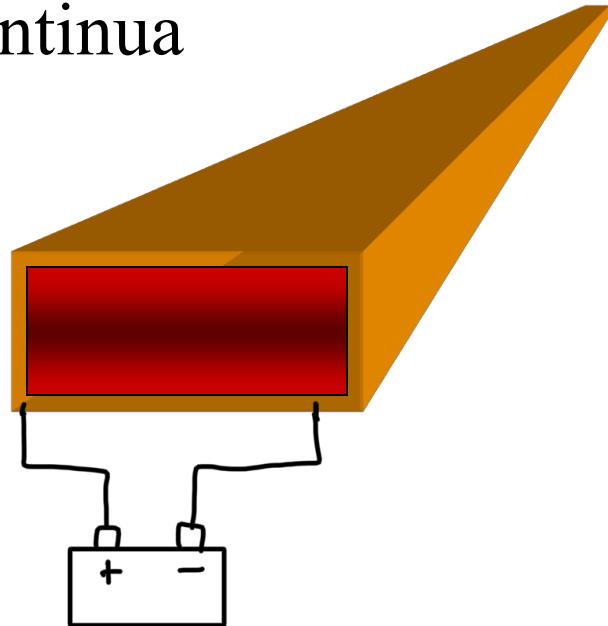
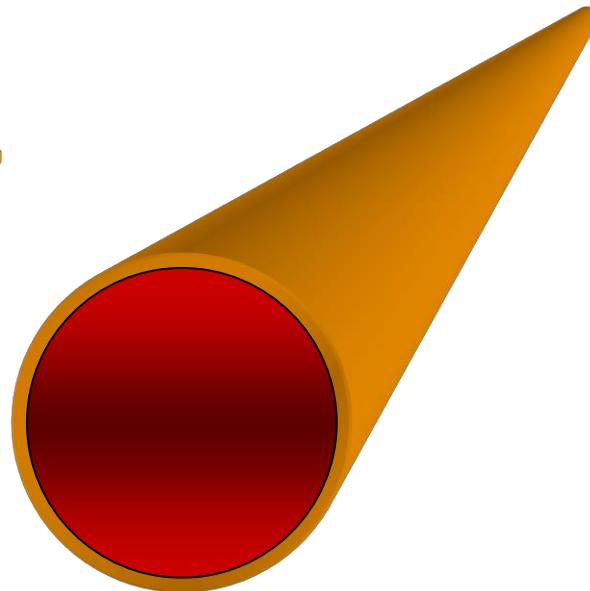


Guide d'onda

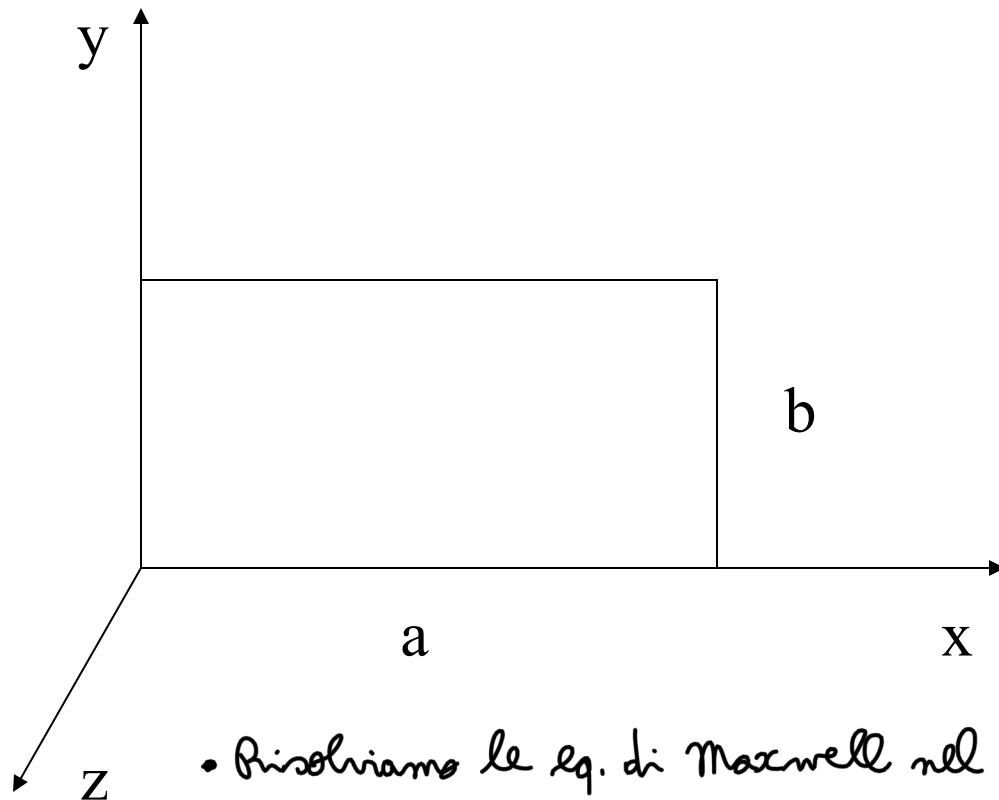
- Un tubo metallico consente la trasmissione dell'onda luminosa ma non della continua



- Connettendo una batteria a due punti di un tubo metallico la si cortocircuitta.
- Quindi la propagazione avviene solo ad una certa frequenza f_c , non a f continue.



Guide rettangolari (dominio della frequenza)



• Risolviamo le eq. di Maxwell nel dominio dei fasori:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (\underbrace{\mathbf{e}(x, y)}_{\text{trasversali rispetto a } z} + \mathbf{u}_z e_z(x, y)) e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = (\underbrace{\mathbf{h}(x, y)}_{\text{trasversali rispetto a } z} + \mathbf{u}_z h_z(x, y)) e^{-j\beta z}$$

N.B. Le quantità \mathbf{E} , \mathbf{H} sono fasori!!

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) = -j\omega\mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) = j\omega\epsilon \mathbf{E}$$

- Proiezione delle eq. lungo i 3 assi cartesiani:

($\partial E_z = \dots$)

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \partial_y E_z + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \\ -j\beta E_x - \partial_x E_z = -j\omega\mu H_y \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = -j\omega\mu H_z \end{array} \right. \quad \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \partial_y H_z + j\beta H_y = j\omega\epsilon E_x \\ -j\beta H_x - \partial_x H_z = j\omega\epsilon E_y \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = j\omega\epsilon E_z \end{array} \right.$$

- Esprimiamo le componenti trasversali in funzione di quelle longitudinali:

$$H_x = \frac{\omega}{k_c^2} (\omega \epsilon \partial_y E_z - \beta \partial_x H_z)$$

$$E_x = -\frac{\omega}{k_c^2} (\omega \mu \partial_y H_z + \beta \partial_x E_z)$$

$$H_y = \frac{-\omega}{k_c^2} (\omega \epsilon \partial_y E_z + \beta \partial_x H_z)$$

$$E_y = \frac{\omega}{k_c^2} (\omega \mu \partial_y H_z - \beta \partial_x E_z)$$

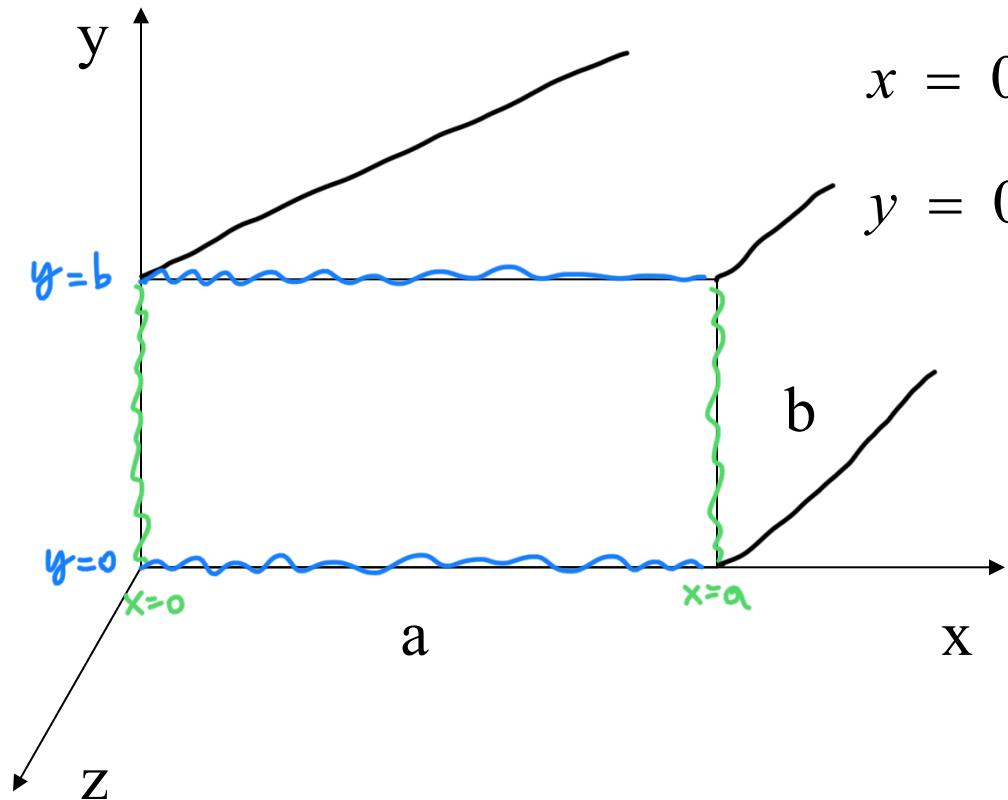
- Dov'è:

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \xrightarrow{\text{aria}} k = k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

- Dunque, risolvendo le equazioni per le componenti longitudinali, sarà possibile ricavare quelle trasversali.

Condizioni al contorno



$$\left. \begin{array}{l} x = 0; x = a \\ y = 0; y = b \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_y = 0 \text{ in } x=0, x=a \\ E_x = 0 \text{ in } y=0, y=b \end{array} \right\} \quad \Downarrow$$

$$\partial_n H_z = 0$$

le due condizioni sono disgiunte



possibili soluzioni con:

$$\left. \begin{array}{l} E_z \neq 0, H_z = 0 \quad (\text{TM}) \\ E_z = 0, H_z \neq 0 \quad (\text{TE}) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0; x = a \\ y = 0; y = b \end{array} \right\}$$

$$E_z = 0$$

Modi TE (H)

$$E_z = 0 \quad (H_z \neq 0)$$

$$H_x = \frac{-j}{k_c^2} \beta \partial_x H_z$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \omega \mu \partial_y H_z$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \beta \partial_y H_z$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \omega \mu \partial_x H_z$$

IMPEDENZA D'ONDA

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = - \frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega \mu}{\beta}$$

Modi TE (H)

$$E_z = 0$$

H_z deve soddisfare l' equazione d' onda di Helmholtz

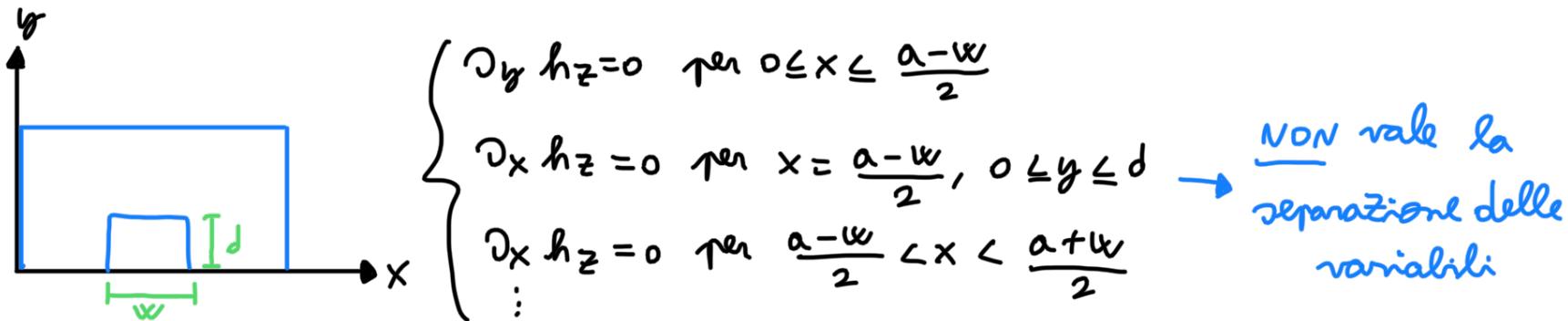
$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

$$\underbrace{\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + k^2 \right)}_{\nabla^2} H_z = 0$$

ma

quindi

$$H_z = h_z(x, y) e^{-j\beta z} \implies \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2 \right) h_z = 0$$



$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2 \right) h_z(x, y) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (\forall y) x = 0; x = a \\ (\forall x) y = 0; y = b \end{array} \right\} \quad \partial_n h_z = 0$$

soluzioni per certi valori di k_c
 dipendenti dalle cond. al contorno

Separazione delle variabili : $h_z(x, y) = X(x)Y(y)$

$$\frac{Y}{xy} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{X}{xy} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 \frac{XY}{xy} = 0$$

COSTANTI

$$\boxed{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}} + \boxed{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}} + k_c^2 = 0$$

Soluzione generale

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

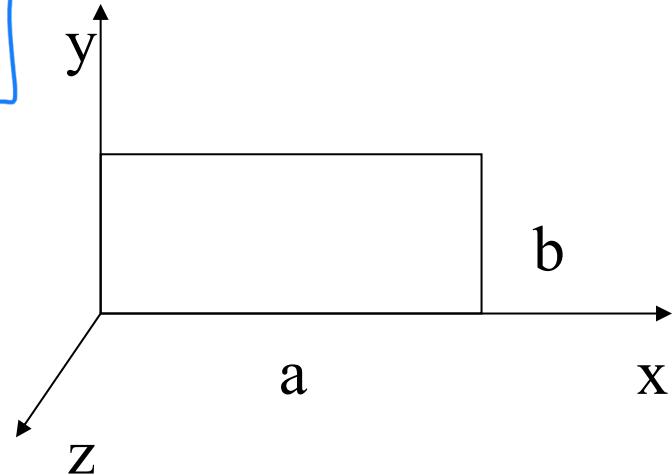
$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

$$Y(y) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)$$

Applichiamo le Condizioni al contorno

$$\left[\frac{d}{dx} X \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0, \quad \frac{d}{dy} Y \Big|_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0 \right]$$

$$\begin{aligned} x &= 0; x = a \\ y &= 0; y = b \end{aligned} \quad \} \quad \partial_n h_z = 0$$



$$A = C = 0$$

$$k_x = \frac{n \pi}{a}; k_y = \frac{m \pi}{b}$$

Soluzione TE

$$h_{znm} (x, y) = A_{nm} \cos \frac{n \pi}{a} x \cos \frac{m \pi}{b} y$$

$$H_{znm}^{\pm} (x, y, z) = A_{nm} \cos \frac{n \pi}{a} x \cos \frac{m \pi}{b} y e^{\mp j \beta z}$$

$$k_{\bullet}^2 - \beta^2 = \left(\frac{n \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m \pi}{b} \right)^2$$

n o m non nulli

β deve essere reale

(per ottenere una soluzione propagativa)

$$\beta^2 = k_0^2 - \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \geq 0$$

Rientanto: $k_0^2 = \omega^2 \mu \epsilon \geq \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]$

$$\beta = \beta_{nm}$$
 (ogni soluzione avrà un certo valore di β)

Scrivere

Adesso

Frequenza di cutoff

Rispetto alla frequenza:

$$f \geq f_{cnm} = \frac{c}{(2\pi)} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

f_{cnm} è la frequenza di taglio (cutoff) del modo TE nm

Il modo fondamentale è quello con frequenza di taglio minore.

Se a è maggiore di b, il modo fondamentale è il TE₁₀.

$$\left| \begin{array}{l} n=1 \\ m=0 \end{array} \right| f_{c10} = \frac{c}{2} \frac{1}{a} \quad f_{c10} (\text{GHz}) \cong \frac{150 \text{ [GHz} \cdot \text{mm]}}{a (\text{mm})}$$

Es. banda L (1.12 – 1.70 GHz, WR650), a=165.1 mm, $f_{c10} = 0.908 \text{ GHz}$

grida
d'onda centesimi
di pollice
(lato lungo)

$$1 \text{ inch} = 25.4 \text{ mm}$$

banda W (75 – 110 GHz), a=2.54 mm, $f_{c10} = 59.01 \text{ GHz}$

$$b_{\text{tipico}} = \frac{a}{2}$$

- Qual è la minima larghezza (a) della guida d'onda affinché una certa frequenza possa esser in propagazione?

$$a_{\min} [\text{mm}] = \frac{150 [\text{GHz} \cdot \text{mm}]}{f [\text{GHz}]}$$

- Nella realtà non si può dimensionare una guida d'onda in modo che la freq. di taglio corrisponda alla freq. di lavoro: bisogna prevedere un certo margine.

Ese: $f = 10 \text{ GHz}$, $a = 20 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$ $\Rightarrow a_{\min} > \frac{150 (\text{GHz} \cdot \text{mm})}{10 (\text{mm})}$

$$f_{c_{TE_{10}}} \approx \frac{150 (\text{GHz} \cdot \text{mm})}{20 \text{ mm}} = 7.5 \text{ GHz}$$

BANDA MONOMODALITÀ

$$f_{c_{TE_{20}}} \approx 75 \text{ GHz} \quad (\text{un ottava sopra})$$

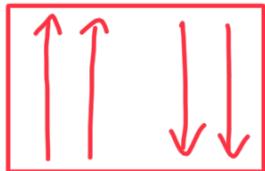
$$f_{c_{TE_{01}}} \approx \frac{150 (\text{GHz} \cdot \text{mm})}{10 \text{ mm}} = 15 \text{ GHz}$$

- $a > 2b \Rightarrow f_{c_{TE_{10}}} \leq f \leq f_{c_{TE_{20}}}$
- $a < 2b \Rightarrow f_{c_{TE_{10}}} \leq f \leq f_{c_{TE_{01}}}$

$$f_{c_{TE_{20}}} = f_{c_{TE_{01}}} \Rightarrow \underline{\text{modi DEGENERI}}$$

- Hanno lo stesso β ma caratteristiche diverse:

(linee di campo \bar{E} ($a=2b$))

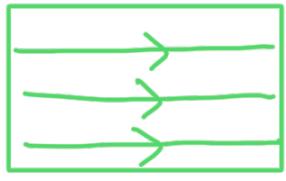


TE_{20}

$$\bar{E} = \hat{y} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) V_{20}^+ e^{-j\beta_{20}z}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{-jw\mu_0} \nabla \times \bar{E} = \frac{1}{-jw\mu_0} \sqrt{\frac{2}{ab}} V_{20}^+ \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_x = \frac{1}{-jw\mu_0} \sqrt{\frac{2}{ab}} V_{20}^+ \left(+j\beta \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right) e^{-j\beta_{20}z} \\ H_z = \frac{1}{-jw\mu_0} \sqrt{\frac{2}{ab}} V_{20}^+ \left(\frac{2\pi}{a} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right) e^{-j\beta_{20}z} \end{cases}$$



$$\vec{E} = \hat{x} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) V_{01}^+ e^{-j\beta_{01}z}$$

TE₀₁

$$\left[\text{N.B.: } \beta_{20} = \beta_{01} \text{ visto che } a=2b \right]$$

$$\bar{H} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_y = \frac{1}{-j\omega\mu_0} (-j\beta_{01}) \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) V_{01}^+ e^{-j\beta_{01}z} \\ H_z = \frac{-1}{-j\omega\mu_0} \left(\frac{\pi}{b}\right) \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) V_{01}^+ e^{-j\beta_{01}z} \end{cases}$$

- I vettori campo \vec{E} dei modi TE₂₀ e TE₀₁ sono tra loro ortogonali.
- Abbiamo visto che la densità di potenza media attiva trasportata dal modo fond. vale:

$$\bar{P}_{TE_{10}} = \frac{1}{2} \frac{|V_{10}^+|^2}{Z_{10}} , \quad Z_{10} = \frac{\omega\mu_0}{\beta} (\in \mathbb{R})$$

- In generale:

$$\bar{P}_{nm} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S (\bar{E}_{nm} \times \bar{H}_{nm}^*) \cdot \hat{n} dS \right\} \Rightarrow \bar{P}_{nm} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{\dots\} \neq 0$$

- Quindi, affinché vi sia trasporto di potenza attiva:

$$Z_{nm} = \frac{W\mu_0}{\beta_{nm}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\beta_{nm} \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{si lavora ad una freq. tale che il} \\ \text{modo } nm > \text{freq. di taglio} \end{array}$$

- D'altra parte, se il modo TE_{nm} è sotto taglio ($\beta_{nm}^2 < 0$):

$$\beta_{nm} = -J \alpha_{nm} \Rightarrow Z_{TE_{nm}} = \frac{W\mu_0}{\beta_{nm}} = J \frac{W\mu_0}{\alpha_{nm}}$$

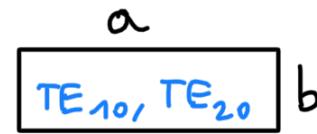
IMMAGINARIA
(trasporto di potenza attiva nullo) (*)

(*) H.P.: siamo nelle condizioni in cui è presente un termine evanescente per z positivo:



- Esiste la possibilità di trasporto di potenza fra due modi diversi? Si

E₂: $a = 15 \text{ mm}$, $b = 3.75 \text{ mm}$ ($b = \frac{a}{4}$)



$\left[\begin{array}{l} \text{TE}_{10} \\ \text{TE}_{10} \\ \text{TE}_{20} \end{array} \right] \cdot f_{c_{TE_{10}}} = \frac{150 \text{ (GHz} \cdot \text{mm)}}{15 \text{ mm}} = 10 \text{ GHz}$

$\left[\begin{array}{l} \text{TE}_{10} \\ \text{TE}_{10} \\ \text{TE}_{20} \end{array} \right] \cdot f_{c_{TE_{20}}} = 2 \cdot f_{c_{TE_{10}}} = 20 \text{ GHz} \quad (\alpha > 2b)$

$\left[\begin{array}{l} \text{TE}_{10} \\ \text{TE}_{20} \\ \text{TE}_{30} \end{array} \right] \cdot f_{c_{TE_{30}}} = 3 \cdot f_{c_{TE_{10}}} = 30 \text{ GHz}$

$\left[\begin{array}{l} \text{TE}_{10} \\ \vdots \\ \text{TE}_{40} \\ \text{TE}_{01} \end{array} \right] \cdot f_{c_{TE_{40}}} = 4 \cdot f_{c_{TE_{10}}} = 40 \text{ GHz} \quad \left| \quad f_{c_{TE_{01}}} = \frac{150 \text{ (GHz} \cdot \text{mm)}}{b} = 40 \text{ GHz} \right.$

↓
modi in propagazione a varie frequenze

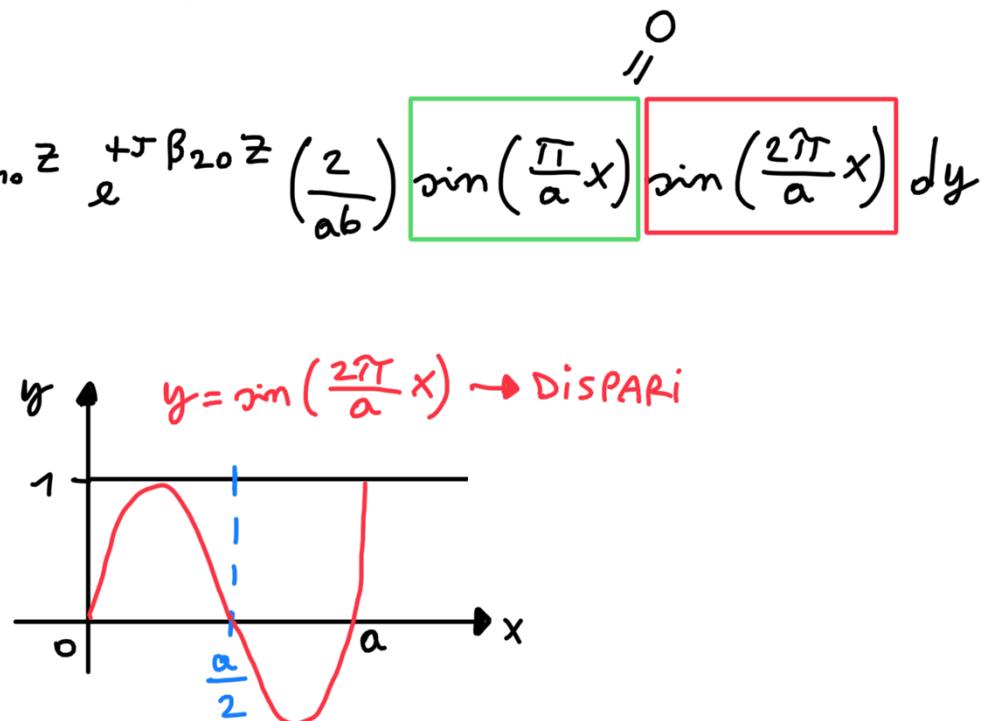
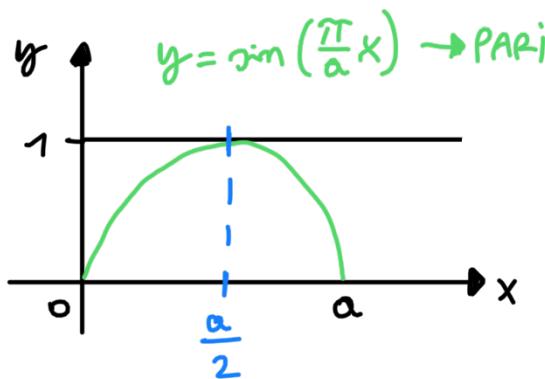
- Potenza media trasportata nell'intervallo $20 \div 30$ GHz dai modi TE_{10}, TE_{20} :

$$\bar{P} = \bar{P}_{TE_{10}} + \bar{P}_{TE_{20}} = \frac{1}{2} \frac{|V_{10}^+|^2}{Z_{10}} + \frac{1}{2} \frac{|V_{20}^+|^2}{Z_{20}}$$

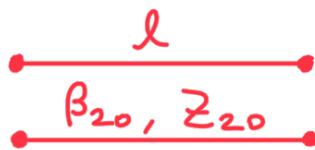
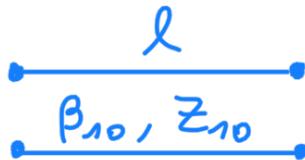
- Calcoliamola con il vett. di Poynting complesso:

$$\bar{P}_{TE_{10}, TE_{20}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S (\bar{E}_{10} \times \bar{H}_{20}^*) \cdot \hat{n} ds \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^a dx \int_0^b V_{10}^+ \frac{V_{20}^{+*}}{Z_{20}^*} e^{-j\beta_{10} z} e^{+j\beta_{20} z} \left(\frac{z}{ab}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)} dy \right\}$$



- $\text{PARI} \cdot \text{DISPARI} = \text{DISPARI} \Rightarrow$ funzione dispari in $[0, a] \Rightarrow \underline{\text{integrale nullo}}$
- Nell'ipotesi di guida d'onda imperturbata e modi sopra taglio, i modi TE_{10}, TE_{20} trasportano ciascuno la propria potenza (non vi è un mescolamento delle potenze).
- I modi sono quindi disaccoppiati tra loro, come se corrispondesse una linea di trasmissione di lunghezza l a ciascuno di essi che non scambiano potenza tra loro.

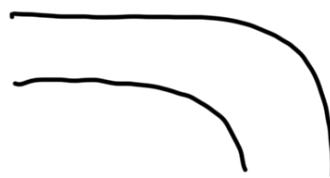


→ i modi sono indipendenti tra loro

- Lo scambio può avvenire perturbando la guida d'onda:



DISCONTINUITÀ



CURVATURA

$$\iint \bar{E}_{mm} \times \bar{h}_{pq}^* ds = \delta_{mp} \cdot \delta_{mq} \rightarrow \text{ORTOGONALITÀ DEI MODI}$$

N.B.: le famiglie di modi TE_{nm}, TM_{nm} sono tra loro ortogonali (= valgono le proprietà già viste) indipendentemente dal tipo di guida d'onda

- Abbiamo visto che i modi si distinguono in:
 - modi in propagazione (*sopra taglio*)
 - modi evanescenti (*sotto taglio*)
- MODI nella rappresentazione del campo l.m. \Leftrightarrow FUNZ. ESPON. nella serie di Fourier
- Dovvero i modi costituiscono una base ortogonale completa che consente di rappresentare qualsunque campo l.m. all'interno di una gerida di sezione arbitraria.
- I modi evanescenti diventano importanti per rappresentare il campo nelle vicinanze di una discontinuità → influiscono sul campo locale

Modo fondamentale TE10: campo elettromagnetico

$$H_z^{\pm}(x, y, z) = A_{10} \cos \frac{\pi}{a} x e^{\mp j\beta z}$$

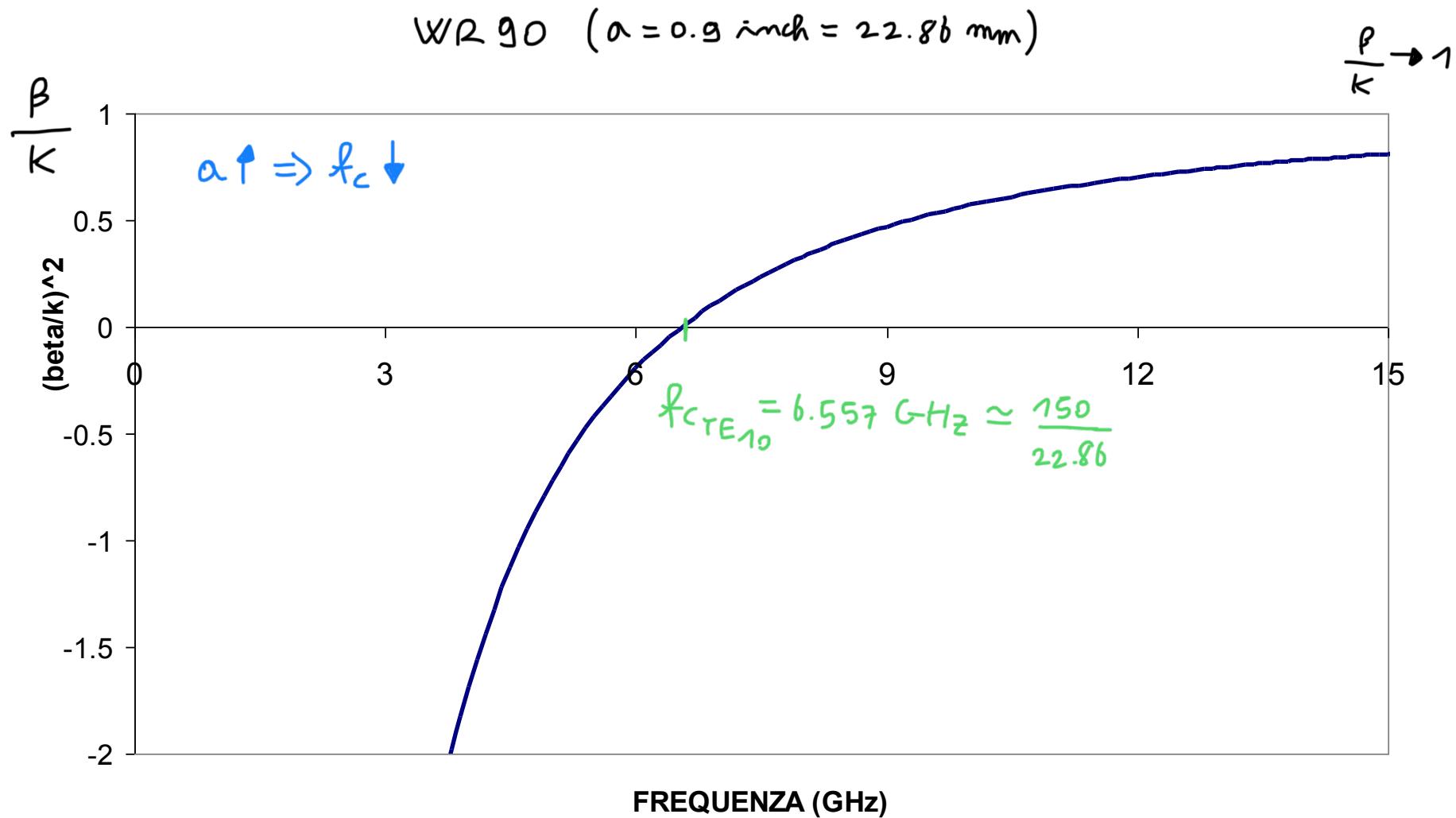
$$H_x^{\pm} = \frac{j}{k_c^2} \frac{\pi}{a} \beta A_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{\mp j\beta z} \quad E_y^{\pm} = - \frac{j}{k_c^2} \omega \mu \frac{\pi}{a} A_{10} \sin \frac{\pi}{a} x e^{\mp j\beta z}$$

$$E_x = H_y = E_z = 0$$

$$\beta = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

- $E_y = 0$ per $x=0, a$ | $E_y = \text{max}$ per $x=\frac{a}{2}$
- H_x, E_y sono proporzionali (hanno la stessa forma) e sono in fase tra loro
- $\bar{P} = \bar{E} \times \bar{H}^* = \hat{z} (-E_y H_x^*)$

Curva di dispersione per il modo fondamentale



E5: Progettare una guida d'onda rettangolare

$$a? \quad f_c = 2 \text{ GHz} \rightarrow a = \frac{150 (\text{GHz} \cdot \text{mm})}{2 \text{ mm}} = 75 \text{ mm}$$

$$a? \quad f_c = 50 \text{ GHz} \rightarrow a = \frac{150 (\text{GHz} \cdot \text{mm})}{50 \text{ mm}} = 3 \text{ mm}$$

- Caso TEM:

$$\beta = K_0 = \frac{w}{c} = w \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \rightarrow \frac{\beta}{w} = \frac{1}{c} \rightarrow \text{proporzionale a } w$$

$$\sqrt{\varphi} = \frac{w}{\beta} = c \quad (\text{costante})$$

- Caso guida rettangolare (WR):

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{w}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi r}{a}\right)^2} \rightarrow \text{perde la proporzionalità}$$

$$\sqrt{\varphi} = \frac{w}{\beta} \rightarrow \text{NON costante} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{le componenti spettrali di segnali a banda} \\ \text{limitata si propagano con velocità di fase diverse} \end{array}$$

RECAP:

- nelle guide rettangolari la propagazione non può avvenire a qualsiasi frequenza, ma soltanto da una certa freq. di taglio f_c in poi.
 - $f < f_c \rightarrow$ non esiste una soluzione propagativa di tipo $e^{-j\beta z}$, $\beta \in \mathbb{R}$
 - $f > f_c \rightarrow$ esistono tante soluzioni, ciascuna con una propria f_c , ovvero una freq. minima oltre la quale quella soluzione può propagarsi
- Quindi, esiste un intervallo di freq. per cui solo un tipo di soluzione si propaga (solo un modo può essere in propagazione).
- nel caso di guide rettangolari, all'interno della banda di monomodalità, si propaga il modo TE_{10}
- Intervallo di monomodalità

$$\beta = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$
- MIN: $k_0 = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \beta = 0$ (freq. minima per la propagazione del modo TE_{10})
- MAX: dipende dalla f_c del modo superiore
 - ↳ $a \geq 2b \Rightarrow$ modo sup. = $TE_{20} \rightarrow k_{0\min} = \frac{2\pi}{a}$
 - ↳ $a \leq 2b \Rightarrow$ modo sup. = $TE_{01} \rightarrow k_{0\min} = \frac{\pi}{b}$

• BANDA DI MONOMODALITÀ (vi è propagazione solo nel modo TE_{10})

$$\begin{aligned} \rightarrow a > 2b \rightarrow \frac{\pi}{a} \leq k_0 \leq \frac{2\pi}{a} \quad (TE_{20}) \\ \rightarrow a \leq 2b \rightarrow \frac{\pi}{a} \leq k_0 \leq \frac{\pi}{b} \quad (TE_{01}) \end{aligned}$$

$$\bar{E}(x, y, z) = V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \hat{y} = E_y$$

$$\nabla \times \bar{E} = -jw\mu_0 \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = \frac{1}{-jw\mu_0} \nabla \times \bar{E} = \frac{1}{-jw\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{-jw\mu_0} \left(-\partial_z E_y \hat{x} + \partial_x E_y \hat{z} \right)$$

$$H_x = \frac{1}{jw\mu_0} (-j\beta) V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} = \frac{-\beta}{w\mu_0} V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = \frac{1}{-jw\mu_0} \left(\frac{\pi}{a}\right) V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

- H_x, E_y in fase tra loro
- H_z, E_y in quadratura di fase

$$\bar{E} \times \bar{H}^* = -E_y H_x^* \hat{z} + E_y H_z^* \hat{x} =$$

$$= \frac{|V^+|^2}{w\mu_0/\beta} \left(\frac{2}{ab}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{z} + \underbrace{|V^+|^2 \left(\frac{\pi/a}{jw\mu_0}\right) \left(\frac{2}{ab}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{x}}$$

IMMAGINARIO

- Calcolo potenza media attiva trasportata dal modo TE_{10} in una guida rettangolare:

$$\boxed{\bar{P}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \bar{E} \times \bar{H}^* \cdot \hat{z} \, ds \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^a dx \int_0^b \frac{|V|^2}{Z_{10}^{TE}} \left(\frac{2}{ab} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) \right\} =$$

flusso attraverso la sezione s della guida d'onda

$$Z_{10}^{TE} = \frac{w \mu_0}{\beta_{10}} = \frac{w \mu_0}{\sqrt{k_0^2 - (\frac{\pi}{a})^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{a}{2} \cdot b \cdot \frac{|V|^2}{Z_{10}^{TE}} \cdot \frac{2}{ab} \right\} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{|V|^2}{Z_{10}^{TE}}}$$

- Ha condizione di monomodalità (ovvero in cui solo il modo fond. si propaga) ci garantisce che il campo e.m., in ciascuna sezione della guida d'onda, non cambia.
- Conoscendo quindi il valore del campo in un punto qualsiasi della sezione, si può ricavare il valore che assume in qualunque altra sezione.

$$\rightarrow \bar{E}(x_0, y_0, z_0) = V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \left(\frac{\pi}{a} x_0 \right) e^{-j \beta z_0} \hat{y} \Rightarrow V^+ = \dots$$

SOLO ONDA PROGR: $V^+ = \bar{E}(x_0, y_0, z_0) \sqrt{\frac{ab}{2}} \cdot \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{a} x_0 \right) e^{-j \beta z_0}} \hat{y}$

- Nel caso di combinazione di un'onda pogr. e una negr., per ricavare il campo orizzontale, avrà bisogno di conoscere il campo e.m. trasversale al punto stesso:

$$\left. \begin{array}{l} E_y(x_0, y_0, z_0) \\ H_x(x_0, y_0, z_0) \end{array} \right\} \Rightarrow V^+, V^-$$

- Infatti:

$$\bar{E}(x_0, y_0, z_0) = (V^+ e^{-j\beta z_0} + V^- e^{+j\beta z_0}) \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_0\right) \hat{y}$$

$$\bar{H}_t(x_0, y_0, z_0) = H_x = -\frac{1}{Z_{10}^{\text{TE}}} (V^+ e^{-j\beta z_0} - V^- e^{+j\beta z_0}) \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_0\right) \hat{x}$$

- Riscrivendola in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}(x_0, y_0, z_0) \\ \bar{H}_t(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x_0\right) \begin{bmatrix} e^{-j\beta z_0} & e^{+j\beta z_0} \\ -\frac{j\beta z_0}{Z_{10}^{\text{TE}}} & \frac{j\beta z_0}{Z_{10}^{\text{TE}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^+ \\ V^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V^+ \\ V^- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x_0\right)} \cdot \frac{1}{2/Z_{10}^{TE}} \begin{bmatrix} \frac{e^{+j\beta z_0}}{Z_{10}^{TE}} & -e^{+j\beta z_0} \\ \frac{e^{-j\beta z_0}}{Z_{10}^{TE}} & e^{-j\beta z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}(x_0, y_0, z_0) \hat{y} \\ \bar{H}_t(x_0, y_0, z_0) \hat{x} \end{bmatrix}$$

matrice inversa

- Per concludere, sotto l'ipotesi di monomodalit , il campo e.m. all'interno di una guida d'onda nella quale siano presenti sia onda progr., che negr.,  e comunque esprimibile in funzione delle quantit  scalari V^+ e V^- .
- Senza l'ipotesi di monomodalit  non   pi  vero, infatti il campo sar  esprimibile come combinazione dei modi in propagazione nella guida.



media

$$\bar{P}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{|V^+|^2 - |V^-|^2}{Z_{10}^{TE}} \right) = \bar{P}^+ - \bar{P}^-$$

• Ben il modo TE₁₀: $\beta = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

$k_0 < \frac{\pi}{a} \Rightarrow \beta \in \mathbb{C}$ e la soluzione è un'onda evanescente:

$$E_y = V_{10}^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} = V_{10}^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\alpha z}$$

\uparrow

$\beta = -j\alpha, \quad \alpha > 0$

$$H_x = -\frac{V_{10}^+}{Z_{10}^{TE}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\alpha z}, \quad Z_{10}^{TE} = \frac{W\mu_0}{\beta} = \frac{W\mu_0}{-j\alpha} = j \frac{W\mu_0}{\alpha}$$

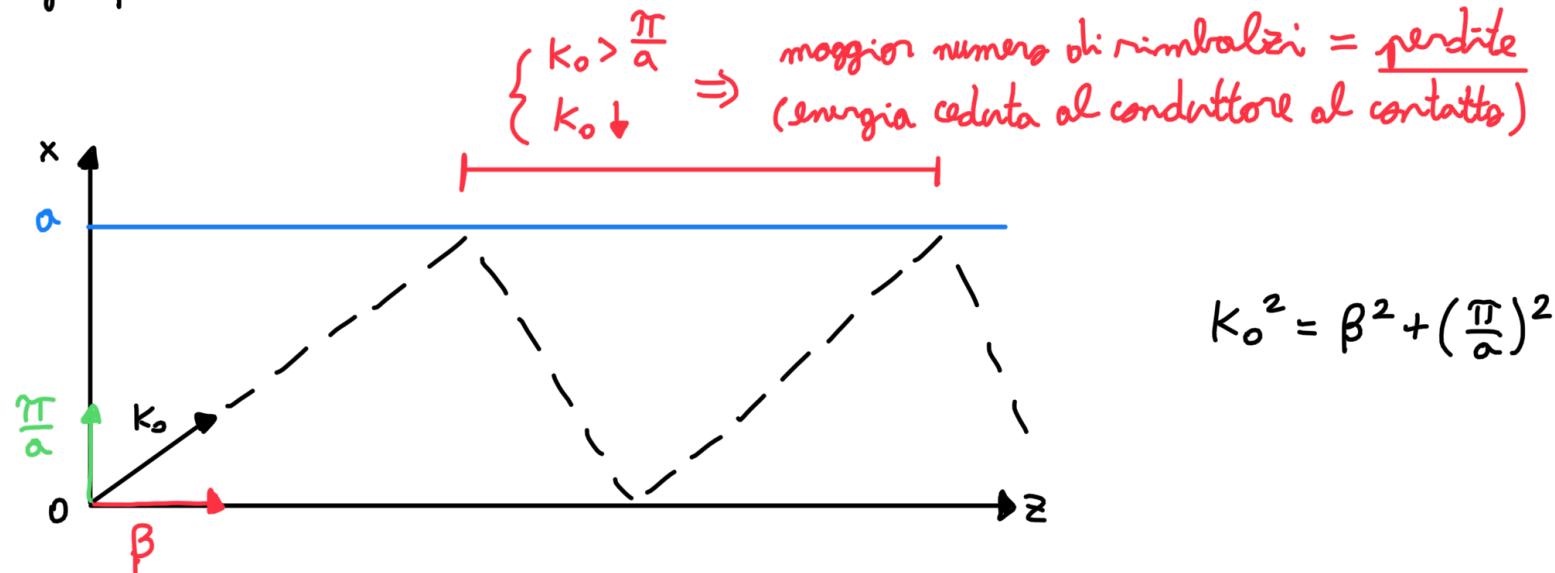
• Valutiamo la densità di potenza media attiva trasportata da un'onda progressiva:

$$S_z = E_y \times H_x^* = -\frac{jW\mu_0}{\alpha} |V_{10}^+|^2 \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-2\alpha z}$$

\downarrow

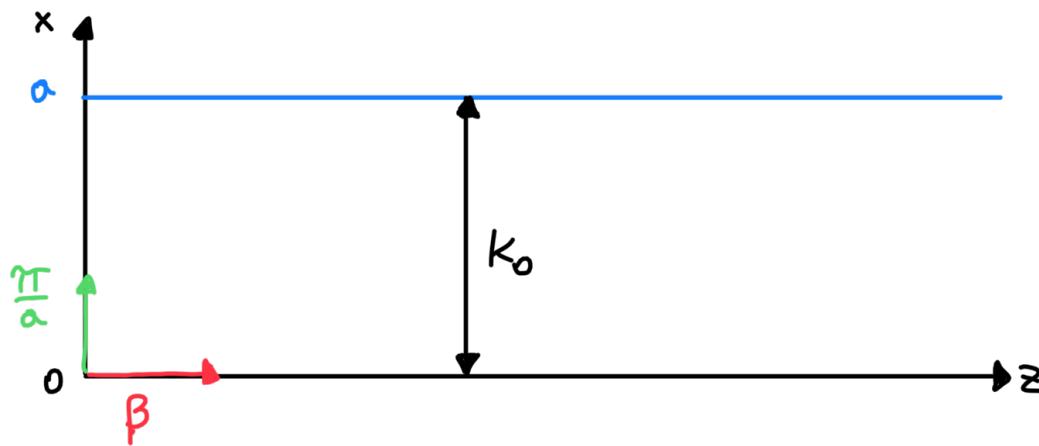
$\bar{P}^+ = \operatorname{Re}\{S_z\} = 0 \Rightarrow$ l'onda non trasporta potenza media attiva al di sotto della freq. di taglio

- Graficamente:

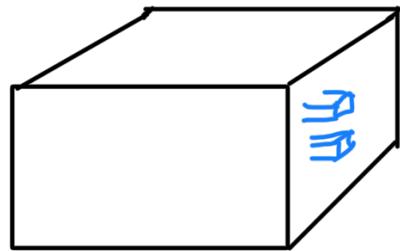


$$k_o^2 = \beta^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

- $\beta = 0 \Rightarrow k_o = \frac{\pi}{a}$: l'onda rimbomba tra le pareti strette del conduttore



Ej: Si ha una scatola metallica ermeticamente chiusa e si vuole permettere il passaggio di aria ma non di campo e.m.



si possono utilizzare, come scaricatori, delle guide d'onda rettangolari sotto taglio : $K_0 < \frac{\pi}{a}$

Ej: In un forno a microonde si vuole vedere cosa accade all'interno

$$f_0 = 2.450 \text{ GHz}$$

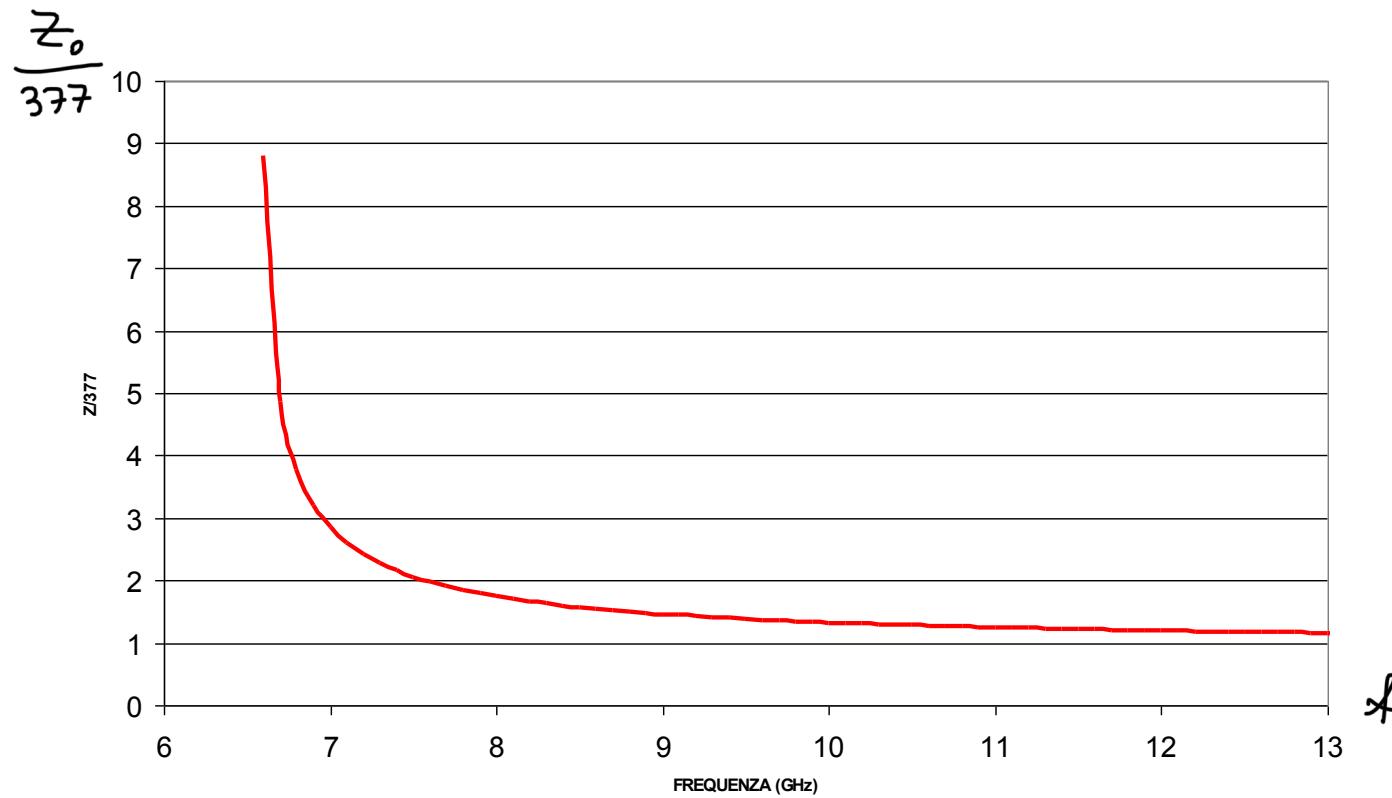


realizzando una grata con una densità di fili abbastanza elevata si ottengono delle guide rettangolari il cui spessore corrisponde al diametro dei fili.

Se sono sotto taglio, passerà la radiazione luminosa ma non il campo e.m.

Impedenza d'onda

$$Z_{TE_{10}} = - \frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu_0}{\beta} = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$$



HP: modo fond. TE₁₀ in propagazione

Lunghezza d'onda

Lunghezza d'onda in guida:

$$\beta^2 = k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$



$$\beta < k_0$$

$$\boxed{\lambda_g} = \frac{2\pi}{\beta} > \frac{2\pi}{k_0} = \lambda_0 \text{ (in aria)}$$

Velocità di fase: non rappresenta la velocità con la quale si muove l'energia

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} \geq \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \rightarrow \text{velocità della luce}$$

$$\sqrt{\varphi} \geq c \quad (\text{guida d'onda snodata senza dielettrico})$$

Velocità di fase

Ogni componente spettrale ω si propaga con velocità di fase $\omega/\beta(\omega)$, dove :

$$\beta(\omega) = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

A quale velocità si propaga un segnale non sinusoidale, o che abbia energia finita oppure sia periodico?

Consideriamo una portante sinusoidale ω_0 modulata in ampiezza dal segnale $s(t)$, con banda B molto minore di ω_0

la banda è ampia in termini assoluti, ma stretta rispetto alla pulsazione della portante

Velocità di gruppo

Come già visto, ogni componente spettrale ω si propaga con costante di fase $\beta(\omega)$:

$$\beta(\omega) = \sqrt{\underbrace{\omega^2 \mu \epsilon}_{K_0^2}} - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \approx \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)$$

espansione in serie di potenze e
troncamento al 1° ordine nell'intorno di ω_0

In $z=0$

$$s(t) = S(t, z = 0) \cdot e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega_0 t} d\omega$$

Il segnale in una sezione z si ottiene integrando le componenti spettrali sfasate del fattore di propagazione:

$$e^{-i\beta(\omega)z}$$

$$s(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega_0 t} e^{-i\beta(\omega)z} d\omega =$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega_0 t} e^{-i[\beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)]z} d\omega =$$

$$= e^{i\omega_0 t} e^{-i[\beta(\omega_0) - \beta'(\omega_0)\cdot\omega_0]z} \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \tilde{S}(\omega) \cdot e^{i\omega [t - \underbrace{\beta'(\omega_0)z}_{\text{traslazione (ritardo nel tempo)}}]} d\omega =$$

A parte il fattore moltiplicativo, $e^{-i[\beta(\omega_0) - \beta'(\omega_0)\cdot\omega_0]z}$

$s(t, z)$ è la replica di $s(t, 0)$ ritardata di un tempo $\boxed{z / v_g}$

dove

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega_0}$$

→ velocità a cui si propaga l'informazione
(energia)

Quindi, nelle ipotesi di banda stretta, il pacchetto d'onda si propaga senza subire distorsioni alla VELOCITA' DI GRUPPO v_g

$$\sqrt{g} \cdot \sqrt{\varphi} = c^2 \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{\sqrt{\varphi}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{g} < c}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}$$

Modi TM (E)

$$H_z = 0$$

E_z deve soddisfare l'equazione d'onda

*le cond. al
contorno cambiano* → $\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + k^2\right) E_z = 0$$

ma

quindi

$$E_z = e_z(x, y) e^{-j\beta z}$$

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2\right) e_z = 0$$

Modi TM (continua)

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2\right)e_z(x, y) = 0$$

$$\begin{aligned} & x = 0; x = a \\ & y = 0; y = b \end{aligned} \quad \} \quad e_z = 0$$

in tutto il contorno

Separazione delle variabili :

(coordinate x e y indipendenti tra loro)

$$e_z(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$Y \frac{d^2X}{dx^2} + X \frac{d^2Y}{dy^2} + k_c^2 XY = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + k_c^2 = 0$$

Soluzione generale

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2$$

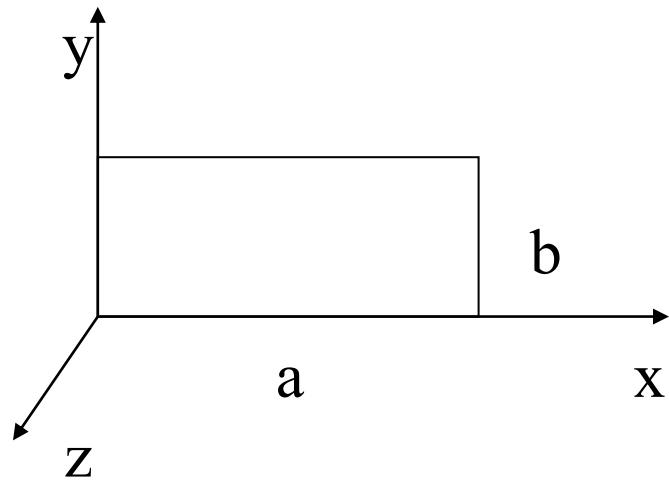
$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \quad X(x)=0 \text{ in } x=0 \Leftrightarrow B=0$$

$$Y(y) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y) \quad Y(y)=0 \text{ in } y=0 \Leftrightarrow D=0$$

Condizioni al contorno

$$\left. \begin{array}{l} x = 0; x = a \\ y = 0; y = b \end{array} \right\} \quad e_z = 0$$



$$B = D = 0$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a}; k_y = \frac{m\pi}{b}$$

Soluzione TM

$$e_{znm}(x, y) = B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

$$E_{znm}^{\pm}(x, y, z) = B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y e^{\mp j\beta z} = \underline{E}_{znm} e^{-j\beta z}$$

$$k^2 - \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2$$

TE₁₁, TM₁₁ hanno
stessa fc e sono
tra loro ortogonali

n e m non nulli

$\Rightarrow \begin{cases} n \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ TM₁₁ modo di ordine
più basso

Dati a, b : $K_{0\text{TM}_{mn}} \geq \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$ per avere propagazione

β deve essere reale, perché il modo sia in propagazione

$$\beta^2 = k^2 - \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \geq 0$$

Pertanto: $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \geq \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]$

- I modi TE possono avere uno dei due indici $n, m = 0$
- I modi TM hanno entrambi gli indici $n, m \neq 0$
- Se vi è in propagazione il modo TM_{11} , allora vi sono in propagazione anche i modi TE con $f_c < f_{c\text{TM}_{11}}$

Frequenza di cutoff

Rispetto alla frequenza:

$$f \geq f_{cnm} = \frac{c}{(2\pi)} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

f_{cnm} è la frequenza di taglio (cutoff) del modo TM nm

f_{cnm} è la stessa per modi TE e TM

Il modo TM di ordine minore è il TM₁₁.

$$f_{c11}(\text{GHz}) \approx \frac{\pi}{21} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Nel caso generale (n,m)

$$E_z^\pm(x, y, z) = B_{11} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y e^{\mp j\beta z}$$

$$E_x^\pm = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{a} B_{nm} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y e^{\mp j\beta z}$$

$$E_y^\pm = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y e^{\mp j\beta z}$$

$$H_x^\pm = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} B_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y e^{\mp j\beta z}$$

$$H_y^\pm = \frac{-j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{a} B_{nm} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y e^{\mp j\beta z}$$

- Vantaggi delle guide d'onda rettangolari rispetto a quelle circolari:
 - minori perdite
 - consentono di trasportare maggiore potenza
- Svantaggi:
 - banda più stretta

↳ COAX: $0 \leq k_0 \leq \frac{2}{R_e + R_i}$

↳ RECT: $\frac{\pi}{a} \leq k_0 \leq \frac{2\pi}{a}$