



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Reti di Petri: analisi, modellistica e controllo

Automazione

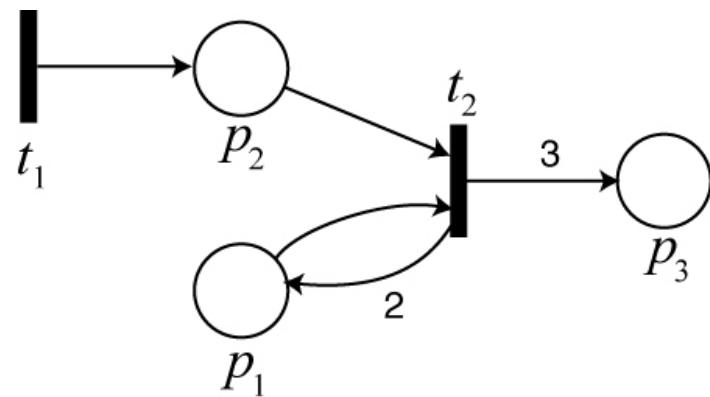
Alessandro De Luca

Sono un formalismo grafico/matematico per la modellazione di sistemi dinamici a eventi discreti

- introdotte nel 1962 da Carl Adam Petri nella sua tesi di dottorato
- definiscono l'evoluzione di sistemi guidati da eventi
 - ➔ lavorano con condizioni esplicite per l'**abilitazione** di tali eventi (associati quindi a **transizioni** dello stato)
 - ➔ lo stato è un'informazione **distribuita** tra delle entità dette **posti**
- vantaggi modellistici delle reti di Petri rispetto agli automi
 - ➔ facilmente **modificabili** (aggiunta di altre variabili, modifica dell'insieme di valori assumibili da una o più variabili), senza necessità di ripartire da capo e senza “esplosione” di complessità
 - ➔ **modulari**, costruibili “assemblando” sottomodelli relativi a parti del sistema
 - ➔ bene **interpretabili** in termini di evoluzione dello stato delle singole parti del sistema (lo stato ha un significato **locale**, essendo distribuito nella rete)
 - ➔ possono rappresentare sistemi ad infiniti stati con un numero finito di nodi di un grafo e in generale sono più compatte degli automi

Una rete di Petri è rappresentabile a partire da un grafo orientato e bipartito (nei nodi) detto grafo di Petri $PG = (P, T, A, w)$ dove

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{|P|}\}$ è l'insieme dei **posti**
 - $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{|T|}\}$ è l'insieme delle **transizioni**
 - $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ è la relazione di flusso che descrive due insiemi di **archi orientati** da posti a transizioni e da transizioni a posti
 - $w: A \rightarrow N \setminus \{0\}$ è una funzione che associa un **peso** agli archi
- } insiemi finiti con
 $P \cap T = \emptyset$

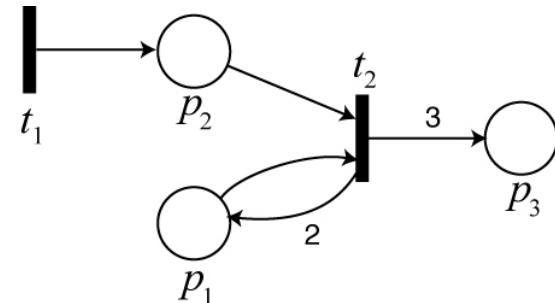


$$\begin{aligned}
 P &= \{p_1, p_2, p_3\} & T &= \{t_1, t_2\} \\
 A &= \{(t_1, p_2); (p_1, t_2); (p_2, t_2); (t_2, p_1); (t_2, p_3)\} \\
 w(t_1, p_2) &= w(p_1, t_2) = w(p_2, t_2) = 1 \\
 w(t_2, p_1) &= 2 & w(t_2, p_3) &= 3
 \end{aligned}$$

In relazione alla transizione $t_j \in T$, si definiscono i due insiemi:

- posti in ingresso $I(t_j) = \{p_i \in P \text{ tali che } (p_i, t_j) \in A\}$
- posti in uscita $O(t_j) = \{p_i \in P \text{ tali che } (t_j, p_i) \in A\}$

in modo analogo si possono definire anche $I(p_j)$ e $O(p_j)$ rispetto al posto p_j



$$\begin{aligned} I(t_1) &= \emptyset & O(t_1) &= \{p_2\} \\ I(t_2) &= \{p_1, p_2\} & O(t_2) &= \{p_1, p_3\} \end{aligned}$$

La topologia di un grafo di Petri è espressa in modo compatto mediante due matrici di dimensioni $|P| \times |T|$

- matrice **I** di **input** (detta anche “**Pre**”) con i pesi degli archi da posti a transizioni
- matrice **O** di **output** (detta anche “**Post**”) con i pesi degli archi da transizioni a posti

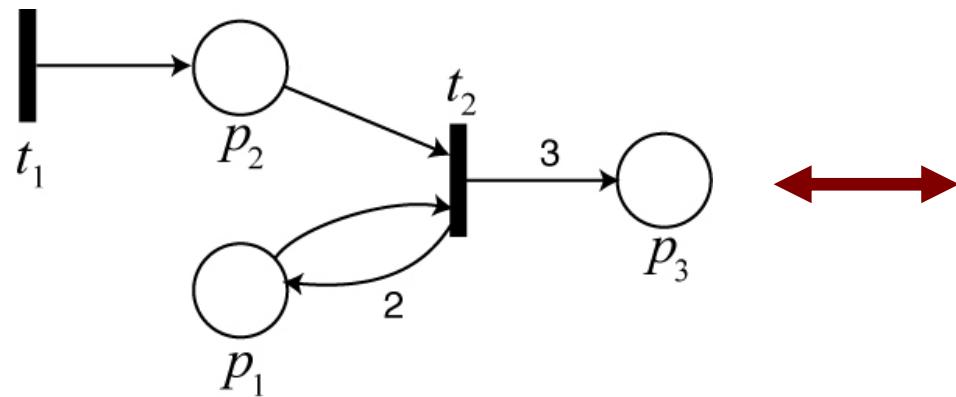
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} w(p_1, t_1) & w(p_1, t_2) & \cdots & w(p_1, t_{|T|}) \\ w(p_2, t_1) & w(p_2, t_2) & \cdots & w(p_2, t_{|T|}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(p_{|P|}, t_1) & w(p_{|P|}, t_2) & \cdots & w(p_{|P|}, t_{|T|}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} w(t_1, p_1) & w(t_2, p_1) & \cdots & w(t_{|T|}, p_1) \\ w(t_1, p_2) & w(t_2, p_2) & \cdots & w(t_{|T|}, p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(t_1, p_{|P|}) & w(t_2, p_{|P|}) & \cdots & w(t_{|T|}, p_{|P|}) \end{pmatrix}$$

da notare che

$w(p_i, t_j) = 0 \text{ se } p_i \notin I(t_j)$

$w(t_j, p_i) = 0 \text{ se } p_i \notin O(t_j)$

□ esempio di matrici I e O



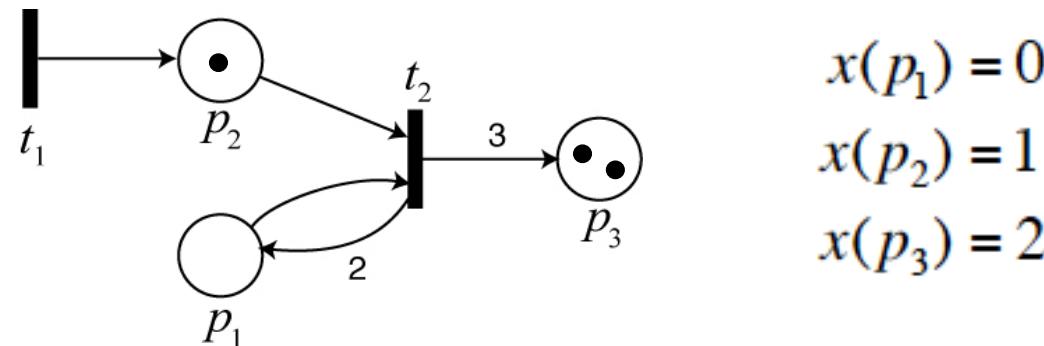
$$|P| = 3, \quad |T| = 2$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tali matrici serviranno anche per descrivere l'evoluzione della rete di Petri

Il grafo di Petri PG descrive solo la topologia della rete; per avere una rete di Petri occorre introdurre il suo stato con la funzione di marcatura

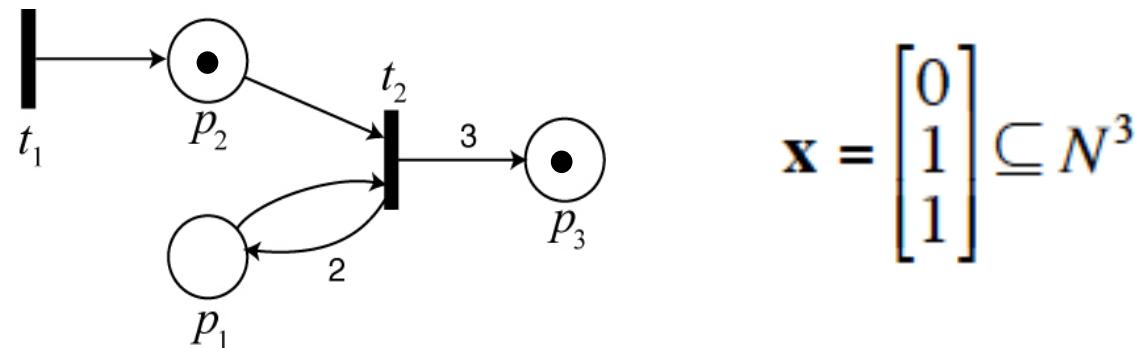
- $x: P \rightarrow N$ che associa ad ogni posto un numero naturale (**token**)



La funzione di marcatura definisce un vettore colonna il cui i -esimo elemento è il numero di token (gettoni/marche) nell' i -esimo posto $x(p_i)$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ \vdots \\ x(p_{|P|}) \end{bmatrix} \subseteq N^{|P|}$$

Una **rete di Petri** PN è quindi un grafo di Petri PG a cui è associata una funzione di marcatura (tipicamente, quella iniziale): $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x})$



Il vettore marcatura di una rete di Petri rappresenta lo **stato** della rete

- il numero di posti $|P|$ è limitato, ma $x(p_i)$ in generale può non esserlo
- una rete di Petri può quindi rappresentare un insieme di stati discreti di cardinalità infinita con un numero finito di posti
- queste sono le più semplici reti di Petri, dette “posti-transizioni” (P-T)

Dinamica delle reti di Petri

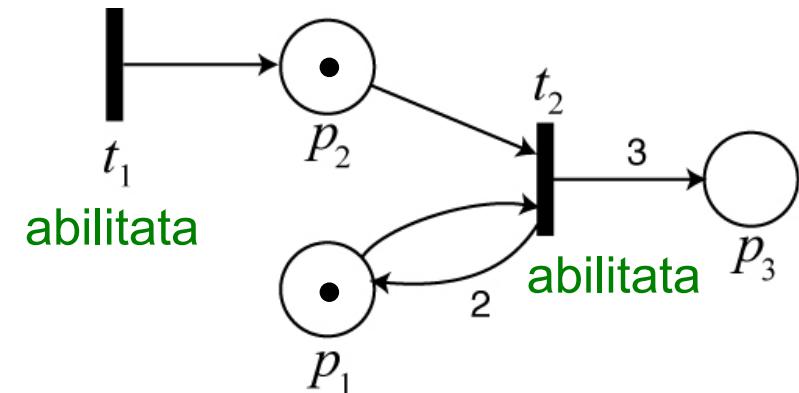
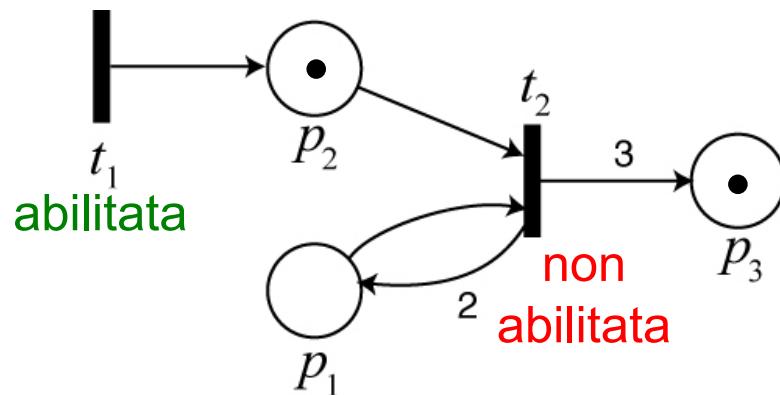
L'evoluzione di una rete di Petri è legata all'occorrenza di eventi

- quando può accadere un evento?
 - quando (almeno) una transizione è abilitata
- cosa succede alla rete in corrispondenza di un evento?
 - avviene un cambio di marcatura

Una transizione t_j è abilitata se

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \text{ per ogni } p_i \in I(t_j)$$

- se una transizione è abilitata allora può “scattare” (firing)
- accade l'evento ad essa legato



Come cambia la marcatura quando scatta una transizione abilitata?

- in tutti i posti in ingresso alla transizione *si consumano* un numero di token pari al peso dell'arco che collega il posto alla transizione
- in tutti i posti in uscita dalla transizione *si generano* un numero di token pari al peso dell'arco che collega la transizione al posto

Si può definire allora una funzione f di transizione dello stato

$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, t_j) \text{ se } x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \forall p_i \in I(t_j)$$

$$\mathbf{x} = [x(p_1) \ x(p_2) \ \cdots \ x(p_{|P|})]^T \Rightarrow \mathbf{x}' = [x'(p_1) \ x'(p_2) \ \cdots \ x'(p_{|P|})]^T$$

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i)$$

è una definizione corretta poiché si è posto

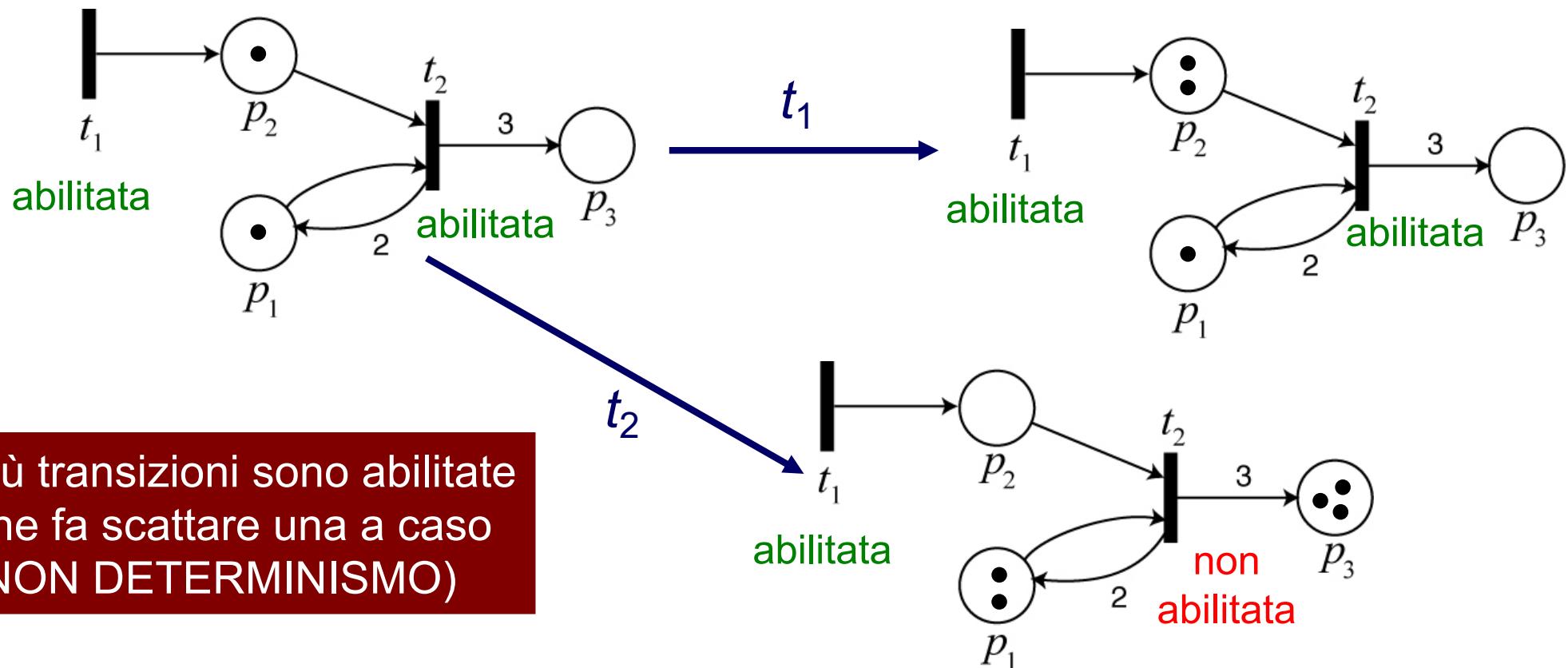
$$\begin{cases} w(p_i, t_j) = 0 & \text{se } p_i \notin I(t_j) \\ w(t_j, p_i) = 0 & \text{se } p_i \notin O(t_j) \end{cases}$$

Dinamica delle reti di Petri

Con questo meccanismo si possono generare o far scomparire “risorse”

$$\sum_{p_i \in P} w(t_j, p_i) > \sum_{p_i \in P} w(p_i, t_j) \quad \text{genero token}$$

$$\sum_{p_i \in P} w(t_j, p_i) < \sum_{p_i \in P} w(p_i, t_j) \quad \text{elimino token}$$



se più transizioni sono abilitate
se ne fa scattare una a caso
(NON DETERMINISMO)

Transizioni concorrenti

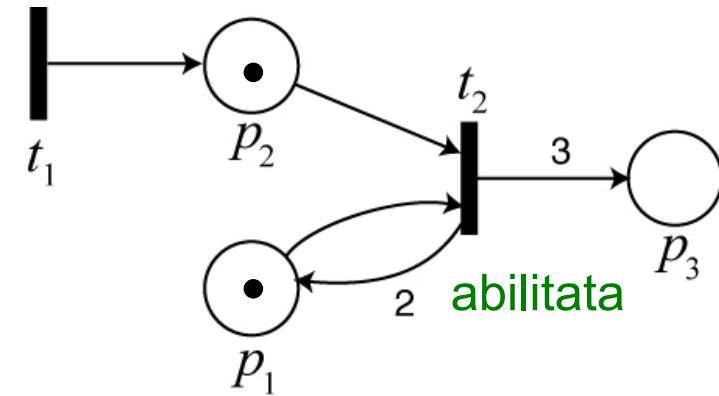
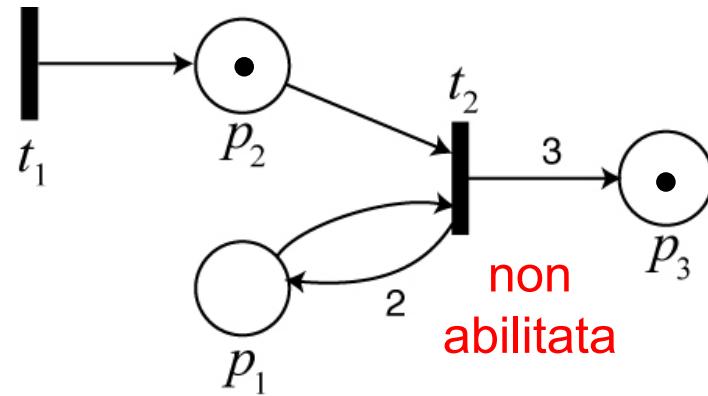
Cosa succede se una marcatura abilita più transizioni insieme?

- ❑ nelle reti standard si assume per convenzione che scatti **una sola** transizione alla volta, **scelta a caso** (non determinismo)
- ❑ lo scatto di una transizione alla volta preserva la **località** dell'evoluzione della rete (idea: due eventi non correlati non accadono “*mai allo stesso istante*”)
- ❑ un'altra regola molto diffusa nei programmi di simulazione delle PN è quella di far scattare insieme **tutte** le transizioni abilitate e **non** in conflitto
- ❑ per quelle **in conflitto**, vi sono molte convenzioni diverse:
 - ➔ scelta casuale
 - ➔ priorità lessicografica
 - ➔ priorità con memoria
 - ➔ ...
- ❑ a transizione scattata, occorre comunque verificare di nuovo le condizioni di abilitazione di tutte le transizioni perché la marcatura è cambiata
- ❑ la scelta di scatto casuale di una delle transizioni abilitate ha un valore concettuale (ad es., per simulazioni), ma **non** è ammissibile in generale nelle implementazioni (ad es., nella legge di controllo di un processo)

Dinamica delle reti di Petri

In termini di matrice I di input, una transizione t_j è abilitata se

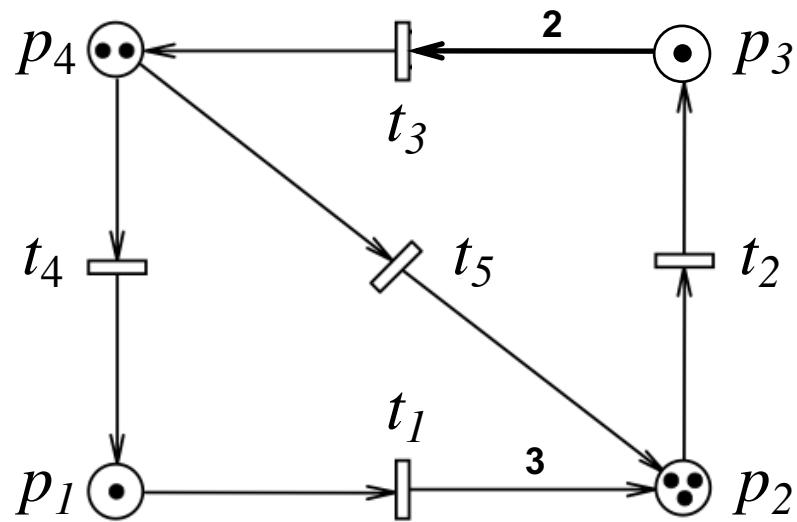
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dinamica di evoluzione di una rete



- ① con la marcatura iniziale \mathbf{x}_0 : t_1, t_2, t_4 e t_5 sono tutte *abilitate*, mentre t_3 non lo è
- ② possibili marcature ottenibili dopo il primo scatto, effettuato con scelta casuale:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_4} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t_5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ③ una sequenza *ammissibile* di transizioni che porta la rete dalla marcatura iniziale \mathbf{x}_0 alla marcatura $\mathbf{x}_f = (0\ 3\ 3\ 3)^T$ è data per esempio da

$$S = t_1 t_4 t_1 t_2 t_2 t_2 t_2 t_2 t_3 t_3 = t_1 t_4 t_1 (t_2)^6 (t_3)^2$$

- ④ le sequenze $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$, $t_2 t_3 t_5 t_4 t_1$ e $t_4 t_2 t_1 t_5 t_3$ sono tutte *ammissibili* e portano alla medesima marcatura finale $\mathbf{x}_f = (1\ 6\ 0\ 1)^T$
 - ➔ si ottiene la stessa marcatura perché in ogni sequenza ciascuna transizione scatta lo stesso numero di volte

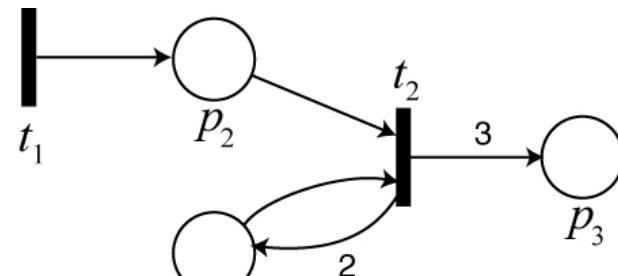
Dinamica delle reti di Petri

In termini di matrici di input e output la funzione di transizione diventa

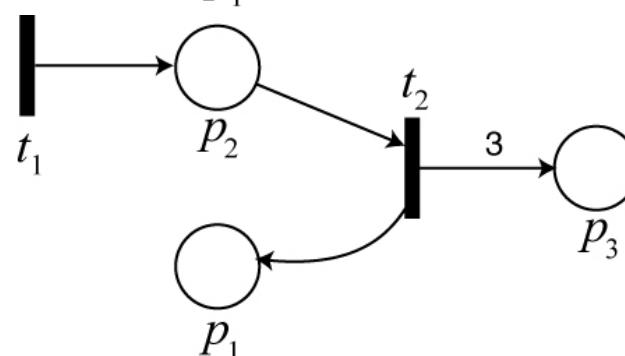
$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{I}_j + \mathbf{O}_j \quad \text{se } \mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$

Si definisce anche la matrice di incidenza della rete di Petri $\mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I}$

- utile, anche se non definisce completamente la topologia della rete
- si perde informazione sul peso di archi in ingresso-uscita alla stessa coppia (p_i, t_j)



$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

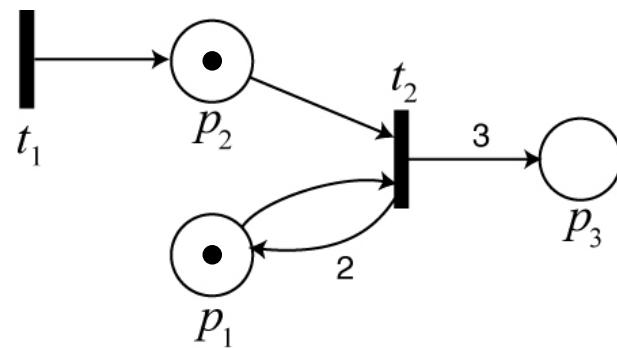


$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dinamica delle reti di Petri

La matrice di incidenza definisce la dinamica della rete

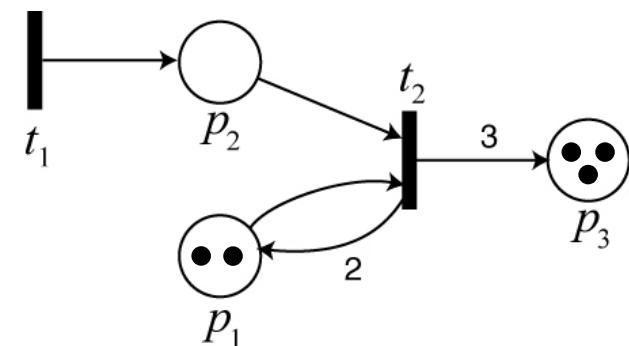
$$f : N^{|P|} \times T \rightarrow N^{|P|}$$
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_j \quad \text{se } \mathbf{x} \geq \mathbf{I}_j$$



$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{transizione } t_2 \text{ è abilitata}$$

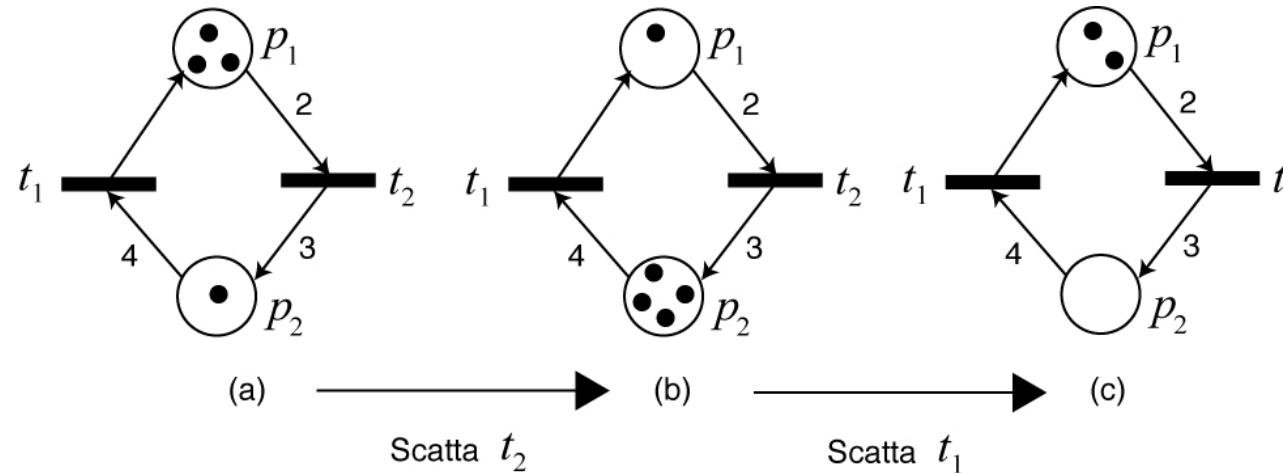
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Dinamica delle reti di Petri

Si definisce sequenza di scatti S una sequenza di n transizioni tali che

- la prima transizione della sequenza è abilitata nella marcatura corrente
- lo scatto di ogni transizione porta in una marcatura in cui è abilitata la transizione successiva nella sequenza



$$\mathbf{S} = t_2 t_1$$

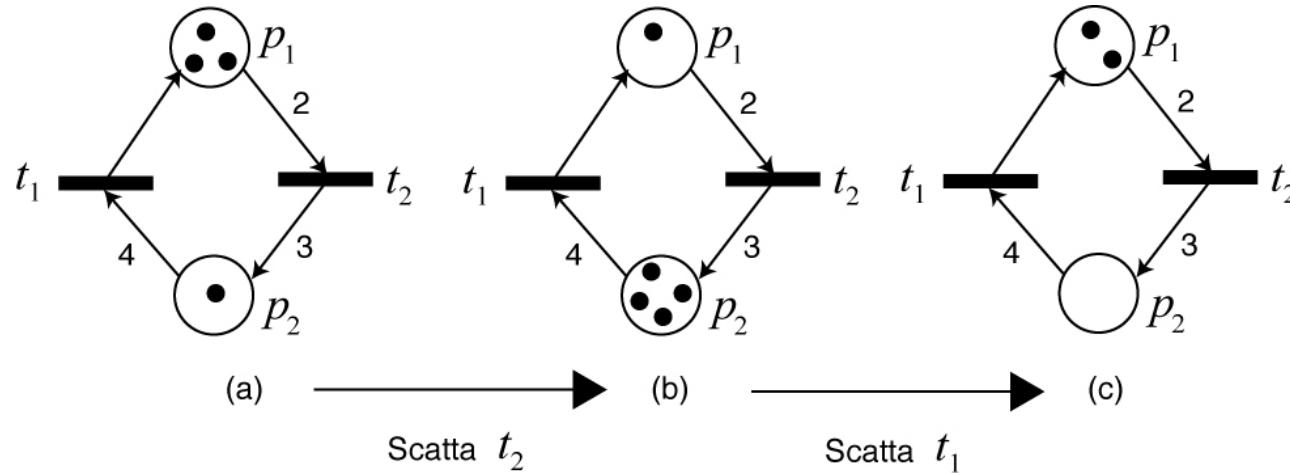
$$\mathbf{C} = \mathbf{O} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$$

Dinamica delle reti di Petri

Si definisce vettore delle occorrenze s di una sequenza di scatti S un vettore colonna con $|T|$ elementi tale che

- il k -esimo elemento s_k è pari al numero di occorrenze della transizione t_k in S



$$\mathbf{S} = t_2 t_1 \Rightarrow s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

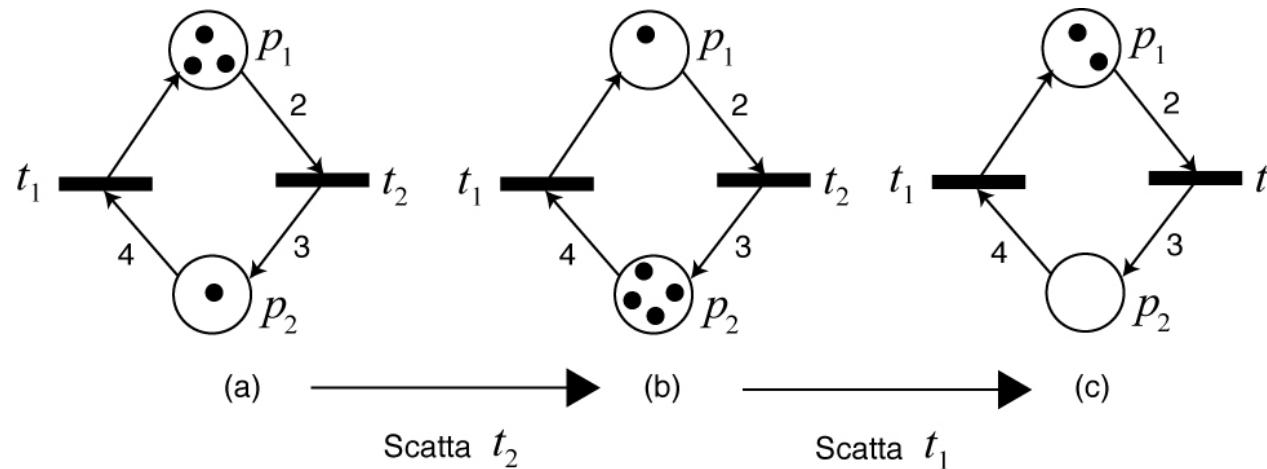
Nota bene: un vettore delle occorrenze corrisponde a più sequenze di transizioni, ma in generale **non** tutte sono sequenze di scatti (ammissibili)

- $s = (1 \ 1)^T$ corrisponde sia a $\mathbf{S}_1 = t_1 t_2$ sia a $\mathbf{S}_2 = t_2 t_1$, ma solo \mathbf{S}_2 è una sequenza di scatti

Dinamica delle reti di Petri

L'evoluzione dinamica di una rete di Petri a seguito di una sequenza di scatti S a cui corrisponde un vettore delle occorrenze s è data da

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{C}_S$$

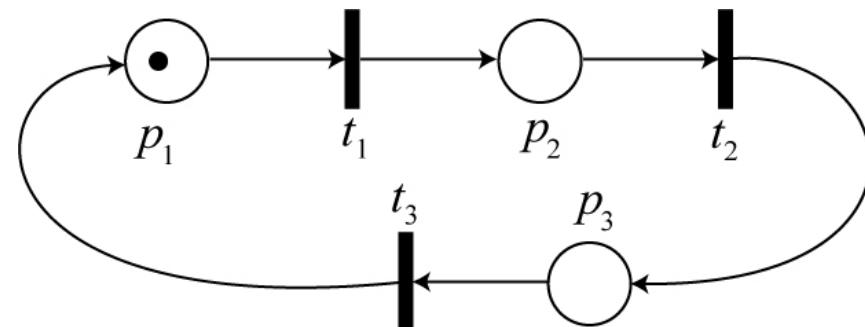


$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}'' &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_S \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$, dove \mathbf{x}_0 è la marcatura iniziale

- una marcatura \mathbf{x}_2 è **raggiungibile** da una marcatura \mathbf{x}_1 se esiste almeno una sequenza di scatti la cui esecuzione da \mathbf{x}_1 porta a \mathbf{x}_2
- ogni marcatura è raggiungibile da se stessa
- l'insieme delle marcature raggiungibili di PN è l'insieme $R(PN)$ di tutte le marcature raggiungibili da \mathbf{x}_0
- sono tutti gli stati in cui il sistema può portarsi durante una generica evoluzione (considerando anche tutte le possibili scelte di sequenze di scatto)

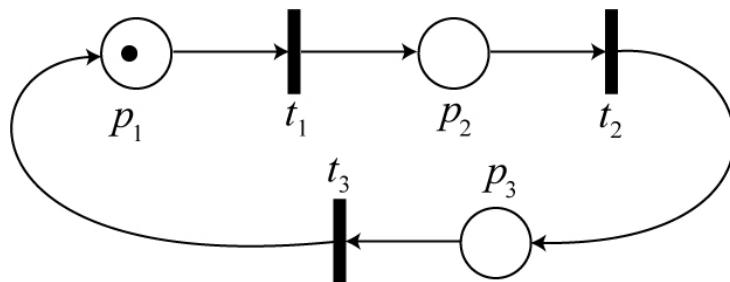


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Proprietà strutturali delle reti di Petri

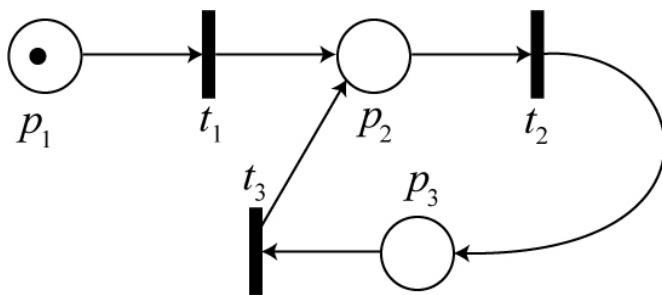
Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- una marcatura \mathbf{x}^* è detta **marcatura base** se è raggiungibile da ogni marcatura $\mathbf{x} \in R(PN)$
 - capacità del sistema di ripristinare sistematicamente una particolare condizione
- se la marcatura iniziale \mathbf{x}_0 è una marcatura base, la rete è reversibile
 - capacità del sistema di riportarsi sistematicamente nella condizione iniziale



$$R(PN_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

tutte marcature base
⇒ rete reversibile



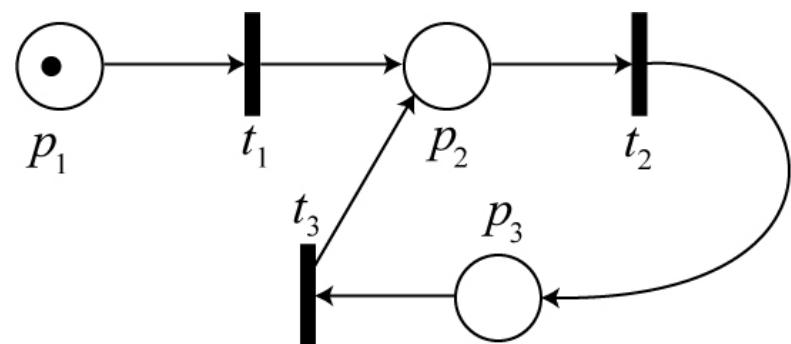
$$R(PN_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

\mathbf{x}_0 non è una marcatura base
⇒ rete non reversibile

Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- una transizione t è **viva** se per ogni marcatura $\mathbf{x} \in R(PN)$ esiste una marcatura \mathbf{x}^* raggiungibile da \mathbf{x} che abilita t
 - quando una transizione (viva) t che è abilitata in \mathbf{x}^* scatta, la rete si porterà in una marcatura da cui potrà, a seguito di una sequenza di scatti, raggiungere una marcatura finale (\mathbf{x}^* o un'altra) tale da far scattare nuovamente t
 - una transizione viva può scattare infinite volte
- si ha **vivezza** della rete quando tutte le transizioni sono vive
 - nota: la non vivezza non implica l'impossibilità di evolvere



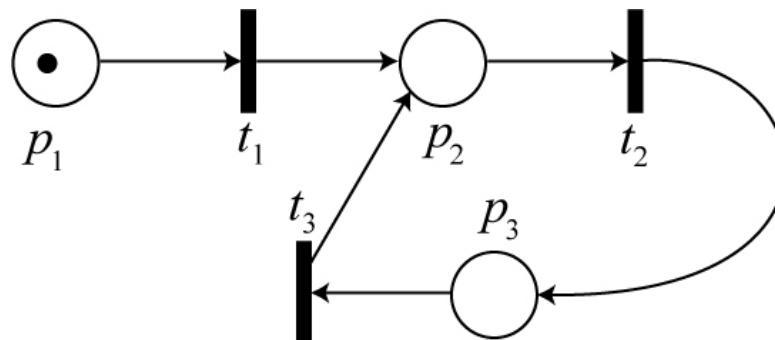
rete **non** viva perché
 t_1 è abilitata solo da \mathbf{x}_0
(transizione non viva)

Proprietà strutturali delle reti di Petri

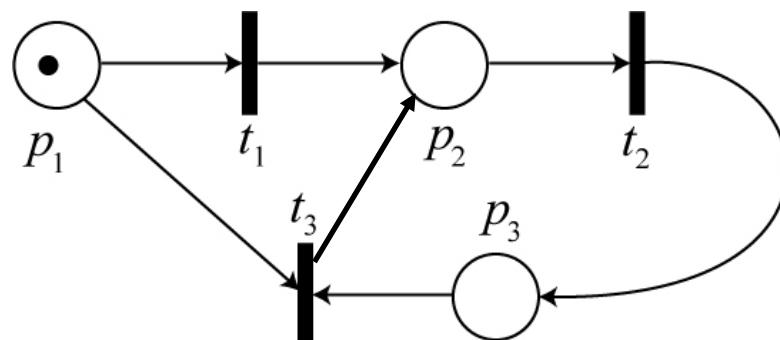
Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

□ la rete è bloccante se esiste una marcatura $\mathbf{x}^* \in R(PN)$ in cui non è abilitata nessuna transizione

- la rete, una volta arrivata in \mathbf{x}^* , non può più evolvere (**deadlock**)
- una rete bloccante non è viva
- una rete non viva può non essere bloccante



- rete non viva in quanto t_1 è abilitata solo in \mathbf{x}_0
- rete non bloccante



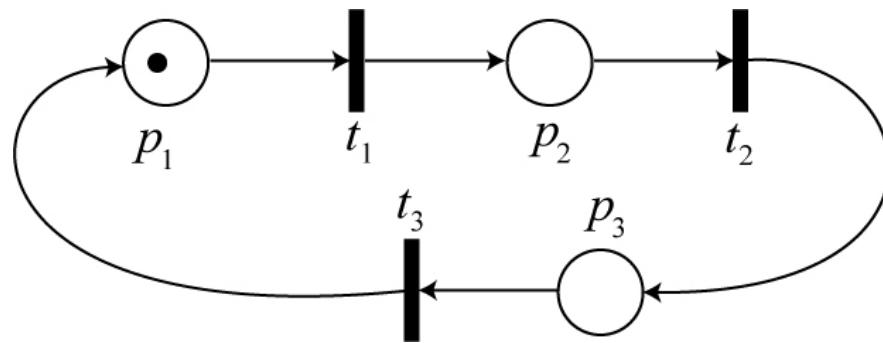
- rete bloccante (da \mathbf{x}_0)
- $\mathbf{x}^* = [0 \ 0 \ 1]^T \in R(PN)$

Proprietà strutturali delle reti di Petri

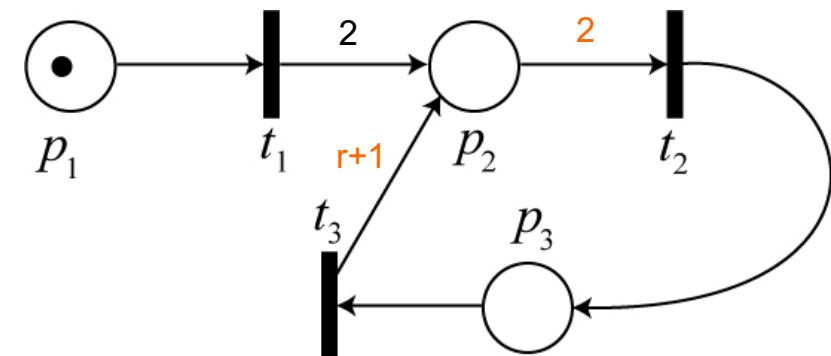
Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

Durante l'evoluzione si possono generare o distruggere token ad ogni transizione; è possibile che si *accumulino* token in posti della rete?

- un posto p_i si dice **k-limitato** se in ogni marcatura raggiungibile il numero di token in p_i è minore o uguale a k
- si ha limitatezza della rete quando ogni posto della rete è k-limitato per un qualche k finito (rete safe (o binaria) se è limitata con k=1)



rete safe

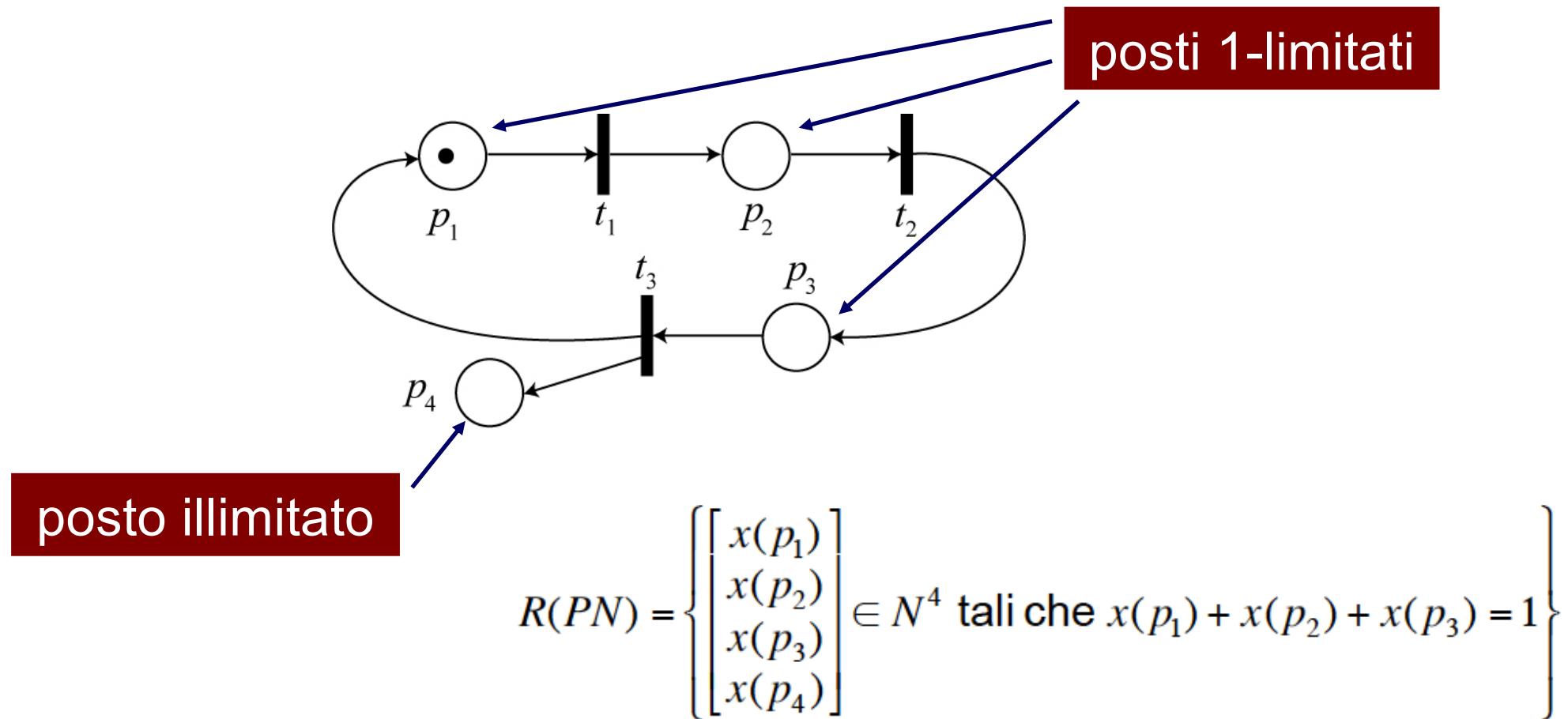


rete limitata (con k=2) per r=1
è “illimitata” per r>1?

Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

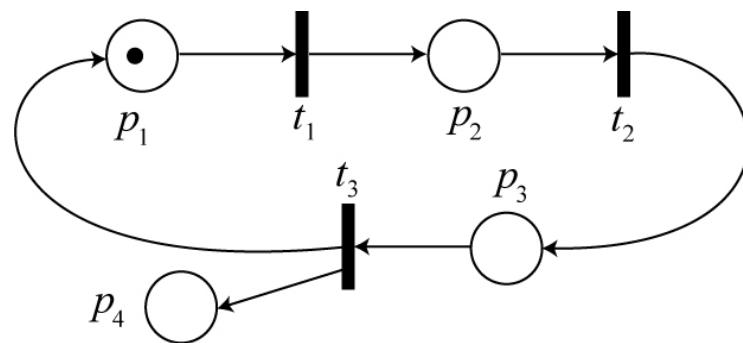
- un posto p_i è detto **illimitato** se non è k -limitato per nessun k finito
- si ha una rete illimitata quando almeno un suo posto è illimitato



Proprietà strutturali delle reti di Petri

Si consideri una generica rete di Petri $PN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0)$

- la parte conservativa della rete è un sottoinsieme di posti in cui, durante qualunque evoluzione ammisible, si mantiene costante una combinazione lineare (a coefficienti interi naturali) di token



$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \\ x(p_4) \end{bmatrix} \in N^4 \text{ tali che } x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

$\{p_1, p_2, p_3\}$ è la parte conservativa della rete

- se la rete ammette una parte conservativa, allora

$$\Lambda \cdot \mathbf{x} = c \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN)$$

$$\text{con } c \in N \text{ e con } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{|P|} \end{bmatrix} \in N^{|P|} \quad (\lambda_i < \infty)$$

- se p_i non appartiene a parte conservativa $\Rightarrow \lambda_i = 0$ (es: $\Lambda = [1 \ 1 \ 1 \ 0]$)
- le parti conservative della rete indicano limiti fisici nel sistema
- se le parti conservative coprono tutto l'insieme P , la rete è **limitata**

Si possono individuare alcune strutture fondamentali nell'interconnessione tra posti e transizioni, con una chiara *interpretazione modellistica*

- **transizioni in conflitto**

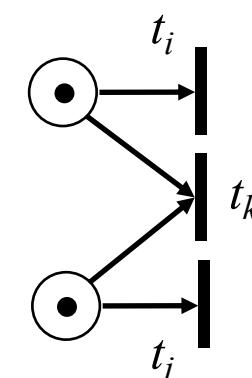
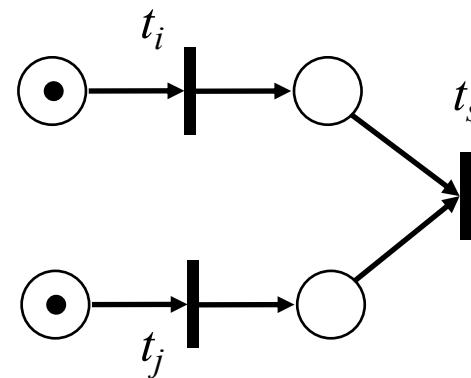
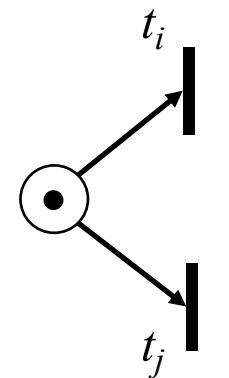
- transizioni con uno o più posti di ingresso in comune, ma aventi un numero di token non sufficienti a farle scattare tutte

- **transizioni in concorrenza con successiva sincronizzazione**

- transizioni senza posti di ingresso in comune, tutte abilitate e seguite da posti di uscita che sono anche di ingresso per una transizione comune

- **transizioni in alternativa (o in confusione)**

- transizioni in concorrenza tra loro, ma in conflitto con altre transizioni (terze)



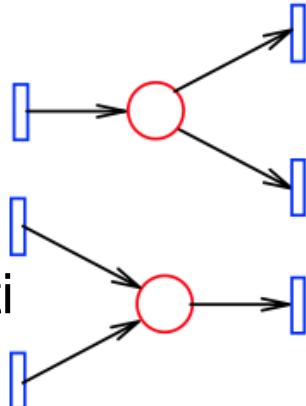
Classi particolari di reti di Petri

Alcune classi di reti di Petri hanno vincoli extra sulla topologia del loro grafo
⇒ minore capacità rappresentativa come modelli di DEDS, ma possibilità di avere risultati analitici più forti

Si considerano qui alcuni casi particolari solo di reti di Petri P-T **ordinarie**, ossia con archi di peso **unitario** (altrimenti sono dette **generalizzate = GPN**)

□ macchina a stati (State Machine, SM)

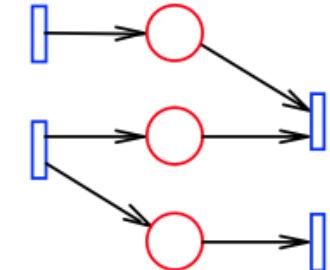
- ogni **transizione** ha il limite di un solo posto in ingresso e un solo posto in uscita
- il numero di token non cambia mai ⇒ rete conservativa
- se la marcatura iniziale ha un solo token ⇒ rete sicura (binaria)
- è viva ⇔ il suo grafo è fortemente连通的 e \exists almeno un token
- insieme di raggiungibilità è finito ⇒ equivale ad un automa a stati finiti
- *può rappresentare conflitti, ma non concorrenza e sincronizzazione*



Classi particolari di reti di Petri

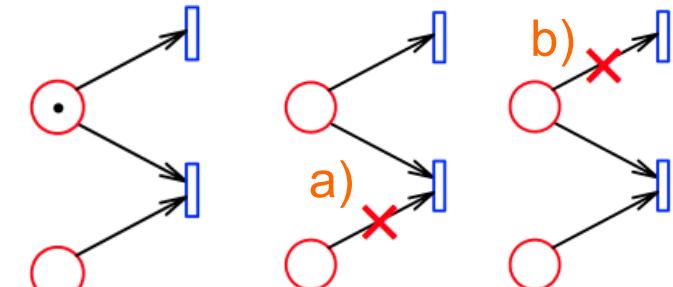
□ grafo marcato (Marked Graph, MG)

- ogni **posto** ha il limite di una sola transizione in ingresso e una sola in uscita
- vivezza \Leftrightarrow ogni ciclo contiene almeno un posto marcato
- può modellare concorrenza e sincronizzazione, ma non i conflitti



□ rete a scelta libera (Free Choice Petri Net, FC)

- può rappresentare concorrenza e conflitti, però con alcune limitazioni
- si vuole evitare che transizioni in potenziale conflitto possano non essere tutte simultaneamente abilitate
 - la risoluzione dei conflitti non sarebbe **libera**, dipendendo anche da altri posti (magari “lontani”) nella rete
- per ogni arco da un posto a una transizione
 - a) o il **posto** è l’unico in ingresso a quella transizione (non c’è sincronizzazione)
 - b) oppure la **transizione** è l’unica in uscita da quel posto (non ci sono conflitti)

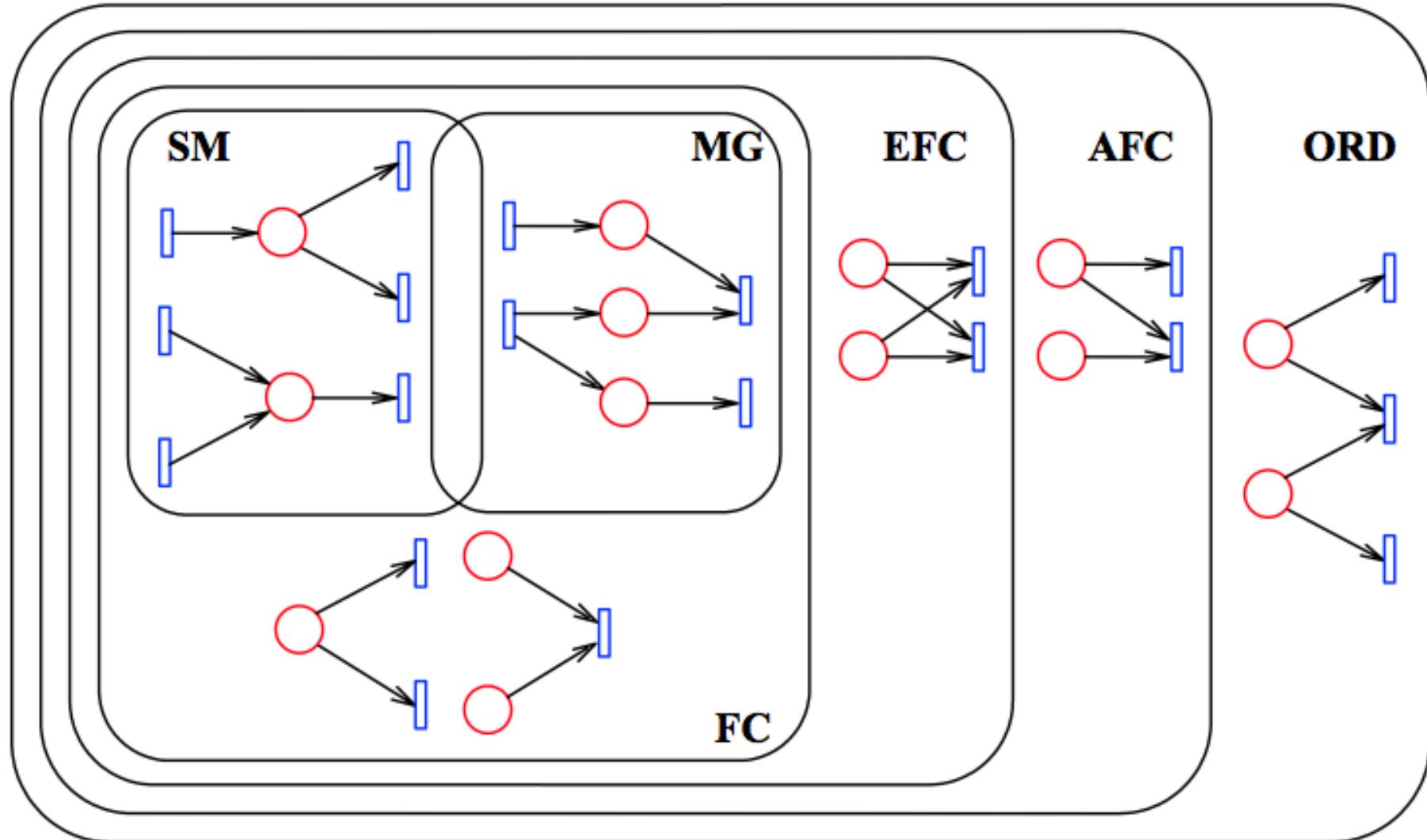


□ se due posti nella rete hanno una o più transizioni di uscita in comune, allora ...

- rete **FC Estesa**: ... hanno tutte le transizioni di uscita in comune
- rete **FC Asimmetrica**: ... tutte le transizioni di uscita di uno lo sono anche dell’altro

Classi particolari di reti di Petri

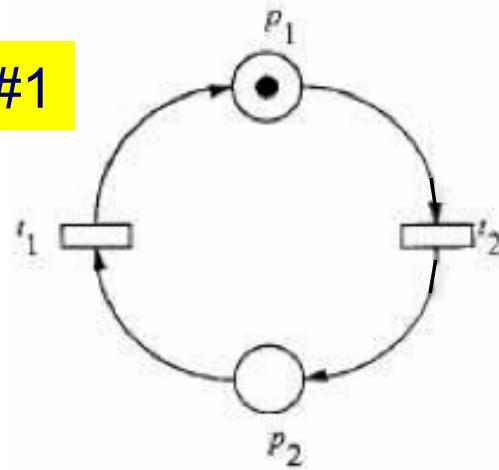
- relazioni tra classi di PN: ORD \supset AFC \supset EFC \supset FC \supset (SM \cup MG)



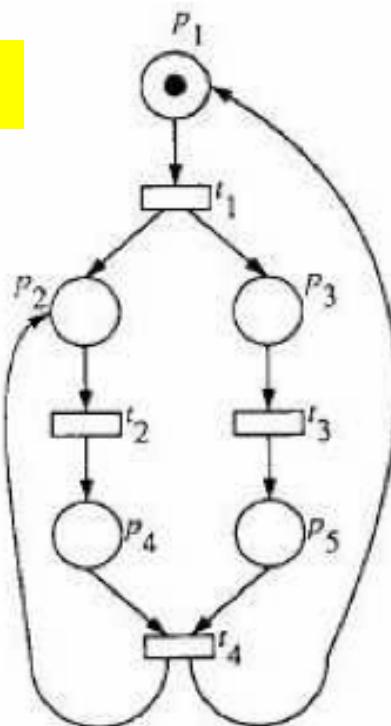
Esempi di proprietà strutturali

limitatezza, vivezza e reversibilità sono proprietà indipendenti
esempi tratti da materiale didattico di Luigi Piroddi, Politecnico di Milano

#1



#2

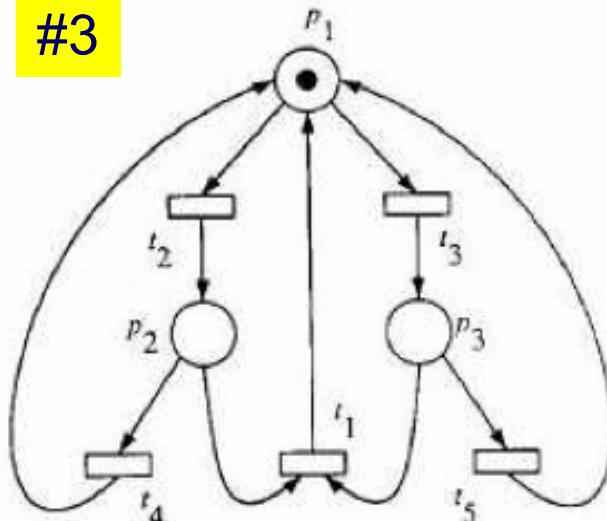


- limitatezza: SI, vivezza: SI, reversibilità: SI
- è una SM \Rightarrow rete binaria, conservativa
- è un MG con un token in ogni ciclo \Rightarrow vivezza

- limitatezza: NO
 \Rightarrow p_2 e p_4 sono illimitati (ad es., con la sequenza $\{t_1 t_2 t_3 t_4\}^k$)
- vivezza: SI
- reversibilità: NO
 \Rightarrow per marcare nuovamente p_1 occorre far scattare t_4 , ma così si aggiunge un token in p_2
- è una FC

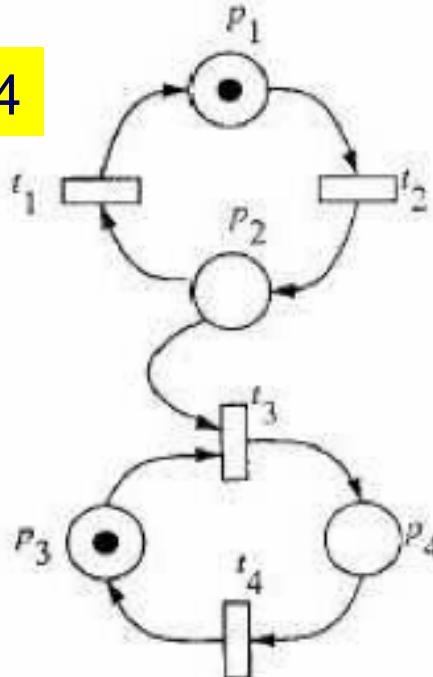
Esempi di proprietà strutturali

#3



- limitatezza: SI
- vivezza: NO
 - ⇒ t_1 non può scattare mai
- reversibilità: SI
 - ⇒ eliminando t_1 , il resto è una SM con tre soli stati: $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{x}_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{x}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$
 - ⇒ da \mathbf{x}_1 si torna in \mathbf{x}_0 con lo scatto di t_4 , mentre da \mathbf{x}_1 si torna in \mathbf{x}_0 con lo scatto di t_5

#4



- limitatezza: SI
- vivezza: NO
 - ⇒ se scatta t_3 , t_1 e t_2 non saranno mai più abilitati
 - ⇒ scattato t_3 , dopo t_4 la rete si blocca in $\mathbf{x}_b = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$
- reversibilità: NO
 - ⇒ se scatta t_3 , non si riesce più a marcare p_1
- è una AFC: $O(p_2) = \{t_1, t_3\} \supset O(p_3) = \{t_3\}$

Esempi di proprietà strutturali

- limitatezza: NO

⇒ il posto p_1 è illimitato (ad es., nelle sequenze $\{t_2 t_1\}^k$ o $t_2 t_3 \{t_1 t_2\}^k$, con k arbitrario)

- vivezza: SI

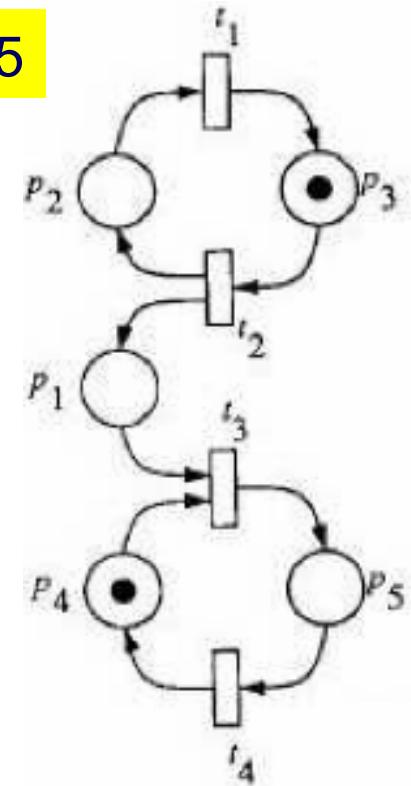
⇒ la rete è un MG e ogni ciclo contiene un posto marcato (condizione necessaria e sufficiente di vivezza)

- reversibilità: SI

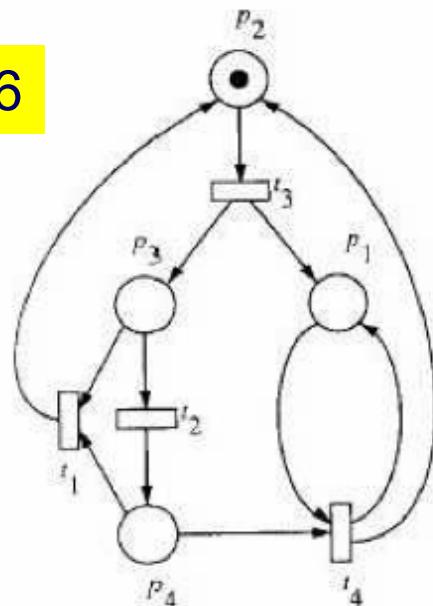
⇒ ma solo se t_3 scatta in media tante volte quante t_2

- rappresenta un modello produttori-consumatori

#5



#6



- limitatezza: NO

⇒ p_1 è illimitato: la sua marcatura cresce di un token per ogni scatto di t_3 (sequenza ripetuta)

- vivezza: NO

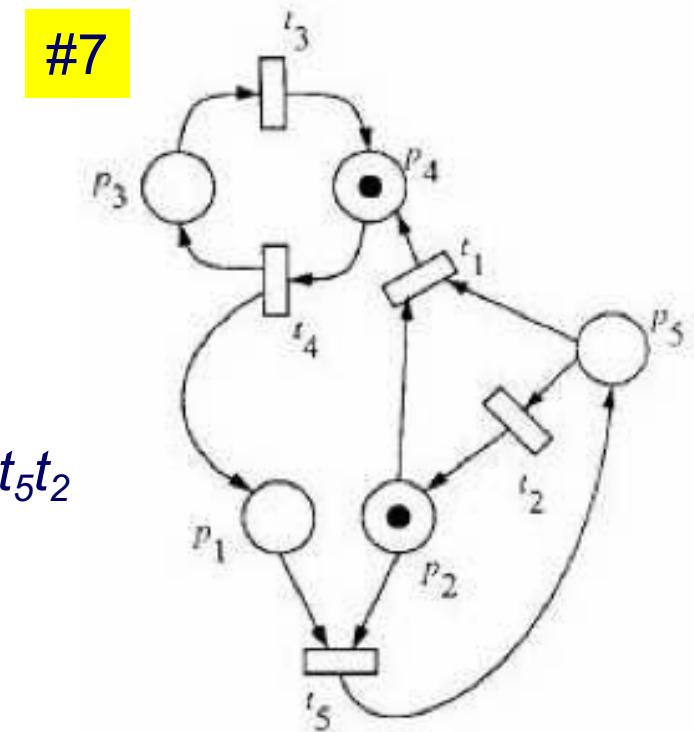
⇒ t_1 non è mai abilitata

- reversibilità: NO

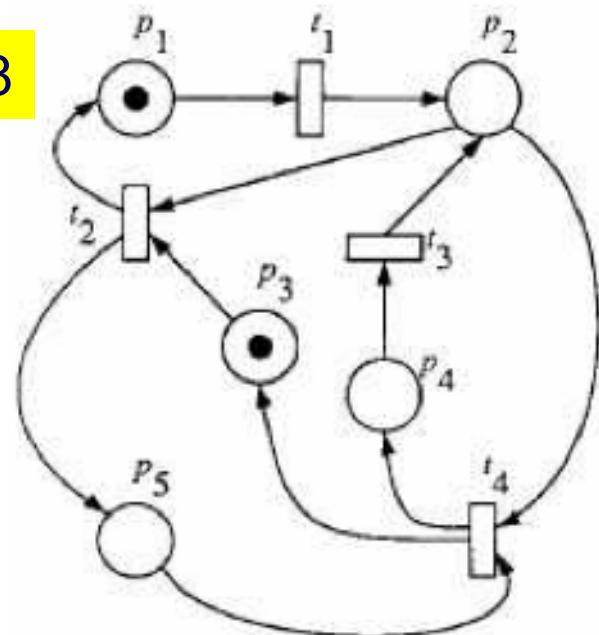
⇒ la sola sequenza ripetuta consentita è $t_3 t_2 t_4$ e questa introduce token non eliminabili in p_1

Esempi di proprietà strutturali

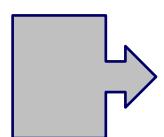
- limitatezza: NO
 - ⇒ il posto p_1 è illimitato (ad es., dalla sequenza t_4t_3)
- vivezza: NO
 - ⇒ t_1 non è mai abilitata
- reversibilità: SI
 - ⇒ c'è consumo di token in p_1 , ripetendo la sequenza t_5t_2



#8



- limitatezza: SI, vivezza: SI, reversibilità: NO
 - ⇒ inizialmente può scattare solo t_1
 - ⇒ dopo è consentita solo la sequenza ripetuta $t_2t_1t_4t_3$
 - ⇒ è una AFC: $O(p_2)=\{t_2,t_4\} \supset O(p_3)=\{t_2\} \cup O(p_5)=\{t_4\}$



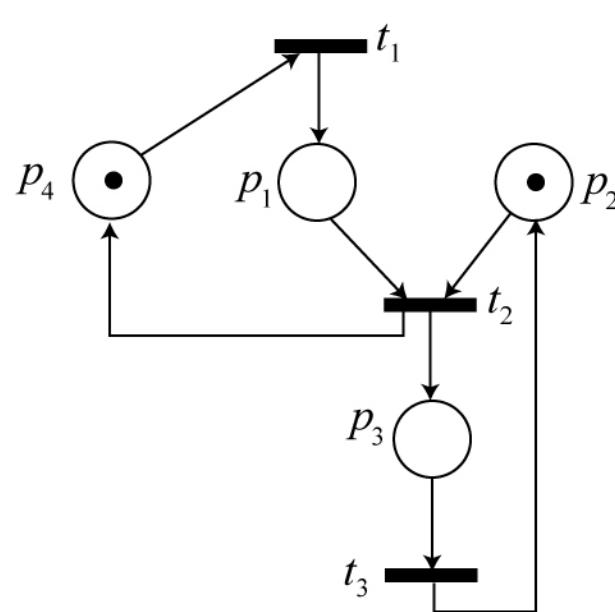
Analisi grafica delle reti di Petri

Studio delle proprietà di raggiungibilità di una Petri Net $PN=(P,T,A,w,\mathbf{x}_0)$

- l'albero di raggiungibilità è uno strumento grafico che rappresenta visivamente tutte le marcature raggiungibili e le sequenze di scatti
- il nodo radice rappresenta la marcatura iniziale della rete
- i nodi di livello k rappresentano le marcature raggiungibili in k passi
- l'albero si sviluppa con una politica “depth-first”
- un nodo è una foglia dell'albero se rappresenta una marcatura già visitata o se non abilita più transizioni
- l'analisi dell'albero di raggiungibilità permette di studiare:
 - ➔ l'insieme di raggiungibilità della rete
 - ➔ la reversibilità della rete
 - ➔ la vivezza della rete
 - ➔ la limitatezza della rete

Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 1: sistema client/server con buffer delle richieste a capacità unitaria



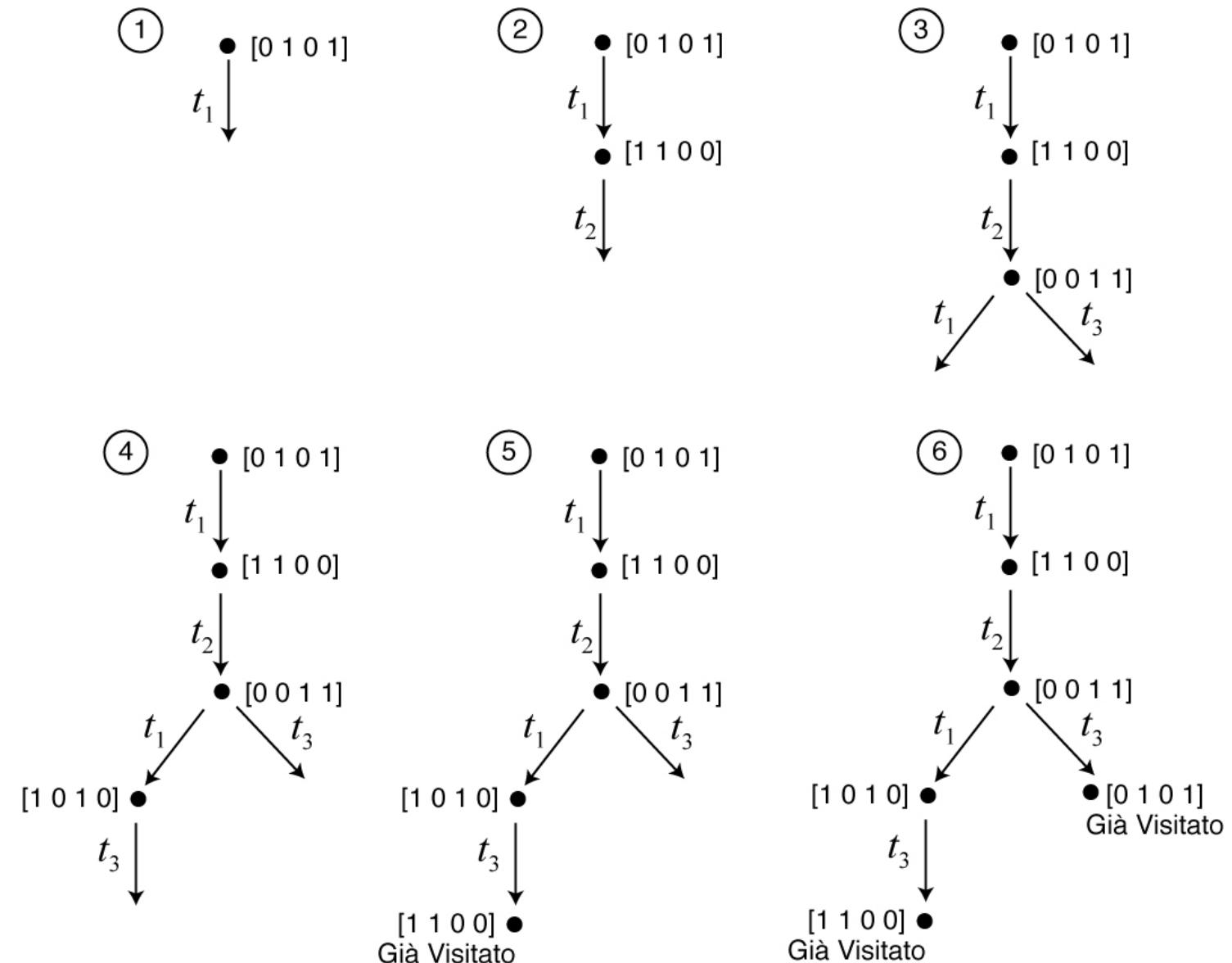
p_1 = buffer occupato

p_2 = server libero

p_3 = server occupato

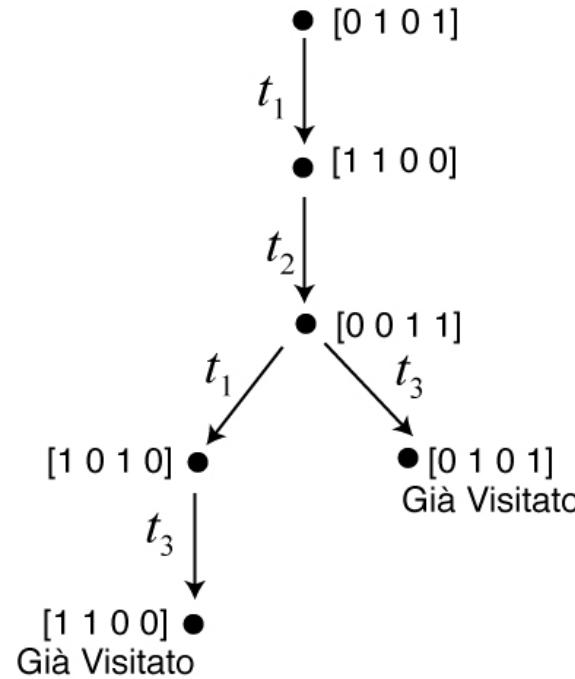
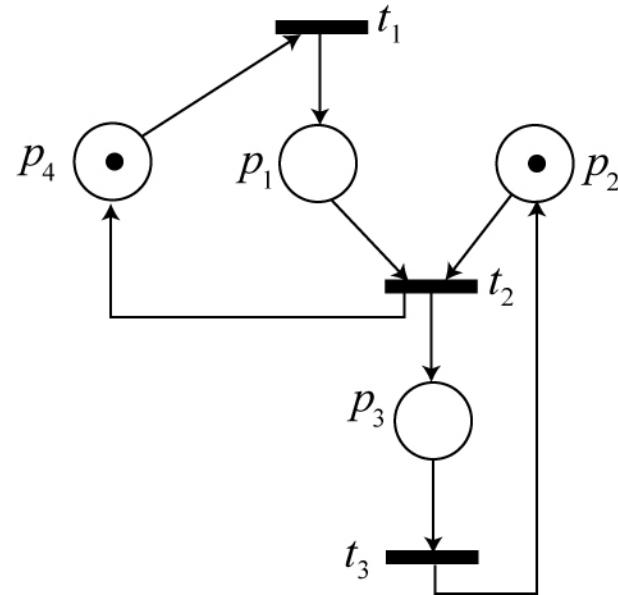
p_4 = buffer libero

hp: richieste dal client
sempre presenti



Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 1 (cont.): sistema client/server con buffer delle richieste a capacità unitaria

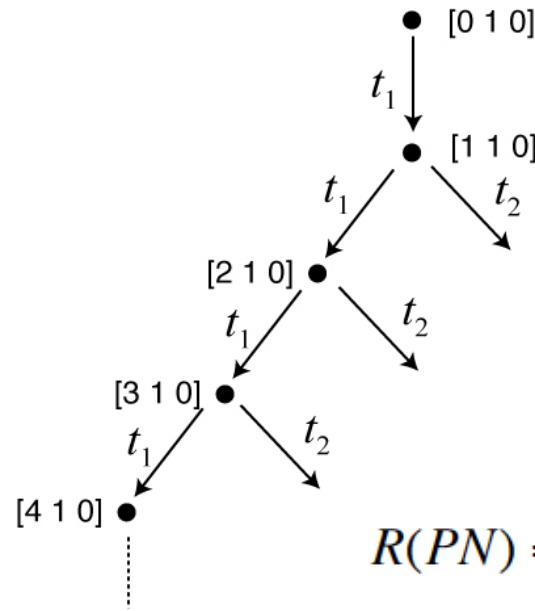
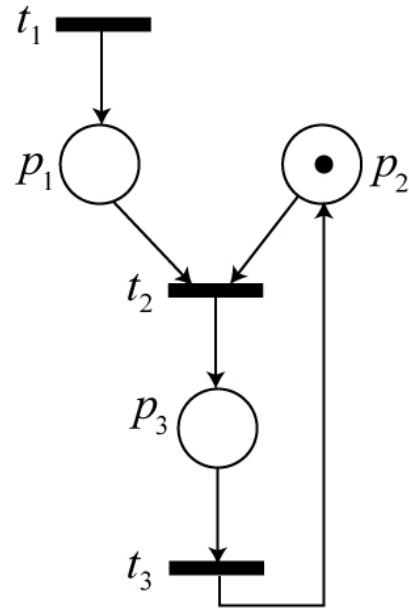


$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- la rete è limitata (in particolare, safe)
- x_0 è una foglia e le altre foglie sono marcature da cui si raggiunge x_0
⇒ la rete è reversibile
- da ogni nodo dell'albero si raggiunge un nodo nel quale possono scattare t_1 , t_2 o t_3 ⇒ la rete è viva

Analisi grafica delle reti di Petri

esempio 2: sistema client/server con buffer delle richieste a capacità **illimitata**



$$R(PN) = \left\{ \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \\ x(p_3) \end{bmatrix} \in N^3 \text{ tali che } x(p_2) + x(p_3) = 1 \right\}$$

l'insieme di raggiungibilità ha cardinalità infinita, e l'albero di raggiungibilità avrebbe infiniti nodi

- rappresentiamo un numero arbitrariamente grande di token con il simbolo ω

$$\omega + k = \omega \quad \omega - k = \omega \quad \forall k \in N$$

Analisi grafica delle reti di Petri

Qual è il meccanismo che permette di avere infiniti token in un posto?

- supponiamo che una sequenza di scatti S porti la rete da \mathbf{x}_1 a $\mathbf{x}_2 \dots$
- ... e che la marcatura \mathbf{x}_2 abbia in ogni posto almeno gli stessi token di \mathbf{x}_1 ed esista un posto dove ne ha strettamente di più (\mathbf{x}_2 ricopre \mathbf{x}_1)
- la sequenza S sarà quindi nuovamente ammissibile in \mathbf{x}_2 (e così via)
- i posti con più token in \mathbf{x}_2 rispetto a \mathbf{x}_1 ne possono accumulare infiniti

Si utilizza questo meccanismo nella costruzione dell'albero

- siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due nodi generati nell'albero (\mathbf{y} generato prima di \mathbf{x})
- \mathbf{x} ricopre \mathbf{y} se**
 - ➔ $x(p_i) \geq y(p_i)$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, |P|\}$
 - ➔ $x(p_j) > y(p_j)$ per almeno un $j \in \{1, 2, \dots, |P|\}$
- si sostituisce il simbolo ω alla marcatura dei posti per cui $x(p_j) > y(p_j)$
- si continua poi con la costruzione classica

Analisi grafica delle reti di Petri

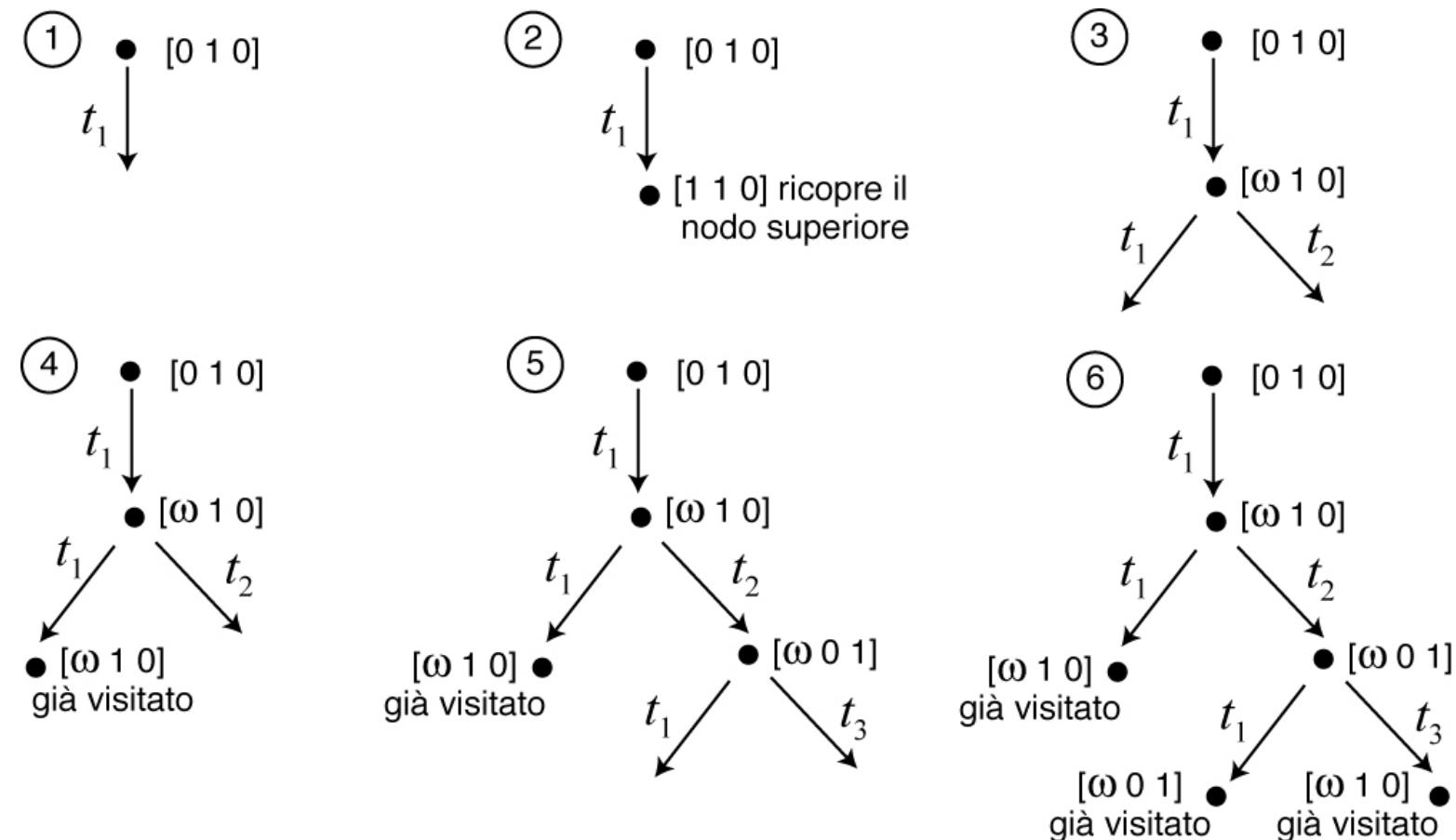
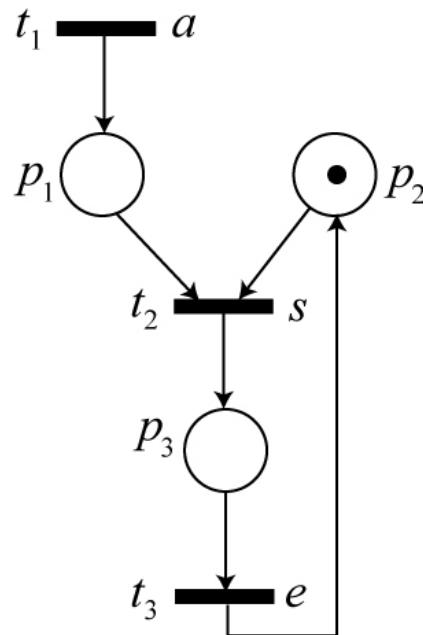
Un albero che contiene il simbolo ω è detto albero di copertura

- rappresenta una rete illimitata
- ha un numero finito di nodi
- i posti con marcatura ω sono posti illimitati



raggiungibilità di marcature e
vivezza di transizioni vanno
analizzate con molta cautela...

esempio 2 (cont.)



Analisi matriciale delle reti di Petri

Per lo studio di varie proprietà strutturali di una rete di Petri PN si usa anche la rappresentazione matriciale (I, O) e l'equazione $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + Cs$

Studio della conservatività della rete

- esiste un insieme di posti tali che la somma pesata dei token rimanga costante in tutte le marcature raggiungibili?
- se tale proprietà è soddisfatta, allora esiste un vettore colonna γ detto P-invariante tale che

$$\gamma^T \cdot \mathbf{x} = \text{costante } \forall \mathbf{x} \in R(PN) \text{ con } \gamma \in N^{|\mathcal{P}|}, \gamma \neq \mathbf{0}$$

- ricordando l'equazione dinamica si ha

$$\gamma^T \cdot \mathbf{x} = \gamma^T \cdot \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN)$$

$$\gamma^T \cdot (\mathbf{x}_0 + Cs) = \gamma^T \cdot \mathbf{x}_0, \quad \forall s \text{ vettore delle occorrenze ammissibili}$$

$$\gamma^T \cdot C = \mathbf{0}^T$$

Analisi matriciale delle reti di Petri

- un P–invariante si cerca tra le soluzioni (non banali e anche nel dominio più ampio $Z^{|P|}$, $Z = \{\text{interi}\}$) del sistema **lineare**

$$\gamma^T \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}^T \gamma = \mathbf{0}$$

- data la struttura lineare del P–invariante, se γ_1 e γ_2 sono P–invarianti anche ($k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2$) è un P–invariante (con k_1, k_2 in $N = \{\text{naturali}\}$)
- si definisce supporto di un P–invariante γ l'insieme $|\gamma|$ di posti corrispondenti ad elementi *non nulli* di γ
- il supporto è l'insieme dei posti che compaiono nell'equazione di invarianza

$$\gamma^T \mathbf{x} = \gamma^T \mathbf{x}_0$$

- dato un P–invariante γ , sia $I_\gamma(PN)$ l'insieme delle soluzioni (nel dominio $N^{|P|}$) dell'equazione di invarianza; allora vale la

$$R(PN) \subseteq I_\gamma(PN) \subseteq N^{|P|}$$

ossia tutte le marcature raggiungibili soddisfano anche l'equazione di invarianza

un P–invariante è detto

- a supporto minimo se il suo supporto non contiene quello di nessun altro P–invariante
- canonico se il massimo comun divisore dei suoi elementi \neq zero è pari a 1

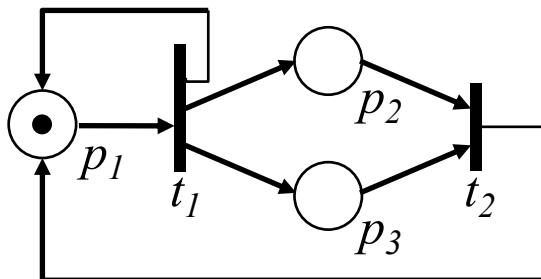
il supporto di un P–invariante (**non negativo**) indica la presenza di una parte conservativa della rete

- se tutta la rete è “coperta” da P–invarianti non negativi (ovvero se ogni posto della rete è nel supporto di almeno un P–invariante di tale tipo) la rete è conservativa e pertanto **limitata**

Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio [P-invariante con componenti negative]

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



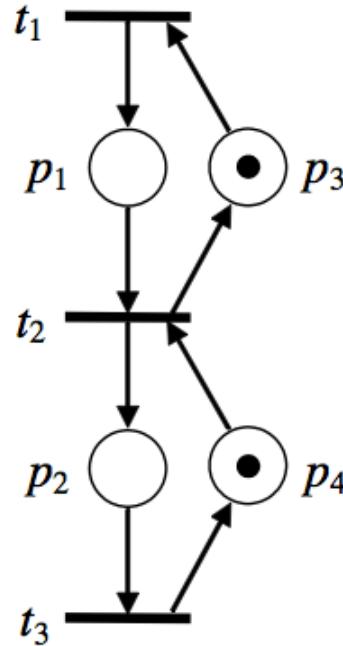
autoanello!

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma^T = [0 \ 1 \ -1]$$

ma la rete è **illimitata!**

esempio [diversi tipi di P-invarianti]



$$\mathbf{C}^T \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - \gamma_3 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 \\ -\gamma_2 + \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$a \geq 0, b \geq 0$, interi,
 $a^2 + b^2 > 0$

$$\gamma_A^T = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \text{canonico e con supporto minimo} \quad \|\gamma_A\| = \{p_1, p_3\}$$

$$\gamma_B^T = [0 \ 1 \ 0 \ 1] \quad \text{canonico e con supporto minimo} \quad \|\gamma_B\| = \{p_2, p_4\}$$

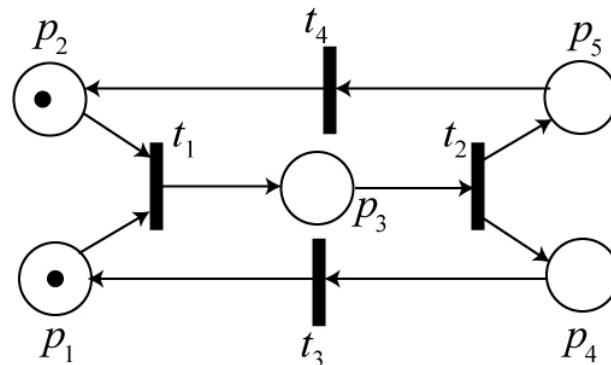
$$\gamma_C^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad \text{canonico, ma non a supporto minimo}$$

$$\gamma_D^T = [2 \ 0 \ 2 \ 0] \quad \text{a supporto minimo, ma non canonico}$$

Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio [conservatività basata sui P-invarianti]

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

N.B. $\text{rango}(\mathbf{C}) = 3$
 $\Rightarrow \dim \text{nullo}(\mathbf{C}^T) = 2$
 (check con Matlab)

$$\gamma^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \Rightarrow \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_4 = 0 \\ \gamma_2 - \gamma_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_4 \\ \gamma_2 = \gamma_5 \\ \gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \gamma_1^T &= [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0] \\ \gamma_2^T &= [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

entrambi non negativi

entrambi a supporto minimo e canonici

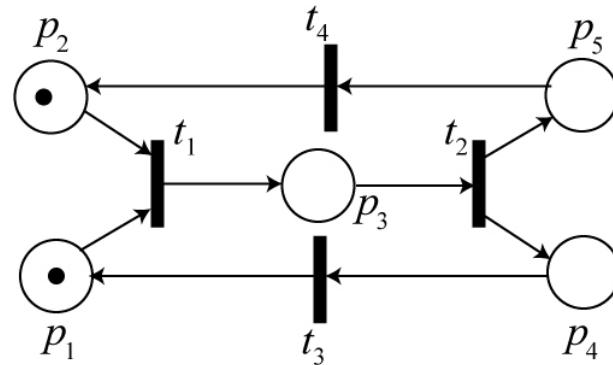
$$\left. \begin{array}{l} \|\gamma_1\| = \{p_1, p_3, p_4\} \quad x(p_1) + x(p_3) + x(p_4) = 1 \\ \|\gamma_2\| = \{p_2, p_3, p_5\} \quad x(p_2) + x(p_3) + x(p_5) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rete conservativa}$$

gli insiemi di supporto degli invarianti
 non negativi ricoprono $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$

infatti con $\gamma^T = [1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1]$
 $\Rightarrow \gamma^T \mathbf{x} = \gamma^T \mathbf{x}_0 = 2, \quad \forall \mathbf{x} \in R(PN)$

Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio (cont)



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_1^T = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0) \\ \gamma_2^T = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)$$

$$\gamma_1^T \mathbf{x} = \gamma_1^T \mathbf{x}_0 = 1 \\ \text{equazione di invarianza di } \gamma_1$$

$$I_{\gamma_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix} \right\}$$

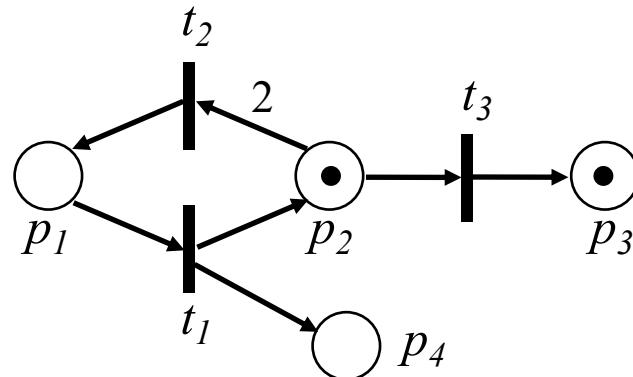
$$I_{\gamma_2} = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma_2^T \mathbf{x} = \gamma_2^T \mathbf{x}_0 = 1 \\ \text{equazione di invarianza di } \gamma_2$$

$$I_{\gamma_1 + \gamma_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = R(PN)$$

Analisi matriciale delle reti di Petri

altro esempio



$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B. $\text{rango}(\mathbf{C}) = 3$
 $\Rightarrow \dim \text{nullo}(\mathbf{C}^T) = 1$

$$\gamma^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}^T \Rightarrow \begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 = 0 \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \\ -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma^T = [2\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha] \Rightarrow \gamma^T = [2 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

P-invariante canonico
 $\forall \alpha \in N \setminus \{0\}$ è un P-invariante non negativo
con supporto (minimo) che copre tutto $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
 \Rightarrow rete conservativa e limitata

equazione di
invarianza di γ

$$\gamma^T \mathbf{x} = 2x(p_1) + x(p_2) + x(p_3) + x(p_4) = \gamma^T \mathbf{x}_0 = 2$$

tutte le marcature
soluzione in \mathbb{N}^4

$$I_\gamma(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset I_\gamma(PN)$$

insieme di raggiungibilità

Analisi matriciale delle reti di Petri

Studio della possibilità di riportarsi alla condizione iniziale

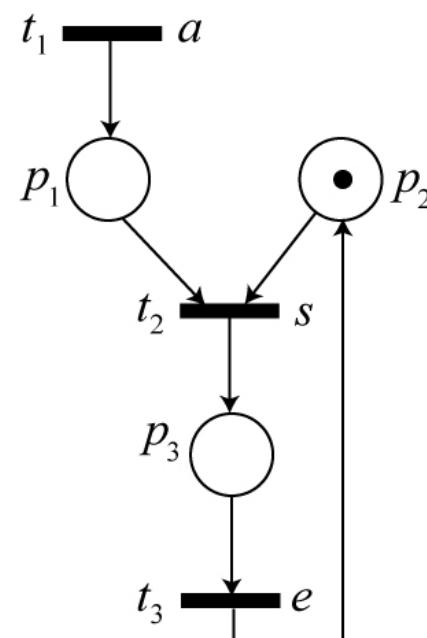
- esiste una sequenza di scatti S non vuota che, partendo dalla marcatura iniziale \mathbf{x}_0 , riporta la rete nella marcatura iniziale \mathbf{x}_0 ?
- se esistono, è necessario che queste sequenze S siano associate ad un vettore delle occorrenze η , detto T-invariante, tale che

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\eta = \mathbf{x}_0$$

- un T-invariante è una soluzione non banale del sistema lineare (la soluzione banale è non muoversi da \mathbf{x}_0)
$$\mathbf{C}\eta = \mathbf{0}$$
- un T-invariante è solo un *vettore delle occorrenze*: bisogna però verificare che sia associabile a una *sequenza (ammissibile) di scatti*
- la reversibilità della rete è una condizione più forte (implica poter ritornare allo stato iniziale da *qualunque* stato raggiungibile da \mathbf{x}_0)

Analisi matriciale delle reti di Petri

esempio



$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C\eta = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 - \eta_2 = 0 \\ -\eta_2 + \eta_3 = 0 \\ \eta_2 - \eta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 \Rightarrow \eta = [\alpha \quad \alpha \quad \alpha]^T$$



$$\eta = (1 \ 1 \ 1)^T$$

vettore delle occorrenze per le sequenze di transizioni

unica sequenza di scatto ammissibile

t₁t₂t₃
t₁t₃t₂
t₂t₁t₃
t₂t₃t₁
t₃t₁t₂
t₃t₂t₁

⇒ eseguendo un numero di servizi (s,e) pari al numero delle richieste a il sistema ritorna nella condizione iniziale con buffer vuoto e server libero

□ reti di Petri temporizzate

Per introdurre utili informazioni temporali, si introduce una **struttura di clock** \mathbf{v}_j per la generica **transizione** t_j

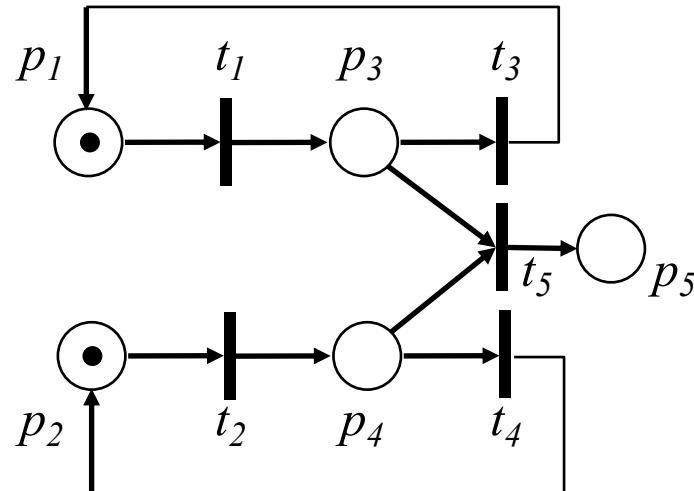
$$\mathbf{v}_j = \{v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,k}, \dots\} \quad \text{con } v_{j,k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Una rete di Petri temporizzata $TPN = (P, T, A, w, \mathbf{x}_0, \mathbf{V})$ è una rete di Petri PN con una struttura di clock $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_j \text{ tale che } t_j \in T_D\}$

- ⇒ insieme T partizionato in transizioni temporizzate (T_D) e non (T_o)
- ⇒ alla k -esima abilitazione, la transizione $t_j \in T_D$, scatta dopo $v_{j,k}$ unità di tempo
- ⇒ [$k=1$] la transizione è un'attività che richiede un tempo v_j per essere completata
- ⇒ [$k=1$] evoluzione tipica per una transizione t_j abilitata all'istante τ
 - in τ : token *tolti* dai posti d'ingresso di t_j
 - in $\tau + v_j$: token *messi* nei posti d'uscita di t_j
- ⇒ **varianti**: le durate possono avere una distribuzione di probabilità (rete **stocastica**); i **posti** possono essere temporizzati (come o invece delle transizioni); si possono definire degli **intervalli** di tempo $[v_{j,min}, v_{j,max}]$ ammissibili per l'attivazione, ...
- ⇒ per transizioni temporizzate in conflitto **effettivo**, ci possono essere diverse **regole** (ad esempio, $[*]$ = scatta quella associata ad un'unità di tempo v_j minore)

Uso della temporizzazione

esempio: questa rete di Petri (ordinaria) può raggiungere una situazione di deadlock



$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R(PN) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

al primo scatto della transizione t_5 (il conflitto con t_3 e t_4 viene risolto con scelta **casuale**), la rete raggiunge la marcatura $\mathbf{x}_{\text{dead}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$ dove **si blocca**

temporizzando in modo opportuno le transizioni, la TPN evita tale situazione e evolve in modo **univoco** e **senza blocco** (e la marcatura iniziale sarà **reversibile**)

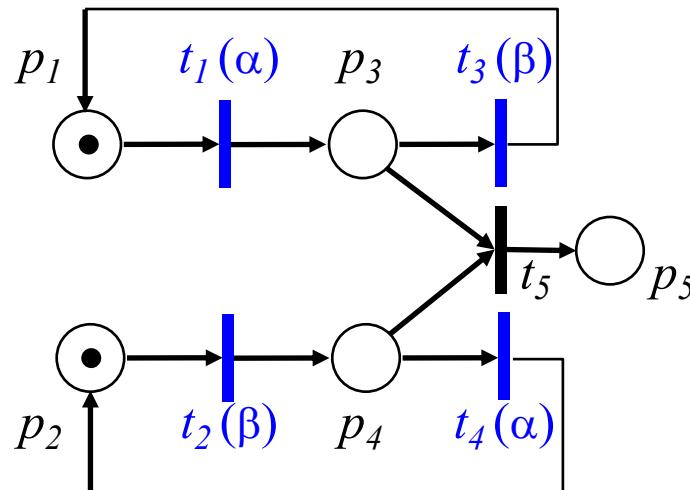
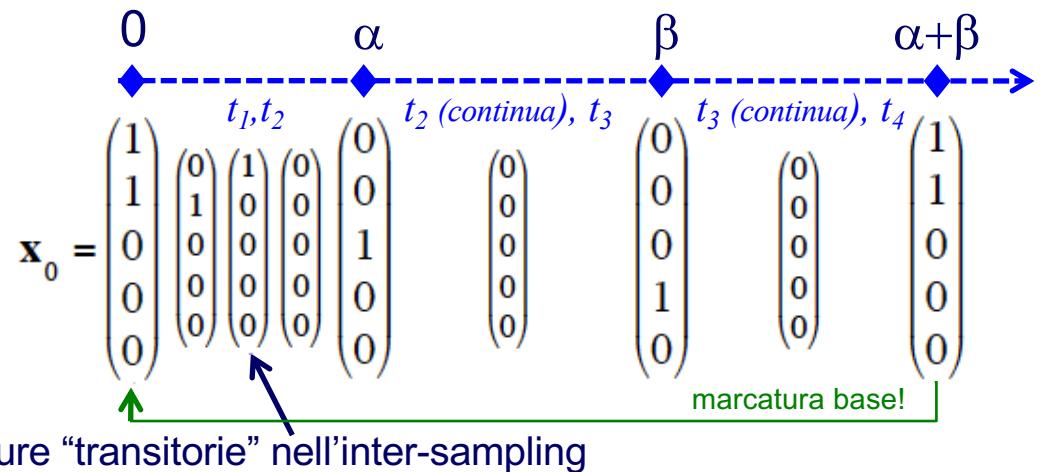


diagramma temporale di evoluzione della marcatura

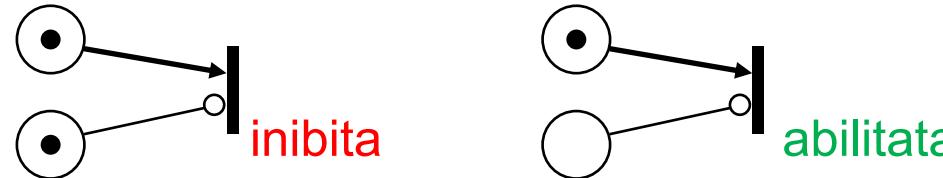
$$\mathbf{V} = \{v_1 = v_4 = \alpha, v_2 = v_3 = \beta\} \quad \text{con arbitrari } \beta > \alpha > 0$$



Estensioni delle reti di Petri

□ altre estensioni (ad alto livello)

- si può distinguere la tipologia dei token (diverse informazioni/colore per ogni tipo)
⇒ reti di Petri **colorate**
- si possono introdurre altre condizioni logiche per lo scatto delle transizioni
⇒ ad esempio, con archi **inibitori** (la presenza di un token nel posto di ingresso collegato con un tale arco ad una transizione la disabilita comunque)



- si possono aggiungere vincoli di **capacità** su uno o più posti
 - si possono aggiungere limiti sul **numero di scatti** totale di una o più transizioni
 - ...
-
- il **vantaggio** comune a queste estensioni è quello di ottenere maggiore espressività (e compattezza) della rete usata come modello di un DEDS
 - il **limite** comune è la maggiore difficoltà o impossibilità di verificare le proprietà della rete con metodi analitici (lo strumento della **simulazione** diventa essenziale)

Per rappresentare un sistema fisico guidato da eventi mediante una rete di Petri si possono seguire due possibili approcci, eventualmente combinati

□ approccio fisico

- ➔ si suddivide il sistema in sottosistemi elementari
- ➔ si modellano tali sottosistemi con reti di Petri elementari
- ➔ si compongono tali reti elementari

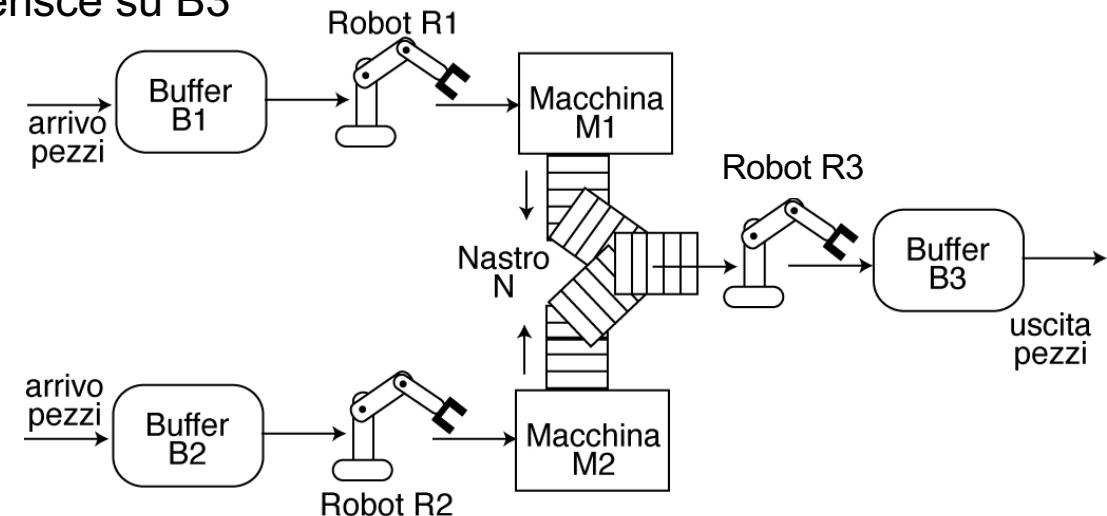
□ approccio funzionale

- ➔ si individuano le fasi logiche del funzionamento del sistema
- ➔ si identificano le risorse fisiche che eseguono tali fasi
- ➔ si allocano le fasi sulle risorse

Modellistica con reti di Petri

esempio: impianto di produzione e movimentazione composto da

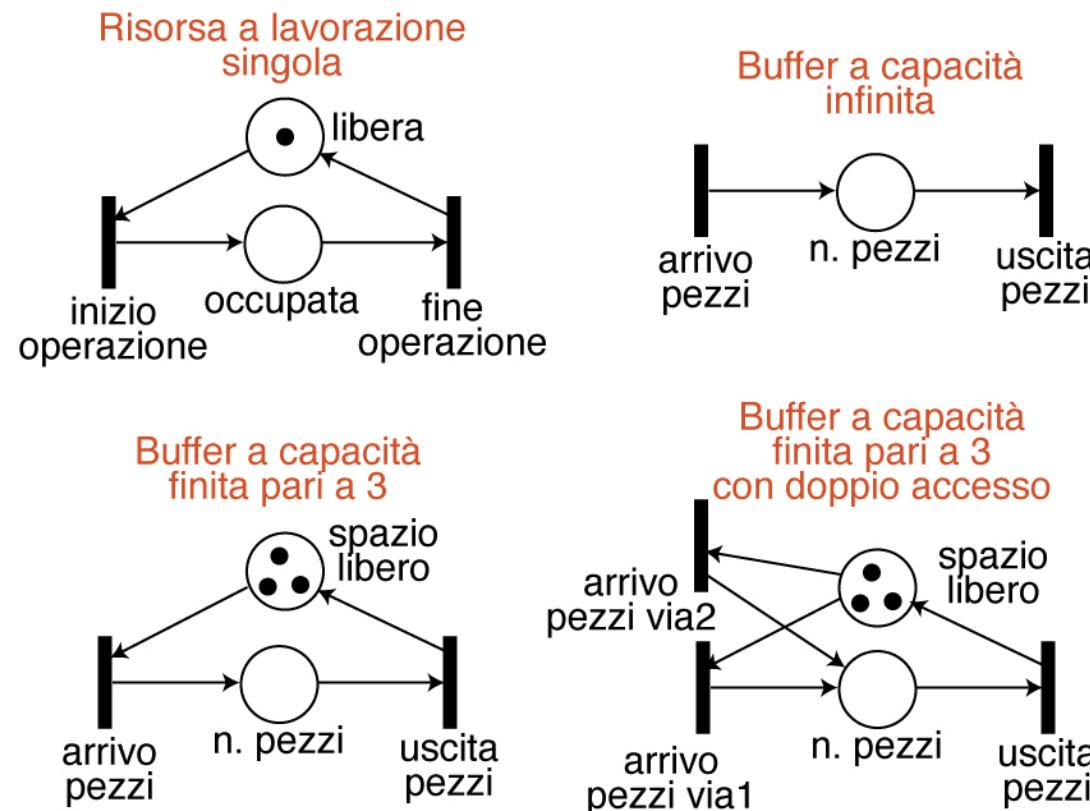
- tre magazzini di capacità infinita (B1, B2, B3)
- tre robot per il trasporto dei pezzi (R1, R2, R3)
- un nastro trasportatore di capacità pari a 3 (N)
- due macchine utensili che possono lavorare un pezzo alla volta (M1, M2)
- fasi del processo di lavorazione
 - ➔ i pezzi arrivano spontaneamente in B1 e B2
 - ➔ R1 preleva un pezzo alla volta da B1 e lo trasferisce su M1
 - ➔ R2 preleva un pezzo alla volta da B2 e lo trasferisce su M2
 - ➔ a lavorazione terminata M1 deposita il pezzo su N
 - ➔ a lavorazione terminata M2 deposita il pezzo su N
 - ➔ R3 preleva un pezzo alla volta da N e lo trasferisce su B3
 - ➔ i pezzi escono spontaneamente da B3



Modellistica fisica con reti di Petri

I componenti possono essere classificati come

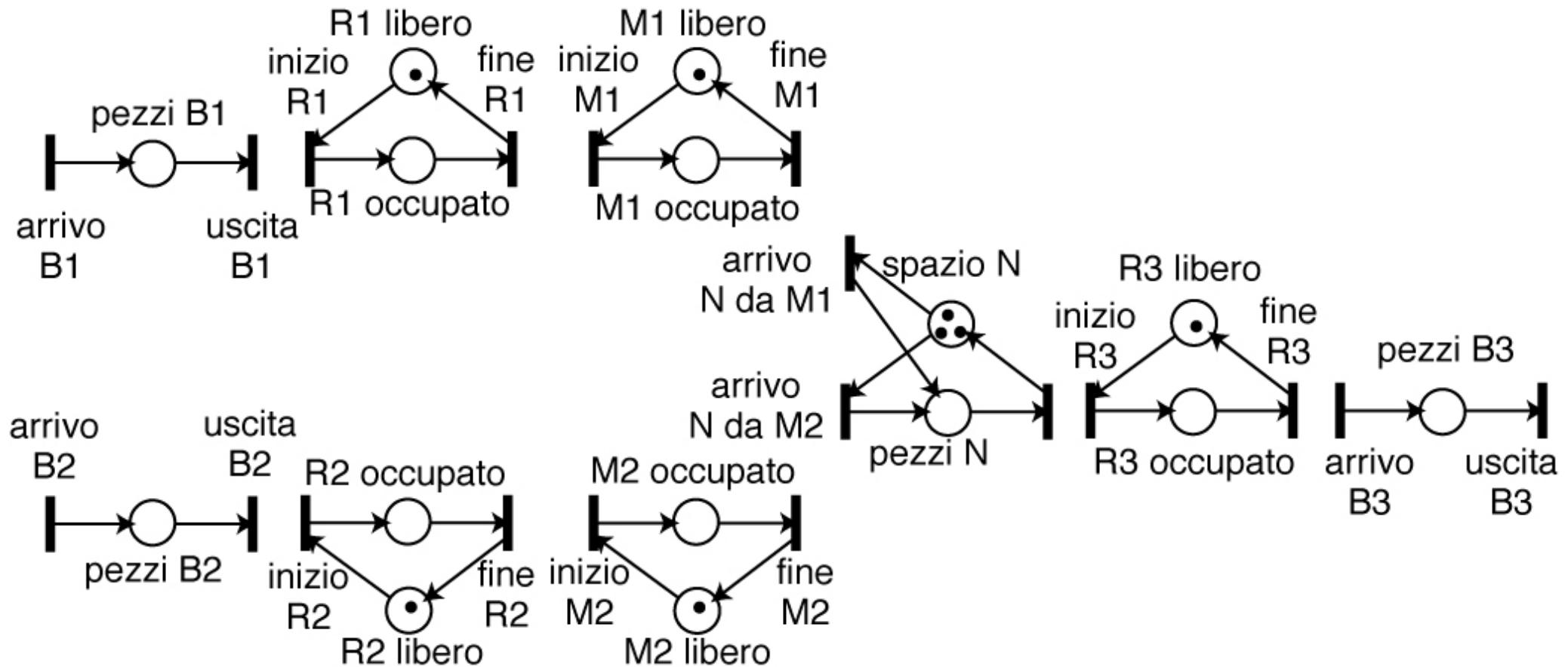
- risorse: eseguono una fase di lavorazione
 - capacità: numero di lavorazioni in parallelo
- buffer: contengono un sottoprodotto di una fase di lavorazione
 - capacità: numero di sottoprodotti che possono essere contenuti



Modellistica fisica con reti di Petri

nell'esempio

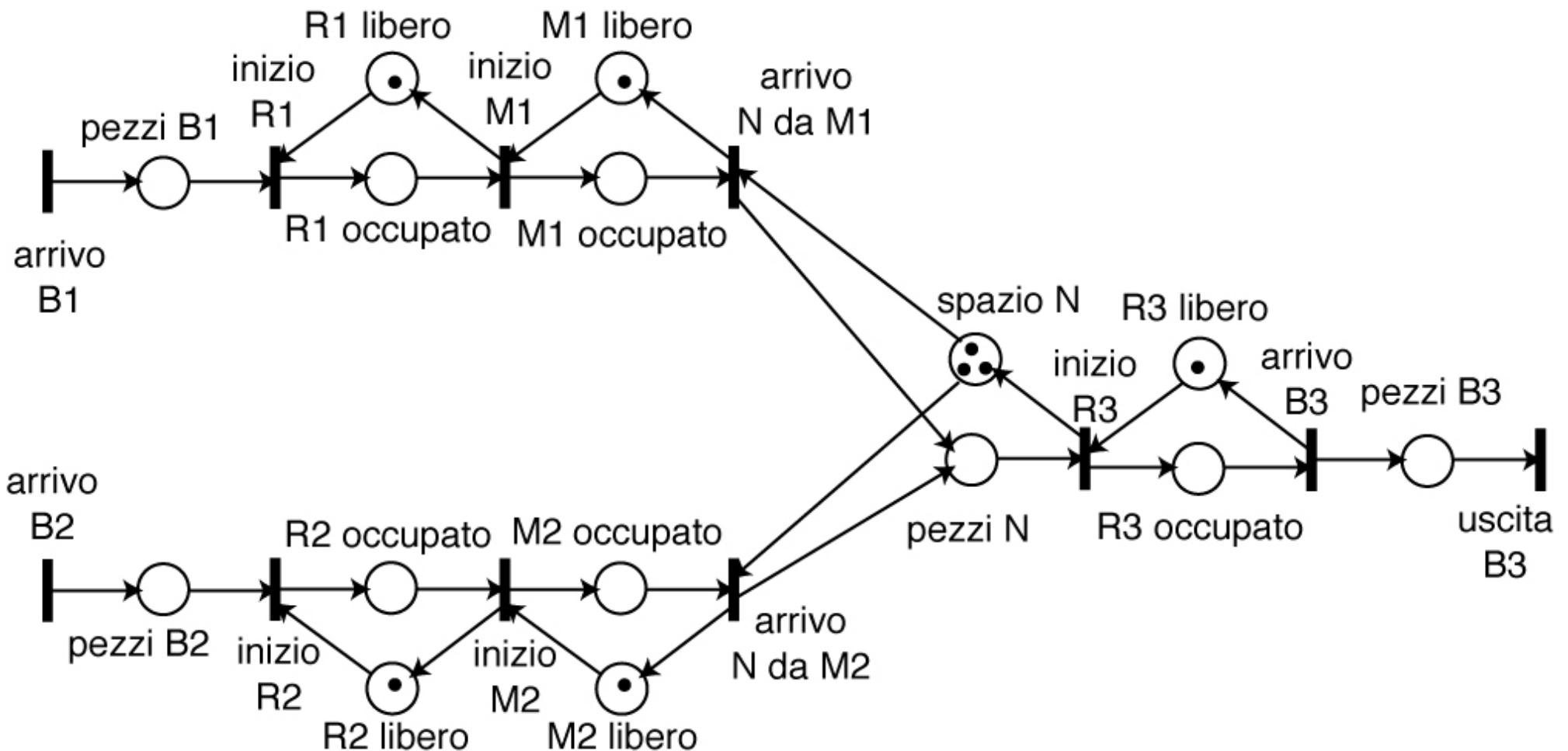
- B1, B2, B3: buffer illimitati
- N: buffer con capacità 3 a due vie di accesso
- M1, M2, R1, R2, R3: risorse a lavorazione singola



Modellistica fisica con reti di Petri

Come si possono comporre reti di Petri elementari?

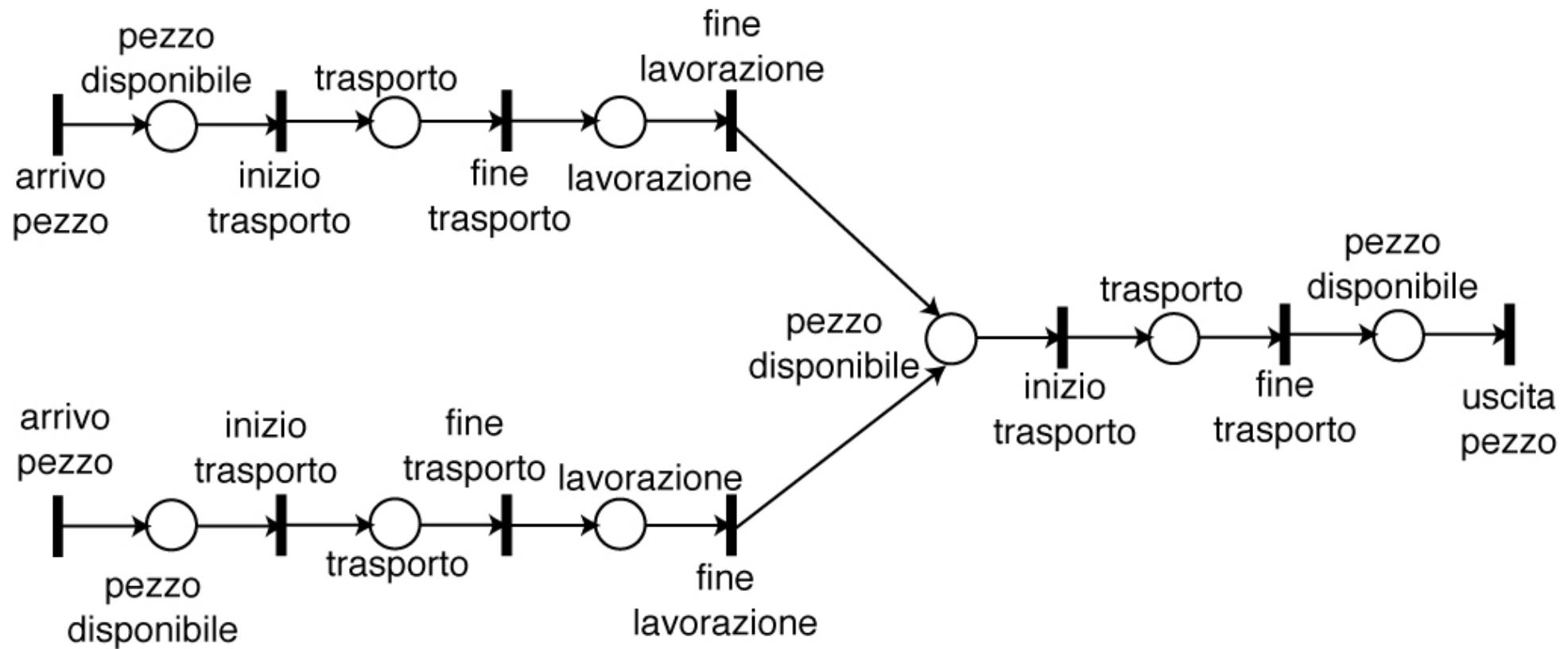
- facendo coincidere le transizioni
- esempio: la transizione di uscita dei pezzi dal buffer B1 coincide con la transizione di inizio lavoro di R1



Modellistica funzionale con reti di Petri

Come si possono rappresentare le fasi logiche di lavorazione?

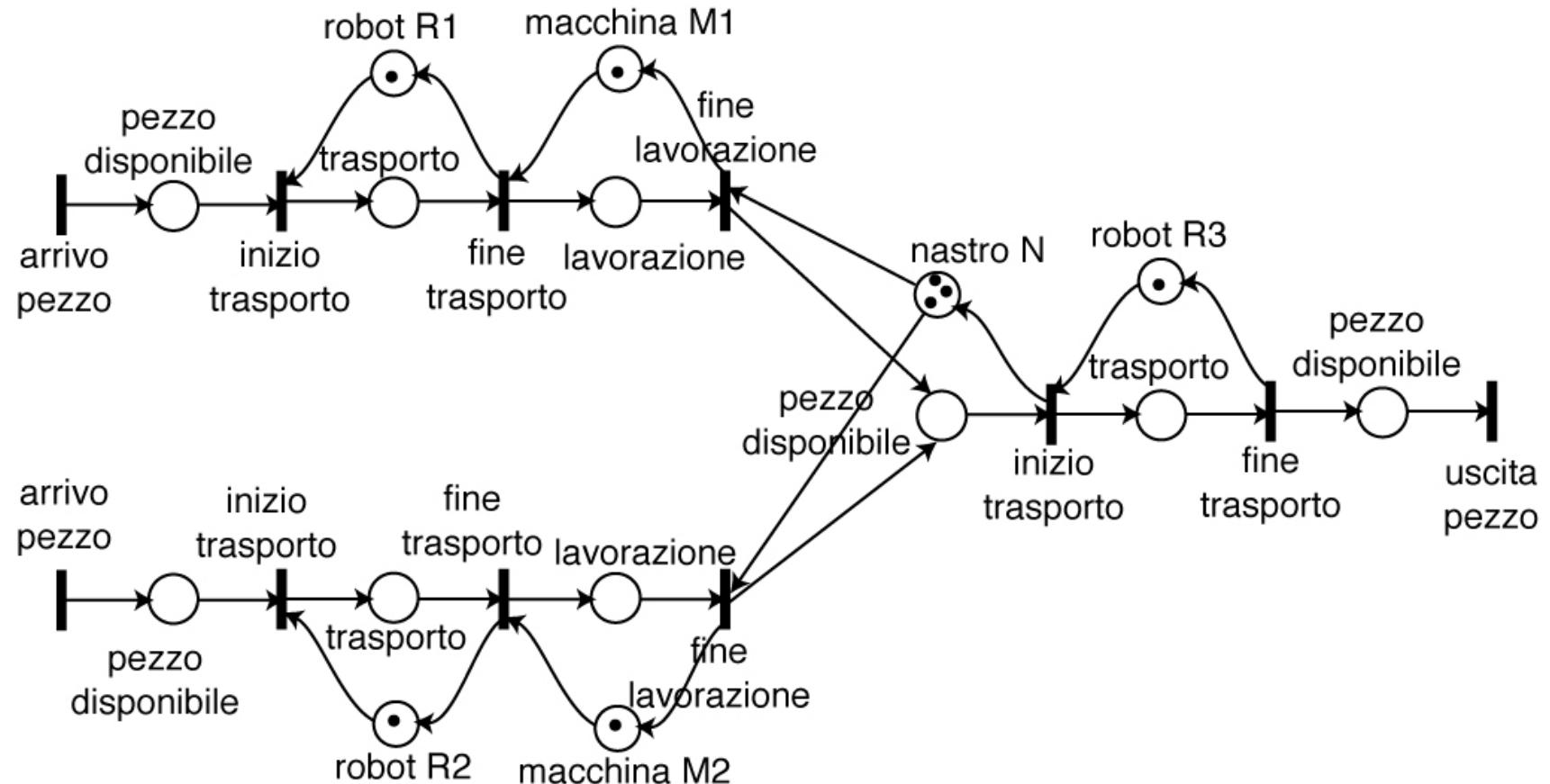
- sequenza di posti/transizioni
- un token in un posto indica la fase che si sta eseguendo



Modellistica funzionale con reti di Petri

Come si possono rappresentare le risorse?

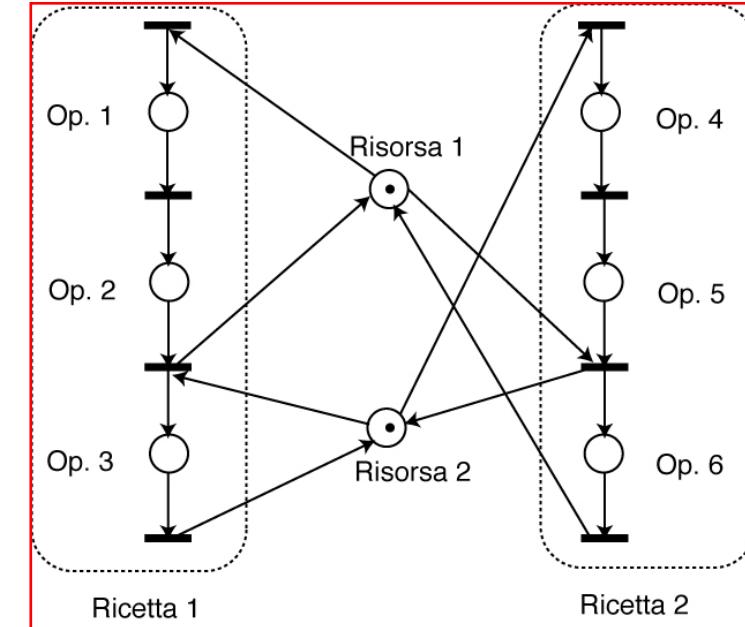
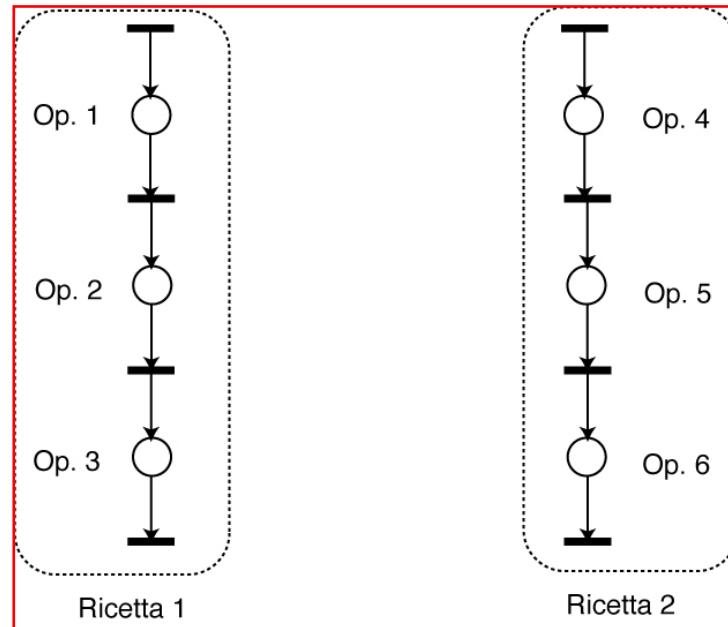
- un posto collegato alle transizioni di inizio/fine della fase di lavorazione
- il numero di token nel posto indica la capacità complessiva di lavorazione
- posti con infiniti token possono essere eliminati (capacità infinita)
- assenza di token indica l'impossibilità di compiere la lavorazione



Modellistica funzionale con reti di Petri

Utili per la modellistica di **Flexible Manufacturing Systems (FMS)**

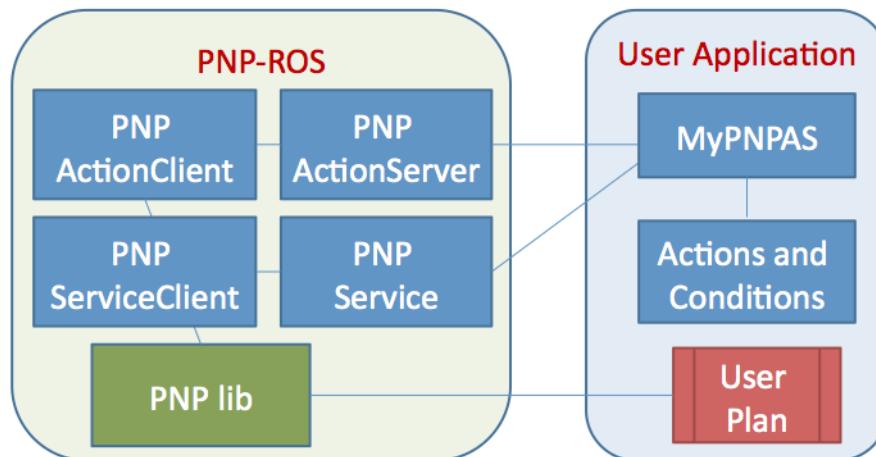
- più lavorazioni (dette anche ricette) possibili
- condivisione di risorse
- esempio
 - ➔ ricetta 1: sequenza di operazioni Op1-Op2-Op3
 - ➔ ricetta 2: sequenza di operazioni Op4-Op5-Op6
 - ➔ risorsa 1: utilizzata per eseguire la serie Op1-Op2 e Op6
 - ➔ risorsa 2: utilizzata per eseguire Op3 e la serie Op4-Op5



Pianificatore di azioni basato su reti di Petri

Usato dal team multi-robot SPQR del DIAG nell'ambito delle competizioni RoboCup

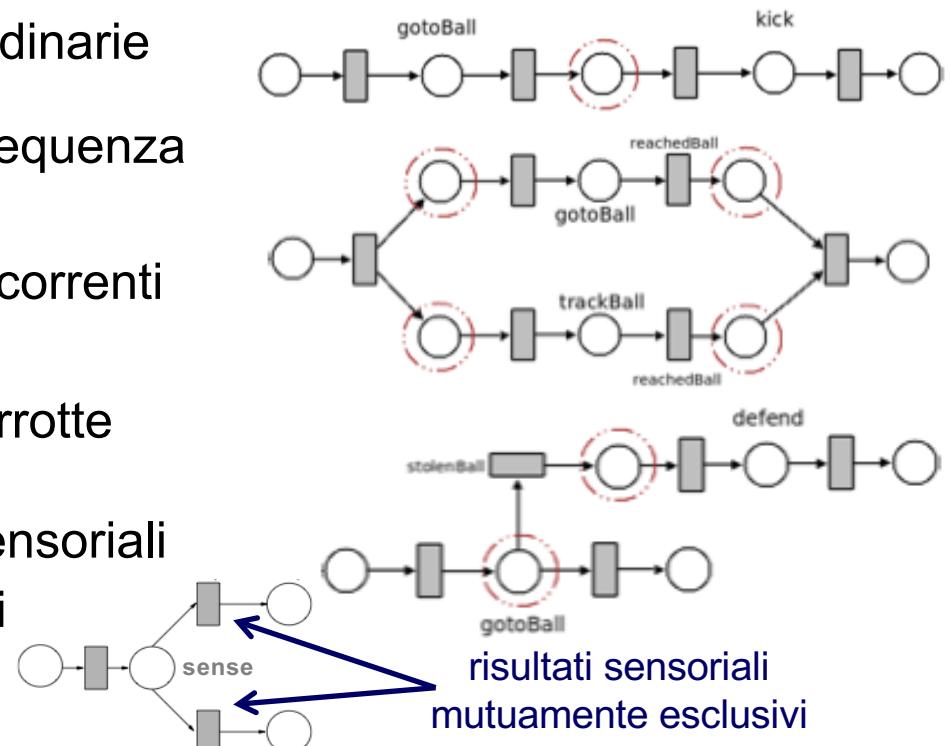
- per gestire informazioni sensoriali che **condizionano** l'esecuzione distribuita (con più agenti) di azioni complesse di alto livello
- azioni non istantanee, concorrenti e con possibilità di fallimento/interruzione
- strumento intuitivo da interpretare, per il debug dei comportamenti e la loro analisi (assenza di deadlock, raggiungibilità di una marcatura destinazione = “goal”)



implementazione
effettiva in ROS

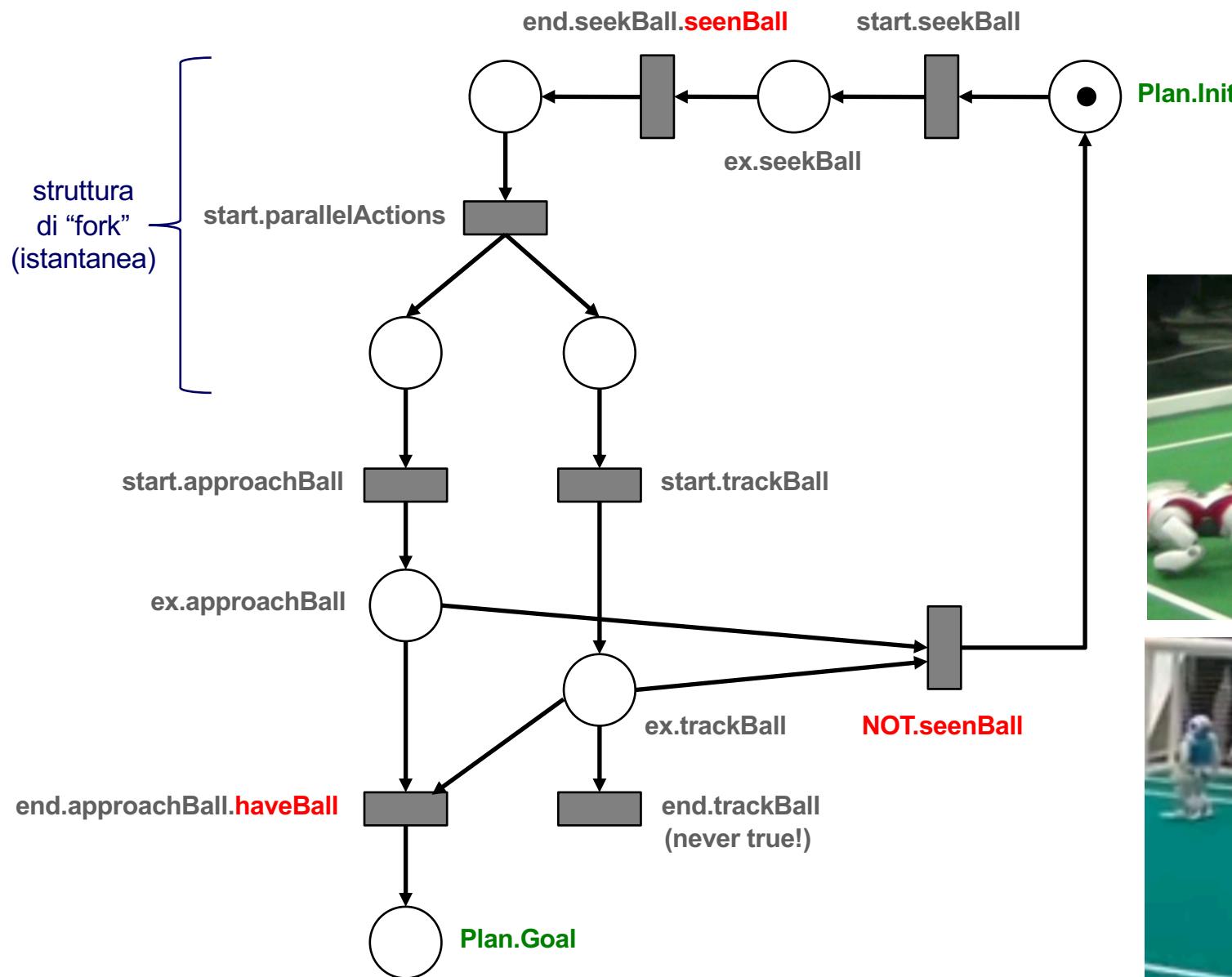
PNP = Petri Net Planner

- azioni ordinarie
 - ✧ in sequenza
 - ✧ concorrenti
 - ✧ interrotte
- azioni sensoriali
- operatori



risultati sensoriali
mutuamente esclusivi

Esempio di PN Planner



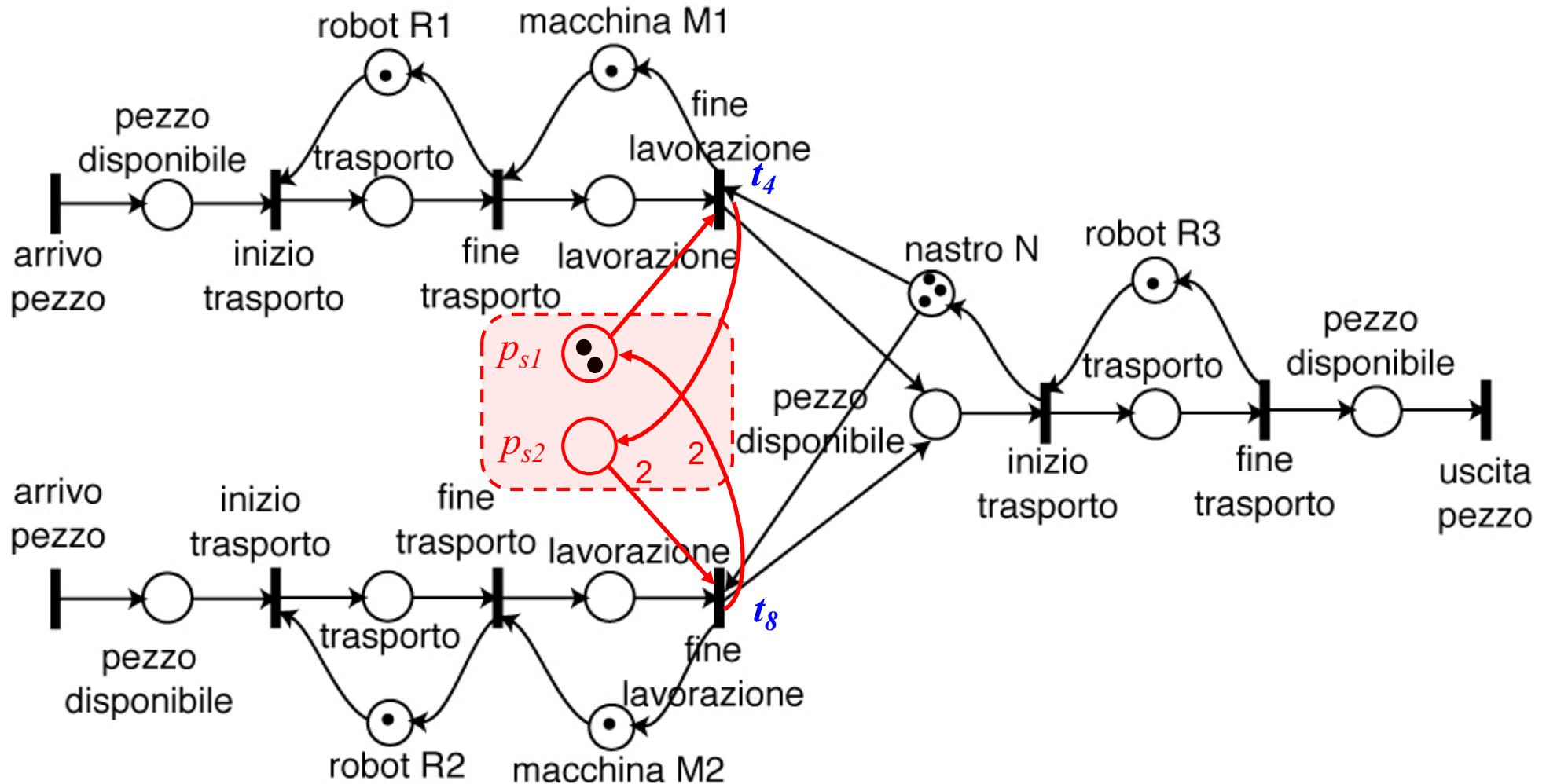
Controllo delle reti di Petri

- una rete di Petri può inglobare una struttura di controllo dell'evoluzione del sistema che agisce in base alla marcatura corrente (in **feedback**)
- la struttura di controllo è essa stessa esprimibile come una sotto-rete di Petri, seguendo uno dei paradigmi di progetto del **supervisore** per i DEDS
- si **registrano** alcuni eventi del sistema e, in base a questa informazione/misura, si **comandano** altri eventi ammissibili e se ne **disabilitano** altri
- scenario più complesso quando gli eventi non sono tutti “osservabili” (registrabili dal supervisore) e/o non sono tutti “controllabili” (comandabili dal supervisore)
- due tipici problemi di controllo di una PN
 - ➔ **problema degli stati proibiti:** per evitare una collisione su risorse condivise, alcune marcature vanno rese non ammissibili
 - ➔ **problema delle specifiche mutuamente esclusive:** per soddisfare i limiti di capacità del sistema, vanno imposti dei vincoli sulle marcature raggiungibili durante tutta l'evoluzione della rete
- approcci possibili al progetto del supervisore (in ipotesi di osservabilità delle transizioni)
 - ➔ mediante l'aggiunta diretta di **posti di controllo** P^c opportunamente marcati
 - ➔ basato sull'analisi di **P-invarianti** modificati (usando **posti monitor** P^m)

Uso dei posti di controllo

esempio (reprise): impianto di produzione e movimentazione

- si vogliono posizionare sul nastro di uscita, in maniera sequenziale e ripetitiva, due pezzi lavorati dalla macchina M1 seguiti da un pezzo lavorato dalla macchina M2
- **PN originale:** 15 posti, 11 transizioni; **PN supervisore con 2 posti di controllo**



Controllo mediante invarianti

- si assume che il comportamento desiderato (specifiche mutuamente esclusive) sia descritto da vincoli, nella forma di **disequazioni lineari** sulle marcature del tipo

$$h^T \mathbf{x} \leq k \quad \text{con} \quad h \in Z^{|P|}, \quad k \in N \quad (\text{vedi anche nota})$$

- l'insieme delle marcature **ammissibili** sarà solo una parte di quelle raggiungibili

$$M(PN) = \left\{ \mathbf{x} \in N^{|P|} \text{ tale che } h^T \mathbf{x} \leq k \right\} \cap R(PN)$$

- tipiche situazioni modellate

→ i posti p_i, p_j e p_l rappresentano tre operazioni che usano la stessa risorsa

$$x(p_i) + x(p_j) + x(p_l) \leq 1$$

→ due posti p_i e p_j sono buffer che devono contenere lo stesso numero di pezzi

$$x(p_i) = x(p_j) \Leftrightarrow x(p_i) - x(p_j) \leq 0 \cap x(p_j) - x(p_i) \leq 0$$

quindi le componenti del vettore h possono anche essere degli interi negativi

- in generale, ci saranno q disequazioni che le marcature ammissibili dovranno soddisfare contemporaneamente

$$h_i^T \mathbf{x} \leq k_i \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, q$$

nota: in alcuni casi potrebbe essere $k_i \in Z$ (e non solo $\in N$): ad esempio, se si proviene da un **lower bound** si avrà
 $h_i^T \mathbf{x} \geq c_i \geq 0 \Rightarrow -h_i^T \mathbf{x} \leq -c_i =: k_i \leq 0$; è bene però che le disequazioni lineari sul problema formino un insieme **convesso**

Controllo mediante invarianti

- consideriamo prima il caso in cui tutte le transizioni siano **controllabili**: si possono inserire archi in ingresso a qualsiasi transizione (che partiranno da posti aggiunti ...)
- per soddisfare il generico vincolo i -esimo, si introduce un **posto monitor** p_i^m che aggiunge la **riga**

$$C_i^m = -h_i^T C$$

alla matrice di incidenza C originale della rete, e a cui si dà la **marcatura iniziale**

$$x_0(p_i^m) = k_i - h_i^T x_0$$

- l'informazione nel vettore riga C_i^m permette di collegare il posto monitor p_i^m alle transizioni della rete (per costruzione, il posto monitor non è mai in un autoanello)
- fatte queste operazioni per tutti i q vincoli, si ha una matrice di incidenza estesa C_e con q righe aggiunte, relative ai posti monitor
 - ⇒ i **P-invarianti preesistenti** si conservano nella forma “embedded” $\gamma_e^T = [\gamma^T \quad 0^T]$

$$C_e = \begin{bmatrix} C \\ -H^T C \end{bmatrix} \quad H = [h_1 \quad \cdots \quad h_q] \quad \gamma^T C = 0^T \quad \Rightarrow \quad \gamma_e^T C_e = 0^T$$

- ⇒ esistono q **nuovi P-invarianti** indipendenti della forma (l'1 è al posto i -esimo, $i = 1, \dots, q$)

$$\gamma_{e,i}^T = [h_i^T \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0] \quad \Rightarrow \quad \gamma_{e,i}^T C_e = h_i^T C - h_i^T C = 0^T$$

Controllo mediante invarianti

- le relative *equazioni di invarianza* implicano che ogni marcatura raggiungibile della **rete controllata** soddisfa tutti i vincoli del problema (quindi risulta ammisible) **se e solo se** la marcatura iniziale \mathbf{x}_0 è ammisible (allora è anche $x_0(p_i^m) \geq 0$)

→ dimostrazione

$$\mathbf{x}_{e,0} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{k} - H^T \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ k_1 - h_1^T \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ k_q - h_q^T \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}$$

$$\forall \mathbf{x}'_e \in R(PN_e) \Rightarrow \mathbf{x}'_e = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{x}'(p^m) \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{e,0} + C_e \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ -H^T C \end{pmatrix} \mathbf{s}$$

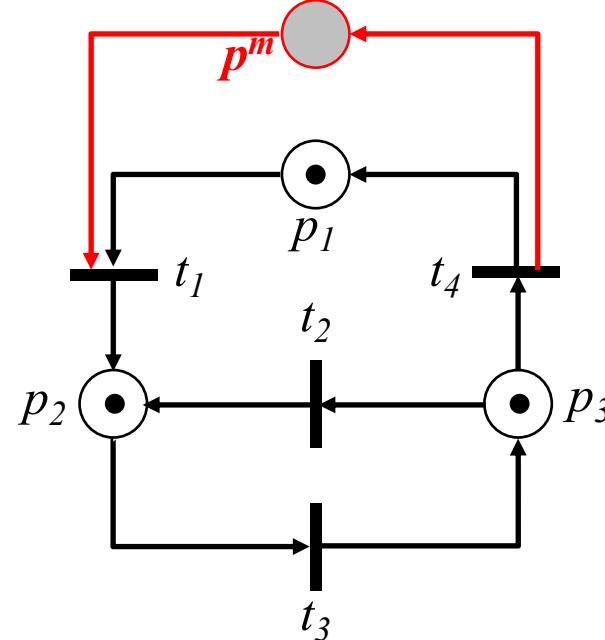
utilizzando i nuovi P-invarianti (per $i = 1, \dots, q$)

$$\begin{aligned} \gamma_{e,i}^T \mathbf{x}'_e &= \gamma_{e,i}^T (\mathbf{x}_{e,0} + C_e \mathbf{s}) = \gamma_{e,i}^T \mathbf{x}_{e,0} = (h_i^T \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{k} - H^T \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} \\ &= h_i^T \mathbf{x}_0 + k_i - h_i^T \mathbf{x}_0 = k_i \end{aligned} \quad \boxed{h_i^T \mathbf{x}' \leq k_i}$$
$$\gamma_{e,i}^T \mathbf{x}'_e = h_i^T \mathbf{x}' + x'(p_i^m) \geq h_i^T \mathbf{x}'$$

Uso dei posti monitor

esempio

- alla PN in figura (3 posti, 4 transizioni) si vuole imporre il vincolo $x(p_2) + x(p_3) \leq 2$ tramite un **supervisore con 1 posto monitor**



$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la marcatura iniziale soddisfa il vincolo

$$R(PN) = \left\{ \underbrace{\left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \right)}_{\text{queste marcature raggiungibili}}; \underbrace{\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right); \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \right)}_{\text{non sono ammissibili per il vincolo}} \right\}$$

$$h^T x = [0 \ 1 \ 1] \cdot x \leq 2 = k \quad \text{vincolo}$$

l'assenza di marca iniziale nel posto monitor
disabilita la t_1 finché non scatta t_4

$$C^m = -h^T C = [-1 \ 0 \ 0 \ 1]$$
$$x_0^m = k - h^T x_0 = 2 - 2 = 0$$

equazioni
di progetto
del monitor

Controllo mediante invarianti

- nel caso in cui ci siano transizioni **non controllabili** (un sottoinsieme T_{uc} di T) occorre verificare che nel precedente progetto *ciascun* posto monitor del supervisore non disabiliti *nessuna* transizione non controllabile, ossia

$$x(p_i^m) \geq w(p_i^m, t_j) \quad \forall t_j \in T_{uc}$$

- una condizione **sufficiente** affinché ciò sia vero è che *nessuna* delle transizioni non controllabili abbia posti monitor in ingresso

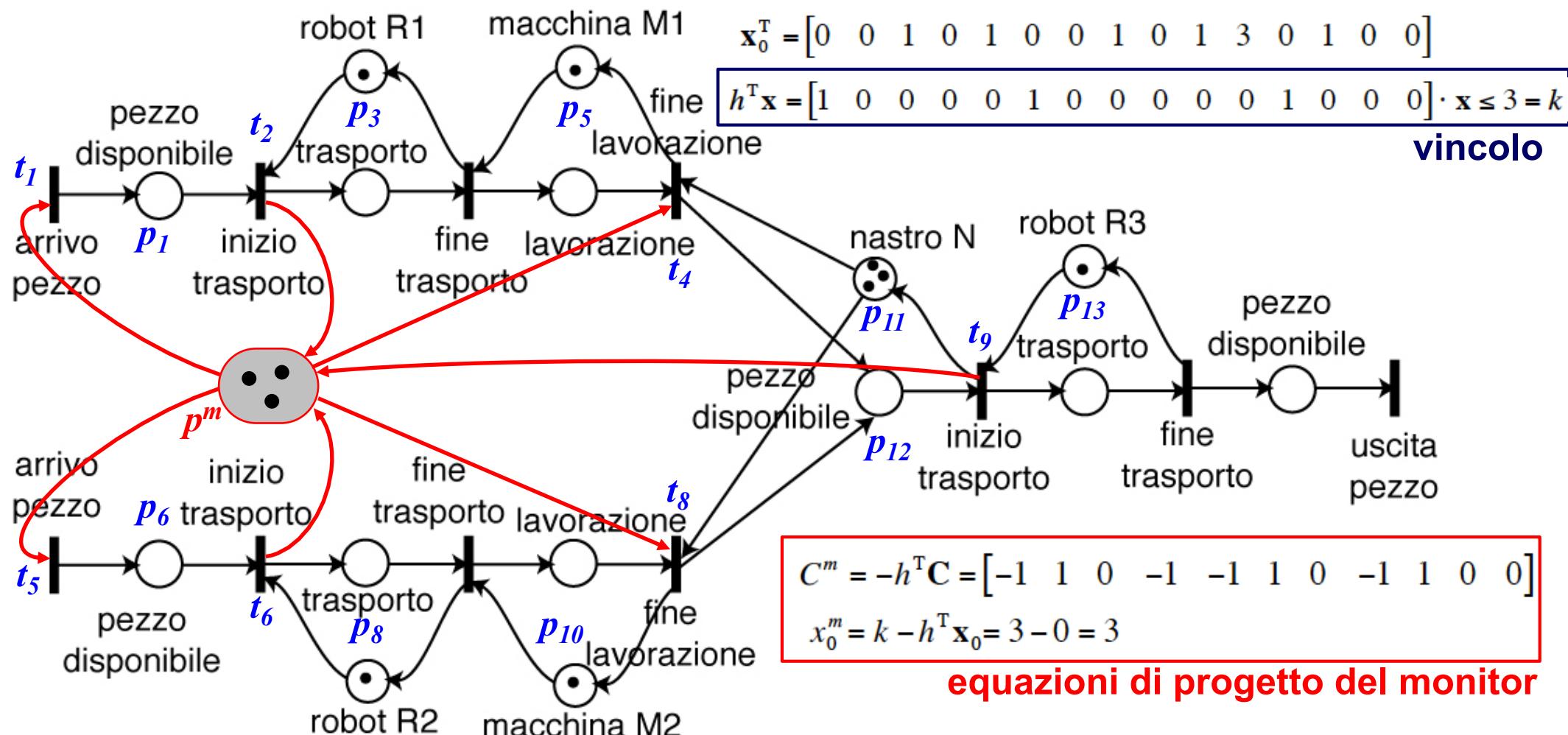
$$\forall t_j \in T_{uc} \Rightarrow p_i^m \notin I(t_j), \quad i = 1, 2, \dots, q$$

- se alcuni vincoli risultano non ammissibili a causa dell'ipotesi di non controllabilità, esistono allora metodi per definire supervisori aventi monitor approssimati o sub-ottimi...
- in maniera duale, se esistono transizioni **non osservabili** \Rightarrow non ci possono essere archi da queste transizioni a posti monitor ...
- oltre all'aggiunta di posti (con archi da/verso transizioni del processo), il supervisore potrebbe avere anche proprie transizioni aggiunte (**supervisore dinamico**) ...

Uso dei posti monitor

esempio (reprise): impianto di produzione e movimentazione

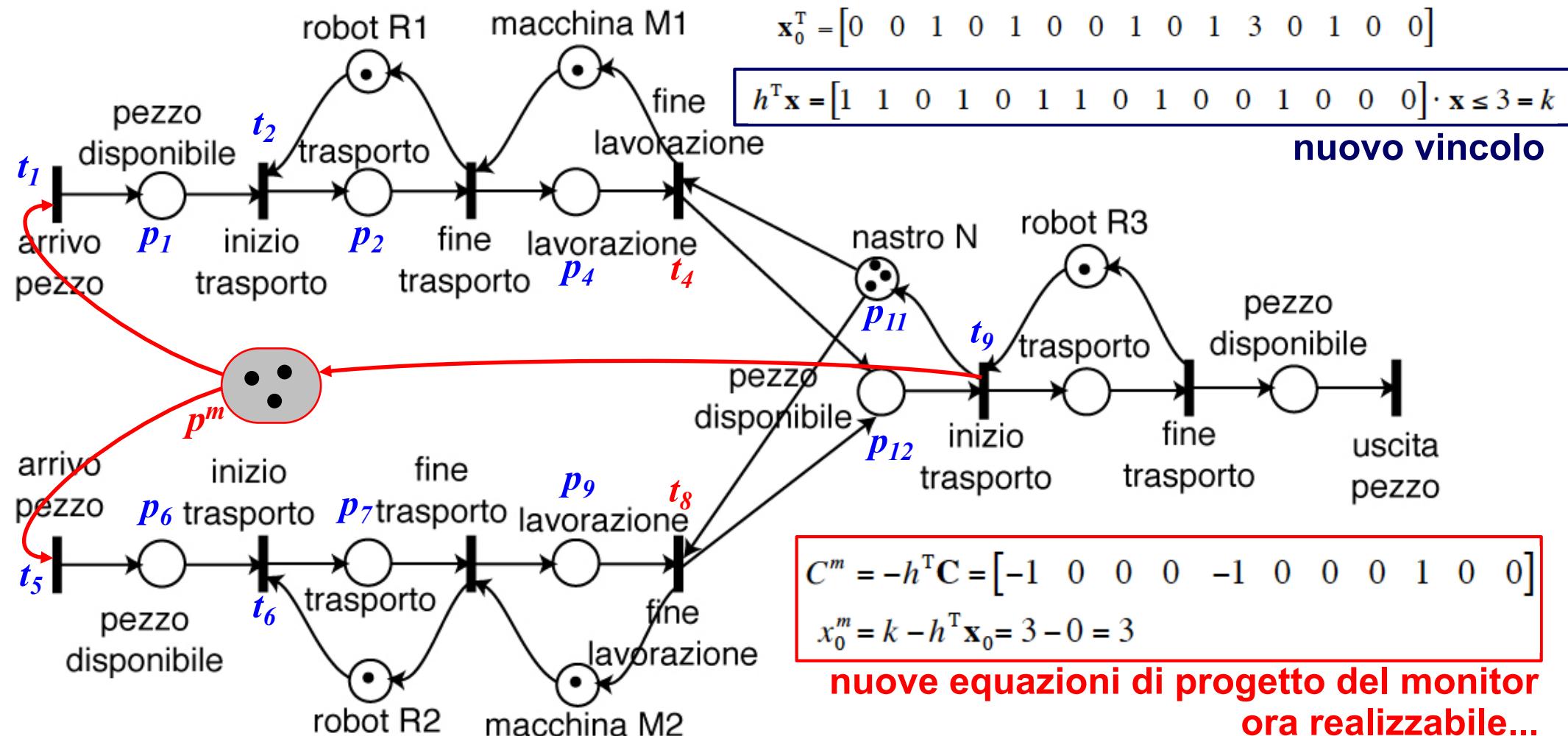
- si vuole evitare di fare arrivare altri pezzi ai buffer di ingresso dell'impianto quando il nastro di uscita è già saturo (con tre pezzi): si vuole quindi imporre il vincolo $x(p_1) + x(p_6) + x(p_{12}) \leq 3$
- **PN originale:** 15 posti, 11 transizioni $\Rightarrow C:(15 \times 11)$; **PN supervisore** con **1 posto monitor**



Uso dei posti monitor

esempio (cont.): impianto di produzione e movimentazione

- se le transizioni t_4 e t_8 sono **non controllabili**, la precedente soluzione non è realizzabile e va modificata; sceglieremo che il numero totale di pezzi e semilavorati presenti nell'impianto fino al nastro sia limitato dalla sua capacità: $x(p_1) + x(p_2) + x(p_4) + x(p_6) + x(p_7) + x(p_9) + x(p_{12}) \leq 3$



Simulazione delle reti di Petri

Esistono vari strumenti software per la simulazione e l'analisi di PN

□ PIPE2 (Imperial College London, <http://pipe2.sourceforge.net>)

- è gratuito!!
- tratta reti di Petri ordinarie, ma anche stocastiche (Generalized Stochastic Petri Nets, GSPN)
- gestisce reti con migliaia di stati
- fornisce molti strumenti di analisi
- ha un'interfaccia ‘friendly’ e intuitiva
- open source!!
- platform-independent (Java)
- ...qualche bug

□ lista di PN tools & freeware + Java applets

www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets

