in direzione opposta a P

Gli archi diretti $(5,1)$ e $(1,2)$ sono archi in avanti di P

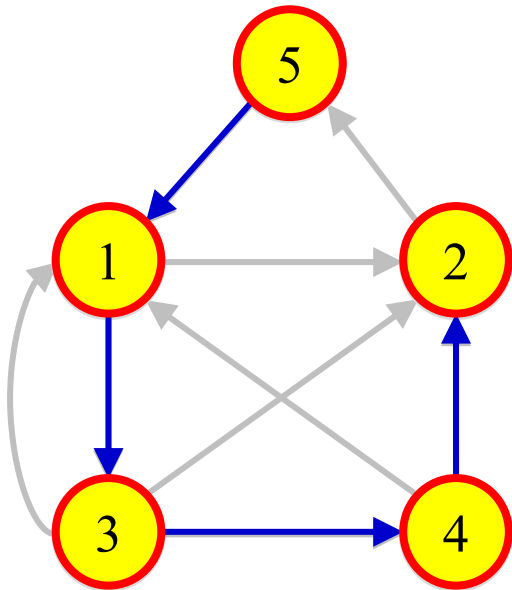
Gli archi diretti $(4,2)$ e $(3,4)$ sono archi all'indietro di P



$$P = [\{5,1\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{4,3\}]$$

Grafi orientati: cammini e cicli

Un cammino, percorso o ciclo di un grafo orientato $D = (V, E)$ è **orientato** (o **diretto**) se formato esclusivamente da archi in avanti.

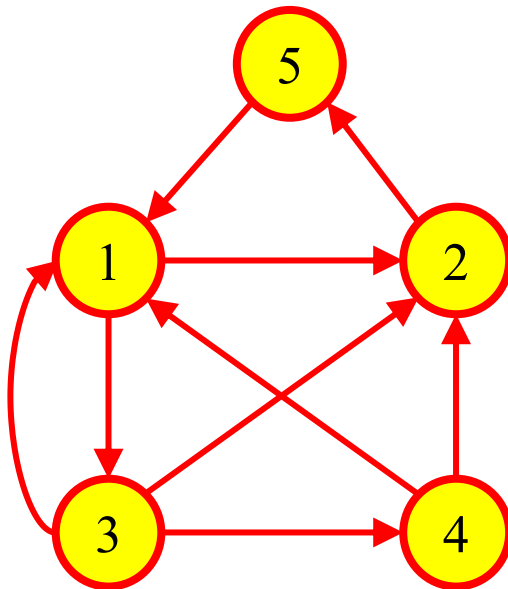


Il percorso $P = [\{5,1\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{4,2\}]$ è diretto perché formato esclusivamente da archi diretti in avanti.

Forte connessione

Due nodi $u, v \in V$ di un grafo orientato D si dicono **fortemente connessi** se esiste in D un cammino orientato tra u e v e un cammino orientato tra v e u

D



In questo grafo tutte le coppie di nodi sono fortemente connesse

Sommario

- Introduzione
- Motivazioni e origini storiche
- Definizioni e proprietà di base
- Isomorfismi tra grafi
- Grafi di base
- Classi di grafi
- Grafi orientati
- Rappresentazioni
- Appendice

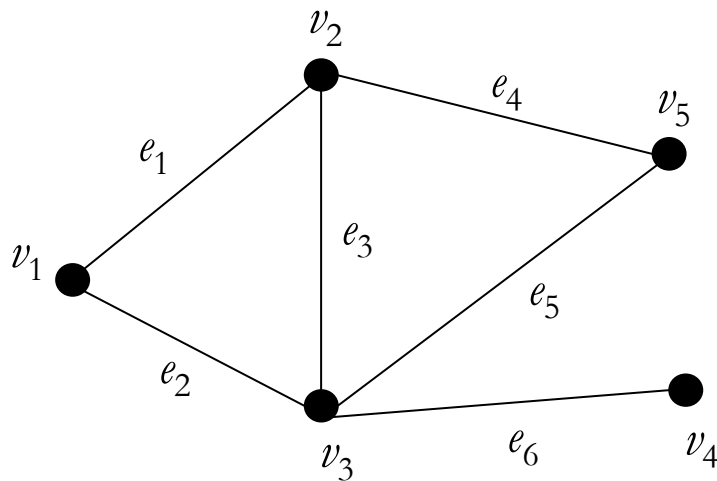
Rappresentazioni

- La rappresentazione grafica non è idonea per la manipolazione algebrica dei grafi né per il loro trattamento automatico mediante calcolatore. Esistono rappresentazioni più adeguate:
 - Matrice di adiacenza
 - Matrice di incidenza
 - Lista di adiacenza

Matrice di adiacenza nodi-nodi

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, la matrice di adiacenza nodi-nodi è una matrice quadrata $A_G(n \times n)$, con $n = |V|$, tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ sono adiacenti, cioè se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

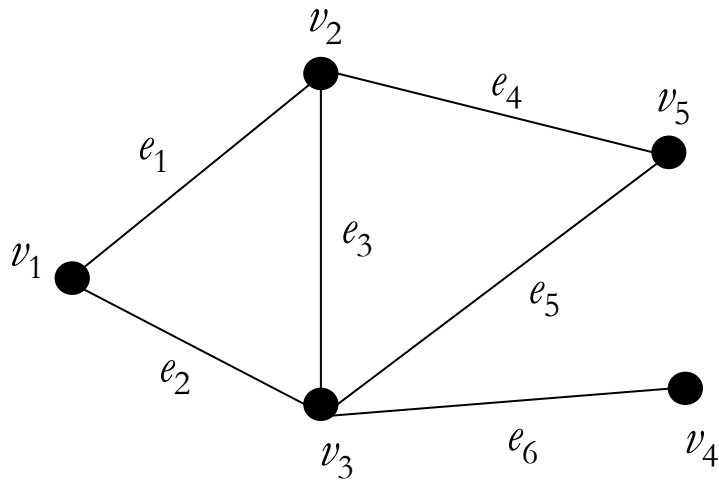


$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matrice di adiacenza archi-archi

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, la matrice di adiacenza archi-archi è una matrice quadrata $A_G(m \times m)$, con $m = |E|$, tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } e_i \text{ e } e_j \text{ sono adiacenti} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



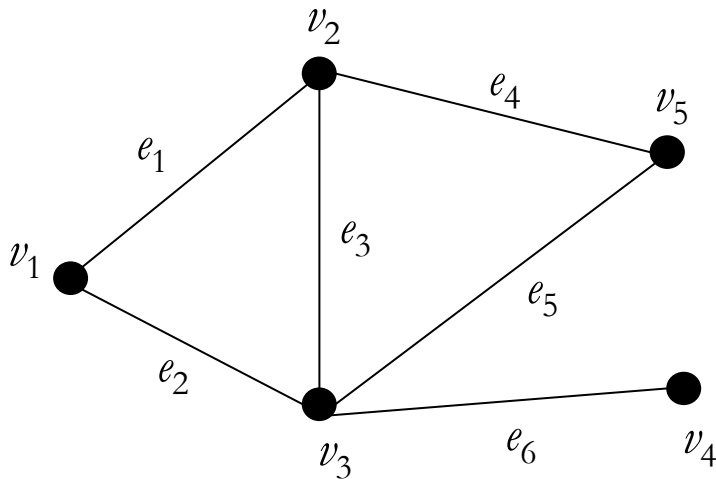
$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{blue}{1} & \color{red}{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 \\ \color{blue}{1} & 0 & \color{blue}{1} & \color{red}{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \color{blue}{1} & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{1} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matrice di incidenza nodi-archi

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, la matrice di incidenza nodi-archi

è una matrice $E_G(n \times m)$, con $n = |V|$ e con $m = |E|$, tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } e_j \text{ è incidente su } v_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

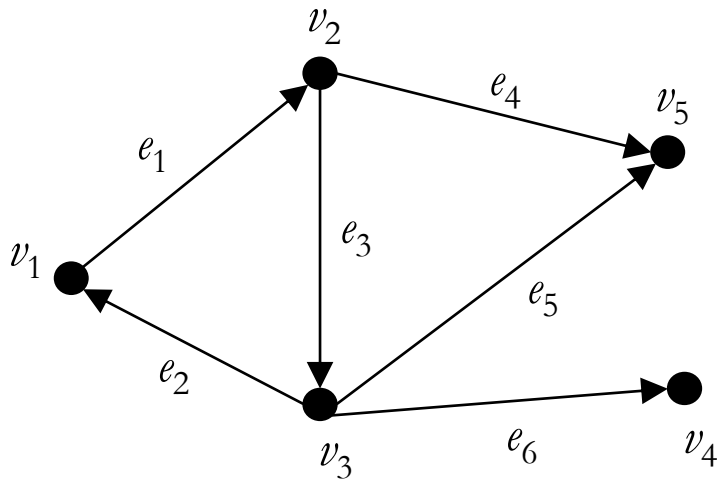


$$E_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matrice di incidenza nodi-archi: grafi orientati

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, la matrice di incidenza nodi-archi è una matrice $E_G(n \times m)$, con $n = |V|$ e con $m = |E|$, tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } v_i \text{ è la testa di } e_j \\ 1 & \text{se } v_i \text{ è la coda di } e_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$E_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

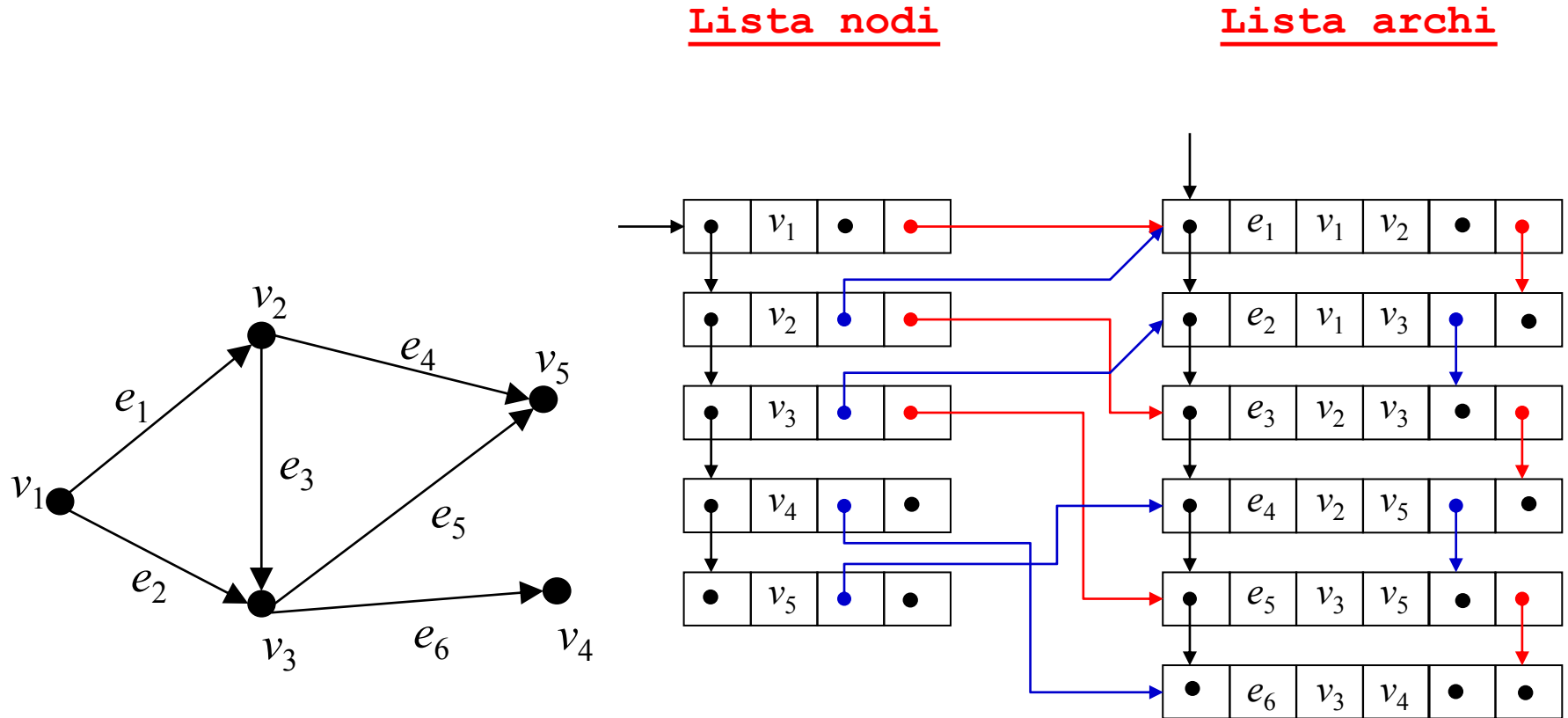
Lista di adiacenza

- Solo $2m$ elementi sono non nulli su un totale di n^2 elementi di una matrice di adiacenza nodi-nodi e $n \cdot m$ elementi di una matrice di incidenza.
- La rappresentazione con matrici è poco efficiente dal punto di vista dell'occupazione di memoria
- In alternativa si possono usare liste di adiacenza per stelle uscenti e/o entranti:

```
typedef struct Nodo{  
    Nodo    *succ;  
    int     nome;  
    Arco    *primo_stella_in;  
    Arco    *primo_stella_out;  
};
```

```
typedef struct Arco{  
    Arco    *succ;  
    int     nome;  
    Nodo    *coda;  
    Nodo    *testa;  
    Arco    *succ_stella_in;  
    Arco    *succ_stella_out;  
};
```

Lista di adiacenza, esempio



Esercizi

Scrivere un programma in linguaggio C/C++ che, dato in input un grafo G , determini

- se i nodi dati u, v siano connessi
- tutti i nodi connessi a un dato nodo u
- il numero di componenti connesse
- Il grado di un nodo dato u
- un cammino, se esiste, tra i nodi dati u, v

(Utilizzare le liste di adiacenza per rappresentare il grafo)

Letture ricreative e contenuti multimediali

1. P. M. Higgins,
La matematica dei social network. Una introduzione alla teoria dei grafi
Dedalo, 2011
2. Brian Eno
Thursday Afternoon
1985

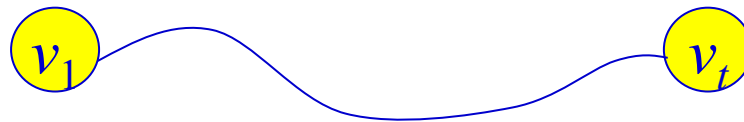
Appendice

grafi hamiltoniani: una condizione sufficiente

[Ore theorem (1960)] A graph $G = (V, E)$ with at least 3 vertices and $d(u) + d(v) \geq n$ for all pairs u, v of non-adjacent vertices is hamiltonian

Let P be a simple path of G of *maximum* length, with say t vertices.

If needed, renumber the vertices so that $P = [v_1, \dots, v_t]$



Observations

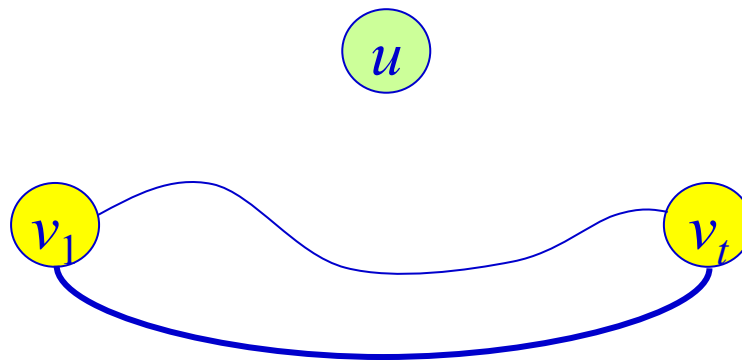
1. All the neighbours of v_1 and v_t are vertices of P , otherwise a longer path exists.
2. If u, v are non-adjacent vertices then their neighbourhoods have at least a vertex in common, otherwise $d(u) + d(v) \leq n - 2$

[Ore theorem (1960)] A graph $G = (V, E)$ with at least 3 vertices and $d(u) + d(v) \geq n$ for all pairs u, v of non-adjacent vertices is hamiltonian

Case a. $\{v_1, v_t\} \in E$

$\Rightarrow C = [v_1, \dots, v_t, v_1]$ is an hamiltonian cycle, i.e., $t = n$

Indeed, if $t < n$ then there exists a vertex $u \notin P$ which, by obs 1., cannot be adjacent to v_1

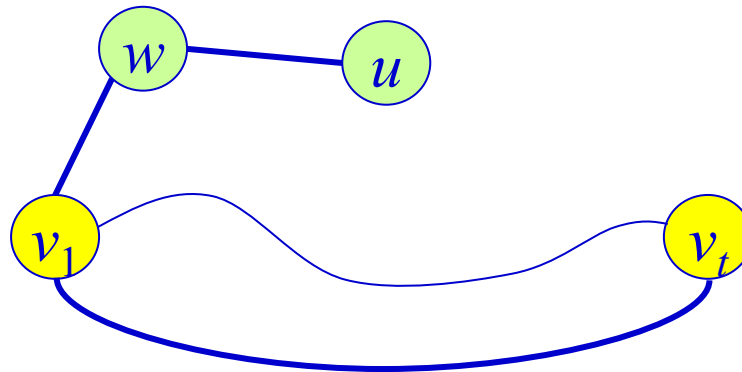


[Ore theorem (1960)] A graph $G = (V, E)$ with at least 3 vertices and $d(u) + d(v) \geq n$ for all pairs u, v of non-adjacent vertices is hamiltonian

Case a. $\{v_1, v_t\} \in E$

$\Rightarrow C = [v_1, \dots, v_p, v_1]$ is an hamiltonian cycle, i.e., $t = n$

Since u and v_1 are non-adjacent, by obs 2., there must be a vertex w adjacent to both u and v_1 .



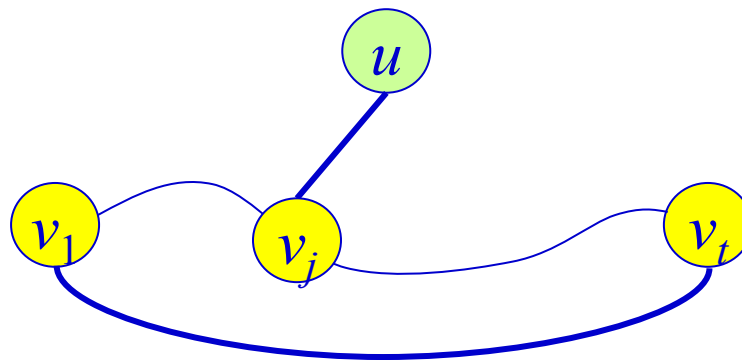
[Ore theorem (1960)] A graph $G = (V, E)$ with at least 3 vertices and $d(u) + d(v) \geq n$ for all pairs u, v of non-adjacent vertices is hamiltonian

Case a. $\{v_1, v_t\} \in E$

$\Rightarrow C = [v_1, \dots, v_p, v_1]$ is an hamiltonian cycle, i.e., $t = n$

Since w is adjacent to v_1 , by obs. 1, it must be part of the path P , say v_j

But now, the path $[u, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p, v_1, \dots, v_{j-1}]$ is longer than P .

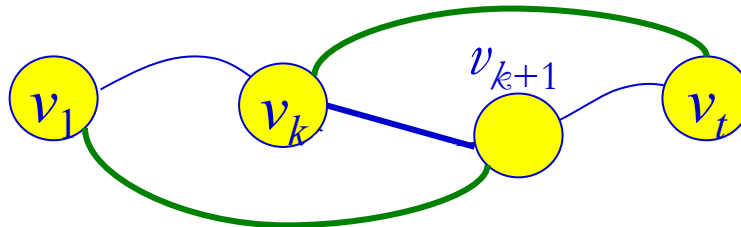


[Ore theorem (1960)] A graph $G = (V, E)$ with at least 3 vertices and $d(u) + d(v) \geq n$ for all pairs u, v of non-adjacent vertices is hamiltonian

Case b. $\{v_1, v_t\} \notin E$

By obs 1. $d(v_1) \leq t - 2$.

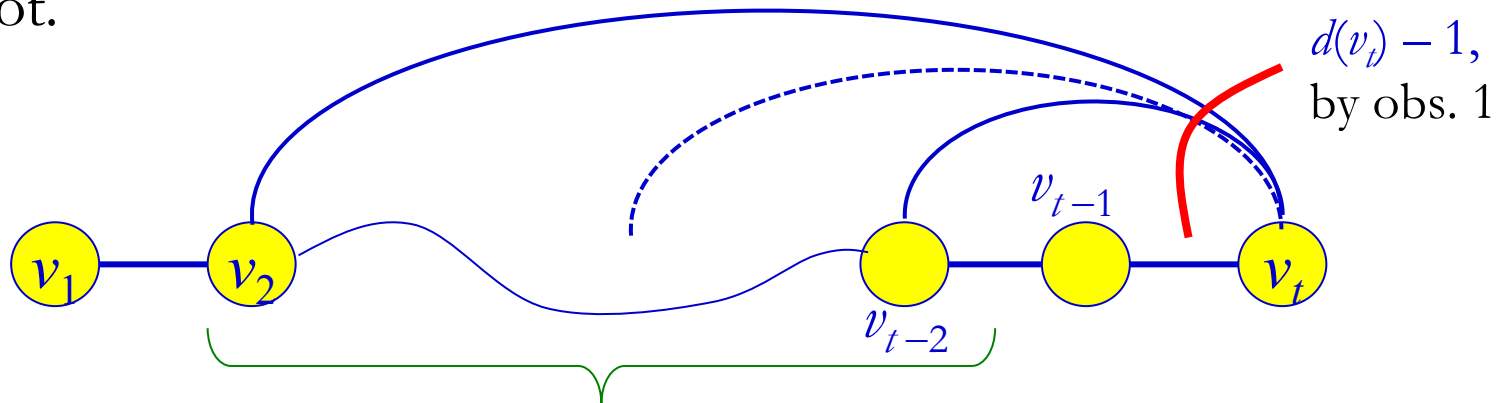
Moreover, we can claim that there is a vertex v_k of P such that v_k is adjacent to v_t and v_{k+1} is adjacent to v_1



[Ore theorem (1960)] A graph $G = (V, E)$ with at least 3 vertices and $d(u) + d(v) \geq n$ for all pairs u, v of non-adjacent vertices is **hamiltonian**

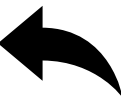
Case b. $\{v_1, v_t\} \notin E$

Suppose not.



If for any vertex v_k adjacent to v_t the vertex v_{k+1} is non-adjacent to v_1 follows that:

$$d(v_1) \leq t - 2 - (d(v_t) - 1) = t - 1 - d(v_t)$$



[Ore theorem (1960)] A graph $G = (V, E)$ with at least 3 vertices and $d(u) + d(v) \geq n$ for all pairs u, v of non-adjacent vertices is hamiltonian

Case b. $\{v_1, v_t\} \notin E$

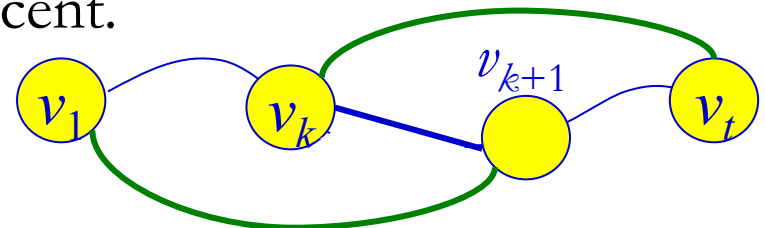
$$d(v_1) \leq t - 1 - d(v_t)$$

$$d(v_t) + d(v_1) \leq t - 1 - d(v_t) + d(v_t)$$

$$d(v_t) + d(v_1) \leq t - 1$$

but v_t and v_1 are non-adjacent and by hp. must be $d(v_t) + d(v_1) \geq n$

Finally, observe that $v_1 - v_k - v_t - v_{t-1} - v_{t-2} - \dots - v_{k+1}$
is a simple path of maximum length whose
endpoints are adjacent.



Caratterizzazione degli alberi

A graph $G = (V, E)$ is a tree
if and only if is **connected** and has $|V| - 1$ edges.

G tree $\Rightarrow G$ connected and with $|V| - 1$ edges

- By definition G is connected.
- If G is a tree then it has at least a leaf v . If we remove v , the graph G' with vertices in $V \setminus \{v\}$ still is a tree (because we neither disconnect G nor introduce any cycle).
- Again, G' has at least a leaf u and therefore the process can be repeated until a graph with a single vertex is obtained.
- At this point, $|V| - 1$ edges has been removed.

A graph $G = (V, E)$ is a tree
if and only if is **connected** and has $|V| - 1$ edges.

G connected and with $|V| - 1$ edges $\Rightarrow G$ tree

We have to show that G is acyclic.

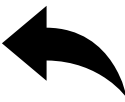
Observe that

1. C_n has n vertices and n edges.
2. G has at least a leaf v . Indeed, if not (i.e., if $d(u) \geq 2 \ \forall u$)

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E| \geq 2|V| \quad \text{but } |E| < |V| \text{ by hypothesis.}$$

Now we can apply the previous elimination process of leaves; since each time a single vertex and a single edge are removed, we cannot never obtain a subgraph with $|V| = |E|$

Tree properties



Every tree $T = (V, E)$ with $n \geq 2$ vertices has at least two leaves

- Pick a vertex $v \in V$
- Since T is connected and with $n \geq 2$, $\exists u \in V$ s.t. $\{v, u\} \in E$.
- If $d(u) = 1$ a leaf has been found, otherwise the same argument can be repeated.
- Since T is acyclic, we reach a leaf w after a finite number of steps.
- Apply the same argument starting from w .

