Campi Elettromagnetici
Electromagnetic Fields

Testi consigliati

- **Ramo-Whinnery-Van Duzer: ‘Fields and Waves in Communication Electronics’**
- **G. Franceschetti: ‘ Campi Elettromagnetici’**
- **Conciauro-Perregrini: ‘ Fondamenti di onde elettromagnetiche’**
- **R. Collin: ‘Field Theory of Guided Waves’**
- **Zappelli L, ‘Campi Elettromagnetici - Esercizi Svolti’, Pitagora 1997**

Riviste

IEEE Transactions on Microwaves, Theory and Techniques (US)
IEEE Transactions on Antennas and Propagation (US)
IEEE Microwave and Wireless Components Letters (US)
IET Electronic Letters (UK)
IET Transactions on Microwaves, Antennas and Propagation (UK)

Modalità di Esame

- Scritto
- Orale

Laboratorio

1) Esperimenti con il banco ottico: incidenza obliqua di un’onda piana su uno strato dielettrico. Riflessione, rifrazione, polarizzazione
2) Esperimenti con il banco ottico: Diffrazione in una fenditura.
3) Misure di onda stazionaria in coassiale;
4) Guide rettangolari
5) Risonatori

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) \quad \mathbf{B}(x, y, z, t)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}(x, y, z, t)$$

1) *Relazioni costitutive* [**B**(**H**), **D**(**E**)]
2) *Condizioni al contorno*

Rif. Franceschetti, Campi Elettromagnetici, Boringhieri, Cap.1

Equazioni costitutive

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$$

Considerando la polarizzazione elettrica **P**, *se il mezzo è lineare, vi è una relazione di tipo:*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{V} \mathbf{g}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}',t')\, dt'dr'$$

P(**r**,t) *non varia istantaneamente al variare di* **E**, *né dipende solamente dal valore che* **E** *ha nel punto* **r**. *Se il mezzo è stazionario, come avviene nella maggior parte dei casi:*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{V} \mathbf{g}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}',t')\, dt'dr'$$

Nel caso di sorgenti armoniche il mezzo è stazionario

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) = \int_V \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}',\omega)\, dr'$$

Se il mezzo è spazialmente non dispersivo, allora la risposta **P** nel punto r dipende solo da **E** nello stesso punto:

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r},\omega)\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\, dr'$$

Ovvero, in termini del vettore induzione elettrica, abbiamo:

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$$

Quindi, nel dominio della frequenza, nel caso di mezzo lineare, spazialmente non dispersivo, vi è un semplice legame tra vettore **D** e vettore **E**:

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Dove:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} dt \;\; \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \cdot e^{-j\omega t}$$

Se i mezzi sono lineari, senza memoria e omogenei, allora

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Mezzi lineari, senza memoria omogenei e isotropi

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}(t) = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equazioni di Maxwell in mezzi lineari, omogenei e isotropi

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

Attenzione alla omogeneità, nel caso generale: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Nel vuoto, in assenza di sorgenti:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$$

Soluzioni delle equazioni di Maxwell: Onde piane

Assenza di sorgenti (ρ=0, j=0), nel vuoto:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}$$

Campi dipendenti solo da *z*, *t*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$$

$$\partial_x = \partial_y = 0$$

$$\nabla = \mathbf{u}_z \partial_z$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{u}_z \times \partial_z (E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \partial_z E_x \mathbf{u}_y - \partial_z E_y \mathbf{u}_x$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_x \qquad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y$$

$$0 = \mu_{\mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial t} H_z \qquad 0 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z$$

Essendo interessati a campi che variano nel tempo

$$E_z = 0$$

$$H_z = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_x$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y$$

EQUAZIONE D'ONDA

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\right)$$

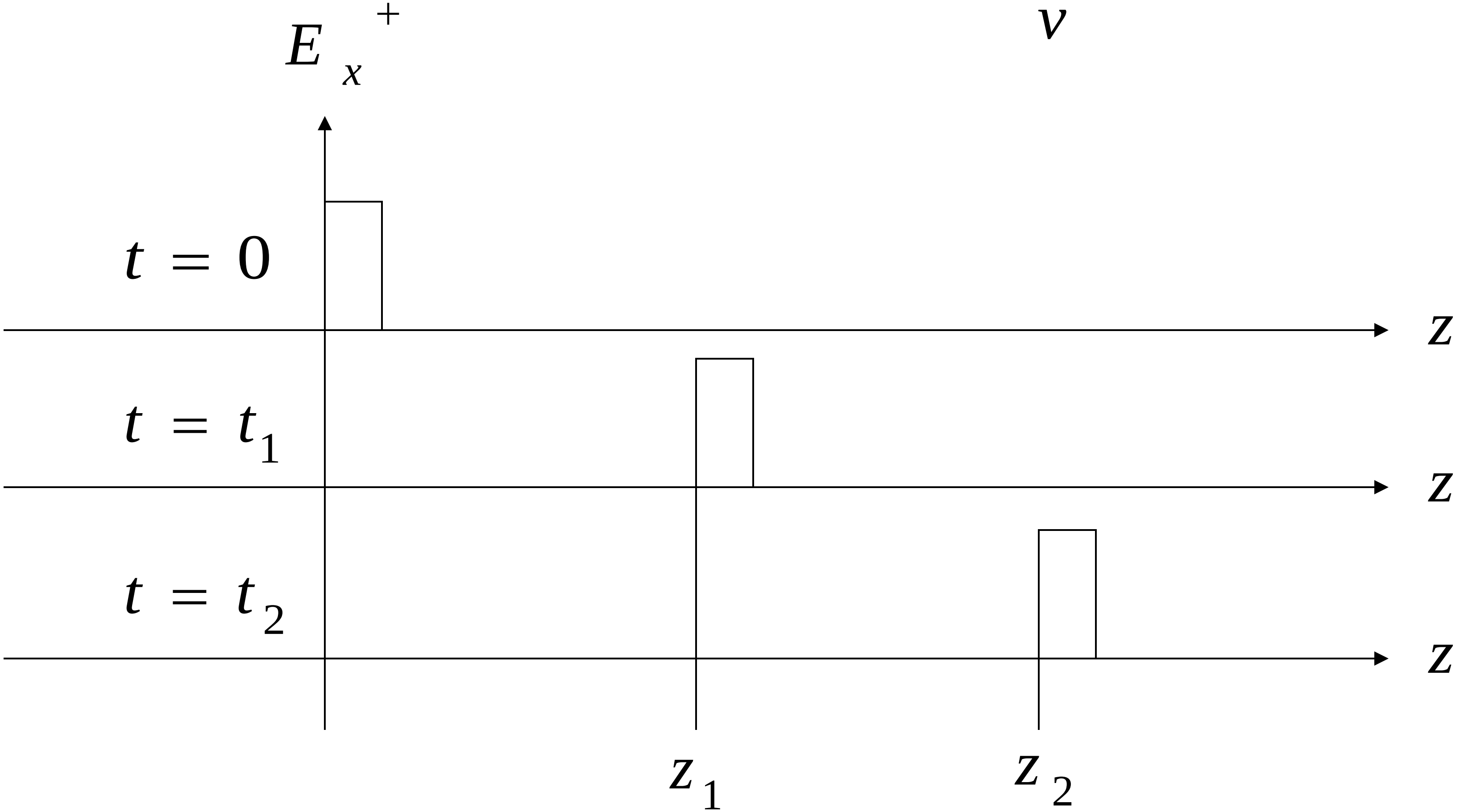
$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$E_x(z,t) = E_x^+(z,t) + E_x^-(z,t) = f^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + f^-\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Onda progressiva

$$E_x^{\,+} = f^{\,+}\left(t - \frac{z}{v}\right)$$



$$v = z_1 / t_1 = z_2 / t_2$$

Derivando rispetto a z

$$\partial_z f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = \mp \frac{1}{v} f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v})$$

$$\partial_z^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = \partial_z \left(\mp \frac{1}{v} f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v}) \right) = \frac{1}{v^2} f^{\pm}{}''(t \mp \frac{z}{v})$$

Derivando rispetto a t

$$\partial_t f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v})$$

$$\partial_t^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = \partial_t \left(f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v}) \right) = f^{\pm}{}''(t \mp \frac{z}{v})$$

Dipendenza da z a da t

$$\partial_t^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = v^2 \cdot \partial_z^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}}$$

Velocità della luce

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \text{ m/s}$$

Nel vuoto:

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Relazione tra **E** ed **H**

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} H_y = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\mu}\frac{1}{v}\left[-f^{+'}\left(t-\frac{z}{v}\right)+f^{-'}\left(t+\frac{z}{v}\right)\right] \qquad = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[f^{+'}\left(t-\frac{z}{v}\right)-f^{-'}\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]$$

$$\Rightarrow H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[f^{+}\left(t-\frac{z}{v}\right)-f^{-}\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]$$

IMPEDENZA D'ONDA

$$H_y = H_y^+ + H_y^- \qquad \Rightarrow H_y^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, f^{\pm}\left(t \mp \frac{z}{v}\right) = \pm\frac{E_x^{\pm}}{\eta}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\,\pi \approx 377\ \Omega$$ nel vuoto

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$ In un dielettrico isotropo e omogeneo

AMMETTENZA D'ONDA $\dfrac{1}{\eta}$

Ancora, nel vuoto

Partendo da

$$E_y(z,t) = E_y^+(z,t) + E_y^-(z,t) = g^+(t - \frac{z}{v}) + g^-(t + \frac{z}{v})$$

$$\Rightarrow H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[g^+\left(t - \frac{z}{v}\right) - g^-\left(t + \frac{z}{v}\right)\right]$$

Onde progressive:

$$\frac{E_x^+}{H_y^+} = -\frac{E_y^+}{H_x^+} = \eta$$

Onde regressive:

$$\frac{E_x^-}{H_y^-} = -\frac{E_y^-}{H_x^-} = -\eta$$

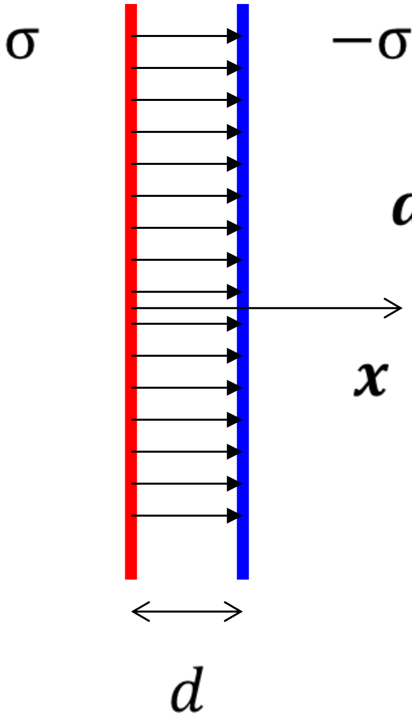
Onda piana progressiva che si propaga in direzione z

$$\mathbf{E}(x, y, z; t) = E_x(x, y, z; t)\hat{\boldsymbol{x}} + E_y(x, y, z; t)\hat{\boldsymbol{y}} =$$
$$f^+(t - \frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{x}} + g^+(t - \frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\mathbf{H}(x, y, z; t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,[E_x(x, y, z; t)\hat{\boldsymbol{y}} - E_y(x, y, z; t)\hat{\boldsymbol{x}}] =$$
$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,[-g^+(t - \frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{x}} + f^+(t - \frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{y}}]$$

Quanto vale l'energia trasportata da un'onda elettromagnetica nel vuoto?

Partiamo dalle densità di energia di un campo elettrostatico in un condensatore piano:



$$\mathbf{E} = E\hat{x} = \frac{V}{d}\hat{x}$$

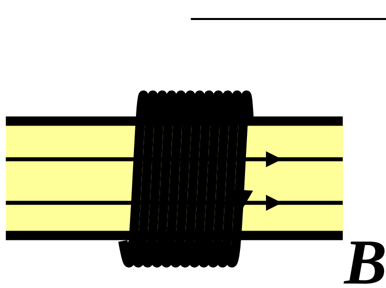
$$\boldsymbol{dW = dqEd} = CdV \cdot V \Rightarrow W = U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{S}{d}\epsilon_0(Ed)^2$$

$$u = \frac{U}{Sd}V^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad C = q/V$$

$$u_H = \frac{1}{2}\mu_0|\mathbf{H}|^2$$

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0\,|\mathbf{E}|^2$$ dove $$|\mathbf{E}|^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$$

D'altra parte, il lavoro dW fatto un Generatore *E* sulla carica dq in una bobina ideale vale :



z

$$\mathbf{B}=\mu_o ni\hat{z} \qquad \mathbf{H}=ni\hat{z}$$

$$\Phi(\mathbf{B})=nlSB = \mu_o n^2 lSi = Li$$

$$dW = Edq = Eidt = \frac{d\Phi}{dt} idt = Lidi$$

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2}\mu_o n^2 lSI^2 = \frac{1}{2}\mu_o H^2 lS$$

$$u_H = \frac{1}{2}\mu_0 \, |\mathbf{H}|^2$$

dove $$|\mathbf{H}|^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2$$

Pertanto, nella densità di energia trasportata dall'onda elettromagnetica piana è l'energia che attraversa nell'unita di tempo una superficie unitaria normale alla direzione di propagazione dell'onda:

$$u_E + u_H = \frac{1}{2}\epsilon_0\ |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 |\mathbf{H}|^2$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 f^{+2}(t - \frac{z}{v}) + \frac{1}{2}\mu_0 [\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f^{+}\left(t - \frac{z}{v}\right)]^2 = \epsilon_0 f^{+2}\left(t - \frac{z}{v}\right) = \epsilon_0 E^2$$

Vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y) \times (H_x \mathbf{u}_x + H_y \mathbf{u}_y) =$$

$$= (E_x H_y - E_y H_x)\mathbf{u}_z =$$

$$= \frac{1}{\eta}\left[(f^+ + f^-)(f^+ - f^-) + (g^+ + g^-)(g^+ - g^-)\right]\mathbf{u}_z =$$

$$= \frac{1}{\eta}\left[\left((f^+)^2 + (g^+)^2\right) - \left((f^-)^2 + (g^-)^2\right)\right]\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{S} = \left(S^{+} - S^{-}\right)\mathbf{u}_{z}$$

Onde progressive:

$$S^{+} = \frac{1}{\eta}\left((f^{+})^{2} + (g^{+})^{2}\right)$$

Onde regressive:

$$S^{-} = \frac{1}{\eta}\left((f^{-})^{2} + (g^{-})^{2}\right)$$

Densità di energia trasportata da un'onda progressiva

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}\right|^2 = \frac{\varepsilon}{2}\left(E_x^{+\,2} + E_y^{+\,2}\right)$$

$$u_H = \frac{1}{2}\mu\left|\mathbf{H}\right|^2 = \frac{\mu}{2}\left(H_x^{+\,2} + H_y^{+\,2}\right) =$$

$$\frac{\mu}{2}\frac{1}{\eta^2}\left(E_y^{+\,2} + E_x^{+\,2}\right) = u_E$$

$$\boxed{u_H = u_E}$$

$$\boxed{u = u_E + u_H = 2u_E}$$

Se il mezzo è non dissipativo, la densità di energia portata dall'onda non cambia da una sezione all'altra

Vettore di Poynting

Intensità dell'onda elettromagnetica I: energia che attraversa , nell'unità di tempo, una superficie unitaria, disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione

$$I = cu = c\varepsilon_0 \left|\mathbf{E}\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \varepsilon_0 \left|\mathbf{E}\right|^2 = \frac{1}{\eta}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

$$\left|\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right| = \frac{1}{\eta}\left|\mathbf{E}\right|^2 = \frac{1}{\eta}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad [\mathbf{S}] = \mathrm{W/m}^2$$