Equazioni di Maxwell in mezzi lineari, omogenei e isotropi

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

Attenzione alla omogeneità, nel caso generale: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- Le relazioni costitutive ($\bar{D} \leftrightarrow \bar{E}$, $\bar{B} \leftrightarrow \bar{H}$) sono di tipo proporzionale:

$\boxed{\bar{B} = \mu_0 \bar{H}}$ $\boxed{\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}}$

$$\begin{cases} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \; [H/m] \rightarrow \text{permeabilità magnetica} \\ \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \; [F/m] \rightarrow \text{permittività nel vuoto} \end{cases}$$

$(\rho=0, J=0)$

Nel vuoto, in assenza di sorgenti:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$$

- ρ, J funzioni del punto
- verifica dell'esistenza del campo e.m. in punti diversi dalle sorgenti
- se non vi è soluzione, non vi è radiazione e.m.

Ex: propagazione radiazione solare fino sulla Terra (in mezzo vi è il vuoto)

Soluzioni delle equazioni di Maxwell: Onde piane

- Le eq. alla divergenza sono contenute in quelle ai rotori:

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0} \rightarrow \text{sempre}$$

$$\Downarrow$$

$\nabla \cdot \bar{E} = 0$, $\nabla \cdot \bar{H} = 0$ (nel vuoto) → quando le relaz. cost. sono proporzionali

$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \;\not\Rightarrow\; \nabla \cdot \bar{H} = 0$ (ex: nei materiali magnetici: $\bar{B} = (\bar{H} + \underbrace{\bar{M}}_{\text{vettore magnetizzazione}})\mu_0$)

Assenza di sorgenti (ρ=0, j=0), nel vuoto:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}$$

Campi dipendenti solo da z, t

(Per semplicità pongo nulle le componenti x, y)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(z, t)$$

$$\partial_x = \partial_y = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{x} &= \bar{u}_x \\ \hat{y} &= \bar{u}_y\end{aligned}}$$

$$\nabla = \mathbf{u}_z \partial_z$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{u}_z \times \partial_z (E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \partial_z E_x \mathbf{u}_y - \partial_z E_y \mathbf{u}_x$$

$(\nabla \times \bar{E} \cdot \bar{u}_x)$ $\left[\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} H_x\right.$ proiezione lungo x $\left.\dfrac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} E_x\right]$ $(\nabla \times \bar{H} \cdot \bar{u}_x)$

$(\nabla \times \bar{E} \cdot \bar{u}_y)$ $\left[\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} H_y\right.$ proiezione lungo y $\left.\dfrac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} E_y\right]$ $(\nabla \times \bar{H} \cdot \bar{u}_y)$

$$0 = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_z \qquad\qquad 0 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z$$

Essendo interessati a campi che variano nel tempo

$$E_z = 0$$

$$H_z = 0$$

$E_x \longleftrightarrow H_y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} H_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} E_x \end{cases}$$

$E_y \longleftrightarrow H_x$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} H_x \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} E_y \end{cases}$$

Risolviamo la coppia E_x, H_y

EQUAZIONE D'ONDA

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

→ relazione di proporzionalità

$$E_x(z,t) = E_x^+(z,t) + E_x^-(z,t) = f^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + f^-\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

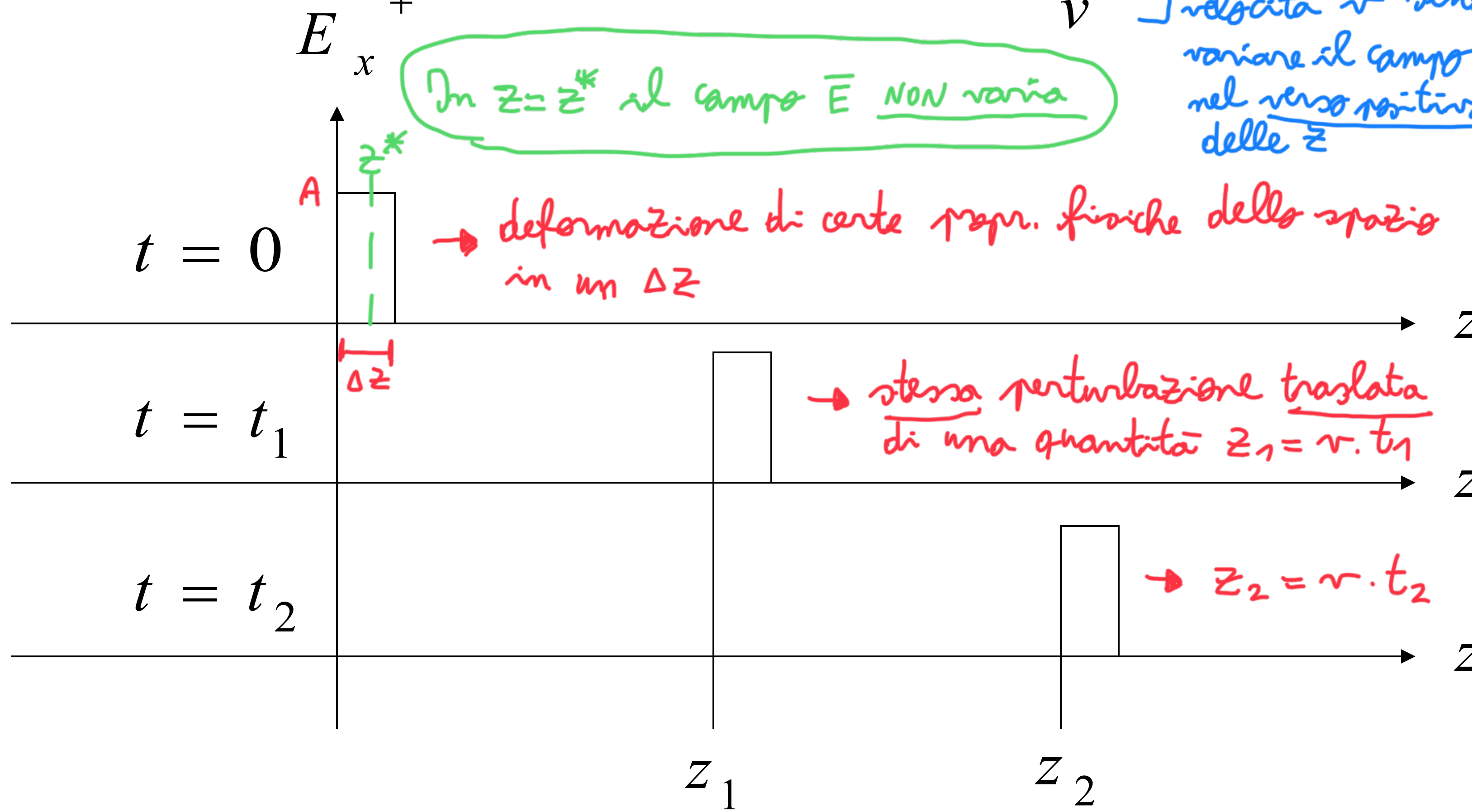
→ componente lungo x di $\bar{E}$, ma non dipende da x

→ la soluzione deve avere come argomento $\left(t - \frac{z}{v}\right)$ o $\left(t + \frac{z}{v}\right)$

Onda progressiva

$$E_x^+ = f^{+}\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

perturbazione che si propaga con velocità v senza variare il campo nel verso positivo delle z



$$v = z_1 / t_1 = z_2 / t_2$$

Considerando $E_x^- = f^-\left(t + \frac{z}{v}\right)$, mantenendo f^- uguale ad f^+, allora il grafico è lo stesso ribaltato

Derivando rispetto a z

$\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\partial_z f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = \mp \frac{1}{v} f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v})$$

$$\partial_z^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = \partial_z \left(\mp \frac{1}{v} f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v}) \right) = \frac{1}{v^2} f^{\pm}{}''(t \mp \frac{z}{v})$$

Derivando rispetto a t

$$\partial_t f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v})$$

$$\partial_t^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = \partial_t \left(f^{\pm}{}'(t \mp \frac{z}{v}) \right) = f^{\pm}{}''(t \mp \frac{z}{v})$$

Dipendenza da z a da t

$$\partial_t^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v}) = \underbrace{v^2}_{} \cdot \partial_z^2 f^{\pm}(t \mp \frac{z}{v})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}}$$

$$\Downarrow$$

Velocità della luce

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \text{ m/s}$$

Nel vuoto:

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Relazione tra **E** ed **H**

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} H_y = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$E_x \to f^+, f^-$

$$= -\frac{1}{\mu}\frac{1}{v}\left[-f^{+'}\left(t - \frac{z}{v}\right) + f^{-'}\left(t + \frac{z}{v}\right)\right] \qquad = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[f^{+'}\left(t - \frac{z}{v}\right) - f^{-'}\left(t + \frac{z}{v}\right)\right]$$

$\overline{E}, \overline{H}$ sono legati da una impedenza solo se considero una sola onda progr. o regr.

$$\Rightarrow H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\underbrace{f^{+}\left(t - \frac{z}{v}\right)}_{\substack{\text{onda} \\ \text{progressiva} \\ E_x,\, H_y}} - \underbrace{f^{-}\left(t + \frac{z}{v}\right)}_{\substack{\text{onda regressiva} \\ E_y,\, H_x}}\right]$$

$$E_x = f^+\left(t-\frac{z}{v}\right) + f^-\left(t+\frac{z}{v}\right)$$ → si perde la proporzionalità con la combinazione delle due componenti

IMPEDENZA D'ONDA

⇓ se ne scelgo solo una si ha:

$$H_y = H_y^+ + H_y^- \quad \Rightarrow H_y^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, f^{\pm}\left(t \mp \frac{z}{v}\right) = \pm\frac{E_x^{\pm}}{\eta}$$

$$\boxed{\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\,\pi \approx 377\ \Omega}$$ nel vuoto

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

In un dielettrico isotropo e omogeneo

- aria → $\varepsilon_r = 1$ (come il vuoto)
- polietilene → $\varepsilon_r = 2.3$

AMMETTENZA D'ONDA $\frac{1}{\eta}$

Per la coppia E_y, H_x si ha:

Ancora, nel vuoto

Partendo da

$$E_y(z,t) = E_y^+(z,t) + E_y^-(z,t) = g^+(t - \frac{z}{v}) + g^-(t + \frac{z}{v})$$

$$\Rightarrow H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[g^+\left(t - \frac{z}{v}\right) - g^-\left(t + \frac{z}{v}\right)\right]$$

Onde progressive:

$$\frac{E_x^+}{H_y^+} = -\frac{E_y^+}{H_x^+} = \eta_o$$

Onde regressive:

$$\frac{E_x^-}{H_y^-} = -\frac{E_y^-}{H_x^-} = -\eta_o$$

Onda piana progressiva che si propaga in direzione z

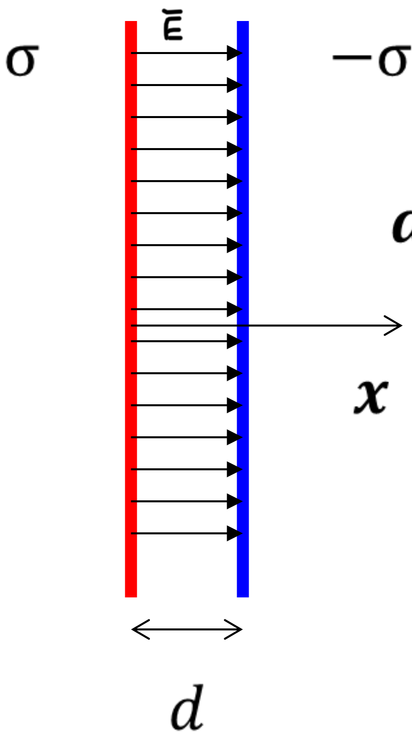
$$\mathbf{E}(x,y,z;t) = E_x(x,y,z;t)\hat{\boldsymbol{x}} + E_y(x,y,z;t)\hat{\boldsymbol{y}} =$$
$$f^+(t-\frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{x}} + g^+(t-\frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\mathbf{H}(x,y,z;t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,[E_x(x,y,z;t)\hat{\boldsymbol{y}} - E_y(x,y,z;t)\hat{\boldsymbol{x}}] =$$
$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,[-g^+(t-\frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{x}} + f^+(t-\frac{z}{v})\hat{\boldsymbol{y}}]$$

- Un'onda è una perturbazione di un mezzo continuo che si propaga, mantenendo una certa forma, a velocità costante.
- Le componenti x, y non cambiano in un determinato piano $z = z^*$ (fronte d'onda)
- Le cariche vengono accelerate dai generatori che ho sulla sorgente.

Quanto vale l'energia trasportata da un'onda elettromagnetica nel vuoto? (da un fronte d'onda che si estende da $-\infty$ a $+\infty$)

Partiamo dalle densità di energia di un campo elettrostatico in un condensatore piano: (condizioni statiche)



$$\mathbf{E} = E\hat{x} = \frac{V}{d}\hat{x}$$

superficie condensatore

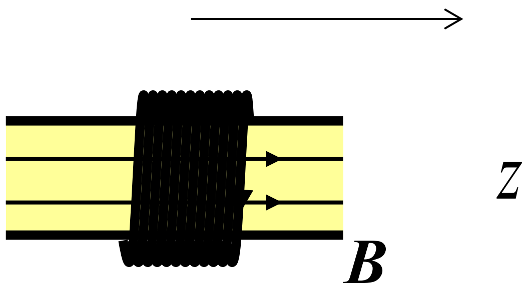
$$\boldsymbol{dW = dqEd} = C dV \cdot V \Rightarrow W = \boxed{U} = \frac{1}{2}CV^2 = \boxed{\frac{1}{2}\frac{S}{d}\epsilon_0 (Ed)^2}$$

$$u = \frac{U}{Sd}V^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad C = q/V$$

$$u_H = \frac{1}{2}\mu_0 |\mathbf{H}|^2$$

densità di energia $\leftarrow$ $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2$ dove $|\mathbf{E}|^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$

D'altra parte, il lavoro dW fatto un Generatore E sulla carica dq in una bobina ideale vale :



$$\mathbf{B}=\mu_o \overbrace{n}^{\text{n° spire}} i\hat{z} \qquad \mathbf{H}=ni\hat{z}$$

$$\Phi(\mathbf{B})=nlSB=\mu_o n^2 lSi=Li$$

$$dW=Edq=Eidt=\frac{d\Phi}{dt}idt=Lidi$$

lavoro $$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu_o n^2 lSI^2=\frac{1}{2}\mu_o H^2 \underbrace{lS}_{\text{volume}}$$

densità di energia $\leftarrow$ $$u_H=\frac{1}{2}\mu_0\,|\mathbf{H}|^2$$

dove $$|\mathbf{H}|^2=H_x^2+H_y^2+H_z^2$$

Pertanto, nella densità di energia trasportata dall'onda elettromagnetica piana è l'energia che attraversa nell'unita di tempo una superficie unitaria normale alla direzione di propagazione dell'onda:

$$u_E + u_H = \frac{1}{2}\epsilon_0\,|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu_0|\mathbf{H}|^2$$

$$\underbrace{u}_{\text{densità di energia nell'unità di tempo trasportata da un'onda piana}} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left[f^+\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\mu_0\left[\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}f^+\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]^2 = \epsilon_0\left[f^+\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]^2 = \epsilon_0\,E^2$$

Vettore di Poynting

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} = (E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y) \times (H_x \mathbf{u}_x + H_y \mathbf{u}_y) =$$

$$= (E_x H_y - E_y H_x) \mathbf{u}_z =$$

$$= \frac{1}{\eta_0} \Big[(f^+ + f^-)(f^+ - f^-) + (g^+ + g^-)(g^+ - g^-) \Big] \mathbf{u}_z =$$

$$= \frac{1}{\eta_0} \Bigg[\underbrace{\Big((\overset{E_x, H_y}{f^+})^2 + (\overset{E_y, H_x}{g^+})^2 \Big)} - \underbrace{\Big((f^-)^2 + (g^-)^2 \Big)} \Bigg] \mathbf{u}_z$$

S = differenza fra densità di energia trasportata dall'onda progressiva e da quella regressiva

$$\mathbf{S} = \left(S^{+} - S^{-}\right)\mathbf{u}_z$$ → ampiezza vett. Poynting per onde progressive/regressive

Onde progressive: $$S^{+} = \frac{1}{\eta_0}\left((f^{+})^2 + (g^{+})^2\right)$$

($\frac{1}{\eta}$ → caso generale per un mezzo isotropo)

Onde regressive: $$S^{-} = \frac{1}{\eta_0}\left((f^{-})^2 + (g^{-})^2\right)$$

$f, g \Leftrightarrow \left(t - \frac{z}{v}\right)$ (f, g dipendono dal tipo di sorgente del campo)

Densità di energia trasportata da un'onda progressiva

per $\overline{E}$

per $\overline{H}$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}\right|^2 = \frac{\varepsilon}{2}\left(E_x^{+\,2} + E_y^{+\,2}\right)$$

$$u_H = \frac{1}{2}\mu\left|\mathbf{H}\right|^2 = \frac{\mu}{2}\left(H_x^{+\,2} + H_y^{+\,2}\right) =$$

$$\frac{\mu}{2}\frac{1}{\eta^2}\left(E_y^{+\,2} + E_x^{+\,2}\right) = u_E$$

$$\boxed{u_H = u_E}$$

$$\boxed{u = u_E + u_H = 2u_E}$$

Se il mezzo è non dissipativo, la densità di energia portata dall'onda non cambia da una sezione all'altra

Vettore di Poynting

Intensità dell'onda elettromagnetica I: energia che attraversa , nell'unità di tempo, una superficie unitaria, disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione

c nel vuoto

$$I = cu = c\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{\eta} |\mathbf{E}|^2$$

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{1}{\eta} |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{\eta} |\mathbf{E}|^2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$[\mathrm{S}] = \mathrm{W/m^2}$$