

Problemi, modelli e algoritmi

ver 4.0.0

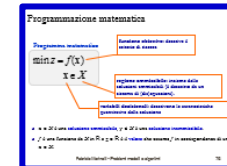
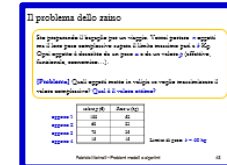
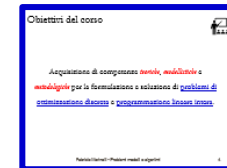


Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it
tel. 071 - 2204823



- Problemi e modelli (richiami)
- Un esempio: il problema dello zaino
- Programmazione matematica
- Metodi di soluzione
- La complessità dei problemi
- Più obiettivi e più decisori

- Problemi e modelli (richiami)
- Un esempio: il problema dello zaino
- Programmazione matematica
- Metodi di soluzione
- La complessità dei problemi
- Più obiettivi e più decisori



Obiettivi del corso



Acquisizione di competenze *teoriche*, *modellistiche* e *metodologiche* per la formulazione e soluzione di problemi di ottimizzazione discreta e programmazione lineare intera.

Applicazioni

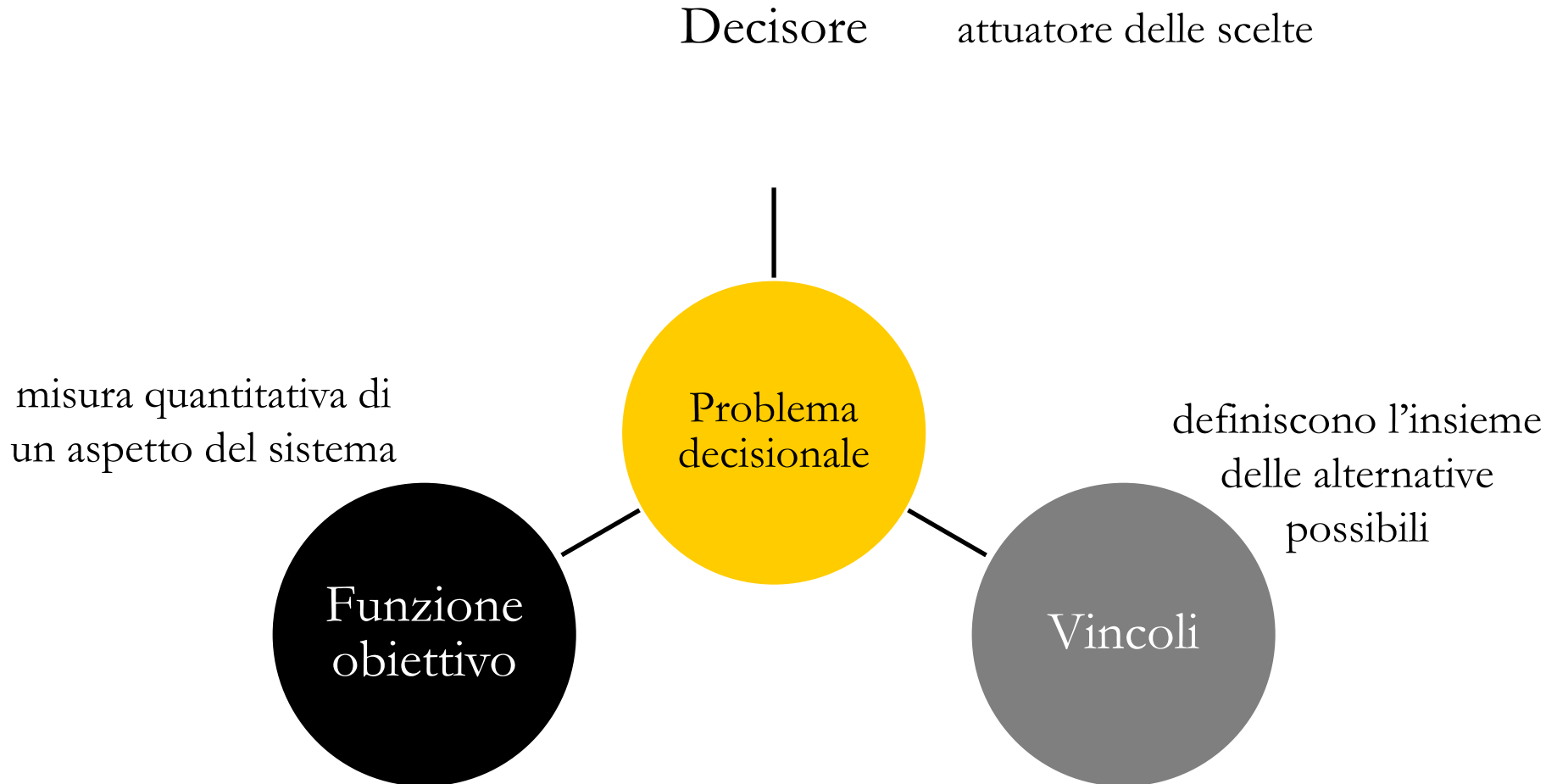


parola chiave: *problema decisionale*

Problema decisionale: scegliere, tra diverse alternative plausibili (in genere **mooolte**), una *configurazione* del *sistema* dettata da un insieme di decisioni che consenta di soddisfare *al meglio* i requisiti prestazionali del sistema



parola chiave: *problema decisionale*



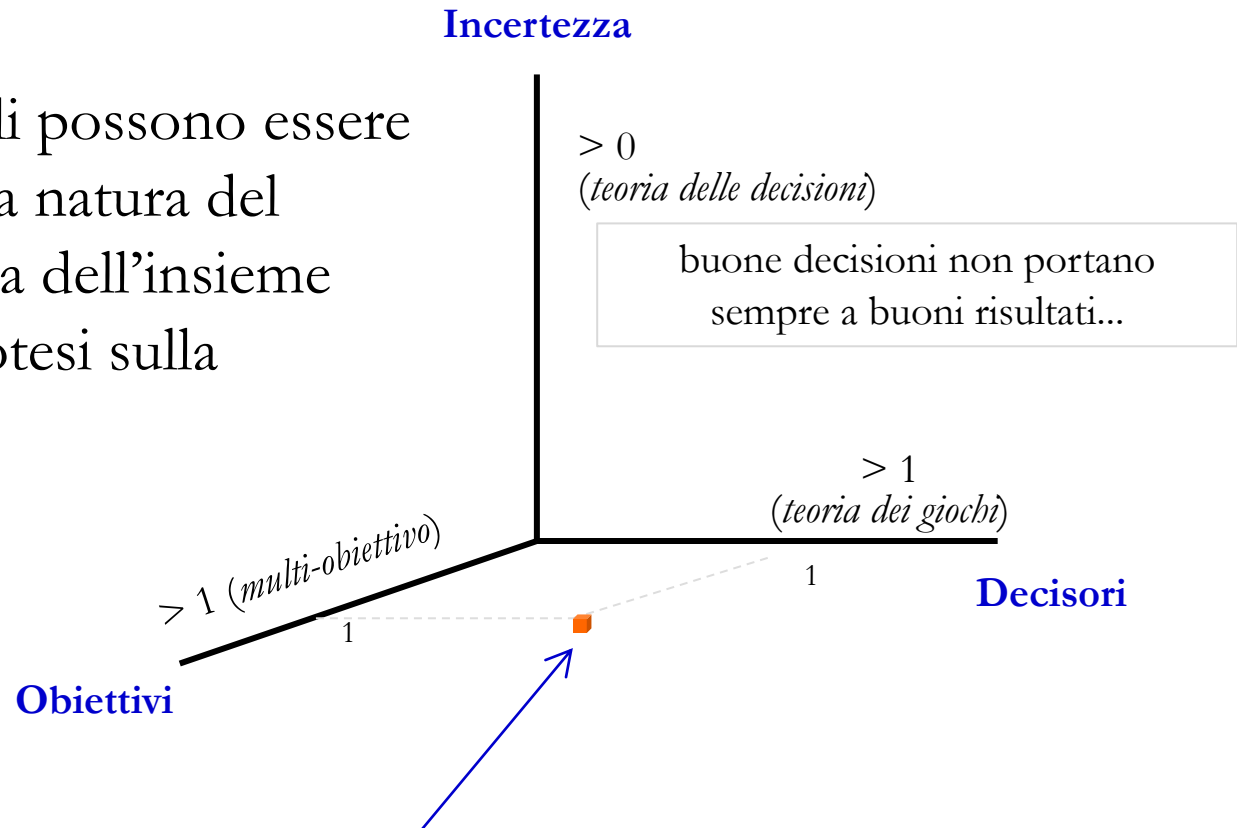
parola chiave: *problema decisionale*



- Uno o più **decisori** devono (o possono) fare delle scelte, ossia definire una **politica decisionale**, che concorrono a determinare la configurazione e l'evoluzione complessiva di un sistema (organizzato).
- Le scelte devono rispettare **vincoli** ambientali e/o **regole** di comportamento che definiscono l'insieme delle alternative possibili (**soluzioni ammissibili**).
- Ogni decisore sceglie in base a uno o più **criteri di utilità**. Un criterio di utilità, o **funzione obiettivo**, è una misura quantitativa di un determinato aspetto del sistema.

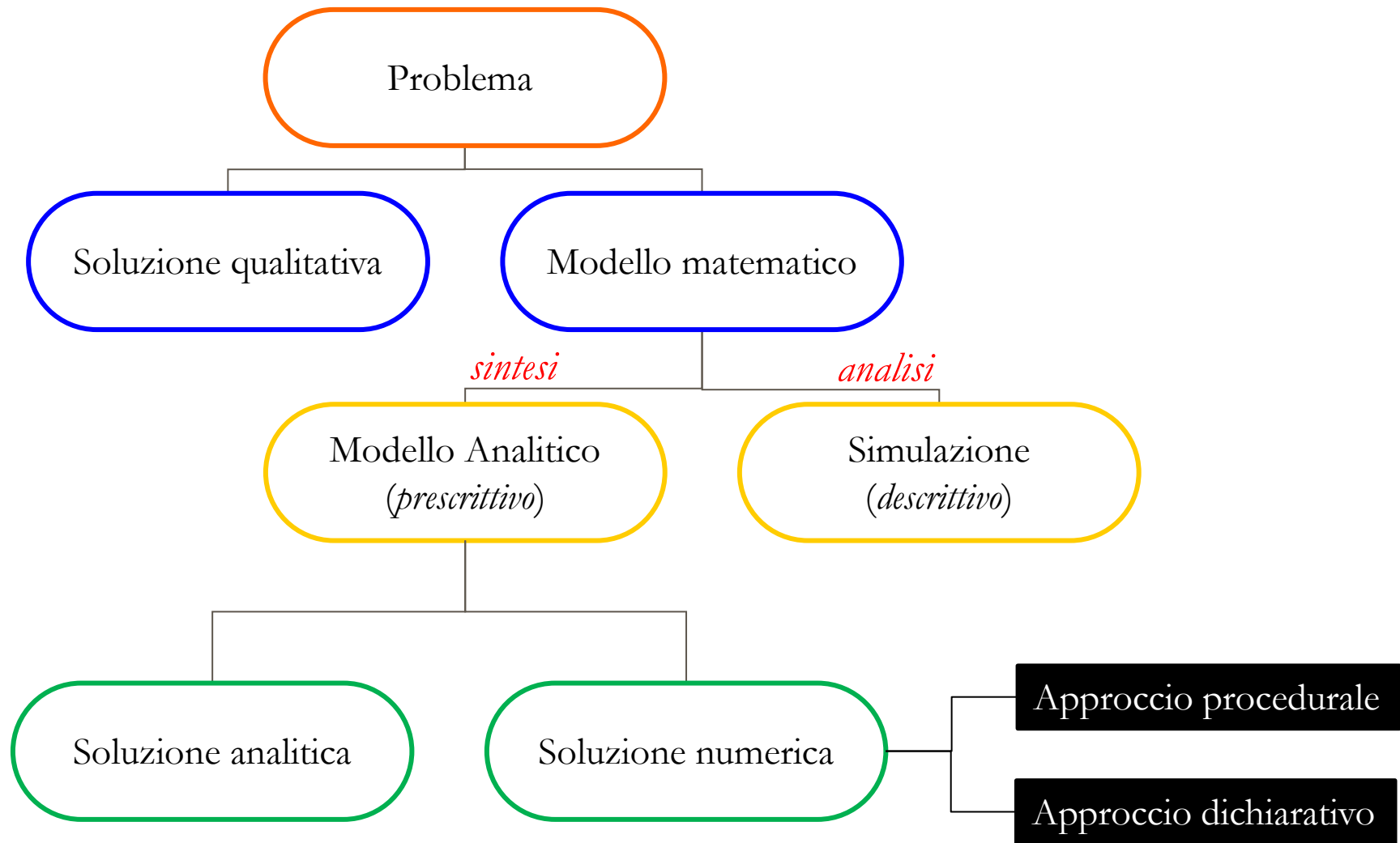
Problemi decisionali: tassonomia

- I problemi decisionali possono essere classificati in base alla natura del decisore, alla struttura dell'insieme ammissibile e alle ipotesi sulla funzione obiettivo

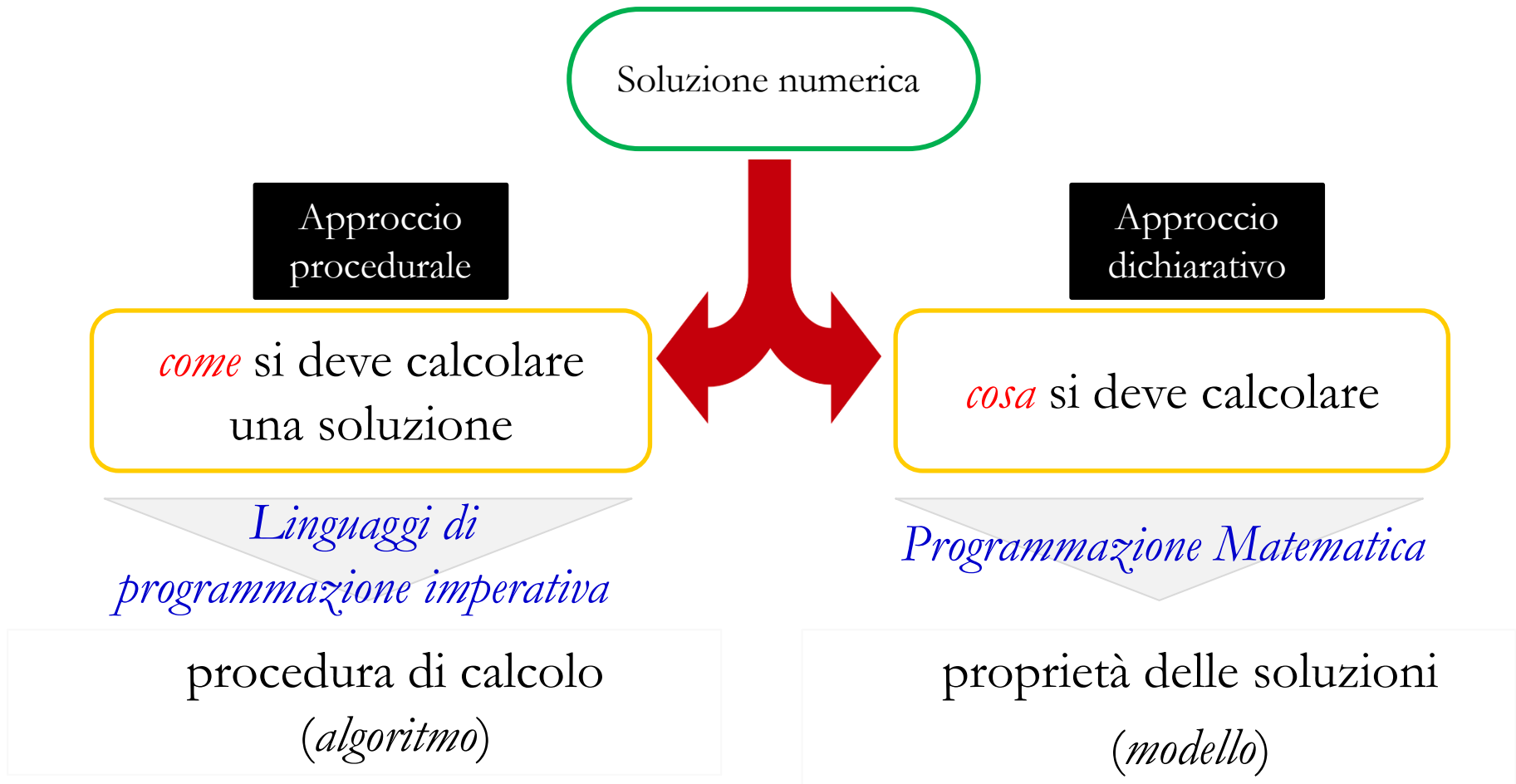


in questo corso ci occuperemo di problemi a **singolo** decisore, **singola** funzione obiettivo e informazione **certa**

Problemi, modelli e algoritmi



Modelli matematici: un paradigma dichiarativo



Modelli matematici: un paradigma dichiarativo

programmazione matematica

separa l'*aspetto concettuale* di rappresentazione del problema dall'*aspetto operativo* di calcolo di una soluzione

La programmazione matematica appartiene alla
classe dei linguaggi *dichiarativi*



si specifica **cosa** deve essere calcolato (*proprietà della soluzione*)

e **non**

come deve essere calcolato (*procedura di soluzione*)

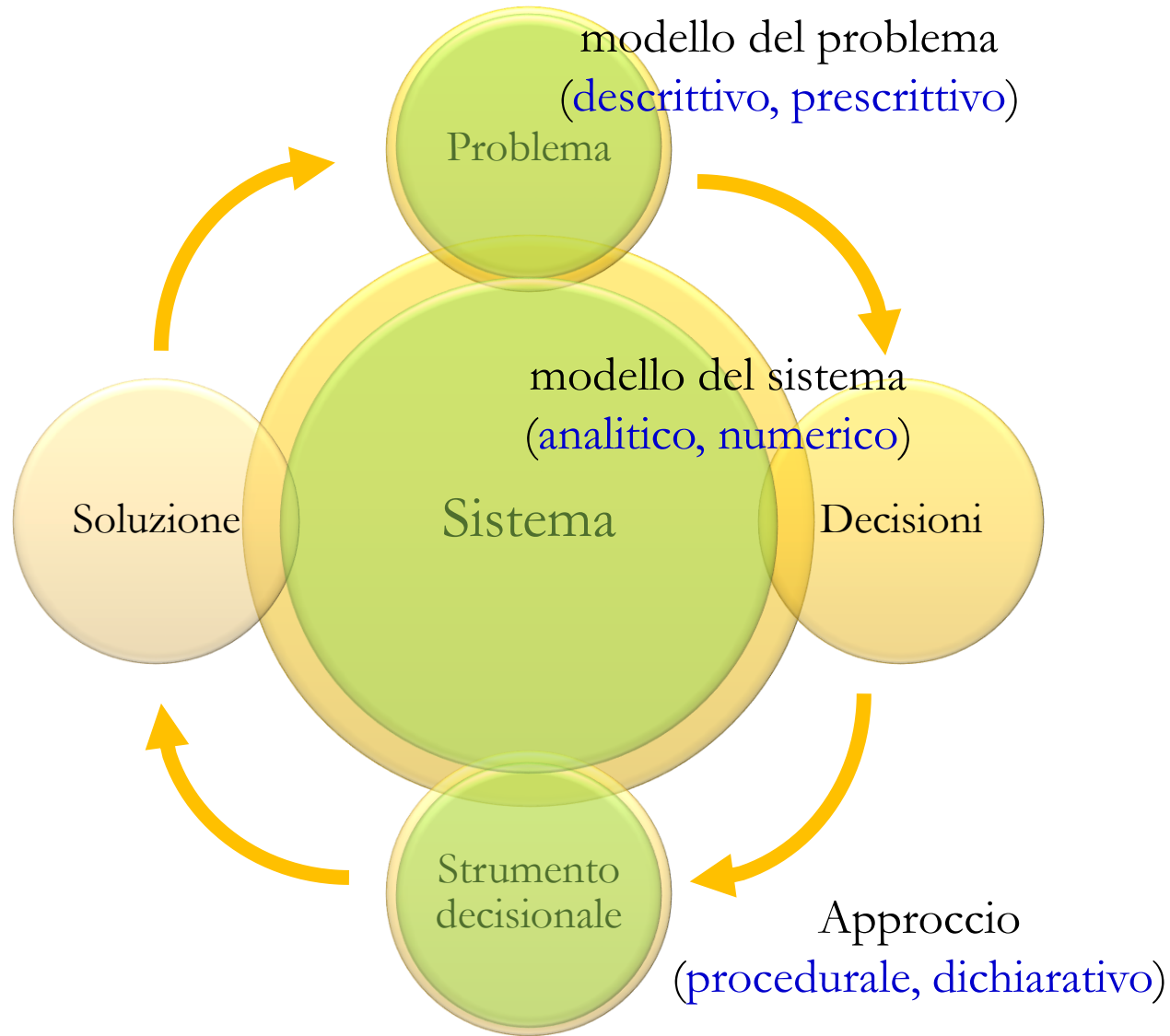
Approccio procedurale e dichiarativo: esercizio

[Esercizio]

dati n numeri interi a_1, \dots, a_n

- descrivere una procedura che determini una sequenza degli n numeri in ordine crescente;
- formulare un modello di programmazione matematica la cui regione ammissibile (o la soluzione ottima) descriva la sequenza (o le sequenze) in ordine crescente degli n numeri.

Riepilogo



Un problema decisionale



[Problema] La *fabbrica del cioccolato* produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo **A** e **B**?



	composizione			
	latte	cioccolato	zucchero	burro
crema A	40%	40%	10%	10%
crema B	24%	45%	31%	-
disponibilità (Kg)	312	360	160	70

Problema decisionale: esempio

vincoli

La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg.

Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti qual è il **massimo guadagno** che si può ottenere **producendo A e B?**

decisioni

obiettivo

- Quali sono le decisioni da prendere e come si «codificano» ?



Problema decisionale: esempio

...

	composizione				Profitto \times kg
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Le decisioni riguardano le **quantità** di A e B da produrre e possono essere codificate con due **variabili decisionali**:

- x = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- y = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

Problema decisionale: esempio

...

	composizione				Profitto \times kg
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Obiettivo : massimizzare il guadagno:

$$\max (25x + 28y)$$

Se produco x kg di crema A guadagno $25x$ Euro

Problema decisionale: esempio

...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli : la quantità totale di latte utilizzata non può essere superiore alla disponibilità di latte in magazzino:

$$0.4x + 0.24y \leq 312$$

kg di latte che uso se
produco x kg di A

kg di latte che uso se
produco y kg di B

disponibilità
(in kg) di latte

Problema decisionale: esempio

...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto \times kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli: vincoli analoghi vanno espressi per il cioccolato, lo zucchero e il burro:

- $0.4x + 0.45y \leq 360$
- $0.1x + 0.31y \leq 160$
- $0.1x \leq 70$

Problema decisionale: esempio

...

modello completo di programmazione matematica

$$z = \max 25x + 28y$$

$$C1: \quad 0.4x + 0.24y \leq 312$$

$$C2: \quad 0.4x + 0.45y \leq 360$$

$$C3: \quad 0.1x + 0.31y \leq 160$$

$$C4: \quad 0.1x \leq 70$$

$$C5: \quad x, y \geq 0$$

funzione obiettivo

vincolo sulla disponibilità di latte

vincolo sulla disponibilità di cioccolato

vincolo sulla disponibilità di zucchero

vincolo sulla disponibilità di burro

vincoli di non negatività: le quantità prodotte non possono essere negative

[Esercizio]

Esprimere in forma *parametrica* questo modello di programmazione matematica

il problema dello zaino

(un problema decisionale di base)

Il problema dello zaino

Sto preparando il bagaglio per un viaggio. Vorrei portare n oggetti ma il loro peso complessivo supera il limite massimo pari a b Kg. Ogni oggetto è descritto da un peso w e da un valore p (affettivo, funzionale, economico...).

[Problema] Quali oggetti metto in valigia se voglio massimizzare il valore complessivo? Qual è il valore ottimo?

	<i>valore p (€)</i>	<i>Peso w (hg)</i>
oggetto 1	100	52
oggetto 2	60	23
oggetto 3	70	35
oggetto 4	15	15

Limite di peso: $b = 60$ hg

Alcune semplici strategie

...

	valore p (€)	Peso w (hg)
oggetto 1	100	52
oggetto 2	60	23
oggetto 3	70	35
oggetto 4	15	15

Limite di peso: $b = 60$ hg

Strategia 1: seleziono gli oggetti a partire dal più leggero

soluzione: oggetti 4 e 2: $w = 38$ e $p = 75$

Strategia 2: seleziono gli oggetti a partire dal più prezioso

soluzione: oggetto 1: $w = 52$ e $p = 100$

esiste una soluzione migliore?



Calcolo di una soluzione ottima

Approccio
procedurale

Algoritmo

se non è nota la struttura delle
soluzioni ottime,
occorre esplorare l'intero
spazio delle soluzioni

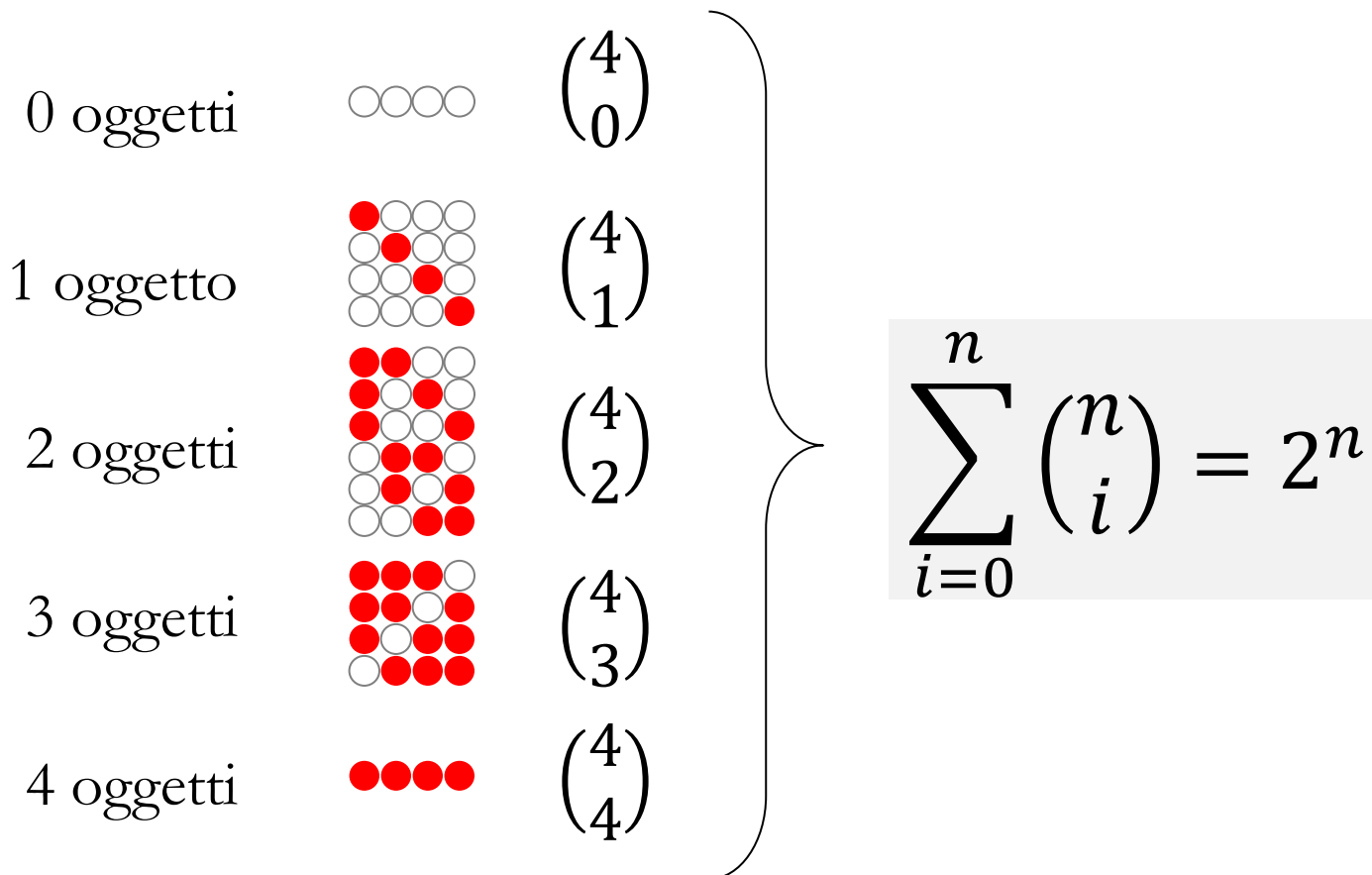
Approccio
dichiarativo

Modello di Programmazione Matematica

Occorre individuare prima di
tutto le **variabili decisionali**

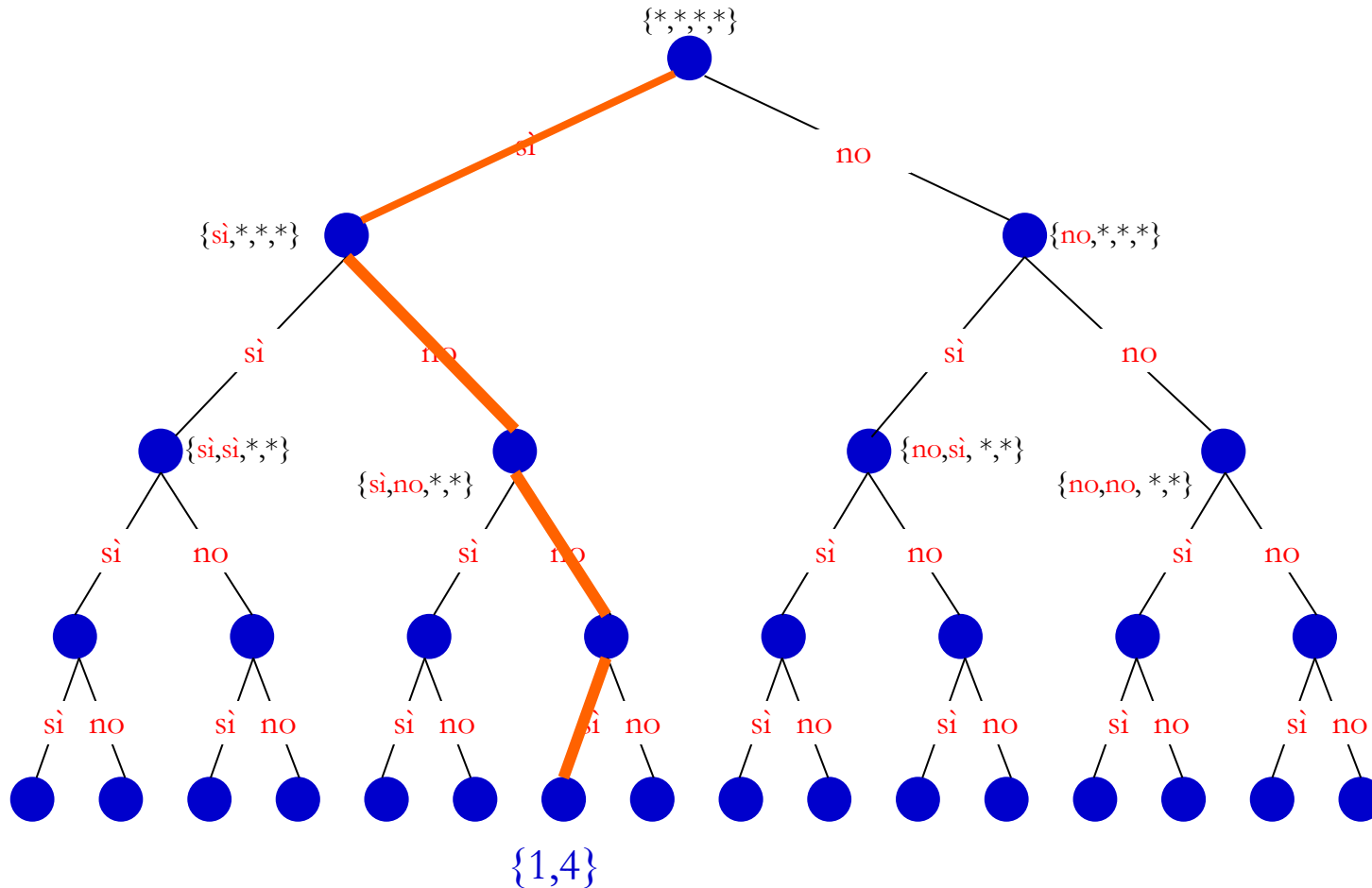
Quali e quante sono le potenziali soluzioni da valutare?

Le soluzioni potenziali sono tutti i possibili sottoinsiemi di oggetti:



Rappresentazione ad albero

...



oggetto 1

oggetto 2

oggetto 3

oggetto 4

2^4

lo spazio delle soluzioni cresce **esponenzialmente**

Sto preparando il bagaglio per un viaggio. Vorrei portare n oggetti ma il loro peso complessivo supera il limite massimo pari a b Kg. Ogni oggetto è descritto da un peso w e da un valore p (affettivo, funzionale, economico...).

[Problema] Quali oggetti metto in valigia se voglio massimizzare il valore complessivo? Qual è il valore ottimo?

Qual è la variabile decisionale?



Problema dello zaino 0-1: variabili decisionali ...

Variabili decisionali

x_i = valore che si ottiene se si seleziona l' i -esimo oggetto

$x_i = 1$ se l'oggetto i -esimo è selezionato, 0 altrimenti

x = numero di oggetti selezionati

$x_i = 1$ se selezionando l'oggetto i -esimo si sfora il limite, 0 altrimenti

Problema dello zaino 0-1: modello

...

Devo prendere n decisioni, una per ogni oggetto.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{l' } i\text{-esimo oggetto è stato selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Vincoli:** il peso complessivo non può superare b hg

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n \leq b$$

- **Obiettivo:** massimizzare il valore degli oggetti in valigia

$$z = \max p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

esempio

...

dati

	<i>valore p (€)</i>	<i>Peso w (hg)</i>
oggetto 1	100	52
oggetto 2	60	23
oggetto 3	70	35
oggetto 4	15	15

Limite di peso: $b = 60$ hg

modello

$$z = \max 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4$$

$$52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 \leq 60$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4$$

Problema dello zaino: un'applicazione

- **[Problema]** Si dispone di un budget di b € per realizzare n progetti. Ogni progetto ha un costo c_i e un guadagno atteso di p_i €. Quali progetti occorre selezionare per **massimizzare il guadagno** atteso rispettando il **vincolo di budget**?



Riassumendo

- Una **decisione** può essere codificata con una variabile numerica x_1
- Una soluzione di un **problema decisionale** è un **assegnamento** di valori a un **set** di variabili di decisione $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- In generale il numero di soluzioni è esponenziale nella dimensione del problema → una enumeraz. completa è impraticabile
- Strategie di ricerca ad hoc spesso sono sub-ottimali

Problema dello zaino

$x_i = 1$ l'oggetto i -esimo è selezionato

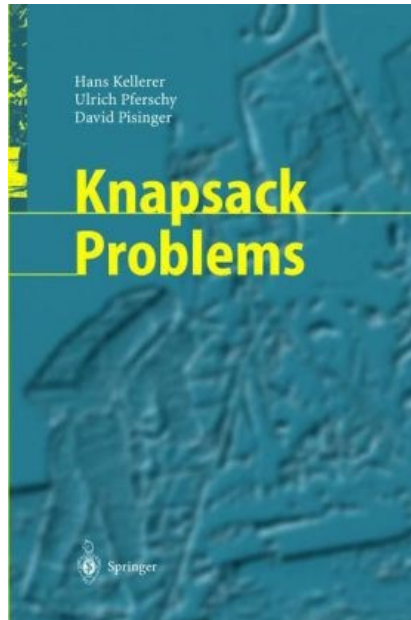
(x_1, x_2, \dots, x_n) = selezione degli oggetti

n oggetti e 2^n possibili soluzioni

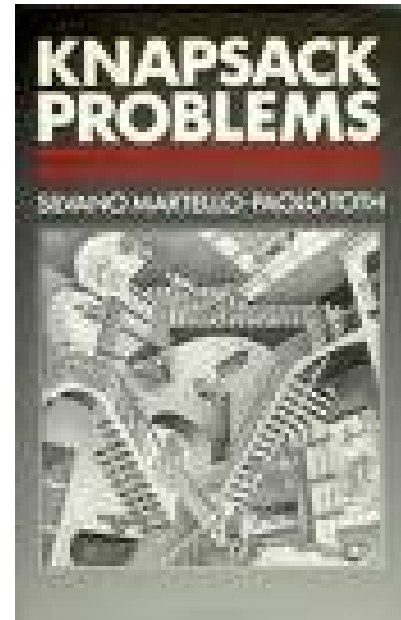
Prima più profittevole, prima più leggero, rapporti p_i/c_i decrescenti

I problemi dello zaino

Pubblicato nel 2010
(165\$ su Amazon)
546 pagine



Pubblicato nel 1990
(free at <http://www.or.deis.unibo.it/knapsack.html>)
296 pagine



zaino 0-1: alcune proprietà

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i & \leq b \\ 0 \leq x_i & \leq 1, \text{ intero} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Consideriamo il problema di
Programmazione Lineare associato
(cioè quello con variabili continue)

$$\begin{aligned} P_R : \max \quad & \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j & \leq b \\ 0 \leq x_j & \leq 1 \text{ per } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Una soluzione del problema P_R si può ottenere ordinando le variabili per rapporti **profitto/peso** non crescenti

$$\frac{p_1}{a_1} \geq \frac{p_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{p_n}{a_n}$$

e assegnando i seguenti valori alle variabili corrispondenti

$$x^*_1 = x^*_2 = \dots = x^*_{h-1} = 1, x^*_h = f, x^*_{h+1} = \dots = x^*_n = 0$$

con

$$f = \frac{b - \sum_{j < h} a_j}{a_h}$$

f esprime la frazione dell' h -esimo elemento necessaria per saturare lo zaino

Esempio

$$\begin{aligned}\max \quad & 7x_1 + 10x_2 + 19x_3 + 14x_4 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 \leq 15 \\ & 0 \leq x_1, \dots, x_4 \leq 1\end{aligned}$$

le variabili già sono ordinate per rapporti
profitto/peso non crescenti

Soluzione

$$a_1 < 15 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1,$$

$$a_2 < 12 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1,$$

$$a_3 > 7 \quad \rightarrow \quad x_3 = 7/11 = 0,64, \\ x_4 = 0$$

$$\mathbf{x}_R = (1, 1, 7/11, 0) \quad z_R = 29.09$$

$$\text{residuo: } 15 - 3 = 12$$

$$\text{residuo: } 12 - 5 = 7$$

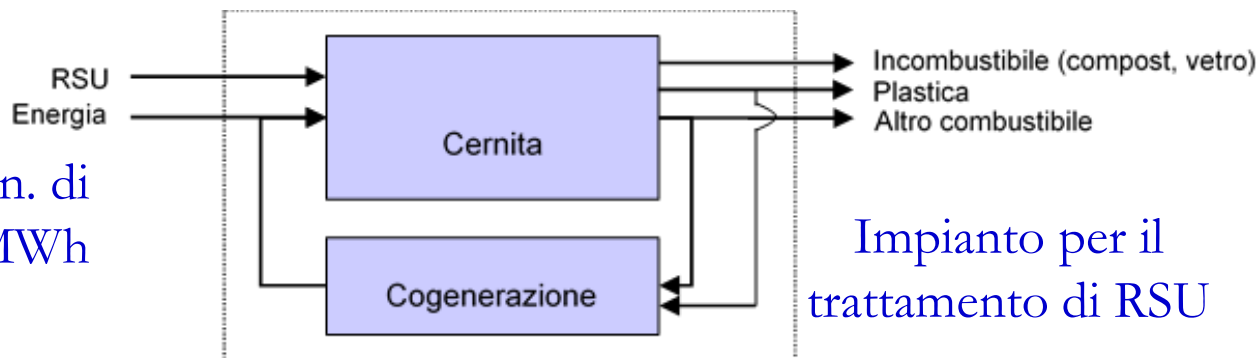


[Teorema] la soluzione \mathbf{x}^* ottenuta con l'algoritmo precedente è la soluzione ottima di P_R

[Esercizio] Estendere il risultato al rilassamento continuo del problema di zaino intero, cioè quello in cui i vincoli sulle variabili sono

$$0 \leq x_i \leq u_i \quad \text{intero}$$

Teoria dello zaino: un'applicazione



L'impianto tratta 600 ton. di
RSU e consuma 480 MWh

I RSU trattati producono

- 20% materiale incombustibile
- 30% plastica (venduta a 240 €/ton oppure usata come combustibile)
- 50% di altro combustibile (venduto a 170 €/ton oppure usato come combustibile)
- L'impianto di cogenerazione produce 2,4 MWh (Megawatt ora) per ogni ton. di plastica bruciata, e 1,6 MWh per ogni ton. di altro combustibile.
- L'energia può essere acquistata esternamente a 210€/MWh.

Quanta plastica e altro combustibile è opportuno utilizzare per la cogenerazione se si vogliono massimizzare i profitti dell'impianto al netto dei costi di funzionamento?

Variabili decisionali

$e \geq 0$ MWh di energia da acquistare;

$p \geq 0$ ton. di plastica da destinare alla cogenerazione;

$c \geq 0$ ton. di altro combustibile da destinare alla cogenerazione.

Vincoli

$e + 2,4p + 1,6c = 480$ fabbisogno di energia dell'impianto

$p \leq 180$ l'impianto produce $0,30 \cdot 600 = 180$ ton. di
 $c \leq 300$ plastica e $0,50 \cdot 600 = 300$ ton. di altro
combustibile

Funzione obiettivo

$$\begin{aligned} z &= 210e - 240(180 - p) - 170(300 - c) \\ &= 210e + 240p + 170c - 94200 \end{aligned}$$

costo di esercizio: costo dell'energia acquistata meno ricavi dovuti alla vendita di plastica e altro combustibile

$$\begin{aligned} z &= \min 210e + 240p + 170c \\ 10e + 24p + 16c &= 4800 \\ p &\leq 180 \\ c &\leq 300 \\ e, p, c &\geq 0 \end{aligned}$$

$$z = \min 210e + 240p + 170c$$

$$10e + 24p + 16c = 4800$$

$$p \leq 180$$

$$c \leq 300$$

$$e, p, c \geq 0$$

- Il vincolo di uguaglianza può essere rilassato in vincolo di \geq
- 480 è un limite superiore alla variabile e
- Il problema può essere trasformato in forma di massimo con il cambio di variabile

$$P = 180 - p$$

$$C = 300 - c$$

$$E = 480 - e$$

$$z = \min 210e + 240p + 170c$$

$$10e + 24p + 16c = 4800$$

$$p \leq 180$$

$$c \leq 300$$

$$e, p, c \geq 0$$

$$P = 180 - p$$

$$C = 300 - c$$

$$E = 480 - e$$

$$p = 180 - P$$

$$c = 300 - C$$

$$e = 480 - E$$

$$z = \min 210(480 - E) + 240(180 - P) + 170(300 - C)$$

$$10(480 - E) + 24(180 - P) + 16(300 - C) \geq 4800$$

$$180 - P \leq 180$$

$$180 - P \geq 0$$

$$300 - C \leq 300$$

$$300 - C \geq 0$$

$$480 - E \leq 480$$

$$480 - E \geq 0$$

$$\begin{aligned}
z &= \min 210(480 - E) + 240(180 - P) + 170(300 - C) \\
10(480 - E) + 24(180 - P) + 16(300 - C) &\geq 4800 \\
180 - P &\leq 180 & 180 - P &\geq 0 \\
300 - C &\leq 300 & 300 - C &\geq 0 \\
480 - E &\leq 480 & 480 - E &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= 195000 - \max 210E + 240P + 170C \\
-10E - 24P - 16C &\geq 4800 - 13920 \\
P &\leq 180 \\
C &\leq 300 \\
E &\leq 480 \\
E, C, P &\geq 0
\end{aligned}$$

$$z = 195000 - \max 210E + 240P + 170C$$

$$-10E - 24P - 16C \geq 4800 - 13920$$

$$P \leq 180$$

$$C \leq 300$$

$$E \leq 480$$

$$E, C, P \geq 0$$

$$z = 195000 - \max 210E + 240P + 170C$$

$$10E + 24P + 16C \leq 9120$$

$$P \leq 180$$

$$C \leq 300$$

$$E \leq 480$$

$$E, C, P \geq 0$$

● Che problema è?

$$z = 195000 - \max 210E + 240P + 170C$$

$$10E + 24P + 16C \leq 9120$$

$$P \leq 180$$

$$C \leq 300$$

$$E \leq 480$$

$$E, C, P \geq 0$$

- Il problema è la versione continua di uno zaino **intero** (e non 0-1) ma si trasforma facilmente in zaino 0-1. ...Come?
- Possiamo applicare la procedura di Dantzig per calcolare la soluzione ottima.

$$z = 195000 - \max 210E + 240P + 170C$$

$$10E + 24P + 16C \leq 9120$$

$$P \leq 180$$

$$C \leq 300$$

$$E \leq 480$$

$$E, C, P \geq 0$$

- Le variabili ordinate per rapporto profitto peso sono E , C e P

$$\frac{210}{10} > \frac{170}{16} > \frac{240}{24}$$

- La soluzione ottima è:

$$E = 480$$

$$C = (9120 - 4800)/16 = 270$$

$$P = 0$$

- La soluzione ottima è:

$$E = 480$$

$$C = (9120 - 4800)/16 = 270$$

$$P = 0$$

$$p = 180 - P$$

$$c = 300 - C$$

$$e = 480 - E$$

da cui

$e = 0$ MWh di energia da acquistare;

$p = 180$ ton. di plastica da destinare alla cogenerazione;

$c = 30$ ton. di altro combustibile da destinare alla cogenerazione.

$$z = 210e + 240p + 170c - 94200 = 43200 + 5100 - 94200 = -45900$$

L'impianto ha un profitto netto di 45900 Euro

Programmazione matematica

Programmazione matematica

Programma matematico

$$\min z = f(\mathbf{x})$$

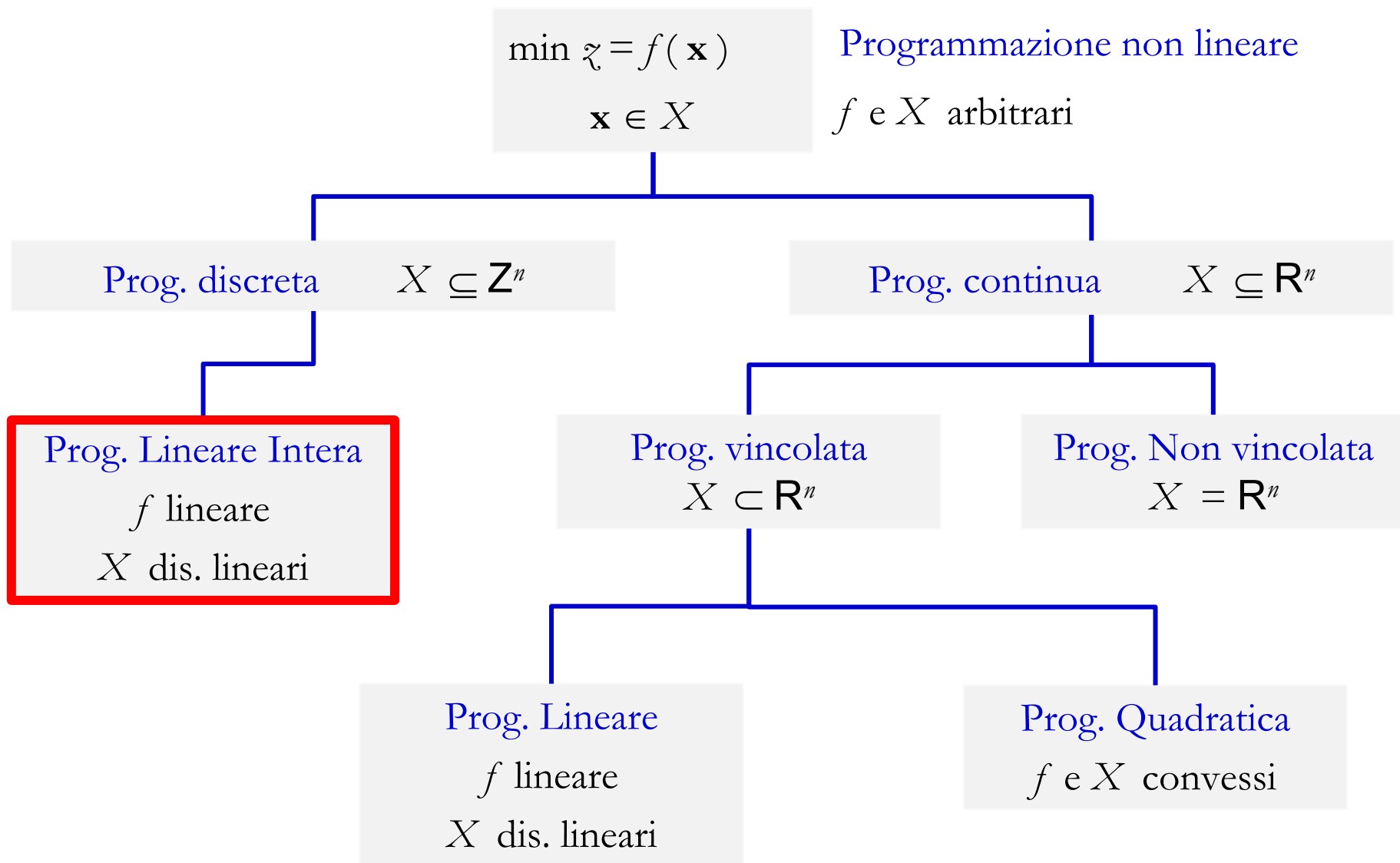
$$\mathbf{x} \in X$$

funzione obiettivo: descrive il criterio di ricerca

regione ammissibile: insieme delle soluzioni ammissibili (è descritto da un sistema di (dis)equazioni).

variabili decisionali: descrivono le caratteristiche quantitative della soluzione

- $\mathbf{x} \in X$ è una **soluzione ammissibile**, $\mathbf{y} \notin X$ è una **soluzione inammissibile**.
- f è una funzione da X in \mathbf{R} e $z \in \mathbf{R}$ è il **valore** che assume f in corrispondenza di un $\mathbf{x} \in X$.



Programmazione lineare (PL)

funzione obiettivo **lineare**

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$z = \min f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \in X$$

insieme **finito** di (dis)equazioni **lineari**

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m \right\}$$

Se le variabili possono assumere solo valori **interi**, cioè se il problema è di PLI, allora la regione ammissibile è costituita dai punti a **coordinate intere** contenuti in X

PL vs. PLI



- Benché formalmente simili, la PLI è **matematicamente** molto diversa dalla PLI e **computazionalmente** molto più difficile da risolvere.

In particolare:

- le soluzioni **ottime intere** non sempre possono essere ottenute arrotondando le soluzioni frazionarie (...in realtà quasi mai);
- Le soluzioni frazionarie possono essere prive di significato (per esempio se le variabili intere sono **binarie**)

I 3 passi della programmazione matematica

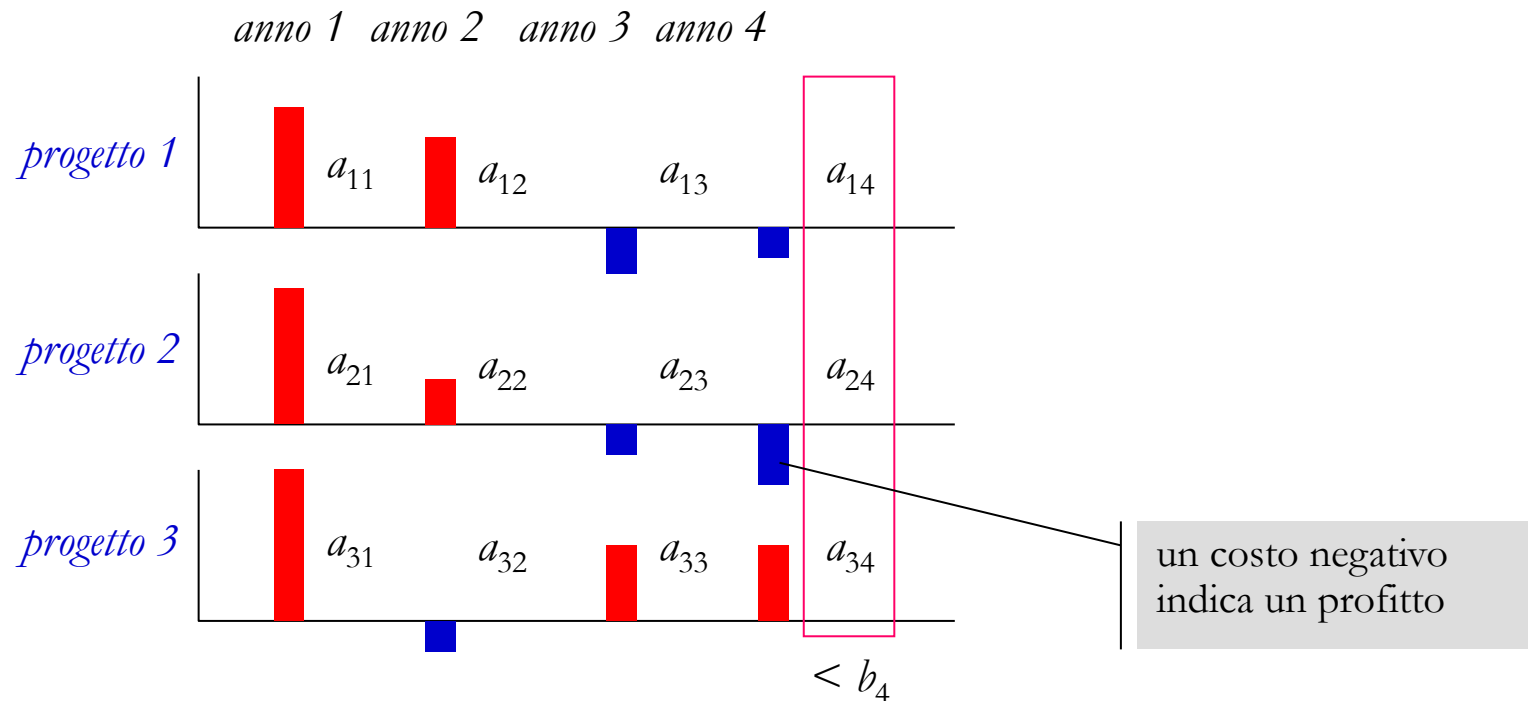
- 3 passi per costruire un modello di **programmazione matematica**:
 1. determinazione delle **variabili decisionali**
 2. definizione della **funzione obiettivo**
 3. definizione dei **vincoli**, cioè delle relazioni logiche tra le variabili di decisione che caratterizzano il problema
 - Di solito una scelta corretta delle variabili decisionali permette di esprimere in modo “naturale” funzione obiettivo e vincoli.
- Non esiste un metodo standard ma solo una serie di “strumenti utili”:
 - libreria di modelli standard,
 - tecniche di riformulazione,
 - esperienza, ...

Pianificazione di investimenti (ver 2)

esercizio

Pianificazione di investimenti (ver. 2)

- **[Problema]** Si vogliono realizzare n progetti nei prossimi T anni. Di ogni progetto i si conosce un indice di redditività p_i che esprime il guadagno finale atteso (in Euro) e un profilo di costo $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iT})$ per ogni anno del periodo considerato. Inoltre, in ogni anno j del periodo si dispone di un budget di b_j €. Quali progetti occorre selezionare per **massimizzare il guadagno** atteso rispettando i **vincoli di budget**?



Pianificazione di investimenti (ver. 2)

- **[Problema]** Si vogliono realizzare n progetti nei prossimi T anni. Di ogni progetto i si conosce un indice di redditività p_i che esprime il guadagno finale atteso (in Euro) e un profilo di costo $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iT})$ per ogni anno del periodo considerato. Inoltre, in ogni anno j del periodo si dispone di un budget di b_j €. Quali progetti occorre selezionare per **massimizzare il guadagno** atteso rispettando i **vincoli di budget**?

- **[Dati]**

		costi a (K€)			
		anno 1	anno 2	anno 3	anno 4
progetto 1	30	10	5	-2	-1
progetto 2	20	12	2	-2	-5
progetto 3	25	15	-1	5	5

budget	30	6	6	6
--------	----	---	---	---



Pianificazione di investimenti (ver. 2)

...

Variabili decisionali

$x_{ij} = 1$ se il progetto i -esimo inizia nell'anno j -esimo, 0 altrimenti

$x_{ij} =$ costo del progetto i -esimo nell'anno j -esimo

$x_i = 1$ se il progetto i -esimo è selezionato, 0 altrimenti

$x =$ numero di progetti selezionati

Pianificazione di investimenti: esempio

...

		costi a (K€)			
	redditività p (K€)	anno 1	anno 2	anno 3	anno 4
progetto 1	30	10	5	-2	-1
progetto 2	20	12	2	-2	-5
progetto 3	25	15	-1	5	5

budget	30	6	6	6
--------	----	---	---	---

$$z = \max 30x_1 + 20x_2 + 25x_3$$

$$10x_1 + 12x_2 + 15x_3 \leq 30$$

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 6$$

$$-x_1 - 5x_2 + 5x_3 \leq 6$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3$$

x_1	x_2	x_3	\mathbf{a}	p
0	0	0	(0, 0, 0, 0)	0
0	0	1	(15, -1, 5, 5)	25
0	1	0	(12, 2, -2, -5)	20
0	1	1	(27, 1, 3, 0)	45
1	0	0	(10, 5, -2, -1)	30
1	0	1	(25, 4, 3, 4)	55
1	1	0	(22, 7, -4, -6)	--
1	1	1	(37, 6, 1, -1)	--

Variabili decisionali

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il progetto } i \text{ viene selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

In ogni anno j del periodo considerato, la somma algebrica dei costi dei progetti selezionati non deve superare il budget disponibile b_j

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i & \leq b_j \quad j = 1, \dots, T \\ x_i & \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Pianificazione di investimenti: esercizi

- ▶ Scrivere un modello matematico per ognuna delle seguenti varianti (in ordine di difficoltà):
 - **[Ex Appl_1]** Ogni nuovo progetto i comporta un costo globale di gestione c_i . Si vuole massimizzare il ricavo, cioè la differenza tra il guadagno atteso e i costi di gestione.
 - **[Ex Appl_2]** Il budget disponibile in ogni anno j è pari ad una quota fissa b_j sommata al budget residuo dei periodi precedenti.
 - **[Ex Appl_3]** Si supponga che i progetti abbiano una durata di $T' < T$ anni. Per ogni progetto selezionato si vuole individuare anche l'anno di avvio



«Soluzione» di un modello di programmazione matematica

Soluzione di un modello di prog. mat.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

- Risolvere un problema di programmazione matematica significa determinare, se esiste, una **soluzione globalmente ottima**, cioè un punto $\mathbf{x}^* \in X$ tale che $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$
- Una soluzione $\mathbf{x}' \in X$ si dice **localmente ottima** se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$

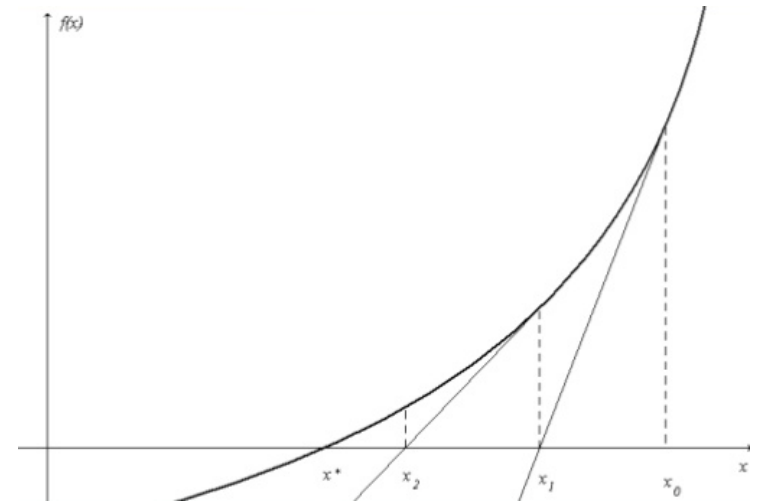
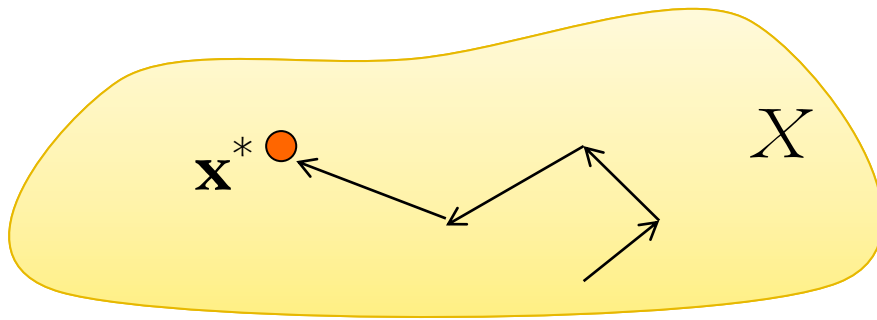
- Una soluzione ottima è un *punto stazionario* \mathbf{x}^* (di minimo o di massimo) della funzione (obiettivo) $f(\mathbf{x})$.
- Un punto stazionario \mathbf{x}^* si ottiene ponendo
$$f'(x) = 0 \quad \text{se } x \in \mathbb{R} \quad \text{oppure}$$
$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- ma la condizione del primo ordine è risolutiva in rarissimi casi. Infatti
 - è necessaria ma non sufficiente (quindi garantisce l'ottimalità locale ma non globale);
 - non contempla il caso di funzione vincolata e deve essere opportunamente estesa (condizioni KKT);
 - La soluzione analitica di $f'(x) = 0$ è limitata a casi molto semplici e specifici (teorema di Abel-Ruffini).

Si ricorre alla soluzione numerica
con algoritmi di ricerca

Algoritmi di ricerca: efficacia e efficienza

- **algoritmo di ricerca**: metodo numerico che esplora l'insieme X delle soluzioni ammissibili alla ricerca della soluzione ottima \mathbf{x}^*



Proprietà di un algoritmo di ricerca

- **Efficienza**: rapidità di esecuzione
- **Efficacia**: capacità di determinare soluzione di buona qualità

Algoritmi esatti, approssimati e euristici

Efficienza

Efficacia

- **Euristiche:** calcolano (eventualmente) una soluzione ammissibile di cui **non si certifica la qualità** (*local search, simulated annealing, genetic algorithms*)
- **Algoritmi approssimati:** calcolano una soluzione ammissibile e ne **certificano la qualità**, indicandone la distanza massima da quella ottima
- **Algoritmi esatti:** **certificano l'ottimalità** delle soluzioni calcolate (*branch-and-bound, dynamic programming*).



Metodi euristici vs metodi esatti

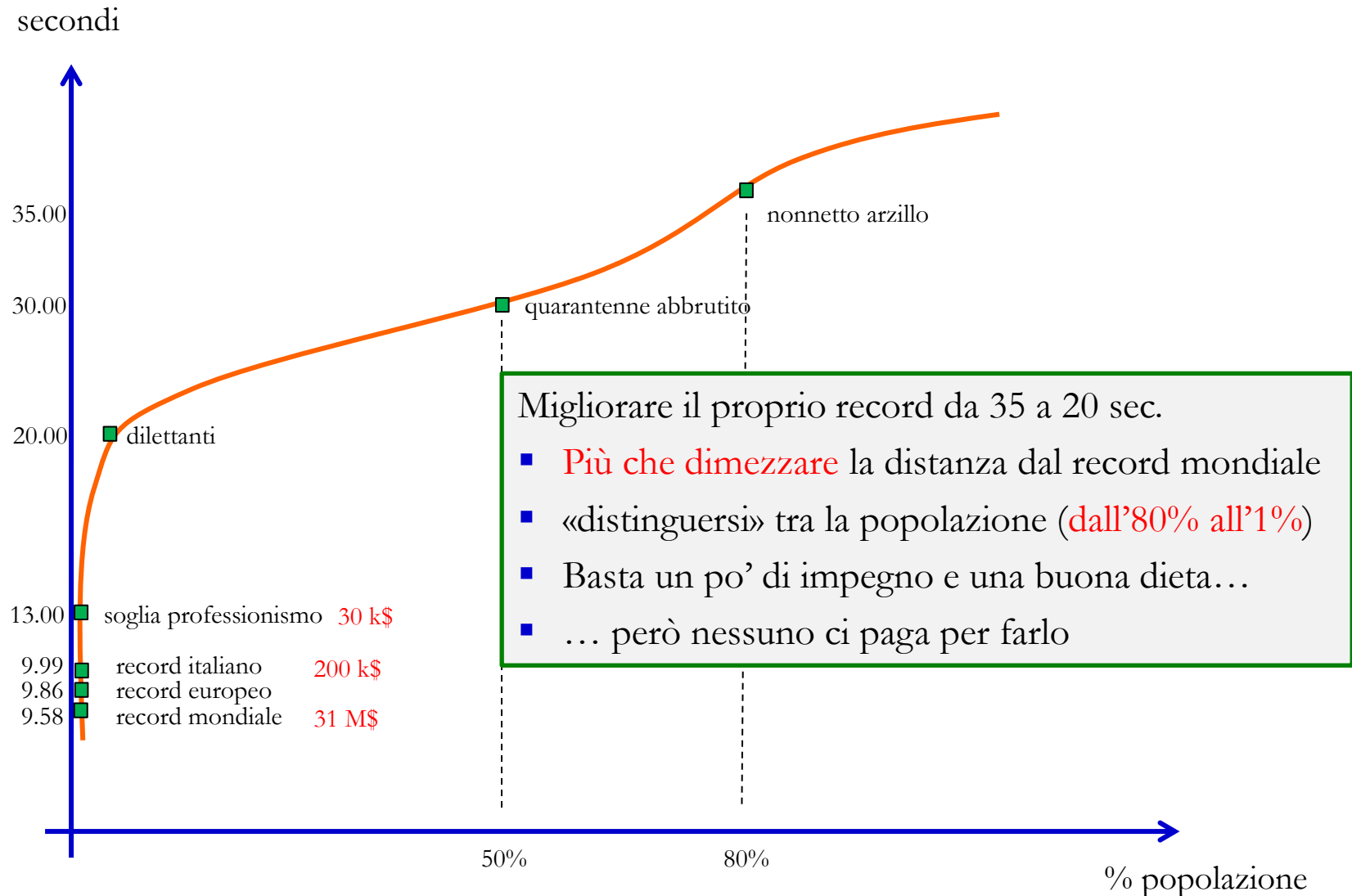
- ▶ Quando utilizzare euristiche al posto di algoritmi esatti
 - quando le dimensioni del problema sono eccessive rispetto a quelle risolvibili con metodi esatti
 - quando i problemi, anche se di limitate dimensioni, devono essere risolti in tempi estremamente brevi
 - quando i dati del problema sono approssimati e non vale la pena cercare la soluzione esatta
 - quando si risolvono problemi simili, ma non identici a quelli affrontati dagli algoritmi esatti. Questi ultimi sono molto meno generalizzabili delle euristiche

Metodi euristici vs metodi esatti

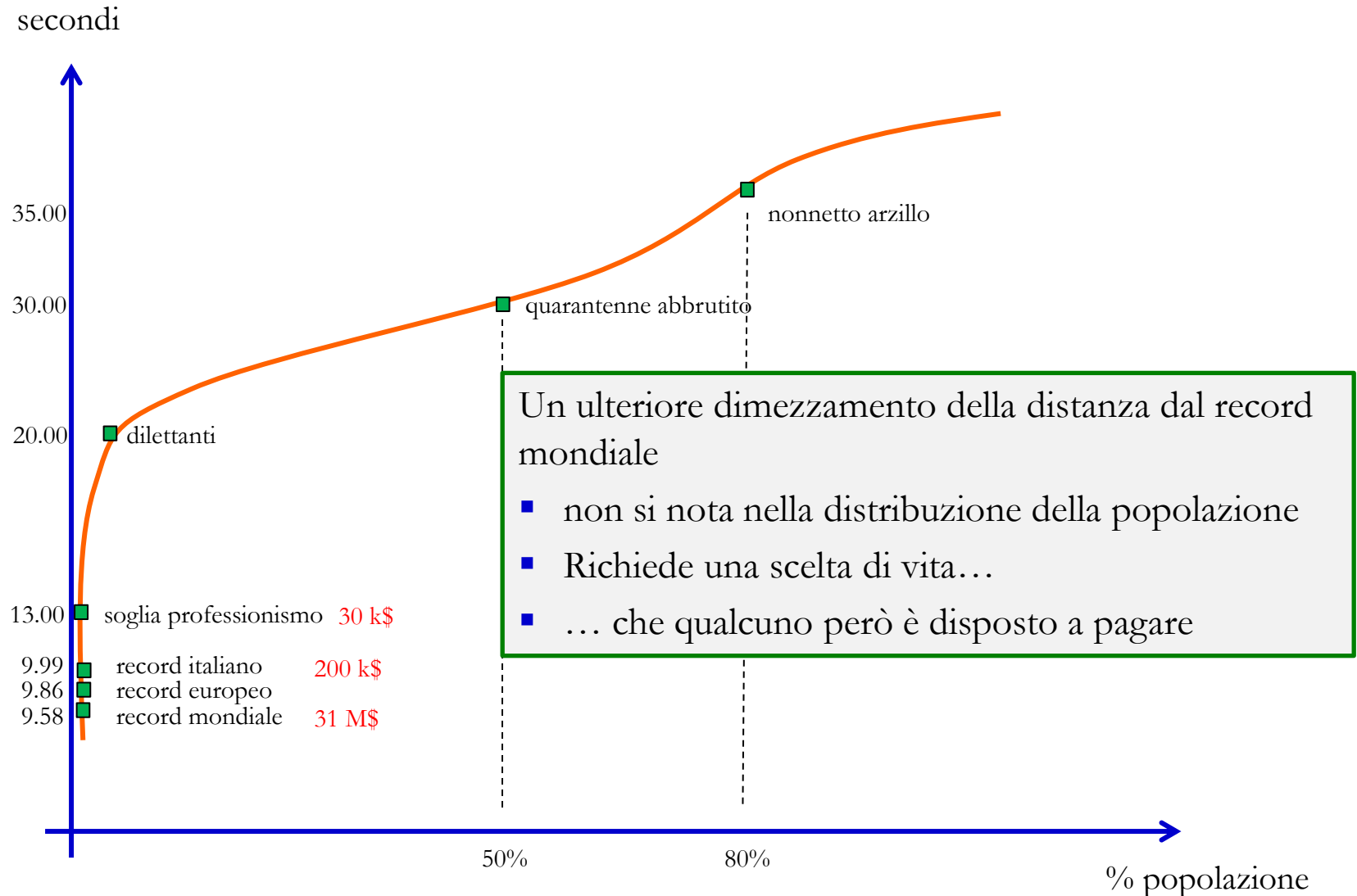
► Perché studiamo algoritmi esatti

- Perché di solito è facile trovare una soluzione quasi-ottima ma il **marginale competitivo** garantito da una soluzione ottima è di notevole valore e/o cruciale importanza. (esempio)
- Perché in alcuni casi il valore ottimo esprime una **condizione logica** (per es. il criterio di arresto di una procedura più generale).
- Perché in alcuni casi esistono solo **poche soluzioni** difficili da individuare.
- Perché gli algoritmi esatti spesso **suggeriscono nuove strategie** utili anche per progettare euristiche più sofisticate.

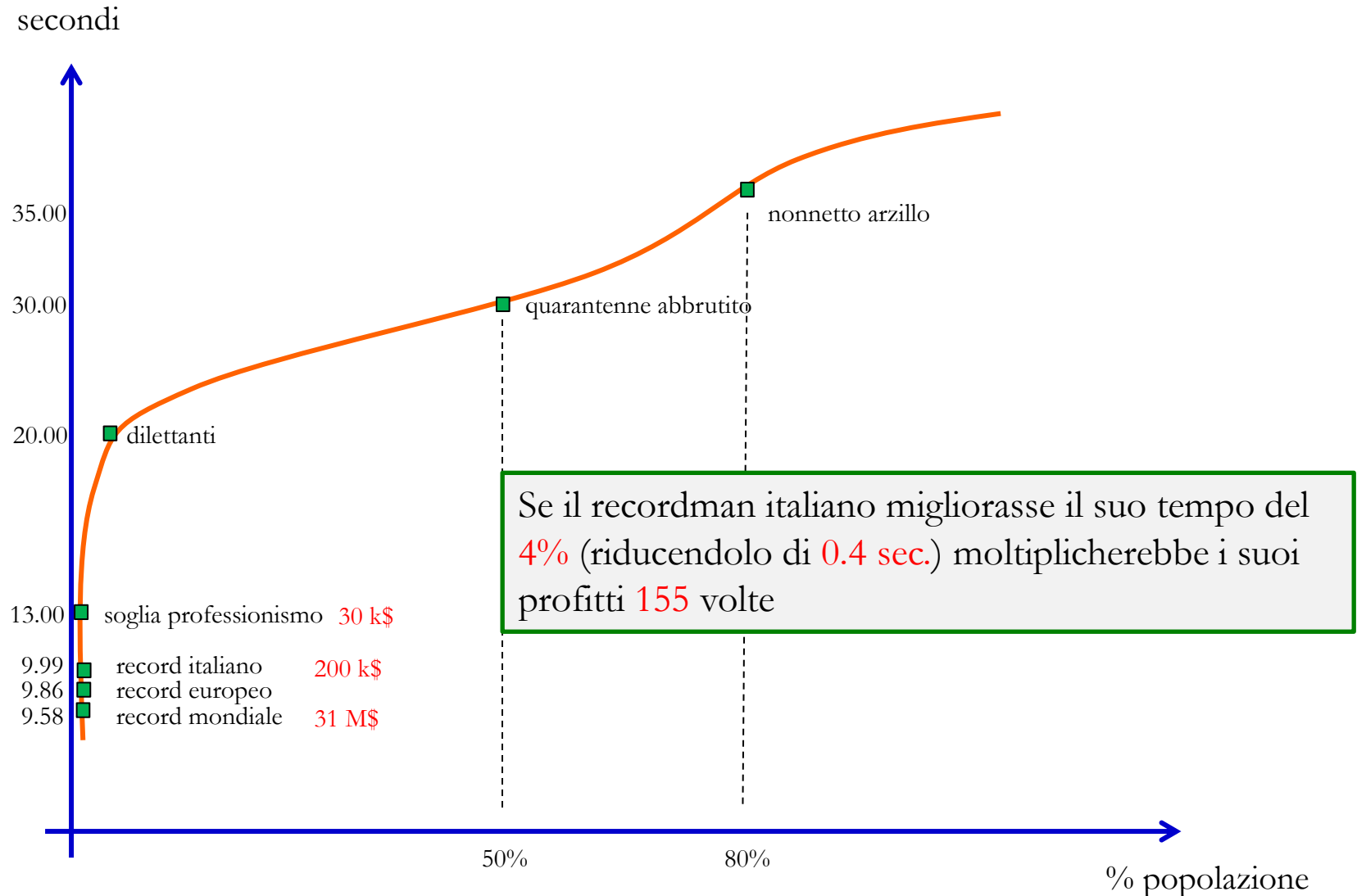
Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Complessità computazionale

Complessità di un algoritmo

Definizione: in termini generali, la **taglia (o dimensione)** di una istanza di un problema **P** è la **quantità n di memoria** necessaria per descrivere l'istanza.

- Un algoritmo per un problema **P** si dice **polinomiale** se il numero di operazioni che esegue per **calcolare una soluzione** di una **qualsiasi istanza** di **P** cresce **polinomialmente** con la dimensione **n** dell'istanza (es. n^2 , n^3 , $n \log n \dots$).
- Un algoritmo non polinomiale è chiamato **esponenziale** (o a crescita esponenziale, per es. 2^n , 3^n , $n!$...)

Complessità di un algoritmo

- Un algoritmo polinomiale **non** è **sempre** (cioè su **ogni istanza** di un problema) più veloce di un algoritmo esponenziale: lo è **nel caso peggiore** e al **crescere della dimensione** dell'istanza.
- Quando il caso peggiore si verifica molto raramente, si può addirittura preferire un algoritmo esponenziale, per es. il metodo del simplesso.

Complessità di un problema

- Nel linguaggio corrente **complesso** e **complicato** sono sinonimi:
 - *Complesso* [com-plès-so] **agg.** Che presenta vari aspetti eterogenei, che appare **complicato** e difficile da analizzare.
 - *Complicato* [com-pli-cà-to] **agg.** Che è o appare costituito di molti elementi confusi; **complesso**, difficile, imbrogliato, involuto.
- dal punto di vista computazionale, un problema può essere:
 - **complicato**: di difficile **rappresentazione**, che è descritto da molti parametri e regole.
 - **complesso**: di difficile **soluzione**, che richiede una gran mole di calcoli.
 - **esteso**: con uno ampio **spazio di ricerca**

Complessità di un problema



- problemi **complicati** non sono sempre **complessi**
(per esempio redigere un bilancio)
- problemi **complessi** non sono sempre **complicati**
(per esempio fattorizzare un numero).
- problemi **estesi** non sono sempre **complessi**
(per esempio ordinare un insieme)

un problema **complicato** può essere anche **complesso** e viceversa.

complicare un problema non implica renderlo **complesso**.

Complessità di un problema

La **complessità** di un problema **dipende solo** dalla sua
struttura matematica

- un problema **P** è detto **difficile** se esiste almeno una sua istanza che **non può essere** risolta all'ottimo da un **algoritmo polinomiale**
- Un problema **P** è detto **facile (o trattabile)** se esiste un algoritmo polinomiale che lo risolve all'ottimo.

«Veloce, efficace,
generale: scegline due»



Complessità computazionale

	Problema facile	Problema difficile
Algoritmo polinomiale esatto	<i>possibile</i>	<i>impossibile</i>
Algoritmo esponenziale esatto	<i>possibile</i>	<i>possibile</i>

Algoritmi per la PL e la PLI

- I problemi di **programmazione lineare (PL)** sono *facili*.

Algoritmi iterativi

- Metodo del simplesso (Dantzig, 1947)
- Algoritmi interior-point (Karmarkar, 1984)

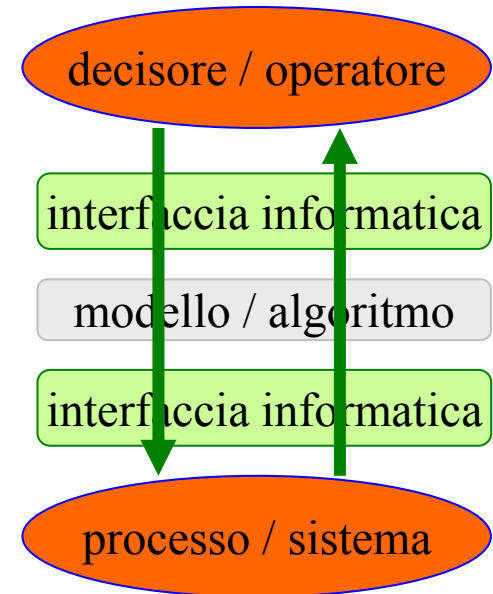
- I problemi di **programmazione lineare intera (PLI)** sono *difficili*.

Enumerazione (almeno implicita) di tutte le soluzioni ammissibili

- Cutting plane (Gomory, 1957)
- Branch-and-Bound (Doig & Land, 1960)
- Programmazione Dinamica (Belmann, 1957)

Dal modello all'applicazione

- ▶ La correttezza di un modello non ne garantisce l'effettiva applicabilità. Il modello si pone tra il processo e il decisore e spesso necessita di una **gran quantità di dati** e di una **forte interazione con gli utenti e gli altri processi**.
- ▶ Si deve tener conto del contesto organizzativo e dell'infrastruttura tecnologica e per una buona riuscita è necessario realizzare intorno al modello un buon sistema di **data-retrieval** e una buona **interfaccia utente**.
- ▶ progettazione di applicazioni software.
modello a cascata: *analisi, software design, codifica e test*.



Esercizio

- Un dispositivo di memoria è disponibile in blocchi di dimensione data (per es. 10 Mb).
- Un insieme di file deve essere memorizzato tenendo conto che ogni file non può essere frammentato in più blocchi.
- Qual è il minimo numero di blocchi necessari?

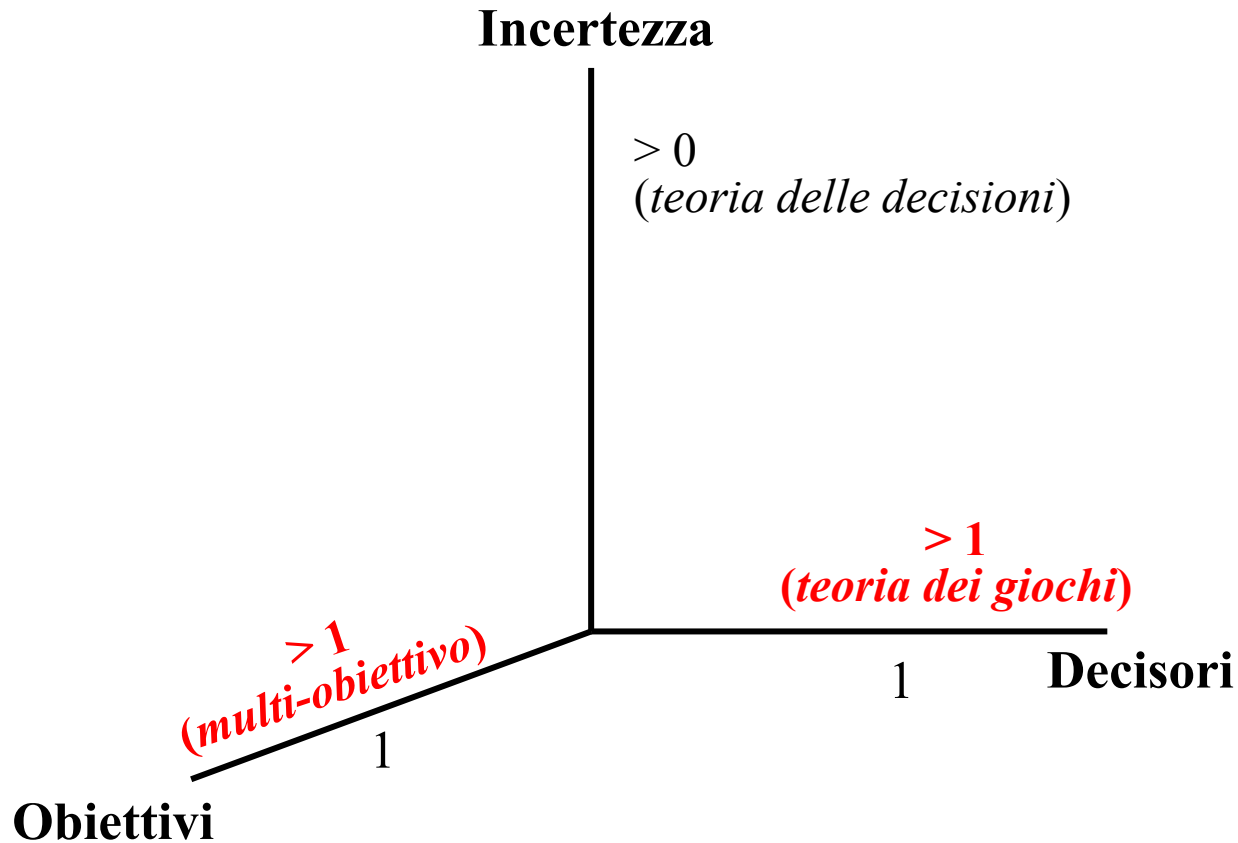
provare con questo caso

```
Block size: 10000 kb
File
kb,      #di files
3834, 10
6928, 11
1506, 22
204, 89
3408, 83
6623, 21
6102, 75
1755, 67
5653, 18
4809, 15
4286, 2
3465, 30
965, 75
4741, 79
3550, 16
3658, 28
6753, 4
1090, 29
5245, 6
6131, 33
```

Più obiettivi e più decisori

Problemi decisionali: tassonomia

- I problemi decisionali possono essere classificati in base alla natura del decisore, alla struttura dell'insieme ammissibile e alle ipotesi sulla funzione obiettivo



Problemi decisionali: caso con più obiettivi

- **[Esempio]** quando si valuta l'acquisto di un'auto non si sommano potenza, costo, consumo, ecc. ma si sceglie in base a un *compromesso*:



Non esiste un valore ottimo «in assoluto»

Problemi decisionali: caso con più obiettivi ...

- Se le funzioni obiettivo non sono confrontabili si rischia di sommare capre e cavoli.



- **[Esempio]** quando si valuta l'acquisto di un'auto non si sommano potenza, costo, consumo, ecc. ma si sceglie in base a un *compromesso*:

Non esiste un valore ottimo «in assoluto»

Spazio degli obiettivi

$$\max z_1 = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{obiettivo 1}$$

$$\max z_2 = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{obiettivo 2}$$

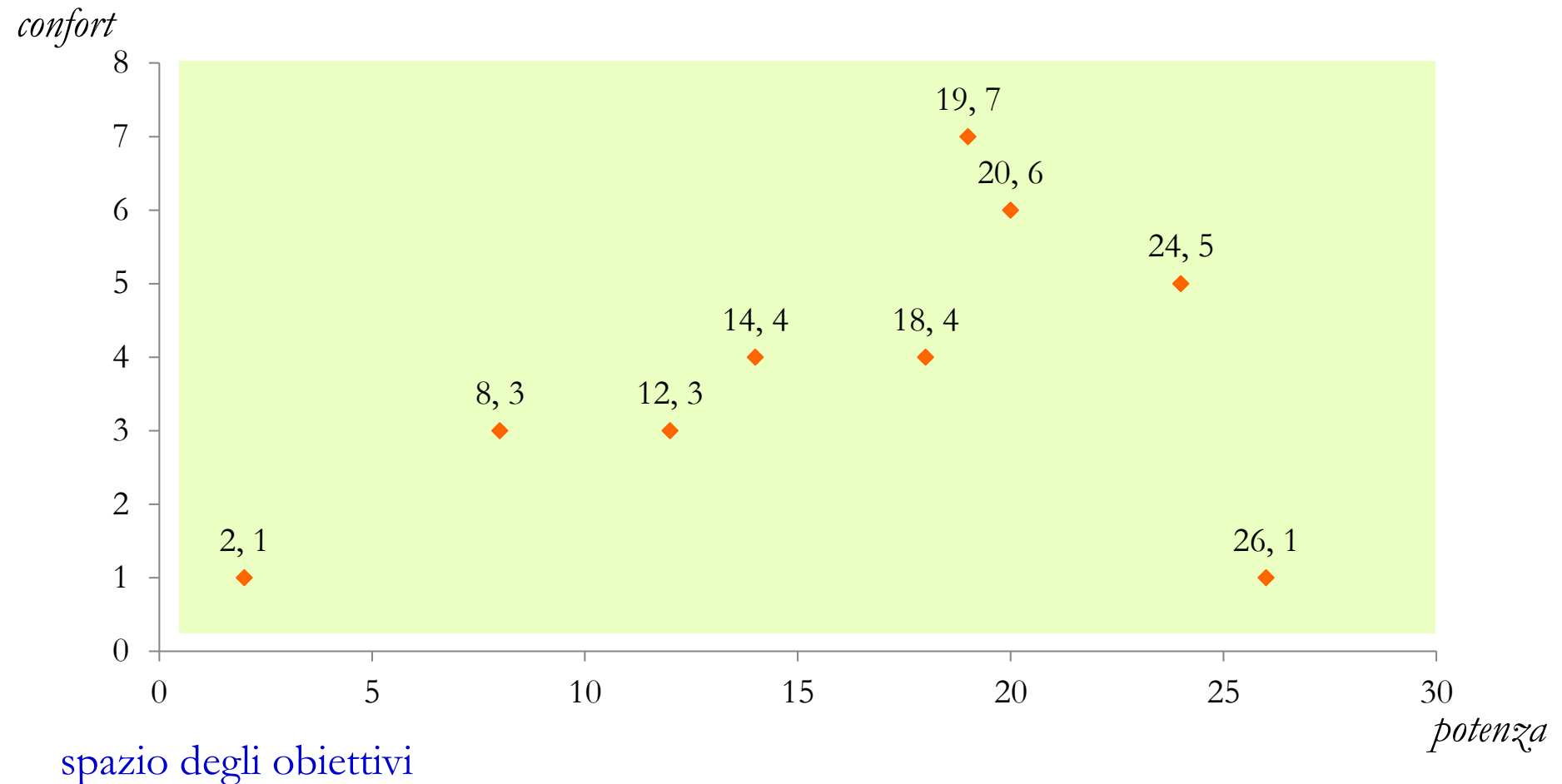
$$\max z_3 = f_3(\mathbf{x}) \quad \text{obiettivo 3}$$

$$\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

- **Spazio delle soluzioni:** una soluzione è un punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ nello spazio \mathbb{R}^n . La soluzione \mathbf{x} è ammissibile se $\mathbf{x} \in X$
- **Spazio degli obiettivi:** il «valore» di una soluzione è un punto $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ (una componente per ogni obiettivo del problema) nello spazio \mathbb{R}^3 .

Soluzioni di compromesso

- **acquisto dell'auto**: voglio un'auto che mi soddisfi in termini di **potenza** (obiettivo 1) e **confort** (obiettivo 2)

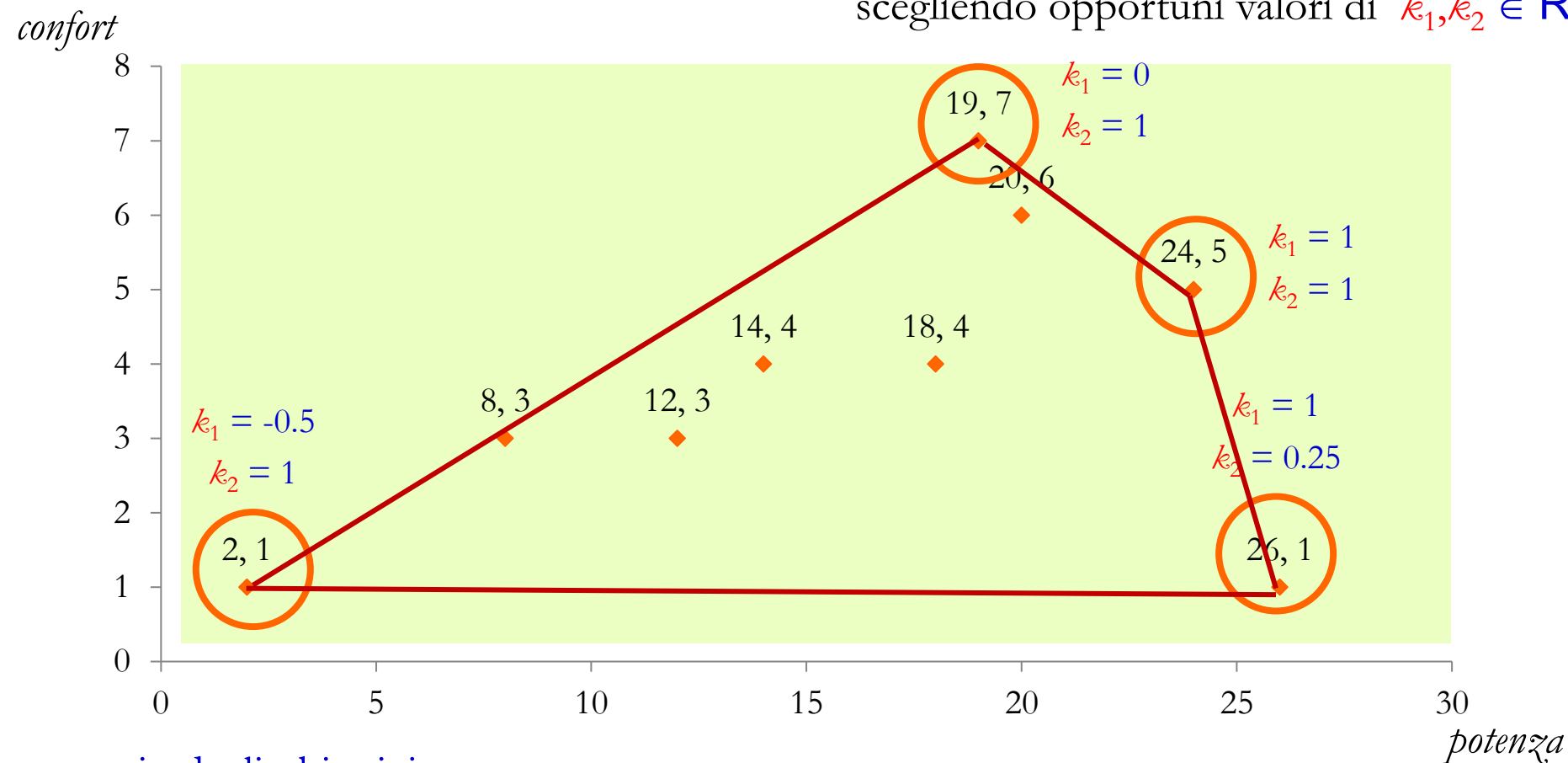


Soluzioni di compromesso



$$\max z = k_1 \text{ confort} + k_2 \text{ potenza}$$

Le soluzioni che definiscono l'involucro convesso possono essere ottime scegliendo opportuni valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

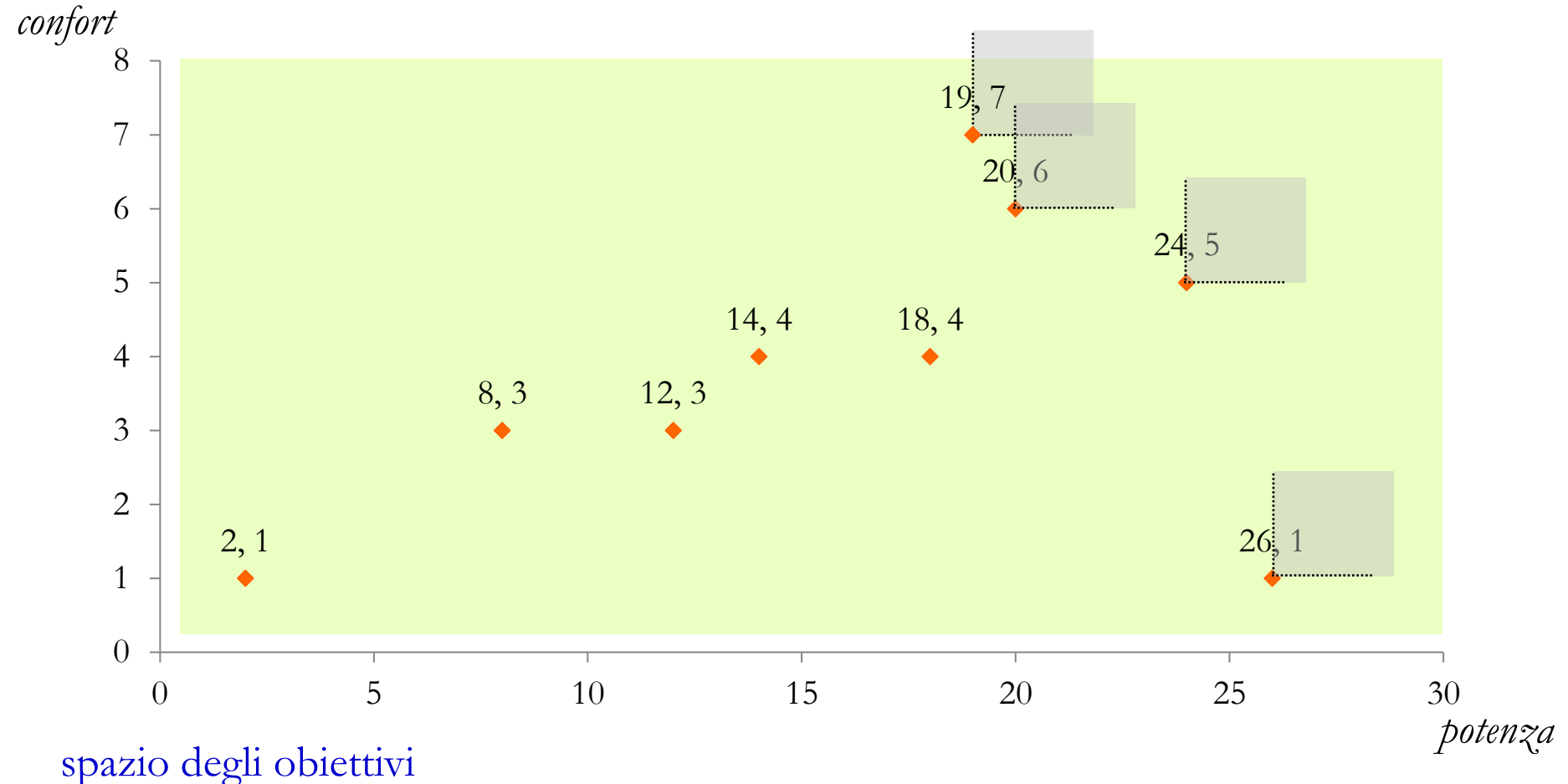


spazio degli obiettivi

Soluzioni di compromesso

- Tuttavia alcune soluzioni «*sembrano migliori*» di altre... sono le soluzioni *non dominate*

Notare che non esistono valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ che rendono ottima la soluzione (20, 6)



Problemi decisionali: Pareto-ottimalità

Principio di dominanza: una soluzione \mathbf{x} è *dominata* da una soluzione \mathbf{y} se \mathbf{y} è almeno buona quanto \mathbf{x} rispetto a tutte le funzioni obiettivo ed è strettamente migliore di \mathbf{x} rispetto ad almeno una funzione obiettivo.

$$f_i(\mathbf{y}) \geq f_i(\mathbf{x}) \quad \forall \text{ funzione obiettivo } i$$

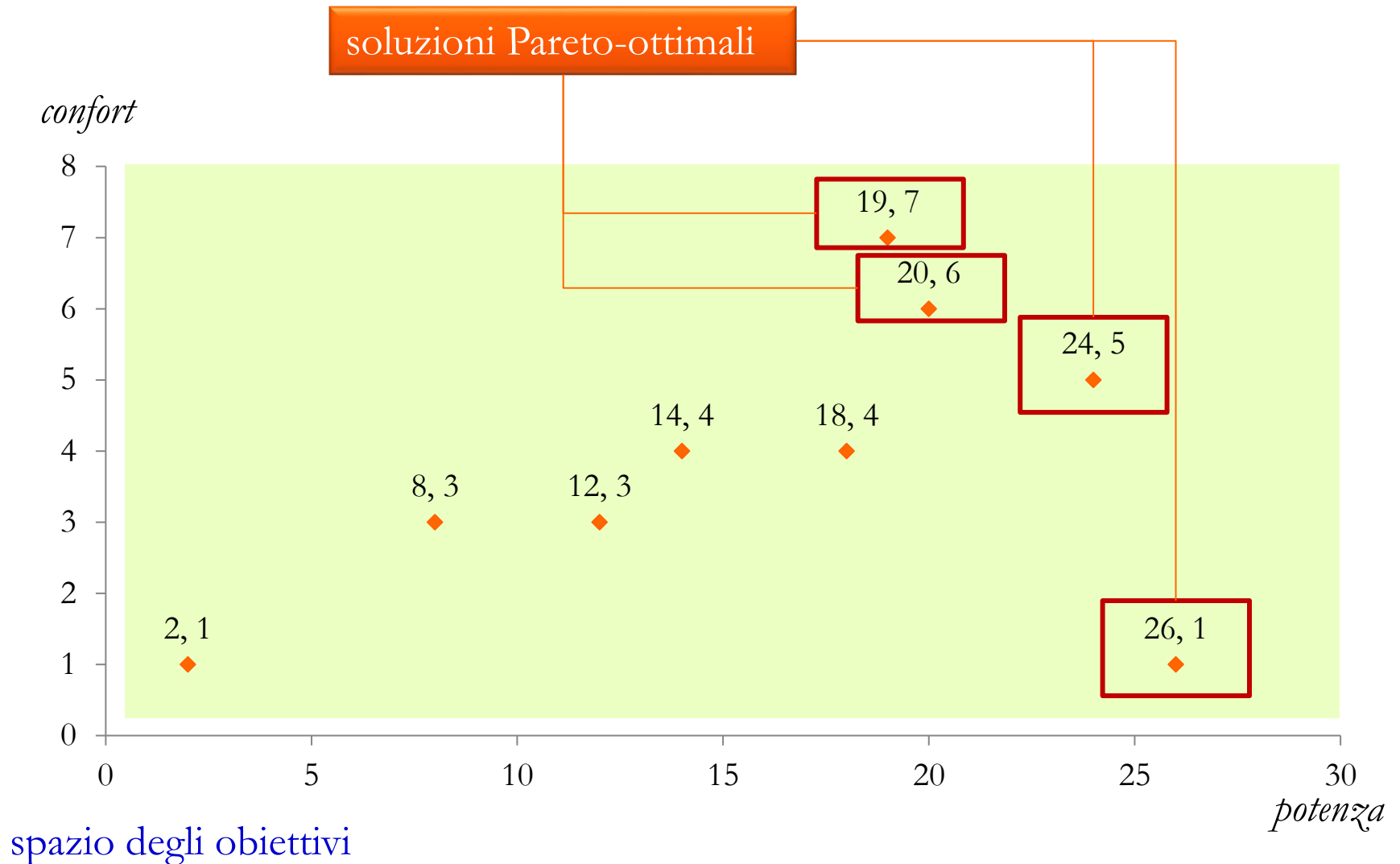
$$f_k(\mathbf{y}) > f_k(\mathbf{x}) \quad \text{per almeno una qualche funzione obiettivo } k$$

Problemi decisionali: Pareto-ottimalità

- Approcci per problemi multi-obiettivo:
 - *goal-programming*
 - trasformazione in problemi con singolo obiettivo
 - calcolo di soluzioni *efficienti* o *pareto-ottimali*


Principio di Pareto-ottimalità: una soluzione \mathbf{x} è ottima secondo Pareto se non è *dominata* da nessun'altra soluzione.

Soluzioni di compromesso



Problemi decisionali: caso con più decisori

● Problema di **interazione** tra i decisori

- 
- **Cooperativa:** i decisori hanno obiettivi comuni (eventualmente distinti) e talvolta interesse ad associarsi (*giochi cooperativi*).
Si studiano meccanismi di pianificazione. Interessano le soluzioni a massima efficienza (pareto-ottimali)
 - **Competitiva:** i decisori hanno obiettivi individuali e contrastanti (*giochi non cooperativi* o *competitivi*).
Si studiano meccanismi di negoziiazione. Interessano le soluzioni che descrivono situazioni di equilibrio tra i decisori (*equilibrio di Nash*)

Teoria dei giochi

- Scopo:

analizzare le situazioni in cui diversi **decisori** (*giocatori*) interagiscono perseguendo obiettivi **comuni**, **diversi** o **conflittuali**. L'interazione si chiama **gioco**

- Ruolo:

- *Descrittivo*: interpretare la realtà, ossia spiegare le strategie adottate dai decisori.
- *Prescrittivo*: determinare eventuali situazioni di equilibrio nella interazione tra decisori.

La **soluzione** di un gioco è una descrizione sistematica dei risultati che possono emergere in un determinato tipo di interazione tra decisori

Ipotesi di lavoro

Assiomi di *razionalità* (Von Neumann e Morgenstern)

Tutti i decisori sono **razionali** e **intelligenti**

- **decisore razionale**

in grado di assegnare un **valore di utilità** a ciascuno dei possibili risultati del gioco e, di conseguenza, orientare le sue scelte nella direzione di massimizzare la propria utilità

- **decisore intelligente**

che dispone degli strumenti intellettivi per poter «calcolare» le azioni necessarie per massimizzare la propria utilità

Giochi strategici

Gioco strategico: modello di interazione tra giocatori in cui

- ciascun giocatore conosce completamente le conseguenze delle proprie azioni sugli altri giocatori (**informazione completa**)
- ciascun giocatore sceglie le proprie mosse (e quindi agisce) una sola volta (**il gioco non è ripetuto**)
- Le scelte vengono effettuate **simultaneamente** senza conoscere le scelte degli altri giocatori
- I giocatori non possono accordarsi in modo vincolante (**no coalizioni**)

Giochi strategici: elementi

- N giocatori, ognuno dei quali dispone di un insieme di azioni o strategie possibili:

$$S^i = \{s_1^i, s_2^i, \dots\} \quad \text{per ogni giocatore } i = 1, \dots, N$$

- un esito (o profilo) $s = \{d^1, \dots, d^N\}$ in cui $d^i \in S^i$ è la strategia scelta dal giocatore i -esimo.
- Ad ogni esito corrisponde un risultato $u(s) = \{u^1(s), \dots, u^N(s)\}$, in cui $u^i(\cdot)$ è la funzione di utilità (payoff) del giocatore i -esimo che descrive l'ordine di preferenza del giocatore sull'insieme di tutti i possibili esiti del gioco.

Dilemma del prigioniero

- Un noto politico e un facoltoso finanziere vengono indagati per tangenti. Un magistrato zelante li interroga separatamente spiegando loro che:
 - se **entrambi confessano** ognuno sconterà **5 anni** di prigione;
 - se **entrambi non confessano** ognuno sconterà **un anno** di prigione;
 - se **solo uno confessa** accusando l'altro allora chi confessa è libero e l'altro sconterà **10 anni** di prigione.



- giocatori: $\{\text{Politico}, \text{Finanziere}\}$
- strategie: $S^P = S^F = \{\text{Confessa}, \text{Non confessa}\}$
- esiti: $\{C^P, C^F\}, \{N^P, N^F\}, \{C^P, N^F\}, \{N^P, C^F\}$

Dilemma del prigioniero

- Payoff (in questo caso descrive un costo):

Politico	Finanziere
$u^P(C^P, N^F) = 0$	$u^F(N^P, C^F) = 0$
$>$	$>$
$u^P(N^P, N^F) = 1$	$u^F(N^P, N^F) = 1$
$>$	$>$
$u^P(C^P, C^F) = 5$	$u^F(C^P, C^F) = 5$
$>$	$>$
$u^P(N^P, C^F) = 10$	$u^F(C^P, N^F) = 10$

- Si noti come l'utilità di ognuno dipende anche dalla scelta dell'altro giocatore.

Dilemma del prigioniero

- Un noto politico e un facoltoso finanziere vengono indagati per tangenti. Un magistrato zelante li interroga separatamente spiegando loro che:
 - se **entrambi confessano** ognuno sconterà **5 anni** di prigione;
 - se **entrambi non confessano** ognuno sconterà **un anno** di prigione;
 - se **solo uno confessa** accusando l'altro allora chi confessa è libero e l'altro sconterà **10 anni** di prigione.
- L'intera situazione può essere descritta dalla seguente tabella:

		Finanziere	
		<i>C</i>	<i>N</i>
Politico	<i>C</i>	(5 , 5)	(0 , 10)
	<i>N</i>	(10 , 0)	(1 , 1)

Strategie dominanti

- Siano s_k^i e s_h^i due strategie del giocatore i e s^{-i} un vettore che specifica le strategie dei restanti $N - 1$ giocatori:
- La strategia s_k^i **domina strettamente** la strategia s_h^i se

$$u^i(s_k^i, s^{-i}) > u^i(s_h^i, s^{-i}) \quad \text{per ogni possibile } s^{-i}$$

Strategie dominanti

- Siano s_k^i e s_h^i due strategie del giocatore i e s^{-i} un vettore che specifica le strategie dei restanti $N - 1$ giocatori:
- La strategia s_k^i **domina debolmente** la strategia s_h^i se

$$\begin{array}{ll} u^i(s_k^i, s^{-i}) \geq u^i(s_h^i, s^{-i}) & \text{per ogni possibile } s^{-i} \text{ e} \\ u^i(s_k^i, s^{-i}) > u^i(s_h^i, s^{-i}) & \text{per qualche } s^{-i} \end{array}$$

[Nota] Se esiste una strategia strettamente dominante, questa è unica. Possono invece esistere più strategie debolmente dominanti.

Eliminazione iterata di strategie dominate

- Se i giocatori sono razionali e intelligenti, le strategie strettamente dominate possono sempre essere rimosse dal gioco:

Infatti se la strategia s_k^i **domina strettamente** la strategia s_h^i , il giocatore i -esimo preferirà per definizione **sempre** la sua strategia k -esima alla h -esima, indipendentemente dall'esito del gioco.

Se l'eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate porta ad un solo possibile esito del gioco, tale esito è la **soluzione del gioco**.

Dilemma del prigioniero

- Il finanziere è razionale quindi farà il seguente ragionamento:

finanziere

C N

politico

C	(5,5)	(0,10)
---	-------	--------

N	(10,0)	(1,1)
---	--------	-------

- “Se il politico confessa posso *a*) confessare ed essere condannato a 5 anni oppure *b*) non confessare ed essere condannato a 10 anni, **quindi senz’altro confesso**”.
- “Se invece il politico non confessa posso *a*) confessare ed essere libero oppure *b*) non confessare e beccarmi un anno di carcere, **quindi senz’altro confesso**”.

Dilemma del prigioniero

- In termini **matematici** il ragionamento del finanziere è il seguente:

C^F domina strettamente N^F perché

- N^P : $u^F(N^P, C^F) \succ u^F(N^P, N^F)$
- C^P : $u^F(C^P, C^F) \succ u^F(C^P, N^F)$



La strategia N^F può essere eliminata dal gioco

Dilemma del prigioniero

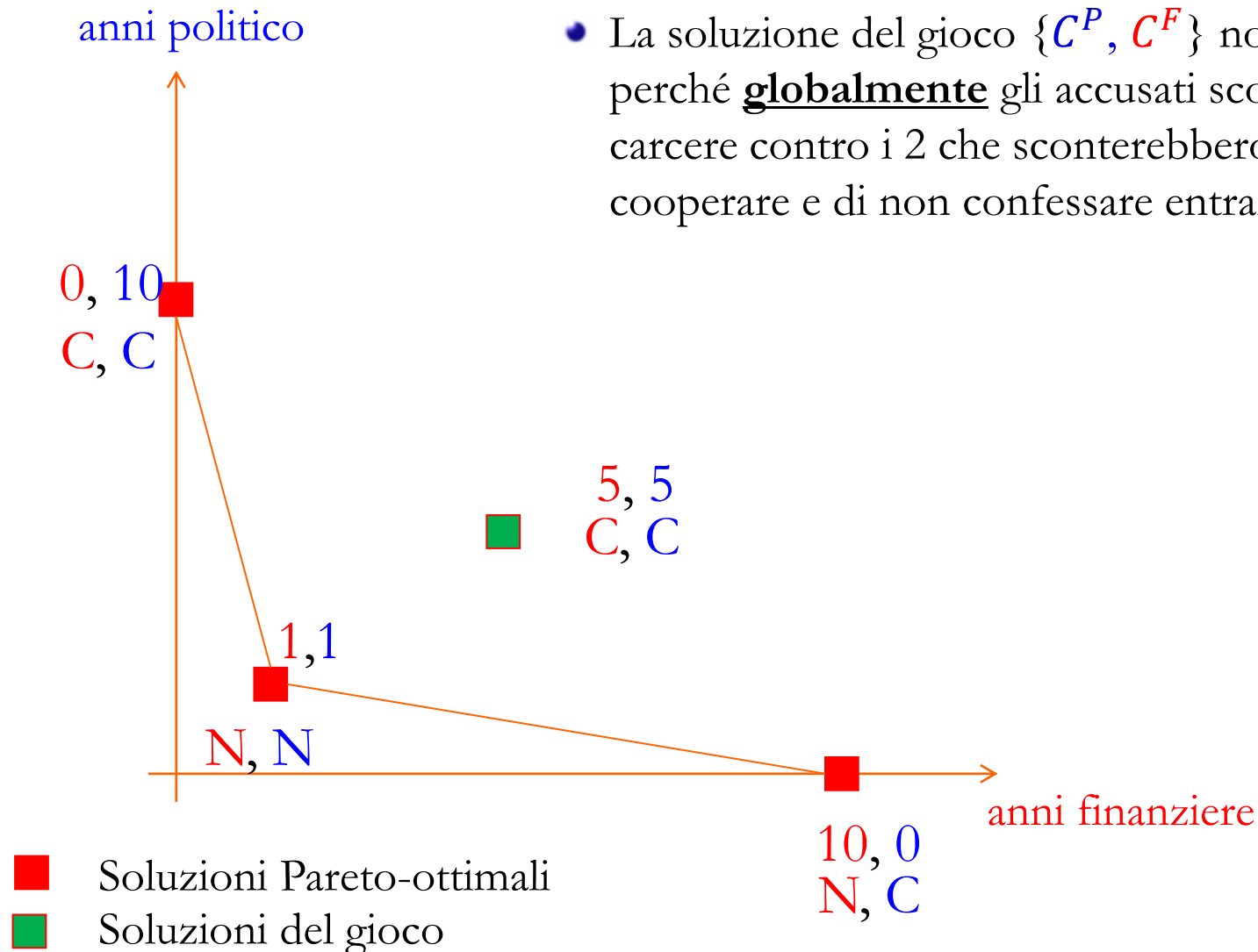
		Finanziere	
		C	N
Politico	C	$(5, 5)$	$(0, 10)$
	N	$(10, 0)$	$(1, 1)$

A questo punto il politico (che sa che il finanziere è razionale e quindi sicuramente confesserà) sa che gli esiti del gioco si restringono a (C^P, C^F) e (N^P, C^F) e, analizzando i suoi payoff, realizza che la strategia C^P domina strettamente la strategia N^P

La soluzione del gioco è $\{C^P, C^F\}$

Dilemma del prigioniero

- La soluzione del gioco $\{C^P, C^F\}$ non è pareto-ottimale perché **globalmente** gli accusati sconteranno 10 anni di carcere contro i 2 che sconterebbero se decidessero di cooperare e di non confessare entrambi.



Dilemma del prigioniero

		finanziere	
		C	N
politico	C	(?,?)	(?,?)
	N	(?,?)	(?,?)

[Esercizio]

- Esiste uno scenario alternativo di anni di reclusione che ammette come soluzione del gioco per entrambi la non confessione?
- Esiste uno scenario alternativo di anni di reclusione che non ammette una unica soluzione del gioco?

Esempio di eliminazione iterata di st. dominate

- 2 giocatori {1,2}
- 3 strategie per ogni giocatore: $S^1 = \{T, M, B\}$ e $S^2 = \{L, C, R\}$
- Esiti e payoff (guadagno)

	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(4,5)	(1,7)	(5,6)
<i>M</i>	(3,4)	(2,5)	(5,4)
<i>B</i>	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 2 non giocherà mai la strategia *R* che è strettamente dominata dalla strategia *C*

Esempio

	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(4,5)	(1,7)	(5,6)
<i>M</i>	(3,4)	(2,5)	(5,4)
<i>B</i>	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 1 non giocherà mai la strategia *B* che è strettamente dominata dalla strategia *M*

	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(4,5)	(1,7)	(5,6)
<i>M</i>	(3,4)	(2,5)	(5,4)
<i>B</i>	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 2 non giocherà mai la strategia *L* che è strettamente dominata dalla strategia *C*

Esempio

	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(4,5)	(1,7)	(5,6)
<i>M</i>	(3,4)	(2,5)	(5,4)
<i>B</i>	(2,5)	(1,1)	(7,0)

Il giocatore 1 non giocherà mai la strategia *T* che è strettamente dominata dalla strategia *M*

	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(4,5)	(1,7)	(5,6)
<i>M</i>	(3,4)	(2,5)	(5,4)
<i>B</i>	(2,5)	(1,1)	(7,0)

La soluzione del gioco è l'esito {*C*, *M*}

Gerarchia di credenze: 1 sa che 2 sa che 1 sa che 2 ...è razionale

Ancora sulla soluzione del gioco

- Non sempre esiste una soluzione ottenibile per eliminazione iterata di strategie dominate, quindi non sempre la soluzione di un gioco è unica.

Falchi e Colombe: un noto partito politico ha due correnti **A** e **B** ognuna delle quali rispetto a un particolare tema può decidere di comportarsi *da duro e puro* oppure *scendere a un compromesso*.

- se **entrambe** scendono a un **compromesso** si perde l'identità del partito;
- se **A** fa il **duro e puro** e **B** sceglie il **compromesso**, gli elettori premiano **A** per l'integrità mostrata (**e viceversa**)
- se **entrambe fanno i duri e puri**, si avviano alla **scissione**

Falchi e Colombe

- 2 giocatori {A,B}
- 2 strategie per ogni giocatore: $S^A = S^B = \{compr, D\&P\}$
- Esiti e payoff (guadagno)

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

Entrambe le **correnti** non hanno una strategia dominante



Infatti **A** osserva che

- se **B** scende a compromessi, **si vince facendo i duri e puri**, mentre
- se **B** fa il duro e puro **scendere a compromessi evita la scissione**.

E chiaramente **B** fa lo stesso ragionamento

Falchi e Colombe

- Se entrambi scelgono il compromesso allora uno dei due potrebbe trarre vantaggio trasformandosi in duro e puro (a patto che l'altro insista col compromesso, ...cosa che sembra improbabile)

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

- A e B si rendono conto che qualsiasi esito è migliore della scissione

Gli esiti {compr, compr} e {D&P, D&P} non sono stabili

Falchi e Colombe

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

Se **A** sceglie il compromesso e **B** fa il duro e puro (esito {compr, D&P}), nessuno riesce a migliorare la propria utilità con una decisione unilaterale, cioè senza convincere anche l'altro a cambiare strategia. Infatti:

- Se **A** cambia strategia in duro e puro la sua utilità passa da -1 a -10.
- Se **B** cambia strategia e sceglie il compromesso la sua utilità passa da 1 a 0.

Situazione del tutto speculare si verifica con l'esito {D&P, compr}.

Gli esiti {compr, D&P} e {D&P, compr} sono di equilibrio perché **A** e **B** non hanno interesse a modificare unilateralmente la propria strategia

Equilibrio di Nash

- Un esito $s = \{d^1, \dots, d^N\}$ è un **equilibrio di Nash** se per ogni giocatore i si ha:

$$u^i(d^i, s^{-i}) \geq u^i(s_k^i, s^{-i}) \quad \text{per ogni } s_k^i \in S^i$$

La condizione esprime una sorta di «**stato stazionario**» tra i giocatori rispetto al quale nessuno ha interesse a deviare **unilateralmente**.

In altri termini: se **ogni** decisore attua una strategia **non dominata**, l'unico modo per migliorare la propria situazione è sperare che altri decisori cambino la propria strategia. E d'altro canto, se i decisori sono razionali, **nessuno** ha interesse a modificare la propria strategia.

Dilemma del prigioniero

		Finanziere	
		C	N
Politico	C	$(5, 5)$	$(0, 10)$
	N	$(10, 0)$	$(1, 1)$

La soluzione $\{C^P, C^F\}$ è un **equilibrio di Nash** perché entrambi i giocatori stanno adottando una strategia dominante rispetto all'esito del gioco e nessuno può «guadagnare» di più senza che l'altro cambi la propria strategia.

Falchi e Colombe

	compr	D&P
compr	(0,0)	(-1,1)
D&P	(1,-1)	(-10,-10)

Le soluzioni $\{\text{compr}, \text{compr}\}$ e $\{\text{D\&P}, \text{D\&P}\}$ sono entrambi equilibri di Nash perché in quelle situazioni di nuovo entrambi i giocatori stanno adottando una strategia dominante rispetto all'esito del gioco.

Equilibrio di Nash: considerazioni

- Non tutti i giochi ammettono un equilibrio di Nash
- Un gioco può ammettere più di un equilibrio di Nash
- Se un gioco ammette almeno un equilibrio di Nash, allora esiste almeno un esito in cui ogni giocatore ha a disposizione una strategia dominante
- Contrariamente ad altre situazioni (es. [giochi a somma zero](#) in cui il guadagno di un decisore coincide con la perdita dell'altro) in un equilibrio di Nash tutti i giocatori possono ottenere un vantaggio (o limitare lo svantaggio al minimo)

Equilibrio di Nash: considerazioni

- Un equilibrio di Nash rappresenta il meglio che ogni decisore può fare per sé quando **tutti i decisori del gioco sono reciprocamente in competizione**.
- Però la situazione di qualcuno o di tutti può migliorare se si prende in considerazione la **possibilità di cooperare** (giochi cooperativi o con coalizioni)



In generale, un equilibrio di Nash
non è la soluzione ***migliore globalmente***
(potrebbe infatti non essere una soluzione pareto-ottimale, come
esemplificato dal dilemma del prigioniero)

Equilibrio di Nash: considerazioni

- D'altra parte, se si instaura una **cooperazione** tra i decisori e **tutti** agiscono non per ottenere il miglior risultato per sé, ma per ottenere **il miglior risultato collettivo**, qualcuno potrebbe essere penalizzato perché deve sacrificarsi per gli altri.



La razionalità collettiva (**pareto-ottimalità**) generalmente contrasta con quella individuale (**equilibri di Nash**).

Esercizio

- La Facoltà di *Scienze Occulte* offre il corso a scelta in *Informatica Esotica*.
- Il corso è tenuto in formato fotocopia (cioè con identico syllabus) dagli emeriti professori **Ford** e **Fulkerson**. Di conseguenza, gli studenti si dividono equamente nella scelta (statisticamente parlando) di una delle due versioni del corso.
- Recentemente però il preside di facoltà ha introdotto un criterio meritocratico che prevede un premio ai corsi più numerosi.
- Benché **Ford** e **Fulkerson** siano restii (per motivi culturali e pedagogici) a modificare il syllabus, ognuno di loro sa che semplificare la prova d'esame sposta il 30% di studenti dal corso del «rivale» al proprio
- ... e entrambi vogliono fare bella figura agli occhi del preside (ovvero non vogliono rischiare il posto).

Esercizio

1. Ford e Fulkerson raggiungono un equilibrio?
2. Se sì, cosa comporta tale equilibrio a lungo termine?
3. Se l'effetto di lungo termine è negativo, quale potrebbe essere un rimedio?

Giochi strategici: interpretazioni



1. Il gioco modella una situazione che ha luogo **una sola volta**. I giocatori non possono comunicare e ognuno deve fare la propria senza conoscere quella degli altri. Inoltre ogni giocatore **non ha modo di «farsi un'idea»** su come si comporteranno gli altri
2. Ogni giocatore **può «farsi un'idea»** su cosa faranno gli altri, perché per esempio il gioco si ripete. **Tuttavia**, il comportamento di ogni giocatore non ha «aspetti strategici» e ogni giocatore è **esclusivamente** interessato a massimizzare l'utilità della **singola ripetizione**.

Se il giocatore assume un «comportamento strategico» allora si parla di **giochi ripetuti** invece che di giochi strategici

Teoria dei giochi: considerazioni

- La teoria dei giochi presuppone « *razionalità* » e « *conoscenza* », concetti ancora troppo elusivi e/o definiti in modo primitivo



- si può non essere d'accordo con la scelta «più razionale»
- si può perdere facendo la scelta «più razionale»

Una nota sui giochi ripetuti

- Immaginiamo che i due giocatori **A** e **B** del dilemma del prigioniero siano chiamati a «giocare» più volte (per esempio 10 volte), e consideriamo le seguenti strategie che ognuno dei due può adottare
 1. Essere egoista (confessare **sempre**)
 2. Avere piena fiducia nel prossimo (non confessare **mai**)
 3. Perdere la ragione (decidere a caso)
 4. Fare il furbo (avere piena fiducia... tranne qualche volta)
 5. *Ca' nisciun è fess*: non appena l'altro confessa divento definitivamente egoista
 6. Mi baso sul comportamento dell'altro giocatore al turno precedente: se ha confessato, io ora confesso; se non ha confessato io non confesso ora

Una nota sui giochi ripetuti

- Ora immaginiamo una popolazione di individui che si incontrano a caso e ognuno dei quali adotti una delle precedenti strategie.
- E immaginiamo che tra una generazione e l'altra sopravviva la porzione di individui che abbia guadagnato di più

Esiste una strategia dominante
(in questa nuova accezione)?

Bibliografia

1. C. Vercellis,
Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni.
Mc Graw-Hill, 2008
2. F.S. Hillier, G.J. Lieberman,
Ricerca Operativa,
Mc Graw-Hill, IX ed., 2010
3. A. Agnetis, **dispense**