Università Politecnica delle Marche

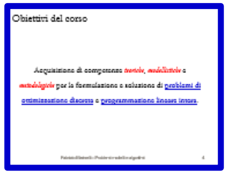
Problemi, modelli e algoritmi

ver 4.0.0

Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it
tel. 071 - 2204823

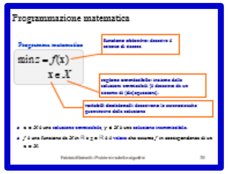
- Problemi e modelli (richiami)
- Un esempio: il problema dello zaino
- Programmazione matematica
- Metodi di soluzione
- La complessità dei problemi
- Più obiettivi e più decisori

- Problemi e modelli (richiami)



- Un esempio: il problema dello zaino

- Programmazione matematica



- Metodi di soluzione

- La complessità dei problemi

- Più obiettivi e più decisori

Obiettivi del corso

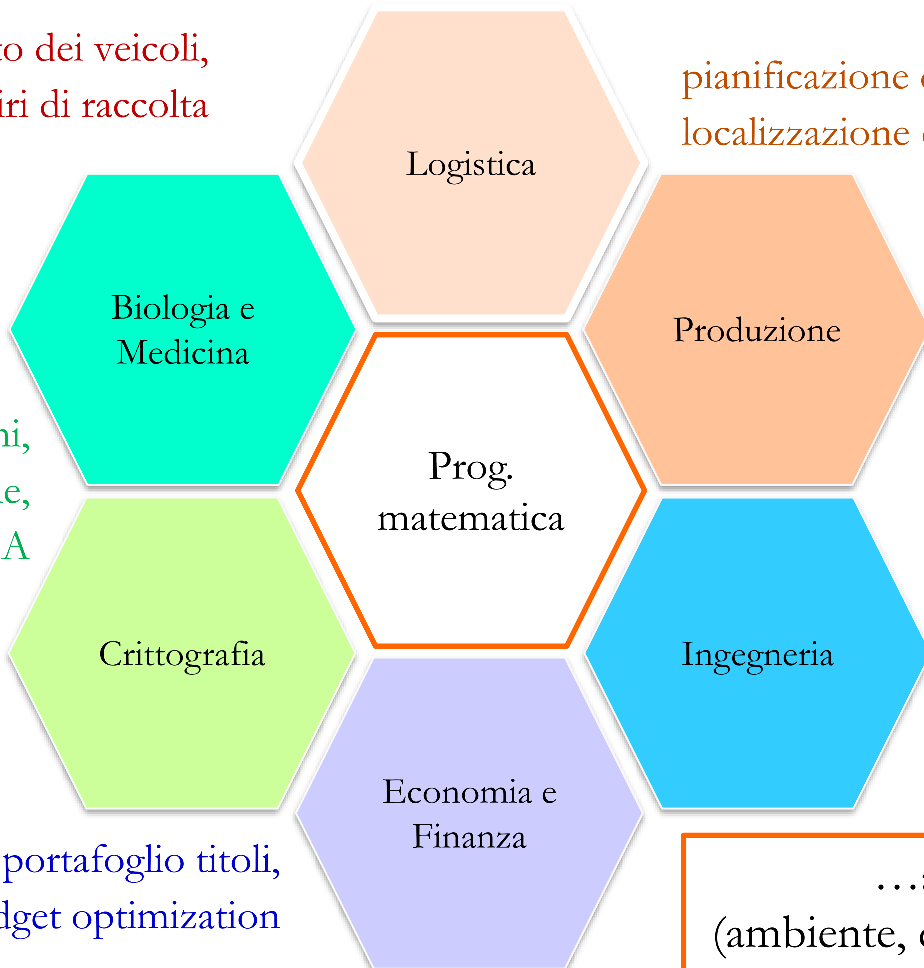
Acquisizione di competenze *teoriche*, *modellistiche* e *metodologiche* per la formulazione e soluzione di problemi di ottimizzazione discreta e programmazione lineare intera.

Applicazioni

progettazione di reti stradali, e di telecomunicazioni,
turnazione del personale,

instradamento dei veicoli,
pianificazione dei giri di raccolta

pianificazione della produzione e delle scorte,
localizzazione e dimensionamento di impianti



Ricostruzione di immagini,
Struttura delle proteine,
Sequenziamento del DNA

Progettazione delle strutture,

Project scheduling,
VLSI design

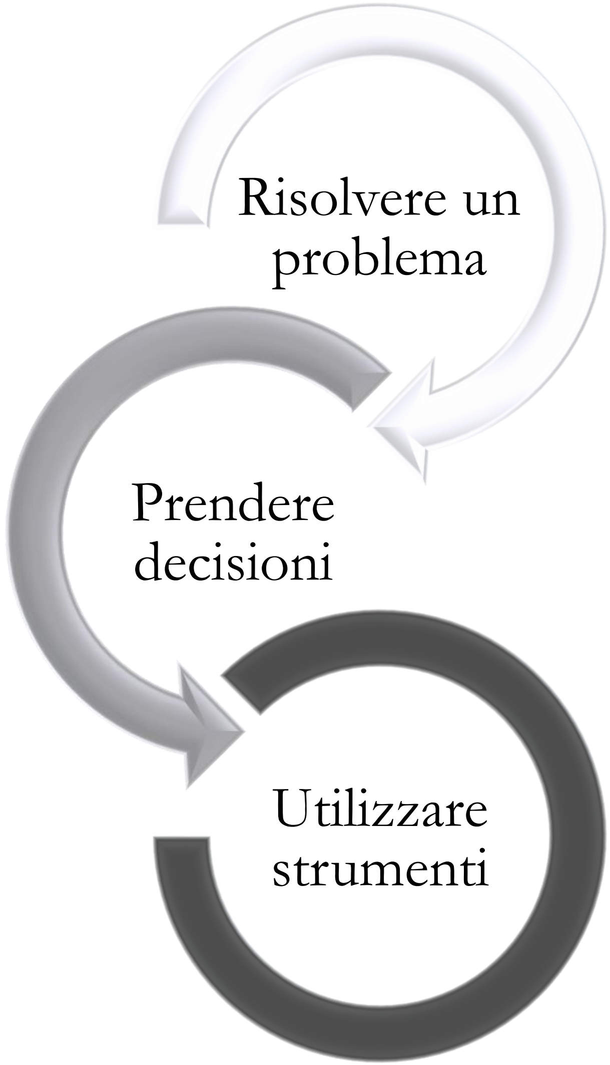
Gestione portafoglio titoli,
budget optimization

…altre applicazioni
(ambiente, didattica, salute, sport,…)
su www.scienceofbetter.org

parola chiave: *problema decisionale*

Problema decisionale: scegliere, tra diverse alternative plausibili (in genere **mooolte**), una *configurazione* del *sistema* dettata da un insieme di decisioni che consenta di soddisfare *al meglio* i requisiti prestazionali del sistema

Decisioni e *problem solving*



Fondamentalmente significa rispondere con un **Sì** o con un **No** a un numero (elevato) di domande

disponibilità di informazioni

natura delle informazioni (quantificabili o meno)

presenza di eventi non controllabili

tempestività della risposta

precisione

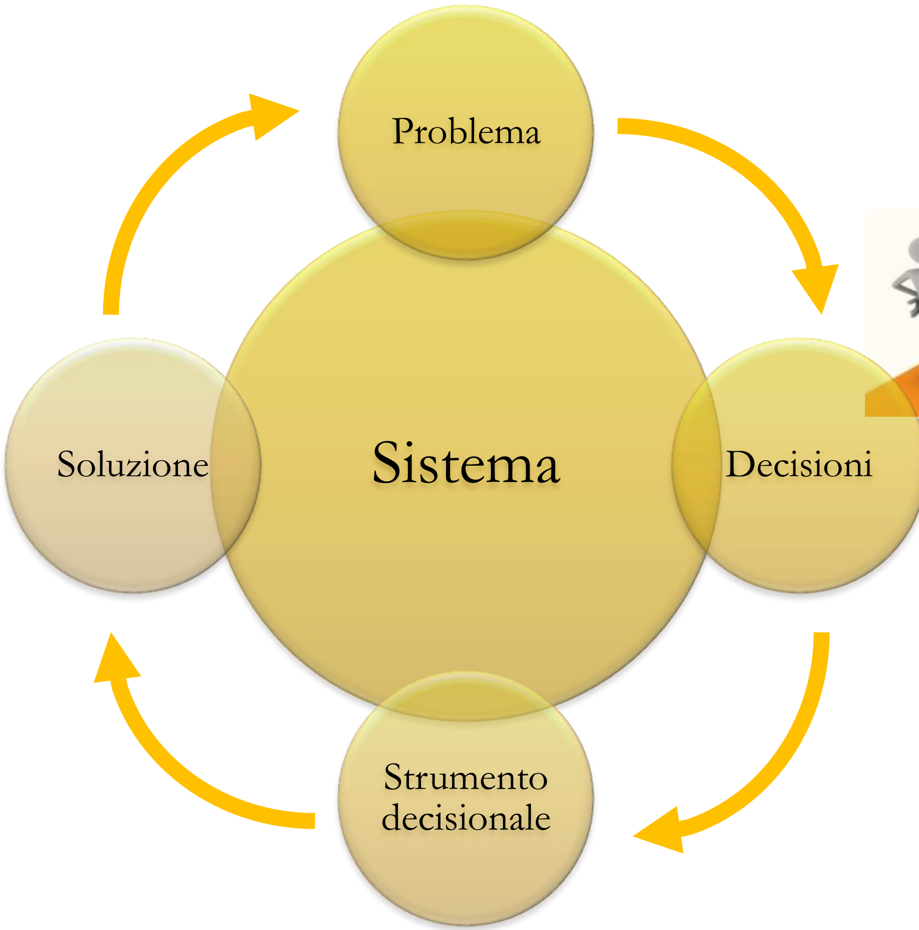
criticità

strumenti concettuali e operativi che dipendono dalla

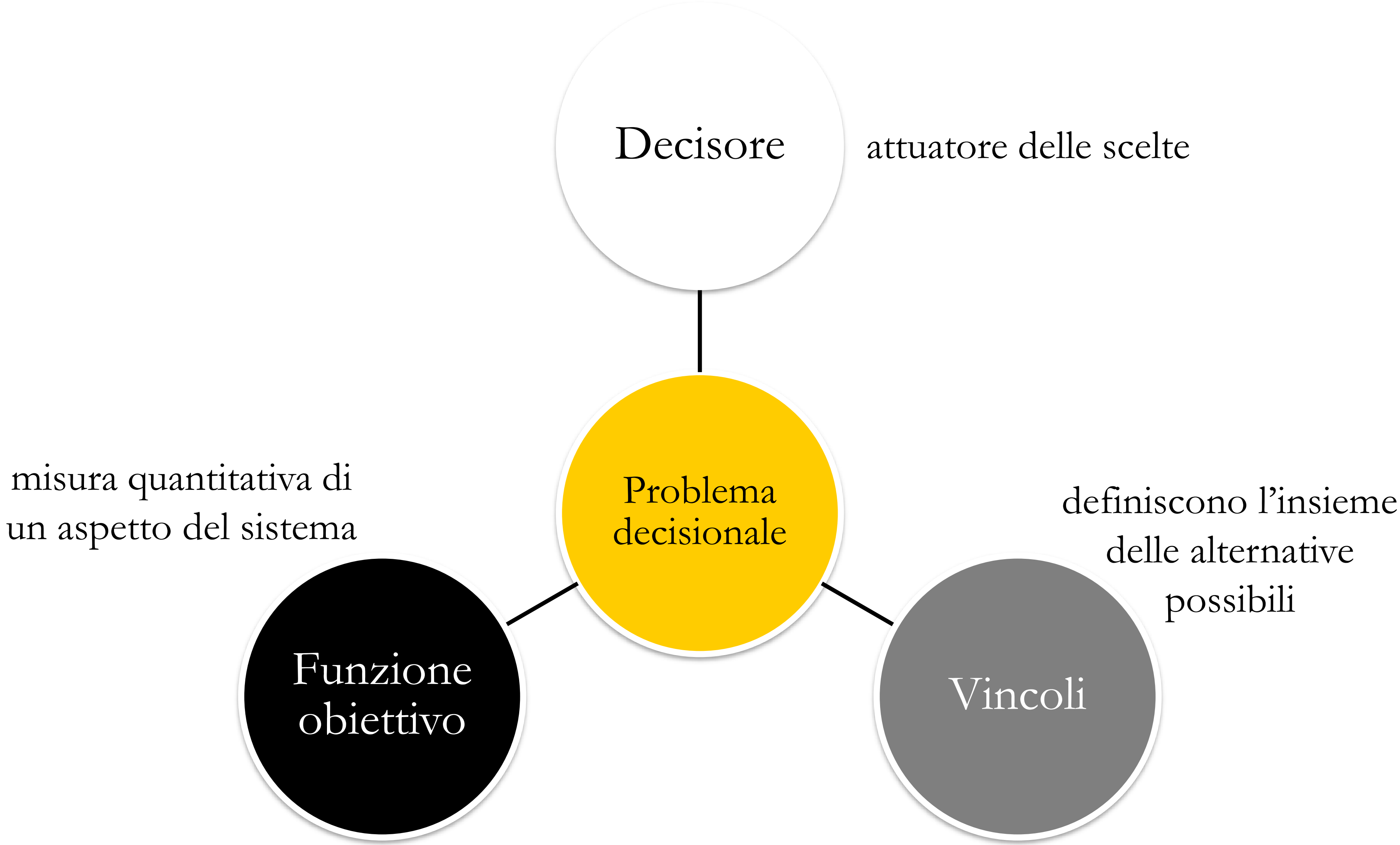
natura del problema

Decisioni e *problem solving*

La soluzione ha un impatto sul sistema che dipende dalla **<u>qualità della decisione</u>**



parola chiave: *problema decisionale*



parola chiave: *problema decisionale*

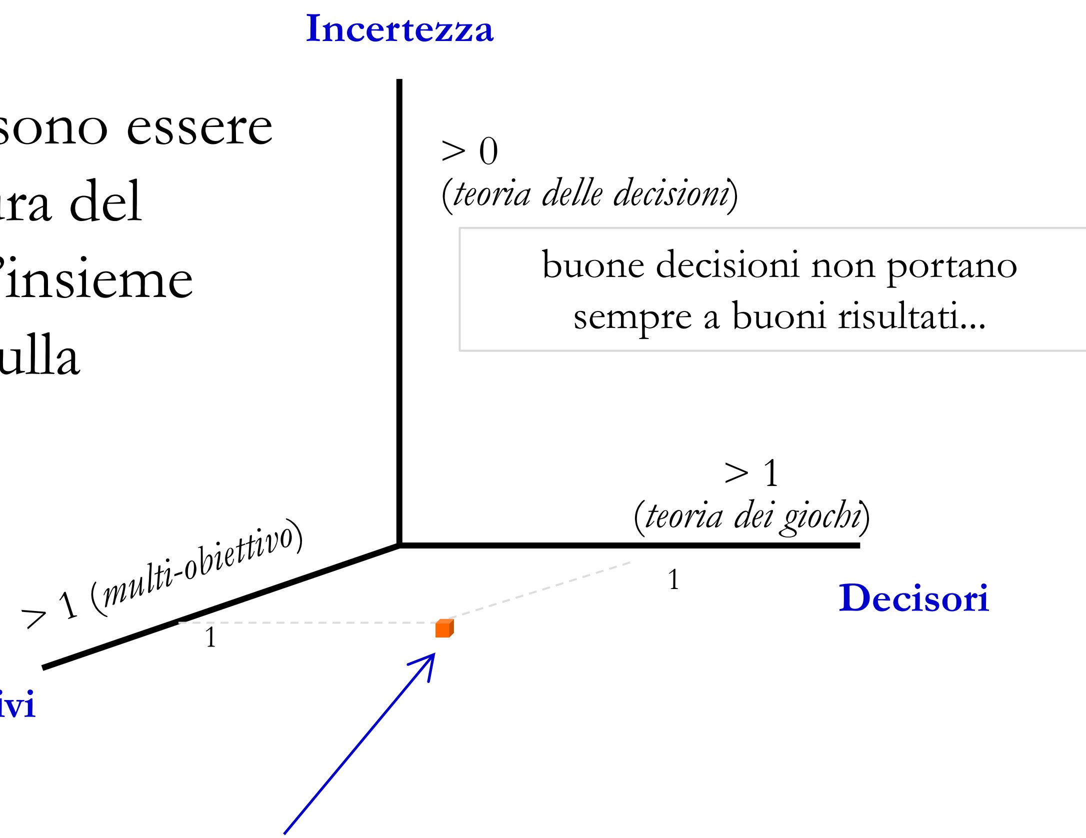
- Uno o più decisori devono (o possono) fare delle scelte, ossia definire una politica decisionale, che concorrono a determinare la configurazione e l'evoluzione complessiva di un sistema (organizzato).

- Le scelte devono rispettate vincoli ambientali e/o regole di comportamento che definiscono l'insieme delle alternative possibili (soluzioni ammissibili).

- Ogni decisore sceglie in base a uno o più criteri di utilità. Un criterio di utilità, o funzione obiettivo, è una misura quantitativa di un determinato aspetto del sistema.

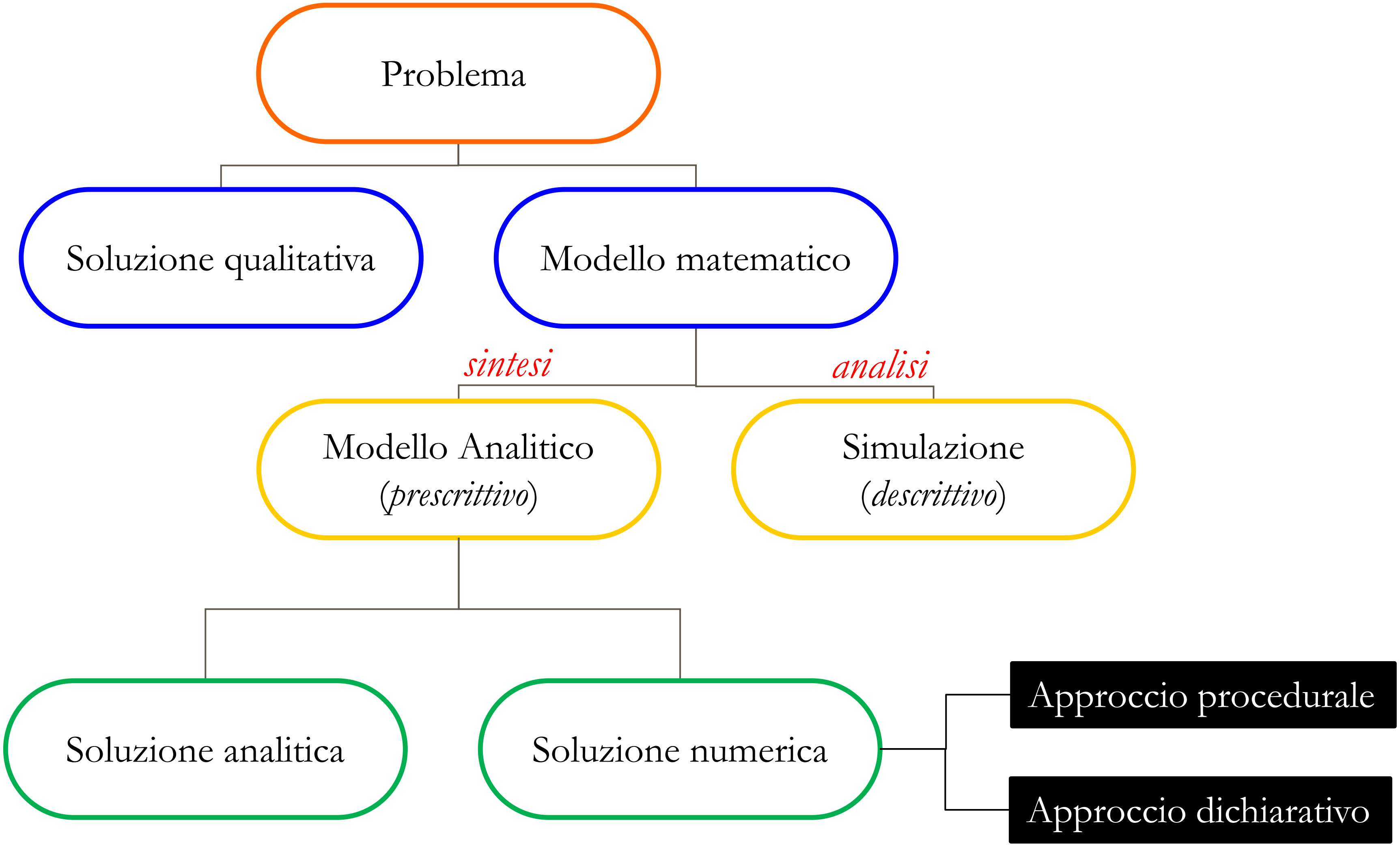
Problemi decisionali: tassonomia

- I problemi decisionali possono essere classificati in base alla natura del decisore, alla struttura dell'insieme ammissibile e alle ipotesi sulla funzione obiettivo



in questo corso ci occuperemo di problemi a **singolo** decisore, **singola** funzione obiettivo e informazione **certa**

Problemi, modelli e algoritmi



Modelli matematici: un paradigma dichiarativo

Soluzione numerica

Approccio procedurale

Scopo: descrivere *come* si deve calcolare una soluzione

Linguaggi di programmazione imperativa

algoritmo: procedura di calcolo

Come si legge un algoritmo?

Si immagina l'esecuzione dei singoli passi e si assegnano *progressivamente* i valori alle variabili

Approccio dichiarativo

Scopo: descrivere *cosa* si deve calcolare

Programmazione Matematica

modello: proprietà delle soluzioni

Come si legge un modello?

I valori delle variabili che rendono tutti i vincoli **contemporaneamente** soddisfatti sono soluzioni del modello

Modelli matematici: un paradigma dichiarativo

programmazione matematica

separa l'*aspetto concettuale* di rappresentazione del problema dall'*aspetto operativo* di calcolo di una soluzione

La programmazione matematica appartiene alla classe dei linguaggi *dichiarativi*

si specifica **cosa** deve essere calcolato (*proprietà della soluzione*)

e **non**

come deve essere calcolato (*procedura di soluzione*)

Approccio procedurale e dichiarativo: esercizio

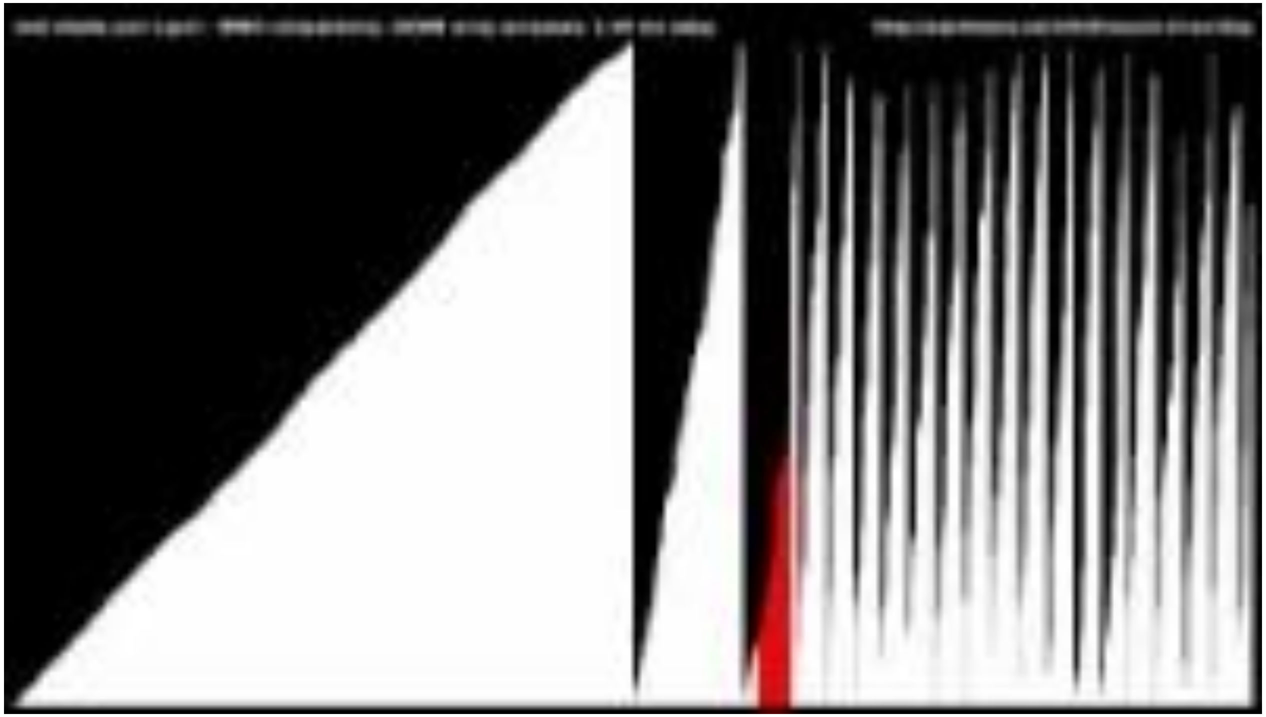
[Esercizio]

dati n numeri interi $a_1,\ldots, a_n$

- descrivere una procedura che determini una sequenza degli n numeri in ordine crescente;
- formulare un modello di programmazione matematica la cui regione ammissibile (o la soluzione ottima) descriva la sequenza (o le sequenze) in ordine crescente degli n numeri.

Approccio procedurale

…



```
procedure SelectionSort(a: lista dei numeri);
  for i = 0 to n
    posmin ← i
    for j = (i + 1) to n
      if a[j] < a[posmin] then posmin ← j
    if posmin != i then swap (a[i],a[posmin])
```

Approccio dichiarativo

. . .

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se l'elemento } i \in A = (a_1, \ldots, a_n) \text{ è in posizione } j \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in A$$

$$\sum_{i \in A} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i \in A} a_i x_{ij} \leq \sum_{i \in A} a_i x_{i(j+1)} \qquad \forall j = 1, \ldots, n-1$$

Variante

[Esercizio]

dati n numeri interi $a_1,\ldots, a_n$

- Determinare una sequenza in cui la somma di ogni tripla di elementi consecutivi non superi un dato parametro K

Discussione:

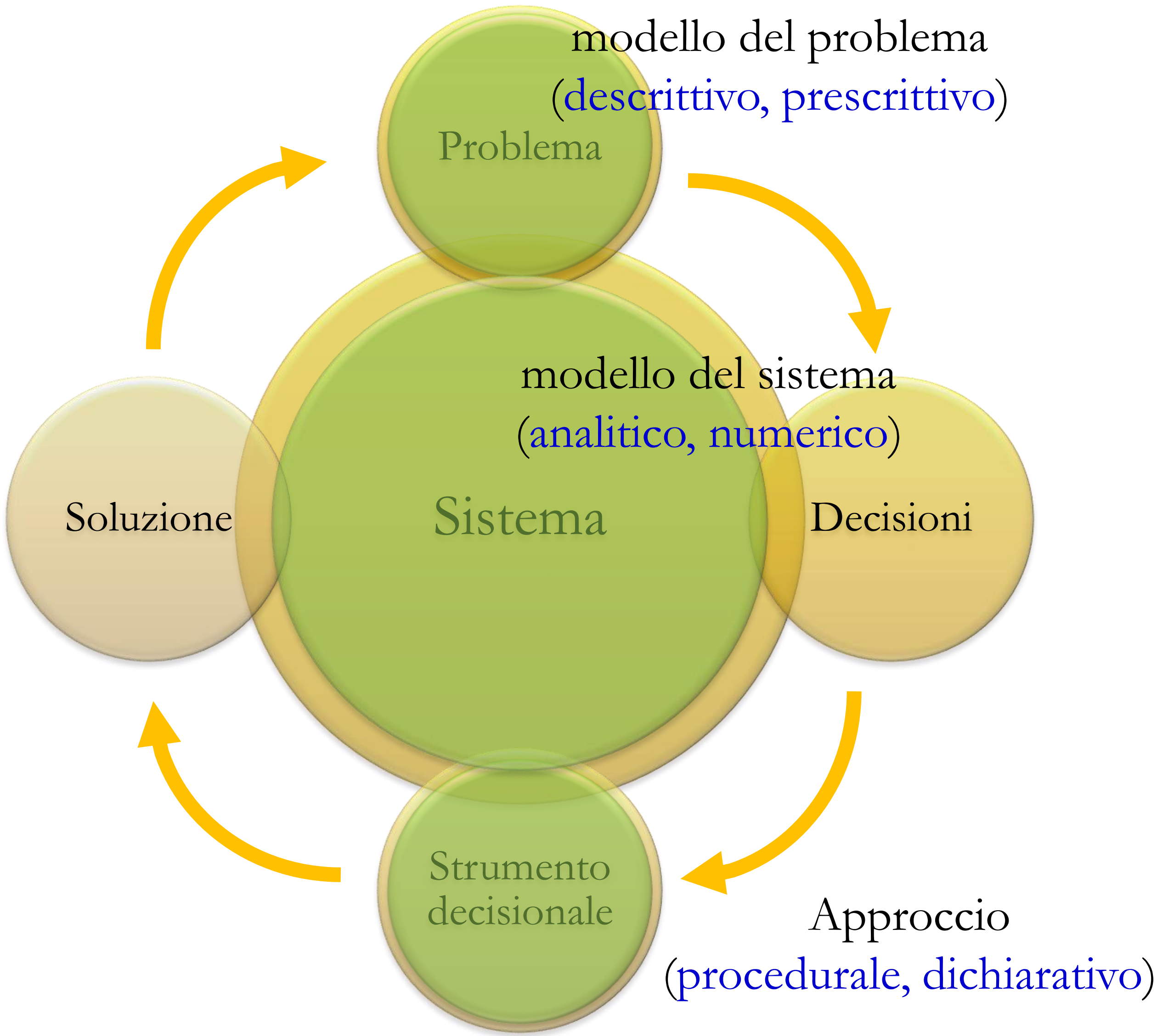
- Realizzare un modello di programmazione matematica significa concentrarsi sulle proprietà delle soluzioni e non su cosa fare per ottenerle

- Un modello di programmazione matematica è relativamente più semplice da implementare (e ci vuole meno tempo)

- I modelli di programmazione matematica sono più flessibili

- I modelli di programmazione matematica «garantiscono il risultato»

Riepilogo


modello del problema
(descrittivo, prescrittivo)
Problema
modello del sistema
(analitico, numerico)
Soluzione
Sistema
Decisioni
Strumento decisionale
Approccio
(procedurale, dichiarativo)

Un problema decisionale

[Problema] La *fabbrica del cioccolato* produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo A e B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo A e B?

	composizione			
	latte	cioccolato	zucchero	burro
crema A	40%	40%	10%	10%
crema B	24%	45%	31%	-
disponibilità (Kg)	312	360	160	70

Problema decisionale: esempio

vincoli

La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo A e B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo A e B?

decisioni

obiettivo

- Quali sono le decisioni da prendere e come si «codificano» ?

Problema decisionale: esempio ...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Le decisioni riguardano le quantità di A e B da produrre e possono essere codificate con due **variabili decisionali**:

- x = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- y = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

Problema decisionale: esempio …

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Obiettivo : massimizzare il guadagno:

$$\max\ (\underline{25\,x} + 28\,y\ )$$

Se produco x kg di crema A guadagno $25x$ Euro

Problema decisionale: esempio ...

			composizione		
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli : la quantità totale di latte utilizzata non può essere superiore alla disponibilità di latte in magazzino:

$$\underbrace{0.4x}_{\text{kg di latte che uso se produco } x \text{ kg di A}} + \underbrace{0.24y}_{\text{kg di latte che uso se produco } y \text{ kg di B}} \leq \underbrace{312}_{\text{disponibilità (in kg) di latte}}$$

Problema decisionale: esempio …

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli: vincoli analoghi vanno espressi per il cioccolato, lo zucchero e il burro:

- $0.4x + 0.45y \leq 360$
- $0.1x + 0.31y \leq 160$
- $0.1x \leq 70$

Problema decisionale: esempio ...

modello completo di programmazione matematica

	$z = \max 25x + 28y$	funzione obiettivo
C1:	$0.4x + 0.24y \leq 312$	vincolo sulla disponibilità di latte
C2:	$0.4x + 0.45y \leq 360$	vincolo sulla disponibilità di cioccolato
C3:	$0.1x + 0.31y \leq 160$	vincolo sulla disponibilità di zucchero
C4:	$0.1x \leq 70$	vincolo sulla disponibilità di burro
C5:	$x, y \geq 0$	**vincoli di non negatività**: le quantità prodotte non possono essere negative

[Esercizio]
Esprimere in forma *parametrica* questo modello di programmazione matematica

il problema dello zaino

(un problema decisionale di base)

Il problema dello zaino

Sto preparando il bagaglio per un viaggio. Vorrei portare n oggetti ma il loro peso complessivo supera il limite massimo pari a b Kg. Ogni oggetto è descritto da un peso w e da un valore p (affettivo, funzionale, economico…).

[Problema] Quali oggetti metto in valigia se voglio massimizzare il valore complessivo? Qual è il valore ottimo?

	valore p (€)	*Peso w* (hg)
oggetto 1	100	52
oggetto 2	60	23
oggetto 3	70	35
oggetto 4	15	15

Limite di peso: b = 60 hg

Alcune semplici strategie …

	valore p (€)	*Peso w* (hg)
oggetto 1	100	52
oggetto 2	60	23
oggetto 3	70	35
oggetto 4	15	15

Limite di peso: $b = 60$ hg

Strategia 1: seleziono gli oggetti a partire dal più leggero

soluzione: oggetti 4 e 2: $w = 38$ e $p = 75$

Strategia 2: seleziono gli oggetti a partire dal più prezioso

soluzione: oggetto 1: $w = 52$ e $p = 100$

esiste una soluzione migliore?

Calcolo di una soluzione ottima

Approccio procedurale

Algoritmo

se non è nota la struttura delle soluzioni ottime,
occorre esplorare (almeno implicitamente) l'***intero*** spazio delle soluzioni

Approccio dichiarativo

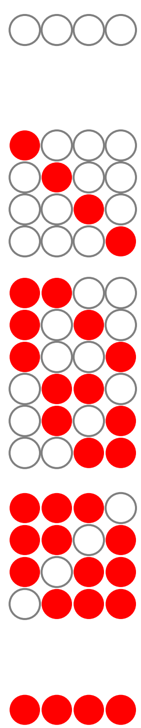
Modello di Programmazione Matematica

Occorre individuare prima di tutto le variabili decisionali

…

Quali e quante sono le potenziali soluzioni da valutare?

Le soluzioni potenziali sono tutti i possibili sottoinsiemi di oggetti:



0 oggetti $\binom{4}{0}$

1 oggetto $\binom{4}{1}$

2 oggetti $\binom{4}{2}$

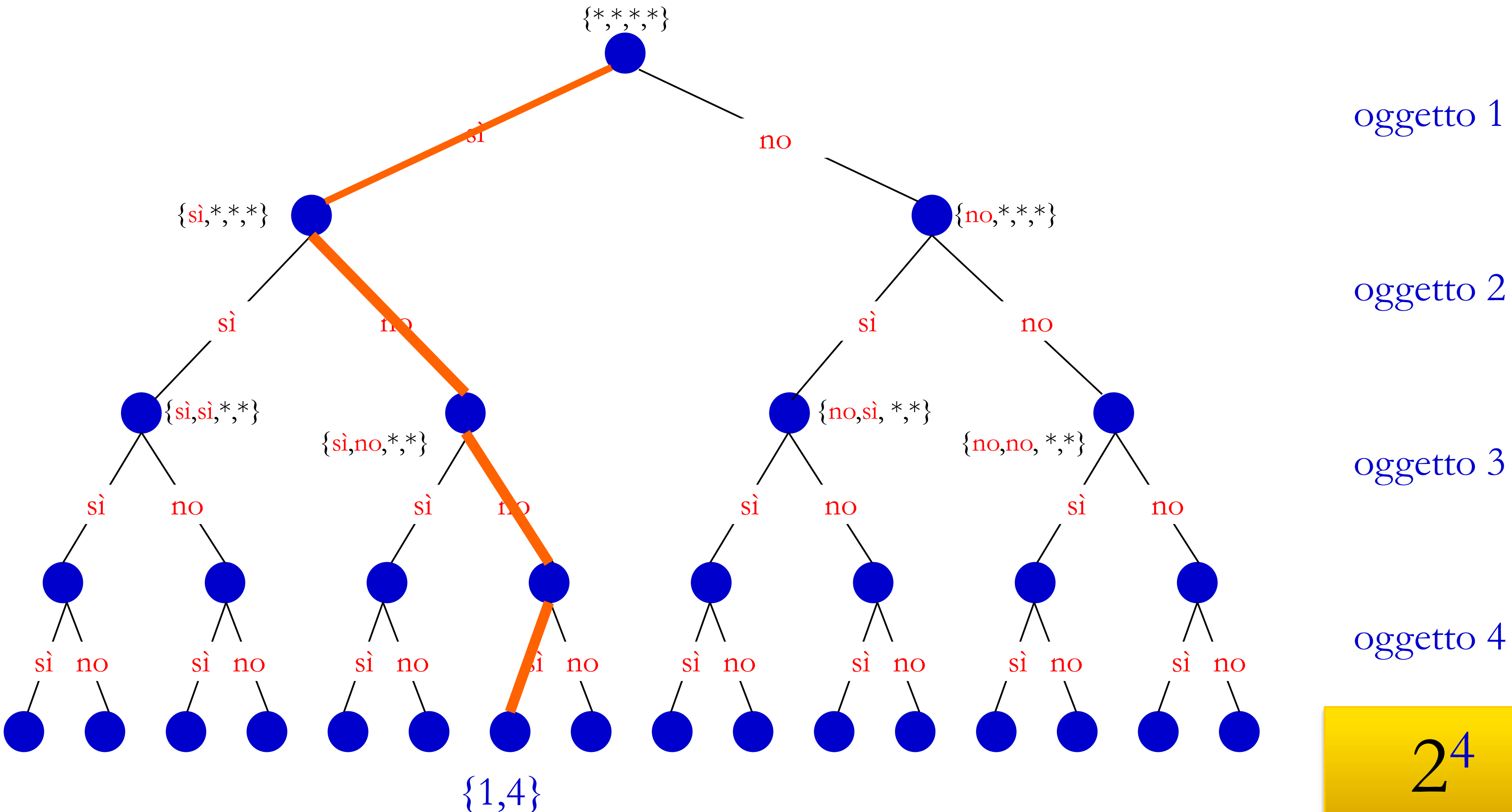
3 oggetti $\binom{4}{3}$

4 oggetti $\binom{4}{4}$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Rappresentazione ad albero

…



2^4

lo spazio delle soluzioni cresce esponenzialmente

Sto preparando il bagaglio per un viaggio. Vorrei portare n oggetti ma il loro peso complessivo supera il limite massimo pari a b Kg. Ogni oggetto è descritto da un peso w e da un valore p (affettivo, funzionale, economico…).

[Problema] Quali oggetti metto in valigia se voglio massimizzare il valore complessivo? Qual è il valore ottimo?

Qual è la variabile decisionale?

Problema dello zaino 0-1: variabili decisionali ...

Variabili decisionali

x_i = valore che si ottiene se si seleziona l'*i*-esimo oggetto

x_i = 1 se l'oggetto *i*-esimo è selezionato, 0 altrimenti

x = numero di oggetti selezionati

x_i = 1 se selezionando l'oggetto *i*-esimo si sfora il limite, 0 altrimenti

Problema dello zaino 0-1: modello ...

Devo prendere n decisioni, una per ogni oggetto.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{l'}i\text{-esimo oggetto è stato selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Vincoli**: il peso complessivo non può superare b hg

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n \leq b$$

- **Obiettivo**: massimizzare il valore degli oggetti in valigia

$$z = \max p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

esempio …

dati

	valore p (€)	*Peso w* (hg)
oggetto 1	100	52
oggetto 2	60	23
oggetto 3	70	35
oggetto 4	15	15

Limite di peso: $b = 60$ hg

modello

$$z = \max 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4$$

$$52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 \leq 60$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3,4$$

Problema dello zaino: un'applicazione

- **[Problema]** Si dispone di un budget di b € per realizzare n progetti. Ogni progetto ha un costo c_i e un guadagno atteso di p_i€. Quali progetti occorre selezionare per massimizzare il guadagno atteso rispettando il vincolo di budget?

Riassumendo

- Una decisione può essere codificata con una variable numerica x_1
- Una soluzione di un problema decisionale è un **assegnamento** di valori a un **set** di variabili di decisione $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
- In generale il numero di soluzioni è esponenziale nella dimensione del problema → una enumeraz. completa è impraticabile
- Strategie di ricerca ad hoc spesso sono sub-ottimali

Problema dello zaino

$x_i = 1$ l'oggetto i-esimo è selezionato

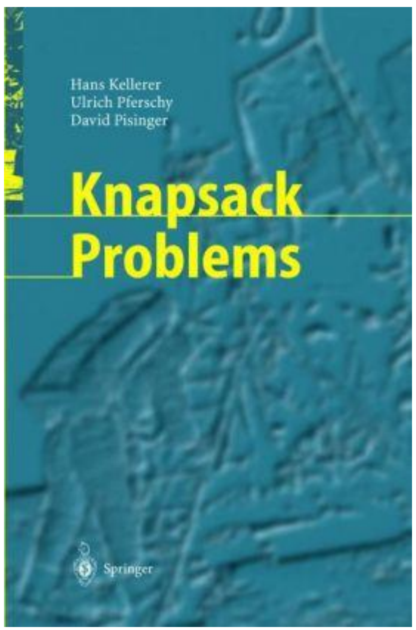
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = selezione degli oggetti

n oggetti e 2^n possibili soluzioni

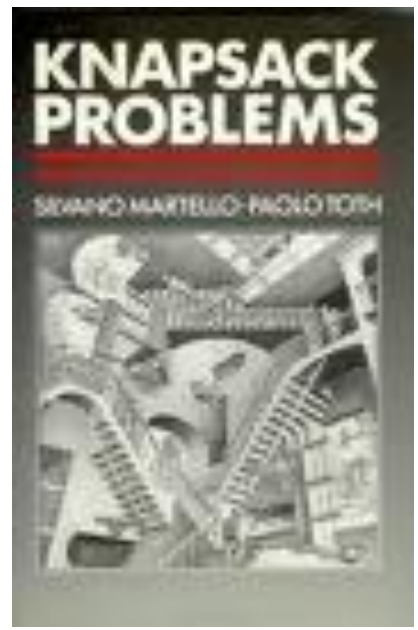
Prima più profittevole, prima più leggero, rapporti p_i / c_i decrescenti

I problemi dello zaino

Pubblicato nel 2010
(165$ su Amazon)
546 pagine



Pubblicato nel 1990
(free at http://www.or.deis.unibo.it/knapsack.html)
296 pagine



zaino 0-1: alcune proprietà

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \text{intero} \quad i = 1,\ldots,n$$

Consideriamo il problema di Programmazione Lineare associato

(cioè quello con variabili continue)

$$P_R : \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \text{ per } j = 1, \ldots, n$$

Procedura di Dantzig

Una soluzione del problema P_R si può ottenere ordinano le variabili per rapporti profitto/peso non crescenti

$$\boxed{\frac{p_1}{a_1} \geq \frac{p_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{p_n}{a_n}}$$

e assegnando i seguenti valori alle variabili corrispondenti

$$x^*_1 = x^*_2 =, \ldots, = x^*_{h-1} = 1,\ x^*_h = f,\ x^*_{h+1} = , \ldots, = x^*_n = 0$$

con $\boxed{f = \dfrac{b - \sum_{j<h} a_j}{a_h}}$

f esprime la frazione dell'h-esimo elemento necessaria per saturare lo zaino

Esempio

$$\max\ 7x_1 + 10x_2 + 19x_3 + 14x_4$$
$$3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 \leq 15$$
$$0 \leq x_1, \ldots, x_4 \leq 1$$

le variabili già sono ordinate per rapporti profitto/peso non crescenti

Soluzione

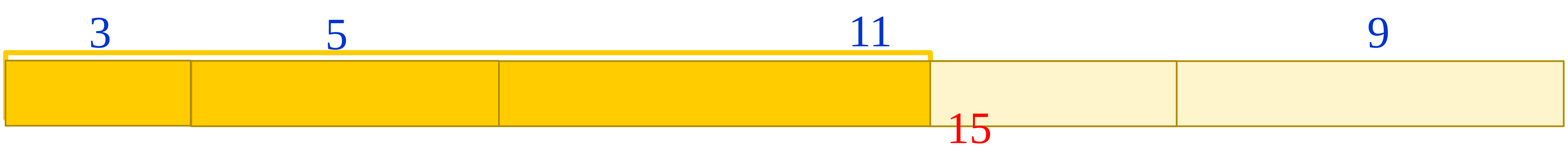
$a_1 < 15 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1,$ residuo: $15 - 3 = 12$

$a_2 < 12 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1,$ residuo: $12 - 5 = 7$

$a_3 > 7 \quad \rightarrow \quad x_3 = 7/11 = 0{,}64,$

$x_4 = 0$

$\mathbf{x}_R = (1,1,7/11,0) \qquad z_R = 29.09$



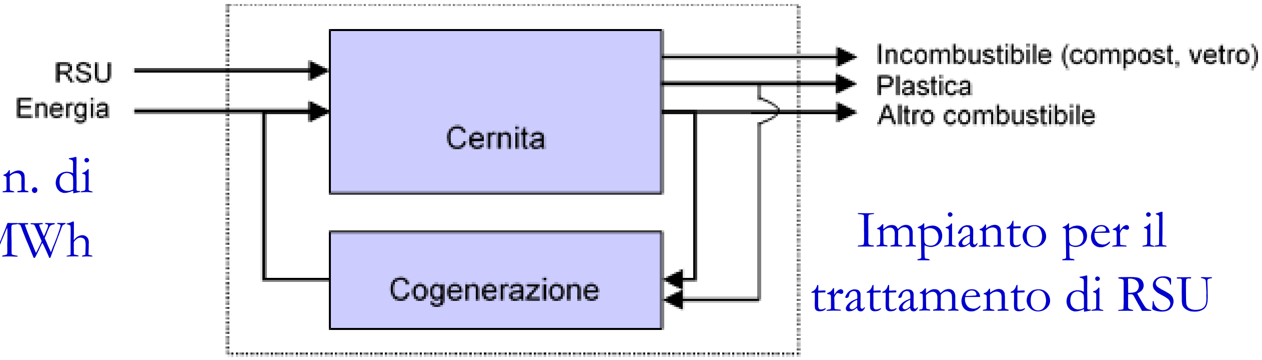
[Teorema] la soluzione $\mathbf{x}^*$ ottenuta con la procedura di Dantzig è la soluzione ottima di P_R

dimostrazione

[Esercizio] Estendere il risultato al rilassamento continuo del problema di zaino intero, cioè quello in cui i vincoli sulle variabili sono

$$0 \leq x_i \leq u_i \qquad \text{intero}$$

Teoria dello zaino: un'applicazione



L'impianto tratta 600 ton. di RSU e consuma 480 MWh

Impianto per il trattamento di RSU

I RSU trattati producono

- 20% materiale incombustibile
- 30% plastica (venduta a 240 €/ton oppure usata come combustibile)
- 50% di altro combustibile (venduto a 170 €/ton oppure usato come combustibile)

- L'impianto di cogenerazione produce 2,4 MWh (Megawatt ora) per ogni ton. di plastica bruciata, e 1,6 MWh per ogni ton. di altro combustibile.
- L'energia può essere acquistata esternamente a 210€/MWh.

Quanta plastica e altro combustibile è opportuno utilizzare per la cogenerazione se si vogliono massimizzare i profitti dell'impianto al netto dei costi di funzionamento?

Variabili decisionali

$e \geq 0$ MWh di energia da acquistare;
$p \geq 0$ ton. di plastica da destinare alla cogenerazione;
$c \geq 0$ ton. di altro combustibile da destinare alla cogenerazione.

Vincoli

$e + 2{,}4p + 1{,}6c = 480$ fabbisogno di energia dell'impianto

$p \leq 180$

$c \leq 300$

l'impianto produce $0{,}30 \cdot 600 = 180$ ton. di plastica e $0{,}50 \cdot 600 = 300$ ton. di altro combustibile

Funzione obiettivo

$$
\begin{aligned}
z &= 210e - 240(180 - p) - 170(300 - c) \\
&= 210e + 240p + 170c - 94200
\end{aligned}
$$

costo di esercizio: costo dell'energia acquistata meno ricavi dovuti alla vendita di plastica e altro combustibile

$$
z = \min 210e + 240p + 170c
$$

$$
\begin{aligned}
10e + 24p + 16c &= 4800 \\
p &\leq 180 \\
c &\leq 300 \\
e, p, c &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z = \min\ & 210e + 240p + 170c \\
& 10e + 24p + 16c = 4800 \\
& p \leq 180 \\
& c \leq 300 \\
& e, p, c \geq 0
\end{aligned}
$$

- Il vincolo di uguaglianza può essere *rilassato* in vincolo di $\geq$
- 480 è un limite superiore alla variabile e
- Il problema può essere trasformato in forma di massimo con il cambio di variabile

$$P = 180 - p$$
$$C = 300 - c$$
$$E = 480 - e$$

$$z = \min 210e + 240p + 170c$$

$$10e + 24p + 16c = 4800$$

$$p \leq 180$$

$$c \leq 300$$

$$e, p, c \geq 0$$

$$P = 180 - p$$

$$C = 300 - c$$

$$E = 480 - e$$

$$p = 180 - P$$

$$c = 300 - C$$

$$e = 480 - E$$

$$z = \min 210(480 - E) + 240(180 - P) + 170(300 - C)$$

$$10(480 - E) + 24(180 - P) + 16(300 - C) \geq 4800$$

$$180 - P \leq 180 \qquad 180 - P \geq 0$$

$$300 - C \leq 300 \qquad 300 - C \geq 0$$

$$480 - E \leq 480 \qquad 480 - E \geq 0$$

$$z = \min 210(480 - E) + 240(180 - P) + 170(300 - C)$$

$$10(480 - E) + 24(180 - P) + 16(300 - C) \geq 4800$$

$$180 - P \leq 180 \qquad 180 - P \geq 0$$

$$300 - C \leq 300 \qquad 300 - C \geq 0$$

$$480 - E \leq 480 \qquad 480 - E \geq 0$$

$$z = 195000 - \max 210E + 240P + 170C$$

$$-10E \quad -24P \quad -16C \geq 4800 - 13920$$

$$P \leq 180$$

$$C \leq 300$$

$$E \leq 480$$

$$E, C, P \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& -10E \quad -24P \quad -16C \geq 4800 - 13920 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E\,,\,C\,,\,P \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& 10E \quad +24P \quad +16C \leq 9120 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E\,,\,C\,,\,P \geq 0
\end{aligned}
}
$$

- Che problema è?

$$
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& 10E \quad + 24P \quad + 16C \leq 9120 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E\ , C\ , P \geq 0
\end{aligned}
$$

- Il problema è la versione continua di uno zaino **intero** (e non 0-1) ma si trasforma facilmente in zaino 0-1. …Come?
- Possiamo applicare la procedura di Dantzig per calcolare la soluzione ottima.

$$
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& 10E \quad + 24P \quad + 16C \leq 9120 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E\,,\,C\,,\,P \geq 0
\end{aligned}
$$

- Le variabili ordinate per rapporto profitto peso sono E, C e P

$$\frac{210}{10} > \frac{170}{16} > \frac{240}{24}$$

- La soluzione ottima è:

$$
\begin{aligned}
E &= 480 \\
C &= (9120 - 4800)/16 = 270 \\
P &= 0
\end{aligned}
$$

- La soluzione ottima è:

$$E = 480$$
$$C = (9120 - 4800)/16 = 270$$
$$P = 0$$

$$p = 180 - P$$
$$c = 300 - C$$
$$e = 480 - E$$

da cui

$e = 0$ MWh di energia da acquistare;

$p = 180$ ton. di plastica da destinare alla cogenerazione;

$c = 30$ ton. di altro combustibile da destinare alla cogenerazione.

$$z = 210e + 240p + 170c - 94200 = 43200+5100 - 94200 = -45900$$

L'impianto ha un profitto netto di 45900 Euro

Programmazione matematica

Programmazione matematica

Programma matematico

$$\min z = f(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \in X$$

funzione obiettivo: descrive il criterio di ricerca

regione ammissibile: insieme delle soluzioni ammissibili (è descritto da un sistema di (dis)equazioni).

variabili decisionali: descrivono le caratteristiche quantitative della soluzione

- $\mathbf{x} \in X$ è una soluzione ammissibile, $\mathbf{y} \notin X$ è una soluzione inammissibile.
- f è una funzione da X in $\mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$ è il valore che assume f in corrispondenza di un $\mathbf{x} \in X$.

$$\min z = f(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \in X$$

Programmazione non lineare

f e X arbitrari

Prog. discreta $X \subseteq \mathsf{Z}^n$

Prog. continua $X \subseteq \mathsf{R}^n$

Prog. Lineare Intera
f lineare
X dis. lineari

Prog. vincolata
$X \subset \mathsf{R}^n$

Prog. Non vincolata
$X = \mathsf{R}^n$

Prog. Lineare
f lineare
X dis. lineari

Prog. Quadratica
f e X convessi

Programmazione lineare (PL)

funzione obiettivo **lineare**

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1 +,\ldots,+ c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$z = \min f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \in X$$

insieme **finito** di (dis)equazioni **lineari**

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \quad j = 1,\ldots,m \right\}$$

Se le variabili possono assumere solo valori interi, cioè se il problema è di PLI, allora la regione ammissibile è costituita dai punti a coordinate intere contenuti in X

PL vs. PLI

- Benché formalmente simili, la PLI è matematicamente molto diversa dalla PL e computazionalmente molto più difficile da risolvere.

In particolare:

- le soluzioni ottime intere non sempre possono essere ottenute arrotondando le soluzioni frazionarie (…in realtà quasi mai);
- Le soluzioni frazionarie possono essere prive di significato (per esempio se le variabili intere sono binarie)

I 3 passi della programmazione matematica

- 3 passi per costruire un modello di programmazione matematica:
    1. determinazione delle variabili decisionali
    2. definizione della funzione obiettivo
    3. definizione dei vincoli, cioè delle relazioni logiche tra le variabili di decisione che caratterizzano il problema

- Di solito una scelta corretta delle variabili decisionali permette di esprimere in modo "naturale" funzione obiettivo e vincoli.

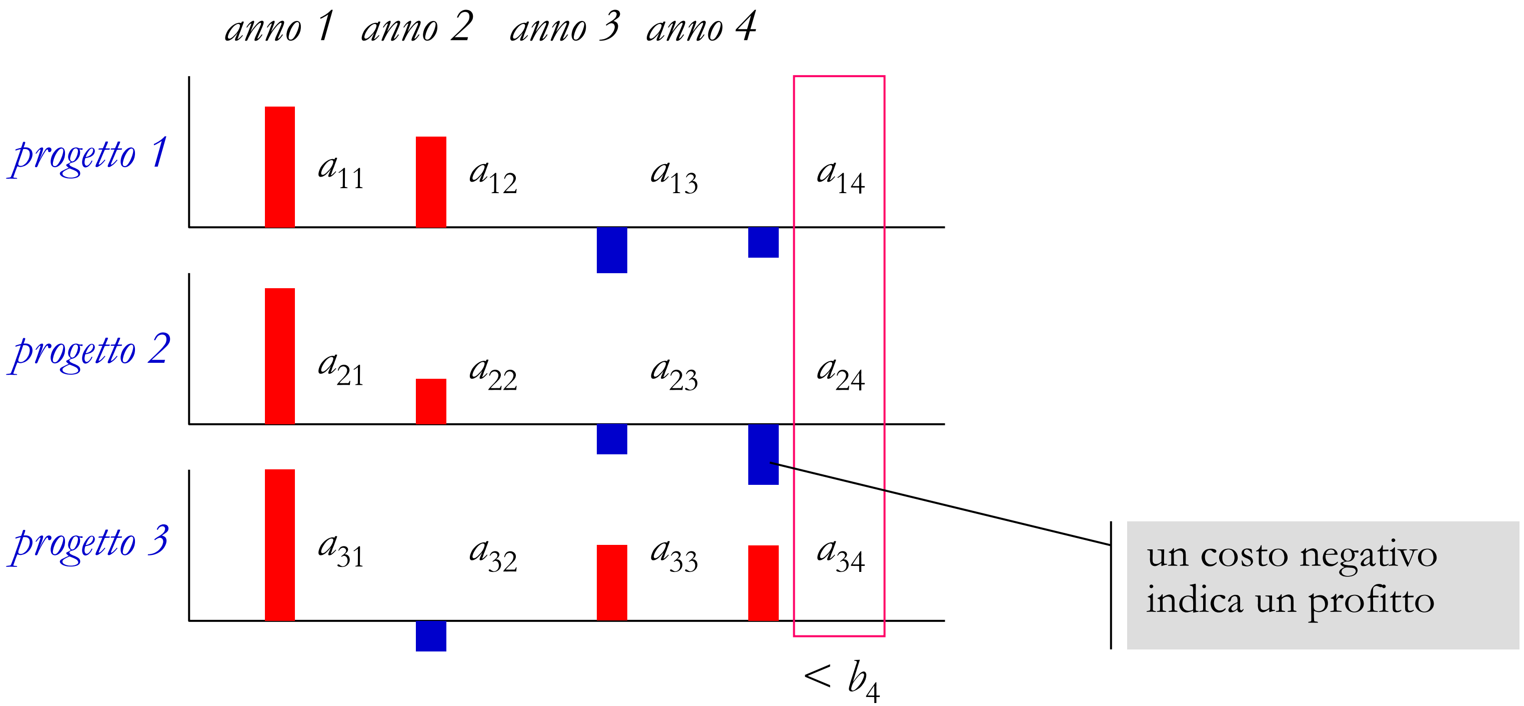
- Non esiste un metodo standard ma solo una serie di "strumenti utili":
    - libreria di modelli standard,
    - tecniche di riformulazione,
    - esperienza, …

Pianificazione di investimenti (ver 2)

esercizio

Pianificazione di investimenti (ver. 2)

- **[Problema]** Si vogliono realizzare n progetti nei prossimi T anni. Di ogni progetto i si conosce un indice di redditività p_i che esprime il guadagno finale atteso (in Euro) e un profilo di costo $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iT})$ per ogni anno del periodo considerato. Inoltre, in ogni anno j del periodo si dispone di un budget di b_j €. Quali progetti occorre selezionare per massimizzare il guadagno atteso rispettando i vincoli di budget?



Pianificazione di investimenti (ver. 2)

- **[Problema]** Si vogliono realizzare n progetti nei prossimi T anni. Di ogni progetto i si conosce un indice di redditività p_i che esprime il guadagno finale atteso (in Euro) e un profilo di costo $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iT})$ per ogni anno del periodo considerato. Inoltre, in ogni anno j del periodo si dispone di un budget di b_j €. Quali progetti occorre selezionare per massimizzare il guadagno atteso rispettando i vincoli di budget?

- **[Dati]**

		costi a (K€)			
	redditività p (K€)	anno 1	anno 2	anno 3	anno 4
progetto 1	30	10	5	-2	-1
progetto 2	20	12	2	-2	-5
progetto 3	25	15	-1	5	5

budget	30	6	6	6

Pianificazione di investimenti (ver. 2) ...

Variabili decisionali

x_{ij} = 1 se il progetto *i*-esimo inizia nell'anno *j*-esimo, 0 altrimenti

x_{ij} = costo del progetto *i*-esimo nell'anno *j*-esimo

$\boxed{x_i = 1 \text{ se il progetto } i\text{-esimo è selezionato, } 0 \text{ altrimenti}}$

x = numero di progetti selezionati

Pianificazione di investimenti: esempio ...

		costi a (K€)			
	redditività p (K€)	anno 1	anno 2	anno 3	anno 4
progetto 1	30	10	5	-2	-1
progetto 2	20	12	2	-2	-5
progetto 3	25	15	-1	5	5
	budget	30	6	6	6

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & 30x_1 + 20x_2 + 25x_3 \\
& 10x_1 + 12x_2 + 15x_3 \le 30 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \le 6 \\
& -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \le 6 \\
& -x_1 - 5x_2 + 5x_3 \le 6 \\
& x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

x_1	x_2	x_3	**a**	p
0	0	0	(0, 0, 0, 0) 0	
0	0	1	(15, –1, 5, 5)	25
0	1	0	(12, 2, –2, –5)	20
0	1	1	(27, 1, 3, 0)	45
1	0	0	(10, 5, –2, –1)	30
1	**0**	**1**	**(25, 4, 3, 4)**	**55**
1	1	0	(22, **7**, –4, –6)	--
1	1	1	(**37**, 6, 1, –1)	--

Pianificazione di investimenti (ver. 2) ...

Variabili decisionali

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il progetto } i \text{ viene selezionat o} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

In ogni anno *j* del periodo considerato, la somma algebrica dei costi dei progetti selezionati non deve superare il budget disponibile b_j

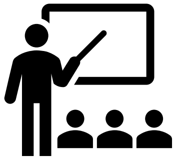
$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \qquad j = 1,\dots,T$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,\dots,n$$

Pianificazione di investimenti: esercizi

- Scrivere un modello matematico per ognuna delle seguenti varianti (in ordine di difficoltà):
  - **[Ex Appl_1]** Ogni nuovo progetto i comporta un costo globale di gestione c_i. Si vuole massimizzare il ricavo, cioè la differenza tra il guadagno atteso e i costi di gestione.
  - **[Ex Appl_2]** Il budget disponibile in ogni anno j è pari ad una quota fissa b_j sommata al budget residuo dei periodi precedenti.
  - **[Ex Appl_3]** Si supponga che i progetti abbiano una durata di $T' < T$ anni. Per ogni progetto selezionato si vuole individuare anche l'anno di avvio



«Soluzione» di un modello di programmazione matematica

Soluzione di un modello di prog. mat.

$$\min\ z = f(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \in X$$

- Risolvere un problema di programmazione matematica significa determinare, se esiste, **una** soluzione globalmente ottima, cioè un punto $\mathbf{x}^* \in X$ tale che $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$

- Una soluzione $\mathbf{x}' \in X$ si dice localmente ottima se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$

- Una soluzione ottima è un *punto stazionario* $\mathbf{x}^*$ (di minimo o di massimo) della funzione (obiettivo) $f(\mathbf{x})$.

- Un punto stazionario $\mathbf{x}^*$ si ottiene ponendo

$$f'(x) = 0 \qquad \text{se } x \in \mathbb{R} \qquad \text{oppure}$$

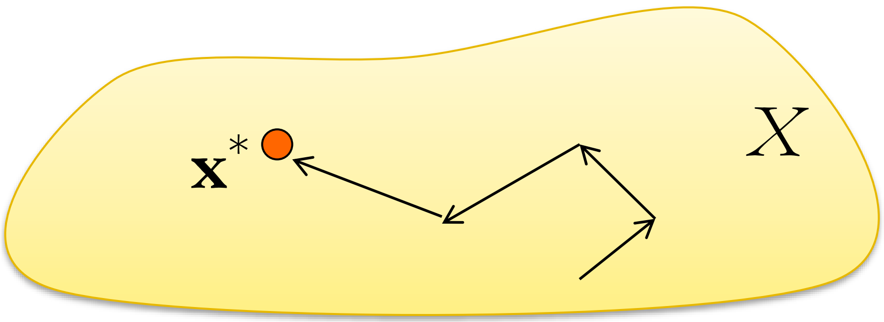
$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

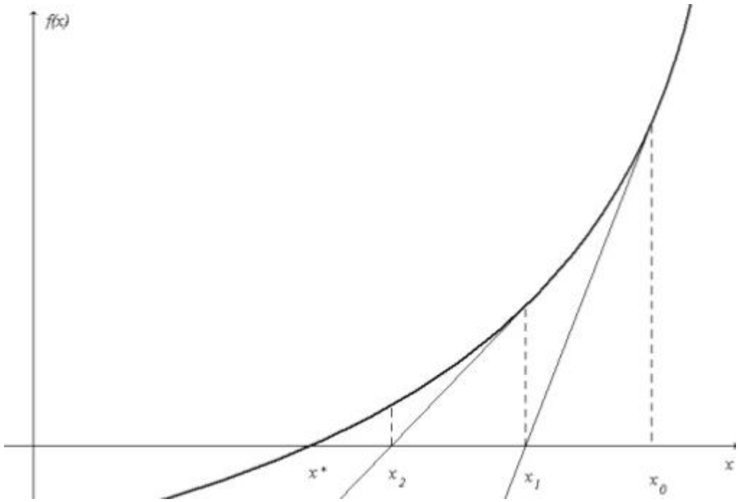
- ma la condizione del primo ordine è risolutiva in rarissimi casi. Infatti
  - è necessaria ma non sufficiente (quindi garantisce l'ottimalità locale ma non globale);
  - non contempla il caso di funzione vincolata e deve essere opportunamente estesa (condizioni KKT);
  - La soluzione analitica di $f'(x) = 0$ è limitata a casi molto semplici e specifici (teorema di Abel-Ruffini).

Si ricorre alla soluzione numerica con algoritmi di ricerca

Algoritmi di ricerca: efficacia e efficienza

- **algoritmo di ricerca**: metodo numerico che <u>esplora</u> l'insieme X delle soluzioni ammissibili alla ricerca della soluzione ottima $\mathbf{x}^*$



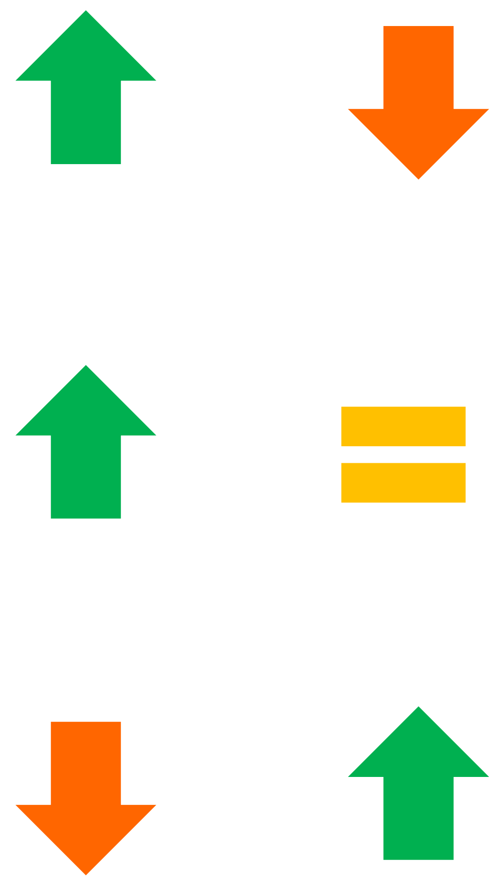


Proprietà di un algoritmo di ricerca

- **Efficienza**: rapidità di esecuzione
- **Efficacia**: capacità di determinare soluzione di buona qualità

Algoritmi esatti, approssimati e euristici

Efficienza | Efficacia



- Euristiche: calcolano (eventualmente) una soluzione ammissibile di cui non si certifica la qualità (*local search, simulated annealing, genetic algorithms*)
- Algoritmi approssimati: calcolano una soluzione ammissibile e ne certificano la qualità, indicandone la distanza massima da quella ottima
- Algoritmi esatti: certificano l'ottimalità delle soluzioni calcolate (*branch-and-bound, dynamic programming*).

Metodi euristici vs metodi esatti

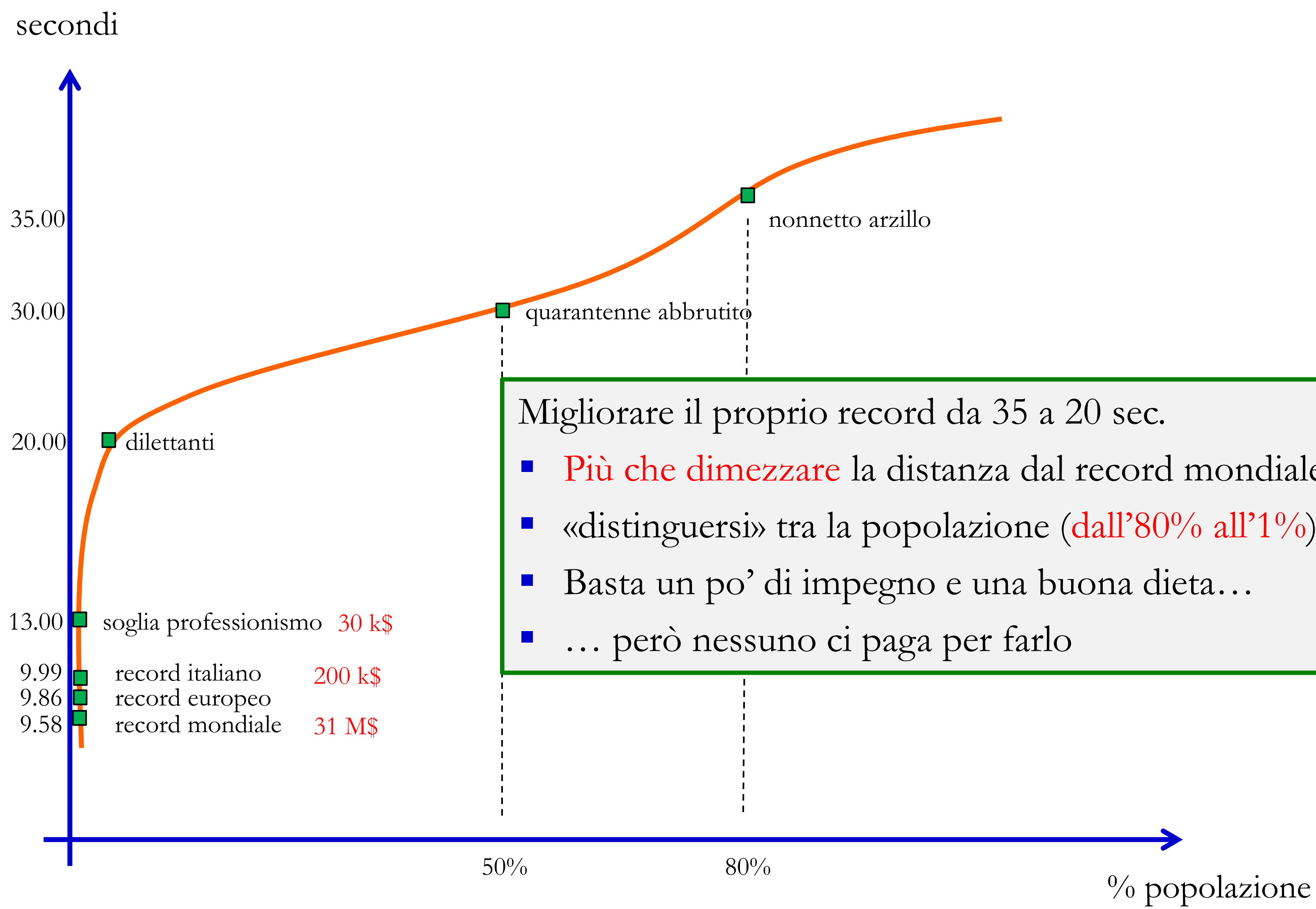
- Quando utilizzare euristiche al posto di algoritmi esatti

  - quando le dimensioni del problema sono eccessive rispetto a quelle risolvibili con metodi esatti
  - quando i problemi, anche se di limitate dimensioni, devono essere risolti in tempi estremamente brevi
  - quando i dati del problema sono approssimati e non vale la pena cercare la soluzione esatta
  - quando si risolvono problemi simili, ma non identici a quelli affrontati dagli algoritmi esatti. Questi ultimi sono molto meno generalizzabili delle euristiche

Metodi euristici vs metodi esatti

- Perché studiamo algoritmi esatti
  - Perché in alcuni casi il valore ottimo esprime una condizione logica (per es. il criterio di arresto di una procedura più generale).
  - Perché in alcuni casi esistono solo poche soluzioni difficili da individuare.
  - Perché gli algoritmi esatti spesso suggeriscono nuove strategie utili anche per progettare euristiche più sofisticate.
  - Perché di solito è facile trovare una soluzione quasi-ottima ma il margine competitivo garantito da una soluzione ottima è di notevole valore e/o cruciale importanza. (esempio)

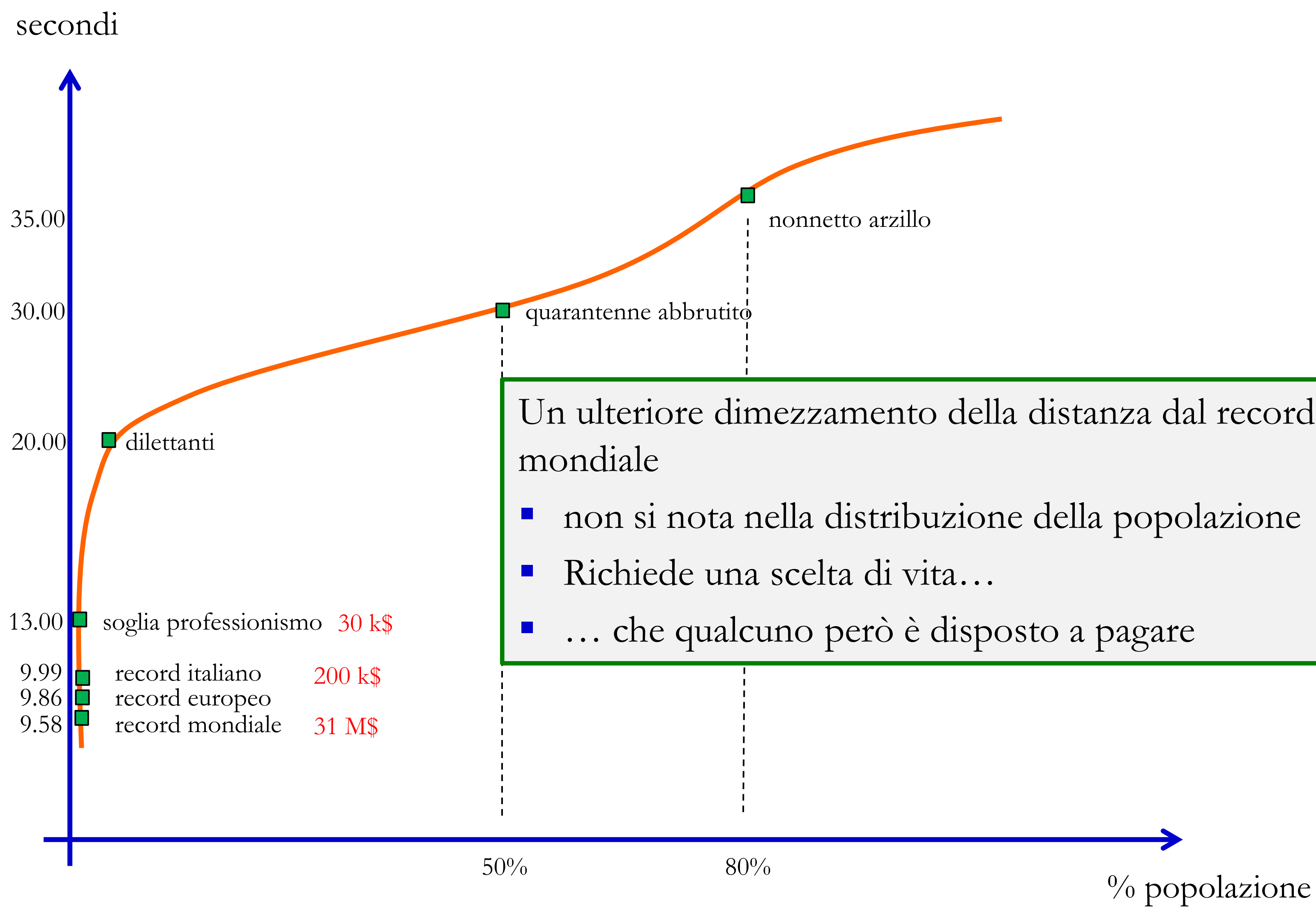
Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Migliorare il proprio record da 35 a 20 sec.

- Più che dimezzare la distanza dal record mondiale
- «distinguersi» tra la popolazione (dall'80% all'1%)
- Basta un po' di impegno e una buona dieta…
- … però nessuno ci paga per farlo

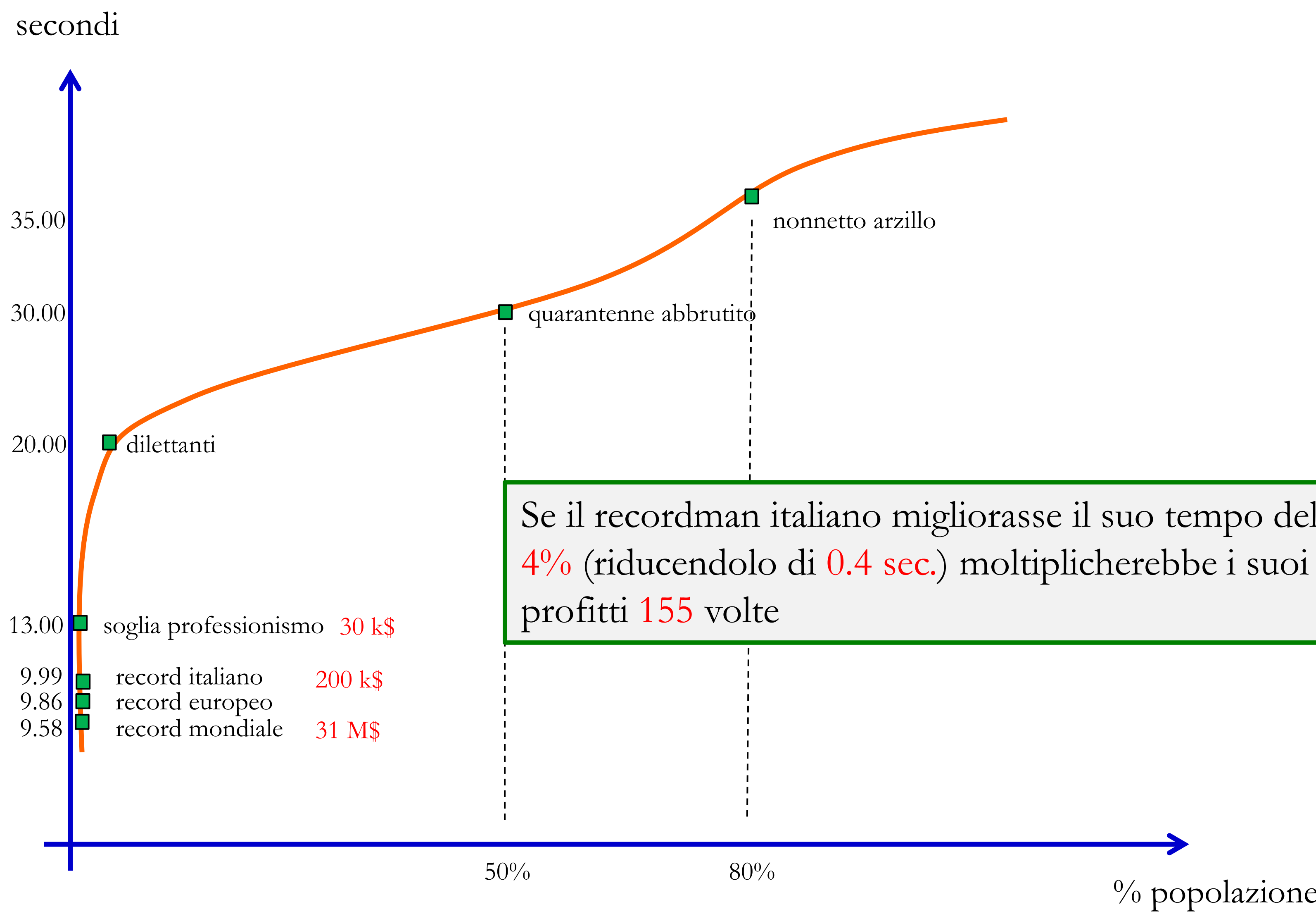
Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Un ulteriore dimezzamento della distanza dal record mondiale

- non si nota nella distribuzione della popolazione
- Richiede una scelta di vita…
- … che qualcuno però è disposto a pagare

Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Se il recordman italiano migliorasse il suo tempo del 4% (riducendolo di 0.4 sec.) moltiplicherebbe i suoi profitti 155 volte

Complessità computazionale

Complessità di un algoritmo

Definizione: in termini generali, la taglia (o dimensione) di una istanza di un problema P è la quantità n di memoria necessaria per descrivere l'istanza.

- Un algoritmo per un problema P si dice polinomiale se il numero di operazioni che esegue per **calcolare una soluzione** di una **qualsiasi istanza** di P cresce **polinomialmente** con la dimensione n dell'istanza (es. n^2, n^3, $n\log n$…).
- Un algoritmo non polinomiale è chiamato esponenziale (o a crescita esponenziale, per es. 2^n, 3^n, $n!$ …)

Complessità di un algoritmo

- Un algoritmo polinomiale **non** è **sempre** (cioè su **ogni istanza** di un problema) più veloce di un algoritmo esponenziale: lo è nel caso peggiore e al crescere della dimensione dell'istanza.

- Quando il caso peggiore si verifica molto raramente, si può addirittura preferire un algoritmo esponenziale, per es. il metodo del simplesso.

Complessità di un problema

- Nel linguaggio corrente complesso e complicato sono sinonimi:
  - *Complesso* [com-plès-so] **agg.** Che presenta vari aspetti eterogenei, che appare complicato e difficile da analizzare.
  - *Complicato* [com-pli-cà-to] **agg.** Che è o appare costituito di molti elementi confusi; complesso, difficile, imbrogliato, involuto.

- dal punto di vista computazionale, un problema può essere:
  - complicato: di difficile rappresentazione, che è descritto da molti parametri e regole.
  - complesso: di difficile soluzione, che richiede una gran mole di calcoli.
  - esteso: con uno ampio spazio di ricerca

Complessità di un problema

- problemi complicati **non sono sempre** complessi (per esempio redigere un bilancio)
- problemi complessi **non sono sempre** complicati (per esempio fattorizzare un numero).
- problemi estesi **non sono sempre** complessi (per esempio ordinare un insieme)

un problema complicato **può essere** anche complesso e viceversa.

complicare un problema **non implica** renderlo complesso.

Complessità di un problema

La complessità di un problema **dipende solo** dalla sua struttura matematica

- un problema P è detto difficile se esiste almeno una sua istanza che **non può essere** risolta all'ottimo da un algoritmo polinomiale

- Un problema P è detto facile (o trattabile) se esiste un algoritmo polinomiale che lo risolve all'ottimo.

Algoritmi per problemi difficili ...

«Veloce, efficace,
generale: scegline due»

Complessità computazionale

	Problema facile	Problema difficile
Algoritmo polinomiale esatto	*possibile*	*impossibile*
Algoritmo esponenziale esatto	*possibile*	*possibile*

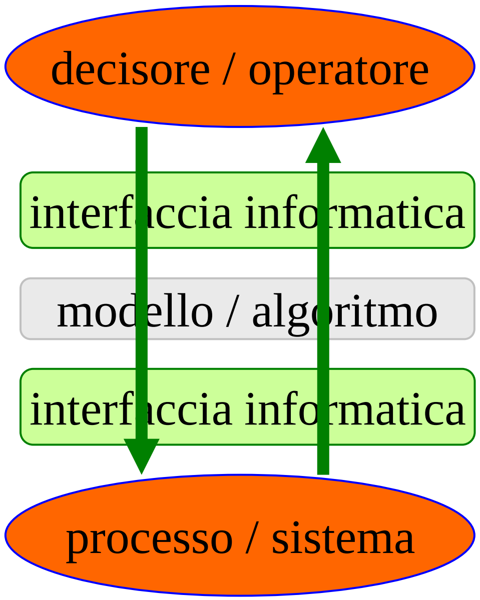
Algoritmi per la PL e la PLI

- La classe dei problemi di programmazione lineare (PL) è *facile*.
  Algoritmi iterativi
  - Metodo del simplesso (Dantzig, 1947)
  - Algoritmi interior-point (Karmarkar, 1984)

- La classe dei problemi di programmazione lineare intera (PLI) è *difficile*.
  Enumerazione (almeno implicita) di tutte le soluzioni ammissibili
  - Cutting plane (Gomory, 1957)
  - Branch-and-Bound (Doig & Land, 1960)
  - Programmazione Dinamica (Belmann, 1957)

Dal modello all'applicazione

- La correttezza di un modello non ne garantisce l'effettiva applicabilità. Il modello si pone tra il processo e il decisore e spesso necessita di una gran quantità di dati e di una forte interazione con gli utenti e gli altri processi.



- Si deve tener conto del contesto organizzativo e dell'infrastruttura tecnologica e per una buona riuscita è necessario realizzare intorno al modello un buon sistema di data-retrieval e una buona interfaccia utente.

- progettazione di applicazioni software.
  modello a cascata: *analisi*, *software design*, *codifica* e *test*.

Gestione file: esercizio di modellazione

- Un dispositivo di memoria è disponibile in blocchi di dimensione data (per es. 10 Mb).
- Un insieme di file deve essere memorizzato tenendo conto che ogni file non può essere frammentato in più blocchi.
- Qual è il minimo numero di blocchi necessari?

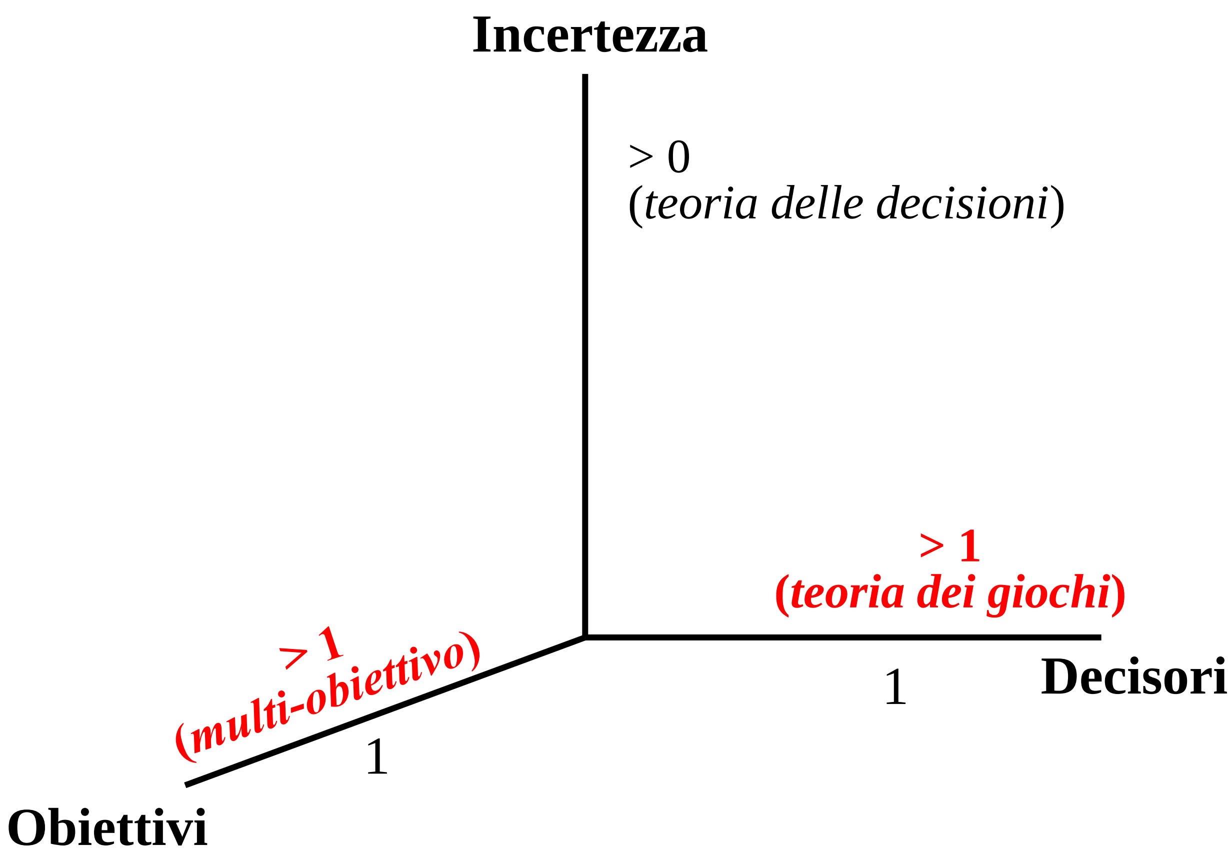
```
Block size: 10000 kb
File
kb,      #di files
3834, 10
6928, 11
1506, 22
204, 89
3408, 83
6623, 21
6102, 75
1755, 67
5653, 18
4809, 15
4286, 2
3465, 30
965, 75
4741, 79
3550, 16
3658, 28
6753, 4
1090, 29
5245, 6
6131, 33
```

provare con questo caso

Più obiettivi e più decisori

Problemi decisionali: tassonomia

- I problemi decisionali possono essere classificati in base alla natura del decisore, alla struttura dell'insieme ammissibile e alle ipotesi sulla funzione obiettivo



Problemi decisionali: caso con più obiettivi

- **[Esempio]** quando si valuta l'acquisto di un'auto non si sommano potenza, costo, consumo, ecc. ma si sceglie in base a un *compromesso*:

Non esiste un valore ottimo «in assoluto»

Problemi decisionali: caso con più obiettivi ...

- Se le funzioni obiettivo non sono confrontabili si rischia si sommare capre e cavoli.

- **[Esempio]** quando si valuta l'acquisto di un'auto non si sommano potenza, costo, consumo, ecc. ma si sceglie in base a un *compromesso*:

Non esiste un valore ottimo «in assoluto»

Spazio degli obiettivi

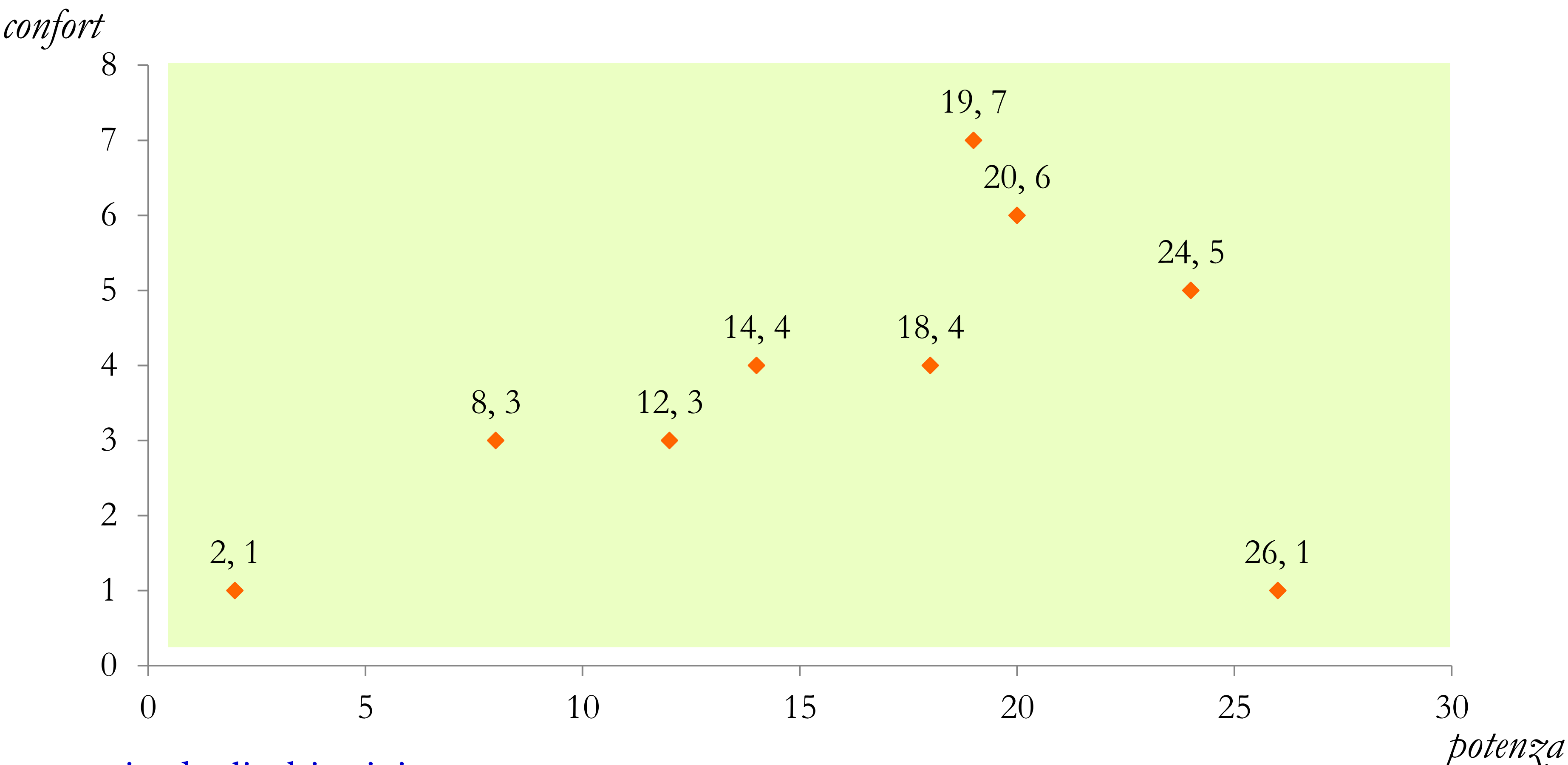
$$\begin{aligned} max\ z_1 &= f_1(\mathbf{x}) \\ max\ z_2 &= f_2(\mathbf{x}) \\ max\ z_3 &= f_3(\mathbf{x}) \\ \\ \mathbf{x} \in X &\subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

obiettivo 1
obiettivo 2
obiettivo 3

- **Spazio delle soluzioni**: una soluzione è un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots x_n)$ nello spazio $\mathbb{R}^n$. La soluzione $\mathbf{x}$ è ammissibile se $\mathbf{x} \in X$
- **Spazio degli obiettivi**: il «valore» di una soluzione è un punto $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ (una componente per ogni obiettivo del problema) nello spazio $\mathbb{R}^3$.

Soluzioni di compromesso

- **acquisto dell'auto**: voglio un'auto che mi soddisfi in termini di potenza (obiettivo 1) **e** confort (obiettivo 2)

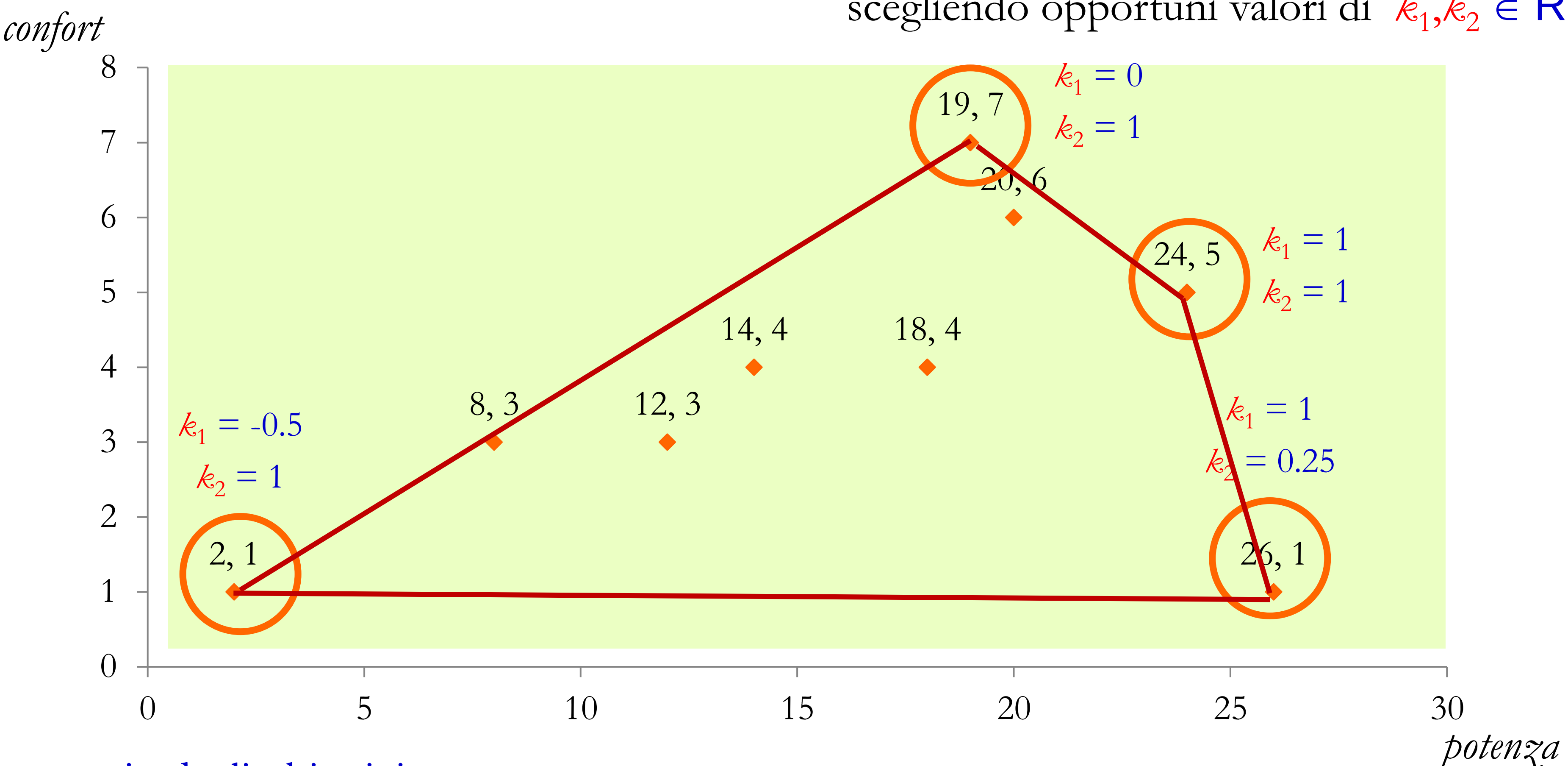


spazio degli obiettivi

Soluzioni di compromesso

$$\boxed{\max z = k_1 \text{ confort} + k_2 \text{ potenza}}$$

Le soluzioni che definiscono l'involucro convesso possono essere ottime scegliendo opportuni valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

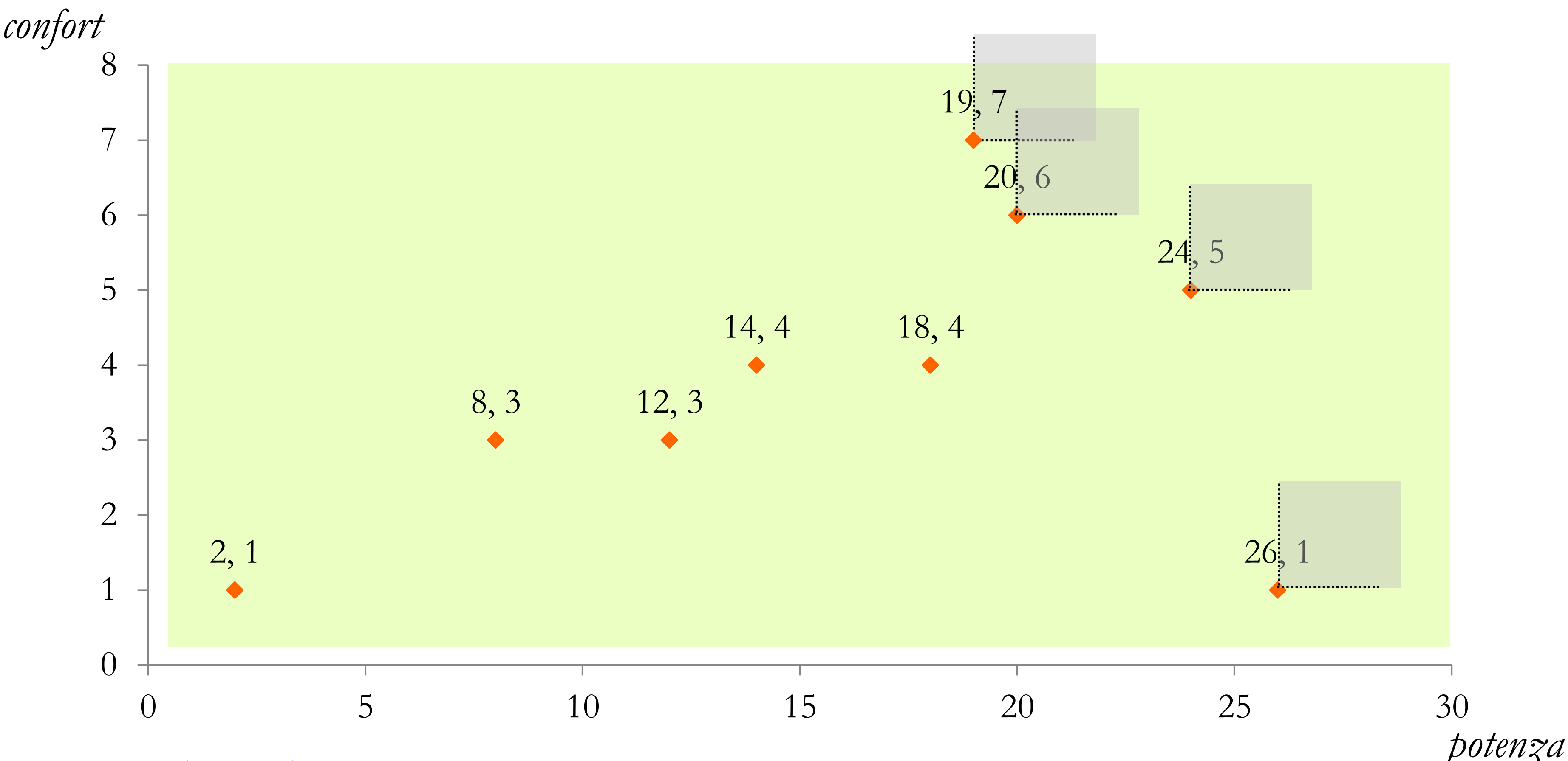


spazio degli obiettivi

Soluzioni di compromesso

- Tuttavia alcune soluzioni «sembrano migliori» di altre… sono le soluzioni *non dominate*

Notare che non esistono valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ che rendono ottima la soluzione (20, 6)



spazio degli obiettivi

Problemi decisionali: Pareto-ottimalità

Principio di dominanza: una soluzione **y** *domina* una soluzione **x** se **y** è almeno buona quanto **x** rispetto a tutte le funzioni obiettivo ed è strettamente migliore di **x** rispetto ad almeno una funzione obiettivo.

Se le funzioni obiettivo sono tutte di massimo **y** *domina* **x** se

$f_i(\mathbf{y}) \geq f_i(\mathbf{x})$ $\forall$ funzione obiettivo i

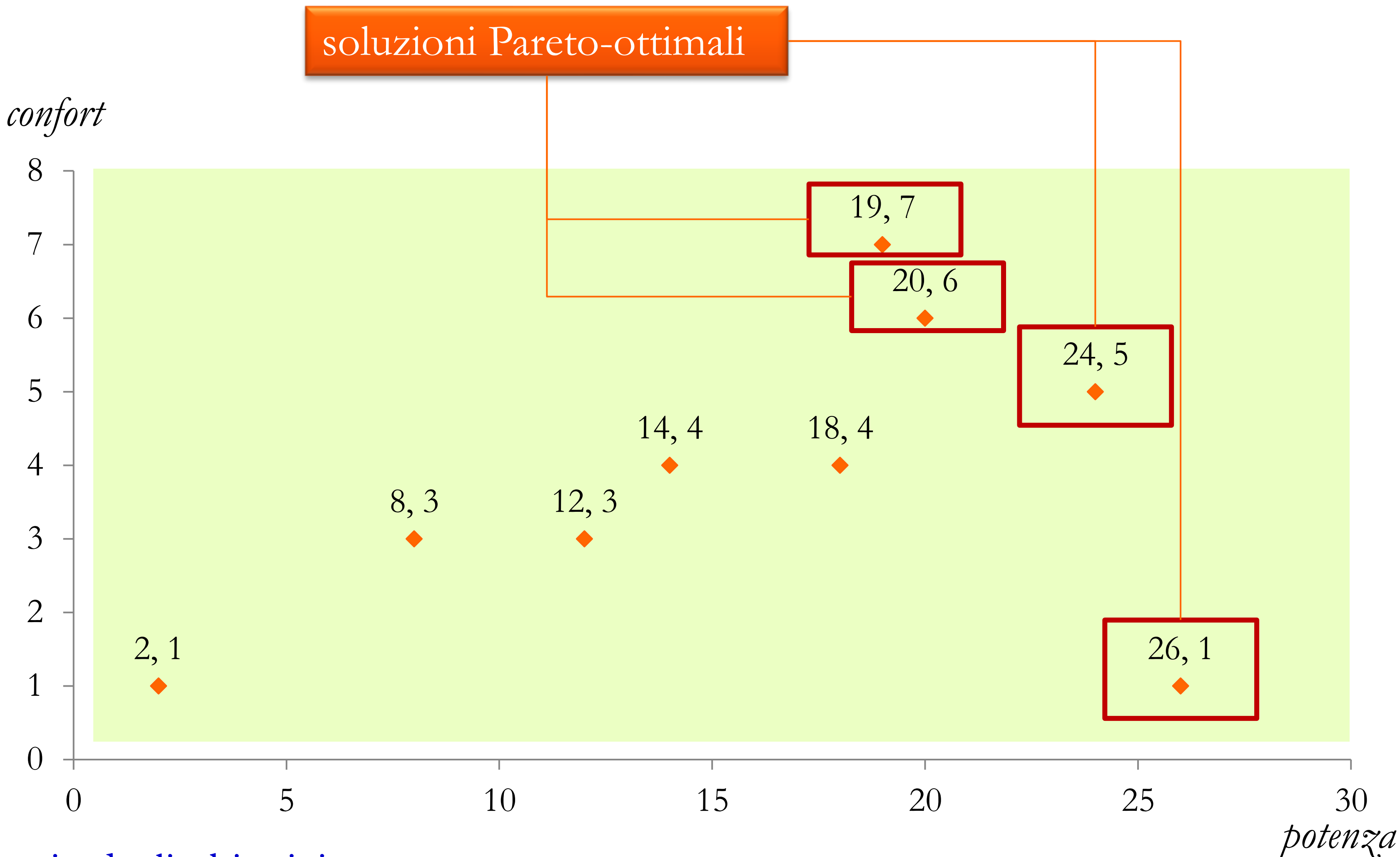
$f_k(\mathbf{y}) > f_k(\mathbf{x})$ per almeno una qualche funzione obiettivo k

Problemi decisionali: Pareto-ottimalità

- Approcci per problemi multi-obiettivo:
  - *goal-programming*
  - trasformazione in problemi con singolo obiettivo
  - calcolo di soluzioni *efficienti* o *pareto-ottimali*

Principio di Pareto-ottimalità: una soluzione **x** è ottima secondo Pareto se non è *dominata* da nessun altra soluzione.

Soluzioni di compromesso



spazio degli obiettivi

Problemi decisionali: caso con più decisori

- Problema di **interazione** tra i decisori

  - **Cooperativa:** i decisori hanno obiettivi comuni (eventualmente distinti) e talvolta interesse ad associarsi (*giochi cooperativi*).

    Si studiano meccanismi di *pianificazione*. Interessano le soluzioni a massima efficienza (pareto-ottimali)

  - **Competitiva:** i decisori hanno obiettivi individuali e contrastanti (*giochi non cooperativi* o *competitivi*).

    Si studiano meccanismi di *negoziazione*. Interessano le soluzioni che descrivono situazioni di equilibrio tra i decisori (*equilibrio di Nash*)

Teoria dei giochi

- Scopo:
  analizzare le situazioni in cui diversi decisori (*giocatori*) interagiscono perseguendo obiettivi comuni, diversi o conflittuali. L'interazione si chiama gioco

- Ruolo:
  - *Descrittivo*: interpretare la realtà, ossia spiegare le strategie adottate dai decisori.
  - *Prescrittivo*: determinare eventuali situazioni di equilibrio nella interazione tra decisori.

La soluzione di un gioco è una descrizione sistematica dei risultati che possono emergere in un determinato tipo di interazione tra decisori

Ipotesi di lavoro

Assiomi di *razionalità* (Von Neumann e Morgenstern)

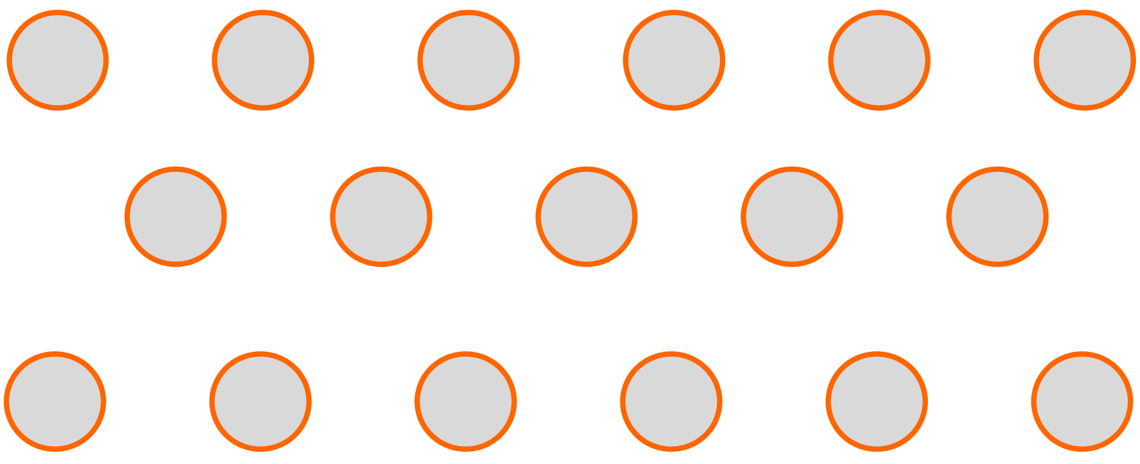
Tutti i decisori sono **razionali** e **intelligenti**

- **decisore razionale**
  in grado di assegnare un valore di utilità a ciascuno dei possibili risultati del gioco e, di conseguenza, orientare le sue scelte nella direzione di massimizzare la propria utilità

- **decisore intelligente**
  che dispone degli strumenti intellettivi per poter «calcolare» le azioni necessarie per massimizzare la propria utilità

Decisori intelligenti …

- Due giocatori ognuno dei quali, a turno, deve scegliere da 1 a 3 oggetti. Perde chi è costretto a fare l'ultima presa



Giochi strategici

Gioco strategico: modello di interazione tra giocatori in cui

- ciascun giocatore conosce completamente le conseguenze delle proprie azioni sugli altri giocatori, ma, chiaramente, non le azioni degli altri giocatori (informazione completa)
- ciascun giocatore sceglie le proprie mosse (e quindi agisce) una sola volta (il gioco non è ripetuto)
- Le scelte vengono effettuate simultaneamente senza conoscere le scelte degli altri giocatori
- I giocatori non possono accordarsi in modo vincolante (no coalizioni)

Giochi strategici: elementi

- N giocatori, ognuno dei quali dispone di un insieme di azioni o strategie possibili

$$S^i = \{s_1^i, s_2^i, \dots\} \qquad \text{per ogni giocatore } i = 1, \dots, N$$

e agisce in base a una funzione $u^i(s)$ di utilità (payoff) che descrive il suo profitto rispetto all'esito del gioco

l'utilità del singolo giocatore **dipende anche da quello che decidono** gli altri decisori

- un esito (o profilo) $\boxed{s = \{d^1, \dots, d^N\}}$ del gioco, in cui $d^i \in S^i$ è la strategia scelta dal giocatore *i*-esimo.

- Ad ogni esito corrisponde un risultato $u(s) = \{u^1(s), \dots, u^N(s)\}$ del gioco

Dilemma del prigioniero

- Un noto politico e un facoltoso finanziere vengono indagati per tangenti. Un magistrato zelante li interroga separatamente spiegando loro che:
  - se **entrambi confessano** ognuno sconterà **5 anni** di prigione;
  - se **entrambi non confessano** ognuno sconterà **un anno** di prigione;
  - se **solo uno confessa** accusando l'altro allora chi confessa è libero e l'altro sconterà **10 anni** di prigione.

- giocatori: {Politico, Finanziere}
- strategie: $S^P = S^F = \{$Confessa, Non confessa$\}$
- esiti: $\{C^P, C^F\}, \{N^P, N^F\}, \{C^P, N^F\}, \{N^P, C^F\}$

Dilemma del prigioniero

- Payoff (in questo caso descrive un costo):

Politico	Finanziere
$u^P(C^P, N^F) = 0$	$u^F(N^P, C^F) = 0$
$\succ$	$\succ$
$u^P(N^P, N^F) = 1$	$u^F(N^P, N^F) = 1$
$\succ$	$\succ$
$u^P(C^P, C^F) = 5$	$u^F(C^P, C^F) = 5$
$\succ$	$\succ$
$u^P(N^P, C^F) = 10$	$u^F(C^P, N^F) = 10$

- Si noti come l'utilità di ognuno dipende anche dalla scelta dell'altro giocatore.

Dilemma del prigioniero

- Un noto politico e un facoltoso finanziere vengono indagati per tangenti. Un magistrato zelante li interroga separatamente spiegando loro che:
  - se **entrambi confessano** ognuno sconterà **5 anni** di prigione;
  - se **entrambi non confessano** ognuno sconterà **un anno** di prigione;
  - se **solo uno confessa** accusando l'altro allora chi confessa è libero e l'altro sconterà **10 anni** di prigione.

- L'intera situazione può essere descritta dalla seguente tabella:

Politico \ Finanziere	*C*	*N*
C	(5,5)	(0,10)
N	(10,0)	(1,1)

Strategie dominanti

- Siano s_k^i e s_h^i due strategie del giocatore i e s^{-i} un vettore che specifica le strategie dei restanti $N-1$ giocatori:

- La strategia s_k^i domina strettamente la strategia s_h^i se

$$\boxed{u^i(s_k^i, s^{-i}) > u^i(s_h^i, s^{-i}) \qquad \text{per ogni possibile } s^{-i}}$$

Indipendentemente dalle scelte degli altri giocatori, il giocatore *i*-esimo preferirà **sempre** la sua strategia *k*-esima alla *h*-esima

Strategie dominanti

- Siano s_k^i e s_h^i due strategie del giocatore i e s^{-i} un vettore che specifica le strategie dei restanti $N-1$ giocatori:

- La strategia s_k^i domina debolmente la strategia s_h^i se

$$u^i(s_k^i, s^{-i}) \geq u^i(s_h^i, s^{-i}) \quad \text{per ogni possibile } s^{-i} \text{ e}$$

$$u^i(s_k^i, s^{-i}) > u^i(s_h^i, s^{-i}) \quad \text{per qualche } s^{-i}$$

[Nota] Se esiste una strategia strettamente dominante, questa è unica. Possono invece esistere più strategie debolmente dominanti.

Eliminazione iterata di strategie dominate

- Se i giocatori sono razionali e intelligenti, le strategie <u>strettamente</u> dominate possono sempre essere rimosse dal gioco:

Infatti se la strategia s_k^i domina strettamente la strategia s_h^i, il giocatore *i*-esimo preferirà per definizione **<u>sempre</u>** la sua strategia *k*-esima alla *h*-esima, indipendentemente dall'esito del gioco.

Se l'eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate porta ad un solo possibile esito del gioco, tale esito è la soluzione del gioco.

Dilemma del prigioniero

- Il finanziere è razionale quindi farà il seguente ragionamento:

politico \ finanziere	C	N
C	(5,**5**)	(0,10)
N	(10,**0**)	(1,1)

- "Se il politico confessa posso *a*) confessare ed essere condannato a 5 anni oppure *b*) non confessare ed essere condannato a 10 anni, **quindi senz'altro confesso**".
- "Se invece il politico non confessa posso *a*) confessare ed essere libero oppure *b*) non confessare e beccarmi un anno di carcere, **quindi senz'altro confesso**".

Dilemma del prigioniero

- In termini matematici il ragionamento del finanziere è il seguente:

C^F domina strettamente N^F perché

- N^P : $u^F(N^P, C^F) \succ u^F(N^P, N^F)$
- C^P : $u^F(C^P, C^F) \succ u^F(C^P, N^F)$

La strategia N^F può essere eliminata dal gioco

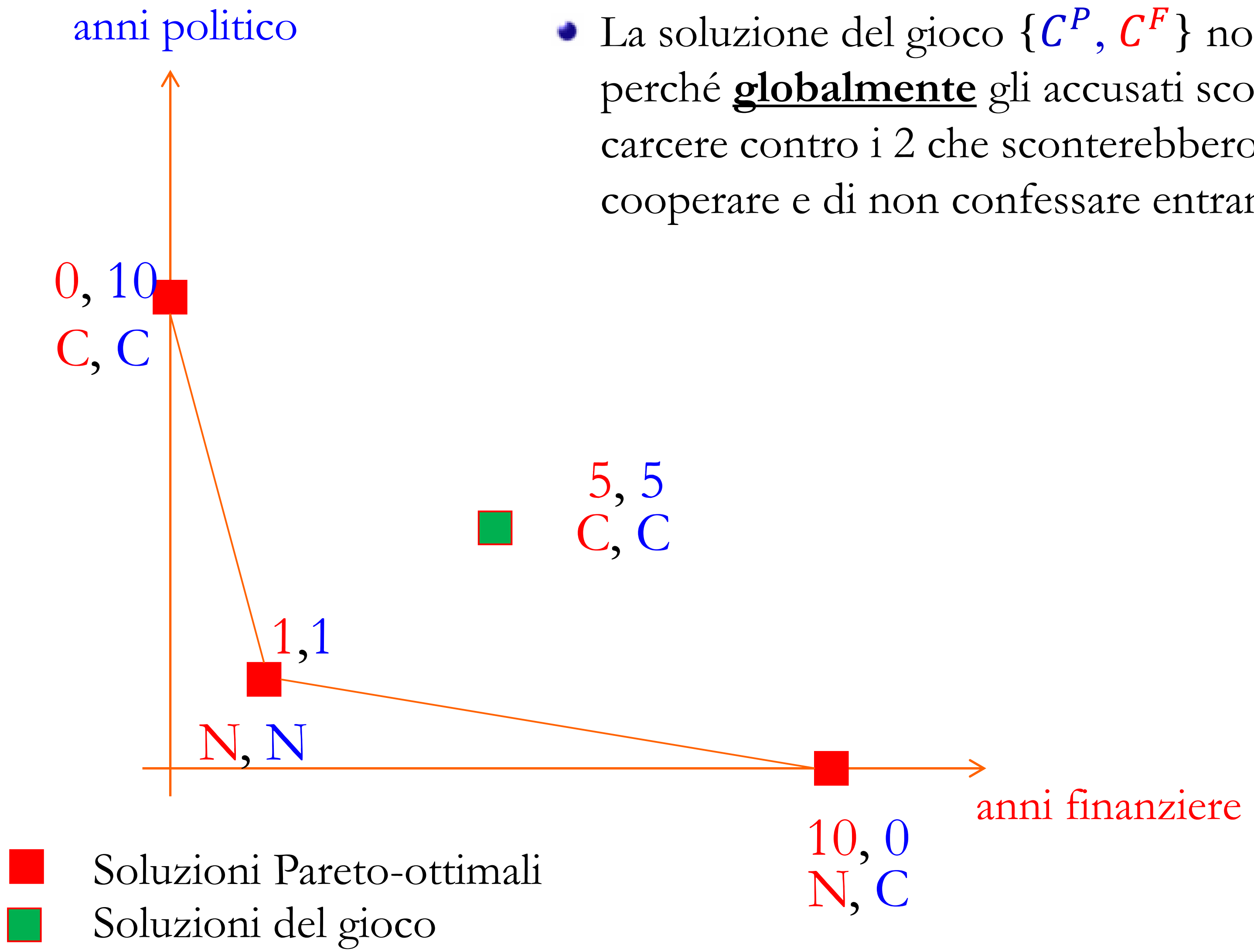
Dilemma del prigioniero

		Finanziere	
		C	N
Politico	C	(5,5)	(0,10)
	N	(10,0)	(1,1)

A questo punto il politico (che sa che il finanziere è razionale e quindi sicuramente confesserà) sa che gli esiti del gioco si restringono a (C^P, C^F) e (N^P, C^F) e, analizzando i suoi payoff, realizza che la strategia C^P domina strettamente la strategia N^P

La soluzione del gioco è $\{C^P, C^F\}$

Dilemma del prigioniero



- La soluzione del gioco $\{C^P, C^F\}$ non è pareto-ottimale perché **<u>globalmente</u>** gli accusati sconteranno 10 anni di carcere contro i 2 che sconterebbero se decidessero di cooperare e di non confessare entrambi.

Dilemma del prigioniero

		finanziere C	finanziere N
politico	C	(?,?)	(?,?)
	N	(?,?)	(?,?)

[Esercizio]

- Esiste uno scenario alternativo di anni di reclusione che ammette come soluzione del gioco per entrambi la non confessione?
- Esiste uno scenario alternativo di anni di reclusione che non ammette una strategia dominante?

Esempio di eliminazione iterata di st. dominate

- 2 giocatori {1,2}
- 3 strategie per ogni giocatore: $S^1 = \{T, M, B\}$ e $S^2 = \{L, C, R\}$
- Esiti e payoff (guadagno)

	L	C	R
T	(4,5)	(1,7)	(5,6)
M	(3,4)	(2,5)	(5,4)
B	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 2 non giocherà mai la strategia R che è strettamente dominata dalla strategia C

Esempio

	L	C	R
T	(4,5)	(1,7)	(5,6)
M	(3,4)	(2,5)	(5,4)
B	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 1 non giocherà mai la strategia B che è strettamente dominata dalla strategia M

	L	C	R
T	(4,5)	(1,7)	(5,6)
M	(3,4)	(2,5)	(5,4)
B	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 2 non giocherà mai la strategia L che è strettamente dominata dalla strategia C

Esempio

	L	C	R
T	(4,5)	(1,7)	(5,6)
M	(3,4)	(2,5)	(5,4)
B	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 1 non giocherà mai la strategia T che è strettamente dominata dalla strategia M

	L	C	R
T	(4,5)	(1,7)	(5,6)
M	(3,4)	(2,5)	(5,4)
B	(2,5)	(1,1)	(7,0)

La soluzione del gioco è l'esito $\{C, M\}$

Gerarchia di credenze: 1 sa che 2 sa che 1 sa che 2 …è razionale

Ancora sulla soluzione del gioco

- Non sempre esiste una soluzione ottenibile per eliminazione iterata di strategie dominate, quindi non sempre la soluzione di un gioco è unica.

Falchi e Colombe: un noto partito politico ha due correnti A e B ognuna delle quali rispetto a un particolare tema può decidere di comportarsi *da duro e puro* oppure *scendere a un compromesso.*

- se **entrambe** scendono a un **compromesso** si perde l'identità del partito;
- se **A** fa il **duro e puro** e **B** sceglie il **compromesso**, gli elettori premiano **A** per l'integrità mostrata (**e viceversa**)
- se **entrambe fanno i duri e puri**, si avviano alla **scissione**

Falchi e Colombe

- 2 giocatori {A,B}
- 2 strategie per ogni giocatore: $S^A = S^B = \{compr, D\&P\}$
- Esiti e payoff (guadagno)

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

Entrambe le correnti non hanno una strategia dominante

Infatti A osserva che

- se B scende a compromessi, si vince facendo i duri e puri, mentre
- se B fa il duro e puro scendere a compromessi evita la scissione.

E chiaramente B fa lo stesso ragionamento

Falchi e Colombe

- Se entrambi scelgono il compromesso allora uno dei due potrebbe trarre vantaggio trasformandosi in duro e puro (a patto che l'altro insista col compromesso, …cosa che sembra improbabile)

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

- A e B si rendono conto che qualsiasi esito è migliore della scissione

Gli esiti {compr, compr} e {D&P, D&P} non sono stabili

Falchi e Colombe

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

Se A sceglie il compromesso e B fa il duro e puro (esito {compr, D&P}), nessuno riesce a migliorare la propria utilità con una decisione unilaterale, cioè senza convincere anche l'altro a cambiare strategia. Infatti:

- Se A cambia strategia in duro e puro la sua utilità passa da -1 a -10.
- Se B cambia strategia e sceglie il compromesso la sua utilità passa da 1 a 0.

Situazione del tutto speculare si verifica con l'esito {D&P, compr}.

Gli esiti {compr, D&P} e {D&P, compr} sono di equilibrio perché A e B non hanno interesse a modificare **unilateralmente** la propria strategia

Equilibrio di Nash

- Un esito $s = \{d^1, \dots, d^N\}$ è un equilibrio di Nash se **<u>per ogni giocatore</u>** i si ha:

$$\boxed{u^i(d^i, s^{-i}) \geq u^i(s_k^i, s^{-i}) \qquad \text{per ogni } s_k^i \in S^i}$$

La condizione esprime una sorta di «stato stazionario» tra i giocatori rispetto al quale nessuno ha interesse a deviare **unilateralmente**.

In altri termini: se **ogni** decisore attua una strategia non dominata, l'unico modo per migliorare la propria situazione è sperare che altri decisori cambino la propria strategia. E d'altro canto, se i decisori sono razionali, **nessuno** ha interesse a modificare la propria strategia.

Dilemma del prigioniero

		Finanziere	
		C	N
Politico	C	(5,5)	(0,10)
	N	(10,0)	(1,1)

La soluzione $\{C^P, C^F\}$ è un equilibrio di Nash perché entrambi i giocatori stanno adottando una strategia dominante rispetto all'esito del gioco e nessuno può «guadagnare» di più senza che l'altro cambi la propria strategia.

Falchi e Colombe

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

Le soluzioni {compr, compr} e {D&P, D&P} sono entrambi equilibri di Nash perché in quelle situazioni di nuovo entrambi i giocatori stanno adottando una strategia dominante rispetto all'esito del gioco.

Equilibrio di Nash: considerazioni

- Un gioco può ammettere più di un equilibrio di Nash

- Non tutti i giochi con strategie *pure* ammettono un equilibrio di Nash.

- Se un gioco ammette almeno un equilibrio di Nash, allora esiste almeno un esito in cui ogni giocatore ha a disposizione una strategia dominante

- Contrariamente ad altre situazioni (es. giochi a somma zero in cui il guadagno di un decisore coincide con la perdita dell'altro) in un equilibrio di Nash tutti i giocatori possono ottenere un vantaggio (o limitare lo svantaggio al minimo)

Strategia pura senza equilibrio

- Sasso, Carta, Forbice

	S	*C*	*F*
S	(=,=)	(P,V)	(V,P)
C	(V,P)	(=,=)	(P,V)
F	(P,V)	(V,P)	(=,=)

- **[Teorema (Nash)]** Tutti i giochi con strategie *miste* ammettono almeno un equilibrio di Nash

Equilibrio di Nash: considerazioni

- Un equilibrio di Nash rappresenta il meglio che ogni decisore può fare per sé quando **tutti i decisori del gioco sono reciprocamente in competizione**.

- Però la situazione di qualcuno o di tutti può migliorare se si prende in considerazione la possibilità di cooperare (giochi cooperativi o con coalizioni)

In generale, un equilibrio di Nash
non è la soluzione ***migliore globalmente***
(potrebbe infatti non essere una soluzione pareto-ottimale, come esemplificato dal dilemma del prigioniero)

Equilibrio di Nash: considerazioni

- D'altra parte, se si instaura una **cooperazione** tra i decisori e **tutti** agiscono non per ottenere il miglior risultato per sé, ma per ottenere **il miglior risultato collettivo**, qualcuno potrebbe essere penalizzato perché deve sacrificarsi per gli altri.

La razionalità collettiva (pareto-ottimalità) generalmente contrasta con quella individuale (equilibri di Nash).

Esercizio

- La Facoltà di *Scienze Occulte* offre il corso a scelta in *Informatica Esotica*.
- Il corso è tenuto in formato fotocopia (cioè con identico syllabus) dagli emeriti professori **Ford** e **Fulkerson**. Di conseguenza, gli studenti si dividono equamente nella scelta (statisticamente parlando) di una delle due versioni del corso.
- Recentemente però il preside di facoltà ha introdotto un criterio meritocratico che prevede un premio ai corsi più numerosi.
- Benché **Ford** e **Fulkerson** siano restii (per motivi culturali e pedagogici) a modificare il syllabus, ognuno di loro sa che semplificare la prova d’esame sposta il 30% di studenti dal corso del «rivale» al proprio
- … e entrambi vogliono fare bella figura agli occhi del preside (ovvero non vogliono rischiare il posto).

Esercizio

1. Ford e Fulkerson raggiungono un equilibrio?
2. Se sì, cosa comporta tale equilibrio a lungo termine?
3. Se l'effetto di lungo termine è negativo, quale potrebbe essere un rimedio?

Giochi strategici: interpretazioni

1. Il gioco modella una situazione che ha luogo una sola volta. I giocatori non possono comunicare e ognuno deve fare la propria scelta senza conoscere quella degli altri. Inoltre ogni giocatore non ha modo di «farsi un'idea» su come si comporteranno gli altri

2. Ogni giocatore può «farsi un'idea» su cosa faranno gli altri, perché per esempio il gioco si ripete. **Tuttavia**, il comportamento di ogni giocatore non ha «aspetti strategici» e ogni giocatore è **esclusivamente** interessato a massimizzare l'utilità della **singola ripetizione**.

Se il giocatore assume un «comportamento strategico» allora si parla di **giochi ripetuti** invece che di giochi strategici

Teoria dei giochi: considerazioni

- La teoria dei giochi presuppone « *razionalità* » e « *conoscenza* », concetti ancora troppo elusivi e/o definiti in modo primitivo

- si può non essere d'accordo con la scelta «più razionale»
- si può perdere facendo la scelta «più razionale»

Una nota sui giochi ripetuti

- Immaginiamo che i due giocatori A e B del dilemma del prigioniero siano chiamati a «giocare» più volte (per esempio 10 volte), e consideriamo le seguenti strategie che ognuno dei due può adottare

1. Essere egoista (confessare **sempre**)
2. Avere piena fiducia nel prossimo (non confessare **mai**)
3. Perdere la ragione (decidere a caso)
4. Fare il furbo (avere piena fiducia… tranne qualche volta)
5. *Ca' nisciun è fess*: non appena l'altro confessa divento definitivamente egoista
6. Mi baso sul comportamento dell'altro giocatore al turno precedente: se ha confessato, io ora confesso; se non ha confessato io non confesso ora

Una nota sui giochi ripetuti

- Ora immaginiamo una popolazione di individui che si incontrano a caso e ognuno dei quali adotti una delle precedenti strategie.
- E immaginiamo che tra una generazione e l'altra sopravviva la porzione di individui che abbia guadagnato di più

Esiste una strategia dominante
(in questa nuova accezione)?

Bibliografia

1. C. Vercellis,
   Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni.
   Mc Graw-Hill, 2008

2. F.S. Hillier, G.J. Lieberman,
   Ricerca Operativa,
   Mc Graw-Hill, IX ed., 2010

3. A. Agnetis, **dispense**

Appendice:

Dualità per dimostrare l'esattezza di un algoritmo

zaino 0-1: rilassamento continuo e duale

[Teorema] il vettore $\mathbf{x_R}$ ottenuto con la procedura di Dantzig è una soluzione ottima per *rilassamento continuo* P_R del problema di zaino 0-1

[Dimostrazione]

Il rilassamento continuo del problema è

$$P_R : \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$y: \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$$

$$z_i: \quad x_i \le 1 \qquad i = 1,\dots,n$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,\dots,n$$

Il duale di P_R è

$$D_R : \min yb + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

$$a_i y + z_i \ge p_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$y, z_i \ge 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

zaino 0-1: condizioni di ortogonalità

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} \left(b - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) y = 0 \\ (1 - x_i) z_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{array}} \\ \boxed{(p_i - a_i y - z_i) x_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n} \end{array}\right.$$

dai vincoli del primale

dai vincoli del duale

$\mathbf{x_R}$ è una soluzione ottima di P_R se esiste una soluzione del duale $(y^*, \mathbf{z}^*)$ che, in coppia con $\mathbf{x_R}$, soddisfi le condizioni di ortogonalità

zaino 0-1: condizioni di ortogonalità

1. $(b - \sum a_j x_j) y^* = 0$ — banalmente soddisfatta dato che $\sum a_j x_j = b$

2. $(1 - x_j) z^*_j = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,n$

3. $(p_j - a_j y^* - z^*_j) x_j = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,n$

$$y^*, z^*_1, \ldots, \boxed{z^*_h, \ldots, z^*_n}$$

da $x_h < 1$ e $x_{h+1},\ldots, x_n = 0$, si ha $z^*_h,\ldots,z^*_n = 0$.

dato che $x_1,\ldots, x_h > 0$ deve essere

$$p_j - a_j y^* - z^*_j = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,h-1$$
$$p_h - a_h y^* = 0$$

zaino 0-1: condizioni di ortogonalità

$\boxed{p_j - a_j y^* - z^*_j = 0 \quad \forall j = 1,\ldots,h-1}$ Risolvendo rispetto a z^*_j

$\boxed{p_h - a_h y^* = 0}$ Risolvendo rispetto a y^*

$$\boxed{y^*}, \boxed{z^*_1, \ldots, z^*_{h-1}}, \boxed{z^*_h, \ldots, z^*_n}$$

$$= \frac{p_h}{a_h} \qquad = p_j - a_j \frac{p_h}{a_h} \qquad = 0, \ldots, 0$$

Il vettore $(y^*, \mathbf{z}^*)$ così definito soddisfa, in coppia con $\mathbf{x_R}$, le condizioni di ortogonalità. Ora si tratta di stabilire se $(y^*, \mathbf{z}^*)$ è una soluzione ammissibile duale.

zaino 0-1: ammissibilità duale

Per l'ammissibilità del duale deve essere

$$a_j y^* + z^*_j \geq p_j \qquad \forall j = 1,\ldots,n$$

dato che $z^*_h,\ldots,z^*_n = 0$ i vincoli del duale diventano

$$a. \qquad a_j y^* + z^*_j \geq p_j \qquad \forall j = 1,\ldots,h-1$$

$$b. \qquad a_j y^* \geq p_j \qquad \forall j = h,\ldots,n$$

Per l'ordinamento non crescente dei rapporti,
il valore $y^* = p_h / a_h$ soddisfa tutti i vincoli b.

zaino 0-1: ammissibilità duale

Si osservi inoltre che anche i vincoli $a_j y + z_j \geq p_j$ per $j = 1,\ldots,h-1$, sono soddisfatti dal vettore $(y^*, \mathbf{z}^*)$ dato che sostituendo:

$$y^* = \frac{p_h}{a_h} \qquad\qquad z_j^* = p_j - p_h \frac{a_j}{a_h}$$

si ottiene

$$a_j \frac{p_h}{a_h} + p_j - p_h \frac{a_j}{a_h} \geq p_j$$

$$a_j \frac{p_h}{a_h} - a_j \frac{p_h}{a_h} \geq 0$$

$$0 \geq 0$$

zaino 0-1: ammissibilità duale

Infine si osservi che $\mathbf{z}^* \geq 0$, dato che

per $j = 1,\ldots,h-1$ si ha

$$z_j^* = p_j - p_h \frac{a_j}{a_h} = \frac{p_j}{a_j} - \frac{p_h}{a_h} \geq 0$$

per l'ordinamento non crescente dei rapporti

$$\frac{p_h}{a_h} = \min\left(\frac{p_j}{a_j}\right)$$

e per $j = h,\ldots,n$ si ha

$$z_h^* = \cdots = z_n^* = 0$$

In conclusione, $(y^*, \mathbf{z}^*)$ è una soluzione ammissibile duale che soddisfa tutte le condizioni di ortogonalità, quindi $\mathbf{x_R}$ è una soluzione ottima del rilassamento continuo P_R. ■