

Problemi, modelli e algoritmi

ver 2.6.0



Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it
tel. 071 - 2204823



- Intanto rompiamo un po' il ghiaccio...
- La Ricerca Operativa
- Le tre parole chiave
- Problemi e modelli
- Programmazione Matematica

- Intanto rompiamo un po' il ghiaccio...
- La Ricerca Operativa
- Le tre parole chiave
- Problemi e modelli
- Programmazione Matematica

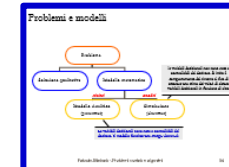


Ricerca Operativa: genesi del termine

- OR = Operations Research (o Operational Research)
- Research on military operations
- Ricerca del modo ottimale di condurre operazioni militari (piani di studio, di corso, di efficienza, ecc.)

Le tre parole chiave

"Disciplina che studia l'utilizzo di modelli matematici per la soluzione di problemi decisionali che si presentano in scenari organizzativi complessi (dati, risorse, obiettivi)"



Programmazione matematica

Problema di ottimizzazione:

$$\min z = f(x)$$
$$x \in X$$

Definizione: Problema di ottimizzazione matematica. Si ha un insieme non vuoto X di n variabili reali, una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme S di X . Si dice che x^* è una soluzione ottima se $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in S$.

Un problema decisionale



[Problema] La *fabbrica del cioccolato* produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo **A** e **B**?



	composizione			
	latte	cioccolato	zucchero	burro
crema A	40%	40%	10%	10%
crema B	24%	45%	31%	-
disponibilità (Kg)	312	360	160	70

Un problema decisionale: possibili strategie

	composizione				profitto
	latte	cioccolato	zucchero	burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (Kg)	312	360	160	70	

- La crema B mi fa guadagnare di più: produco B quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco A.
- Il burro è utilizzato solo per A: produco A quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco la crema B.
- uso metà del magazzino per A e metà del magazzino per B.
- divido il magazzino tra A e B in base al rapporto delle percentuali.



Un problema decisionale: possibili strategie ...

Profitto totale

• produco B quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco la crema A.	14.452 €
• produco A quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco la crema B.	21.233 €
• uso metà del magazzino per A e metà del magazzino per B.	15.976 €
• divido il magazzino tra A e B in base al rapporto delle percentuali.	9.756 €

Un problema decisionale: nightmares

...

*21.233 € è il profitto
...neanche un euro in
più?*



Entrepreneur

*La strategia utilizzata è
la migliore possibile?
...sempre?*



Operations researcher

Performance di una strategia

...

In genere valutabile con due **macroindicatori** :

- **robustezza della soluzione**

Cosa succede se i prezzi di vendita sono diversi (per esempio, se la **crema B** è venduta a **50 €/kg**)? Oppure se cambiano le disponibilità (per esempio se la quantità di **zucchero** aumenta a **600 kg**)?

- **qualità della soluzione**

Il profitto totale ottenuto è massimo?
Ovvero, quanto è distante dal potenziale massimo?

Punto di vista e aspetti peculiari del corso

- Interesse per la **soluzione generale** di un problema:

	composizione				profitto
	latte	cioccolato	zucchero	burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (Kg)	312	360	160	70	

Non siamo interessati alla soluzione numerica di **un caso** particolare

$$\begin{aligned} z &= \max \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i &\leq b_j \quad \forall j = 1, \dots, m \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Piuttosto, ci interessa individuare un **metodo / modello** che risolva il problema nella sua **forma generale**

- Interesse per la **struttura matematica** del problema (indipendentemente dal contesto tecnologico):

In generale si preferisce un'**astrazione** del problema/fenomeno allo scopo di **cogliere gli aspetti essenziali e trascurare i dettagli**.



La **semplificazione** è un valore e non un limite

Un problema decisionale: un altro esempio

[Problema] Il traffico di una rete telefonica si compone di pacchetti audio (tipo **A**) e pacchetti dati (tipo **B**) la dimensione dei quali è rispettivamente 25 e 28 Kbyte. Ogni pacchetto deve essere smistato da **ognuno** dei 4 router della rete. Considerando i tempi di processamento e la disponibilità in ore di ogni router (vedi tabella), qual è la massima quantità di byte che la rete riesce a processare?

	Router 1	Router 2	Router 3	Router 4
tipo A	4 ms	4 ms	7 ms	3 ms
tipo B	2 ms	3 ms	1 ms	3 ms
disponibilità (ore)	8	7.5	4	5.5

Interesse per la struttura matematica

[Problema] La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg.

Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo **A** e **B**?

	composizione				profitto
	latte	cioccolato	zucchero	burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (Kg)	312	360	160	70	

[Problema] Il traffico di una rete telefonica si compone di pacchetti audio (tipo **A**) e pacchetti dati (tipo **B**) la dimensione dei quali è rispettivamente 25 e 28 Kbyte. Tutti i pacchetti devono essere smistati da ognuno dei 4 router della rete. Considerando i tempi di processamento e la disponibilità in ore di ogni router (vedi tabella), qual è la massima quantità di byte che la rete riesce a processare?

	router 1	router 2	router 3	router 4	traffico
tipo A	4 ms	4 ms	7 ms	3 ms	25 Kb
tipo B	2 ms	3 ms	1 ms	3 ms	28 Kb
disp. (ore)	8	7.5	4	5.5	

max profitti

risorse scarse

Punto di vista e aspetti peculiari del corso

- Funzioni con **molte variabili**: $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z, w \dots)$
- Problemi di forma semplice (relazioni lineari) e per i quali di solito **non è difficile** trovare *una* soluzione.
- Interesse per la **miglior soluzione**, che invece di solito richiede *molti* calcoli



La matematica è uno **strumento** e non un fine

- fare matematica non è **fare calcoli** ma **risolvere problemi**

Approccio *passivo*

la matematica come «fine»

Calcolare l'integrale $A = \int_{\Omega} \log \frac{x}{y^2} dx dy$

con $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x < y^2 < x, 1 < xy < 2 \right\}$

$$A = \frac{1}{6} \log^2 4$$

Approccio *attivo*

la matematica come «strumento»

Come organizzare le operazioni allo scopo di minimizzare i tempi di risposta di un dato sistema di calcolo?

Associo un set di variabili x, y, \dots, z ai tempi di processamento delle singole operazioni, individuo le relazioni di interdipendenza (incompatibilità, precedenza)...

La Ricerca Operativa

Ricerca Operativa: genesi del termine

- **OR – Operations Research** (o Operational Research)
- **Research** on military **operations**
- **Ricerca** del modo *ottimale* di condurre **operazioni** militari (rispetto al rischio, al costo, all'efficacia, ecc.)

“Disciplina che studia l'utilizzo di metodi quantitativi
per la soluzione di problemi decisionali
che si presentano in strutture organizzate complesse
(sistemi organizzati)”

the *Science of better*

www.scienceofbetter.org

Origini storiche e evoluzione

- Origine “ufficiale”: II Guerra Mondiale (Gran Bretagna)
 - dislocazione ottimale di radar allo scopo di massimizzare la probabilità di intercettazione degli aerei nemici
 - coordinamento delle operazioni logistiche: spostamento di truppe, rifornimento di armi, formazione di equipaggi per missioni di volo (Berge)

«Una guerra non la vince il popolo più coraggioso, più ispirato o che ha ragione: la guerra la vince chi riesce a farsi abbattere il 5% in meno di aerei, o riesce a consumare il 5% in meno di carburante o spende il 5% in meno per rifornire le truppe»

- Dopoguerra: metodi simili applicati in ambito industriale e economico

sviluppo di modelli e algoritmi (1950 – 1960)

algoritmo del simplesso ([Dantzig](#))

1947

Programmazione su reti di flusso ([Ford](#), [Fulkerson](#), [Dijkstra](#))

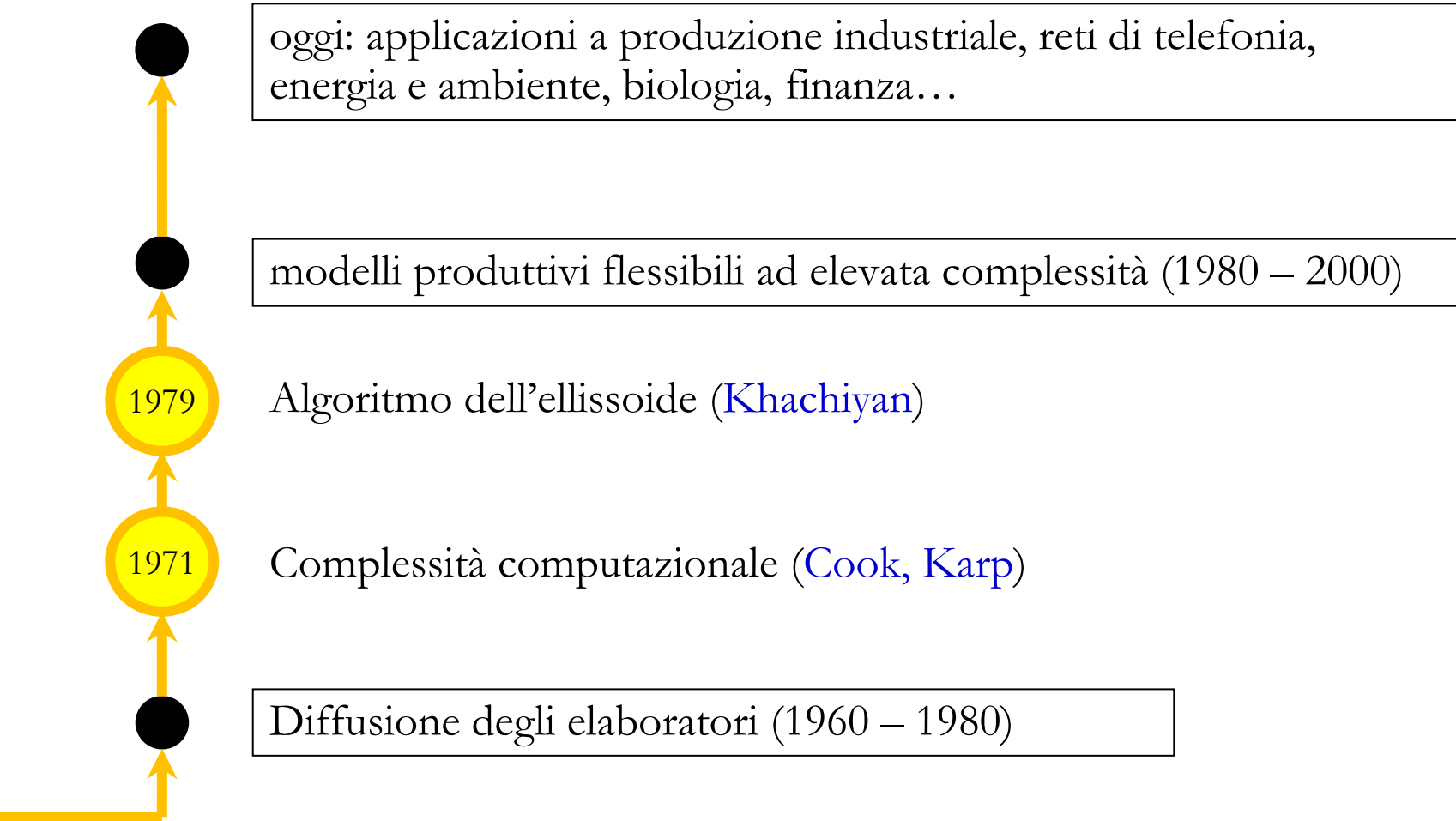
1956

Algoritmi poliedrali ([Gomory](#))

1958

Algoritmi enumerativi ([Doig](#), [Land](#))

1960



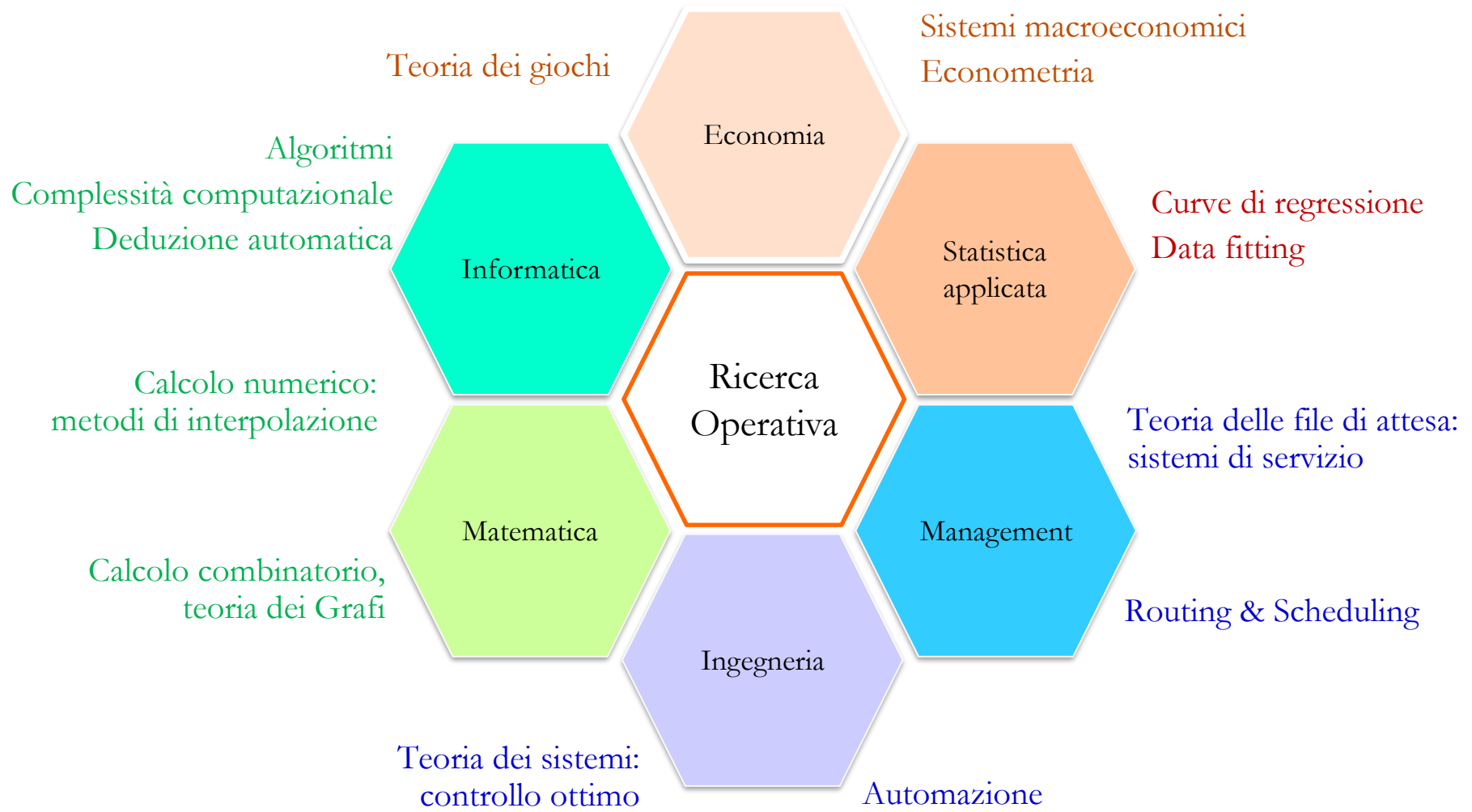
Applicazioni della *Ricerca Operativa*



Ricerca Operativa: alcuni casi di successo

- **Ministero tedesco delle infrastrutture:** politica di gestione delle acque (15 M\$)
- **Electrobras (Brasile):** allocazione ottimale di risorse idrauliche e termiche nel sistema nazionale di generazione di energia (43 M\$)
- **Texaco Inc.:** miscelazione ottimale nella produzione di carburante (30 M\$)
- **IBM:** integrazione della rete nazionale dei pezzi di ricambio (20 M\$)
- **American Airlines:** ottimizzazione del pricing e dell' overbooking (500 M\$)
- **Yellow Freight System:** ottimizzazione della rete di trasporto negli USA (17.3 M\$)
- **Dip. della salute del New Haven:** programma di ricambio delle siringhe per combattere il contagio dell'AIDS (33% in meno dei contagi)
- **Delta Airlines:** allocazione ottimale di aerei ai 2500 voli negli USA (100 M\$)
- **Digital Equipment Corp.:** riprogettazione dell'intera supply chain (800 M\$)
- **Procter & Gamble:** riprogettazione della catena di distribuzione (200 M\$)
- **Hewlett-Packard:** gestione ottimale dei livelli di scorta dei magazzini (280 M\$)

Collocazione della *Ricerca Operativa*



La tre parole chiave

Le tre parole chiave

“Disciplina che studia l'utilizzo di metodi quantitativi
per la soluzione di problemi decisionali
che si presentano in strutture organizzate complesse
(sistemi organizzati)”

parola chiave: *metodo quantitativo*

- *Quantitativo*, **agg.** Che concerne la quantità.
- *Quantità*, **s.f.** Entità valutabile o misurabile per numero, peso, dimensione o grandezza.

Un **metodo quantitativo** è una tecnica *numerica* utilizzata per ottenere una soluzione *numerica* di un problema

Qualitativo

«Una buona performance»

«Un margine scarso di miglioramento»

«Un buon livello di servizio»

«Una capacità produttiva sufficiente»

Quantitativo

«Un profitto che si scosta del 2,1% dal profitto massimo»

«Un miglioramento potenziale dello 0,5% »

«Un tempo medio di attesa di 2,3 minuti»

«Una capacità produttiva di almeno 150 pz/minuto»

parola chiave: *problema decisionale*

Problema decisionale: scegliere, tra diverse alternative plausibili (in genere **mooolte**), una *configurazione* del *sistema* dettata da un insieme di decisioni che consenta di soddisfare *al meglio* i requisiti prestazionali





- Uno o più **decisori** devono (o possono) fare delle scelte, ossia definire una **politica decisionale**, che concorrono a determinare la configurazione e l'evoluzione complessiva di un sistema (organizzato).
- Le scelte devono rispettare **vincoli** ambientali e/o **regole** di comportamento che definiscono l'insieme delle alternative possibili (**soluzioni ammissibili**).
- Ogni decisore sceglie in base a uno o più **criteri di utilità**. Un criterio di utilità, o **funzione obiettivo**, è una misura quantitativa di un determinato aspetto del sistema.

Variabili decisionali

« Ci sono i parametri noti; queste sono le cose che sappiamo di sapere. Sappiamo anche che ci sono incognite note; ovvero, sappiamo che ci sono cose che non sappiamo. Ma ci sono anche incognite non note - quelle che non sappiamo di non sapere [...]. E' in quest'ultima categoria che tendono a trovarsi quelle difficili»



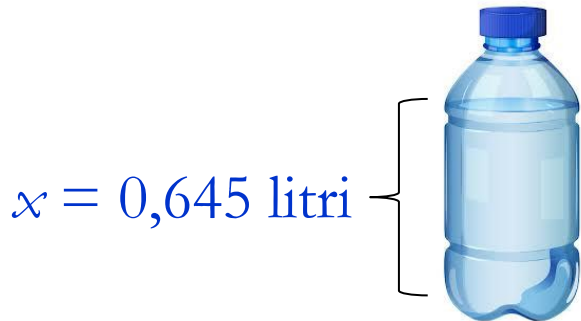
Donald Rumsfeld – segretario Difesa USA,
12 febbraio 2002

Risposta a una domanda sull'assenza di prove per le accuse al governo iracheno circa le presunte armi di distruzione di massa.

Una **politica decisionale** (ossia una soluzione di **un problema decisionale**) è descritta da un insieme di **variabili decisionali**

Una **variabile decisionale** è una variabile numerica che:

- stabilisce una quantità (litri contenuti in un serbatoio, numero di pezzi da produrre, durata di una lavorazione, ...)



$x = 8$ pz



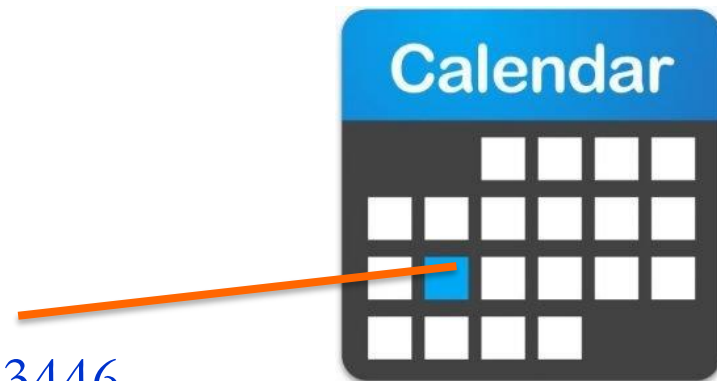
Una **politica decisionale** (ossia una soluzione di **un problema decisionale**) è descritta da un insieme di **variabili decisionali**

Una **variabile decisionale** è una variabile numerica che:

- stabilisce un istante (inizio o fine di una lavorazione,...)

$$x = 43446$$

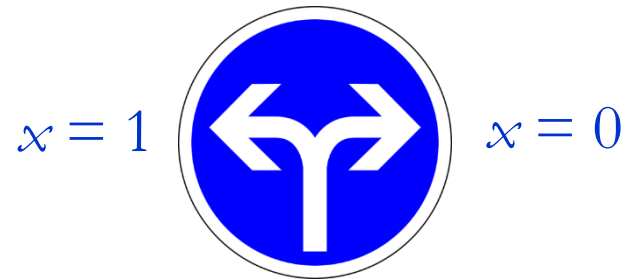
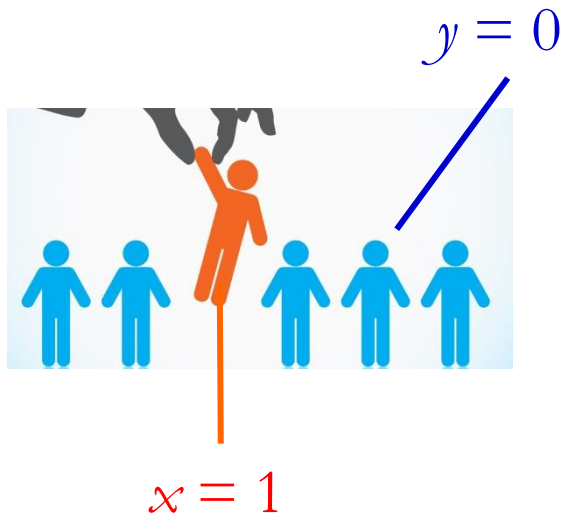
(codifica della data 12/12/2018)



Una **politica decisionale** (ossia una soluzione di **un problema decisionale**) è descritta da un insieme di **variabili decisionali**

Una **variabile decisionale** è una variabile numerica che:

- descrive una scelta (selezione, abbinamento,...

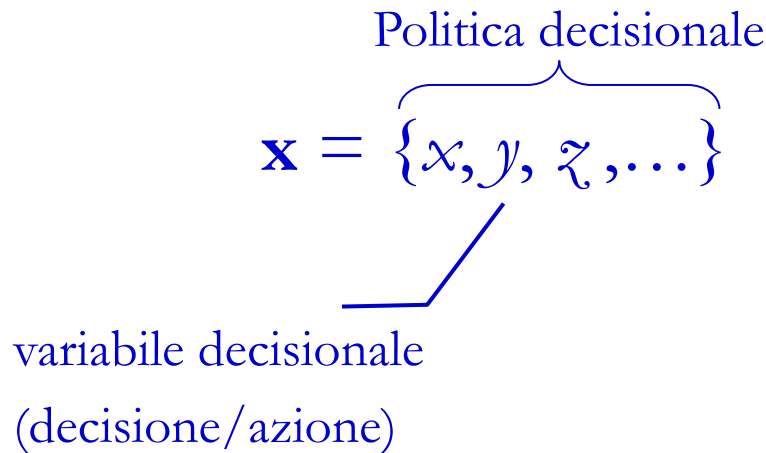


Una **politica decisionale** (ossia una soluzione di **un problema decisionale**)
è descritta da un insieme di **variabili decisionali**

$$\mathbf{x} = \{x, y, z, \dots\}$$

Politica decisionale

variabile decisionale
(decisione/azione)



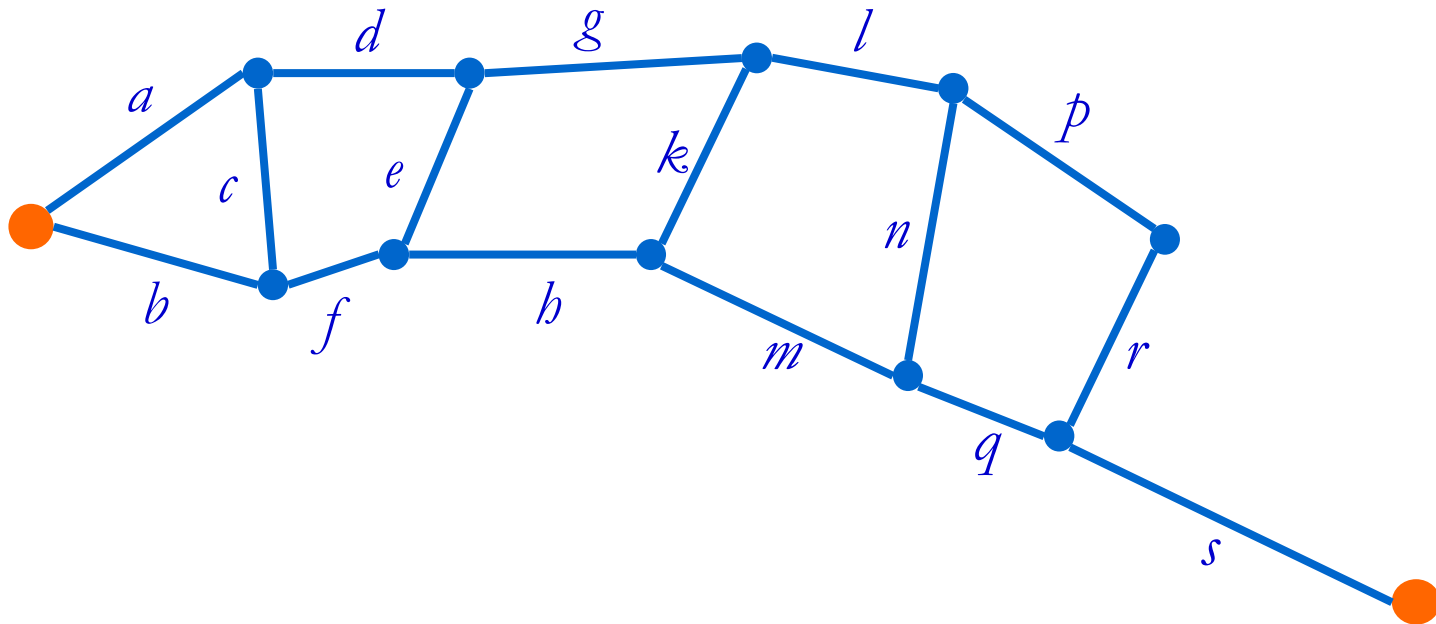
risolvere un problema decisionale significa
assegnare un valore numerico ad ogni variabile decisionale

Variabili decisionali: esempio

Problema decisionale: che strada fare per raggiungere Rimini da Torino?



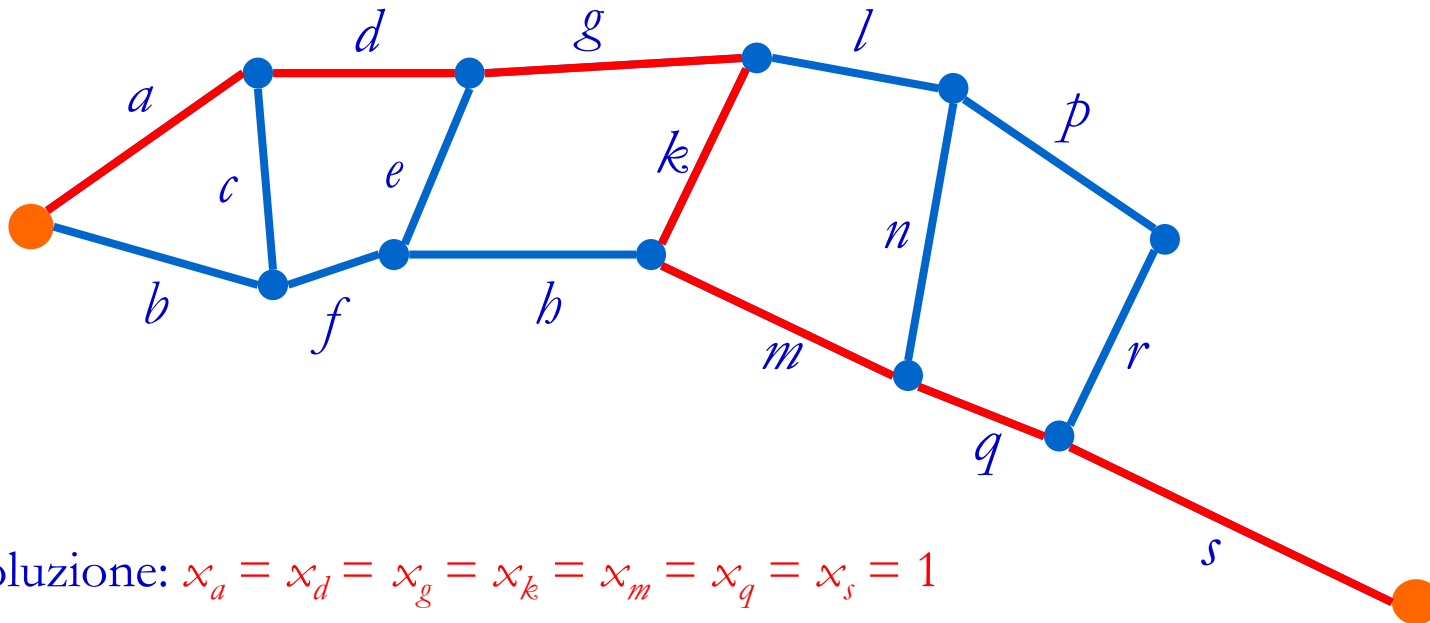
Problema decisionale: che strada fare per raggiungere Rimini da Torino?



Variabile decisionale: $x_i = 1$ se percorro il tratto i , $x_i = 0$ altrimenti

Politica decisionale: $\{x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_k, x_l, x_m, x_n, x_p, x_q, x_r, x_s\}$

Problema decisionale: che strada fare per raggiungere Rimini da Torino?

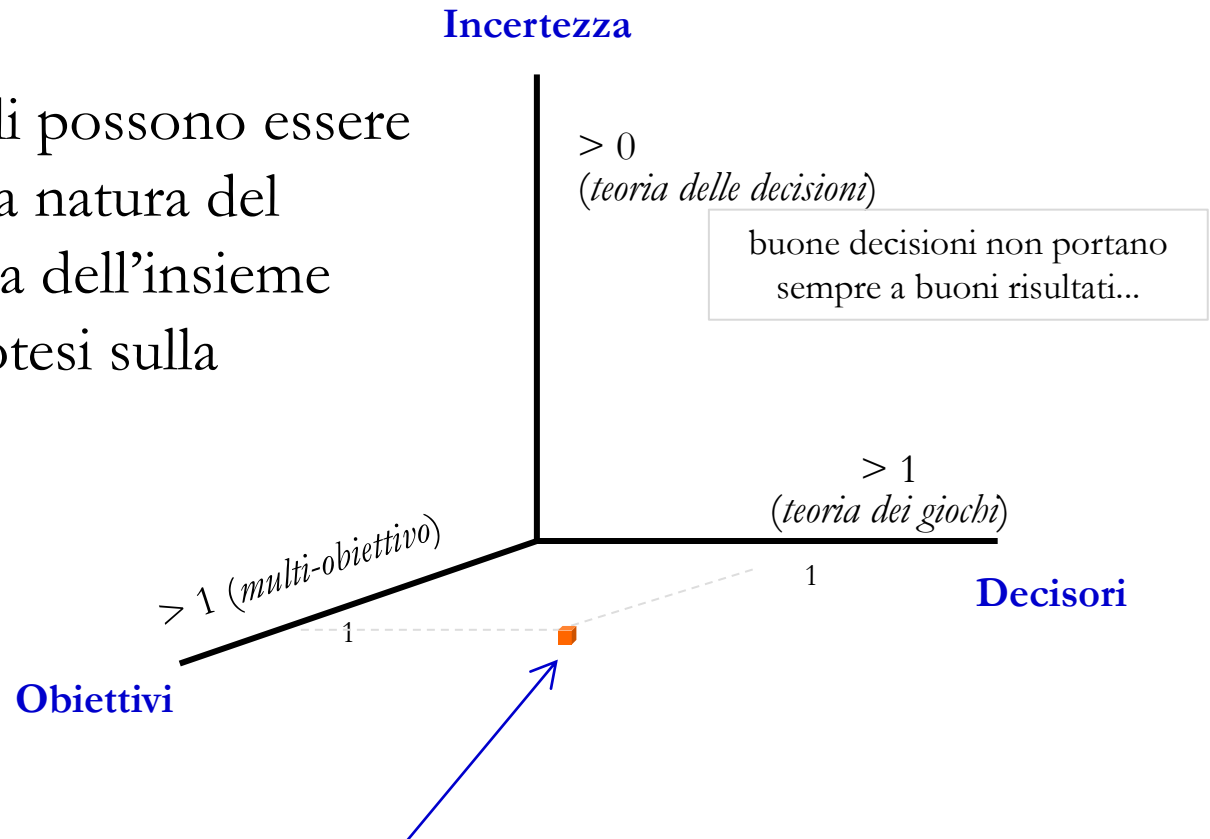


Usa soluzione: $x_a = x_d = x_g = x_k = x_m = x_q = x_s = 1$

tutte le altre variabili = 0

Problemi decisionali: tassonomia

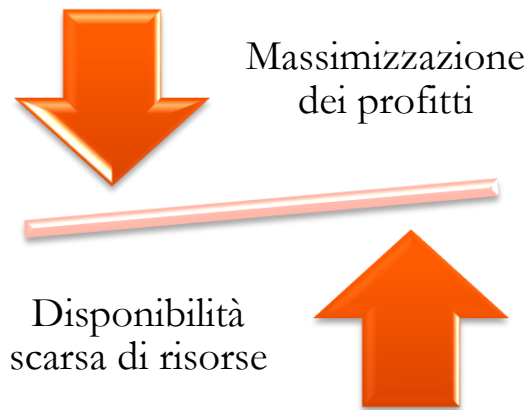
- I problemi decisionali possono essere classificati in base alla natura del decisore, alla struttura dell'insieme ammissibile e alle ipotesi sulla funzione obiettivo



in questo corso ci occuperemo di problemi a **singolo** decisore, **singola** funzione obiettivo e informazione **certa**

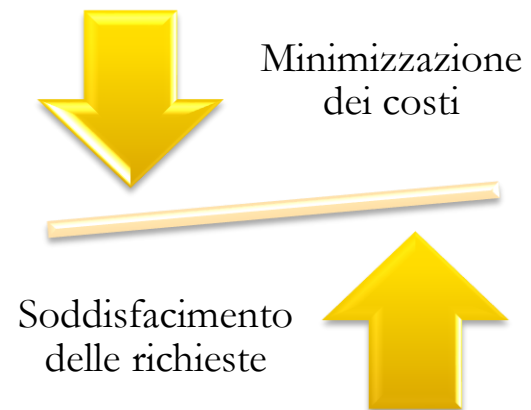
Problema decisionale: struttura tipica

- Di solito un **problema decisionale** è interessante quando la soluzione (... non scontata) consiste in una sorta di **compromesso**:



- Come si ottiene il massimo con le risorse a disposizione ?

- Come si esegue un compito col minimo sforzo ?



Problema decisionale: esempio

vincoli

La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg.

Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti qual è il **massimo guadagno** che si può ottenere **producendo A e B?**

decisioni

obiettivo

- Quali sono le decisioni da prendere e come si «codificano» ?



Problema decisionale: esempio

...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto \times kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Le decisioni riguardano le **quantità** di **A** e **B** da produrre e possono essere codificate con due variabili decisionali:

- x = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema **A**
- y = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema **B**

Problema decisionale: esempio

...

	composizione				Profitto \times kg
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Obiettivo : massimizzare il guadagno:

$$\max (25x + 28y)$$

Se produco x kg di crema A guadagno $25x$ Euro

Problema decisionale: esempio

...

	composizione				Profitto × kg
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli : la quantità totale di latte utilizzata non può essere superiore alla disponibilità di latte in magazzino:

$$0.4x + 0.24y \leq 312$$

kg di latte che uso se
produco x kg di A

kg di latte che uso se
produco y kg di B

disponibilità
(in kg) di latte

Problema decisionale: esempio

...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto \times kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli: vincoli analoghi vanno espressi per il cioccolato, lo zucchero e il burro:

- $0.4x + 0.45y \leq 360$
- $0.1x + 0.31y \leq 160$
- $0.1x \leq 70$



Problema decisionale: esempio

...

modello completo di programmazione matematica

$$z = \max 25x + 28y$$

$$C1: \quad 0.4x + 0.24y \leq 312$$

$$C2: \quad 0.4x + 0.45y \leq 360$$

$$C3: \quad 0.1x + 0.31y \leq 160$$

$$C4: \quad 0.1x \leq 70$$

$$C5: \quad x, y \geq 0$$

funzione obiettivo

vincolo sulla disponibilità di latte

vincolo sulla disponibilità di cioccolato

vincolo sulla disponibilità di zucchero

vincolo sulla disponibilità di burro

vincoli di non negatività: le quantità prodotte non possono essere negative

variabili: notazione

In genere il problema è descritto da più d'una variabile decisionale

$$x, y, z, w, \dots$$

... ma che nome diamo alle variabili se, più realisticamente, la *fabbrica del cioccolato* produce un centinaio di articoli diversi?

Per comodità si usa la notazione con indici:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4 \dots)$$

(in effetti le variabili sono *vettori* n -dimensionali)

La notazione con indici permette anche di scrivere le espressioni lineari in modo sintetico:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$\sum_{i=1}^5 i = ?$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^5 k = ?$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^3 i \cdot k = ?$$

$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 18$$

$$\mathbf{a} = (7, 3, 5, 10, 2) \quad \mathcal{A} = \{1, 8, 9, 7\} \quad p = 4$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i = ? \quad = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 7 + 3 + 5 + 10 + 2 = 27 \quad = \sum_{k=1}^5 a_k$$

$$\sum_{i=1}^5 p = ? \quad = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

$$\sum_{i=1}^3 i a_i = ? \quad = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 = 7 + 6 + 15 = 28$$

$$\sum_{e \in \mathcal{A}} e = ? \quad = 1 + 8 + 9 + 7 = 25$$

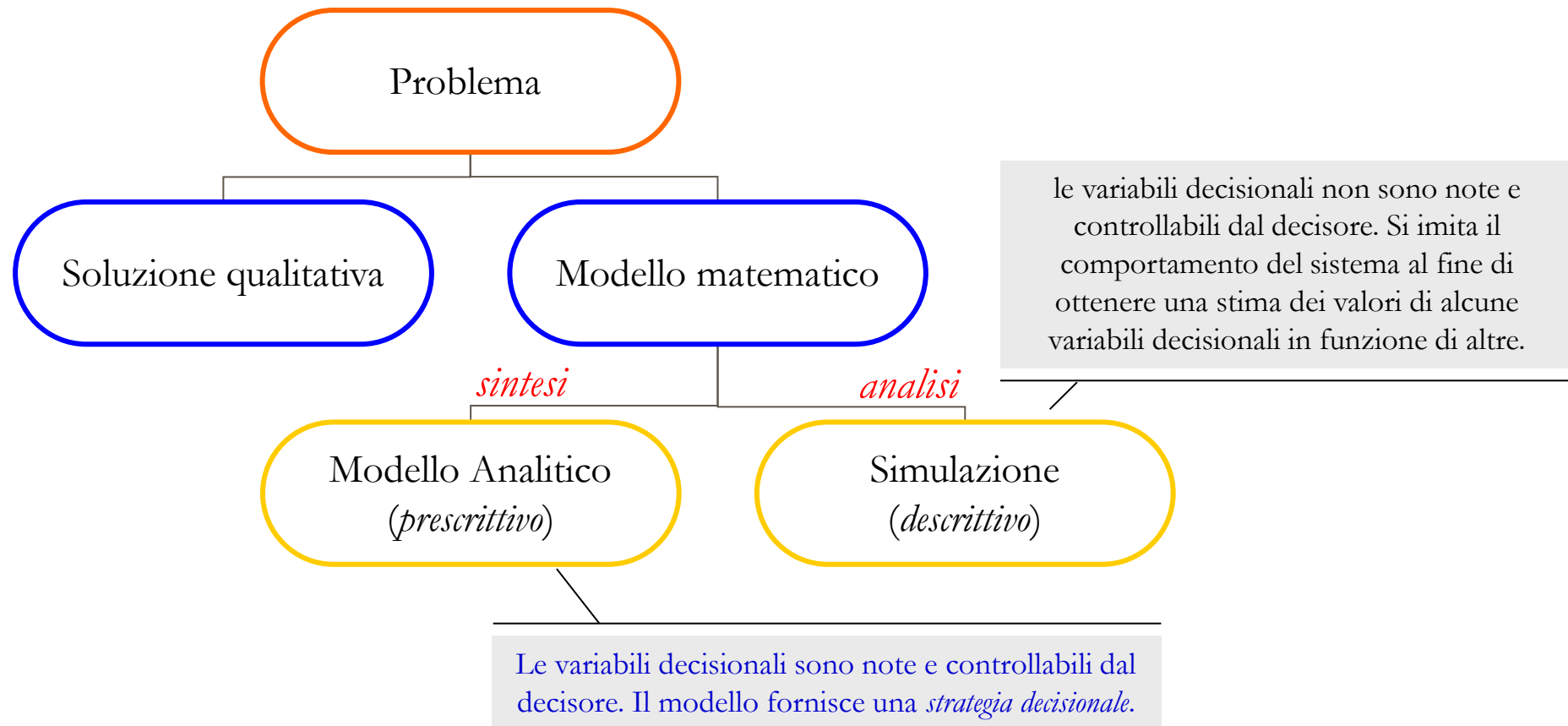
Problema decisionale: esercizi

[Esercizio]

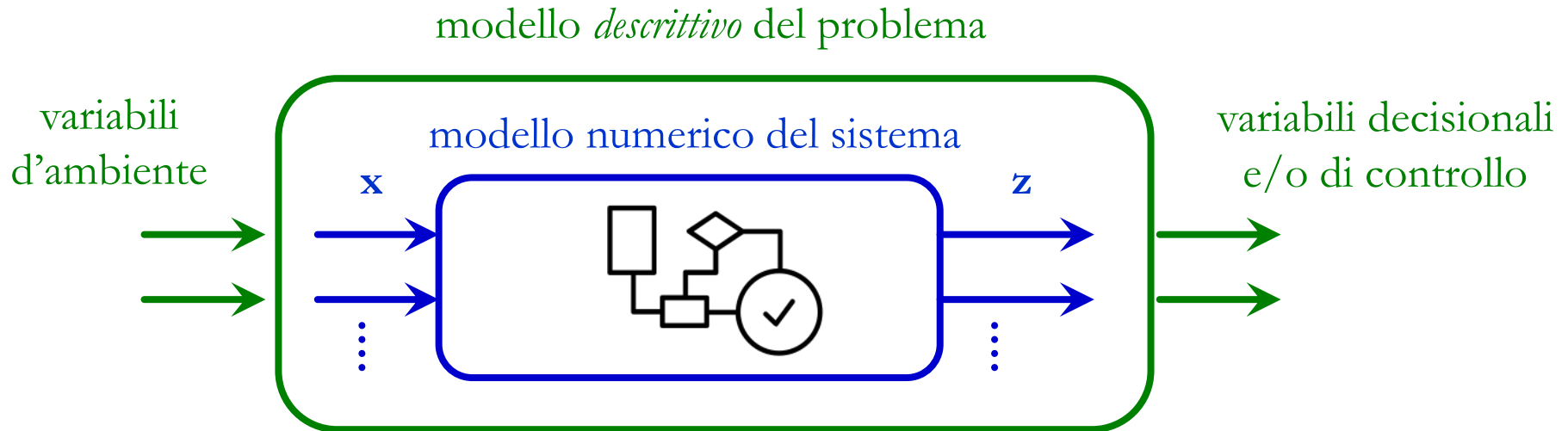
- Esprimere in *forma parametrica* il modello di programmazione matematica della fabbrica del cioccolato riportato nelle slide precedenti.
- Individuare quali sono i principali aspetti reali che sono stati trascurati nella descrizione del problema della *fabbrica del cioccolato*

Problemi e modelli

Problemi e modelli



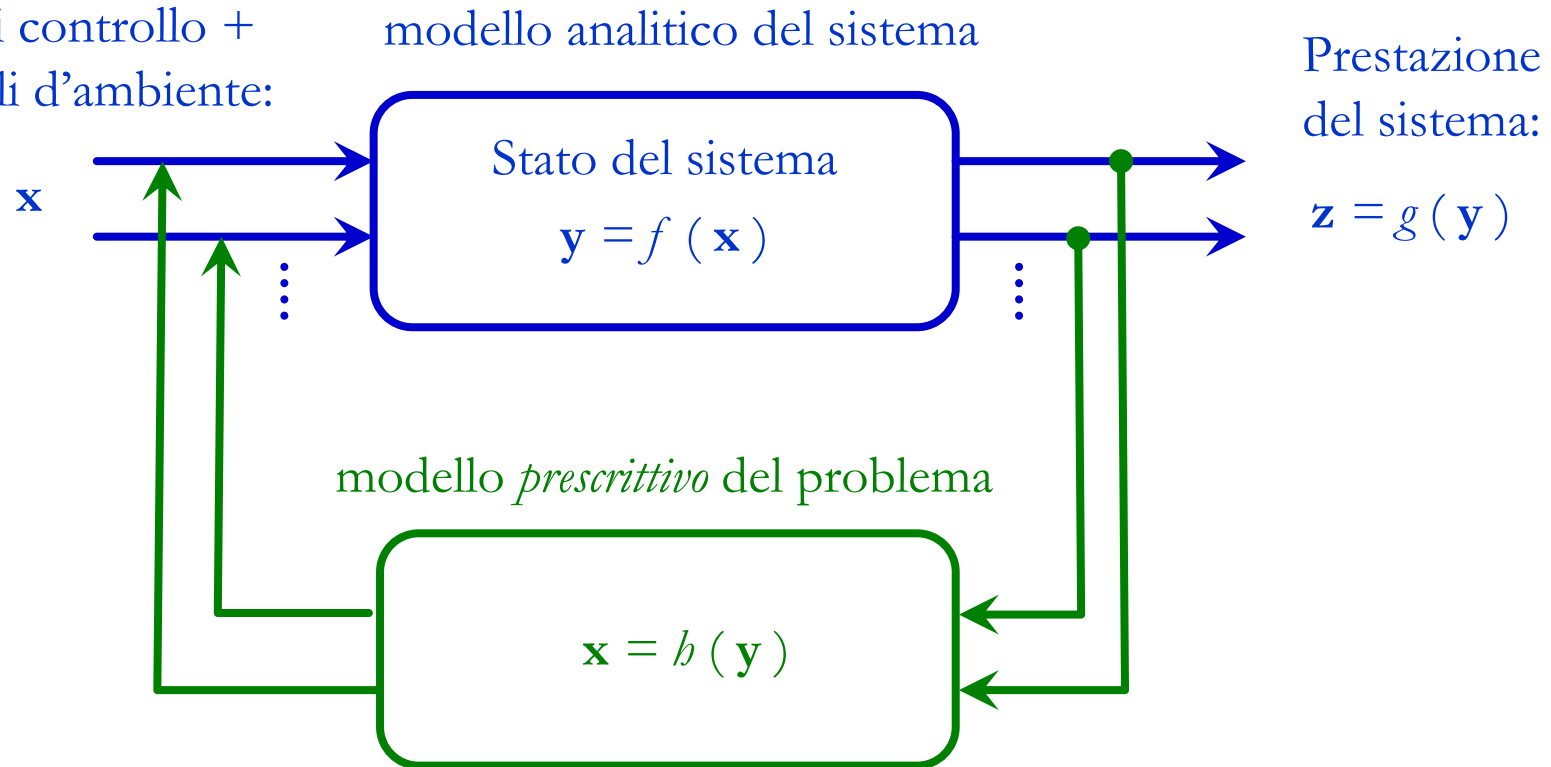
Problemi e modelli: simulazione



le variabili decisionali non sono note e controllabili dal **decisore**. Si imita il comportamento del sistema al fine di ottenere una stima dei valori di alcune variabili decisionali in funzione di altre.

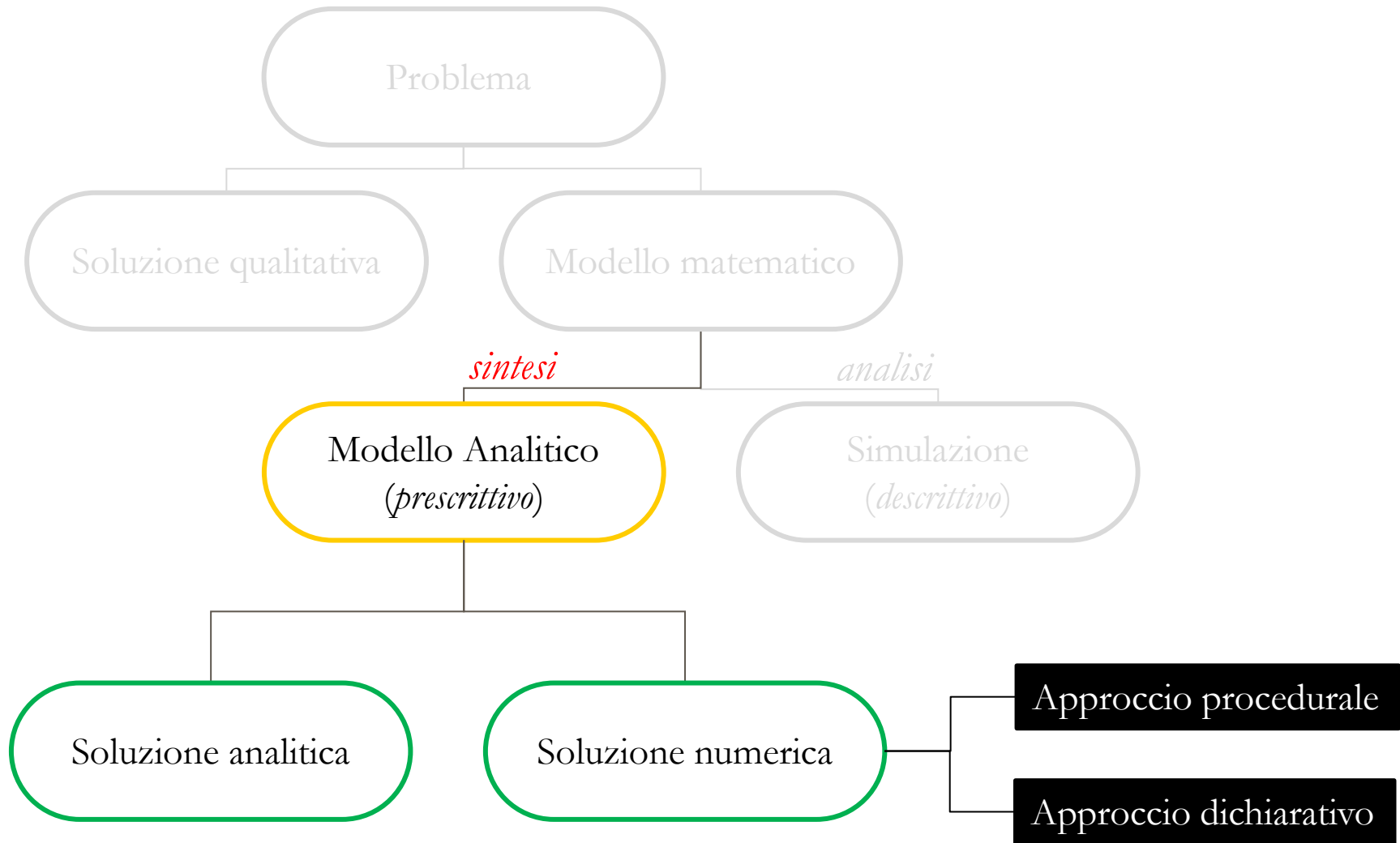
Problemi e modelli: modelli analitici

variabili decisionali
e/o di controllo +
variabili d'ambiente:

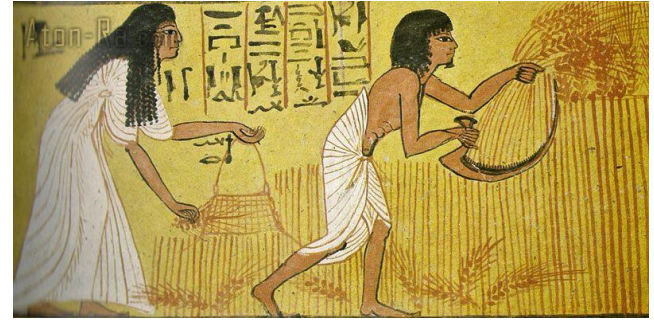


Le variabili decisionali sono note e controllabili dal decisore.
Il modello fornisce una *strategia decisionale*.

Modelli e algoritmi



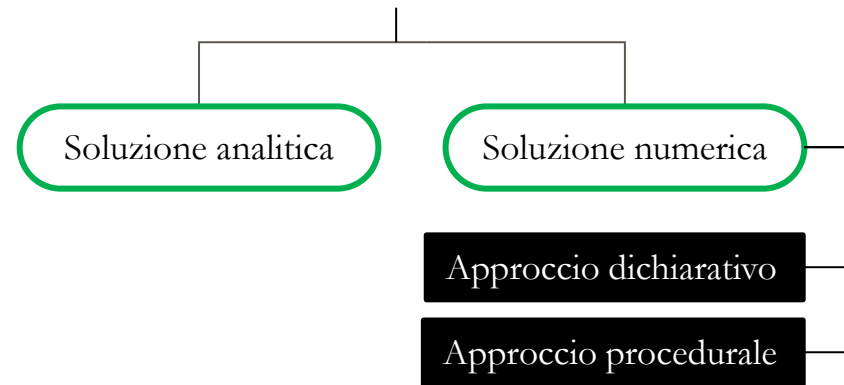
Modelli e algoritmi: esempio



- Si narra che ai contadini dell'antico Egitto non fosse chiaro come misurare le aree. Gli emissari del faraone ne **approfittavano** assegnando i terreni in base alla lunghezza del loro perimetro... che farabutti!!



[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e b che massimizzano l'area A del rettangolo?



[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e b che massimizzano l'area A del rettangolo?

$$l = 50 - h$$

$$A = l \cdot h = (50 - h) \cdot h$$

$$A = 50h - h^2$$

La funzione A ha un solo punto stazionario (di massimo) che si ottiene azzerando la derivate prima:

$$A' = 50 - 2h = 0$$

da cui si ricava

$$h^* = 25$$

$$l^* = 25$$

Soluzione analitica

Soluzione numerica

Approccio dichiarativo

Approccio procedurale

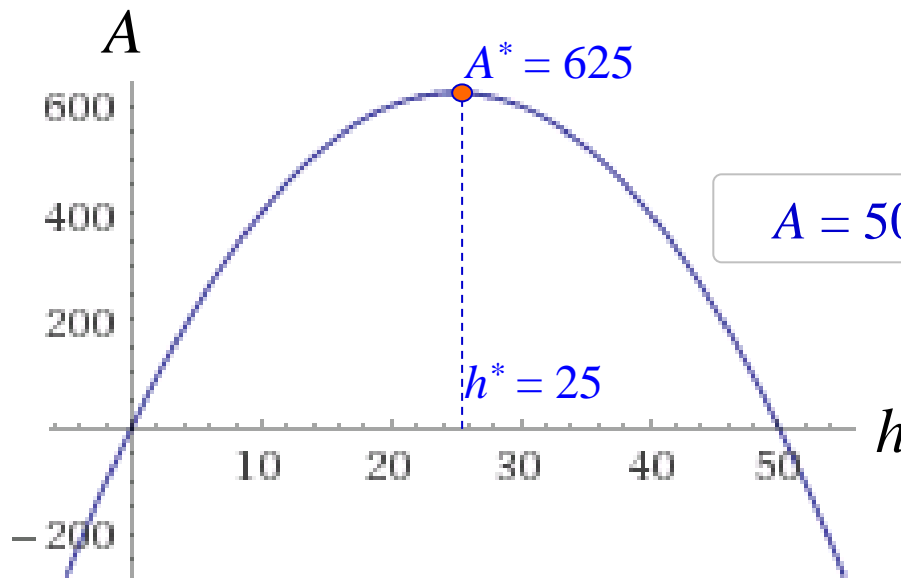
[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e b che massimizzano l'area A del rettangolo?

Soluzione analitica

Soluzione numerica

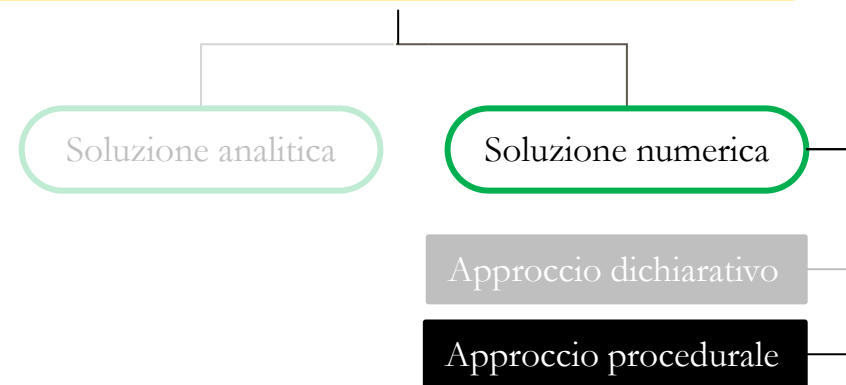
Approccio dichiarativo

Approccio procedurale



$$A = 50h - h^2$$

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e b che massimizzano l'area A del rettangolo?



- **Approccio procedurale:** si definisce una **procedura di calcolo** (*algoritmo*) che individua il valore massimo di A al variare della lunghezza dei lati

Un algoritmo (che determina una soluzione intera):

- **Per ogni** valore di l compreso tra 1 e 50 (il semi-perimetro)
 - calcola $b = 50 - l$
 - calcola l'area del rettangolo avente per lati l e b
 - conserva i valori l e b del rettangolo con area maggiore

Come si legge la procedura di calcolo?

Si immagina l'esecuzione dei singoli passi e si assegnano *progressivamente* i valori alle variabili

valori l e b del rettangolo
con area maggiore

$$l = 1 \quad b = 49$$

...

$$l = 5 \quad b = 45$$

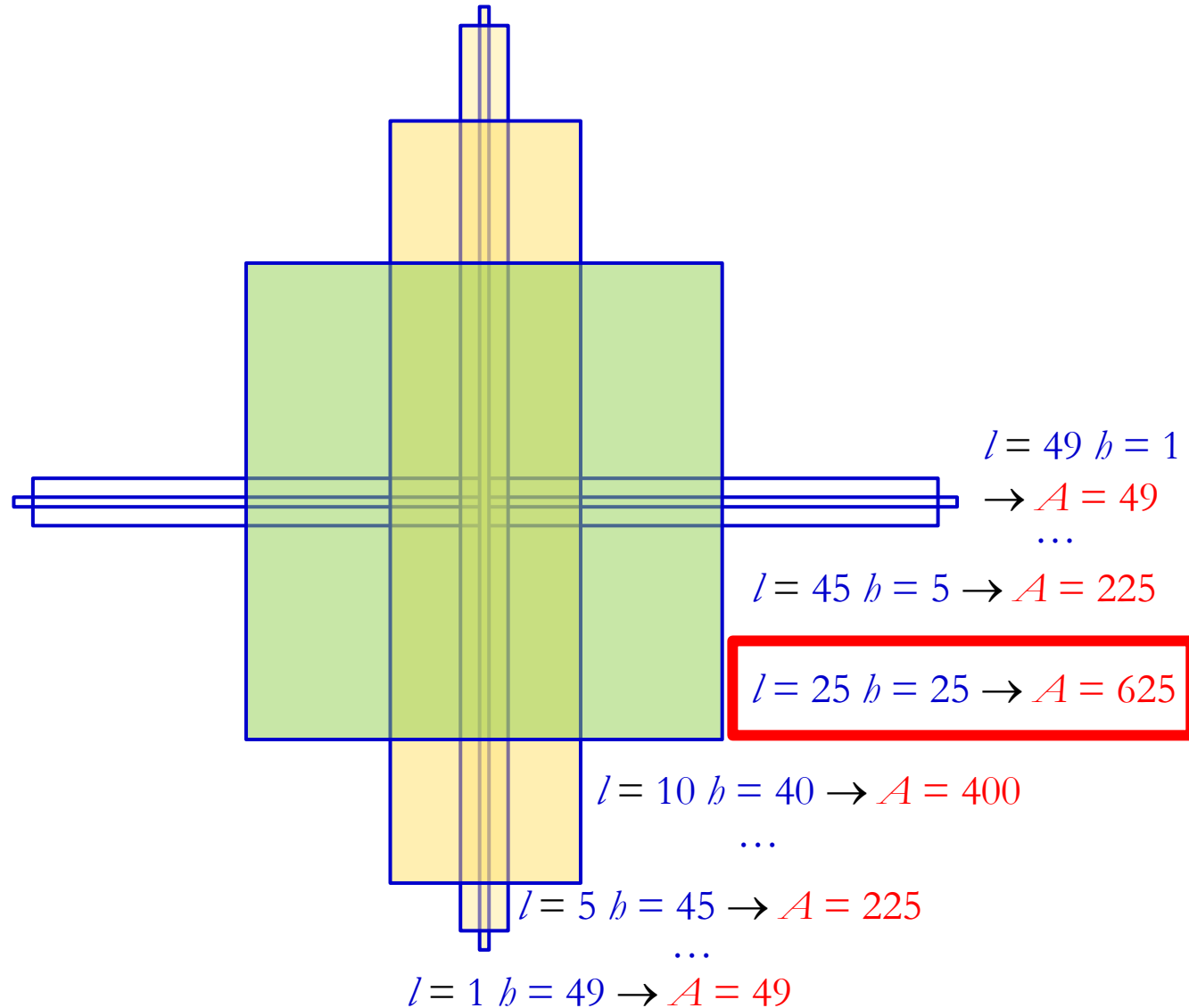
...

$$l = 10 \quad b = 40$$

...

$$l = 25 \quad b = 25$$

...



[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e b che massimizzano l'area A del rettangolo?



- **Approccio dichiarativo:** si stabiliscono le relazioni (i vincoli) esistenti tra i dati del problema (perimetro) e le decisioni (lunghezza dei lati e area del rettangolo).

variabili decisionali

- A = area del rettangolo
- l = lunghezza della base
- h = lunghezza dell'altezza

funzione obiettivo

massimizzare l'area del rettangolo:

vincoli

- base e altezza sono numeri non negativi:
- il perimetro del rettangolo è 100:
- l'area è data dal prodotto di base e altezza:

un modello
di prog. mat.

$$\max A$$

$$l \geq 0, h \geq 0$$

$$2l + 2h = 100$$

$$A = l \cdot h$$

$$\max A$$

$$A = l \cdot h$$

$$2l + 2h = 100$$

$$l \geq 0, h \geq 0$$

Come si legge il modello?

I valori di A , l e h che soddisfano **contemporaneamente** tutti i vincoli sono soluzioni ammissibili del modello:

$\{l = 1, h = 49, A = 49\}$ è una soluzione ammissibile

$\{l = 2, h = 48, A = 96\}$ è una soluzione ammissibile

$\{l = 25, h = 25, A = 625\}$ è una soluzione ammissibile

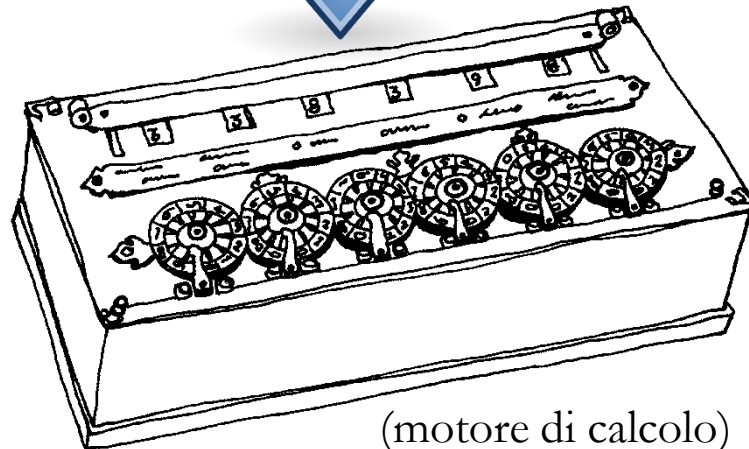
$$\max A$$

$$A = l \cdot h$$

$$2l + 2h = 100$$

$$l \geq 0, h \geq 0$$

...sì, ma la « **soluzione** » ?



(motore di calcolo)

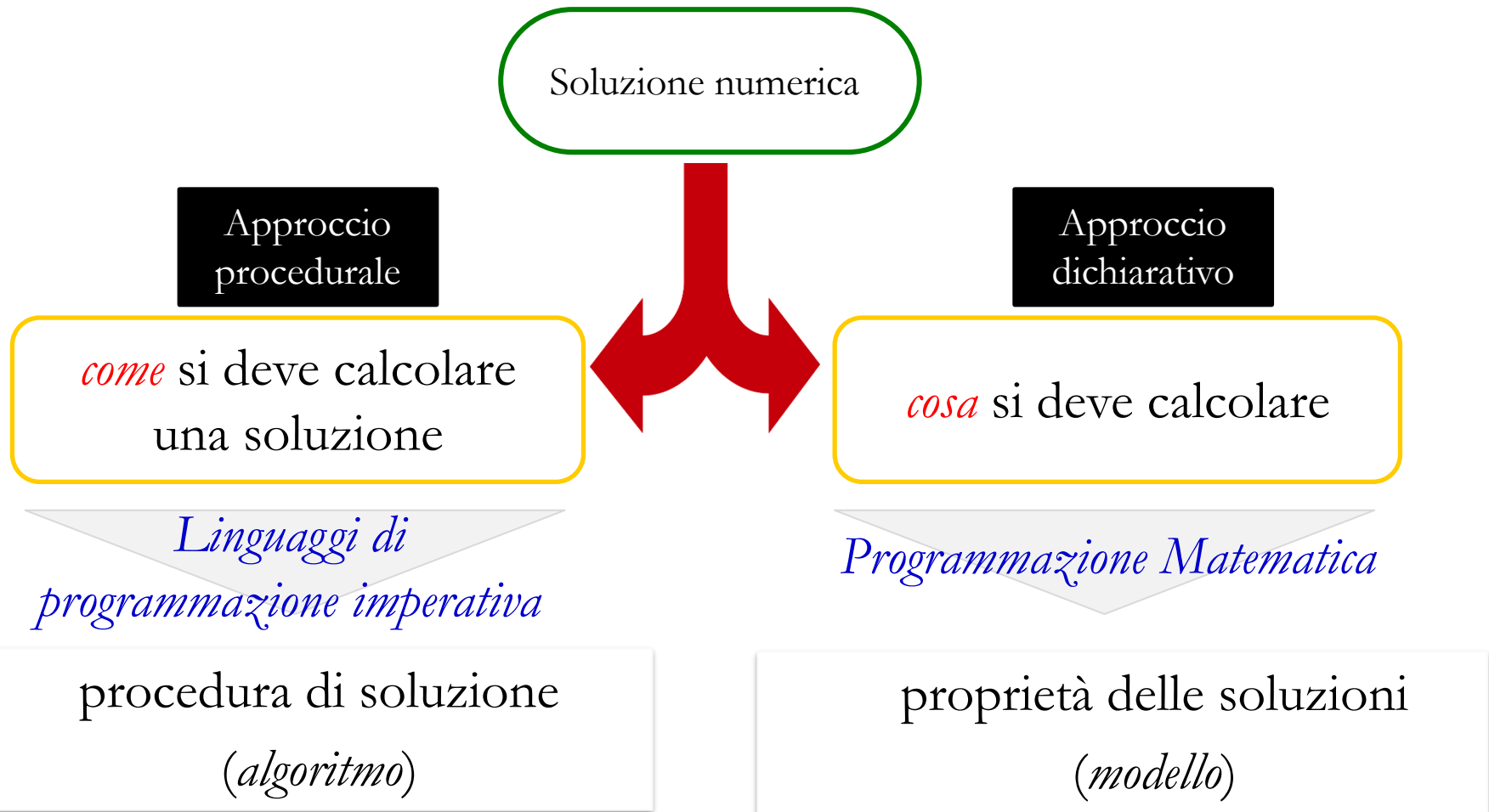


$$A^* = 625$$

$$h^* = 25$$

$$l^* = 25$$

Modelli matematici: un paradigma dichiarativo



programmazione matematica

separa l'*aspetto concettuale* di rappresentazione del problema dall'*aspetto operativo* di calcolo di una soluzione

La programmazione matematica appartiene alla
classe dei linguaggi *dichiarativi*



si specifica **cosa** deve essere calcolato (*proprietà della soluzione*)

e non

come deve essere calcolato (*procedura di soluzione*)

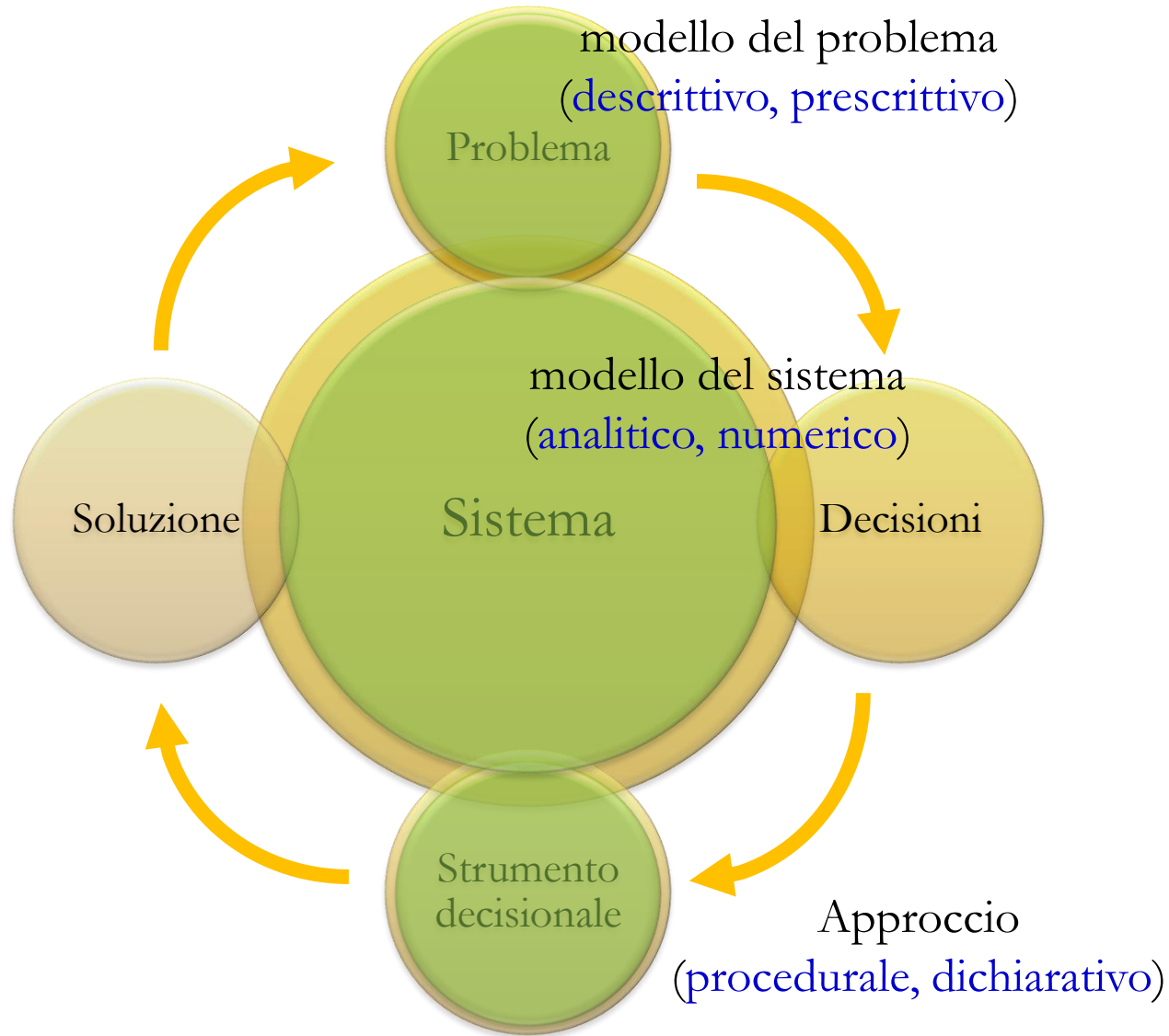
Approccio procedurale e dichiarativo: esercizio

[Esercizio]

dati n numeri interi a_1, \dots, a_n

- descrivere una procedura che determini una sequenza degli n numeri in ordine crescente;
- formulare un modello di programmazione matematica la cui regione ammissibile (o la soluzione ottima) descriva la sequenza (o le sequenze) in ordine crescente degli n numeri.

Riepilogo



programmazione matematica

Programmazione matematica

Programma matematico

$$\min z = f(\mathbf{x})$$

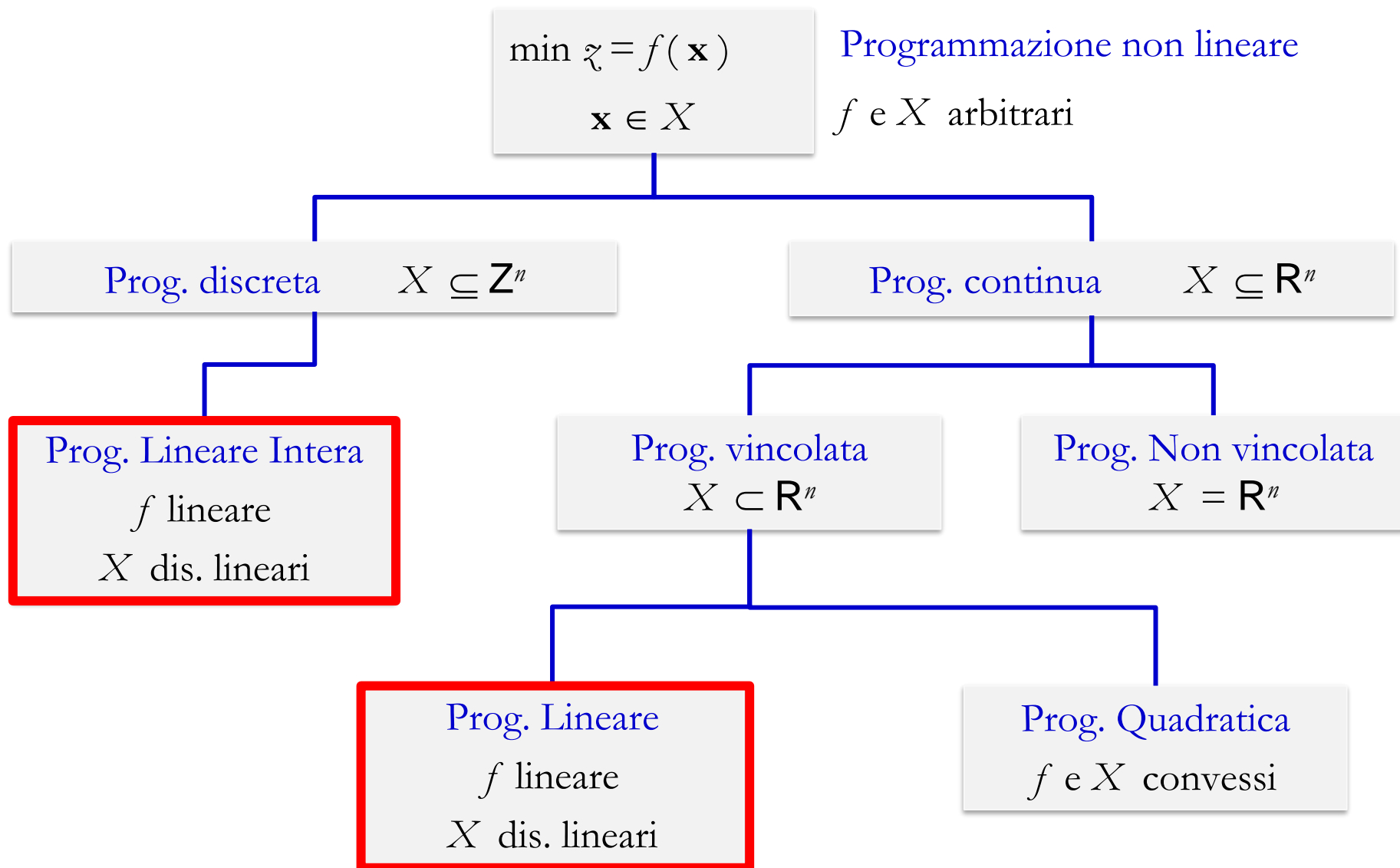
$$\mathbf{x} \in X$$

funzione obiettivo: descrive il criterio di ricerca

regione ammissibile: insieme delle soluzioni ammissibili (è descritto da un sistema di (dis)equazioni).


variabili decisionali: descrivono le caratteristiche quantitative della soluzione

- $\mathbf{x} \in X$ è una **soluzione ammissibile**, $\mathbf{y} \notin X$ è una **soluzione inammissibile**.
- f è una funzione da X in \mathbf{R} e $z \in \mathbf{R}$ è il **valore** che assume f in corrispondenza di un $\mathbf{x} \in X$.



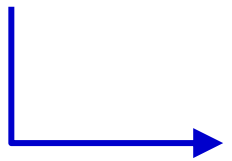
Programmazione lineare (PL)

funzione obiettivo **lineare**


$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$
$$z = \min f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \in X$$

insieme **finito** di (dis)equazioni **lineari**


$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m \right\}$$

aspetti algebrici: sistemi di equazioni lineari, matrici

aspetti geometrici: analisi convessa e poliedrale

Modello di PL: esempio

...

Un modello di programmazione lineare che descrive il problema di mix-produttivo visto in precedenza è il seguente:

$$z = \max 25x_A + 28x_B$$

$$0.4x_A + 0.24x_B \leq 312$$

$$0.4x_A + 0.45x_B \leq 360$$

$$0.1x_A + 0.31x_B \leq 160$$

$$0.1x_A \leq 70$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Ipotesi della Programmazione Lineare

- Un sistema è rappresentato correttamente da un modello di Programmazione Lineare se valgono le seguenti ipotesi:
 - **Divisibilità:** variabili con valori frazionari
 - **Certezza:** coefficienti costanti e noti a priori
 - **Linearità:** relazioni esclusivamente di tipo lineare:

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

▪ **Proporzionalità:**
contributo proporzionale al
valore assunto: non ci sono
economie di scala

▪ **Additività:** i contributi
possono essere solo sommati

Ipotesi della Programmazione Lineare Intera

- Un sistema è rappresentato correttamente da un modello di programmazione lineare **intera** (PLI) se verifica le seguenti ipotesi
 - **Interezza:** le variabili possono assumere solo valori interi
 - **Certezza:** coefficienti costanti e noti a priori
 - **Linearità:** relazioni esclusivamente di tipo lineare:

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

■ **Proporzionalità:**
contributo proporzionale al
valore assunto: non ci sono
economie di scala

■ **Additività:** i contributi
possono essere solo sommati

PL vs. PLI



- Benché formalmente simili, la PLI è **matematicamente** molto diversa dalla PLI e **computazionalmente** molto più difficile da risolvere.

In particolare:

- le soluzioni **ottime intere** non sempre possono essere ottenute arrotondando le soluzioni frazionarie (...in realtà quasi mai);
- Le soluzioni frazionarie possono essere prive di significato (per esempio se le variabili intere sono **binarie**)

I 3 passi della programmazione matematica

- 3 passi per costruire un modello di **programmazione matematica**:
 1. determinazione delle **variabili decisionali**
 2. definizione della **funzione obiettivo**
 3. definizione dei **vincoli**, cioè delle relazioni logiche tra le variabili di decisione che caratterizzano il problema
 - Di solito una scelta corretta delle variabili decisionali permette di esprimere in modo “naturale” funzione obiettivo e vincoli.
- Non esiste un metodo standard ma solo una serie di “strumenti utili”:
 - libreria di modelli standard,
 - tecniche di riformulazione,
 - esperienza, ...

«hello world!»

Vecchio West

- Al, Bill e Craig sono reduci da una rapina alla National Bank che ha fruttato un bel malloppo: 100.000 verdoni.
- Al è il capo e vuole per sé almeno i due terzi di quanto prenderanno insieme Bill e Craig;
- Craig vuol prendere almeno i due terzi di quello che prenderà Bill;
- Bill vuole prendere più che può. Qual è una soluzione che accontenta tutti?



Esercizio: un problema di mix produttivo

[Problema]

- La Ambrosoli S.p.A. produce due tipi di caramelle: *Al Miele* e *Fior di Liquirizia*. Le *Al Miele* sono vendute a **1€** al pacchetto, le *Fior di Liquirizia* a **1.5 €**.
- L'azienda dispone di una linea in grado di produrre entrambi i tipi di caramelle, ma non contemporaneamente. Tuttavia i tempi di cambio produzione (*changeover*) sono trascurabili.
- La produttività del sistema è di **40 pacchetti/h** di caramelle *Al Miele* e **30 pacchetti/h** di caramelle *Fior di Liquirizia*.
- La settimana lavorativa è di **40 ore** e l'azienda non fa magazzino.
- Da ricerche di marketing si scopre che il mercato è in grado di assorbire settimanalmente al massimo **1000 pacchetti** di *Al Miele* e **900 pacchetti** di *Fior di Liquirizia*.

Quali sono i livelli di produzione dei due tipi di caramelle che massimizza il profitto dell'azienda?

mix produttivo – la formulazione

...

$$\max x_m + 1,5 x_l$$

$$\frac{1}{40} x_m + \frac{1}{30} x_l \leq 40$$

$$x_m \leq 1000$$

$$x_l \leq 900$$

$$x_m \geq 0; x_l \geq 0$$

Le *Al Miele* sono vendute a **1 €** al pacchetto, le *Fior di Liquirizia* a **1.5 €**.

- 1) Un prodotto alla volta;
- 2) 40 h a settimana;
- 3) Produttività 40pz/h di *Al Miele* e 30pz/h di *Fior di Liquirizia*

Domanda massima: 1000 pacchetti di *Al Miele* e 900 di *Fior di Liquirizia*

Non negatività della produzione



La settimana lavorativa è di $t = 40$ ore

	prodotti			
	A	B	C	D
ricavo	1	1.5	1	1.5
Produttività	40	30	50	20
q.tà massima	1000	900	500	800

$$\max \sum_{i=1}^n r_i \cdot x_i$$

ricavo unitario

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i \leq t$$

produttività

tempo totale disponibile

$$0 \leq x_i \leq d_i, \quad \forall i \in (0, \dots, n)$$

q.tà massima



Bibliografia

1. C. Vercellis,
Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni
Mc Graw-Hill, 2008
2. F.S. Hillier, G.J. Lieberman,
Ricerca Operativa
Mc Graw-Hill, IX ed., 2010
3. Dispense dei proff. Claudio Arbib e Daniele Vigo

APPENDICE

- La fabbrica automatica
- Parola chiave: sistemi organizzati
- Sistemi e modelli

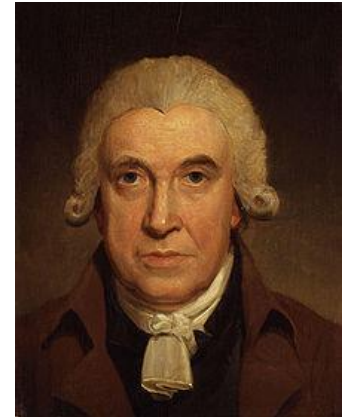
La fabbrica automatica

Un po' di storia

Rivoluzione Industriale
telaio industriale e macchina a vapore

XVIII
sec.

James Watt (1736 - 1819) perfeziona la
macchina a vapore

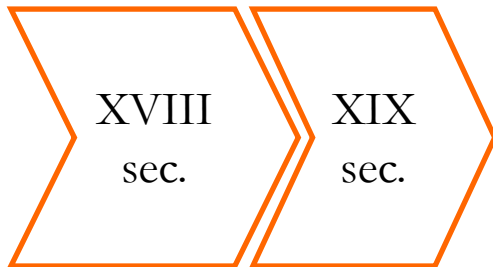


Effetti:

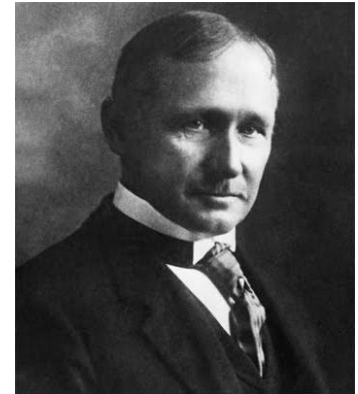
- riduzione dei fabbisogni di manodopera,
- aumento della produttività,
- capitalizzazione e impulso agli investimenti,
- espansione produttiva e nuovi mercati.

Rivoluzione Industriale
telaio industriale e macchina a vapore

Economia Industriale
Scomposizione del lavoro



Frederick W. Taylor (1856 - 1915)
introduce il principio di
scomposizione del lavoro in
attività elementari.



Effetti:

- Notevole aumento della produzione e conseguente riduzione del prezzo.
- Aumento della produttività e conseguente aumento del salario medio.
- Minor dipendenza da manodopera specializzata.

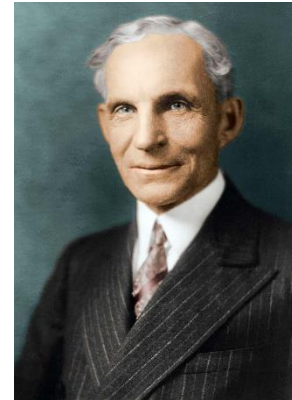
Rivoluzione Industriale
telaio industriale e macchina a vapore

Economia Industriale
Scomposizione del lavoro

Economia di scala
Produzione di massa

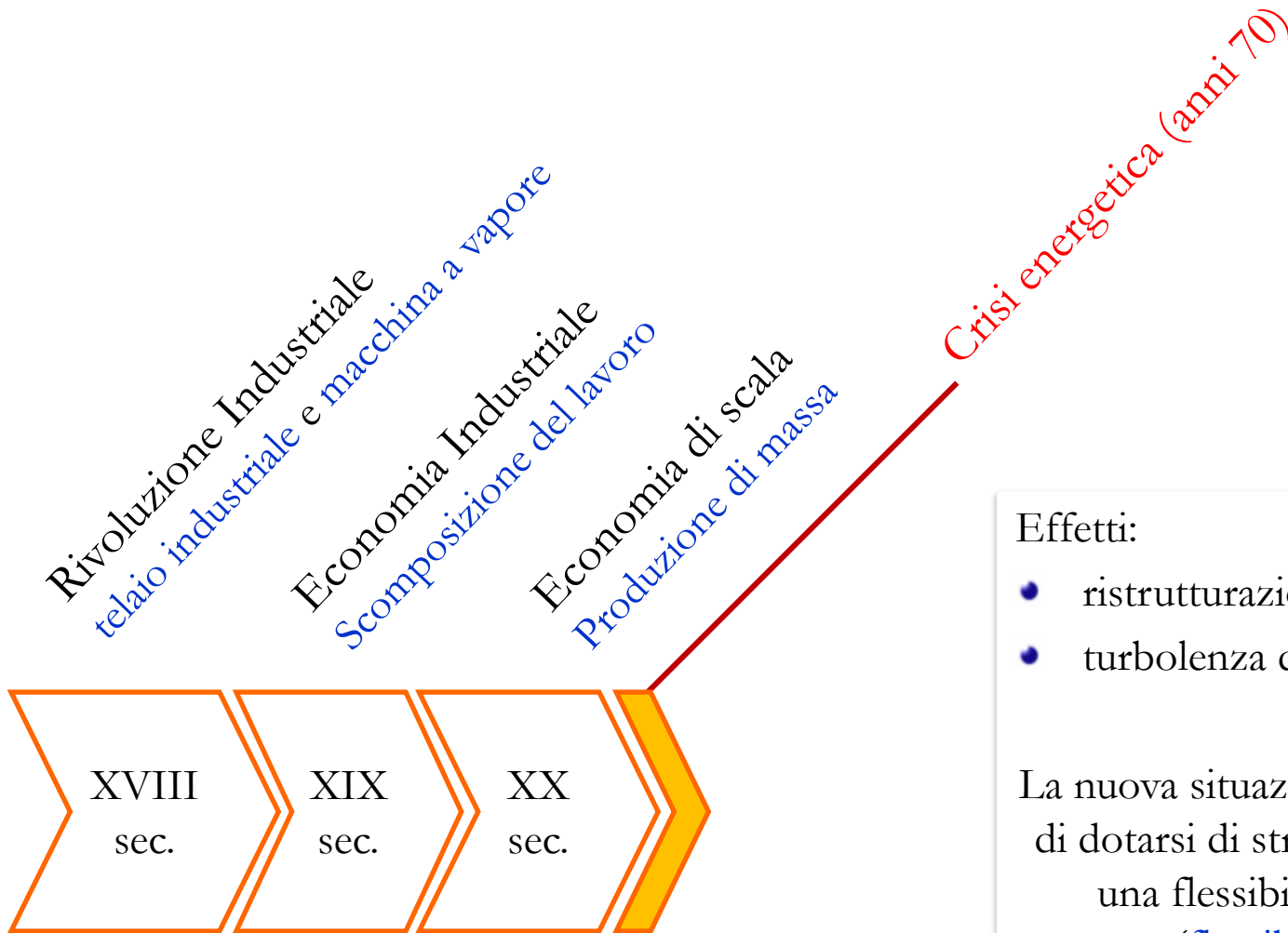


Henry Ford (1863 - 1947)
introduce la **catena di montaggio**: un sistema seriale
per l'assemblaggio di
automobili



Effetti:

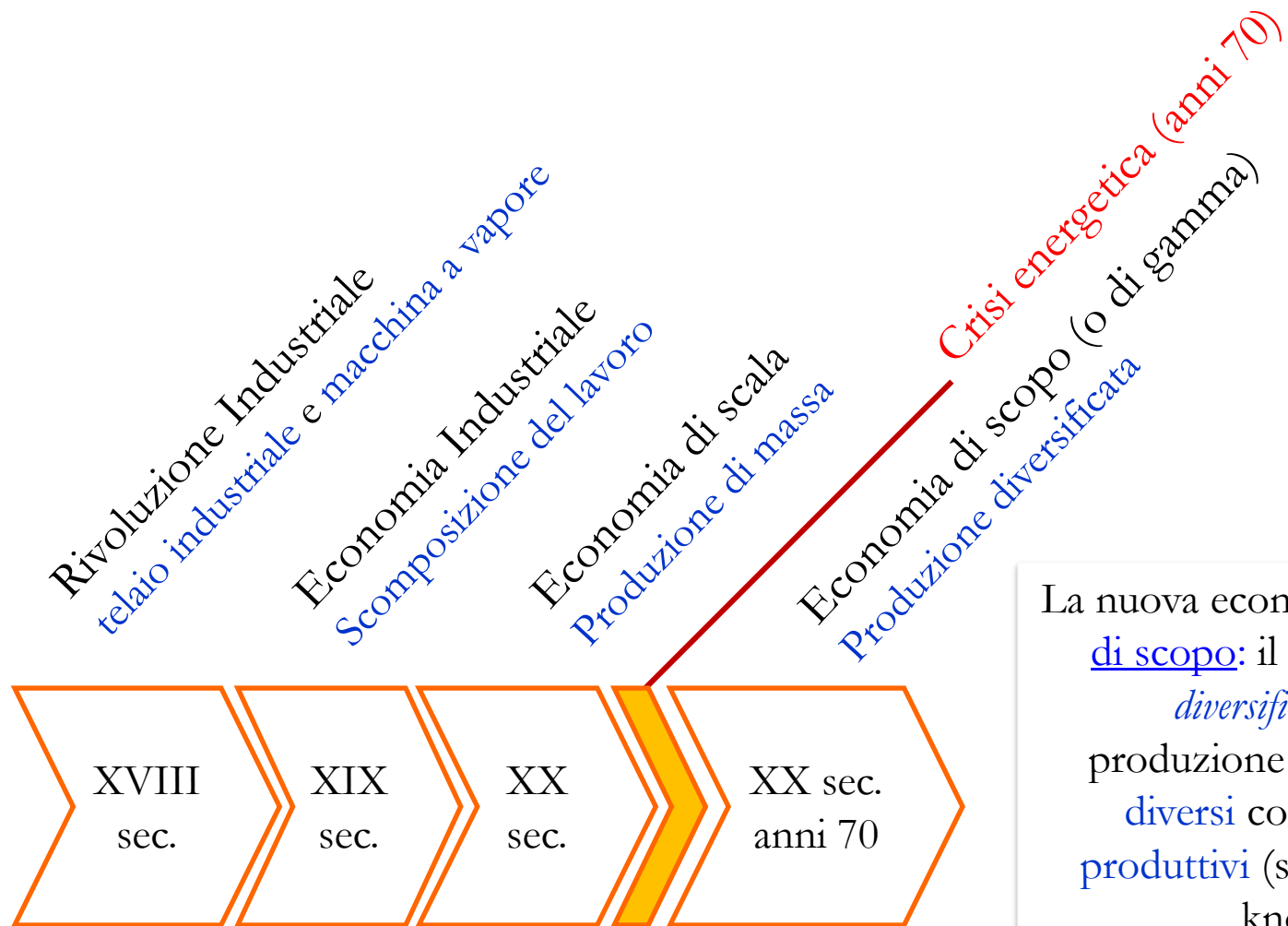
- Ulteriore abbattimento dei costi di produzione tramite ingenti **economie di scala**.
- Grande **accumulo di capitali** e conseguente formazione di colossi industriali.



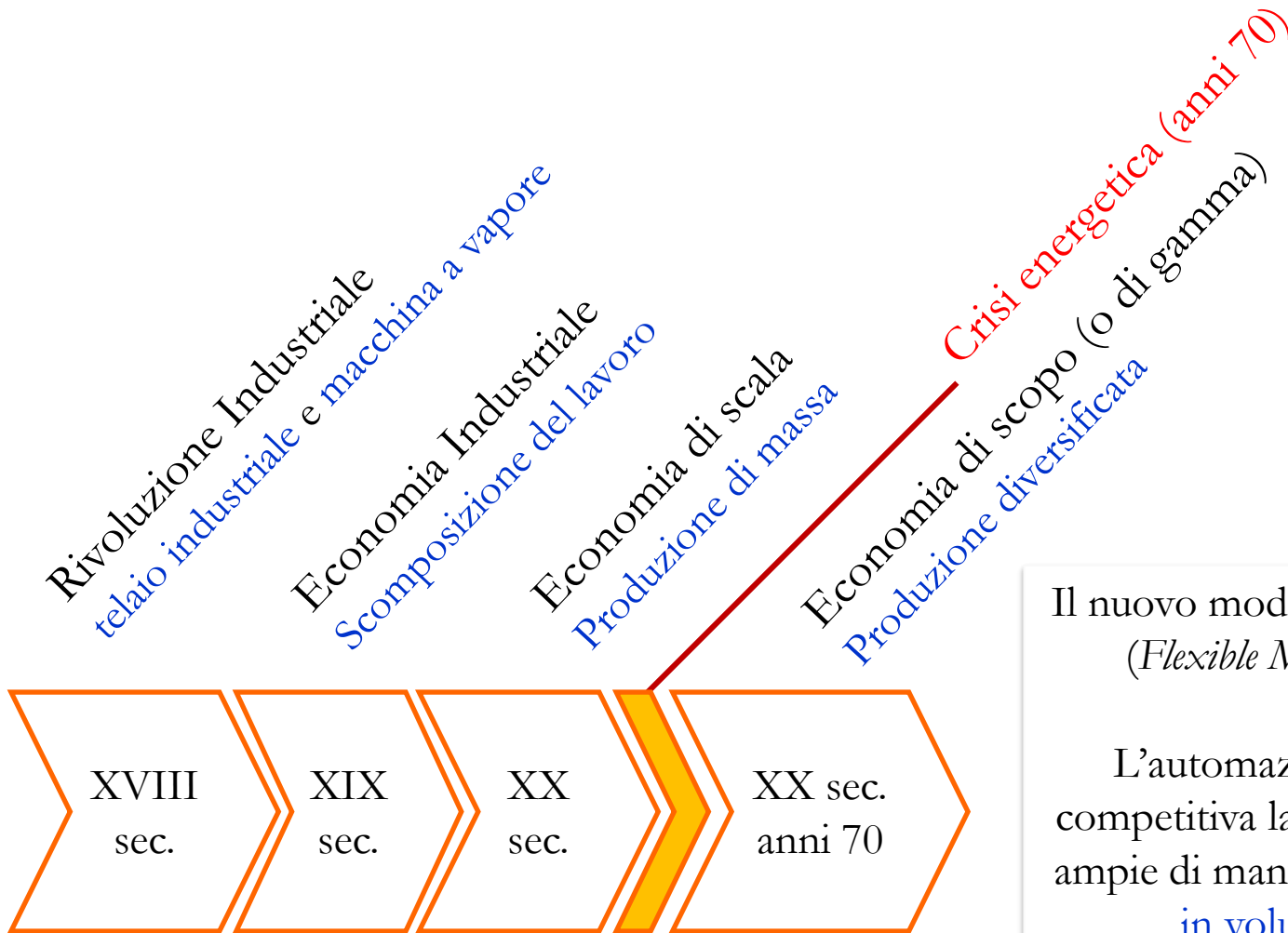
Effetti:

- ristrutturazione economia mondiale,
- turbolenza dei mercati

La nuova situazione economica richiede di dotarsi di strutture caratterizzate da una flessibilità molto maggiore (*flessibilità strategica*).

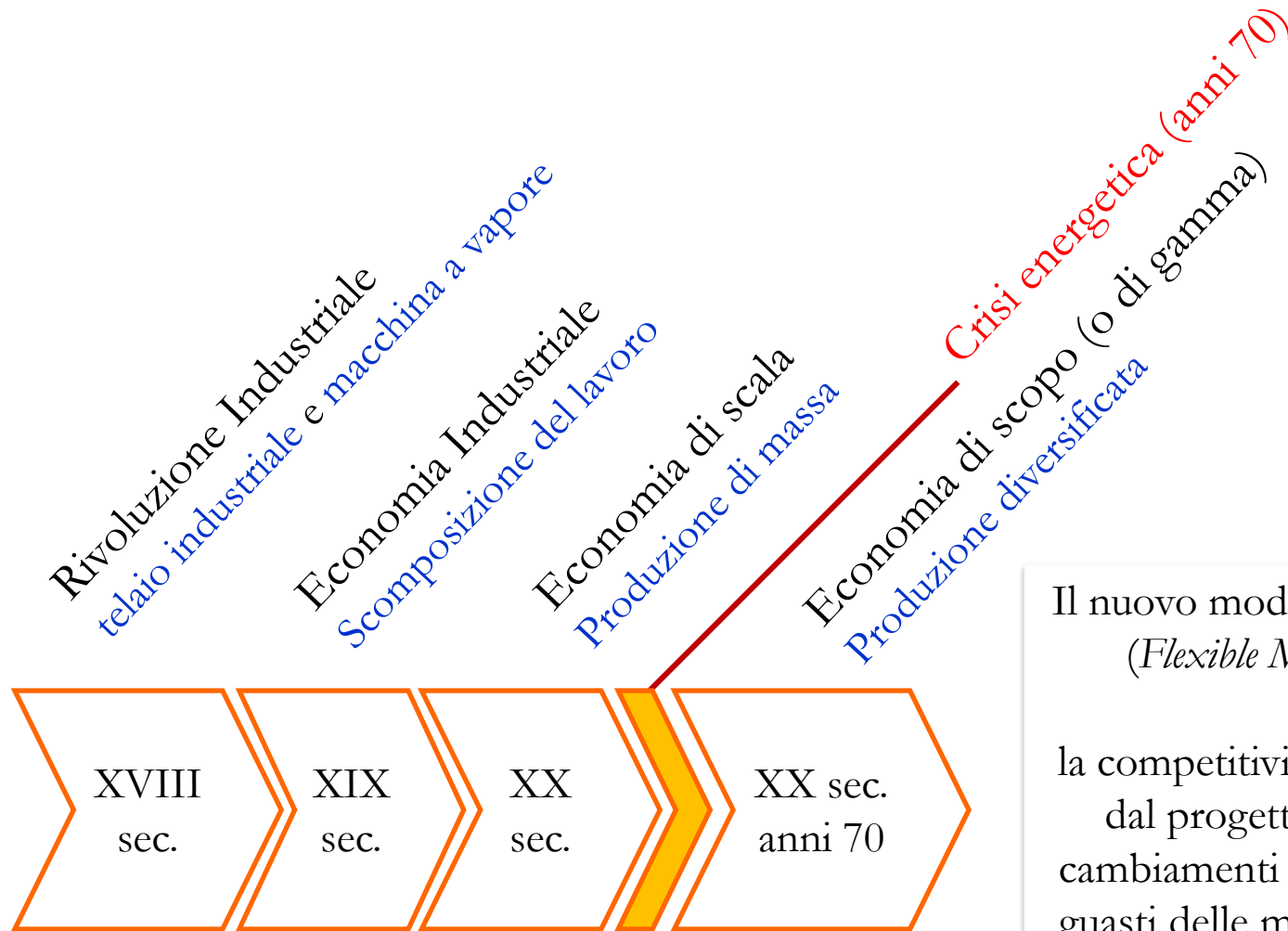


La nuova economia emergente è quella di scopo: il risparmio deriva dalla *diversificazione*, cioè dalla produzione congiunta di **prodotti diversi** con i **medesimi fattori produttivi** (stesse risorse, impianti, know-how, ...).



Il nuovo modello di fabbrica è il **FMS**
(*Flexible Manufacturing System*).

L'automazione flessibile rende competitiva la **produzione di famiglie** ampie di manufatti, ognuno prodotto **in volumi medio-bassi**.



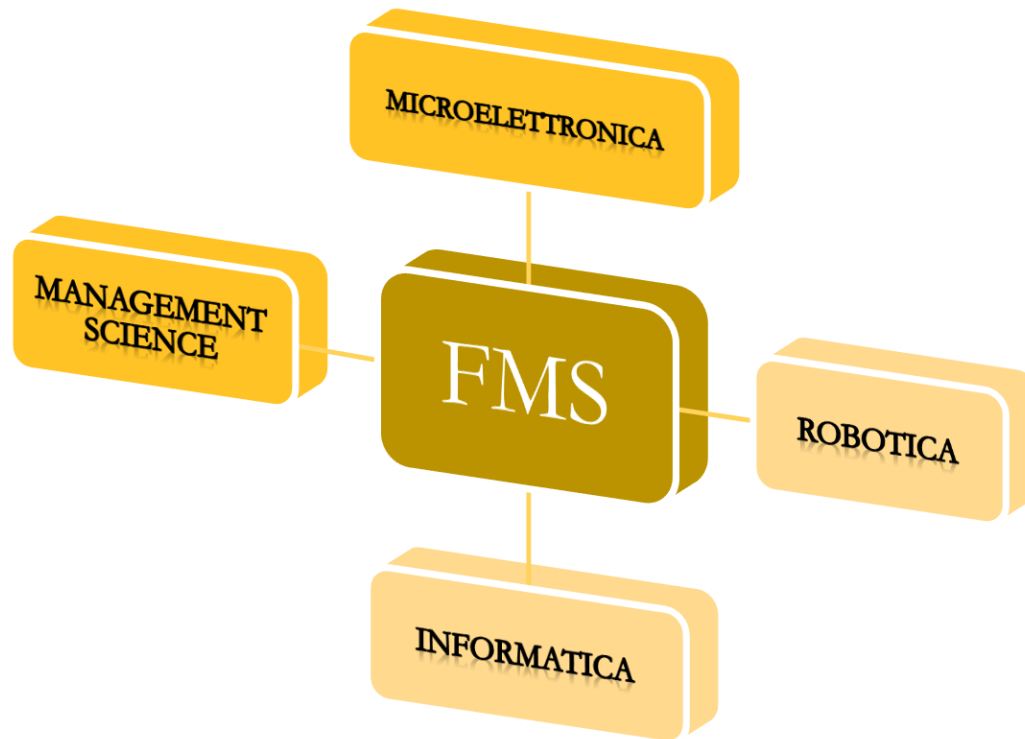
Il nuovo modello di fabbrica è il **FMS**
(*Flexible Manufacturing System*).

la competitività diventa **indipendente**
dal progetto, dalla domanda, da
cambiamenti del mix produttivo e da
guasti delle macchine o degli utensili.

Automazione flessibile: alcuni esempi

- Una fabbrica automatica
- Un sistema flessibile di produzione
- Robot industriale in azione

Automazione flessibile: fattori innovativi



L'automazione flessibile è il risultato di una convergenza tecnologica di **elementi innovativi** quali la microelettronica, l'informatica, l'automazione e la ricerca operativa.

Problemi decisionali

FLESSIBILITÀ

...e anche piccole inefficienze possono incidere enormemente sulle opportunità di profitto:

Ridurre i tempi di produzione dell' **1%** in una linea che produce 200 pezzi al minuto del valore di 1,5 Euro cadauno, significa incrementare i profitti di circa 4.300 Euro al giorno e di circa **un milione e mezzo di Euro all'anno.**

COMPLESSITÀ

parola chiave:
sistemi organizzati

parola chiave: *sistemi organizzati*

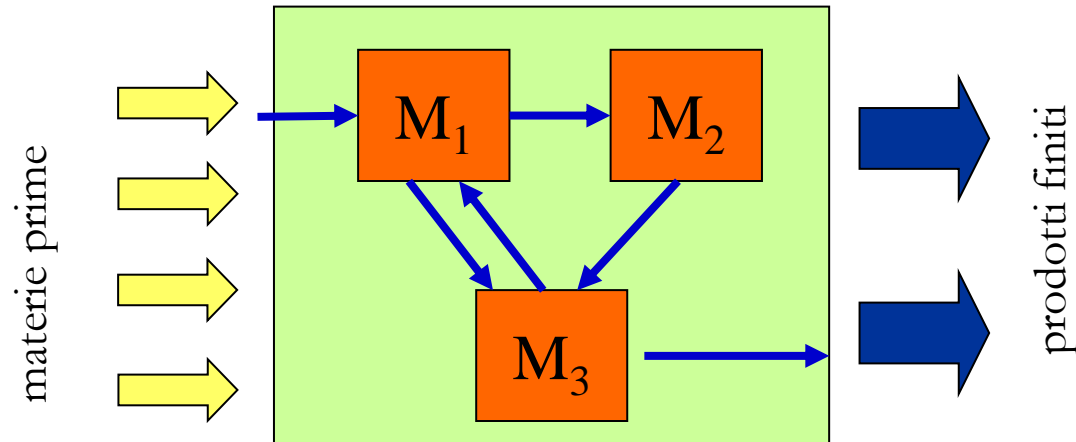
Un **sistema** è una collezione di entità che agiscono e interagiscono al fine di raggiungere obiettivi individuali o collettivi (**Schmidt e Taylor, 1970**)

In caso di **obiettivi collettivi**, le entità concorrono a determinare le prestazioni del sistema complessivo e quindi si parla di **sistemi organizzati**.



[Esercizio] Individuare entità, tipi di interazione e prestazioni dei sistemi sopra riportati.

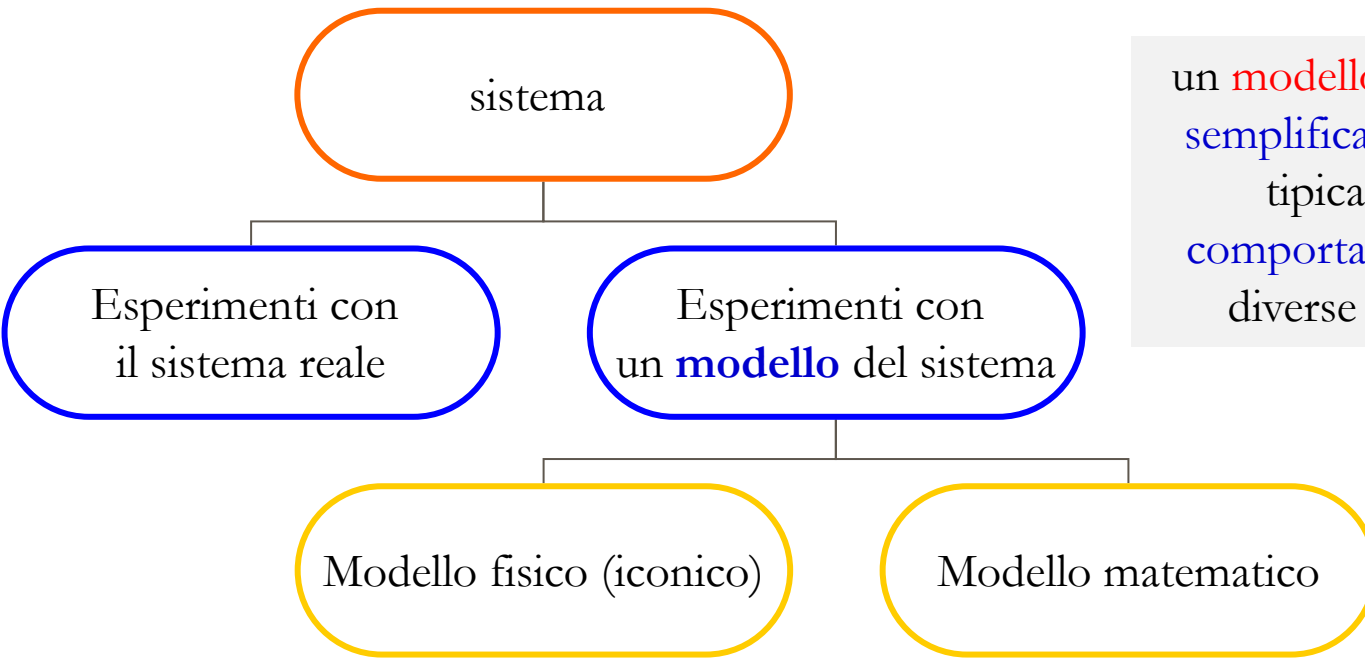
Impianto di produzione



- **obiettivo**: creazione di valore aggiunto attraverso un processo di trasformazione di materie prime in prodotti finiti.
- **entità**: risorse umane, materiali e finanziarie
- **interazioni**: flussi di informazioni e di materiali

sistemi e modelli

Sistemi e modelli



un **modello** è una **rappresentazione semplificata** del sistema concepita tipicamente per **predire il comportamento** del sistema sotto diverse condizioni di utilizzo.

Rappresentazione in scala
(mappamondo, DNA, ...)

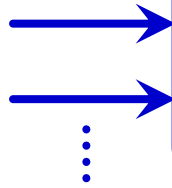
insieme di **relazioni logico-matematiche** che descrivono il comportamento del sistema:
 $E = mc^2$ $F = ma$ $V = s / t$

Sistema reale



variabili decisionali
e/o di controllo +
variabili d'ambiente:

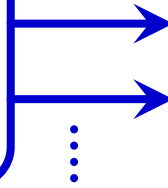
\mathbf{x}



modello matematico

Stato del sistema

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$



Prestazione del sistema:

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$$

In un ambiente **deterministico** e a **informazione completa** a ogni politica decisionale corrisponde uno stato del sistema $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ e a ogni stato del sistema corrisponde un'uscita $\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$

Sistema reale



variabili decisionali
e/o di controllo +
variabili d'ambiente:

\mathbf{x}

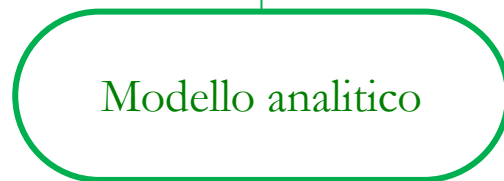
modello matematico

Stato del sistema

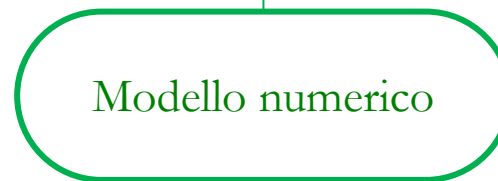
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

Prestazione del sistema:

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$$



lo stato e la prestazione
sono descritti da
equazioni/disequazioni



lo stato e la prestazione
sono descritti da
algoritmi di calcolo

Sistema reale



variabili decisionali
e/o di controllo +
variabili d'ambiente:

$\mathbf{x}(t)$

modello matematico

Stato del sistema

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t))$$

Prestazione del sistema:

$$\mathbf{z}(t) = g(\mathbf{y}(t))$$

- **Statico**: sistema in equilibrio
- **Dinamico**: sistema in evoluzione (nel tempo)

Modelli matematici: vantaggi

- **astrazione e sintesi** tralascia alcuni aspetti del sistema perché trascurabili (*astrazione*) e evidenzia solo le caratteristiche rilevanti (*sintesi*) e ciò migliora il grado di comprensione del sistema reale;
- **economicità** costa meno rispetto allo studio del sistema reale;
- **rapidità** permette di ottenere risposte in breve tempo;
- **fattibilità** permette di analizzare sistema che non esistono nella realtà.