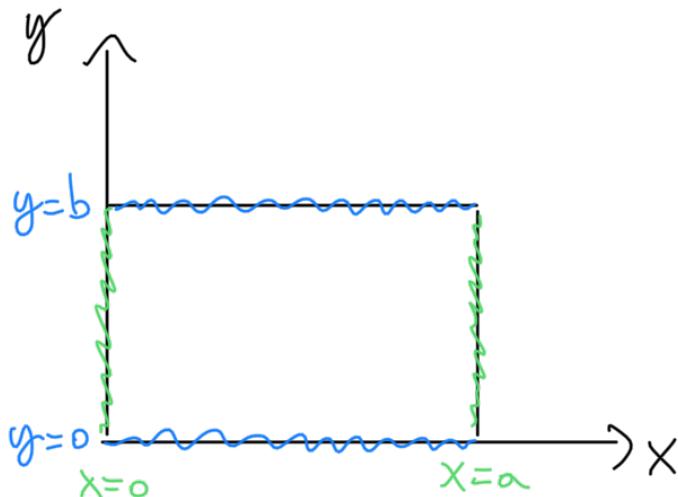


- La propagazione non può avvenire a qualsiasi freq., ma soltanto da una certa f_c in poi

$\rightarrow f < f_c \Rightarrow$ non esiste una soluzione propagativa di tipo $e^{-j\beta z}$, $\beta \in \mathbb{R}$
 $\rightarrow f > f_c \Rightarrow$ esistono tante soluzioni, ciascuna con una propria f_c , ovvero una freq. minima oltre la quale può propagarsi



$$\begin{cases} \bar{E}(x, y, z) = \bar{e}(x, y) e^{-j\beta z} \\ \bar{H}(x, y, z) = \bar{h}(x, y) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

$$\nabla \times \hat{E} = -j\omega \mu_0 \hat{H}$$

$$\nabla \times \hat{H} = j\omega \epsilon_0 \hat{E}$$

$$\nabla \times \hat{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x e^{-j\beta z} & E_y e^{-j\beta z} & E_z e^{-j\beta z} \end{vmatrix} = -j\omega \mu_0 \hat{H}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y E_z e^{-j\beta z} - \partial_z E_y e^{-j\beta z} = -j\omega \mu_0 H_x \\ -(\partial_x E_z e^{-j\beta z} - \partial_z E_x e^{-j\beta z}) = -j\omega \mu_0 H_y \\ \partial_x E_y e^{-j\beta z} - \partial_y E_x e^{-j\beta z} = -j\omega \mu_0 H_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_y E_z e^{-j\beta z} = -j\beta E_y e^{-j\beta z} - j\omega \mu_0 H_x \\ \partial_x E_z e^{-j\beta z} = -j\beta E_x e^{-j\beta z} + j\omega \mu_0 H_y \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \omega \epsilon_0 \vec{E} \rightarrow \dots$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \partial_y E_z = -\omega \beta E_y - \omega \mu_0 H_x \\ \partial_x E_z = -\omega \beta E_x + \omega \mu_0 H_y \end{array} \right. & \textcircled{3} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \partial_y H_z = -\omega \beta H_y + \omega \epsilon_0 E_x \\ \partial_x H_z = -\omega \beta H_x - \omega \epsilon_0 E_y \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Componenti trasversali in funzione di quelle longitudinali :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \partial_y E_z = -\omega \beta E_y - \omega \mu_0 H_x \\ \textcircled{4} \quad \partial_x H_z = -\omega \beta H_x - \omega \epsilon_0 E_y \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} H_x = (\partial_y E_z + \omega \beta E_y) / -\omega \mu_0 \\ \partial_x H_z = \cancel{-\omega \beta} \frac{(\partial_y E_z + \omega \beta E_y)}{\cancel{-\omega \mu_0}} - \omega \epsilon_0 E_y \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} " \\ \partial_x H_z - \beta \partial_y E_z = \omega^2 E_y - \omega \epsilon_0 E_y = \\ = \omega E_y (\omega^2 - \omega \epsilon_0) \\ ; \text{ un macello} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Condizioni al contorno :

$$\left. \begin{array}{l} E_z = 0 \\ \partial_n H_z = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \begin{array}{l} x = 0, x = a \quad \forall y \\ y = 0, y = b \quad \forall x \end{array} \Rightarrow \text{variabili separabili}$$

SOLUZIONI

- TE : $E_z = 0, H_z \neq 0$
- TM : $E_z \neq 0, H_z = 0$

- Devono soddisfare l'eq. d'onda:

$$\nabla^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

$$\nabla^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

CASO TE

$$\nabla^2 H_z = \partial_x^2 H_z + \partial_y^2 H_z + \cancel{\partial_z^2 H_z}$$



$$\partial_x^2 H_z + \partial_y^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

$$H_z = h_z(x, y) e^{-j\beta z} \Rightarrow (\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2) h_z = 0$$

Essendo la soluzione a variabili separabili:

$$\partial_n h_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_x h_z = 0 & \text{per } x=0, x=a \quad (\forall x) \\ \partial_y h_z = 0 & \text{per } y=0, y=b \quad (\forall y) \end{cases}$$

Quindi:
$$h_z = X(x) Y(y)$$

$$\frac{Y}{XY} \partial_x^2 X + \frac{X}{XY} \partial_y^2 Y + \frac{k_c^2 X Y}{XY} = 0$$

$$\frac{1}{X} \partial_x^2 X + \frac{1}{Y} \partial_y^2 Y + k_c^2 = 0$$

deve essere costante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \partial_x^2 X = k_x^2 \\ \frac{1}{y} \partial_y^2 Y = k_y^2 \end{array} \right. , \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \\ Y(y) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y) \end{array} \right.$$

applicando le cond. al contorno:

$$\partial_x X \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0 \quad \partial_y Y \Big|_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = C = 0$$

$$\boxed{k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b}}$$

↓

$$h(z) = A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$k_c^2 = k_o^2 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = k_o^2 - k_c^2$$

$$\beta^2 > 0 \Leftrightarrow k_o^2 > k_c^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad n \neq m \text{ non nulli}$$

• Tipi di modi

- si distinguono in:

→ in propagazione (sopra taglio)

↪ evanescenti (sotto taglio)

- modi nella rapp. del campo e.m. \Leftrightarrow funz. esponenz. nella serie di Fourier
 (i modi costituiscono una base ortogonale completa che consente di rappresentare qualsiasi campo e.m. all'interno di una guida di sezione arbitraria)
- i modi evanescenti sono importanti per rappresentare il campo nelle vicinanze di una discontinuità
 (influiscono sul campo locale)

- **[Modo fondamentale]**: modo con f_c minore

$$\rightarrow \boxed{TE_{10}}: k_c = \frac{\pi}{a}, f_{c_{TE_{10}}} \approx \frac{150 \text{ (GHz} \cdot \text{mm)}}{a \text{ (mm)}}$$

$$\rightarrow \beta_{10} = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

unico modo in propagazione all'interno della banda di manegabilità

- campo e.m.: (E_y, H_x, H_z)

$$\bar{E}(x, y, z) = V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \hat{y}$$

$$\bar{H}(x, y, z) = \frac{1}{-\jmath \omega \mu_0} \nabla \times \bar{E}$$

$$\rightarrow H_x = \frac{-\beta}{\omega \mu_0} V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} = \frac{1}{Z_{10}}$$

$$\rightarrow H_z = \frac{\pi/a}{-\jmath \omega \mu_0} V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

E_y, H_x in fase ↑

- densità di potenza attiva trasportata

$$\bar{S} = \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^* = -E_y H_x^* \hat{z} + E_y H_z^* \hat{x} =$$

$$= \frac{|V^+|^2}{w\mu_0/\beta} \left(\frac{2}{ab} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) \hat{z} - \underbrace{\Im \left(\frac{\pi/a}{w\mu_0} \right) |V^+|^2 \left(\frac{2}{ab} \right) \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{\pi}{a} x \right) \hat{x}}$$

$\hookrightarrow Z_{10} = \frac{w\mu_0}{\beta}$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* ds \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^a dx \int_0^b \frac{|V^+|^2}{Z_{10}} \left(\frac{2}{ab} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) dy \right] =$$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V^+|^2}{Z_{10}}}$$

$$\left[\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2 - |V^-|^2}{Z_{10}} = \bar{P}^+ - \bar{P}^- \right]$$

- modo sotto taglio

$$\beta_{10} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}$$

$$k_0 < \frac{\pi}{a} \Rightarrow \boxed{\beta = -j\alpha \in \mathbb{C}}$$

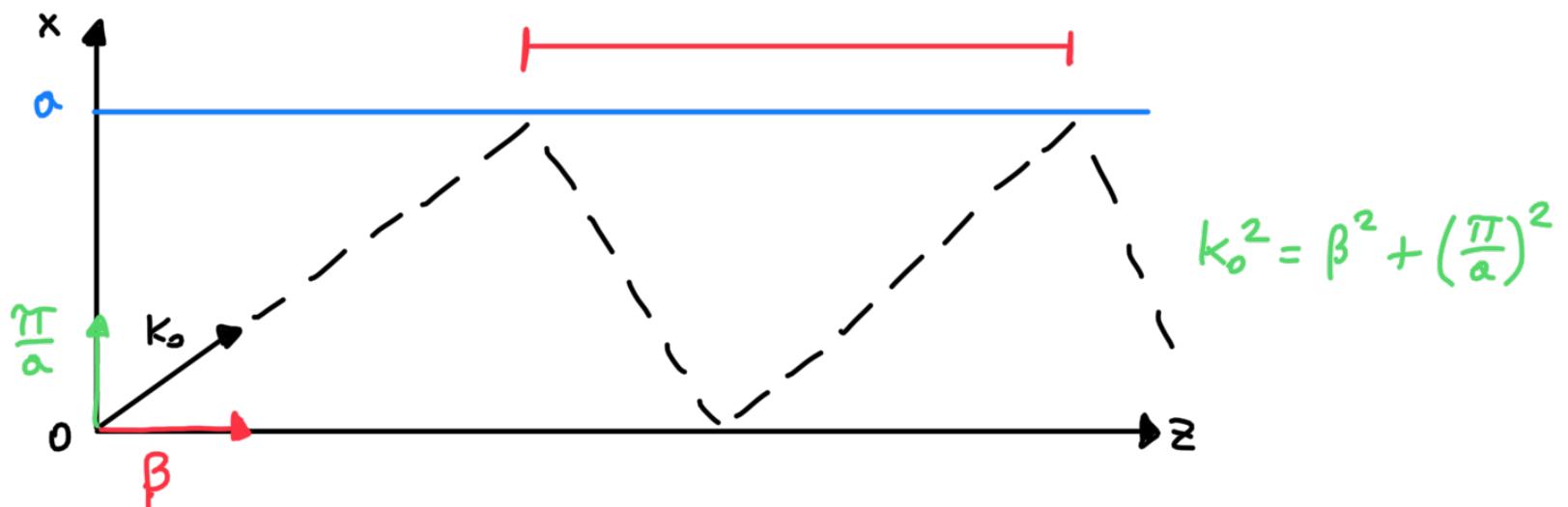
$$\rightarrow E_y = V^+ \left(\frac{2}{ab} \right) \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-\alpha z}$$

$$\rightarrow \bar{S} = \underbrace{-j w \mu_0}_{\alpha} |V^+|^2 \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-2\alpha z}$$

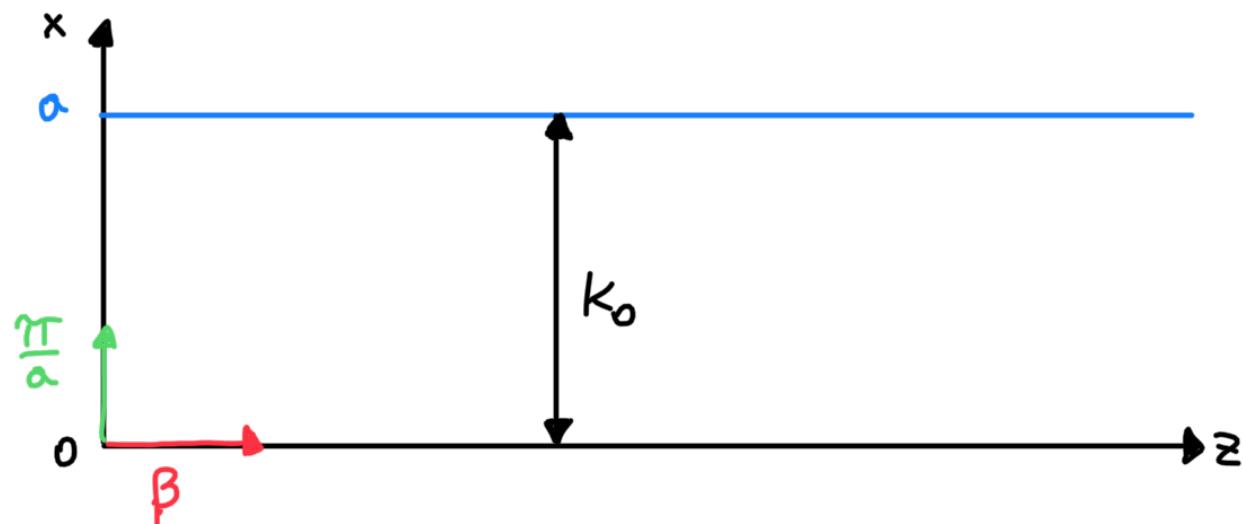
$\bar{P}^+ = \operatorname{Re} [\bar{S}] = 0 \Rightarrow$ se il modo fond. è sotto taglio, l'onda non trasporta potenza media attiva

- Graficamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 > \frac{\pi}{a} \\ k_0 \downarrow \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{maggior numero di rimbalzi} = \underline{\text{perdite}} \\ (\text{energia ceduta al conduttore al contatto}) \end{array}$$



- $\beta = 0 \Rightarrow k_0 = \frac{\pi}{a}$: l'onda rimbalza tra le pareti strette del conduttore



- Banda di mono-modalità

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 2b \Rightarrow f_{c_{TE_{10}}} < f < f_{c_{TE_{20}}} \rightarrow k_{c_{20}} = \frac{2\pi}{a} \\ a < 2b \Rightarrow f_{c_{TE_{10}}} < f < f_{c_{TE_{01}}} \rightarrow k_{c_{01}} = \frac{\pi}{b} \end{array} \right.$$

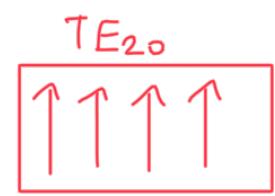
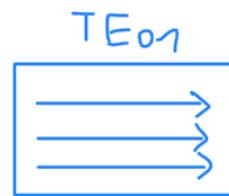
MODI DEGENERI

(stesso β ma caratteristiche diverse)

- differenze $TE_{20} - TE_{01}$ (HP; $a=2b$)

$$\rightarrow \beta_{20} = \beta_{01}$$

\rightarrow campo E ortogonale tra loro



- la condizione di monomodalità garantisce che il campo e.m. non cambia in ciascuna sezione della guida.

- MODI TM

$$H_z = 0 \Rightarrow \nabla^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

$$\begin{cases} B = D = 0 \\ K_x = \frac{n\pi r}{a}, \quad K_y = \frac{m\pi r}{b} \end{cases} \Rightarrow E_z(x, y) = B_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$k_o^2 - \beta^2 = k_e^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \rightarrow n, m \text{ non nulli}$$

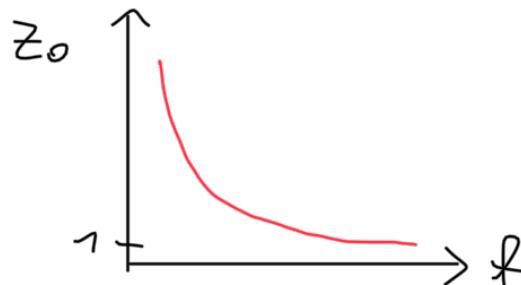
$TM_{11} \rightarrow$ modo di ordine più basso

$$\beta_{TM_{11}} = \sqrt{k_o^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

- Grandezze notevoli

- IMPEDENZA D'ONDA

$$Z_0 = \frac{\omega \mu_0}{\beta}$$



- LUNGHEZZA D'ONDA

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} > \frac{2\pi}{k_0} = \lambda_0 \text{ (in aria)}$$

$$\left[\beta^2 = k_0^2 - k_c^2 \Rightarrow \beta < k_0 \Rightarrow \frac{1}{\beta} > \frac{1}{k_0} \right]$$

- VELOCITÀ DI FASE

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \geq \frac{\omega}{k_0} = c \quad (\text{non rappresenta la velocità con cui si muove l'energia})$$

→ CASO TEM:

• $\beta = k_0 = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{c}$ (c proporzionale ad ω)

• $v_f = \frac{\omega}{\beta} = c \Rightarrow$ COSTANTE

→ CASO WR (onde rettangolari)

• $\beta = \sqrt{k_0^2 - k_c^2}$ (perdita di proporzionalità)

• $v_f = \frac{\omega}{\beta} \Rightarrow$ NON COSTANTE (le componenti spettrali di segnali a banda limitata si propagano con v_f diverse)



$$v_f = \frac{\omega}{\beta(\omega)}, \quad \beta(\omega) = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

- VELOCITÀ DI GRUPPO

- a quale velocità si propaga un segnale non sinusoidale / a energia finita / non periodico?
- consideriamo una portante sinusoidale w_0 modulata in ampiezza dal segnale $s(t)$ con banda $B \ll w_0$

$$\beta(w) = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2} \approx \beta(w_0) + \beta'(w_0)(w - w_0)$$

↑

troncamento I° ordine espansione serie di potenze

- in $z=0$:

$$s(t) = S(t, z=0) \cdot e^{jw_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \tilde{S}(w) e^{jwt} e^{jw_0 t} dw$$

- segnale in una sezione z :

$$s(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \tilde{S}(w) e^{jwt} e^{jw_0 t} \boxed{-j\beta(w)z} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \tilde{S}(w) e^{jwt} e^{jw_0 t} -j[\beta(w_0) + \beta'(w_0)(w - w_0)]z dw =$$

$$= \boxed{e^{jw_0 t} e^{-j[\beta(w_0) - \beta'(w_0)w_0]z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \tilde{S}(w) e^{jw[t - \beta'(w_0)z]} dw =$$

traslazione
(ritardo nel tempo)

$$= \boxed{\text{ampiezza unitaria}} \quad S(t - \beta'(w_0)z)$$

- tralasciando il fattore moltiplicativo, $s(t, z)$ è la replica di $s(t, 0)$ ritardata di un tempo $\frac{z}{v_g}$, dove:

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_0}$$

→ velocità di gruppo
(velocità a cui si propaga l'energia)

- quindi, nell'ipotesi di banda stretta, il pacchetto d'onda si propaga senza subire distorsioni alla velocità di gruppo.

$$v_g \cdot v_\phi = c^2 \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\phi} \Rightarrow v_g < c$$

• Analisi trasporto potenza

- In generale: $\bar{P}_{nm} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint_S \bar{E}_{nm} \times \bar{H}_{nm}^* d\bar{s} \right]$

- affinché vi sia trasporto di potenza attiva:

$$Z_{nm} = \frac{\omega \mu_0}{\beta_{nm}} \in \mathbb{R} \iff \beta_{nm} \in \mathbb{R} \iff \beta_{nm} > 0$$

- D'altra parte, se il modo \bar{E}_{nm} è sotto taglio ($\beta_{nm}^2 < 0$):

$$\beta_{nm} = -j\alpha_{nm} \Rightarrow Z_{nm} = j \frac{\omega \mu_0}{\alpha_{nm}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{IMMAGINARIA} \\ (\text{trasp. pot. attiva nulla}) \end{array}$$

(*)

(*) È presente un termine evanescente $e^{-\alpha_{nm} z}$ per $z > 0$

- trasporto di potenza di due modi diversi

Es: $T E_{10}, T E_{20}$ in propagazione

$$\bar{P} = \bar{P}_{TE_{10}} + \bar{P}_{TE_{20}} = \frac{1}{2} \frac{|V_{10}^+|^2}{Z_{10}} + \frac{1}{2} \frac{|V_{20}^+|^2}{Z_{20}}$$

- la potenza può mescolarsi?

$$\begin{aligned} \bar{P}_{TE_{10,20}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint_S \bar{E}_{10} \times \bar{H}_{20}^* d\bar{s} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^a dx \int_0^b V_{10}^+ \frac{V_{20}^+ *}{Z_{20}^*} e^{-j\beta_{10} z} e^{-j\beta_{20} z} \left(\frac{2}{ab} \right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dy \right] \\ &\quad \text{PARI} * \text{DISPARI} \\ &\quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)} \boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)} \\ &\quad || \\ &\quad \text{DISPARI} \\ &\quad + \\ &\quad [0, a] = \text{un periodo} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{integrale nullo} \end{aligned}$$

- quindi nell'ipotesi di guida imperturbata (no strizzature, nih) e modi sopra taglio, i modi TE_{10}, TE_{20} trasportano ciascuno la propria potenza senza mischiarsi.

- i modi sono disaccoppiati fra loro

→ non scambiano potenza

→ si possono vedere come due linee di trasm. di lunghezza l



- N.B: le famiglie di modi TE e TM sono tra loro ortogonali (avranno valgono le proprietà appena viste) per ogni tipo di guida.

• Confronto guide caossiali - rettangolari

- vantaggi guide rettangolari:

- minori perdite
- maggiore potenza trasportabile

- vantaggi guide caossiali:

↳ banda più larga

$$\rightarrow \underline{\text{COAX}}: 0 \leq k_o \leq \frac{2}{R_i + R_e}$$

$$\rightarrow \underline{\text{RECT}}: \frac{\pi}{a} \leq k_o \leq \frac{2\pi}{a}$$

• CASO C.C.

$$E_y = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) [V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z}]$$

$\phi(x)$

$$E_t(x, y, z) = 0 \Rightarrow V^- = -V^+$$

$$E_y = \phi(x) V^+ \underbrace{[e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}]}_{\sin(\beta z)} = -2j\phi(x) V^+ \sin(\beta z)$$

$$\sin(\beta z) = \frac{e^{+j\beta z} - e^{-j\beta z}}{2j}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{-j\omega \mu_0} (-\partial_z E_y \hat{x} + \partial_x E_y \hat{z})$$

$$H_x = \frac{-2j\beta}{j\omega \mu_0} \phi(x) V^+ \cos(\beta z) = \frac{V^+}{Z_{0TE10}} (2\beta) \phi(x) \cos(\beta z)$$

$\rightarrow R$
 \rightarrow in quadratura di fase con E_y
 \rightarrow in fase con H_z

$$\phi'(x) = \left[\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right]' = \sqrt{\frac{2}{ab}} \left(\frac{\pi}{a} \right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_z = \frac{-2j}{j\omega \mu_0} V^+ \sin(\beta z) \left[\sqrt{\frac{2}{ab}} \left(\frac{\pi}{a} \right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] =$$

$$= \frac{2\pi/a}{\omega \mu_0} \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) V^+ \sin(\beta z) \rightarrow \text{come } H_x$$

- H_z, H_x sempre in fase tra loro \rightarrow non può esserci il caso di polarizzazione circolare

- Densità di potenza trasportata:

$$\bar{S} = -E_y H_x^* \hat{z} + E_y H_z^* \hat{x}$$

$$E_y = -2\Im \phi(x) V^+ \sin(\beta z)$$

$$H_x = \frac{V^+}{Z_{0_{TE_{10}}}} (2\beta) \phi(x) \cos(\beta z)$$

$$H_z = \frac{2\pi/a}{\omega, \mu_0} \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) V^+ \sin(\beta z)$$

$$S_z = 4\Im \beta \phi(x)^2 \frac{|V^+|^2}{Z_{0_{TE_{10}}}} \sin(\beta z) \cos(\beta z) \rightarrow \operatorname{Re}[S_z] = 0$$

$$S_x = -4\Im \frac{\pi}{a} \phi(x) \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) |V^+|^2 \sin^2(\beta z) \rightarrow \operatorname{Re}[S_x] = 0$$