Come può essere descritta la regione ammissibile di un problema di PL?

E quali proprietà della regione ammissibile possono essere utilizzate per risolvere il problema?

Geometria della PL:
Rappresentazione di poliedri

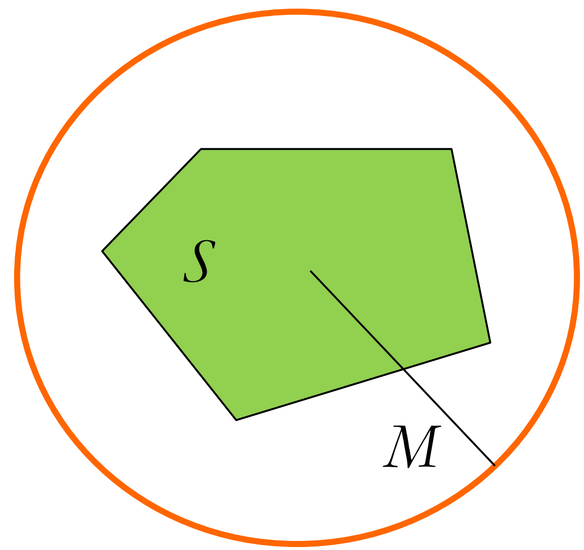
(Vercellis capp. 3.2 e 7.3)

poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

[Definizione] Un poliedro è l'intersezione di un numero finito m di semispazi chiusi di R^n.

[Definizione] Un politopo è un poliedro limitato.

Un insieme $S \subset R^n$ si dice limitato se esiste una costante M tale che ogni componente di ogni elemento di S è limitato, in valore assoluto, da M.



poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

[Osservazione] Ogni sistema con un numero finito di equazioni/disequazioni lineari definisce un poliedro. In particolare:

- $\varnothing$, H, S, R^n sono poliedri;
- la regione ammissibile $X = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} \subseteq \mathrm{R}^n$ di un problema di PL è un poliedro indicato con P(**A**, **b**);
- una sfera **non è** un poliedro.

poliedri e politopi: convessità

[Proposizione] Ogni poliedro $P(\mathbf{A},\mathbf{b})$ è un insieme convesso.

[dim] Un semispazio affine è un insieme convesso e l'intersezione di insiemi convessi è convesso.

$\blacksquare$

Ovvero, direttamente dalla definizione di convessità:

- Se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in P(\mathbf{A},\mathbf{b})$ allora $\mathbf{Au} \leq \mathbf{b}$ e $\mathbf{Av} \leq \mathbf{b}$ e per ogni combinazione convessa $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}$ di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si ha:
- $\mathbf{Az} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{Au} + (1 - \lambda)\mathbf{Av} \leq \lambda\mathbf{b} + (1 - \lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$

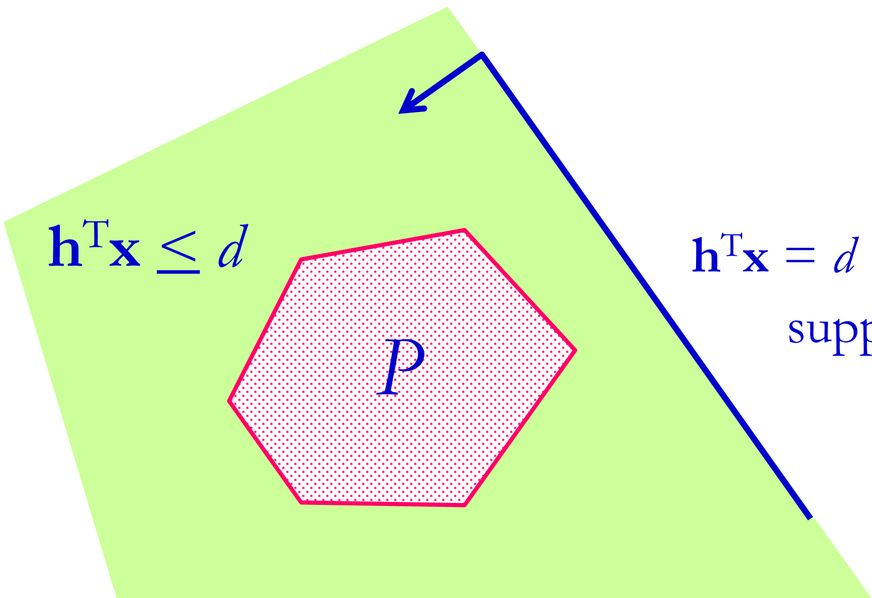
$\boxed{\mathbf{u},\mathbf{v} \in P(\mathbf{A},\mathbf{b}) \text{ e } 0 \leq \lambda_i \leq 1}$

$\blacksquare$

Disuguaglianze valide e iperpiani di supporto

[Definizione] $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ è una disuguaglianza valida per un poliedro $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} \subseteq R^n$ se

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d\}$$



$\mathbf{h}^T\mathbf{x} = d$ è detto iperpiano di supporto di $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d\} = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

Disuguaglianze valide e iperpiani di supporto

Una disuguaglianza $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ valida per P($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$) è soddisfatta da <u>ogni punto</u> di P($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$), cioè

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d\} = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

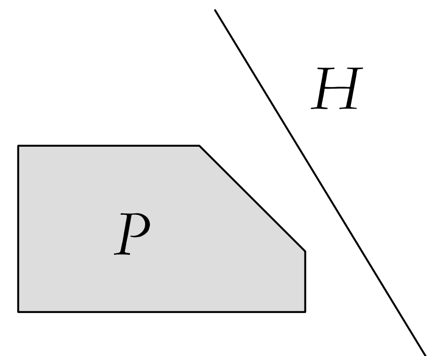
quindi

aggiungendo $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ al sistema di (dis)equazioni $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ che definisce P($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$), l'insieme delle soluzioni del sistema non cambia.

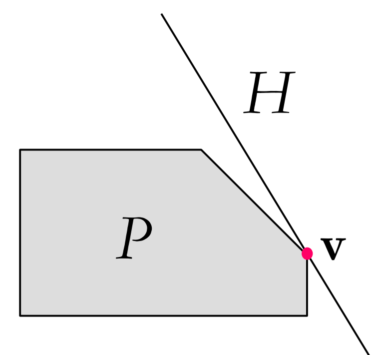
vertici, spigoli e facce

[Definizione] Sia $P \subseteq \mathrm{R}^n$ e $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = d\}$ un suo iperpiano di supporto. L'insieme $F = H \cap P$ si dice facccia di P.

- Se $F = \emptyset$, allora F si dice faccia vuota di P.



- Se $\dim(F) = 0$, allora $F = \{\mathbf{v}\}$, e il vettore $\mathbf{v}$ si dice vertice di P.

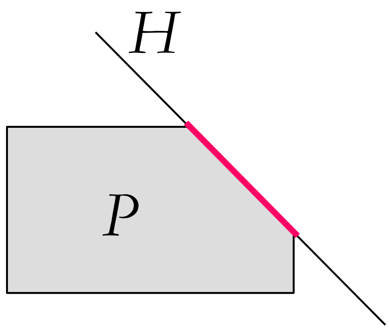


vertici, spigoli e facce

[Definizione] Sia $P \subseteq \mathrm{R}^n$ e $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = d\}$ un suo iperpiano di supporto. L'insieme $F = H \cap P$ si dice faccia di P.

- Se $\dim(F) = 1$, allora F si dice spigolo di P.

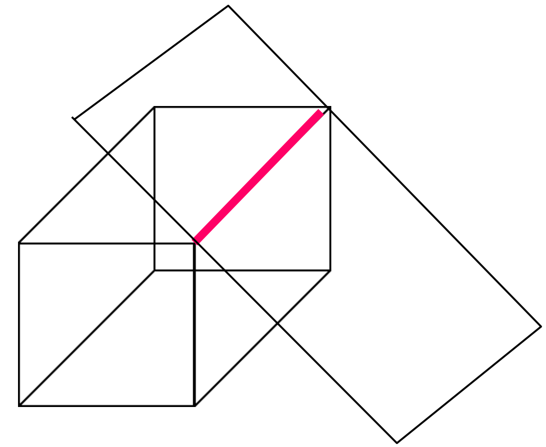
- Se $\dim(F) = \dim(P) - 1$, allora F si dice faccia massimale (o *facet*) di P.



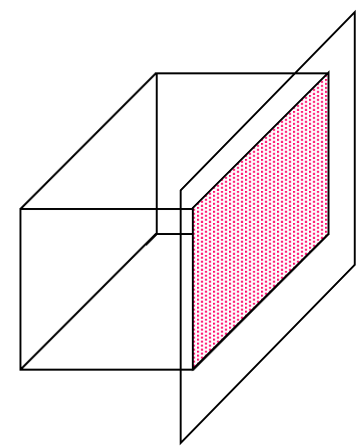
$\dim(F) = 1 = \dim(P) - 1$

vertici, spigoli e facce

[Definizione] Sia $P \subseteq \mathrm{R}^n$ e $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{h}^\mathrm{T}\mathbf{x} = d\}$ un suo iperpiano di supporto. L'insieme $F = H \cap P$ si dice faccia di P.



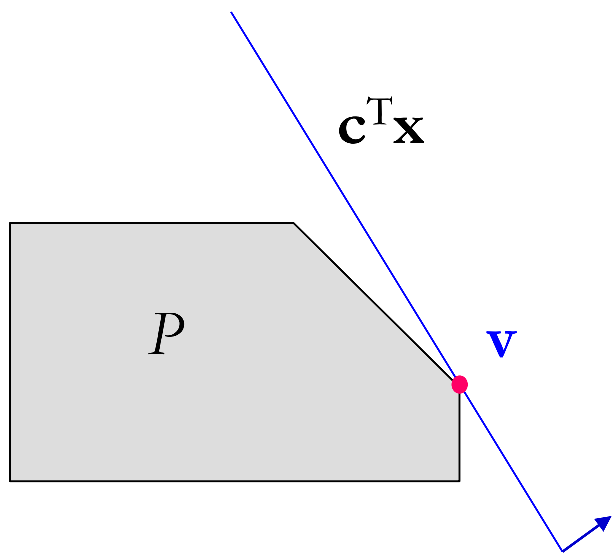
- Se $\dim(F) = 1$, allora F si dice spigolo di P.



- Se $\dim(F) = \dim(P) - 1$, allora F si dice faccia massimale (o *facet*) di P.

Vertici: definizione alternativa

[Definizione] un punto $\mathbf{v}$ di un poliedro P si dice vertice di P se esiste un vettore $\mathbf{c}$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{v} > \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ per tutti gli $\mathbf{x} \in P$ diversi da $\mathbf{v}$

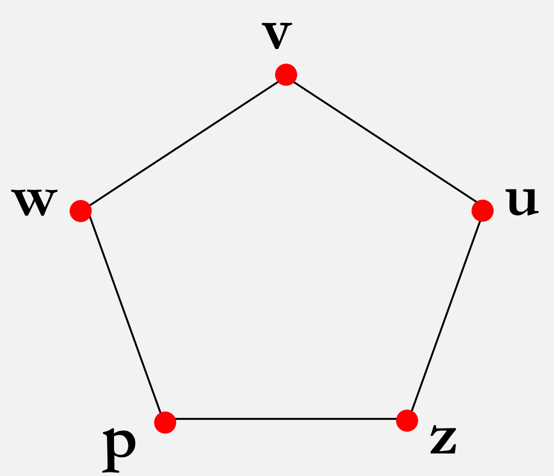


In altre parole $\mathbf{v}$ è un vertice di P se esiste **una qualche** funzione obiettivo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ per la quale $\mathbf{v}$ è **l'unica** soluzione ottima del problema di PL associato a P.

Vertici e punti estremi

Nella Programmazione Lineare vertici e facce di un poliedro giocano un ruolo particolarmente importante.

[Teorema 3.2.7] L'insieme dei **vertici** di un poliedro P coincide con l'insieme $ext(P)$ dei suoi **punti estremi**.



$$ext(P) = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}\}$$

$$\equiv$$

$$\text{vertici di } P = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}\}$$

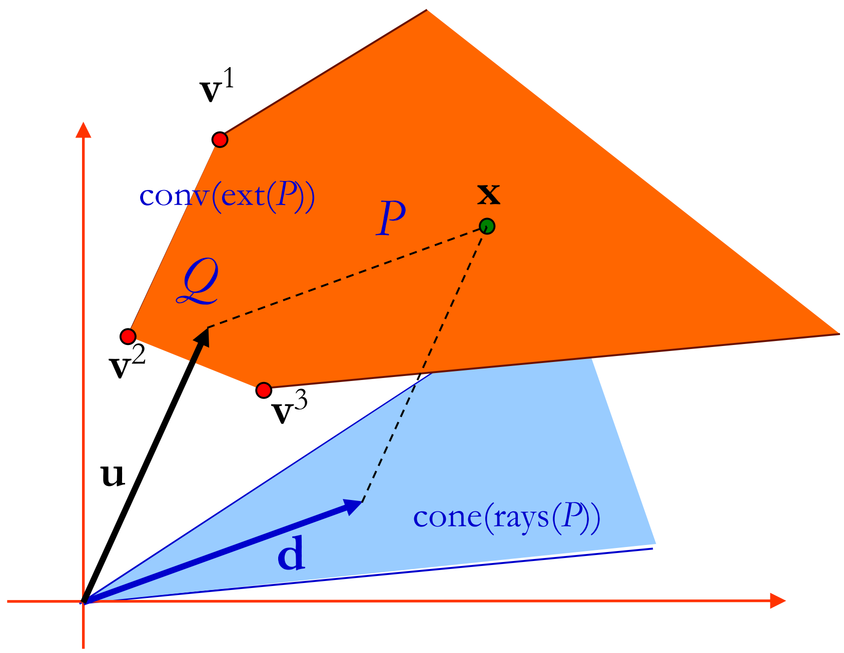
poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

- La rappresentazione esterna fornisce un test di appartenenza di un punto a un poliedro ma non dice come esprimere analiticamente gli (infiniti) punti di un poliedro. In particolare non dice che un poliedro può essere finitamente generato (analogamente ad uno spazio lineare)

- Utilizzando la rappresentazione esterna è possibile dimostrare che **se l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di *PL* non è vuoto**, allora almeno una soluzione ottima si troverà in un vertice **[Teorema 3.2.12]**
  …però per avere una caratterizzazione dell'esistenza di una soluzione ottima occorre un altro tipo di rappresentazione.

Rappresentazione *interna* di un poliedro

Ogni poliedro P è la somma vettoriale di un **politopo** Q e di un **cono poliedrale** C

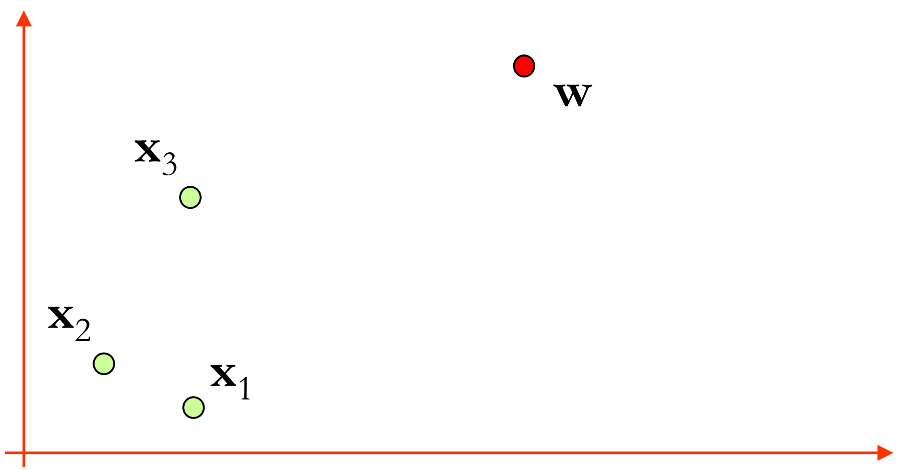


Combinazioni *coniche*

[Definizione] il vettore $\mathbf{w}$ è combinazione conica di m vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ se e solo se esistono m numeri reali tali che

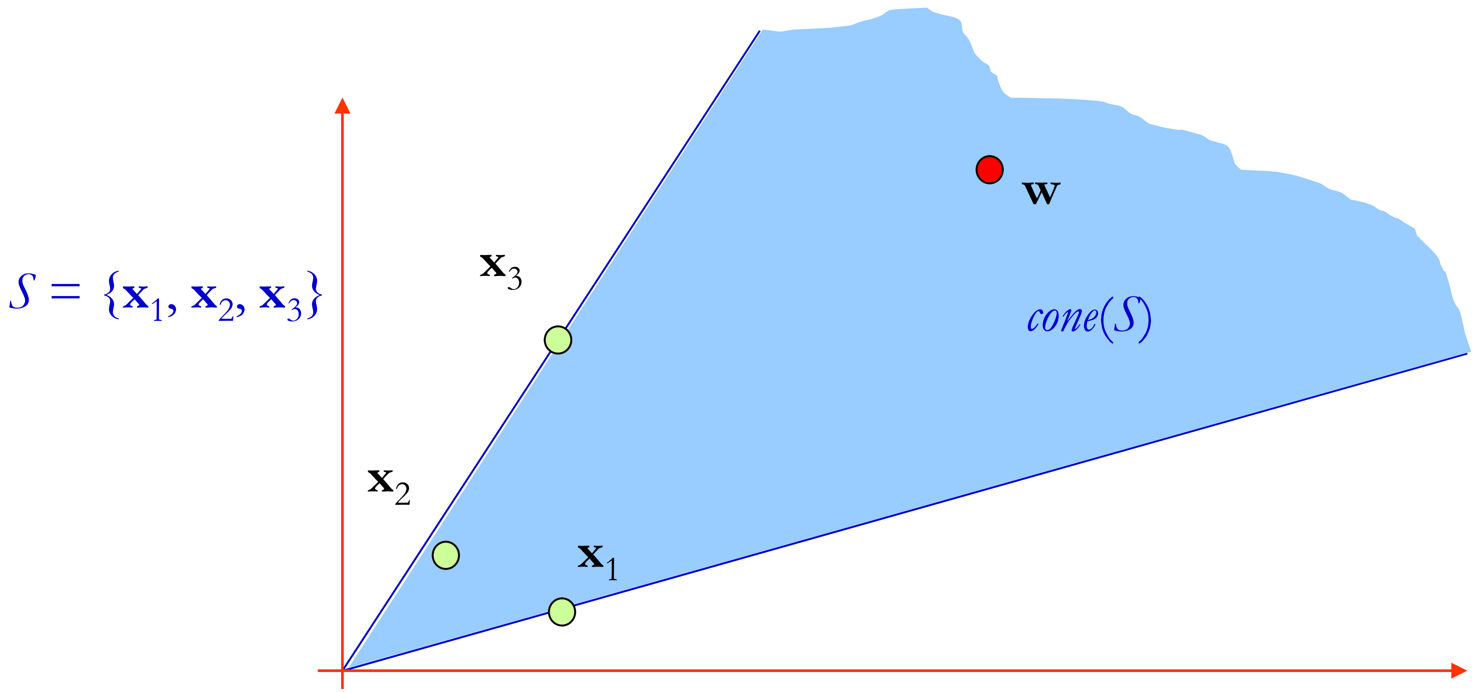
$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \qquad \text{con} \quad \boxed{\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0}$$

il vettore $\mathbf{w} = (6.5, 4.5)$ è combinazione conica dei vettori $\mathbf{x}_1 = (2, 0.5)$, $\mathbf{x}_2 = (1,1)$ e $\mathbf{x}_3 = (2,3)$ con coefficienti $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 1$



Involucro conico

[Definizione] L'involucro conico di $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathrm{R}^n$ è l'insieme $cone(S) \subseteq \mathrm{R}^n$ di <u>tutte e sole</u> le combinazioni coniche di vettori in S.



- ogni involucro conico contiene il vettore nullo **0** (dato che **0** è ottenibile dalla combinazione conica di qualsiasi insieme finito e non vuoto di vettori S).

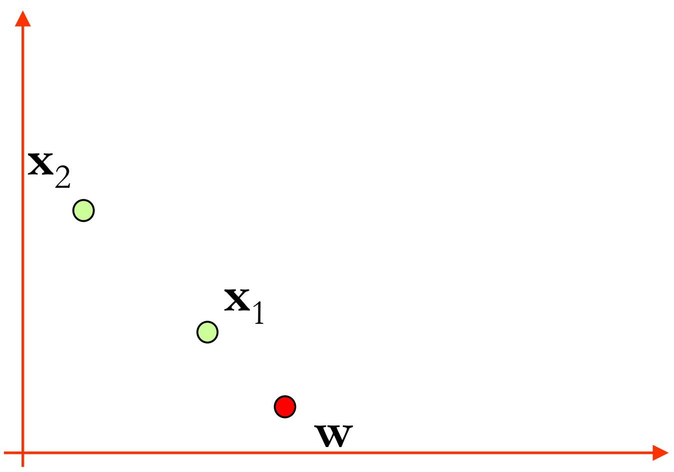
Combinazioni *affini*

[Definizione] il vettore $\mathbf{w}$ è combinazione affine di m vettori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m \in R^n$ se e solo se esistono m numeri reali $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ tali che

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1}$$

il vettore $\mathbf{w} = (4,1)$ è combinazione affine dei vettori $\mathbf{x}_1 = (3,2)$ e $\mathbf{x}_2 = (1,4)$ con coefficienti

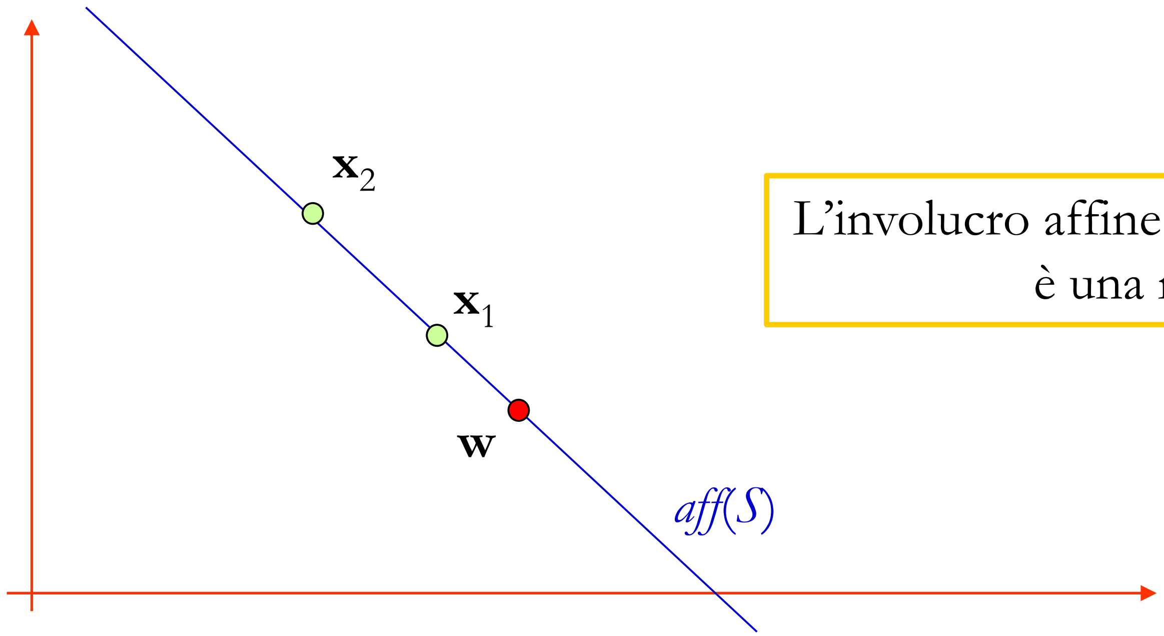
$\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = -0.5$



Involucro *affine*

[Definizione] L'involucro affine di $S = \{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\} \subseteq R^n$ è l'insieme $aff(S) \subseteq R^n$ di <u>tutte e sole</u> le combinazioni affini di vettori in S.

$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$



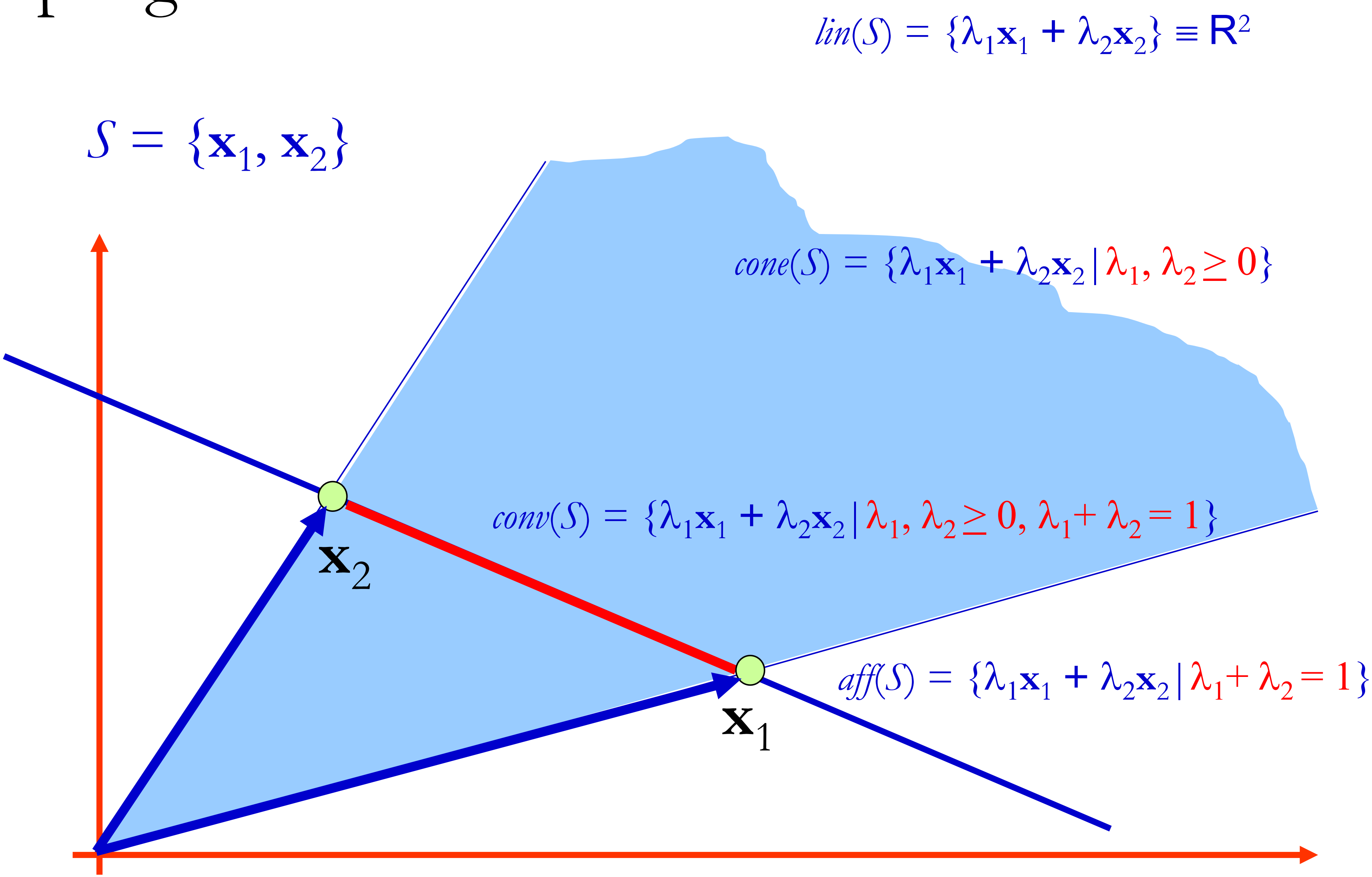
L'involucro affine di 2 punti in R^2 è una retta

Riepilogo

Sia S un insieme di m vettori $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m \in R^n$

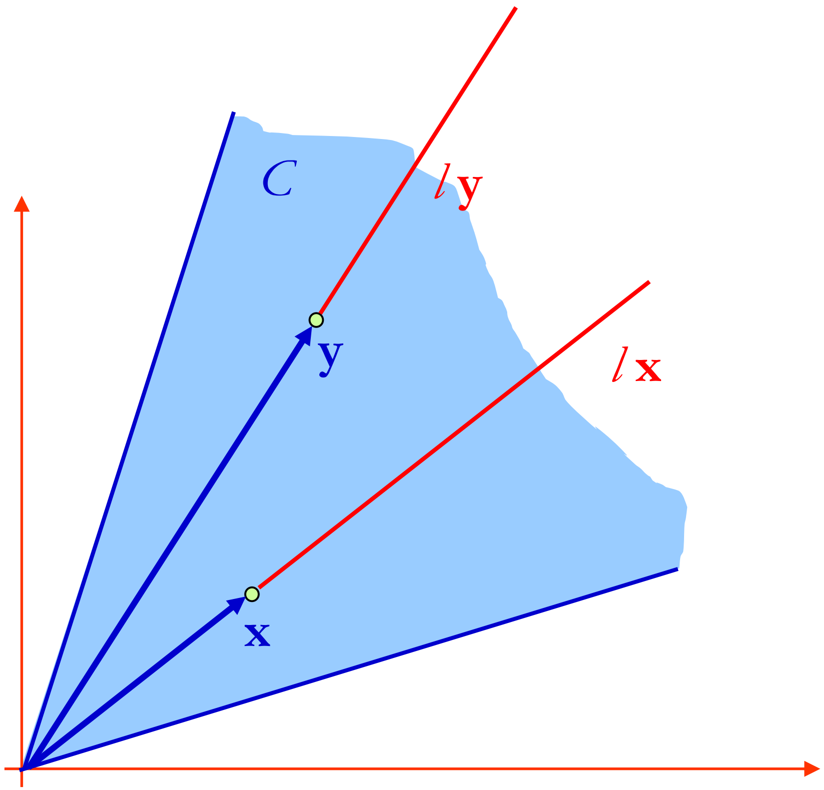
combinazione	coefficienti	insieme generato
lineare	$\lambda_i \in R$	Involucro lineare *lin*(S)
conica	$\lambda_i \geq 0$	Involucro conico *cone*(S)
affine	$\Sigma\lambda_i = 1$	Involucro affine *aff*(S)
convessa	$\lambda_i \geq 0, \Sigma\lambda_i = 1$	Involucro convesso *conv*(S)

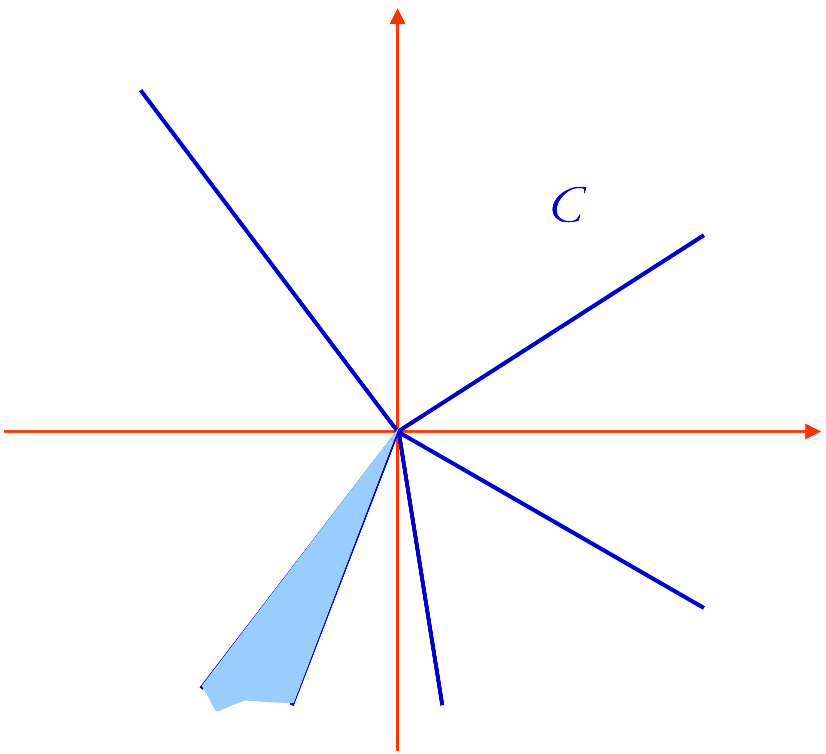
Riepilogo


$lin(S) = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2\} \equiv \mathrm{R}^2$
$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$
$cone(S) = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 \,|\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$
$conv(S) = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 \,|\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$
$\mathbf{x}_2$
$aff(S) = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 \,|\, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$
$\mathbf{x}_1$

Coni

[Definizione 7.3.1] un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cono se <u>per ogni</u> $\mathbf{x} \in C$ e per ogni $l \geq 0$ si ha $l\,\mathbf{x} \in C$, cioè se la *semiretta* $\{l\,\mathbf{x} : l \geq 0\}$ è completamente contenuta in C.

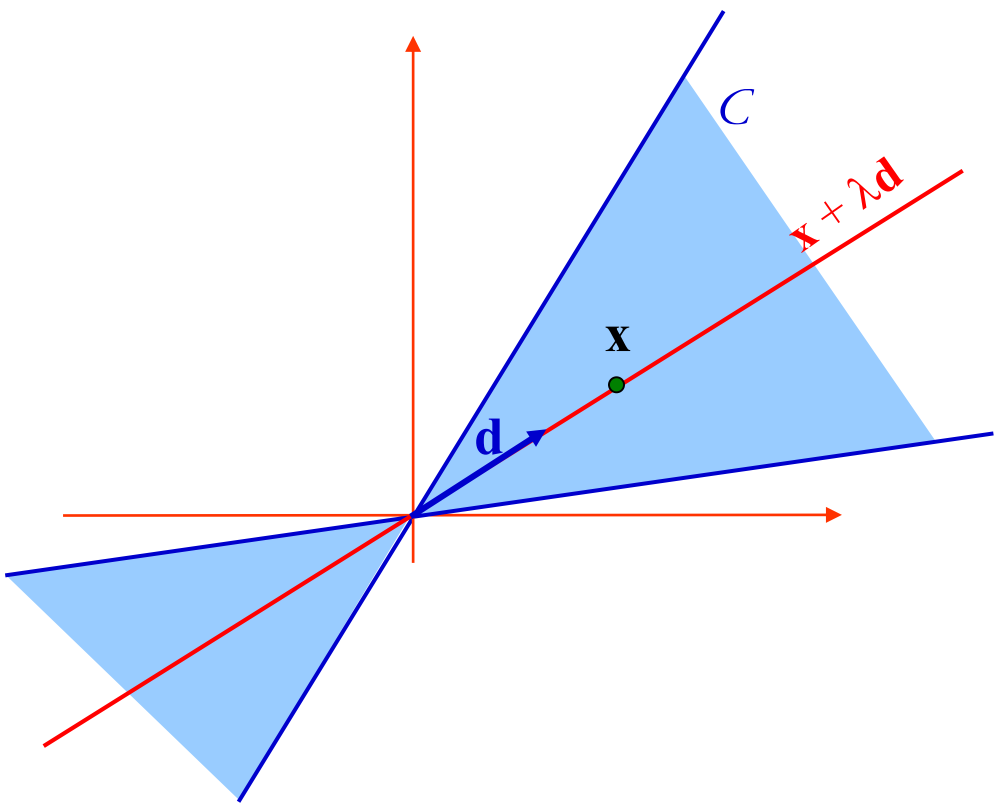




Coni e rette

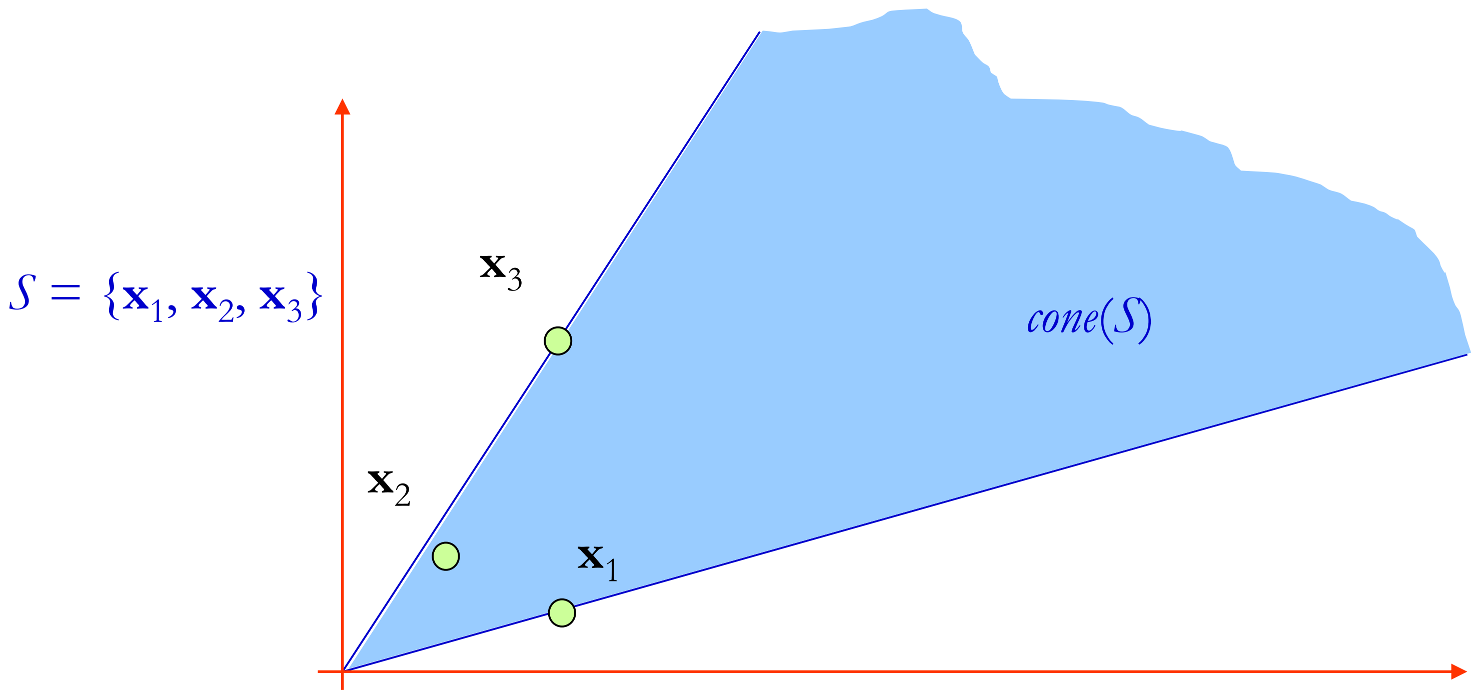
[Definizione] Il cono C contiene una retta se <u>esiste</u> un $\mathbf{x} \in C$ e un vettore <u>non nullo</u> $\mathbf{d} \in \mathrm{R}^n$ tale che per ogni $\lambda \in \mathrm{R}$ si abbia

$$\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \quad \in \quad C$$



Involucro conico

L'involucro conico di un insieme di punti $S = \{\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m\} \subseteq R^n$ coincide con l'intersezione di tutti i coni contenenti S e quindi coincide con il più piccolo cono contenente S



Coni

- Un cono <u>non è in generale</u> un insieme convesso;
- ogni cono contiene il vettore **0**;

[Domande]

- Un insieme di semirette centrate nell'origine formano un cono?
- Quanti punti estremi ha un cono convesso? Quali sono?

Rette e Vertici

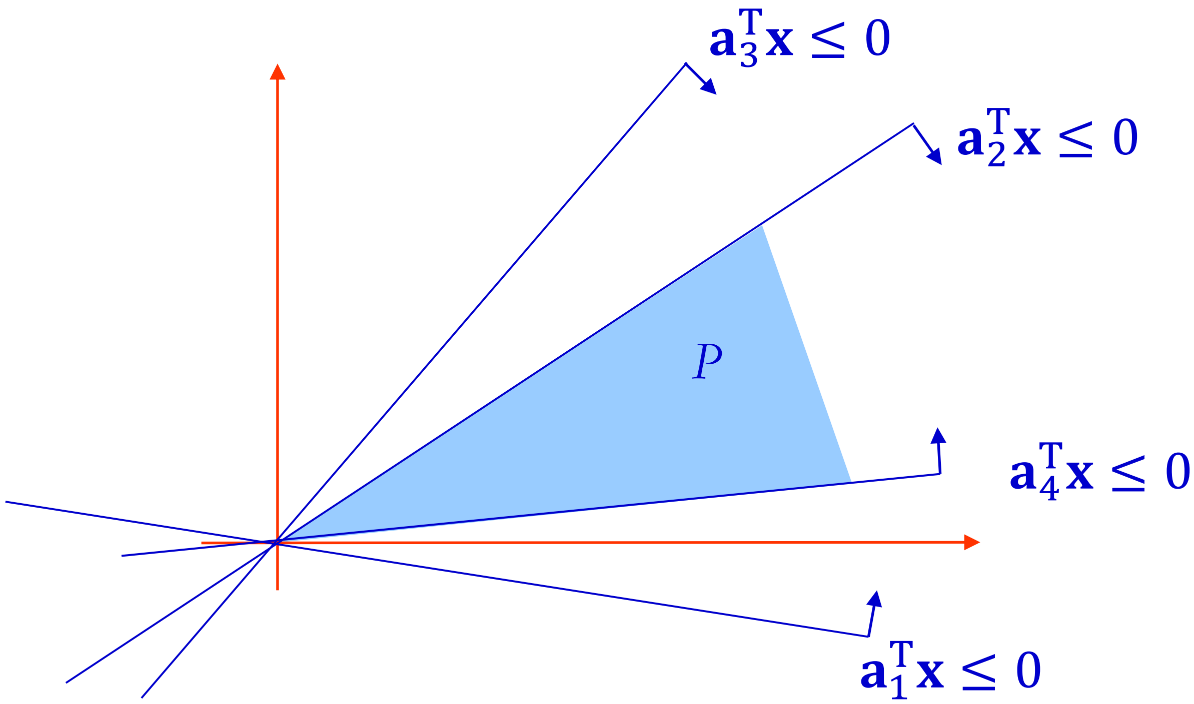
[Teorema 3.2.11] un poliedro non vuoto P ha un vertice **se e solo se** non contiene alcuna retta

Se un problema di PL in *forma standard* ammette soluzione allora il poliedro associato ha almeno un vertice

Coni poliedrali

[Definizione 7.3.2] un cono poliedrale è il poliedro

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$$



Coni poliedrali e rette

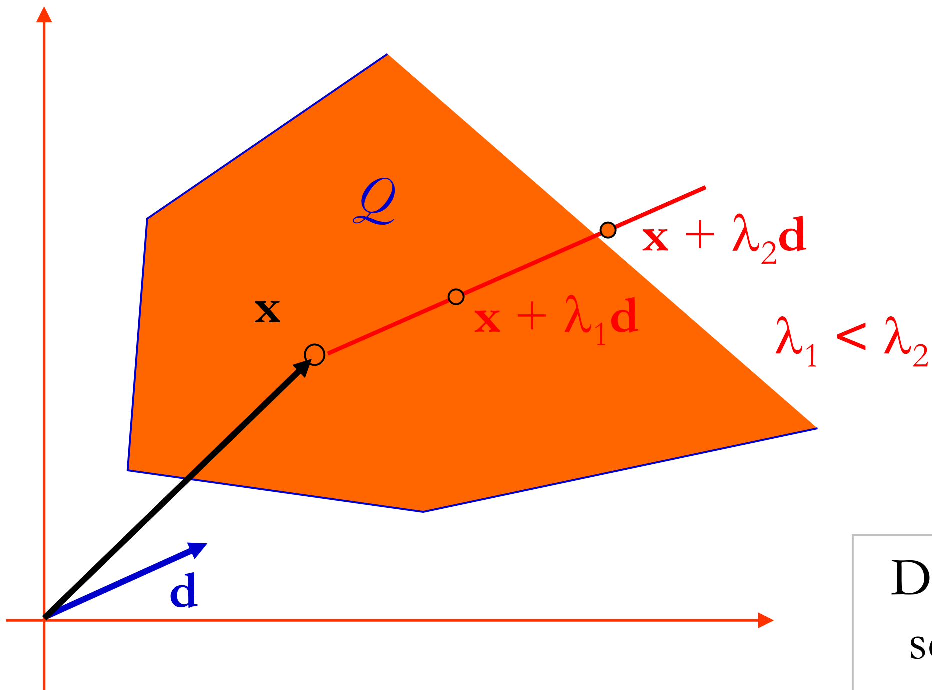
[Definizione] Un cono poliedrale si dice puntato se contiene un punto estremo. In tal caso il punto estremo è unico ed è necessariamente $\{\mathbf{0}\}$

[Teorema 7.3.1] Un cono poliedrale $P = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ è puntato se e solo se

- **non contiene** una retta, o analogamente
- $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ ha n vettori riga linearmente indipendenti

direzioni di recessione

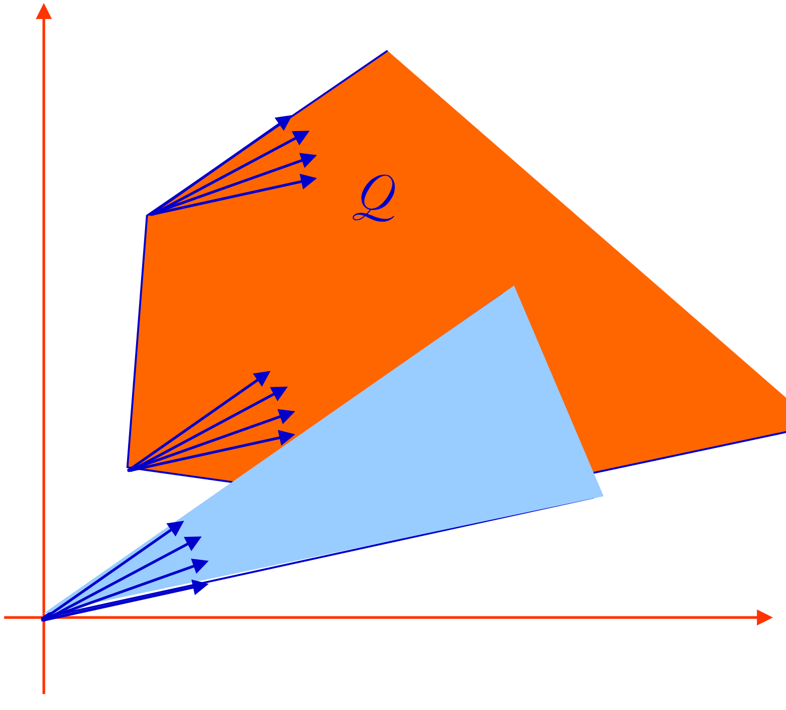
[Definizione 7.3.4] Un vettore $\mathbf{d} \in R^n$ si dice direzione di recessione (o raggio) di un insieme convesso $\mathcal{Q} \subseteq R^n$ se per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$ e per ogni $\lambda \geq 0$ la semiretta $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$ è completamente contenuta in $\mathcal{Q}$.



Dalla definizione segue immediatamente che se il vettore $\mathbf{d}$ è una direzione di recessione allora lo è anche ogni vettore $\lambda\mathbf{d}$ con $\lambda \geq 0$

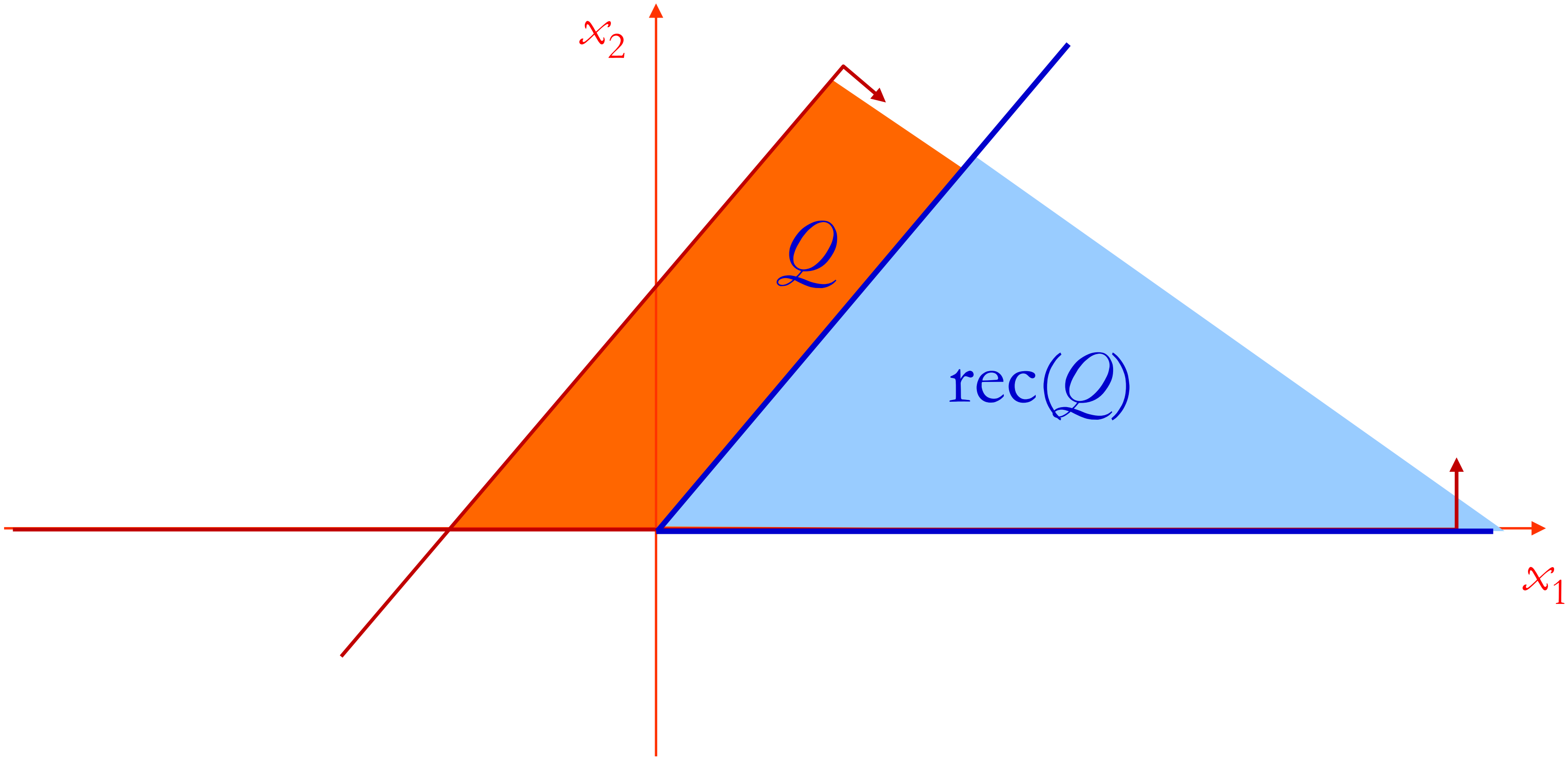
Cono di recessione

[Definizione 7.3.5] L'insieme di tutte le direzioni di recessione di $\mathcal{Q}$ si dice cono di recessione di $\mathcal{Q}$, e si indica con rec($\mathcal{Q}$).



Cono di recessione: esempi

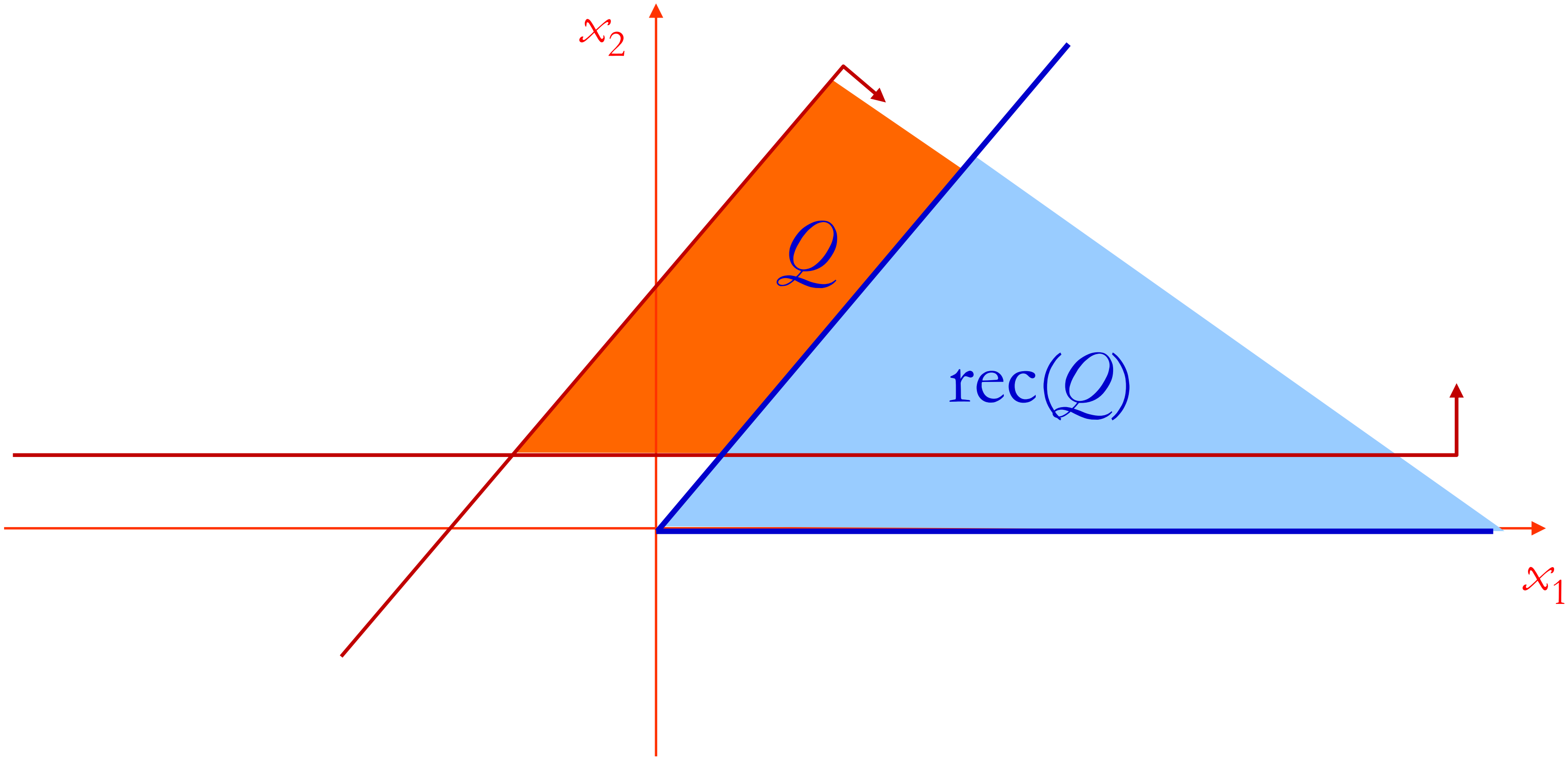
$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2\text{: } x_2 \geq 0; -3x_1 + 2x_2 \leq 6\}$



rec($\mathcal{Q}$) può essere contenuto in $\mathcal{Q}$

Cono di recessione: esempi

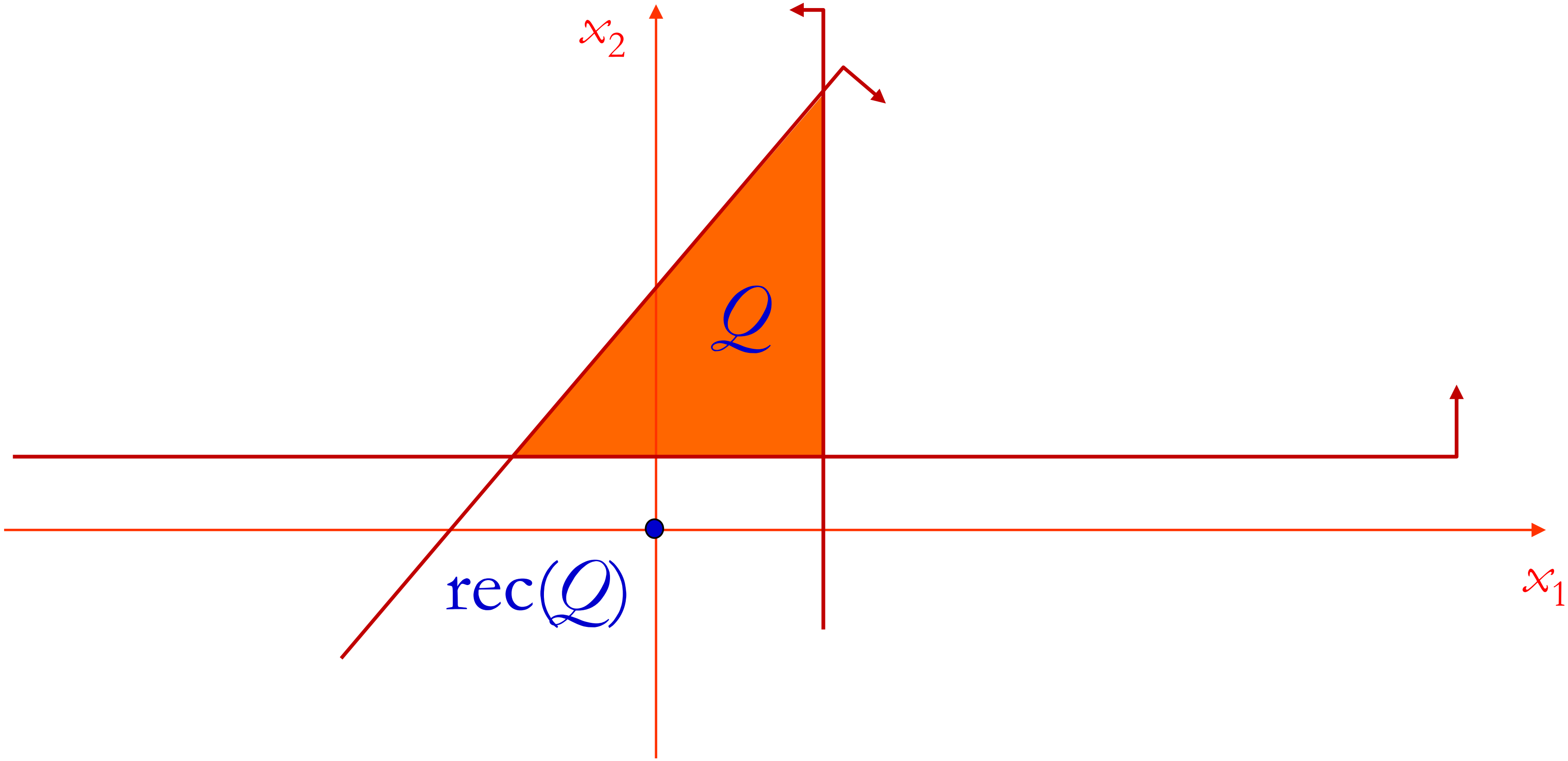
$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 \colon x_2 \geq 1; -3x_1 + 2x_2 \leq 6\}$



rec($\mathcal{Q}$) non è necessariamente contenuto in $\mathcal{Q}$

Cono di recessione: esempi

$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \geq 1;\ x_1 \leq 2;\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6\}$

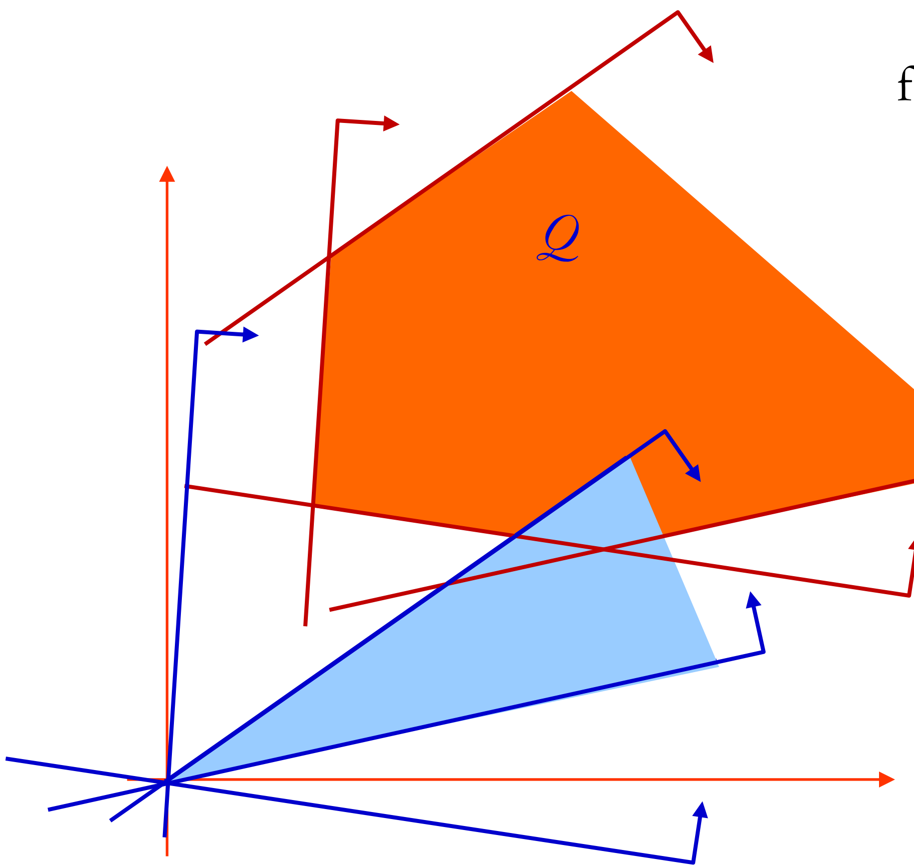


Se $\mathcal{Q}$ è limitato, rec($\mathcal{Q}$) = $\{\mathbf{0}\}$

Cono di recessione e cono poliedrale

[Teorema 7.3.3] il cono di recessione rec(P) di un poliedro non vuoto $P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ coincide con il cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}\}$

[dim] Per dimostrare che rec(P) $\equiv C$ si può far vedere che l'uno include l'altro e viceversa.



[Interpretazione geometrica]
Se Q è un poliedro, rec(Q) si individua traslando ogni iperpiano che definisce Q fino a intercettare l'origine.

Cono di recessione e cono poliedrale

1. $C \subseteq \text{rec}(P)$, cioè ogni soluzione di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$ è una dir. di recessione di P

- Sia $\underline{\mathbf{d}}$ una soluzione del sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$.
- Dalla definizione, il vettore $\underline{\mathbf{d}}$ è una direzione di recessione di P se $\forall \mathbf{x} \in P$ e $\forall l > 0$ si ha $(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \in P$.

- Il punto $(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \in P$ se $\mathbf{A}(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \leq \mathbf{b}$ cioè se $\mathbf{Ax} + l\,\mathbf{A}\underline{\mathbf{d}} \leq \mathbf{b}$. In effetti

$$\mathbf{Ax} + l\,\mathbf{A}\underline{\mathbf{d}} \leq \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

dato che $l > 0$ e $\mathbf{A}\underline{\mathbf{d}} \leq \mathbf{0}$

dato che $\mathbf{x} \in P$

Cono di recessione e cono poliedrale

2. $\text{rec}(P) \subseteq C$, cioè ogni dir. di recessione di P è una soluzione di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$

- Per assurdo sia $\mathbf{d}$ una dir. di recessione di P ma che però non soddisfa una delle disequazioni di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$, poniamo l'$i$-esima (cioè si ha $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0$).
- $\mathbf{d} \in \text{rec}(P)$ quindi $\forall \mathbf{x} \in P$ e $\forall l > 0$ deve essere $\mathbf{A}(\mathbf{x} + l\,\mathbf{d}) \leq \mathbf{b}$ e ciò vale in particolare per l' i-esimo vincolo:

$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} + l\,\mathbf{d}) \leq b_i \qquad \text{cioè}$$
$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + l\,\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \leq b_i$$

dato che $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0$ e b_i è una quantità finita, il vincolo non può essere soddisfatto $\forall l > 0$ ma solo per i valori $l \leq [b_i - \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]/\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{d}$.

Quindi, se $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0$ allora $\mathbf{d} \notin \text{rec}(P)$ ■

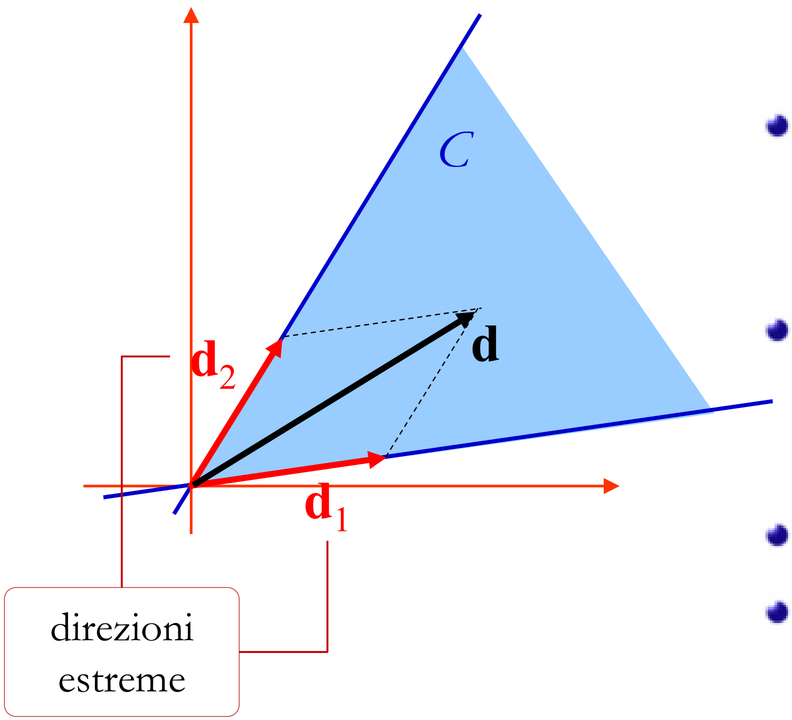
Cono di recessione e cono poliedrale

Analogamente, il cono di recessione rec(P)

- di un poliedro non vuoto $P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ coincide con il cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}\}$
- di un poliedro non vuoto $P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ coincide con il cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Direzioni estreme

[Definizione 7.3.7] Una direzione $\mathbf{d}$ di un cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in R^n: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ è detta estrema se rende attivi $(n - 1)$ vincoli di $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$.



- $\mathbf{d}$ è una direzione estrema (o raggio estremo) di C se non esprimile come combinazione conica <u>non banale</u> delle altre.
- D'altra parte, tutte le altre direzioni di un cono poliedrale C sono combinazioni coniche di direzioni estreme.
- I raggi estremi di C formano facce massimali di C
- L'insieme dei raggi estremi è indicato con rays(C)

Coni e politopi finitamente generati

[Definizione 7.3.17] un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto finitamente generato se esiste un sottoinsieme finito $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\} \subset C$ di suoi punti tale che

$$C = cone(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{y}_i \,, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \right\}$$

[Definizione 7.3.18] un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto finitamente generato se esiste un sottoinsieme finito $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\} \subset P$ di suoi punti tale che

$$P = conv(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{w}_i \,, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\}$$

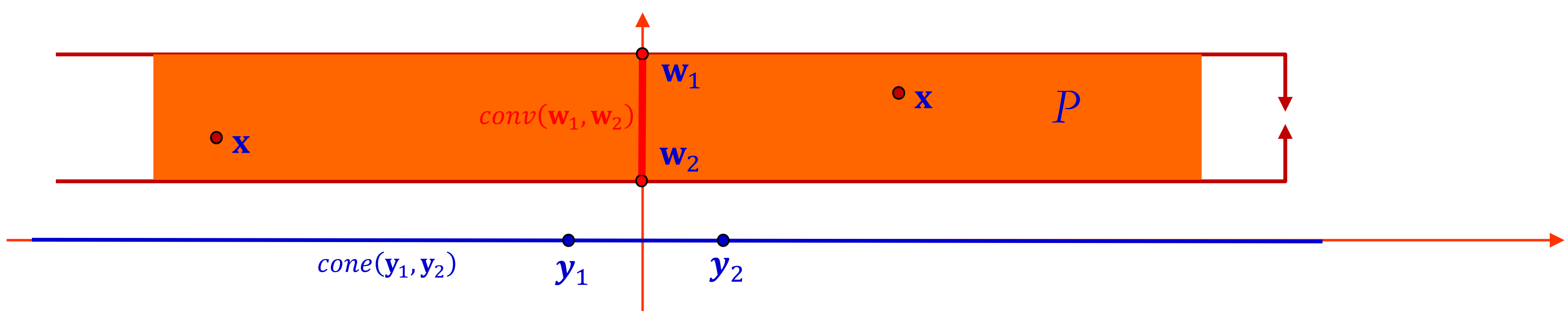
[Teorema 7.3.8] Un cono è poliedrale <u>se e solo se</u> è finitamente generato

Poliedri: rappresentazione *interna*

[Teorema 7.3.9] Resolution Theorem (Weyl-Minkowski, 1936)
Un insieme P è un poliedro se e solo se è la somma vettoriale di un politopo finitamente generato e un cono finitamente generato.

Più precisamente, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se e solo se esistono 2 insiemi di vettori $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ tali che

$$P = conv(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) + cone(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$$



Poliedri: rappresentazione *interna*

[Teorema 7.3.10] Un poliedro P può essere espresso come somma vettoriale di un politopo finitamente generato e del cono di recessione $rec(P)$.

Se un poliedro P possiede almeno un punto estremo:

[Teorema 7.3.11] P può essere espresso come somma vettoriale dell'involucro dei suoi punti estremi e del cono di recessione

$$P = conv(ext(P)) + rec(P)$$

[Teorema 7.3.12] il cono di recessione di P coincide con l'involucro conico dei suoi raggi estremi

$$rec(P) = cone(rays(P))$$

Poliedri: rappresentazione *interna*

[Teorema 7.3.9] Resolution Theorem (Weyl-Minkowski, 1936)
Un insieme P è un poliedro se e solo se è la somma vettoriale di un politopo finitamente generato e un cono finitamente generato.

Più precisamente, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se e solo se esistono 2 insiemi di vettori $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ tali che

$$P = \boxed{conv(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)} + \boxed{cone(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)}$$

[Teorema 7.3.11]

$\equiv conv(ext(P))$ se P possiede almeno un punto estremo

[Teorema 7.3.10]

$\equiv rec(P)$

[Teorema 7.3.12]

$\equiv cone(rays(P))$ se P possiede almeno un punto estremo

Poliedri: rappresentazione *interna*

…ricapitolando

Un insieme P con **almeno un punto estremo** è un poliedro <u>se e solo se</u> ogni punto $\mathbf{x} \in P$ può essere espresso come

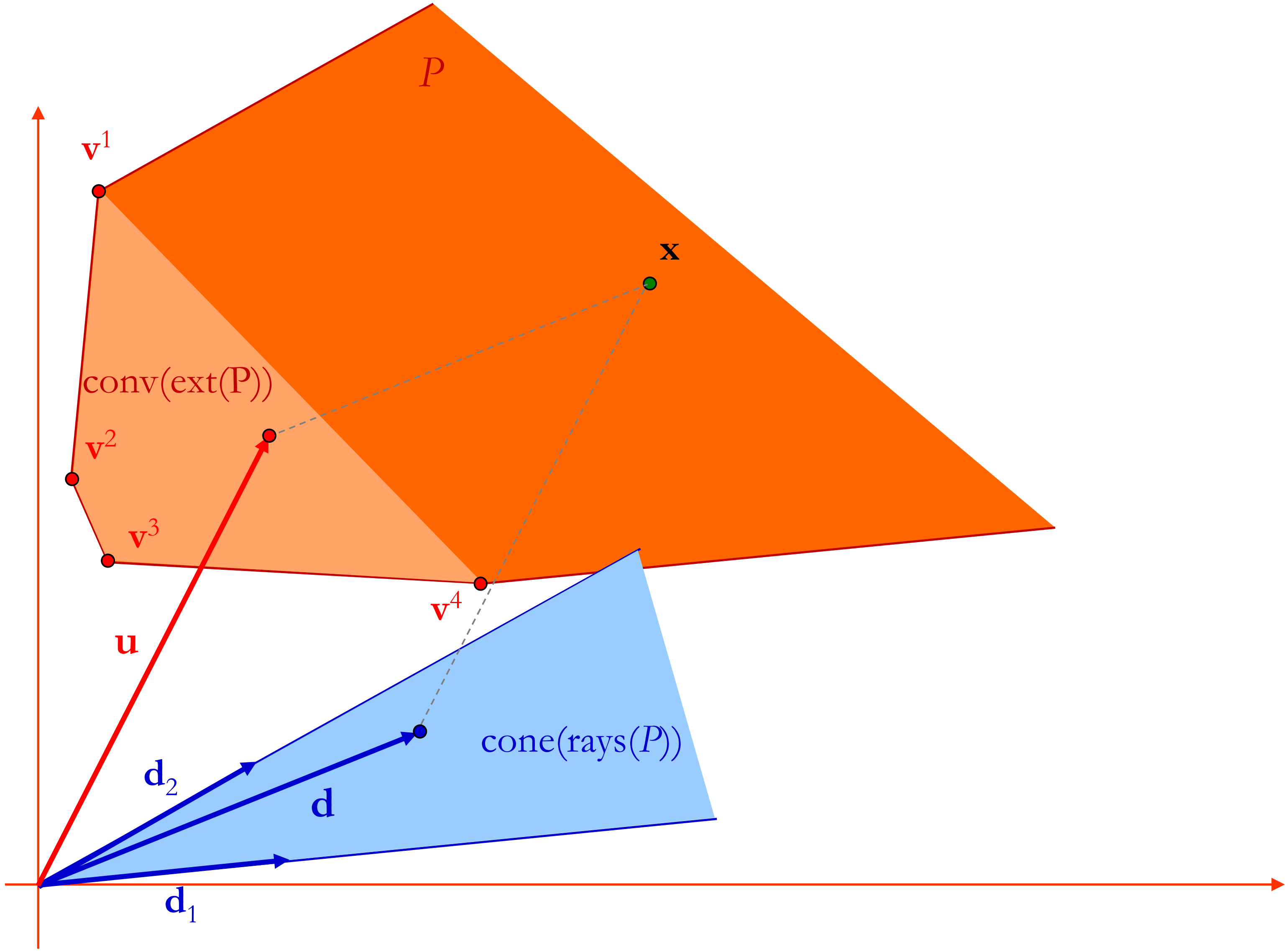
$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{d}$$

con $u \in conv(ext(P))$ e $d \in cone(rays(P))$

[Corollari]

- Un poliedro P è un polìtopo <u>se e solo se</u> $\mathrm{rec}(P) = \{\mathbf{0}\}$.
- Un poliedro P è un polìtopo <u>se e solo se</u> coincide con l'involucro convesso dei suoi punti estremi.

Poliedri: rappresentazione *interna*



Rappresentazione *interna*: esercizio

[Esercizio]

$P = \{\mathbf{x} \in R^2: -x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1 - x_2 \geq -2,\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15\}$

- verificare che $(3, 3) \in P$
- trovare $\mathbf{u} \in conv(ext(P))$, e una direzione di recessione $\mathbf{d}$ tali che $(3, 3) = \mathbf{u} + \mathbf{d}$

Teorema fondamentale della PL

Sia $z = \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\text{: } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$ un problema di PL in forma generale e P il poliedro associato, che supponiamo **non vuoto** e con **almeno un vertice**. Allora

[Teorema]

1. Se **esiste** una direzione di recessione **d** di P tale che $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0$ allora il problema di PL è illimitato;
2. Se **per ogni** direzione di recessione **d** di P si ha $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \leq 0$ allora il problema di PL ammette ottimo finito. Inoltre, esiste una soluzione ottima che è un punto estremo di P.

Teorema fondamentale della PL

[Dim 1.] Si supponga per assurdo che il problema ammetta un ottimo finito $\mathbf{x}^*$, cioè un $\mathbf{x}^*$ tale che

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* \neq +\infty \qquad \text{e} \qquad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in P$$

Per ipotesi $\mathbf{d}$ è una direzione di recessione di P cioè per ogni $l > 0$ e per ogni $\mathbf{y} \in P$ si ha $\mathbf{y} + l\mathbf{d} \in P$. Quindi

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y} - l\mathbf{d}) \geq 0 \qquad \text{per ogni } l > 0 \text{ e } \mathbf{y} \in P$$

cioè $$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - l\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \geq 0$$

da cui $$l\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \leq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y})$$

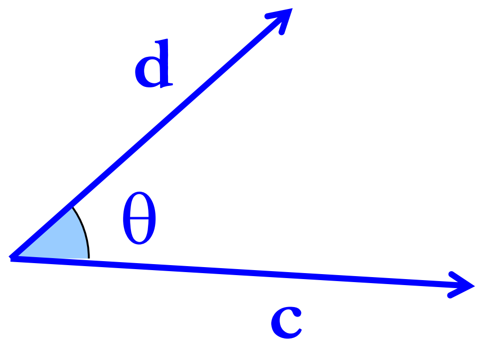
ma questa relazione è in generale falsa. Infatti $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y})$ è una quantità finita mentre $l\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}$ può crescere senza limite dato che $l > 0$ e per ipotesi $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0$.

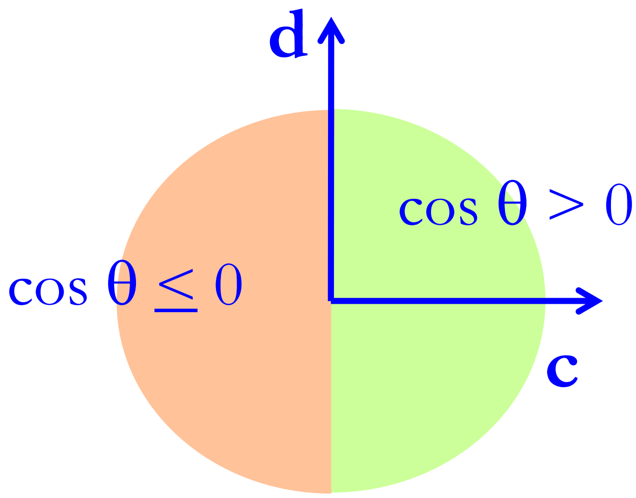
$\blacksquare$

Teorema fondamentale della PL

… geometricamente:

$\mathbf{c}^T\mathbf{d}$ è il *prodotto scalare* tra i vettori $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$, anche definito come $|\mathbf{c}|\,|\mathbf{d}|\cos\theta$





Se $\mathbf{c}^T\mathbf{d} > 0$ (cioè se $\cos\theta > 0$) vuol dire che esiste una direzione di recessione concorde con il gradiente della funzione obiettivo

Teorema fondamentale della PL

[dim 2.]

Ordiniamo i punti estremi $ext(P) = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ di P per valori non crescenti della funzione obiettivo (cioè tali che $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 \geq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_2 \geq \ldots \geq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_p$).

Teorema di Weyl: ogni $\mathbf{x} \in P$ si può esprimere come $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{d}$, con $\mathbf{u} \in conv(ext(P))$ e $\mathbf{d}$ direzione di recessione. Quindi

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{u} + \mathbf{c}^T\mathbf{d} \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in P$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} + \mathbf{c}^T\mathbf{d} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{u} \qquad \text{dato che per ipotesi } \mathbf{c}^T\mathbf{d} \leq 0$$

Teorema fondamentale della PL

Siccome $\mathbf{u}$ è una combinazione convessa di punti estremi di P, si ha

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} = \mathbf{c}^T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{v}_p) \quad \text{con} \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0$$

$$= \lambda_1\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{c}^T\mathbf{v}_p$$

e sfruttando l'ipotesi dell'ordinamento, cioè che $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 \geq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_k$ $(k = 2,\ldots,p)$, posso sostituire ogni $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_k$ con $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1$ e scrivere

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} \leq (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 \qquad \text{ma } \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1 \text{ quindi}$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_1$$

Ricapitolando $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_1$ per ogni $\mathbf{x} \in P$, quindi $\mathbf{v}_1 \in ext(P)$ è una soluzione ottima per P.

■

Teorema fondamentale della PL: riassunto

- **Caso 1.** regione ammissibile non vuota e limitata
  - esiste una soluzione ottima. Inoltre, esiste una soluzione ottima che è un punto estremo (cioè un vertice).

- **Caso 2.** regione ammissibile non vuota e non limitata
  - esiste una soluzione ottima che è un punto estremo (cioè un vertice), oppure
  - esiste una soluzione ottima ma nessuna soluzione ottima è un punto estremo (e questo può accadere solo se la regione ammissibile non ha punti estremi), oppure
  - il problema è illimitato (il valore della f.o. è $+\infty$)

Osservazioni

- Il teorema fondamentale della PL ci dice come risolvere un problema di PL non vuoto, ma per poterlo utilizzare è necessario conoscere la *rappresentazione interna* del poliedro.

- In generale però un problema di PL è descritto da un numero finito di equazioni/disequazioni lineari (*rappresentazione esterna*).

- Per problemi con al più 3 variabili si può utilizzare la soluzione geometrica, ma per risolvere problemi con più di 3 variabili è necessaria una descrizione *analitica* dei vertici.

- Se il problema è posto in forma standard P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, una qualsiasi soluzione ammissibile di P è *anche* una soluzione del sistema di equazioni lineari $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ma attenzione! non vale il viceversa)

Esiste una procedura generale per risolvere un problema di PL?

Sistemi di equazioni lineari
e
Programmazione lineare

(Vercellis cap. 3.2 e appendice A.3)

Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari in m equazioni e n incognite (con $m \le n$) ha la seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ,\ldots, + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ,\ldots, + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ,\ldots, + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemi di equazioni lineari

In forma compatta il sistema si scrive

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{con } \mathbf{A}(m \times n),\ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n,\ \mathbf{b} \in \mathrm{R}^m$$

oppure $$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{b}$$

o anche $$\begin{cases} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_m \end{cases}$$

La matrice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ ottenuta giustapponendo il vettore **b** alla matrice **A** viene detta matrice *estesa* (o *completa*).

Sistemi di equazioni lineari

Sia $X = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Si dice che il sistema è incompatibile se $X = \varnothing$
- Si dice che il sistema è compatibile se $X \neq \varnothing$

Riscrivendo il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ come

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{b}$$

è facile osservare che le componenti di una soluzione $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ del sistema corrispondono ai coefficienti di una combinazione lineare dei vettori colonna della matrice $\mathbf{A}$ che descrive il termine noto $\mathbf{b}$.

Sistemi di equazioni lineari

[Teorema] Rouché-Capelli

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A}(m \times n)$, è compatibile <u>se e solo se</u>

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$$

Sistemi di equazioni lineari

Casi

1. $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = k < n$

   $n - k$ gradi di libertà: infinite soluzioni

2. $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$

   $\mathbf{A}$ è una base di R^n: soluzione unica

3. $\text{rank}(\mathbf{A}) \neq \text{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$

   $\text{rank}(\mathbf{A}) < \text{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$: sistema incompatibile

Soluzione di sistemi quadrati di eq. lineari

Si vuole risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \text{in } n \text{ eq. e } n \text{ incognite e } \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$$

Idea: risolvere il sistema equivale a calcolare la matrice inversa:
Se $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$ allora $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e esiste $\mathbf{A}^{-1}$. Quindi si può scrivere

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

quindi

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Soluzione di sistemi quadrati di eq. lineari

Soluzione del sistema:

- Metodo algebrico (calcolo di $n^2 + 1$ determinanti)

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{(cof\ \mathbf{A})^{\mathrm{T}}}{\det(\mathbf{A})}}$$

con $[cof\ a_{ij}] = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

- Regola di *Cramer* (calcolo di «soli» $n + 1$ determinanti)

$$\boxed{x_i = \frac{\det(\mathbf{A}^{(i)})}{\det(\mathbf{A})}}$$

$\mathbf{A}^{(i)}$: matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di **A** con il vettore **b**

[nota] Il calcolo del determinante di una matrice $\mathbf{A}(n \times n)$ richiede $n!$ moltiplicazioni.

Operazioni elementari

[Definizione] due sistemi di (dis)equazioni sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

[Definizione] operazioni elementari su una matrice $\mathbf{A}$

- moltiplicare una riga (o colonna) per una costante <u>non nulla</u>
- sommare ad una riga (o colonna) una combinazione lineare delle altre
- cambiare l'ordine delle righe (o delle colonne)

[Teorema] le operazioni elementari sulla matrice estesa $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ di un sistema di equazioni lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ conducono a una matrice estesa $(\mathbf{A}'\,|\,\mathbf{b}')$ di un sistema di equazioni lineari *equivalente*.

Metodo di Gauss-Jordan

Il metodo di Gauss-Jordan è una procedura iterativa che trasforma, tramite una serie di operazioni di ***pivot***, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nel sistema

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Un'operazione di pivot consiste in una serie di *operazioni elementari* sul sistema. Il pivot quindi trasforma il sistema in un sistema equivalente.

Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

1. si divide la riga 2 per a_{23}

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$/$$

$$\boxed{-1/2 \quad 1/2 \quad 1 \quad 1}$$

Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

2. si somma ad ogni riga $k \neq 2$ la riga 2 ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-a_{k3}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$-a_{13} = -1$

$\times$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

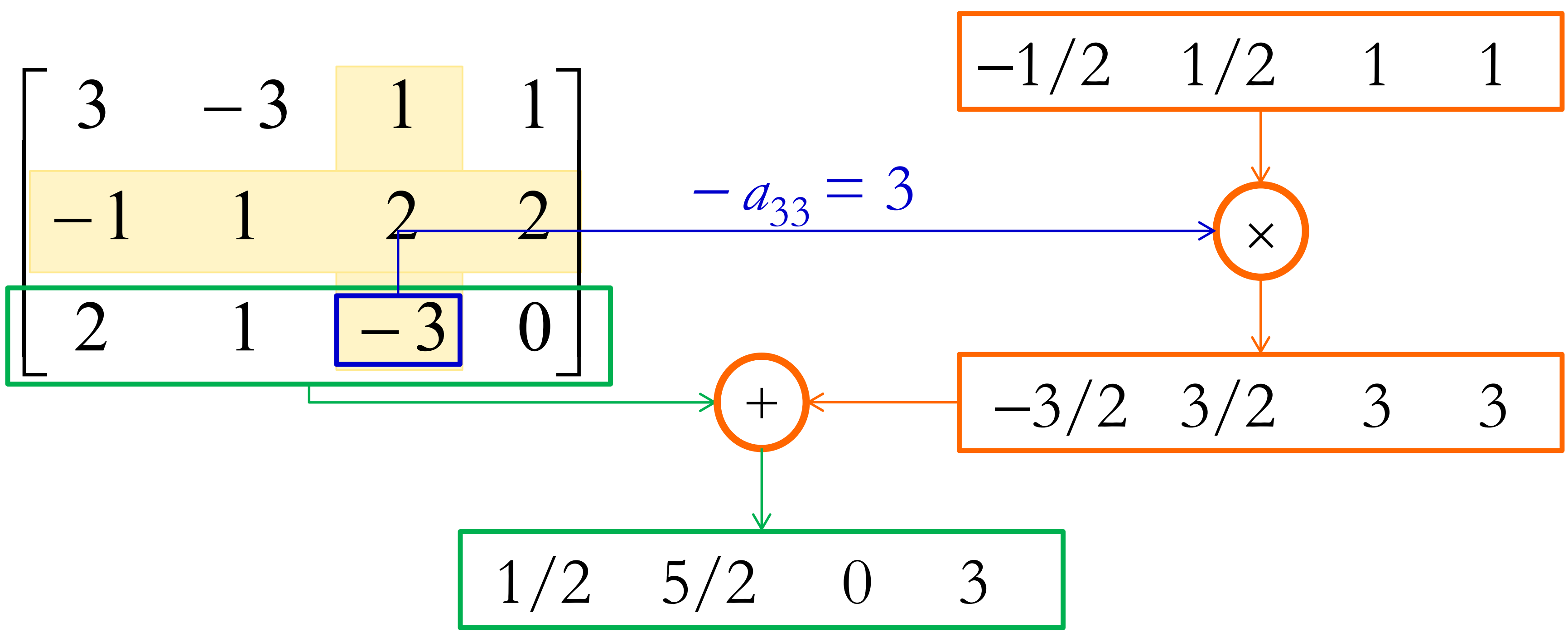
$+$

$$\begin{bmatrix} 7/2 & -7/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

2. si somma ad ogni riga $k \neq 2$ la riga 2 ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-a_{k3}$



Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

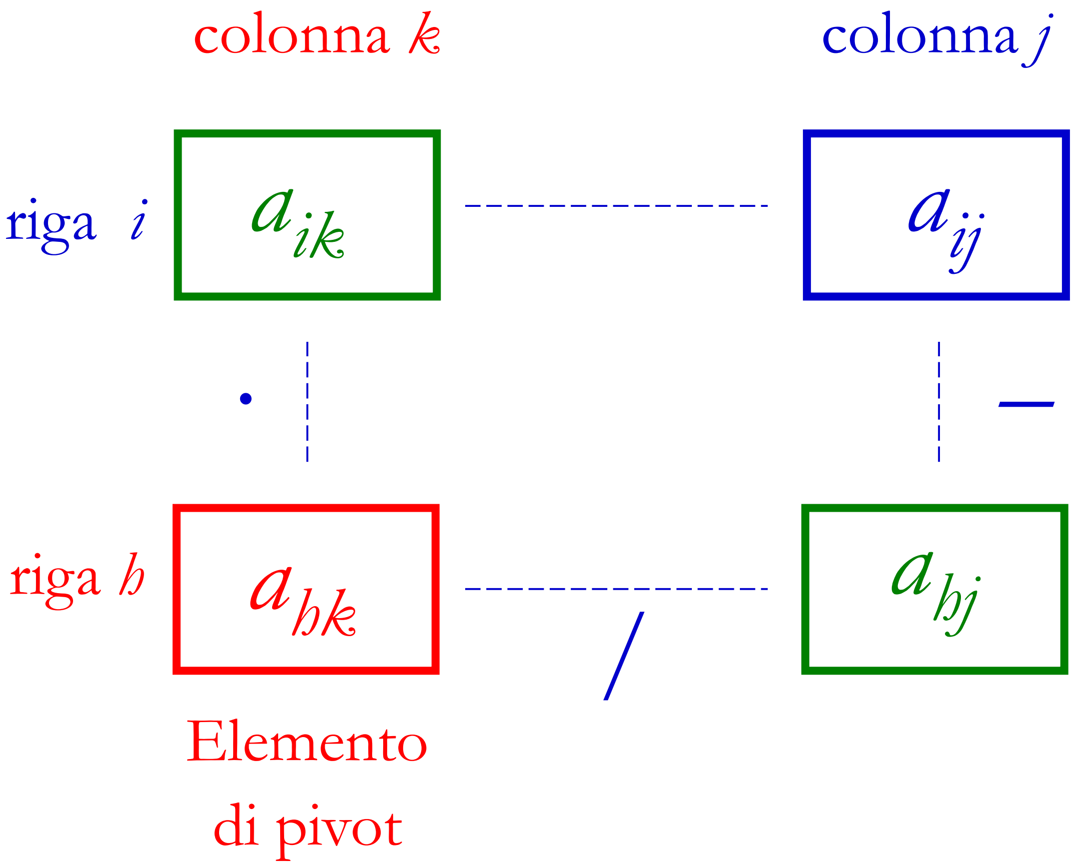
prima

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

dopo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7/2 & -7/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Operazione di pivot



$$= a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{hj} / a_{hk}$$

Operazione di pivot

- Il pivot sull'elemento $a_{ih} \neq 0$ della matrice $\mathbf{A}$ consiste nelle seguenti operazioni
    1. si divide la riga i di $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ per a_{ih}
    2. si somma ad ogni riga $k \neq i$ la nuova riga i ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-\,a_{kh}$

lo scopo del pivot è trasformare la colonna h-esima nel versore $\mathbf{e}_i$:

- con il passo 1. si ottiene $a_{ih} = 1$
- con il passo 2. si ottiene $a_{kh} = 0$ per $k \neq i$

Interpretazione dell'operazione di pivot

Il pivot sull'elemento a_{hk} equivale a risolvere la h-esima equazione rispetto alla variabile x_k e sostituire x_k in tutte le altre equazioni.

[Esempio]

pivot su a_{23}

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Risolvo la seconda equazione rispetto alla variabile x_3

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Interpretazione dell'operazione di pivot

Il pivot sull'elemento a_{hk} equivale a risolvere la h-esima equazione rispetto alla variabile x_k e sostituire x_k in tutte le altre equazioni.

[Esempio]

Sostituisco x_3 nella prima e terza equazione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \quad + 1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2 \\ 2x_1 \quad + x_2 - 3(1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2) = 0 \end{cases}$$

Riordino i termini

$$\begin{cases} 7/2 x_1 - 7/2 x_2 \qquad = 0 \\ -1/2 x_1 + 1/2 x_2 + x_3 = 1 \\ 1/2 x_1 + 5/2 x_2 \qquad = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 7/2 & -7/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Metodo di Gauss-Jordan: algoritmo

Sia $(\mathbf{A}^{(0)} \,|\, \mathbf{b}^{(0)})$ la matrice estesa del sistema di partenza e $(\mathbf{A}^{(i-1)} \,|\, \mathbf{b}^{(i-1)})$ la matrice estesa al passo *i*-esimo.

Le operazioni del passo *i*-esimo sono:

- se l'*i*-esima riga di $\mathbf{A}^{(i-1)}$ è il vettore nullo e $b_i^{(i-1)} \neq 0$ il sistema è incompatibile;
- se l'*i*-esima riga della matrice estesa $(\mathbf{A}^{(i-1)} \,|\, \mathbf{b}^{(i-1)})$ è il vettore nullo allora l'*i*-esima equazione del sistema è ridondante e può essere eliminata;
- Individuare una colonna h tale che $a_{ih}^{(i-1)} \neq 0$ e effettuare il **pivot** su $a_{ih}^{(i-1)}$

Esempio: sistema con unica soluzione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

1° iterazione: pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(0)} \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 1 & -3 & 1 \end{array} \quad \boxed{/\ 3}$$

$$\boxed{1} \; \boxed{\cdot} \; \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

$$\boxed{=} \; \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \; \boxed{+} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ & & & \end{array}$$

$$\boxed{-2} \; \boxed{\cdot} \; \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

$$\boxed{=} \; \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2/3 & -2/3 \end{array} \; \boxed{+}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 3 & -11/3 & 1/3 \end{array} = (\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)})$$

Esempio: sistema con unica soluzione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

2° iterazione: pivot su a_{23}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \,|\, \mathbf{b}^{(1)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(1)} \\ \hline 1 & -1 & \boxed{1/3} & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 3 & \boxed{-11/3} & 1/3 \end{array} \quad \boxed{/\ (7/3)}$$

$$\boxed{-1/3} \boxed{\cdot} \boxed{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}}$$

$$\boxed{=} \boxed{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}} \boxed{+} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -11/3 & 1/3 \end{array}$$

$$\boxed{11/3} \boxed{\cdot} \boxed{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}}$$

$$\boxed{=} \boxed{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11/3 & 11/3 \end{array}} \boxed{+}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array} = (\mathbf{A}^{(2)} \,|\, \mathbf{b}^{(2)})$$

Esempio: sistema con unica soluzione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

2° iterazione: pivot su a_{32}

$$(\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(2)} \\ \hline 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array} \quad / \ 3$$

$$\begin{array}{cc|ccc|c|c|ccc|c} & = & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \cdot & 0 & 1 & 0 & 4/3 & & 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc|c|c|ccc|c} & = & 0 & 1 & 0 & 4/3 & + & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & \cdot & 0 & 1 & 0 & 4/3 & & 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array} = (\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)})$$

Esempio: sistema con unica soluzione

$= (\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)})$

1	0	0	4/3
0	0	1	1
0	1	0	4/3

$= (\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)})$

$1x_1$	$0x_2$	$0x_3$	$= 4/3$
$0x_1$	$0x_2$	$1x_3$	$= 1$
$0x_1$	$1x_2$	$0x_3$	$= 4/3$

$$\begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 4/3 \end{cases}$$

La soluzione (unica) del sistema è $x_1 = 4/3$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 1$

Esempio: sistema con infinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

1° iterazione: pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(0)} \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & 3 & 7 \\ \boxed{4} & 1 & 1 & 15 \end{array} \quad \boxed{/\ 1}$$

$$\boxed{-2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -2 & -2 & 2 & -8 \\ \hline \end{array} \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\boxed{-4} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -4 & -4 & 4 & -16 \\ \hline \end{array} \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right) = (\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)})$$

Esempio: sistema con infinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

2° iterazione: pivot su a_{22}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(1)} \\ 1 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & -1 \end{array} \quad \boxed{/\ -3}$$

$$\boxed{-1} \cdot \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 5/3 & -1/3 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ & & & \end{array}$$

$$\boxed{3} \cdot \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -5 & 1 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$$

Esempio: sistema con infinite soluzioni

$$= (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$$

1	0	2/3	11/3
0	1	–5/3	1/3
0	0	0	0

equazione ridondante

$$= (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$$

$1x_1$	$0x_2$	$2/3x_3$	$= 11/3$
$0x_1$	$1x_2$	$-5/3x_3$	$= 1/3$
$0x_1$	$0x_2$	$0x_3$	$= 0$

$$\begin{cases} x_1 + 2/3x_3 = 11/3 \\ x_2 \ -5/3\ x_3 = 1/3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 11/3 - 2/3x_3 \\ x_2 = 1/3 + 5/3\ x_3 \end{cases}$$

Esistono infinite soluzioni del sistema, una per ogni $x_3 \in R$

Esempio: sistema incompatibile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

1° iterazione: pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(0)} \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{5} & 5 & -3 & -8 \end{array} \quad /\ 1$$

$$\boxed{-2} \cdot \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 6 \end{array} \quad +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ & & & \end{array}$$

$$\boxed{-5} \cdot \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} -5 & -5 & 5 & 15 \end{array} \quad +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & -3 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} = (\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)})$$

Esempio: sistema incompatibile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

<u>2° iterazione</u>: pivot su a_{23}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(1)} \\ \hline 1 & 1 & \boxed{-1} & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 7 \end{array} \quad / \ 3$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & & \end{array}$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \ +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} = (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$$

Esempio: sistema incompatibile

$$= (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)}) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

equazione impossibile

$$= (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)}) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1x_1 & 1x_2 & 0x_3 & = -1 \\ 0x_1 & 0x_2 & 1x_3 & = 2 \\ 0x_1 & 0x_2 & 0x_3 & = 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione. Infatti $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < 3$ (dato che $\det(\mathbf{A}) = 0$) e $\mathrm{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 3$

$$\begin{array}{c} \quad\quad \mathbf{A} \quad\quad\quad\quad \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & -8 \end{array}\right] \end{array}$$

Calcolo della matrice inversa

- Il metodo di Gauss-Jordan può essere utilizzato per ottenere la matrice inversa di una matrice $\mathbf{A}$. E' sufficiente considerare la matrice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ e trasformarla in $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ per mezzo di al più n operazioni di pivot.

sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ di equazioni lineari:

- Si trasforma $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ in $[\mathbf{I} \mid \mathbf{b}']$
- Si deduce che la soluzione è $\mathbf{x} = \mathbf{b}'$

equazione *matriciale* $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$

- Si trasforma $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ in $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}']$
- Si deduce che la soluzione è $\mathbf{X} = \mathbf{A}'$ ma $\mathbf{X}$ è $\mathbf{A}^{-1}$, quindi $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$.

Esercizi

[Esercizio] Qual è una stima ragionevole del numero di operazioni aritmetiche richieste dal metodo di Gauss-Jordan per risolvere un sistema di n equazioni lineari in n incognite?

Esercizi

Determinare i valori di k che rendono il sistema compatibile.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \quad + 6x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_3 \quad + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 11x_4 = k \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema ammette più di una soluzione.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = k \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$$

Discutere e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = \alpha + 8 \\ (\alpha - 4)x_1 + x_2 = -10 \end{cases}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari ($m < n$)

Si vuole risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- in m equazioni e n incognite ($m < n$),
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ (sistema compatibile) e
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ (matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ di rango pieno, ossia sistema senza equazioni ridondanti)

[Osservazione] Il metodo di Gauss-Jordan può essere facilmente adattato per risolvere sistemi non quadrati di questa forma.

Esempio: Gauss-Jordan su sistemi non quadrati

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ (\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) = \end{array} \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 24 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & & 8 \end{array}$$

pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

pivot su a_{23}

$$(\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 73 \end{array}\right]$$

pivot su a_{35}

$$(\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4/5 & 1 & 3/5 & 0 & 47/5 \\ 0 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1 & 73/5 \end{array}\right]$$

Esempio: Gauss-Jordan su sistemi non quadrati

$$(\mathbf{A}^{(3)}\,|\,\mathbf{b}^{(3)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4/5 & 1 & 3/5 & 0 & 47/5 \\ 0 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1 & 73/5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ 4/5x_2 + x_3 + 3/5x_4 = 47/5 \\ 1/5x_2 + 2/5x_4 + x_5 = 73/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 47/5 - 4/5\, x_2 - 3/5\, x_4 \\ x_5 = 73/5 - 1/5\, x_2 - 2/5\, x_4 \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = x_4 = 0$ si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_3 = 47/5 \\ x_5 = 73/5 \end{cases}$$

Esempio: Gauss-Jordan su sistemi non quadrati

$$(\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)}) =$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}^{(3)}$
1	2	0	1	0	7
0	4/5	1	3/5	0	47/5
0	1/5	0	2/5	1	73/5

Notare che questa soluzione è stata ottenuta invertendo la matrice quadrata **B** formata dai coefficienti delle variabili x_1, x_3 e x_5

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 7 \\ x_2 \quad + x_3 \quad + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$(\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) =$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}^{(0)}$
1	2	0	1	0	7
0	1	1	1	1	24
1	0	–3	0	2	8

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice di base

[Definizione] Una matrice di base è una sottomatrice quadrata **B** di **A**($m \times n$) non singolare, cioè con det(**B**) $\neq 0$, e di ordine m.

Si dice che **B**($m \times m$) è una matrice *di base* perché è formata da m vettori linearmente indipendenti che quindi costituiscono una base per lo spazio vettoriale R^m.

A(3 × 5) | **b**

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
1	2	0	1	0	7
0	1	1	1	1	24
1	0	–3	0	2	8

$$\mathbf{B}(3 \times 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

B è una matrice *di base* perché è quadrata di ordine 3 e non singolare

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Una volta individuata una matrice di base **B**, la matrice **A** può essere riscritta separando le colonne in base dalle colonne fuori base:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}] \qquad \text{con } \mathbf{B}(m \times m) \text{ e } \mathbf{N}(m \times n - m)$$

B(3×3)			**N**(3×2)		**b**
1	0	0	2	1	7
0	1	1	1	1	24
1	–3	2	0	0	8
x_1	x_3	x_5	x_2	x_4	

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Coerentemente, il vettore $\mathbf{x}$ delle incognite può essere scritto come:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{B} \\ \mathbf{x}_\mathrm{N} \end{bmatrix} \begin{array}{ll} m \text{ componenti:} & \text{variabili di base} \\ n-m \text{ componenti:} & \text{variabili fuori base} \end{array}$$

B(3×3)			**N**(3×2)		**b**
1	0	0	2	1	7
0	1	1	1	1	24
1	–3	2	0	0	8
x_1	x_3	x_5	x_2	x_4	

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{x}_\mathrm{B} \\ \\ \\ \mathbf{x}_\mathrm{N} \\ \\ \end{array}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Con questa notazione, il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ può essere riscritto come: $[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}]\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b}$ cioè

$$\boxed{\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_N = \mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Applicare il metodo di Gauss-Jordan equivale a invertire $\mathbf{B}$ (l'inversa $\mathbf{B}^{-1}$ esiste perché $\mathbf{B}$ è non singolare). Analiticamente:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$ pre-moltiplicando per $\mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$ cioè

$$\boxed{\mathbf{I}\cdot\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}$$

$$(\mathbf{A}^{(3)}\,|\,\mathbf{b}^{(3)}) = \begin{array}{ccc|cc|c} & \mathbf{I} & & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 & 3/5 & 47/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 73/5 \\ \hline x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 47/5 \\ 73/5 \end{bmatrix}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$ da cui

$$\boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N}$$

Segue che la soluzione del sistema **associata alla base B** è :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$$

Il sistema ha $n - m > 0$ gradi di libertà (e quindi infinite soluzioni) dato che le $n - m$ componenti non in base di $\mathbf{x}_N$ possono assumere valori arbitrari.

Ponendo $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ si ottiene la soluzione: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Soluzione di Base (Ammissibile) – SBA

[Definizione] La particolare soluzione $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ del sistema, che si ottiene annullando le componenti fuori base, è detta soluzione di base associata alla matrice di base $\mathbf{B}$

Considerando il problema di PL in forma standard

P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$ allora

[Definizione] Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ è *anche* una soluzione del problema P e per questo è detta soluzione di base ammissibile, in breve SBA, di P

Soluzione di Base (Ammissibile) – SBA

Il sistema finale rispetto alla Base $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 47/5 \\ 73/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_3 + 4/5\, x_2 + 3/5\, x_4 = 47/5 \\ x_5 + 1/5\, x_2 + 2/5\, x_4 = 73/5 \end{cases}$$

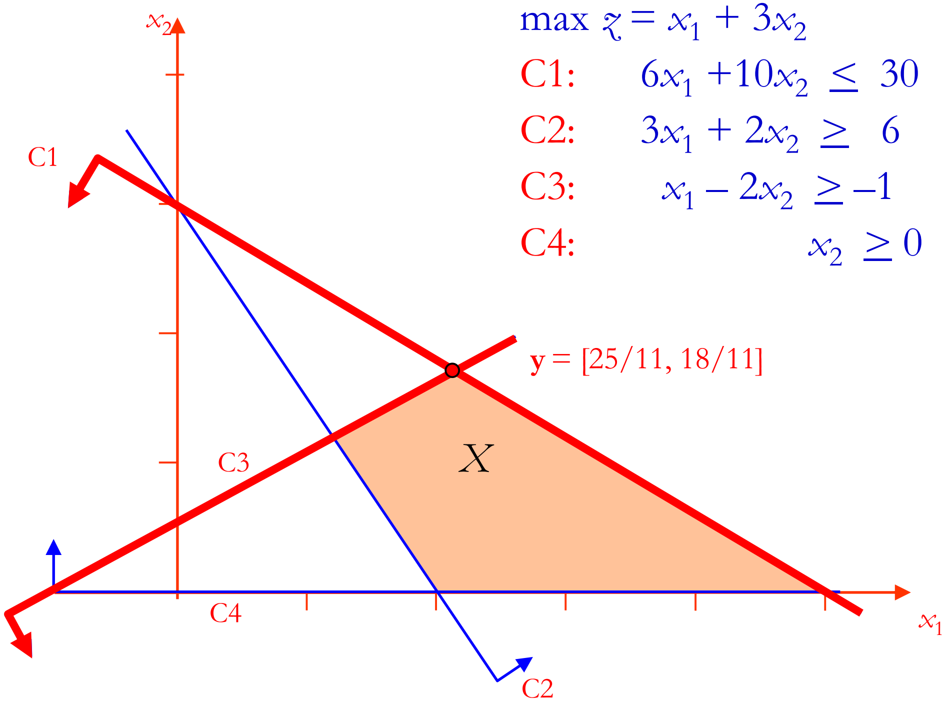
Ponendo $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_3 = 47/5 \\ x_5 = 73/5 \end{cases}$$

La soluzione di base è $\mathbf{x} = [\underbrace{7 \quad 47/5 \quad 73/5}_{\mathbf{x_B}} \quad \underbrace{0 \quad 0}_{\mathbf{x_N}}]$

La soluzione è anche una soluzione di base ammissibile

Un algoritmo per la PL (… un primo tentativo)



$$
\begin{array}{lrl}
\max z = x_1 + 3x_2 & & \\
\text{C1:} & 6x_1 + 10x_2 & \le 30 \\
\text{C2:} & 3x_1 + 2x_2 & \ge 6 \\
\text{C3:} & x_1 - 2x_2 & \ge -1 \\
\text{C4:} & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
\max z = x_1 + 3x_2 & & \\
\text{C1:} & 6x_1 + 10x_2 + x_3 & = 30 \\
\text{C2:} & 3x_1 + 2x_2 - x_4 & = 6 \\
\text{C3:} & x_1 - 2x_2 - x_5 & = -1 \\
\text{C4:} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \ge 0
\end{array}
$$

forma standard

[Osservazione] La soluzione ottima è un vertice del poliedro (intersezione di 2 rette) … ma è anche una Soluzione di Base Ammissibile del problema posto in forma standard.

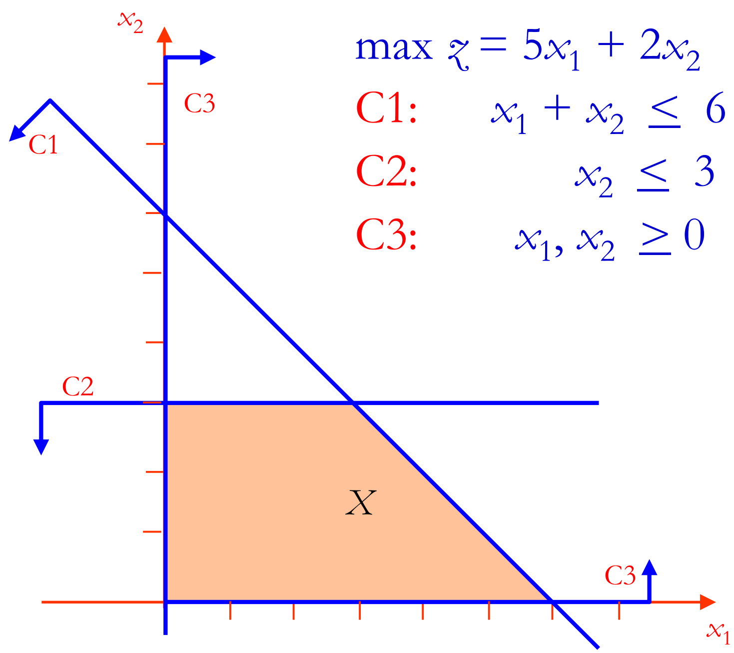
[Esercizio] Qual è la base associata alla soluzione **y** = [25/11, 18/11] ?

Un algoritmo per la PL (… un primo tentativo)

[Algoritmo]

- Poni il problema di PL in forma standard;
- Enumera tutte le basi e valuta tutte le SBA
- Seleziona la SBA con il miglior valore della funzione obiettivo

Un algoritmo per la PL: esempio



$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 \leq 6$
C2: $x_2 \leq 3$
C3: $x_1, x_2 \geq 0$

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 + s_1 = 6$
C2: $x_2 + s_2 = 3$
C3: $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

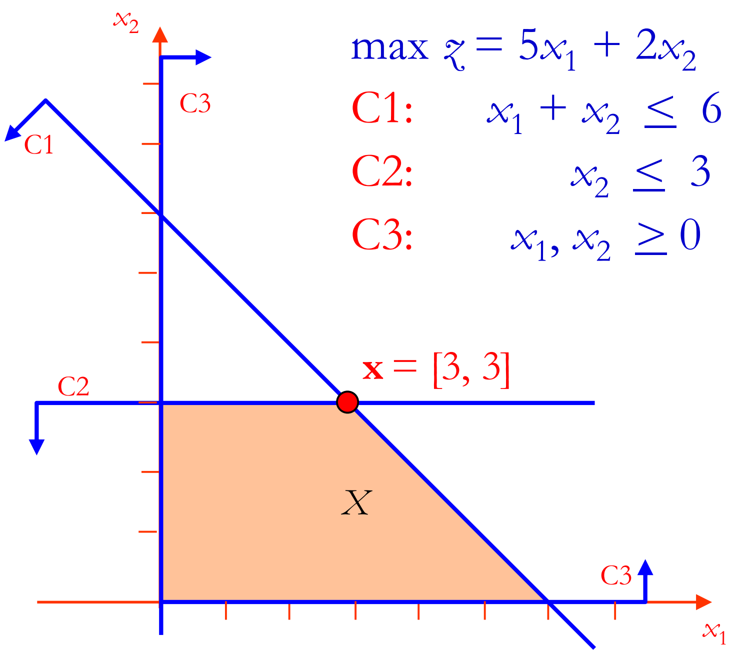
forma standard

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Quante sono le possibili basi?
Sono pari a tutti i modi di scegliere 2 delle 4 colonne della matrice **A**

$$\boxed{\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6}$$

Un algoritmo per la PL: esempio – 1° base



$$\begin{aligned} &\max\ z = 5x_1 + 2x_2 \\ &\text{C1:}\quad x_1 + x_2 \le 6 \\ &\text{C2:}\quad x_2 \le 3 \\ &\text{C3:}\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max\ z = 5x_1 + 2x_2 \\ &\text{C1:}\quad x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ &\text{C2:}\quad x_2 + s_2 = 3 \\ &\text{C3:}\quad x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

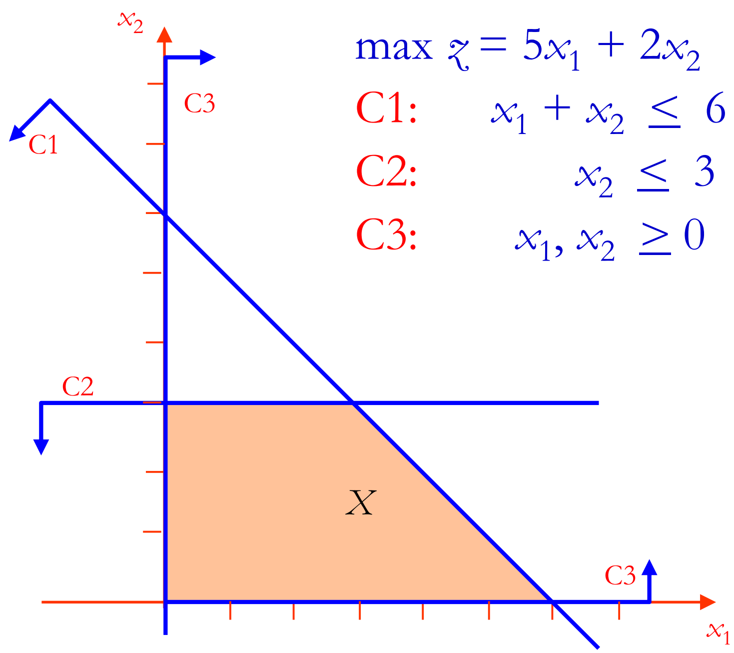
forma standard

$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) =$

x_1	x_2	s_1	s_2	$\mathbf{b}$
1	1	1	0	6
0	1	0	1	3

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + s_1 - s_2 = 3 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 21$

Un algoritmo per la PL: esempio – 2° base



$\max z = 5x_1 + 2x_2$
C1: $x_1 + x_2 \le 6$
C2: $x_2 \le 3$
C3: $x_1, x_2 \ge 0$

$\max z = 5x_1 + 2x_2$
C1: $x_1 + x_2 + s_1 = 6$
C2: $x_2 + s_2 = 3$
C3: $x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$

forma standard

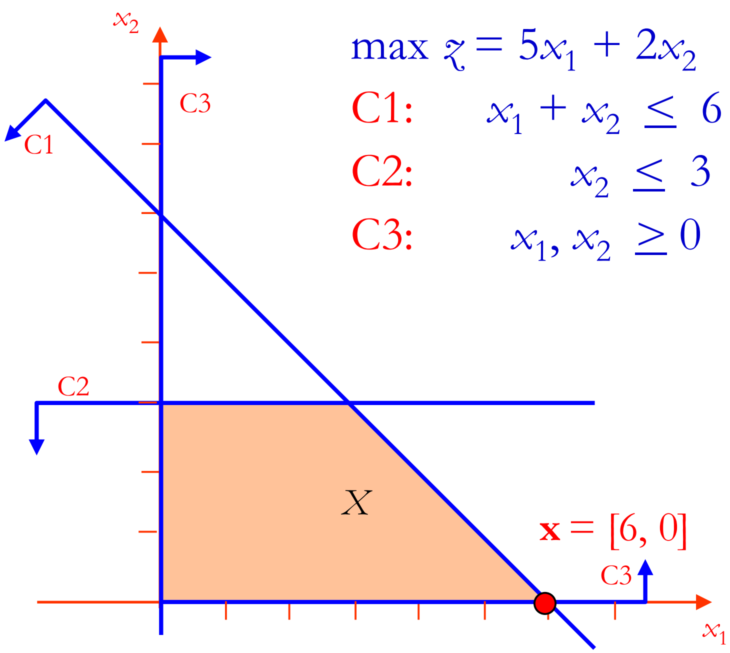
$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.

$$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice è singolare (det($\mathbf{B}$) = 0) quindi **non è** una matrice di base

Un algoritmo per la PL: esempio – 3° base



$\max z = 5x_1 + 2x_2$
C1: $x_1 + x_2 \leq 6$
C2: $x_2 \leq 3$
C3: $x_1, x_2 \geq 0$

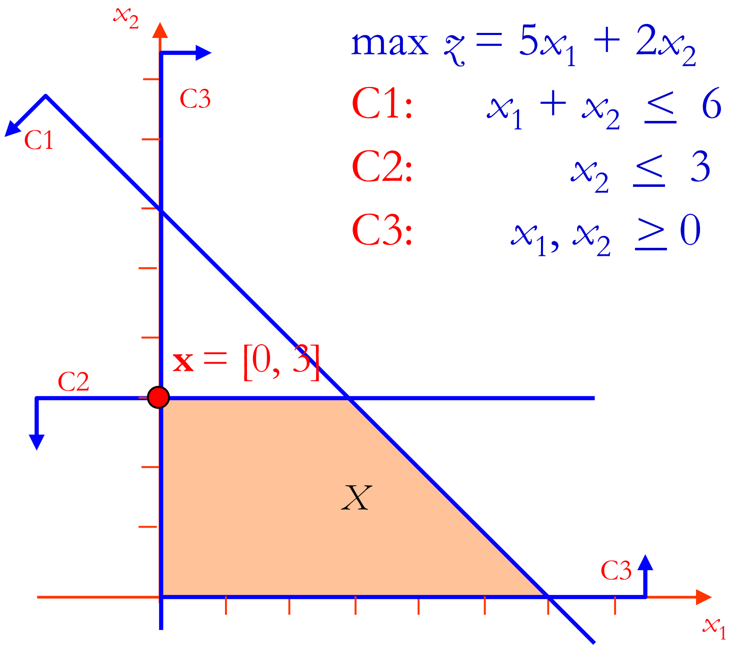
$\max z = 5x_1 + 2x_2$
C1: $x_1 + x_2 + s_1 = 6$
C2: $x_2 + s_2 = 3$
C3: $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

forma standard

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} x_1 & s_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 30$

Un algoritmo per la PL: esempio – 4° base



$$\max\ z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\text{C1:}\quad x_1 + x_2 \le 6$$
$$\text{C2:}\quad x_2 \le 3$$
$$\text{C3:}\quad x_1, x_2 \ge 0$$

$$\max\ z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\text{C1:}\quad x_1 + x_2 + s_1 = 6$$
$$\text{C2:}\quad x_2 + s_2 = 3$$
$$\text{C3:}\quad x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

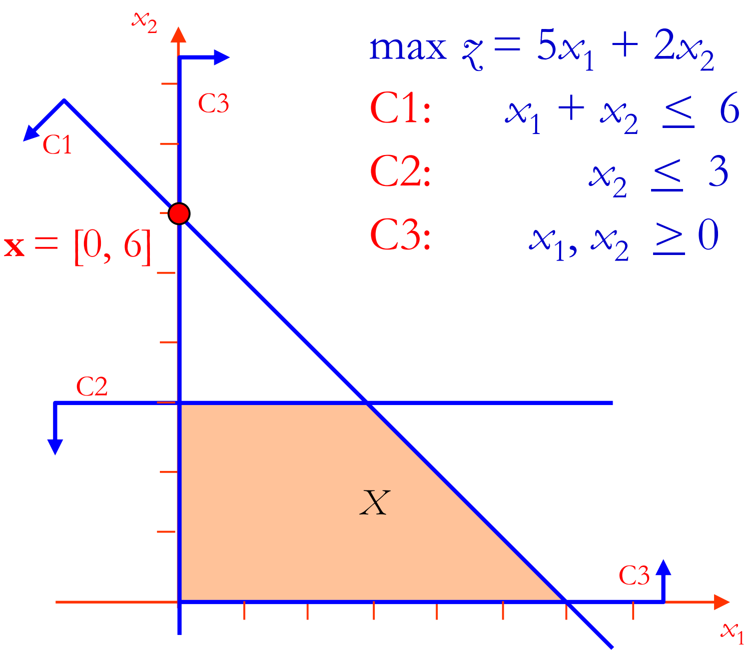
forma standard

$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) =$

x_1	x_2	s_1	s_2	**b**
1	1	1	0	6
0	1	0	1	3

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{cases} x_1 + s_1 - s_2 = 3 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 6$

Un algoritmo per la PL: esempio – 5° base



$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 \le 6$
C2: $x_2 \le 3$
C3: $x_1, x_2 \ge 0$

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 + s_1 = 6$
C2: $x_2 + s_2 = 3$
C3: $x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$

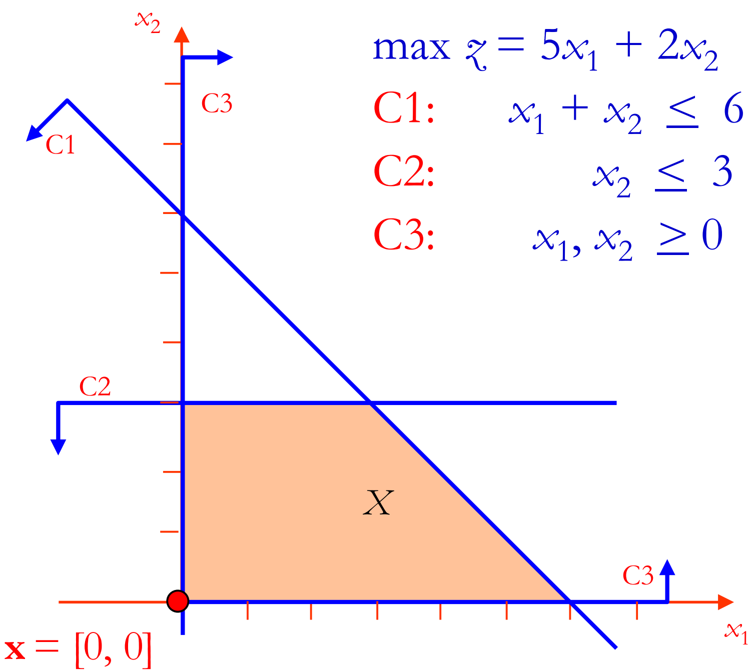
forma standard

$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) =$

x_1	x_2	s_1	s_2	**b**
1	1	1	0	6
0	1	0	1	3

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} x_2 & s_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ -x_1 - s_1 + s_2 = -3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ no SBA	

Un algoritmo per la PL: esempio – 6° base



$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\begin{aligned} \text{C1:}&\quad x_1 + x_2 \leq 6 \\ \text{C2:}&\quad x_2 \leq 3 \\ \text{C3:}&\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\begin{aligned} \text{C1:}&\quad x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ \text{C2:}&\quad x_2 + s_2 = 3 \\ \text{C3:}&\quad x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

forma standard

$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) =$

x_1	x_2	s_1	s_2	$\mathbf{b}$
1	1	1	0	6
0	1	0	1	3

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 0$

Un algoritmo per la PL: riepilogo

Base	Soluzione di base	valore f.o.	
$x_1 \quad x_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$	$z = 21$	
$x_1 \quad s_1$	matrice non di base		
$\boxed{x_1 \quad s_2}$	$\boxed{[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [6 \quad 0 \quad 0 \quad 3]}$	$\boxed{z = 30}$	$\boxed{\text{Soluzione ottima}}$
$x_2 \quad s_1$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 3 \quad 3 \quad 0]$	$z = 6$	
$x_2 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 6 \quad 0 \quad -3]$	no SBA	
$s_1 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 0 \quad 6 \quad 3]$	$z = 0$	

Domande

L'algoritmo enumera basi e valuta SBA.

1. L'algoritmo è corretto? Esiste **sempre** una SBA soluzione ottima del problema?
2. L'algoritmo è completo? Risolve un **qualsiasi** problema di PL?
3. L'algoritmo è finito? Termina in un **numero finito** di passi?
4. L'algoritmo è efficiente? **Quante operazioni** esegue?

Correttezza: la teoria ci aiuta?

Il teorema fondamentale della PL afferma che se esiste una soluzione ottima, esiste un vertice ottimo.

Se il problema è posto in forma standard, il metodo di Gauss-Jordan permette di calcolare analiticamente una soluzione (ammissibile) di base

La correttezza dell'algoritmo dipende dal legame che esiste tra **vertici** e **SBA**

Vertici: caratterizzazione analitica

problema di PL : $P: \max \{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$

poliedro associato: $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathrm{R}^n$

Sia $\mathbf{v}$ una soluzione ammissibile di P e $\mathbf{E}$ la sottomatrice di $\mathbf{A}$ dei vincoli che in $\mathbf{v}$ sono attivi (compresi gli eventuali vincoli di <u>non negatività</u>).

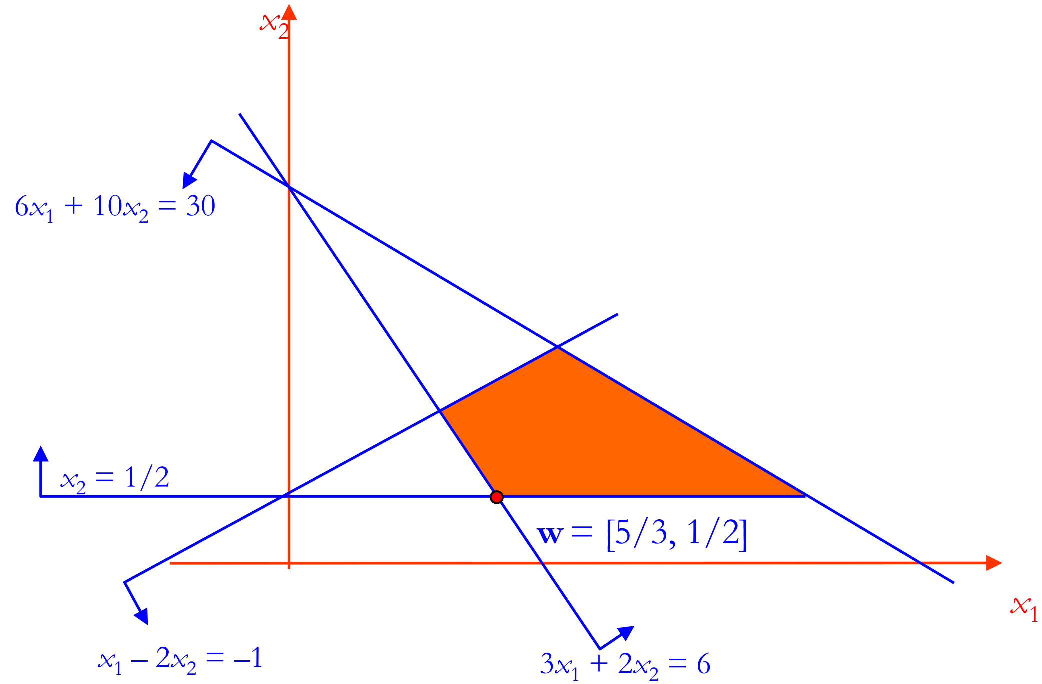
> **[Teorema]** di caratterizzazione analitica dei vertici
>
> Il punto $\mathbf{v}$ è un vertice di $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ <u>se e solo</u> se $\mathrm{rank}(\mathbf{E}) = n$.

[Corollari]

- Un vertice $\mathbf{v}$ di P è <u>soluzione unica</u> del sistema $\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{b}_E$
- Un poliedro in R^n definito da una matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ con $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < n$ <u>non possiede vertici.</u>

Vertici: esempio

$$\max z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\ x_2 &\geq 1/2 \end{aligned}$$



$\mathbf{w} = [5/3, 1/2]$ è una soluzione ammissibile che rende attivi il 2° e 4° vincolo.

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} < \\ = \\ > \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

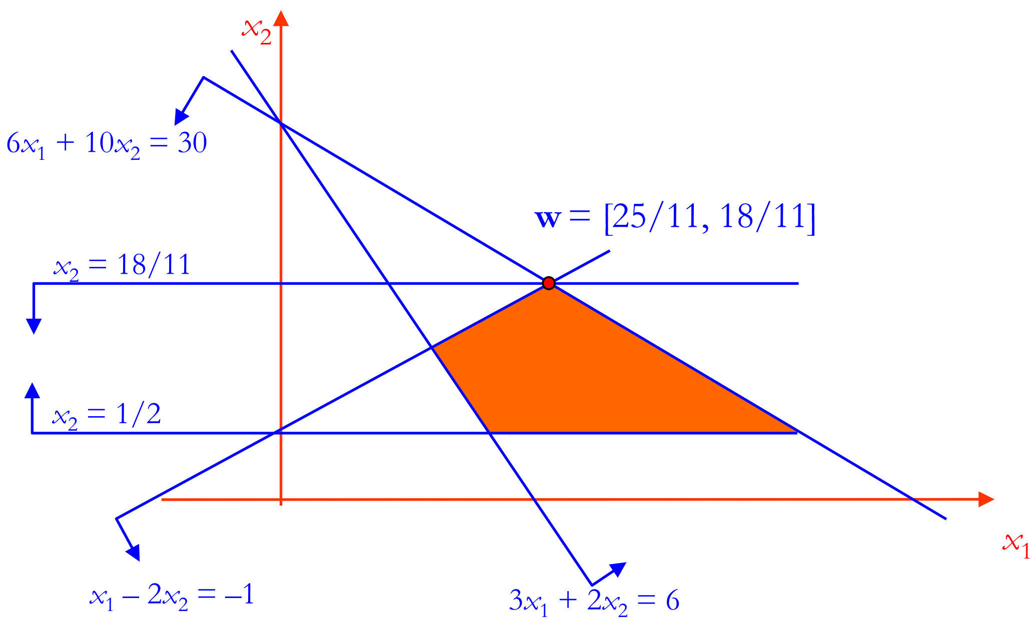
La matrice $\mathbf{E}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(\mathbf{E}) = 2$ quindi $\mathbf{w}$ è un vertice

Vertici: osservazioni

- rank(**E**) = n significa che **E** ha almeno n righe, ma può averne anche di più. Il teorema quindi dice che un vertice soddisfa all'uguaglianza almeno n vincoli.
- In R^2 un punto di un poliedro è un vertice se e solo se è l'intersezione di *almeno* 2 rette.



$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\ x_2 &\geq 1/2 \\ x_2 &\leq 18/11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 \\ 6 \cdot 25/11 + 10 \cdot 18/11 &= 30 \\ 3 \cdot 25/11 + 2 \cdot 18/11 &> 6 \\ 25/11 - 2 \cdot 18/11 &= -1 \\ 18/11 &> 1/2 \\ 18/11 &= 18/11 \end{aligned}$$

Vertici e SBA

problema di PL : P: max $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$

poliedro associato: $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathrm{R}^n$

Supponiamo che m vincoli siano di uguaglianza e n di non negatività (cioè che il problema sia in forma standard)

$$P: \max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}' \qquad \mathbf{A}'\ (m \times n)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{I}\ (n \times n)$$

Vertici e SBA

Sia $\mathbf{B}$ $(m \times m)$ una base ammissibile e $\mathbf{p} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la SBA corrispondente.

P: $\max \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

$\mathbf{A}'\mathbf{p} = \mathbf{b}'$ — m vincoli di uguaglianza $+$

$\mathbf{p}_{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ — $n - m$ vincoli di uguaglianza $+$

$\mathbf{p}_{\mathbf{B}} \geq \mathbf{0}$ — $k < m$ vincoli di uguaglianza

---

$n + k$ vincoli di uguaglianza

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{matrix} (m \times n) \\ (n - m + k \times n) \end{matrix}$$

- $\mathbf{p}$ è una soluzione ammissibile
- la sottomatrice $\mathbf{E}$ dei vincoli soddisfatti da $\mathbf{p}$ all'uguaglianza ha almeno n righe ed è di rango pieno.

per il teorema di caratterizzazione dei vertici $\mathbf{p}$ è un vertice

Vertici e SBA: esempio

$$
\begin{aligned}
\max z = 5x_1 + 2x_2 & \\
x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad & = 6 \\
x_2 \quad\quad + x_4 & = 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \quad\quad & \geq 0
\end{aligned}
$$

$\mathbf{B(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è la base associata alle variabili x_1 e x_2

$\mathbf{p} = [3, 3, 0, 0]$ è la SBA corrispondente.

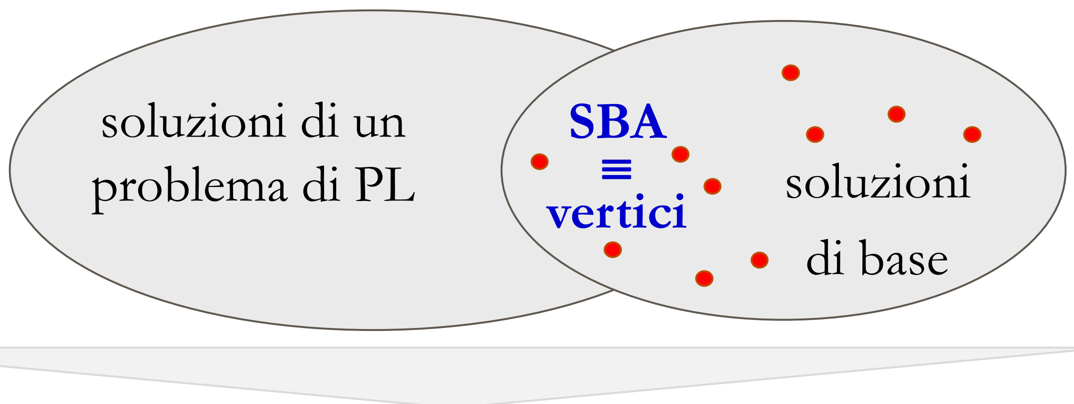
$$
\begin{aligned}
\max z = 5x_1 + 2x_2 & \\
3 + 3 + 0 + 0 & = 6 \\
3 + 0 + 0 & = 3 \\
3 \quad\quad\quad & > 0 \\
3 \quad\quad & > 0 \\
0 \quad & = 0 \\
0 & = 0
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\mathbf{E}) = 4$$

$\mathbf{p}$ è un vertice

Vertici e SBA

[Teorema] Un vettore **v** è una SBA di un problema P di PL **se e solo se** è un vertice del poliedro associato $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.



Enumerare le SBA di P equivale a enumerare i vertici del poliedro $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Nonostante le variabili siano continue, un problema di PL ha una struttura discreta: se esiste, si può ottenere una soluzione ottima generando esplicitamente tutte le SBA

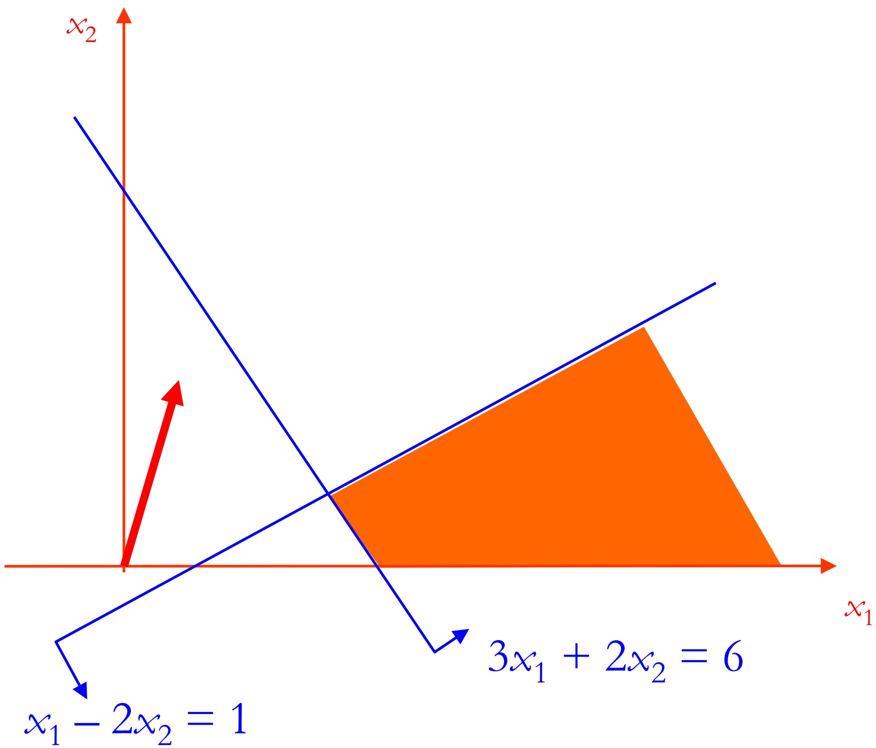
Domande

L'algoritmo enumera basi e valuta SBA.

[Esercizio]

2. L'algoritmo è completo? Risolve un **qualsiasi** problema di PL?

L'algoritmo è completo?



$$\max z = x_1 + 3x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1 - 2x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il problema è evidentemente illimitato superiormente

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 3 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

forma standard

L'algoritmo è completo?

Base	Soluzione di base	valore f.o.	
$x_1 \quad x_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [7/4 \quad 3/8 \quad 0 \quad 0]$	$z = 23/8$	Soluzione ottima
$x_1 \quad s_1$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [1 \quad 0 \quad -3 \quad 0]$	no SBA	
$x_1 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$	$z = 2$	
$x_2 \quad s_1$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad -1/2 \quad -7 \quad 0]$	no SBA	
$x_2 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 3 \quad 0 \quad -7]$	no SBA	
$s_1 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 0 \quad -6 \quad -1]$	no SBA	

ERRORE

Domande

L'algoritmo enumera basi e valuta SBA.

3. L'algoritmo è finito, cioè termina in un **numero finito** di passi? E qual è la sua efficienza? In particolare **quante operazioni** esegue?

Un algoritmo per la PL: finitezza

Il numero di basi (e di SBA) è **al più** pari ai possibili modi di scegliere m tra le n colonne della matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ – le *combinazioni semplici*. Questa quantità è data dal *coefficiente binomiale*

$$\boxed{C_{(n,m)} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

$C_{(n,m)}$ è un **numero finito** che rappresenta una **limitazione superiore** al numero di SBA (in generale non tutte le sottomatrici $m \times m$ sono matrici di base e non tutte le matrici di base sono ammissibili).

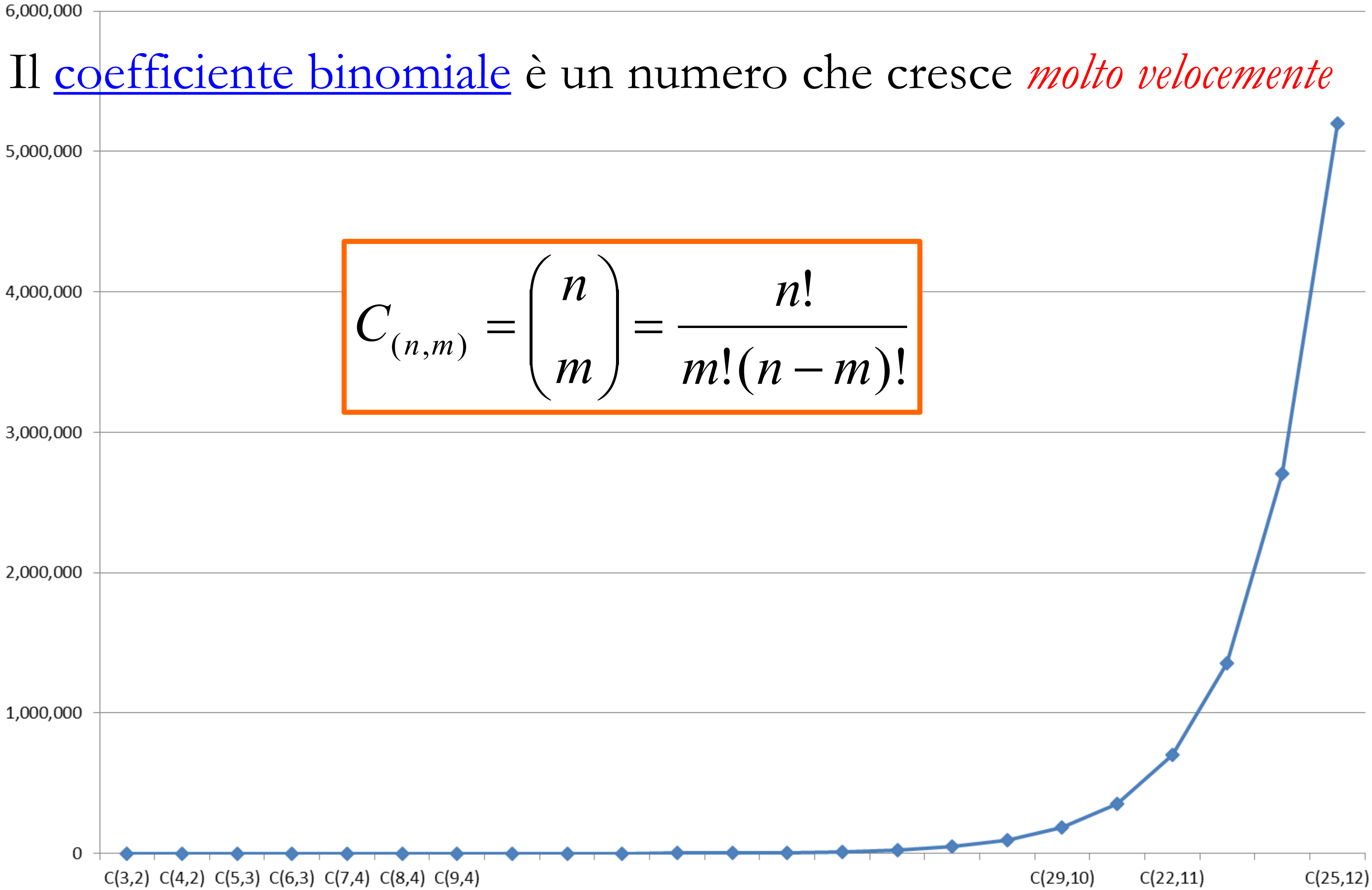
In ogni caso si può affermare che l'**algoritmo è finito**. Inoltre

[Teorema] Ogni poliedro ha un numero finito di vertici.

Un algoritmo per la PL: efficienza

Il coefficiente binomiale è un numero che cresce *molto velocemente*

$$C_{(n,m)} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



Testi di approfondimento

1. A. Sassano
   Modelli e Algoritmi della Ricerca Operativa
   Franco Angeli, Milano, 1999

2. M. Fischetti
   Lezioni di Ricerca Operativa
   Edizioni Libreria Progetto Padova, 1999

3. D. Bertsimas and J.N. Tsitsiklis
   Introduction to Linear Optimization
   Athena Scientific, Belmont, Massachusetts

4. Nemhauser G.L. and L. A. Wolsey
   Integer and Combinatorial Optimization
   John Wiley & Sons, Inc, New York, 1988.

Appendice:

Spazi affini

Vettori *affinemente* dipendenti

- Una combinazione affine è una <u>particolare</u> combinazione lineare.

- **[Definizione]** I vettori $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m \in R^n$ si dicono *affinemente dipendenti* se e solo se esistono m numeri reali $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$ tali che:

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{x}_m = 0$$

I vettori $\mathbf{a}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2)$ sono affinemente dipendenti in quanto

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \qquad \text{e} \qquad 2\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = 0$$

- Ogni insieme S contenente il vettore $\mathbf{0}$ è affinemente **dipendente**.

- Ogni insieme S costituito da un solo elemento diverso da $\mathbf{0}$ è affinemente **indipendente**.

Dipendenza affine e lineare

- La dip. affine implica la dip. lineare (ma non viceversa)

o equivalentemente

- L'indip. lineare implica l'indip. affine (ma non viceversa)

dipendenza affine $\Rightarrow$ dipendenza lineare

$\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ sono anche coeff. di una combinazione lineare

indipendenza lineare $\Rightarrow$ indipendenza affine

$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ non sono i coeff. di una combinazione affine

I vettori $\mathbf{a}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0)$ sono linearmente indipendenti e quindi affinemente indipendenti.

Dipendenza affine e lineare

- La dip. affine implica la dip. lineare (ma non viceversa)

o equivalentemente

- L'indip. lineare implica l'indip. affine (ma non viceversa)

dipendenza lineare $\not\Rightarrow$ dipendenza affine

indipendenza affine $\not\Rightarrow$ indipendenza lineare

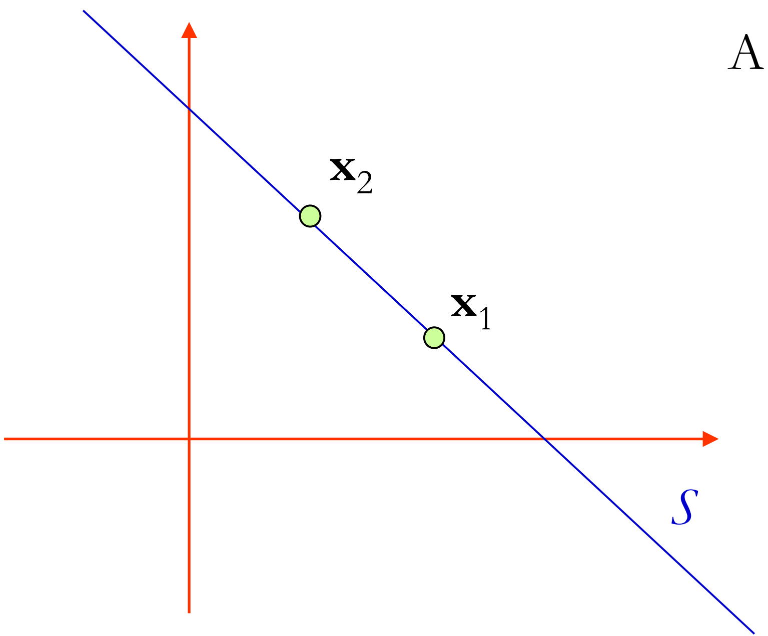
I vettori $\mathbf{a}_1 = (3/2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2)$ e $\mathbf{a}_3 = (2, 2)$ sono palesemente linearmente dipendenti ($\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$) ma *affinemente indipendenti*:

$$\begin{cases} 3/2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

è palesemente incompatibile

Spazio *affine*

[Definizione] l'insieme $S \subseteq R^n$ è uno spazio affine se ogni combinazione affine di suoi elementi è un elemento di S.

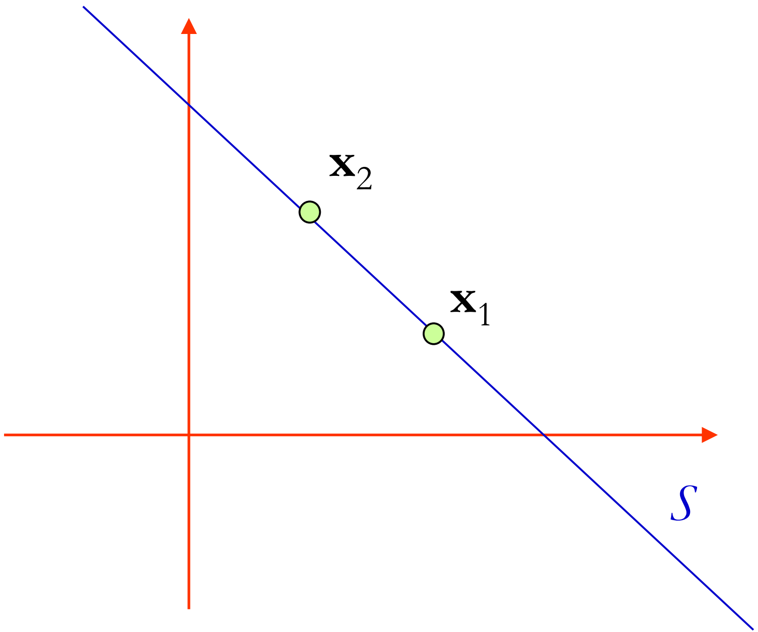


A differenza delle combinazioni lineari, non è sempre possibile ottenere il vettore nullo mediante combinazione affine dato che $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$.

Il vettore **0** può **non** far parte di un sottospazio affine

Spazio *affine*

[Definizione] l'insieme $S \subseteq R^n$ è uno spazio affine se ogni combinazione affine di suoi elementi è un elemento di S.



una retta **non** passante per l'origine è un sottospazio affine di R^2

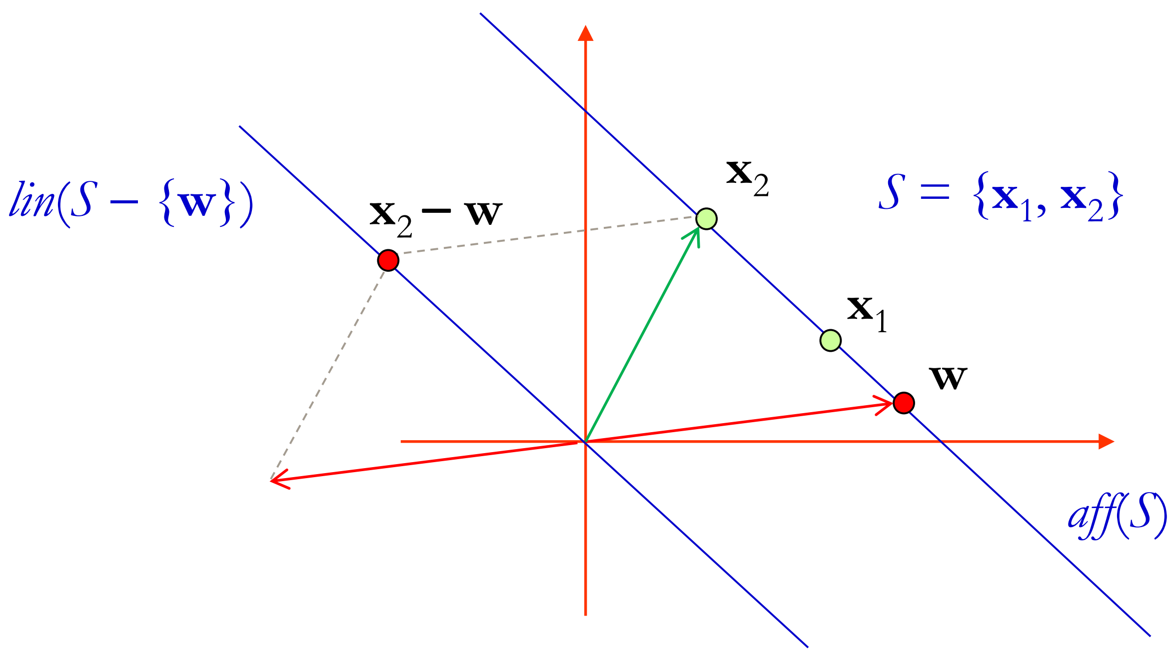
Uno spazio affine non vuoto è la *traslazione* di uno spazio lineare.

Spazio *affine*

- Sia $S \subseteq \mathrm{R}^n$ uno spazio affine non vuoto. Per ogni $\mathbf{w} \in S$, l'insieme

$$\boxed{S' = S - \{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{x} - \mathbf{w} : \mathbf{x} \in S\}}$$

è uno spazio lineare.



Esercizi

- Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema di m equazioni omogenee in n incognite $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ è uno spazio lineare di dimensione $n - \text{rank}(\mathbf{A})$.

- Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema di m equazioni in n incognite $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è uno spazio affine di dimensione $n - \text{rank}(\mathbf{A})$.

Insiemi e involucri

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- S è uno spazio affine se e solo se coincide con $aff(S)$
- S è un cono convesso se e solo se coincide con $cone(S)$
- S è un insieme convesso se e solo se coincide con $conv(S)$