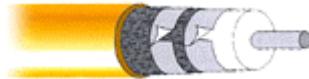


- A grandi distanze, i fronti d'onda sferici generati da una sorgente finita possono essere approssimati con dei fronti d'onda piani.
- Il campo e.m. non risulta essere confinato: il mezzo di propagazione generalmente è l'aria \Rightarrow il volume cresce all'allontanarsi dalla sorgente
- Per questo il campo decade come $1/R$ e la densità di potenza trasmessa come $1/R^2$.
- Riesce a trasmettere un'informazione da un punto ad un altro senza altre questa grande perdita in termini di densità di potenza?
- Dovremo cercare di conoscerne il campo e.m. in una struttura cilindrica...

Mezzi Trasmissivi 1

II
guide d'onda

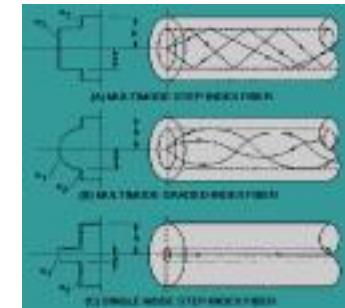
CAVO
COASSIALE



GUIDE D'ONDA
(tutti rettangolari)



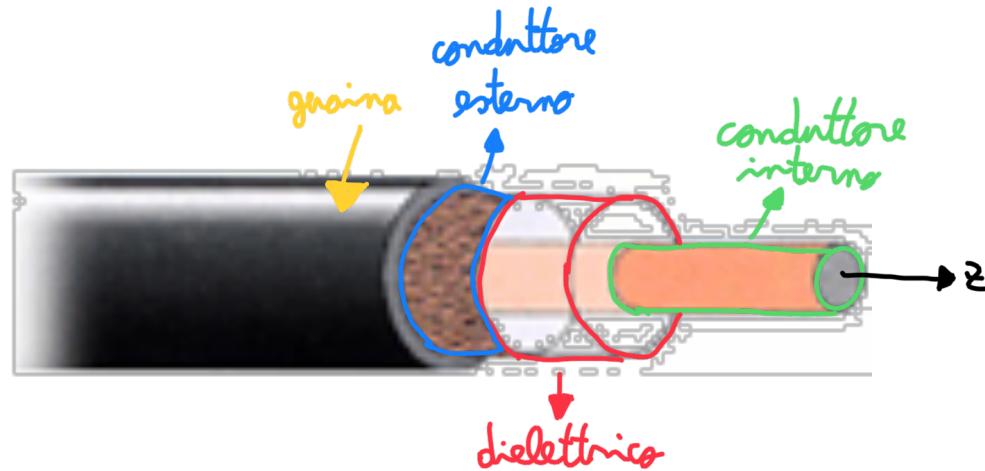
FIBRE OTTICHE



- monochromatiche (1 frequenza)
- principio di riflessione totale

legame tra V, I = eq. dei telegrafisti

LINEE DI TRASMISSIONE: Cavo coassiale

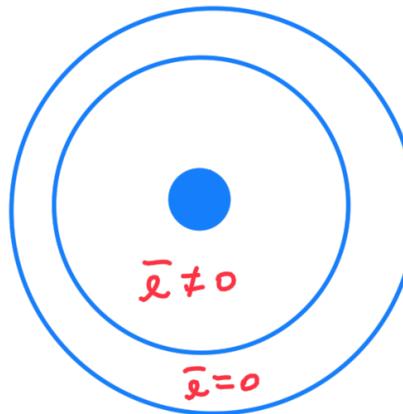


- Conduttore interno
- Calza conduttrice coassiale (*conduttore esterno*)
- Dielettrico di separazione (*schiuma di teflon*)
- Guaina di protezione

- Vogliamo trovare delle soluzioni di tipo eq. d'onda (dipendenza da z lungo l'asse di propagazione) non nulle nella regione compresa fra i due conduttori (all'interno il campo è nullo).



$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}(x, y, z) = \bar{e}(x, y) e^{-j\beta z} \\ \bar{e} \neq 0 \text{ fra i conduttori} \\ \bar{e} = 0 \text{ altrove} \end{array} \right.$$



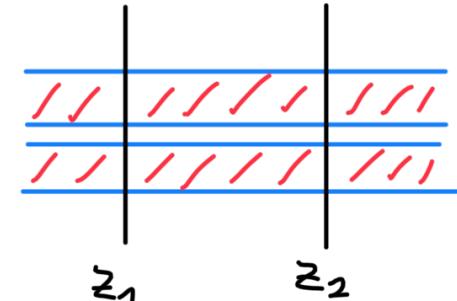
- La soluzione non può essere una semplice onda piana visto che il campo e.m. non varia in piani ortogonali alla direzione di propagazione (sarebbe ≠ 0 anche al di fuori della guaina del conduttore esterno).

EQUAZIONI DI MAXWELL PER I FASORI IN ASSENZA DI SORGENTI

per avere proporzioni
devo trovare soluzioni non nulle

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \tilde{\mathbf{H}}$$



*divergenza
di un rotore
sempre nulla*

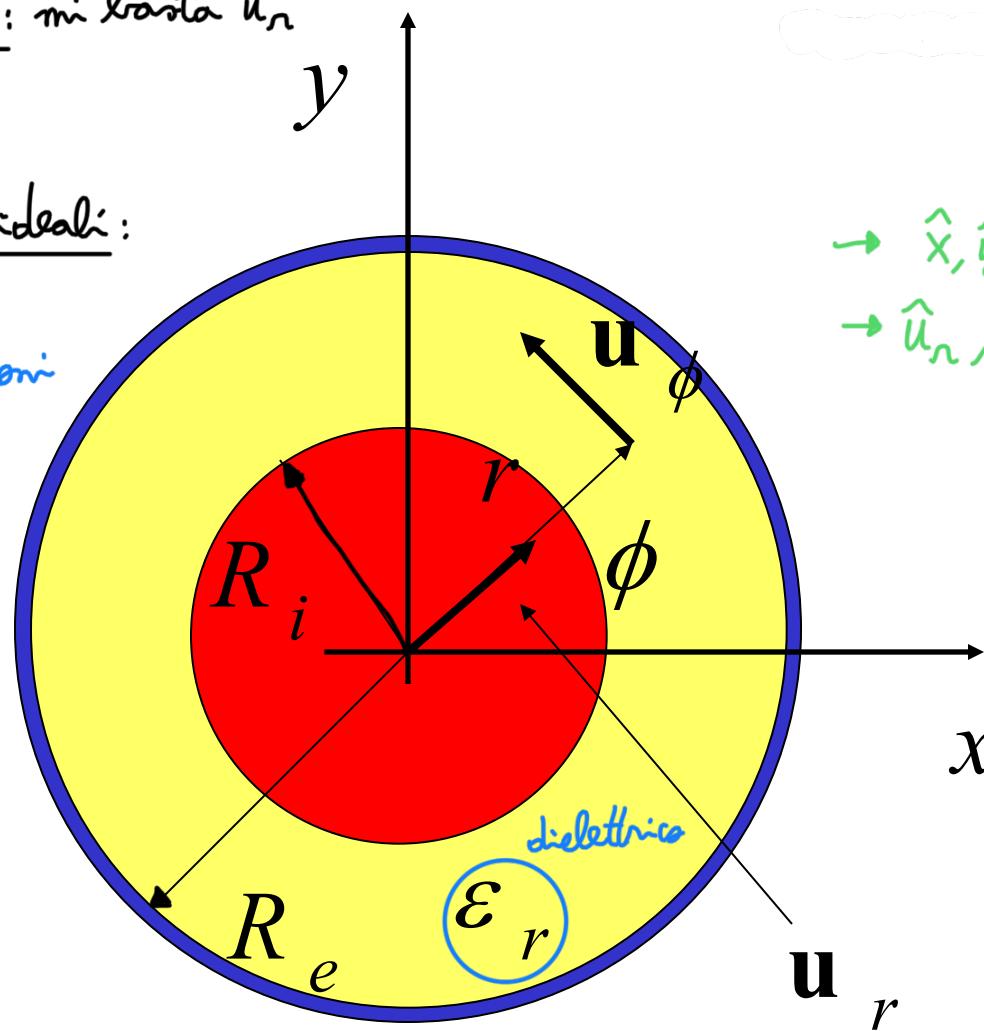
$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} &= j\omega\epsilon \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0 \end{aligned} \right\}$$

- Coordinate cartesiane: \hat{x}, \hat{y} per rappresentare la circonferenza R_e, R_i (cond. al contorno)
- Coordinate cilindriche: mi basta \bar{u}_r
 $(x^2 + y^2 = R_i^2)$



- Considerando conduttori ideali:

$$\begin{cases} E_t(R_i, \phi, z) = 0 \\ E_t(R_e, \phi, z) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{condizioni} \\ \text{al} \\ \text{contorno} \end{matrix}$$



→ $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$
→ $\hat{u}_r, \hat{u}_\phi, \hat{u}_z$

Modo TEM

$E_z = 0 \quad H_z = 0$

HP: componenti longitudinali nulle

Inoltre, a causa della simmetria azimutale, ha senso cercare una soluzione che non dipenda da ϕ :

$$\partial_{\phi} = 0$$

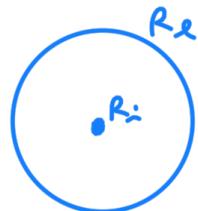
$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 = -\frac{1}{r} \partial_r \left(r \tilde{E}_r(r, z) \right) + \frac{1}{r} \partial_{\phi} \tilde{E}_{\phi} + \partial_z \tilde{E}_z$$

essendo

$$\tilde{E}_z = 0$$

$$[\tilde{\mathbf{E}}] = \text{V/m}$$

$$r \tilde{E}_r(r, z) = Cost \cdot \tilde{V}(z) \Rightarrow \tilde{E}_r(r, z) = \frac{Cost}{r} \tilde{V}(z)$$



C si determina imponendo che:

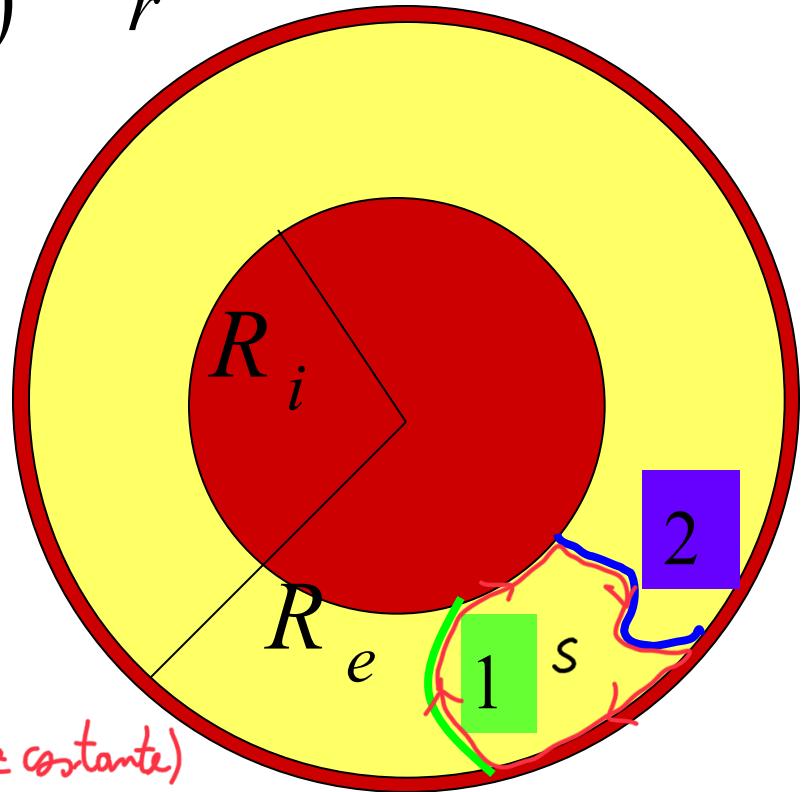
$$\int_{R_i}^{R_e} \tilde{E}_r(r, z) dr = \int_{R_i}^{R_e} \frac{Cost}{r} \tilde{V}(z) dr =$$

$$= Cost \cdot V(z) \ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right) = V(z) \Rightarrow Cost = \frac{1}{\ln(R_e / R_i)}$$

$$[\tilde{V}(z)] = V$$

C è adimensionale 

$$\tilde{E}_r(r, z) = \frac{1}{\ln(R_e / R_i)} \frac{\tilde{V}(z)}{r}$$



$$\int_{R_i}^{R_e} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(z)$$

↑

In una sezione z qualsiasi (z costante)

$\int_{R_i}^{R_e}$ è indipendente dal cammino percorso

- Infatti, considerando il percorso chiuso precedente si ha:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \partial t \phi(\vec{B}) = 0$$

$\phi(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ (manca della componente lungo z)

↓
 S
 ↓
 superficie delimitata
 dal percorso

- Quindi si ha:

$$\vec{E}(r, \phi, z) = \begin{cases} E_r \hat{u}_r, & R_i \leq r \leq R_e \\ 0, & \text{altrav} \end{cases}$$

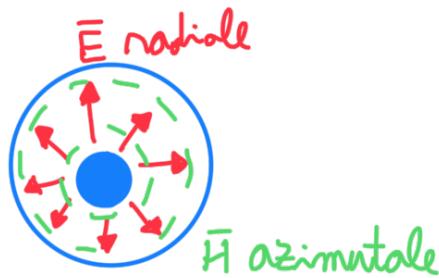
- Del campo \vec{E} soddisfa le condizioni al contorno (\vec{E} soltanto radiale $\Rightarrow E_{\theta, z} = 0$)

In una sezione z, l'integrale di linea del campo E non dipende dal cammino ed è possibile definire univocamente una tensione:

Ciò dipende dal fatto che il flusso di H attraverso una qualsiasi superficie normale alla direzione di propagazione è nullo, essendo nulla la componente assiale di H

- Consideriamo ora il campo $\tilde{\mathbf{H}}$:

$$\tilde{\mathbf{H}}(r, z) = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \nabla \times (\mathbf{u}_r \hat{E}_r(r, z)) =$$



$$= \frac{1}{-j\omega\mu_0} \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\phi & \mathbf{u}_z \\ \partial_r & \partial_\phi & \partial_z \\ \hat{E}_r(r, z) & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu_0} \frac{1}{r} \partial_z \hat{E}_r(r, z) r \mathbf{u}_\phi = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \frac{d \hat{V}(z)}{dz} \mathbf{u}_\phi$$

$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{H}_\phi \hat{\mathbf{u}}_\phi$

$$[\tilde{\mathbf{H}}] = \text{A/m} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{cases} \tilde{H}_\phi = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \frac{d \hat{V}(z)}{dz}, & R_i \leq r \leq R_e \\ 0, & \text{altravce} \end{cases}$$

Rotore in un sistema di coordinate arbitrario

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ h_1 A_{u_1} & h_2 A_{u_2} & h_3 A_{u_3} \end{vmatrix}$$

h_i coefficiente metrico, \mathbf{e}_i versore , u_i coordinata

D'altra parte: $\tilde{E}_r(r, z)\mathbf{u}_r = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times (\tilde{H}_\phi(r, z)\mathbf{u}_\phi) =$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \left(\frac{1}{-j\omega\mu} \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \frac{d\tilde{V}(z)}{dz} \mathbf{u}_\phi \right) =$$

$$\boxed{k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0} = - \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \frac{1}{k^2} \frac{d^2 \tilde{V}(z)}{dz^2} \mathbf{u}_r$$

$$\tilde{E}_r(r, z) = \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \tilde{V}(z) = - \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \frac{1}{k^2} \frac{d^2 \tilde{V}(z)}{dz^2}$$

Necessariamente:

$$\tilde{V}(z) = -\frac{1}{k^2} \frac{d^2 \tilde{V}(z)}{dz^2}$$

→ soddisfa
l'eq. d'onda

$$\tilde{V}(z) = V^+ \exp(-jkz) + V^- \exp(+jkz)$$

$$\tilde{E}_r(r, z) = \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \tilde{V}(z)$$

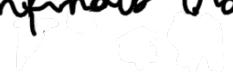
andamento di \tilde{E}_r al variazione di z
(MAX in $r=R_i$, MIN in $r=R_e$)

Nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left\{ \hat{E}_r(r, z) \exp(-j\omega t) \right\} &= \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \operatorname{Re} \left\{ \hat{V}(z) \exp(-j\omega t) \right\} = \\ &= \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} V(z, t)\end{aligned}$$

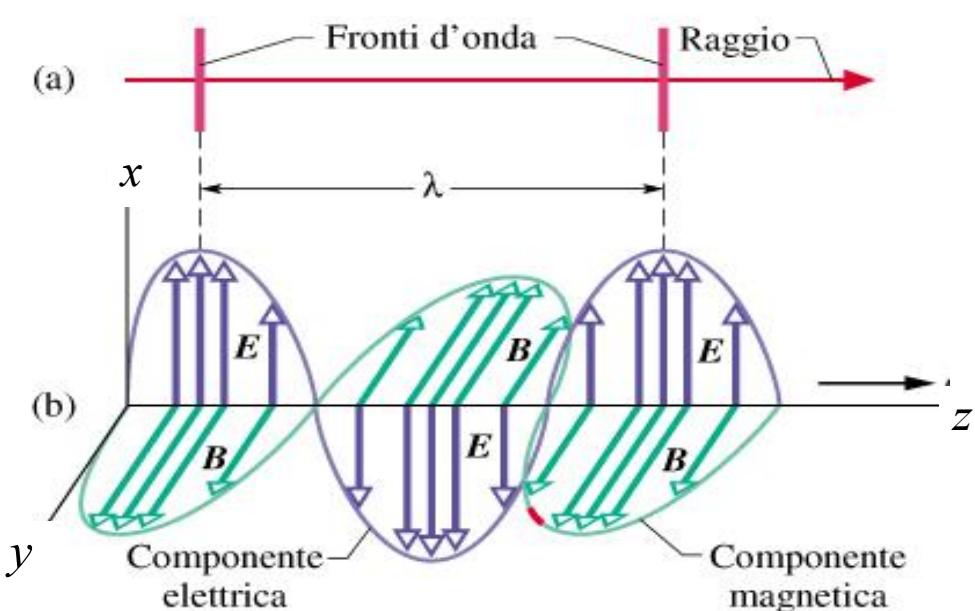
$$\begin{aligned}V(z, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \hat{V}(z) \exp(-j\omega t) \right\} = \\ &= V^+ \cos(\omega t - kz) + V^- \cos(\omega t + kz), \quad v^\pm \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- Stesso andamento delle onde piane, ma stavolta il fronte d'onda non è più un piano (il campo è confinato tra i due conduttori).



Costante di propagazione k

$$V^+(z, t) = f^+(t - z/v) = V^+ \cos [\omega(t - z/v)]$$



$$= V^+ \cos(\omega t - kz)$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$

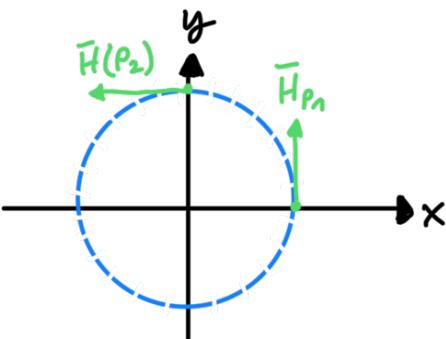
Lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{v}{f}$$

$$E_n(n, z + n\lambda) = E_n(n, z)$$

Cavo coassiale

Il campo magnetico:



- Se rimango sulla stessa sezione z e se p_1, p_2 distanza ugualmente dall'origine, allora l'ampiezza del campo \bar{H} è uguale.

$$\tilde{H}_\phi = \frac{-jk}{-j\omega\mu} \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} [V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz)]$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} [V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz)]$$

- Se ampiezze di campo \bar{E} e \bar{H} sono proporzionali quando si ha una sola onda progressiva:

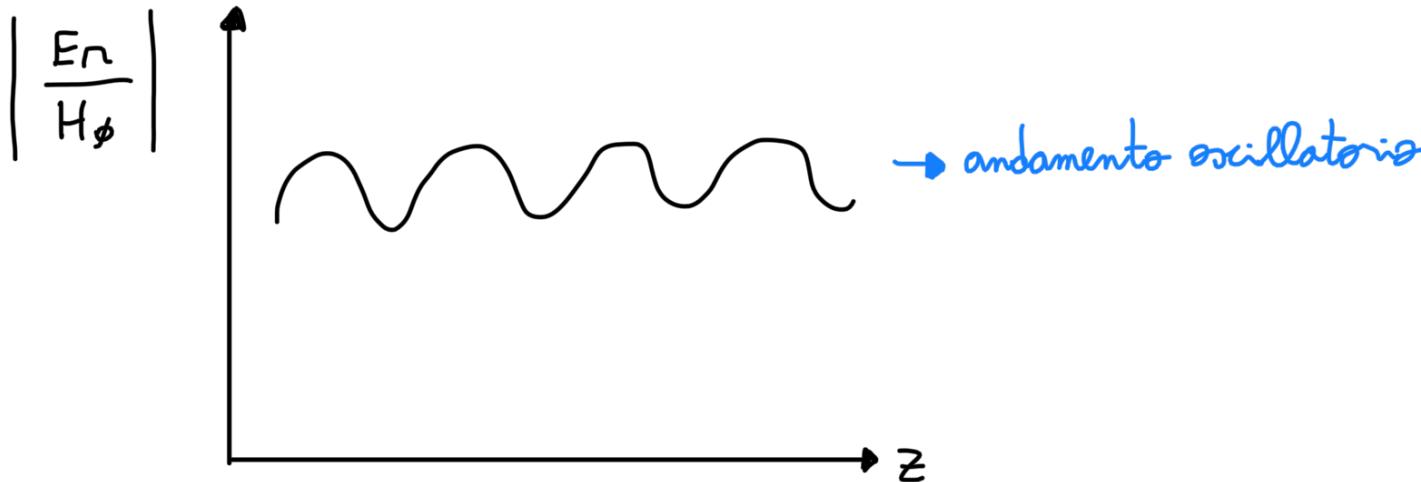
$$E_n = \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} V^+ e^{-jkz}, \quad H_\phi = \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} V^+ e^{-jkz} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

$$E_n / H_\phi = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \rightarrow \text{impedenza d'onda}$$

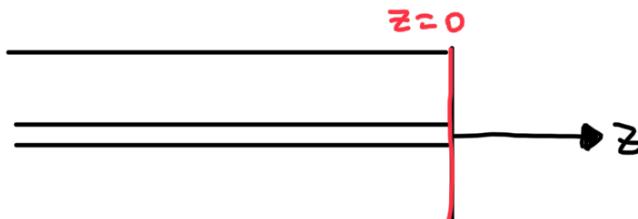
ammittenza
d'onda

- In presenza sia dell'onda progressiva, che di quella regressiva:

$$\frac{E_n(n, \phi, z)}{H_\phi(n, \phi, z)} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{V^+ e^{-jkz} + V^- e^{+jkz}}{V^+ e^{-jkz} - V^- e^{+jkz}}$$



Ej: Guida coassiale terminata con un cortocircuito



$$V^- = -V^+$$

la presenza del c.c. in $z=0$ produce una riflessione totale in ogni direzione

$$\begin{aligned} \frac{E_n}{H_\phi} &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1 - e^{+2jkz}}{1 + e^{+2jkz}} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{j \sin(kz)}{\cos(kz)} = \\ &= -j \tan(kz) \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{aligned}$$

IMPEDENZA INTRINSECA E IMPEDENZA D'ONDA

Propagazione di un'onda piana \hat{E}_x^+, \hat{H}_y^+
in un mezzo illimitato e omogeneo (ϵ, μ)

$$\frac{\tilde{E}_x^+}{\tilde{H}_y^+} = \text{impedenza intriseca } [\Omega] = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

- stessa sezione Σ
- stesso punto di coordinate r, ϕ

$$\frac{\tilde{E}_r^+}{\tilde{H}_\phi^+} = \text{impedenza d'onda } [\Omega] = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Attenzione , Quest'ultima espressione vale per un coax !!

Nel dominio del tempo:

$$H_\phi(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{H}_\phi \exp(-j\omega t) \right\} =$$
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} [V^+ \cos(\omega t - kz) - V^- \cos(\omega t + kz)]$$

$$V^\pm \in \mathfrak{R}$$

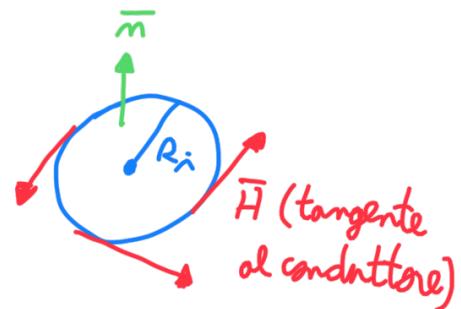
Cavo coassiale

superficie esterna del

La corrente totale che fluisce nel conduttore interno

"somma di tutte le densità di corrente nel conduttore interno

$$\tilde{I} = \oint_{r=R_i} \tilde{H}_\phi R_i d\phi = 2\pi R_i \tilde{H}_\phi(R_i)$$



$$\bar{J} = \bar{n} \times \bar{H} = \bar{u}_z \times H_\phi \bar{u}_\phi = H_\phi \bar{u}_z$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{R_i \ln(R_e / R_i)} 2\pi R_i \left[V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz) \right] =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln(R_e / R_i)} \left[V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz) \right] =$$

$$= I^+ \exp(-jkz) + I^- \exp(+jkz), \quad I^\pm = 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \frac{1}{\ln(R_e / R_i)} (\pm V^\pm)$$

$\frac{1}{z_0}$

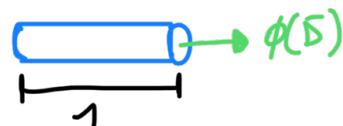
IMPEDENZA CARATTERISTICA

$$Z_0 = \frac{V^+ \exp(-jkz)}{I^+ \exp(-jkz)} = \frac{\sqrt{\mu / \epsilon} \ln(R_e / R_i)}{2\pi}$$

$$\tilde{I}(z) = \frac{1}{Z_0} [V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(+jkz)]$$

$$Z_0 = - \frac{V^- \exp(+jkz)}{I^- \exp(+jkz)}$$

- IMPEDENZA D'ONDA: descrive il legame puntuale fra ampiezza di campo \bar{E} e \bar{H} in un certo punto di una sezione z nel caso di una sola onda progressiva.
- IMPEDENZA CARATTERISTICA: descrive il legame fra la tensione e la corrente in una sezione z e dipende:
 - dal valore del campo e.m. in un punto
 - dalla geometria del mezzo
 - dalle caratteristiche del mezzo che riempie lo spazio fra i due conduttori



Capacità per unità di lunghezza

Carica per unità di lunghezza *(sulla superficie del conduttore interno)* $\hat{\rho}_l$

$$\epsilon \hat{E}_r(R_e, z) \mathbf{u}_r \cdot 2\pi R_e \mathbf{u}_r = \hat{\rho}_l = \phi(\bar{s})$$

$$[\hat{\rho}_l] = \text{C/m}$$

$$\epsilon \frac{1}{R_e \ln(R_e / R_i)} \hat{V}(z) \mathbf{u}_r \cdot 2\pi R_e \mathbf{u}_r = \hat{\rho}_l$$

Capacità per unità di lunghezza

$$C = \frac{\hat{\rho}_l}{\hat{V}(z)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(R_e / R_i)} \quad [\text{F/m}]$$

$[\mu\text{F/m}]$

Induttanza per unità di lunghezza

flusso per unità di lunghezza di \tilde{H}

$$\Phi_B = \mu \int_{R_i}^{R_e} \tilde{H}_\phi dr = \int_{R_i}^{R_e} \mu \frac{\tilde{I}(z)}{2\pi r} dr = \mu \frac{\tilde{I}(z)}{2\pi} \ln(R_e / R_i)$$

$$L = \frac{\Phi_B}{\tilde{I}(z)} = \frac{\mu \ln(R_e / R_i)}{2\pi} \quad [\text{H/m}]$$

[mH/m]

Velocità e Costante di propagazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu \ln(R_e / R_i)}} \frac{\ln(R_e / R_i)}{2\pi\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$k = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$$

Impedenza caratteristica in funzione di
induttanza e capacità per unità di lunghezza

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\ln(R_e / R_i)}{2\pi}$$

- Se fossimo in un mezzo non confinato: $C = \epsilon$, $L = \mu$

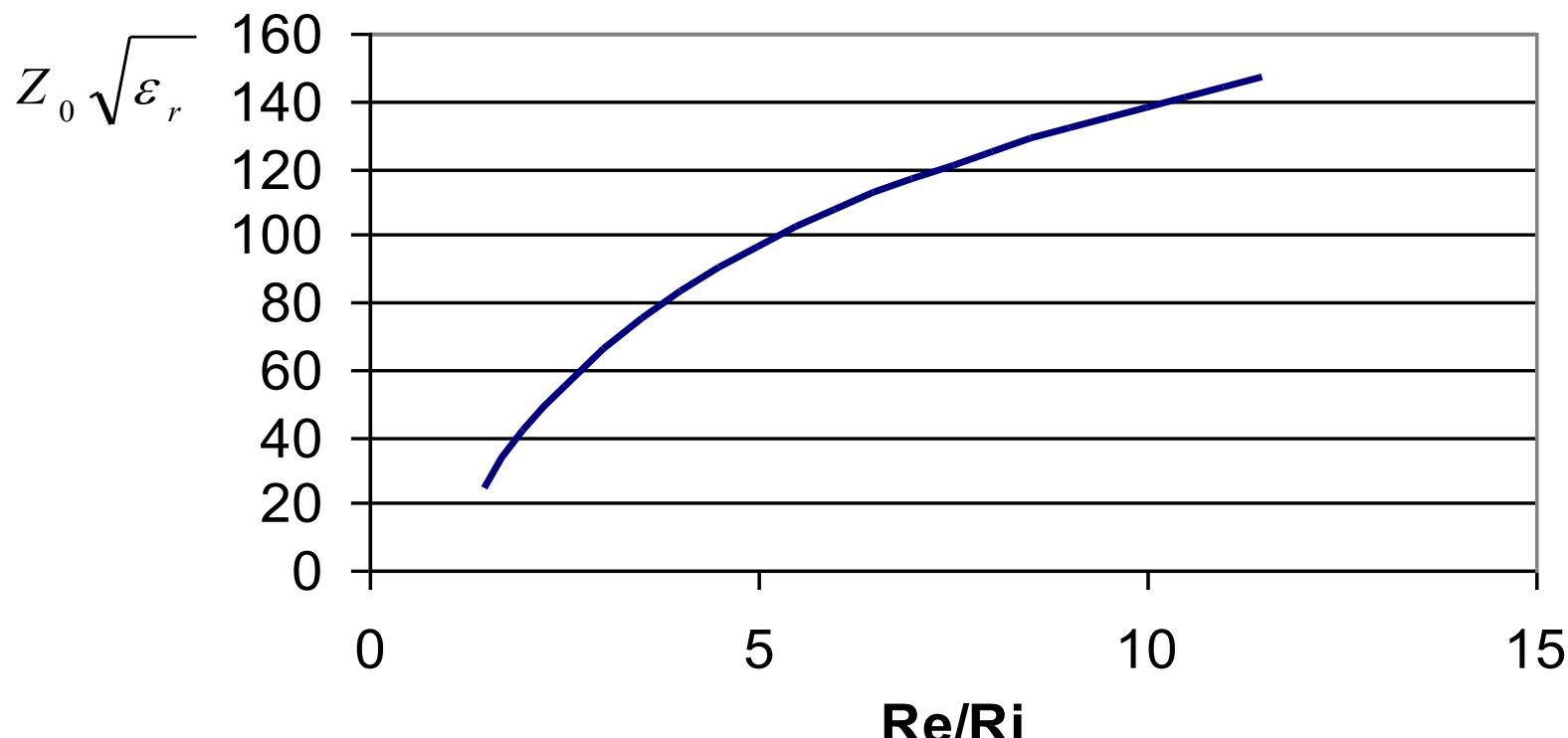
$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0^2 = \frac{L}{C} = \left(\frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right) \right)^2 \\ LC = \mu\epsilon \end{array} \right.$$

Impedenza caratteristica

varia in base a

$$Z_0 \approx 60 / \sqrt{\epsilon_r} \ln \left(R_e / R_i \right)$$

$$Z_0 = \frac{n}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(R_e / R_i \right)$$



- Onda progressiva in un coassiale:

$$\bar{E}(r, \phi, z) = \frac{V^+}{r \ln(R_e/R_i)} e^{-jkz} \hat{r} \quad \rightarrow \text{per un dato valore di } r, \text{ l'ampiezza del campo non cambia}$$

$$\bar{H}(r, \phi, z) = \frac{I^+}{2\pi r} e^{-jkz} \hat{\phi}$$

k = w \sqrt{\mu \epsilon}

dare:

$$I^+ = \frac{V^+}{Z_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi}$$

$$\bar{H}(r, \phi, z) = \frac{\nabla \times \bar{E}}{-jw\mu} = \frac{-jk}{-jw\mu} \cdot \frac{1}{r \cdot \ln(R_e/R_i)} V^+ e^{-jkz} \hat{\phi}$$

- Densità di potenza attiva media trasportata da un'onda progressiva in un canale cassiale:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{V(z)}{n \cdot \ln(R_e/R_i)} \hat{n} \times \frac{\hat{I}(z)}{2\pi n} \hat{\phi} = \frac{V(z) I^*(z)}{2\pi n^2 \ln(R_e/R_i)} \hat{z}$$

- Potenza attiva trasportata:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int \int \bar{S} \cdot \hat{z} ds \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \bar{S} \cdot \hat{z} n dr d\phi \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ V(z) I^*(z) \right\} = \boxed{\frac{1}{2Z_0} (|V^+|^2 - |V^-|^2)} = P^+ - P^-
 \end{aligned}$$

$Z_0 \uparrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow P \text{ piccola (a parità di tensione)}$

Esercizio: $P = 1 \text{ kW}$, $Z_0 = 50 \Omega$, $|V^+| = ?$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V^+|^2}{Z_0} \Rightarrow |V^+| = \sqrt{2Z_0 P} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 10^3} \simeq 320 \text{ V}$$

$$|E^+| = \frac{|V^+|}{n \ln(R_e/R_i)} \xrightarrow[\text{onda progressiva}]{\text{caso SOLA}} \bar{E}_{MAX}^+ = \frac{320}{R_i \ln(R_e/R_i)} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

- D'ora $\epsilon_n = 1 \rightarrow \frac{R_e}{R_i} \simeq 2.3$ per ottenere $Z_0 = 50 \Omega$

$$Z_0 = \frac{377}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) \xrightarrow{Z_0 = 50 \Omega} \frac{R_e}{R_i} = \exp\left[\frac{377}{2\pi \cdot 50}\right] \simeq 2.3$$

$$\tilde{H}_\phi = \frac{\tilde{I}(z)}{2\pi r} = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{1}{r \ln(R_e / R_i)} \frac{d\tilde{V}(z)}{dz}$$

$$\frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -j\omega\mu \frac{\ln(R_e / R_i)}{2\pi} \tilde{I}(z) = -j\omega L \tilde{I}(z)$$

L
L

induttanza per
unità di lunghezza

$$\tilde{V}(z) = -\frac{1}{k^2} \frac{d^2 \tilde{V}(z)}{dz^2}$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}(z)}{dz^2} = -j\omega L \frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -k^2 \tilde{V}(z)$$

L

- Raccogliendo le due eq. precedenti si ottengono le eq. dei telegrafisti:

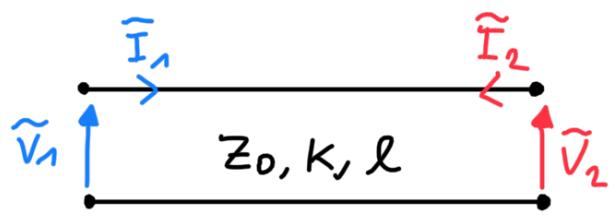
$$\frac{d \tilde{V}(z)}{dz} = -\gamma_w L \tilde{I}(z)$$

$$\frac{d \tilde{I}(z)}{dz} = -\gamma_w C \tilde{V}(z)$$

C, L dipendono dalla geometria del mezzo E dalle sue caratteristiche

$C, L \rightarrow \epsilon, \mu$ nel caso di propagazione di un'onda piano in un dielettrico infinito

- Analizziamo una sezione di coassiale:



- la forma si mantiene
- sia interessato ai valori di $\tilde{V}(z), \tilde{I}(z)$ lungo la linea

- Consideriamo la sezione 1 in $z=0$ e la sezione 2 in $z=l$:

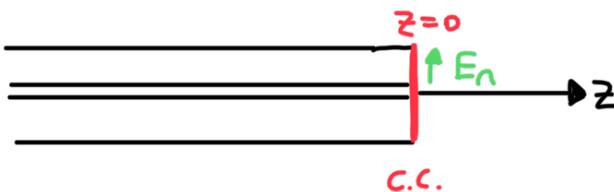
$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_2 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kl) & -\gamma_z z_0 \sin(kl) \\ -\frac{\gamma}{z_0} \sin(kl) & \cos(kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{I}_1 \end{bmatrix}$$

- Se la dimensione del tratto di linea è molto piccola \Rightarrow ritardi trascurabili

$$kl = \frac{w}{r} l \ll 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} V_2 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \tilde{I}_1 \end{bmatrix}$$

- Queste relazioni valgono finché il campo e.m. non cambia forma a causa di perturbazioni

E: Un c.c. alla sezione $z=0$ NON cambia la forma del campo

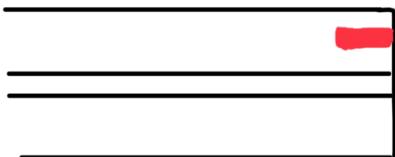


COND. AL CONTORNO: $E_n(r, \phi, z) = 0$

$$E_n(r, \phi, 0) = \frac{1}{r \ln(R_e/R_i)} (V^+ e^{-jkz} + V^- e^{+jkz}) = \frac{1}{r \ln(R_e/R_i)} (V^+ + V^-) = 0 \Rightarrow V^+ = -V^-$$

$$E_n(r, \phi, 0) = \frac{1}{r \ln(R_e/R_i)} V^+ (-2jk \sin(kz))$$

E₂: Dei piani metallici all'interno del dielettrico CAMBIANO la forma del campo



GUIDE D'ONDA COSTITUITE DA DUE CONDUTTORI PARALLELI IMMERSI IN UN MEZZO OMOGENEO

- Esiste sempre una soluzione di tipo TEM : $E_z = H_z = 0$

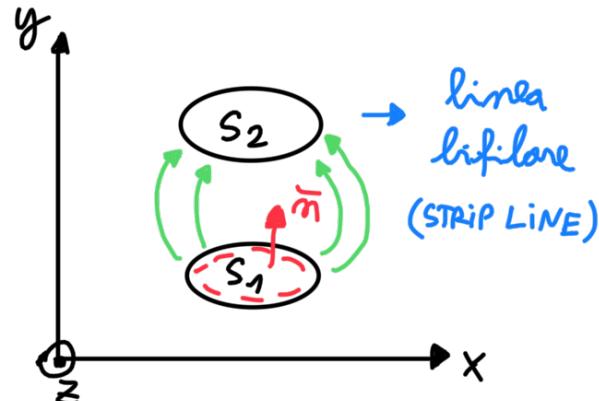
$$\bar{E}(x, y, z) = \bar{e}(x, y) \tilde{V}(z)$$

$$\bar{H}(x, y, z) = \bar{h}(x, y) \tilde{I}(z)$$

\bar{e} , \bar{h} trasversali a z e scelti in modo che:

$$\tilde{V}(z) = - \int_{S_1}^{S_2} \bar{E}(x, y, z) \cdot d\bar{l}$$

$$\tilde{I}(z) = \oint \bar{n} \times \bar{H}(x, y, z) \cdot \bar{n}_z dl$$



- Nel caso del coaxiale:

$$\bar{e}(x, y) = \frac{1}{2\pi \ln(R_e/R_i)} \hat{n}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2\pi n} \hat{\phi}$$

$$n = \sqrt{x^2 + y^2} = n(x, y)$$

$$\nabla = (\bar{u}_x \partial_x + \bar{u}_y \partial_y + \bar{u}_z \partial_z) = \nabla_t + \bar{u}_z \partial_z$$

$\nabla_t = \text{rotore transverso}$

$$\bar{E} = \bar{e} V$$

$$\bar{H} = \bar{h} I$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} &= (\nabla_t + \bar{u}_z \partial_z) \times (\bar{e}(x,y) \tilde{V}(z)) = \\ &= (\nabla_t \times \bar{e}) \tilde{V}(z) + (\bar{u}_z \times \bar{e}) \partial_z \tilde{V}(z) = -j\omega \mu \bar{h} \tilde{I}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{H} &= (\nabla_t + \bar{u}_z \partial_z) \times (\bar{h}(x,y) \tilde{I}(z)) = \\ &= (\nabla_t \times \bar{h}) \tilde{I}(z) + (\bar{u}_z \times \bar{h}) \partial_z \tilde{I}(z) = j\omega \epsilon \bar{e} \tilde{V}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla_t \times \bar{e} = 0 \\ \nabla_t \times \bar{h} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_z \times \bar{e} = \text{cost.} \cdot \bar{h} \\ \partial_z \tilde{V}(z) = - \frac{\jmath w \mu}{\text{cost.}} \tilde{I}(z) \\ \text{cost.} \cdot \bar{u}_z \times \bar{h} = -\bar{e} \\ \partial_z \tilde{I}(z) = -\jmath w \epsilon \text{cost.} \tilde{V}(z) \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

- Se \bar{e}, \bar{h} sono scelti in modo che $\tilde{I}(z)$ sia la corrente che fluisce sulla superficie di S_1 e $\tilde{V}(z)$ la tensione tra S_1 e S_2 , allora:

$$\text{cost.} = \frac{n}{z_0} \xrightarrow{\text{cassiale}} \text{cost.} = \frac{n}{n/2\pi r \cdot \ln(R_o/R_i)} = \frac{2\pi r}{\ln(R_o/R_i)}$$

- Sostituendo in (1) e (2):

$$\partial_z \tilde{V}(z) = - \frac{\jmath w \mu}{n/z_0} \tilde{I}(z) = - \frac{\jmath w}{C} \circled{Z_0} \tilde{I}(z)$$

$$\partial_z \tilde{I}(z) = -\jmath w \epsilon \frac{n}{z_0} \tilde{V}(z) = -\jmath \frac{w}{C z_0} \tilde{V}(z)$$

$$C_0 = (\sqrt{\mu \epsilon})^{-1}$$

$$L = \frac{Z_0}{C_0}$$

$$C = \frac{1}{Z_0 C_0}$$

$$LC = \sqrt{\epsilon \mu}$$

Altre linee di trasmissione

TABLE 2.1 Transmission Line Parameters for Some Common Lines

	COAX	TWO-WIRE	PARALLEL PLATE
L	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{D}{2a} \right)$	$\frac{\mu d}{w}$
C	$\frac{2\pi\epsilon'}{\ln b/a}$	$\frac{\pi\epsilon'}{\cosh^{-1}(D/2a)}$	$\frac{\epsilon' w}{d}$
R	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{w}$
G	$\frac{2\pi\omega\epsilon''}{\ln b/a}$	$\frac{\pi\omega\epsilon''}{\cosh^{-1}(D/2a)}$	$\frac{\omega\epsilon'' w}{d}$

Da D. M. Pozar: Microwave Engineering

5: $R_i = 1 \text{ mm}$, $R_o = 3 \text{ mm}$, $\bar{P} = 10 \text{ kW}$, $\epsilon_n = 2$, $f_0 = 1 \text{ GHz}$

$$R_i \leq r \leq R_o, V(z) = V_o^+ e^{-jkz} + V_o^- e^{+jkz}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_n}$$

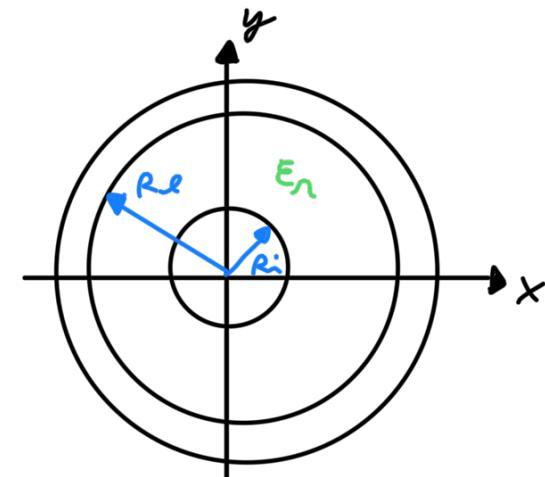
Se ho soltanto l'onda progressiva ($V_o^- = 0$):

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V_o^+|^2}{Z_0} \Rightarrow |V_o^+| = \sqrt{2 Z_0 \bar{P}} = 965 \text{ V}$$

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) = 46.6 \Omega, \quad \eta = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_n}} = 266.6 \Omega$$

$$\bar{E}(r, \phi, z) = \frac{1}{r} \cdot \frac{V(z)}{\ln(R_o/R_i)} \hat{r} \Rightarrow |\bar{E}(r, \phi, z)| = \frac{1}{r} \cdot \frac{965 \text{ V}}{\ln(3)}$$

$$|E_{max}| = \frac{|V_o^+|}{R_i \cdot \ln(R_o/R_i)} = 878.000 \text{ V/m}$$



$$|E_{min}| = \frac{|V_0^+|}{R_e \cdot \ln(R_e/R_i)} = 293.000 \text{ V/m}$$

- Nella stessa sezione z, $E_{min} \leftrightarrow H_{min}$, $E_{max} \leftrightarrow H_{max}$:

$$\bar{H}(n, \phi, z) = \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{V^+}{z_0} \hat{\phi}$$

$$|H_{min}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot |E_{min}| = \frac{293.000}{377} \cdot \sqrt{2} \text{ A/m}$$

$$|H_{max}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot |E_{max}| = \frac{293.000}{377} \cdot \sqrt{2} \text{ A/m}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = -\frac{1}{j\omega \mu} \nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{j\omega \mu} \partial_z E_n \hat{\phi}$$

- Al variazione di z, $E_{min} \leftrightarrow H_{max}$, $E_{max} \leftrightarrow H_{min}$:
(proporzionale)

$$E_n \propto V(z) = -2j V^+ \sin(kz)$$

$$H_\phi \propto \frac{dV(z)}{dz} = -2jk V^+ \cos(kz)$$

- Per scegliere il tipo di struttura guidante da utilizzare, bisogna tenere conto di:

- (1) attenuazione tollerabile (dipende dalla lunghezza del collegamento)
- (2) potenza massima trasmissibile
- (3) costo

- Il fatto che esista una soluzione di tipo TEM implica che:

$$\nabla_t \times \bar{e} = 0 \Rightarrow \bar{e} = -\nabla_t \phi(x, y)$$

↓

il campo elettrico trasverso può essere scritto in funzione del gradiente trasverso di un potenziale

$$\nabla_t^2 \phi(x, y) = 0 \quad (\text{Laplaciano})$$

- La soluzione \bar{e} non nulla \Leftrightarrow vi sono due superfici equipotenziali a potenziale diverso \Rightarrow servono almeno due conduttori diversi

$$c_1$$

$$\phi = \phi_1$$

$$c_2$$

$$\phi = \phi_2$$

- Un circuito è concentrato o distribuito in funzione di kl :

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_2 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kl) & -j\sqrt{\frac{L}{C}} \sin(kl) \\ -j\sqrt{\frac{C}{L}} \sin(kl) & \cos(kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{I}_1 \end{bmatrix}$$

$$kl \ll 1 = \frac{2\pi l}{\lambda} \ll 1 \rightarrow \frac{l}{\lambda} \ll 1$$

- $\frac{l}{\lambda} \ll 1 \rightarrow \begin{cases} \cos(kl) \approx 1 \\ \sin(kl) \approx 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{V}_1 = \tilde{V}_2 \\ \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \end{cases}$ CIRCUITO CONCENTRATO

- $\frac{l}{\lambda} \gg 1 \rightarrow$ CIRCUITO DISTRIBUITO

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

es:

$$f = 100 \text{ kHz}, \quad l = 1 \text{ m} \rightarrow \text{nel ruoto: } \frac{l}{\lambda} = \frac{1 \text{ m} \cdot 10^5 \text{ Hz}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 3.3 \cdot 10^{-4}$$

$$f = 1 \text{ GHz}, \quad l = 10 \text{ cm} \rightarrow \text{nel ruoto: } \frac{l}{\lambda} = \frac{0.1 \text{ m} \cdot 10^9 \text{ Hz}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 0.33$$

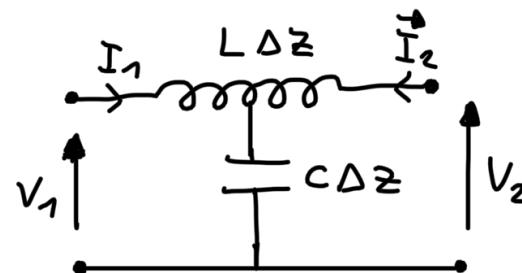
- Normalmente, il legame fra $\tilde{V}_{1,2}$, $\tilde{I}_{1,2}$ si esprime da sinistra a destra:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kl) & \frac{j}{Z_0} \sin(kl) \\ j \frac{1}{Z_0} \sin(kl) & \cos(kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_2 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}$$

MATRICE ABCD (o di trasmissione)

- Vedendo le grandezze come:

$$\begin{cases} V_1 = V(z) \\ I_1 = I(z) \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = V(z + \Delta z) \\ \vec{I}_2 = I(z + \Delta z) \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{circuito a T}}$$



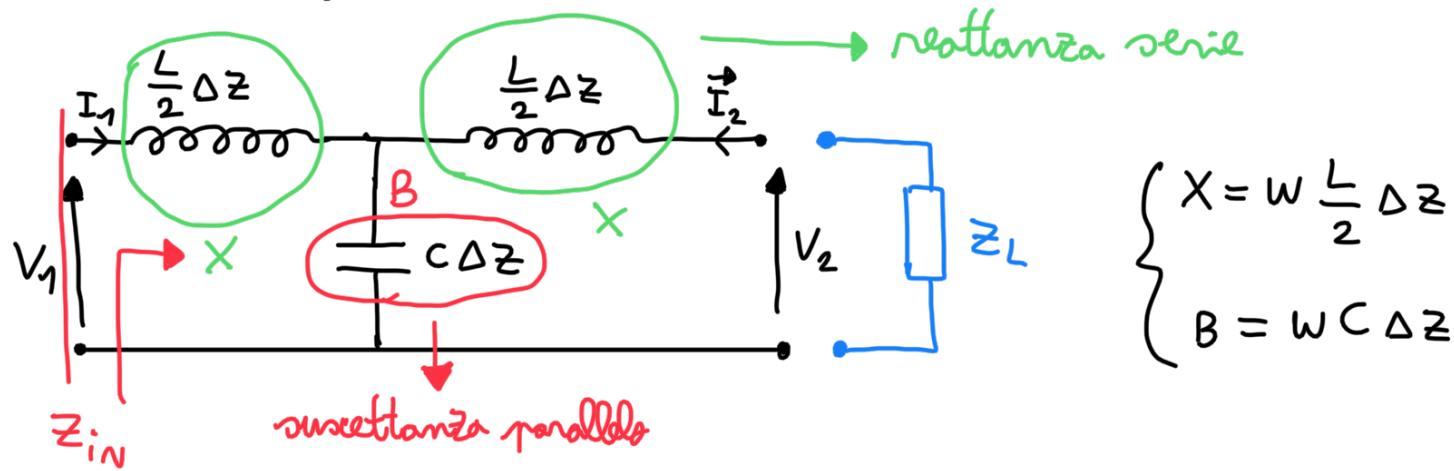
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$k = \frac{w}{\sqrt{LC}} = w \sqrt{LC}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

IMPEDENZA CARATTERISTICA

- Considerata la seguente cella unitaria:



quali sono le condizioni per che $Z_{in} = Z_L$?

- L'impedenza caratteristica Z_L è un'impedenza tale che, terminando una linea di trasmissione su Z_L , si continua a vedere all'ingresso un carico perfettamente adattato, ovvero la stessa impedenza caratteristica $\Rightarrow \Pi = 0$
- La presenza di un'onda riflessa indica che il carico è disadattato (una porzione dell'onda incidente viene riflessa) $\Rightarrow \Pi \neq 0$

- La matrice di trasmissione totale è data dal prodotto delle singole matrici di trasm. di ogni elemento:

$$\rightarrow \begin{cases} I_1 = \vec{I}_2 \\ V_1 = V_2 + jI_1 X = V_2 + j\vec{I}_2 X \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & jX \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{bmatrix}$$

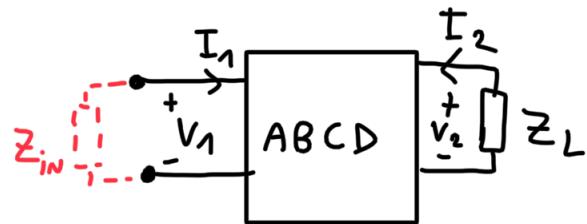
$$\begin{bmatrix} 1 & jX \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - XB & jX + jX(1 - XB) \\ jB & 1 - XB \end{bmatrix}$$

- Quindi:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - XB & jX(1 - XB) \\ jB & 1 - XB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

- Come si ricava l'impedenza di ingresso Z_{in} data la matrice $ABCD$?



$$Z_L = \frac{V_2}{I_2}$$

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + B\vec{I}_2}{CV_2 + D\vec{I}_2} = \frac{\vec{I}_2 \left(A \frac{V_2}{I_2} + B \right)}{\vec{I}_2 \left(C \frac{V_2}{I_2} + D \right)} = \frac{A Z_L + B}{C Z_L + D} = \\ &= \frac{(1 - X_B) Z_L + jX(2 - X_B)}{jB Z_L + (1 - X_B)} \end{aligned}$$

- Affinché $Z_{in} = Z_L$:

$$Z_L^2 = \frac{X(2 - X_B)}{B} = \frac{w \frac{L}{2} \Delta z (2 - (w \frac{L}{2} \Delta z)(w C \Delta z))}{w C \Delta z}$$

- Facendo il limite per $\Delta z \rightarrow 0$ di Z_L :

$$Z_L = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sqrt{\frac{L/2 [2 - w^2 LC/2 (\Delta z)^2]}{C}} = \boxed{\sqrt{\frac{L}{C}}} \rightarrow \text{adattamento perfetto}$$

CARICO ADATTATO: carico con cui posso terminare una linea senza avere riflessioni (quindi si evitano possibili interferenze distruttive)