

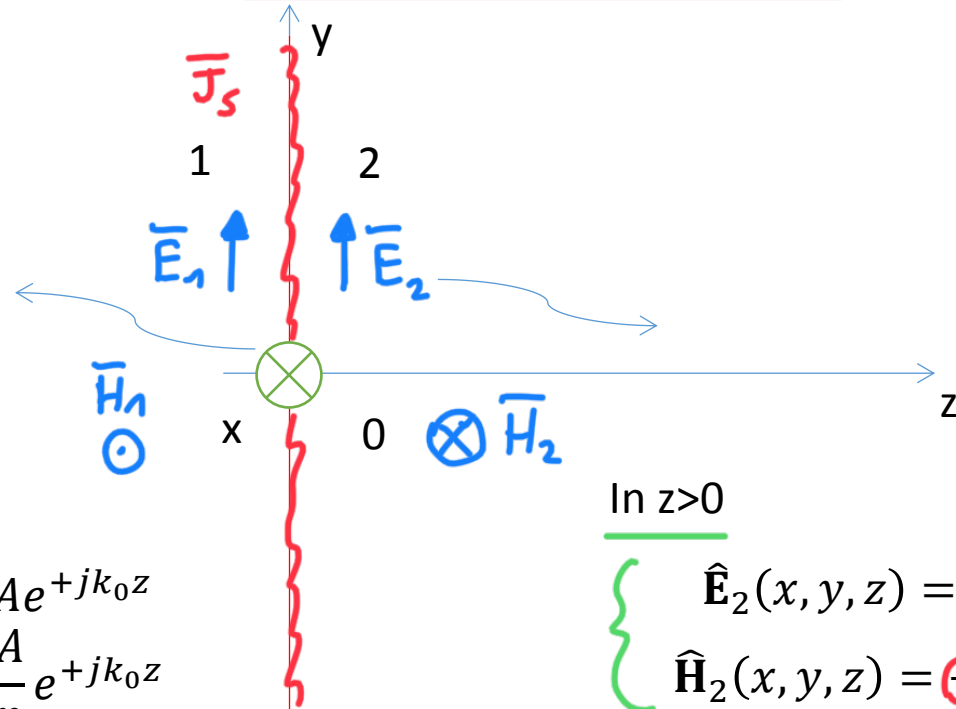
Che tipo di sorgente può generare un'onda piana?

(lungo \hat{y})

- Al solito, consideriamo la situazione più semplice e cioè il caso di una densità di corrente superficiale uniforme sul piano $z=0$, il cui fasore valga:

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \hat{y} J_0 [\text{A/m}]$$

- Vediamo che tipo di onda e.m. viene generata a x e x della superficie di corrente.
- Sul piano $x-y$ non ha variazioni del fasore.



In $z < 0$

Supponiamo: $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{E}}_1(x, y, z) = \hat{y} A e^{+jk_0 z} \\ \hat{\mathbf{H}}_1(x, y, z) = \hat{x} \frac{A}{\eta} e^{+jk_0 z} \end{array} \right.$

In $z > 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{E}}_2(x, y, z) = \hat{y} B e^{-jk_0 z} \\ \hat{\mathbf{H}}_2(x, y, z) = -\hat{x} \frac{B}{\eta} e^{-jk_0 z} \end{array} \right.$

propagazione in
versi opposti

Ricordiamo che, nel dominio del tempo ciò corrisponde a $\mathbf{J}_s(x, y, 0; t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{J}}_s e^{j\omega t}) = \hat{y} J_0 \cos(\omega t) \text{ A/m}$

In $z=0$ il campo elettrico tangenziale deve essere continuo mentre il campo magnetico tangenziale ha una discontinuità a salto (I specie):

In $z=0$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{E}}_1(x, y, 0) - \hat{\mathbf{E}}_2(x, y, 0)) = 0$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{H}}_1(x, y, 0) - \hat{\mathbf{H}}_2(x, y, 0)) = \hat{\mathbf{y}} J_0$$

Pertanto:

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ (A + B) = J_0 \eta \end{cases}$$



$$A = B = \eta J_0 / 2$$

D'altra parte, una siffatta sorgente non è realizzabile. Inoltre, non esiste alcuna sorgente in grado di eccitare un'onda piana di ampiezza finita, poiché la potenza trasportata da tale onda dovrebbe essere infinita e ciò è evidentemente non compatibile con alcuna sorgente. D'altra parte, le onde piane sono sol. dell'equazione di Maxwell. Se consideriamo un fronte d'onda piano finito.

Complichiamo un poco le cose, prendendo sul piano $z=0$ una densità di corrente superficiale variabile come $e^{-jk_x x}$, il cui fasore valga:

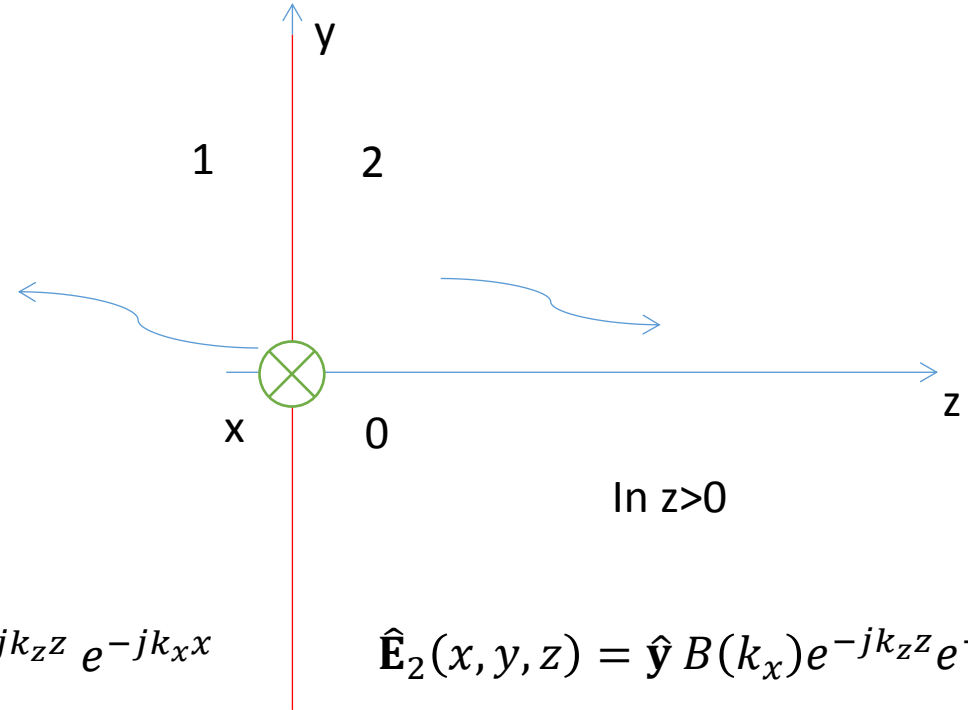
$$\hat{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{y}} \overbrace{J(k_x)}^{\text{ampiezza}} e^{-jk_x x} \text{ A/m}$$

Naturalmente, il campo eccitato da una siffatta sorgente non può **non** variare in direzione x , come avverrebbe se si trattasse di un'onda piana che si propaghi in direzione z . Anzi, essendo il mezzo lineare e uniforme, è logico supporre che il campo abbia la stessa variazione in x della sorgente. Una possibilità è un campo di forma:

In $z < 0$

$$\hat{\mathbf{E}}_1(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} A(k_x) e^{+jk_z z} e^{-jk_x x}$$

$$\hat{\mathbf{E}}_2(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} B(k_x) e^{-jk_z z} e^{-jk_x x}$$



Si osserva che il campo elettrico soddisfa l'equazione d'onda

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + k_0^2 \hat{\mathbf{E}} = 0$$

Purché $k_0^2 = k_x^2 + k_z^2$

Il campo magnetico corrispondente vale:

$$\hat{\mathbf{H}}_i(x, y, z) = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_i(x, y, z) = \frac{1}{-j\omega\mu_0} [-\partial_z E_{yi} \hat{\mathbf{x}} + \partial_x E_{yi} \hat{\mathbf{z}}]$$

Ricordiamo che, nel dominio del tempo ciò corrisponde a $\mathbf{J}_s(x, y, 0; t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{J}}_s e^{j\omega t}) = \hat{\mathbf{y}} \frac{J(k_x) \cos(\omega t - k_x x) A}{m}$, se $\hat{\mathbf{J}}_s$ è reale

Ancora, in $z=0$ il campo elettrico tangenziale deve essere continuo mentre il campo magnetico tangenziale ha una discontinuità a salto (1 specie):

In $z=0$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{E}}_1(x, y, 0) - \hat{\mathbf{E}}_2(x, y, 0)) = 0$$

$$\hat{\mathbf{H}}_i(x, y, z) = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_i(x, y, z) = \frac{1}{-j\omega\mu_0} [-\partial_z E_{yi} \hat{\mathbf{x}} + \partial_x E_{yi} \hat{\mathbf{z}}]$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{H}}_1(x, y, 0) - \hat{\mathbf{H}}_2(x, y, 0)) = \hat{\mathbf{y}} J(k_x) e^{-jk_x x}$$

Sostituendo

$$A(k_x) e^{-jk_x x} - B(k_x) e^{-jk_x x} = 0$$

$$\frac{-jk_z}{-j\omega\mu_0} (A(k_x) e^{-jk_x x} + B(k_x) e^{-jk_x x}) = J(k_x) e^{-jk_x x}$$

Tutti i termini sono moltiplicati per la stessa funzione $e^{-jk_x x}$. Pertanto, necessariamente deve essere:

$$A(k_x) = B(k_x) \quad \frac{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}}{\omega\mu_0} (A(k_x) + B(k_x)) = J(k_x)$$

E quindi:

$$\frac{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}}{\omega\mu_0} 2A(k_x) = J(k_x) \quad \longrightarrow \quad A(k_x) = J(k_x) / 2 \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}}$$

Abbiamo appena dimostrato che un foglio di corrente nel piano $z=0$ il cui fasore sia : $\hat{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{y}} J(k_x) e^{-jk_x x}$ A/m

Produce in $z>0$ un'onda elettromagnetica

$$\hat{\mathbf{E}}(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} B(k_x) e^{-jk_z z} e^{-jk_x x}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}(x, y, z) &= \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \hat{\mathbf{y}} \frac{1}{\eta_0} B(k_x) e^{-jk_z z} e^{-jk_x x} = \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \hat{\mathbf{y}} \frac{1}{\eta_0} B(k_x) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \\ &= (\sin \vartheta \hat{\mathbf{z}} - \cos \vartheta \hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{\eta_0} B(k_x) e^{-jk_z z} e^{-jk_x x} \end{aligned} \quad \mathbf{k} = k_0 \hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

$$k_0^2 = k_x^2 + k_z^2$$

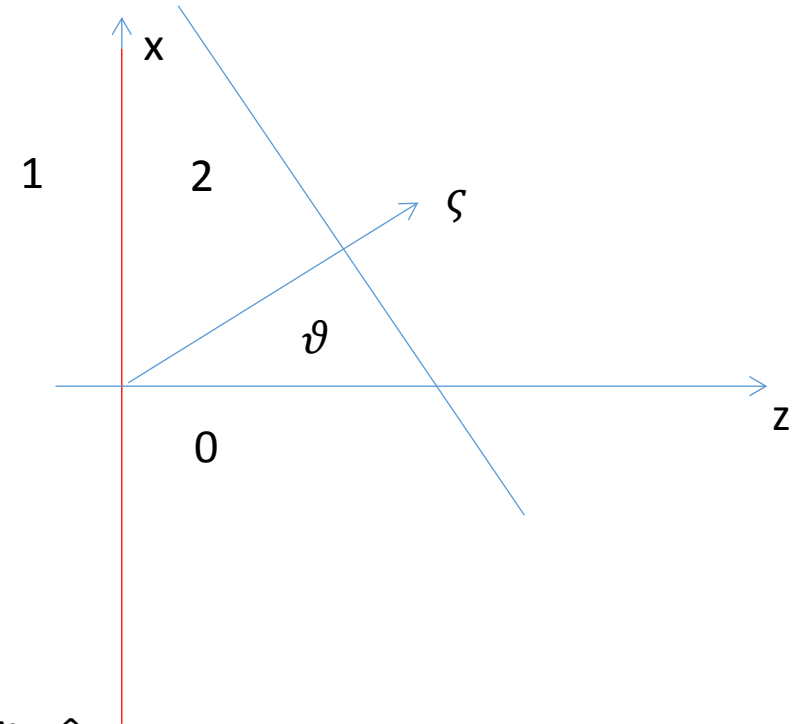
$$\sin \vartheta = k_x / k_0$$

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \sin \vartheta \hat{\mathbf{x}} + \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}} \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{z}}$$

$$B(k_x) = J(k_x) / 2 \frac{\omega \mu_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}}$$

NB Piano ortogonale a \mathbf{y}



• *Onda e.m. inclinata di ϑ rispetto all'asse z*

- Si tratta sempre di un'onda piana il cui verso di propagazione è però $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ (non il solito $\hat{\mathbf{z}}$, si veda la algebrizzazione delle eq. di Maxwell) e il cui vettore numero d'onda vale:

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}} = k_0 (\sin \vartheta \hat{\mathbf{x}} + \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}})$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin \vartheta = \frac{k_x}{k_0} \\ \cos \vartheta = \frac{k_z}{k_0} \end{cases}$$

Siamo ora pronti a prendere in esame una corrente distribuita uniformemente su una striscia $|x| < w/2$

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{y}} J(x) \quad \text{A/m}$$

$$J(x) = \begin{cases} J_0 & |x| < w/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

in $\hat{\mathbf{y}}$ si estende da $-\infty$ a $+\infty$

Infatti, la funzione $J(x)$ può essere rappresentata attraverso la sua trasformata di Fourier:

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{J}(k_x) e^{-jk_x x} dk_x$$

i segni sono scambiati, ma è uguale

elemento di corrente elementare

dove:

$$\tilde{J}(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J(x) e^{jk_x x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-w/2}^{+w/2} J_0 e^{jk_x x} dx = J_0/2 \frac{w/2}{\pi} \frac{\sin(k_x w/2)}{k_x w/2}$$

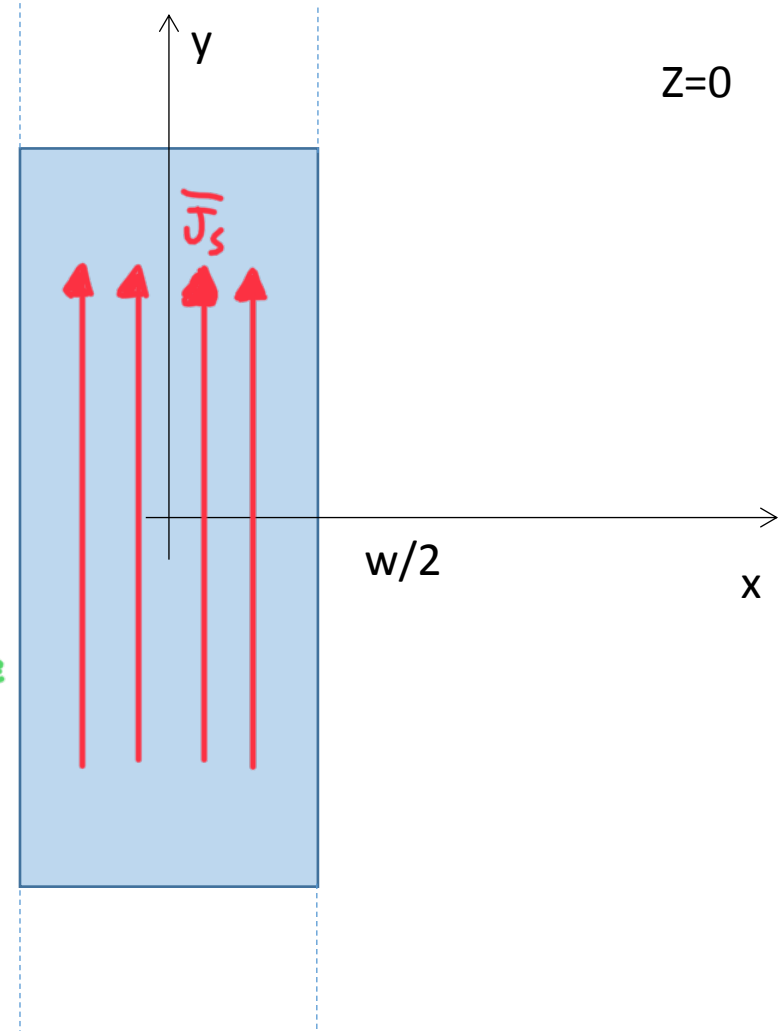
corrente costante sulla striscia

E quindi, essendo il problema lineare, la soluzione si otterrà sovrapponendo le soluzioni elementari calcolate in precedenza. In particolare:

$$\hat{\mathbf{E}}_2(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k_x) e^{-j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad \text{dove:} \quad B(k_x) = \frac{\omega \mu_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} J_0/2 \frac{w/2}{\pi} \frac{\sin(k_x w/2)}{k_x w/2}$$

componente spettrale dell'onda

ha ampiezza infinitesima \Rightarrow potenza infinitesima



• Sovrapponendo un'infinità di onde e.m. piane, posso rappresentare una qualunque distribuzione di corrente finita

Pertanto, una distribuzione uniforme su una striscia $|x| < w/2$ produce un campo le cui componenti parallele alla striscia valgono

$$\hat{\mathbf{E}}_1(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x) e^{+j(k_x x + k_z z)} dk_x$$

$$\hat{H}_{1x}(x, y, z) = \frac{1}{j\omega\mu} \partial_z \hat{E}_{1y} = \int_{-\infty}^{+\infty} j \sqrt{k_0^2 - k_x^2} A(k_x) e^{+j(k_x x + k_z z)} dk_x$$

$$\hat{\mathbf{E}}_2(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k_x) e^{-j(k_x x + k_z z)} dk_x$$

$$\hat{H}_{2x}(x, y, z) = \frac{-1}{j\omega\mu} \partial_z \hat{E}_{2y} = \int_{-\infty}^{+\infty} j \sqrt{k_0^2 - k_x^2} B(k_x) e^{-j(k_x x + k_z z)} dk_x$$

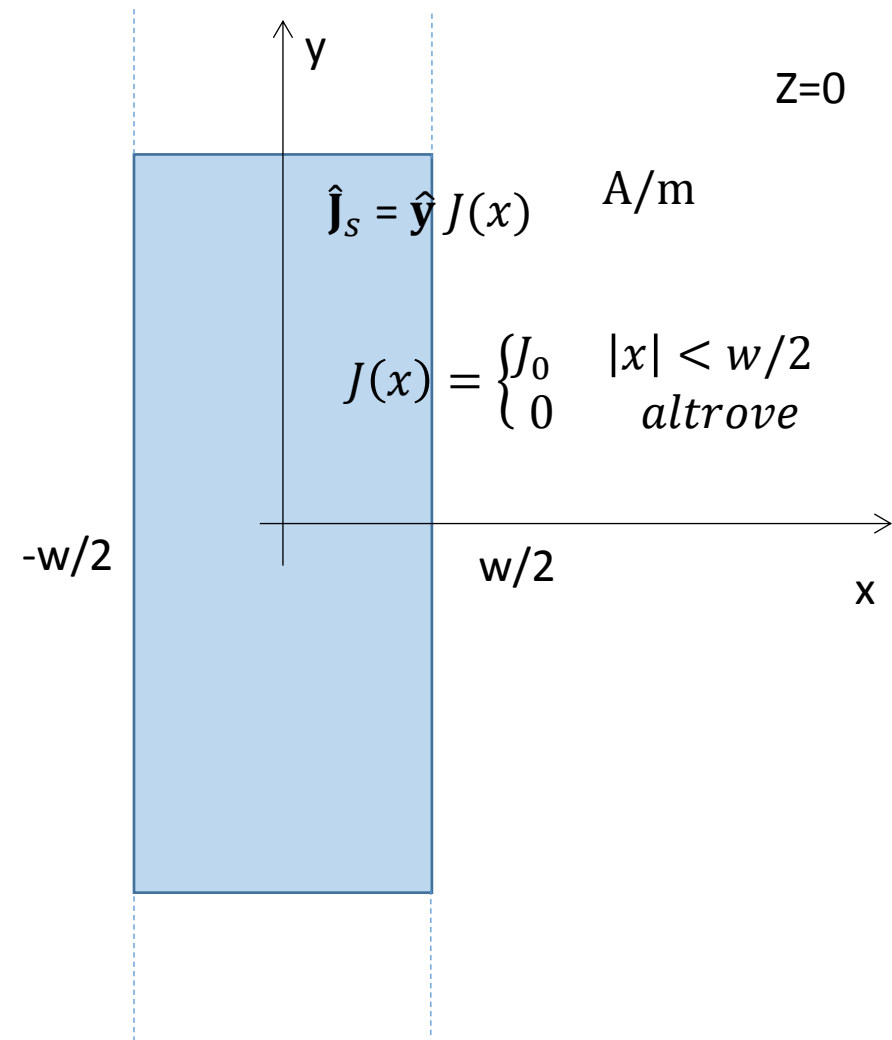
Che in $z=0$ soddisfa le condizioni di continuità:

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{E}}_1(x, y, 0) - \hat{\mathbf{E}}_2(x, y, 0)) = 0$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{H}}_1(x, y, 0) - \hat{\mathbf{H}}_2(x, y, 0)) = \hat{\mathbf{y}} J(x) = \begin{cases} \hat{\mathbf{y}} J_0 & |x| < w/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$k_x^2 + k_z^2 = k_0^2$$

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$$



Se $A(k_x) = B(k_x)$

$$B(k_x) = \frac{\omega\mu}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} J_0 / 2 \frac{w/2}{\pi} \frac{\sin(k_x w/2)}{k_x w/2}$$

- D'altra parte avremmo ottenuto il medesimo risultato se avessimo esteso al caso in esame la soluzione già trovata nel caso di foglio infinito e uniforme di corrente

$$A(k_x) = B(k_x)$$

$$\frac{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}}{\omega\mu} B(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J(x) e^{jk_x x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-w/2}^{+w/2} J_0 e^{jk_x x} dx = J_0/2 \frac{w/2}{\pi} \frac{\sin(k_x w/2)}{k_x w/2}$$

$$B(k_x) = \frac{\omega\mu}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} J_0/2 \frac{w/2}{\pi} \frac{\sin(k_x w/2)}{k_x w/2}$$


Come nelle pagine precedenti, nella regione $z > 0$ abbiamo

$$\hat{\mathbf{E}}_2(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k_x) e^{-j(k_x x + k_z z)} dk_x$$

- Affinché il campo e.m. prodotto dalla sorgente K_x soddisfi l'equazione d'onda:

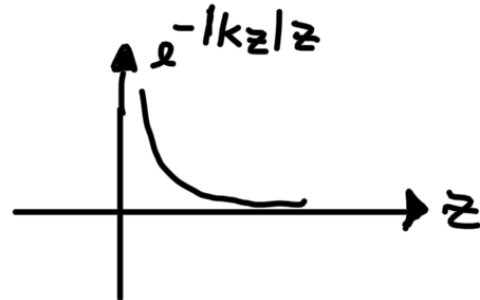
$$K_x^2 + K_z^2 = K_0^2 \Rightarrow K_z^2 = \underline{K_0^2 - K_x^2}$$

- Se $K_x < K_0 \Rightarrow K_z^2 > 0 \rightarrow$ onda propagativa


 andamento lungo z
 dell'onda e.m.

- Se $K_x > K_0 \Rightarrow K_z^2 < 0 \rightarrow$ onda evanescente

va come $e^{-|K_z|z}$:



(stessa condizione nel semispazio z
nel caso di riflessione totale)

• Studiamo $B(k_x)$ prendendo w pari ad una lunghezza d'onda:

$w = \lambda$

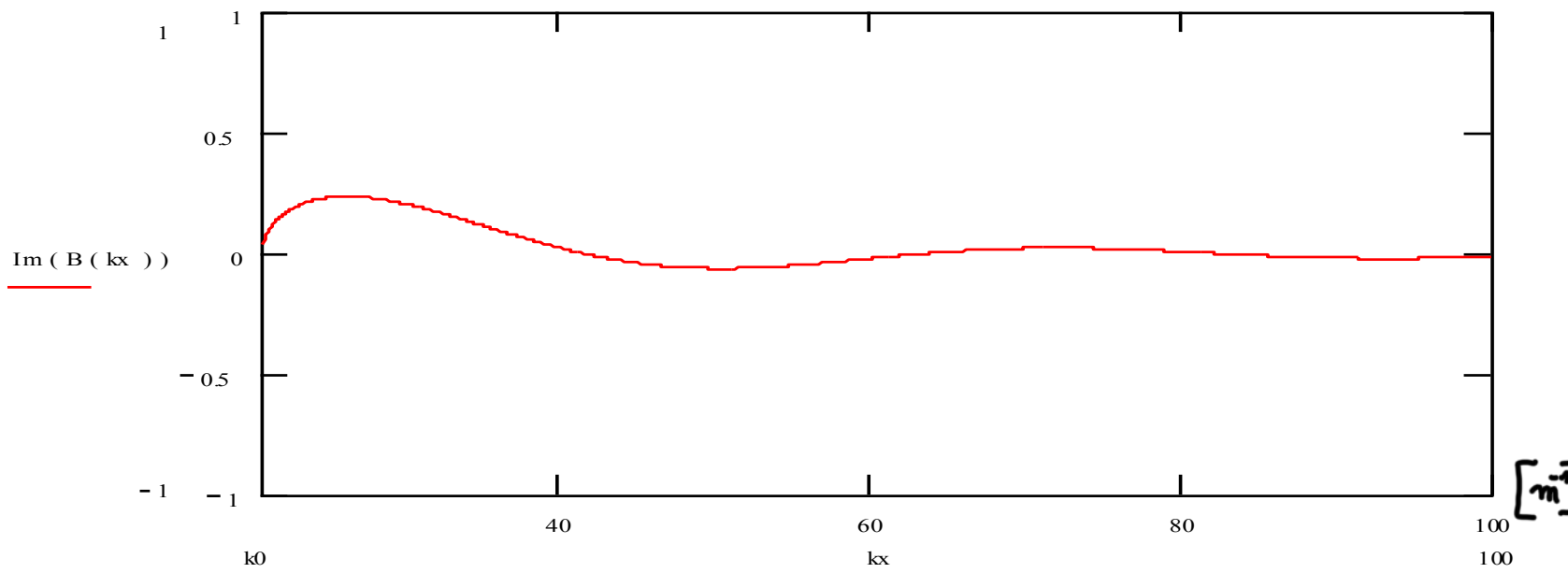
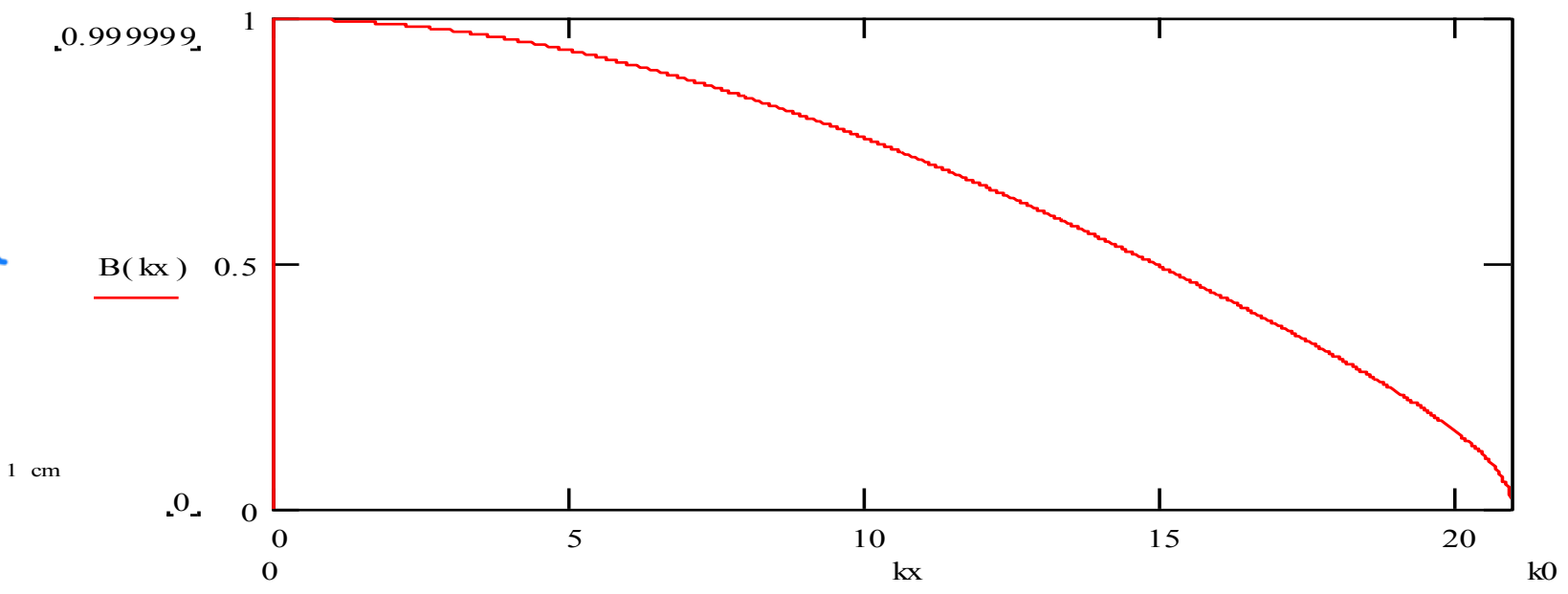
$k_x^2 < k_0^2 \Rightarrow B(k_x)$ reale

$k_x^2 > k_0^2 \Rightarrow B(k_x)$ immaginaria

a 1GHz $\lambda_0 := 0.3 \quad (\text{m})$ $x := 1 \quad 1 \text{ cm}$
 $k_0 := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_0}$ $w := x \cdot \lambda_0$

$$B(k_x) := \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} \cdot \frac{\sin\left(kx \cdot \frac{w}{2}\right)}{kx \cdot \frac{w}{2}}$$

$B(k_x) \rightarrow$ ampiezza del campo \vec{E}
 al variare di k_x
 (SPETTRO AD ONDE PIANE)



a 1GHz

$\lambda_0 := 0.3 \quad (\text{m})$

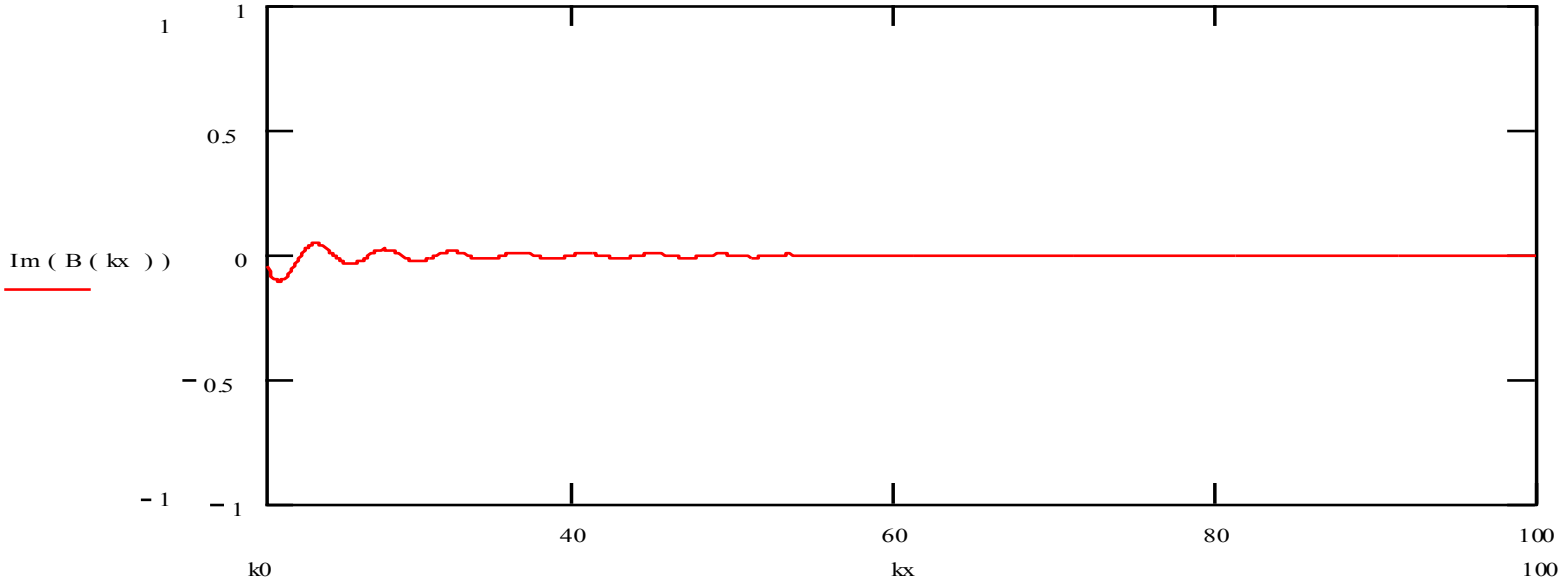
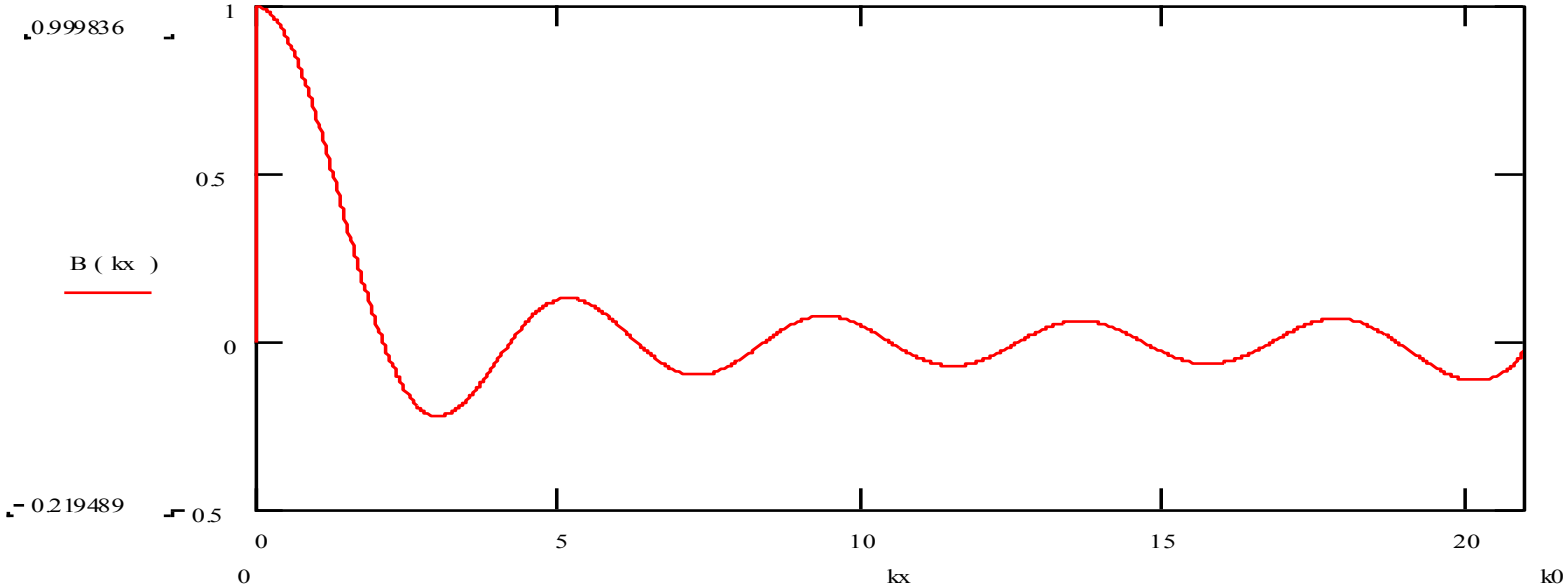
$x := 10$

1 cm

$w := x \cdot \lambda_0$

$$B(kx) := \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - kx^2}} \cdot \frac{\sin\left(kx \cdot \frac{w}{2}\right)}{kx \cdot \frac{w}{2}}$$

$w = 10\lambda$



$$W=100\lambda$$

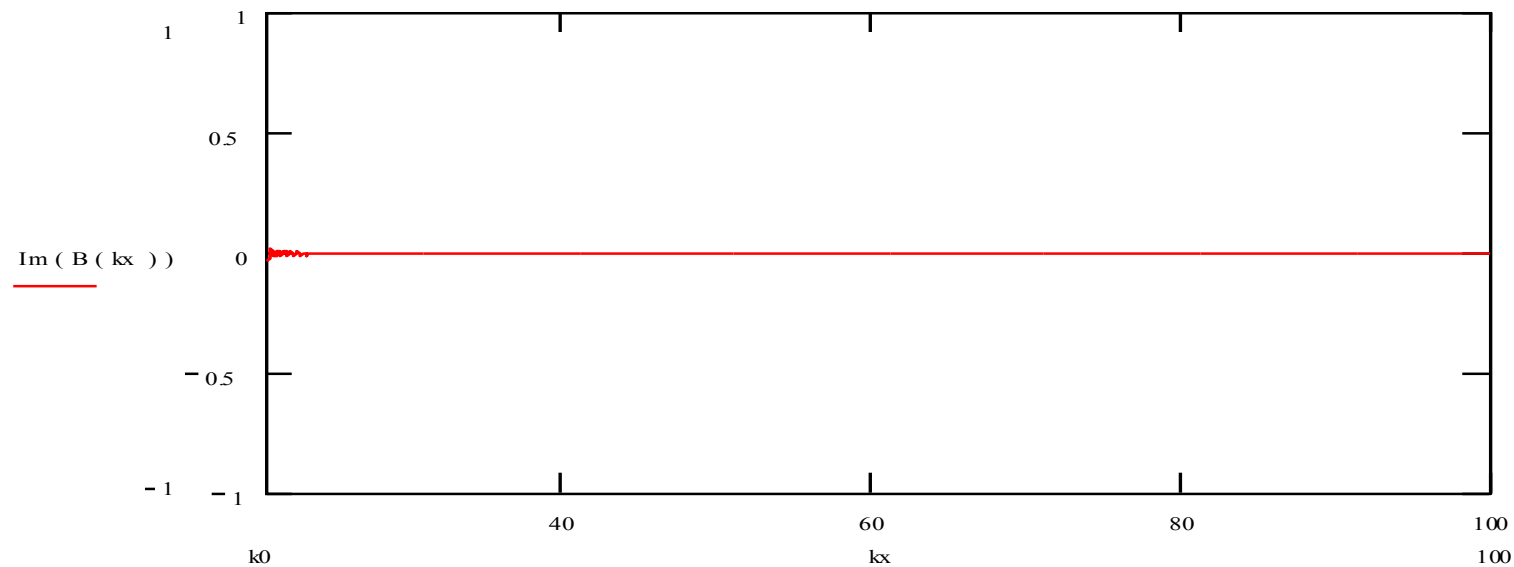
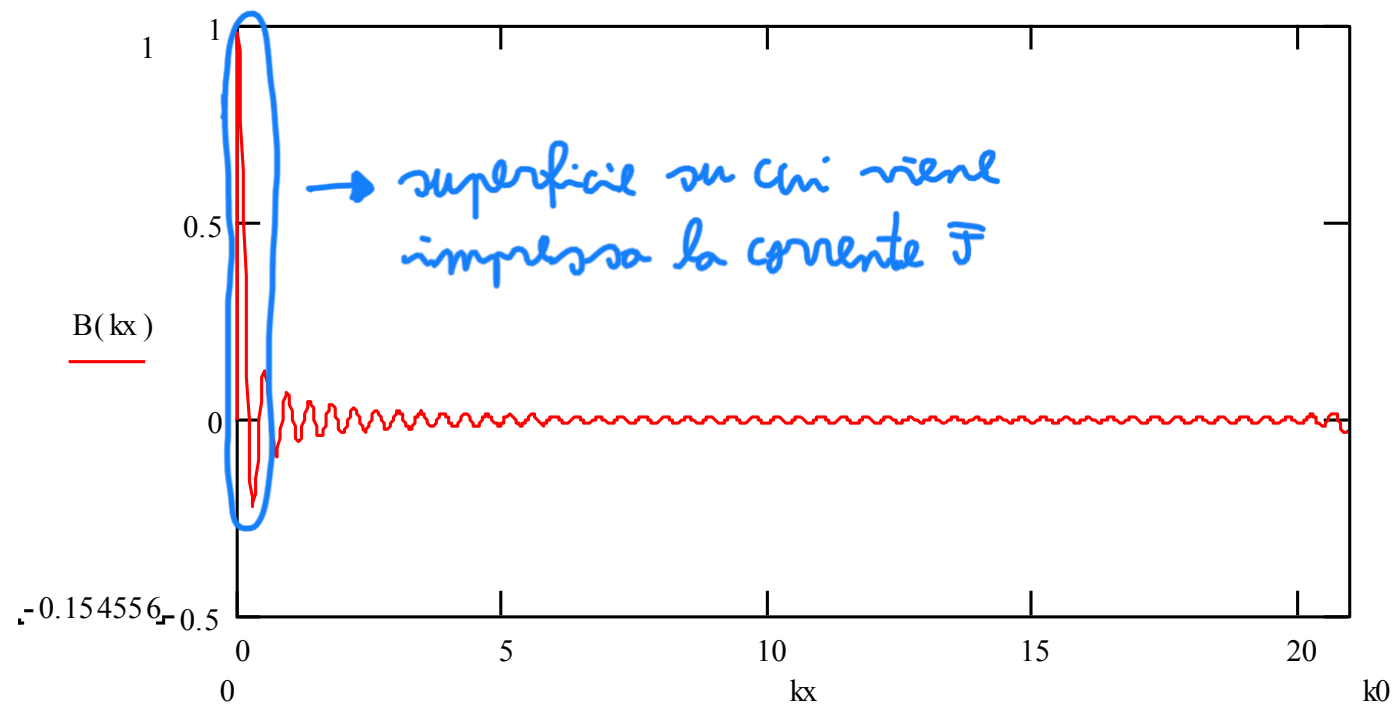
$w \uparrow \rightarrow$ condizione di onda piana

a 1GHz $\lambda_0 := 0.3$ (m) $x := 100$ 1 cm

$$k_0 := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_0}$$

$$w := x \cdot \lambda_0$$

$$B(kx) := \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - kx^2}} \cdot \frac{\sin\left(kx \cdot \frac{w}{2}\right)}{kx \cdot \frac{w}{2}}$$



Quindi al crescere della larghezza della striscia (w), aumenta il peso dello spettro d'onde piane nell'intorno di $k_x=0$, cioè l'onda elettromagnetica eccitata tende a essere un'onda piana con $k_z=k_0$.
D'altra parte il contributo relativo della porzione di spettro $k_x \neq 0$ è tanto minore quanto minore è la larghezza della striscia. La larghezza della striscia va rapportata alla lunghezza d'onda!

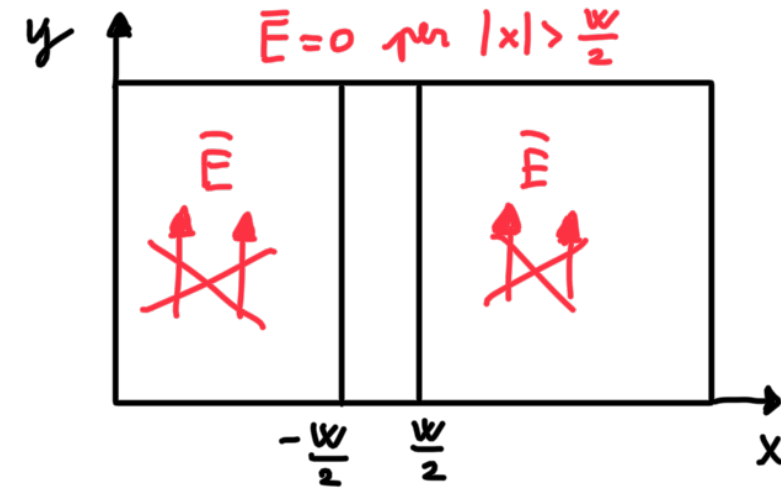
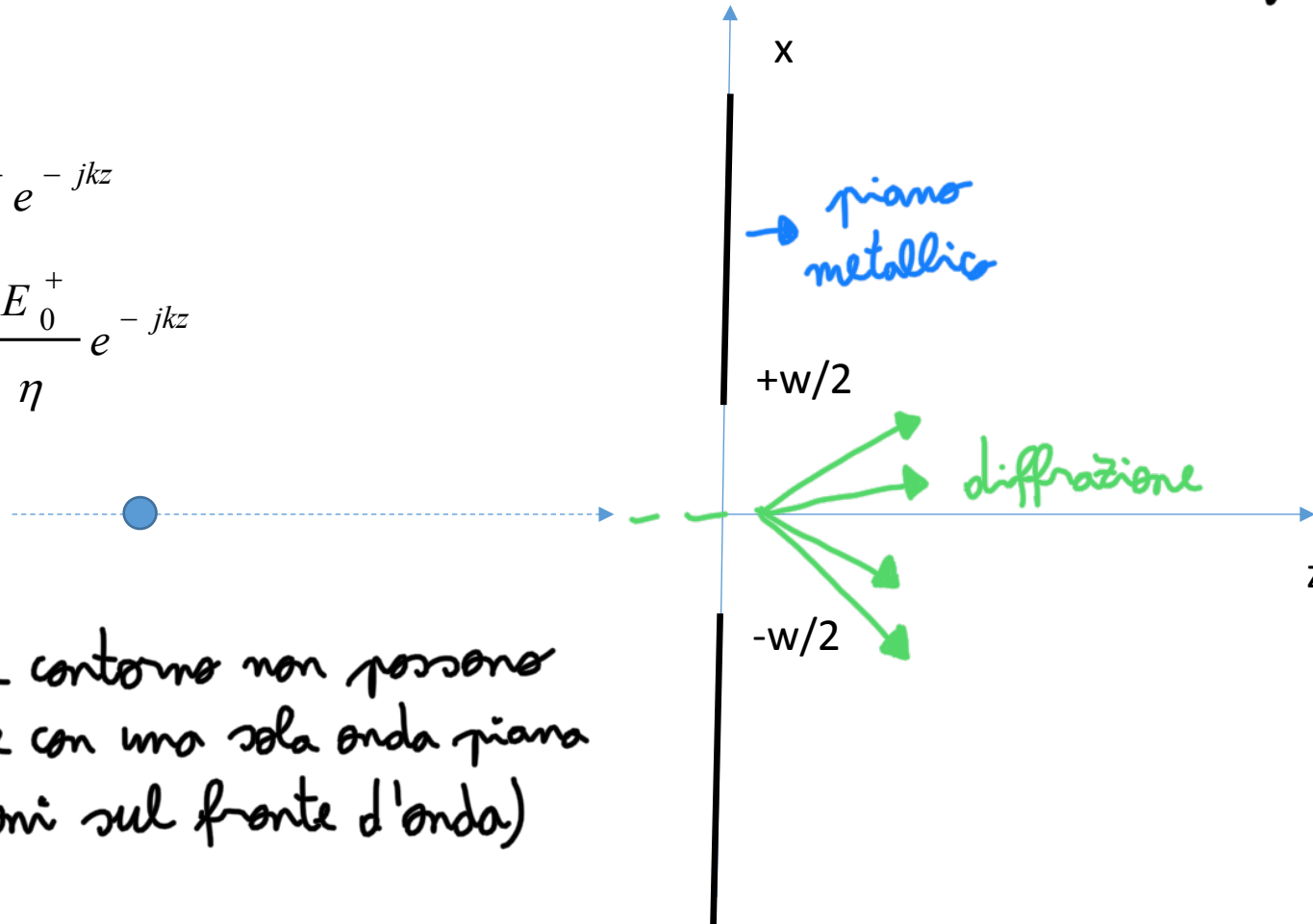
Diffrazione di un' onda elettromagnetica piana che attraversa una fessura sottile di larghezza w , uniforme in y

Onda Incidente

$$\mathbf{E}^+(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} E_0^+ e^{-jkz}$$

$$\mathbf{H}^+(x, y, z) = -\hat{\mathbf{x}} \frac{E_0^+}{\eta} e^{-jkz}$$

- le condizioni al contorno non possono essere soddisfatte con una sola onda piana (non ha variazioni sul fronte d'onda)



Essendo la geometria uniforme in y , ed il campo elettrico incidente anch'esso uniforme in y , il campo riflesso e quello trasmesso conservano l'uniformità rispetto a y . Il campo elettrico totale in $y=0$ deve essere nullo sul conduttore mentre è diverso da zero sull'apertura:

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \hat{\mathbf{y}} E(x) \begin{cases} \neq 0 & \text{sulla fenditura} \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Possiamo esprimere il campo come integrale di Fourier:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_x) \cdot e^{-jk_x x} dk_x$$

Dove
$$\tilde{E}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) \cdot \frac{e^{+jk_x x}}{2\pi} dx = \int_{-w/2}^{+w/2} E(x) \cdot \frac{e^{+jk_x x}}{2\pi} dx$$

Se supponiamo di conoscere il campo sull'apertura $E(x)$ e quindi la sua trasformata $\tilde{E}(k_x)$, allora possiamo calcolare facilmente il campo elettrico nella regione $z>0$: basterà sommare tutte le onde piane che si propagano in direzione $(k_x, k_z(k_x))$. Nell'ultima espressione si è voluto enfatizzare il fatto che i kappa non sono indipendenti poiché $k_z^2 = k_0^2 - k_x^2$.

Il campo in un generico punto $(x, z > 0)$ vale pertanto

(la fenditura \Rightarrow il campo) non varia in y)

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \hat{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_x) \cdot e^{-j(k_x x + k_z z)} dk_x$$

Il campo è la somma di onde piane che si propagano con vettore d'onda (k_x, k_z)

La determinazione del campo sull'apertura è un problema abbastanza complicato, la cui soluzione deriva dalla continuità del campo elettromagnetico tangenziale in $z=0$, come sempre deve accadere sulla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici. La soluzione del problema verrà data in un corso di campi più avanzato. Qui ci limitiamo a osservare che, come ogni funzione del mondo vero, il campo incognito è approssimabile mediante una somma finita di potenze (pari, a causa della simmetria) e cioè:

$$E(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N e_n x^{2n} & |x| \leq w/2 \\ 0 & |x| > w/2 \end{cases}$$

L'approssimazione più semplice è:

ipotesi che \bar{E} sia costante nella fenditura ($\bar{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}}$)

$$E(x) \cong \begin{cases} e_0 & |x| \leq w/2 \\ 0 & |x| > w/2 \end{cases}$$

e lo ricaverò imponendo la continuità in $z=0$

In tal caso:

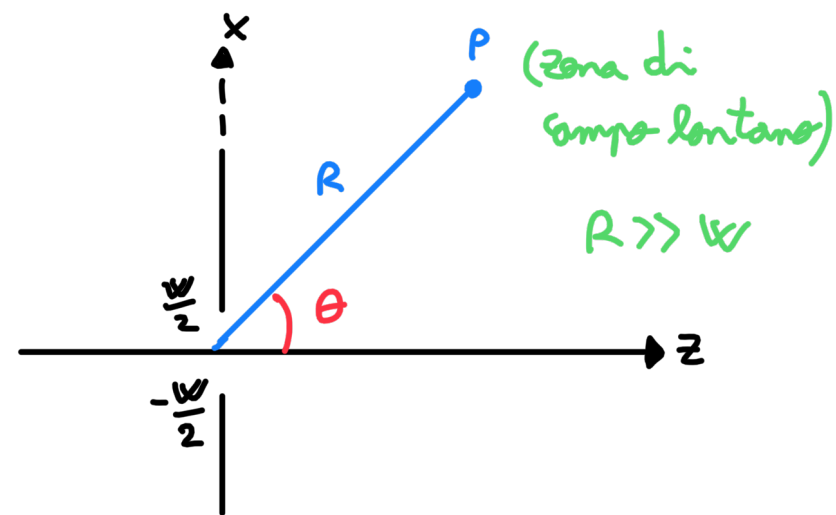
$$\tilde{E}(k_x) \cong \int_{-w/2}^{+w/2} e_0 \frac{e^{+jk_x x}}{2\pi} dx = \frac{e_0}{\pi} \frac{\sin(k_x w / 2)}{k_x}$$

E quindi:

$$\mathbf{E}(x, y, z) \cong \hat{\mathbf{y}} \frac{e_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k_x w / 2)}{k_x} \cdot e^{-j(k_x x + k_z z)} dk_x$$

Effettuiamo un cambio di variabile:

$$E(x) \cong \begin{cases} x = R \sin \vartheta \\ z = R \cos \vartheta \end{cases}$$



$$\mathbf{E}(R, \vartheta) \cong \hat{\mathbf{y}} \frac{e_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k_x w / 2)}{k_x} \cdot e^{-jk_0 R [k_x / k_0 \sin \vartheta + \sqrt{1 - (k_x / k_0)^2} \cos \vartheta]} dk_x$$

Se ci mettiamo a grande distanza dalla fenditura ($Rk_0 \gg 1$), capiamo che l'integrando è il prodotto di una funzione che varia lentamente per una funzione che nel piano di Gauss è rappresentabile con un vettore unitario che ruota velocemente al variare di k_x . La somma di tali vettori dà per lo più zero, eccetto che per quei valori di k_x per i quali l'argomento dell'esponenziale è stazionario (fase stazionaria), quando cioè la sua derivata prima si annulla.

posto $u = k_x / k_0$

$$\mathbf{E}(R, \vartheta) \cong \hat{\mathbf{y}} \frac{e_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(uk_0 w / 2)}{u} \cdot e^{-jk_0 R [u \sin \vartheta + \sqrt{1-u^2} \cos \vartheta]} du$$

- $u = \frac{k_x}{k_0}$

- $1-u^2 = \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_0^2} = \frac{k_z^2}{k_0^2}$

→
rappresentabili come somma di vettori unitari nel piano di Gauss

Metodo della fase stazionaria (Wikipedia)

In **matematica**, il **principio di fase stazionaria** è un principio di base dell'**analisi asintotica**, applicata agli **integrali oscillatori**:

$$I(k) = \int_a^b g(x) e^{ikf(x)} dx$$

in cui $i = \sqrt{-1}$ e $k \rightarrow +\infty$. Fu introdotto da **Lord Kelvin** nel 1877.

Ipotesi [[modifica](#) | [modifica wikitesto](#)]

- $x \in R$;
- k è un numero intero, reale e tendente ad infinito;
- f e g sono due **funzioni reali**, **continue** e **liscie** (cioè C^∞) $\forall x \in R$;

Risultati [[modifica](#) | [modifica wikitesto](#)]

- Se $f(x)$ non possiede punti stazionari su $a \leq x_0 \leq b$, integrando per parti si ottiene:

$$I(k) \cong \frac{g(b)}{ikf'(b)} e^{ikf(b)} - \frac{g(a)}{ikf'(a)} e^{ikf(a)}$$

- Se $f(x)$ è stazionario in un unico punto $a < x_0 < b$

$$I(k) \cong g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{k|f''(x_0)|}} e^{i[kf(x_0) \pm \frac{\pi}{4}f''(x_0)]}$$

- Se $f(x)$ possiede un solo punto stazionario corrispondente al limite inferiore dell'integrale $x_0 = a$

$$I(k) \cong \frac{g(b)}{ikf'(b)} e^{ikf(b)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k|f''(x_0)|}} g(x_0) e^{ikf(x_0)} e^{i\pm\frac{\pi}{4}}$$

- Se $f(x)$ possiede un solo punto stazionario corrispondente al limite superiore dell'integrale $x_0 = b$

$$I(k) \cong -\frac{g(a)}{ikf'(a)} e^{ikf(a)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k|f''(x_0)|}} g(x_0) e^{ikf(x_0)} e^{i\pm\frac{\pi}{4}}$$

Bibliografia [[modifica](#) | [modifica wikitesto](#)]

- Lord Kelvin (1887) *Philosophical Magazine* **23** p. 252; *Proceedings of the Royal Society* **83** p. 80.
- Bleistein, N. and Handelsman, R. (1975), *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, New York.
- E.T. Copson, *Asymptotic Expansions*, Cambridge University Press, 1965.

Il punto di fase stazionaria è dato da (punti nei quali la derivata rispetto ad u dell'argomento dell'esponenziale si annulla)

$$\frac{d}{du} [u \sin \vartheta + \sqrt{1-u^2} \cos \vartheta] = \sin \vartheta - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cos \vartheta = 0$$

La cui soluzione è $\tan \vartheta = \frac{k_x}{k_z}$

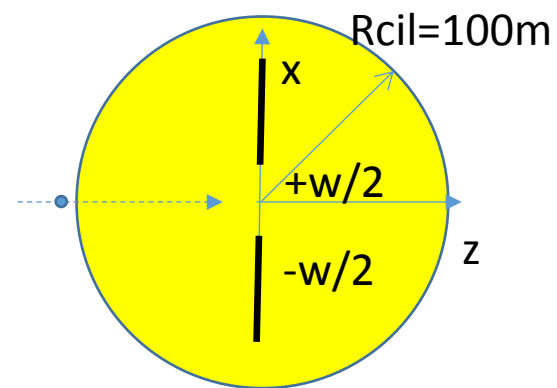
La derivata seconda vale

$$f_s(\theta, u) := \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{u}{(1-u^2)^{1.5}} \right] \cdot \cos(\theta)$$

A grande distanza dall'apertura, ad un angolo θ rispetto alla direzione di propagazione, l'unico termine che ha peso è proprio l'onda piana che si propaga nella direzione θ

$$E_y(R, \theta) := \frac{1}{\tan(\theta)} \cdot \sin\left(k_0 \cdot \frac{w}{2} \cdot \sin(\theta)\right)$$

Campo (ampiezza) sulla superficie di un cilindro con lo stesso asse della fenditura ma posto a distanza R_{cil} dall'asse



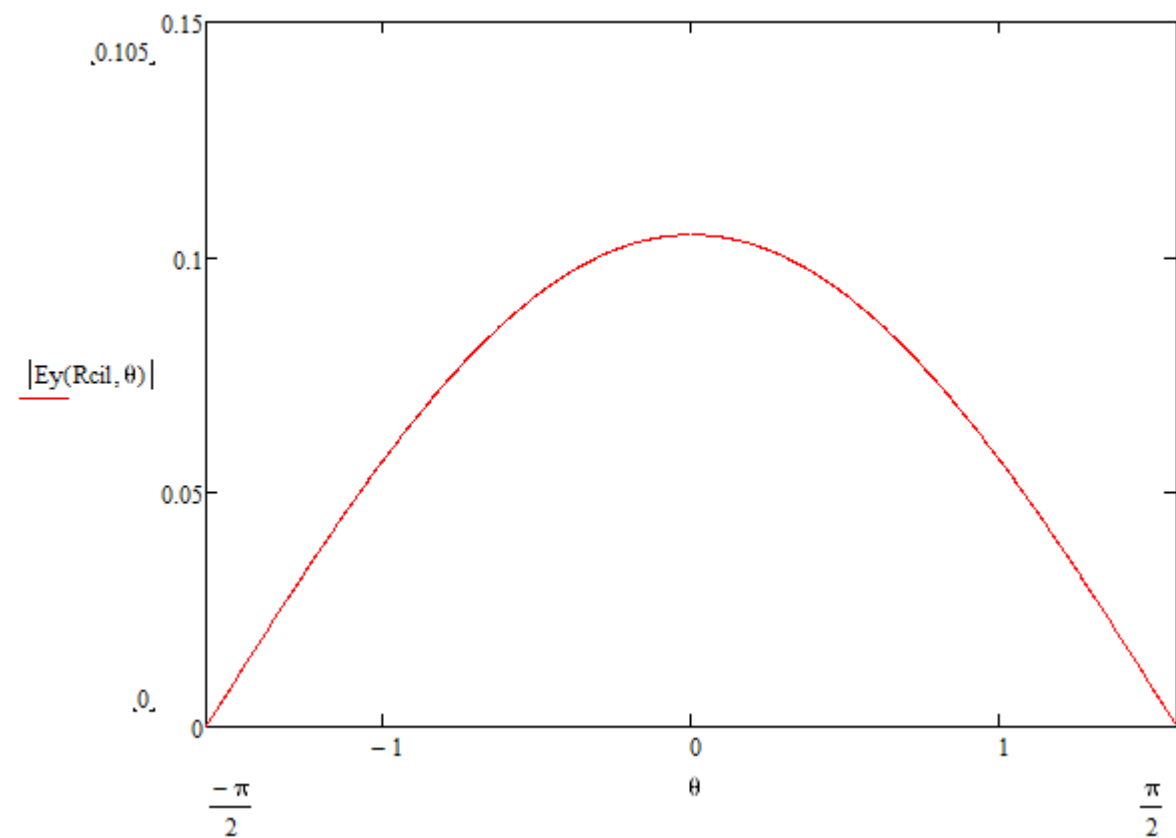
u.m. (m)

$$\lambda_0 := 30 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$w := 0.001 \text{ m}$$

$$k_0 := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda_0}$$

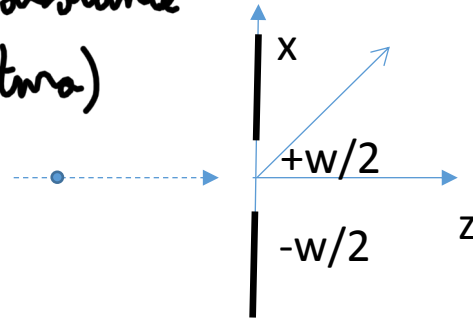
$$k_0 \cdot \frac{w}{2} = 0.105$$



Distanza schermo piano fenditura=100m

screen

(schermo piano distante
100 m dalla fenditura)

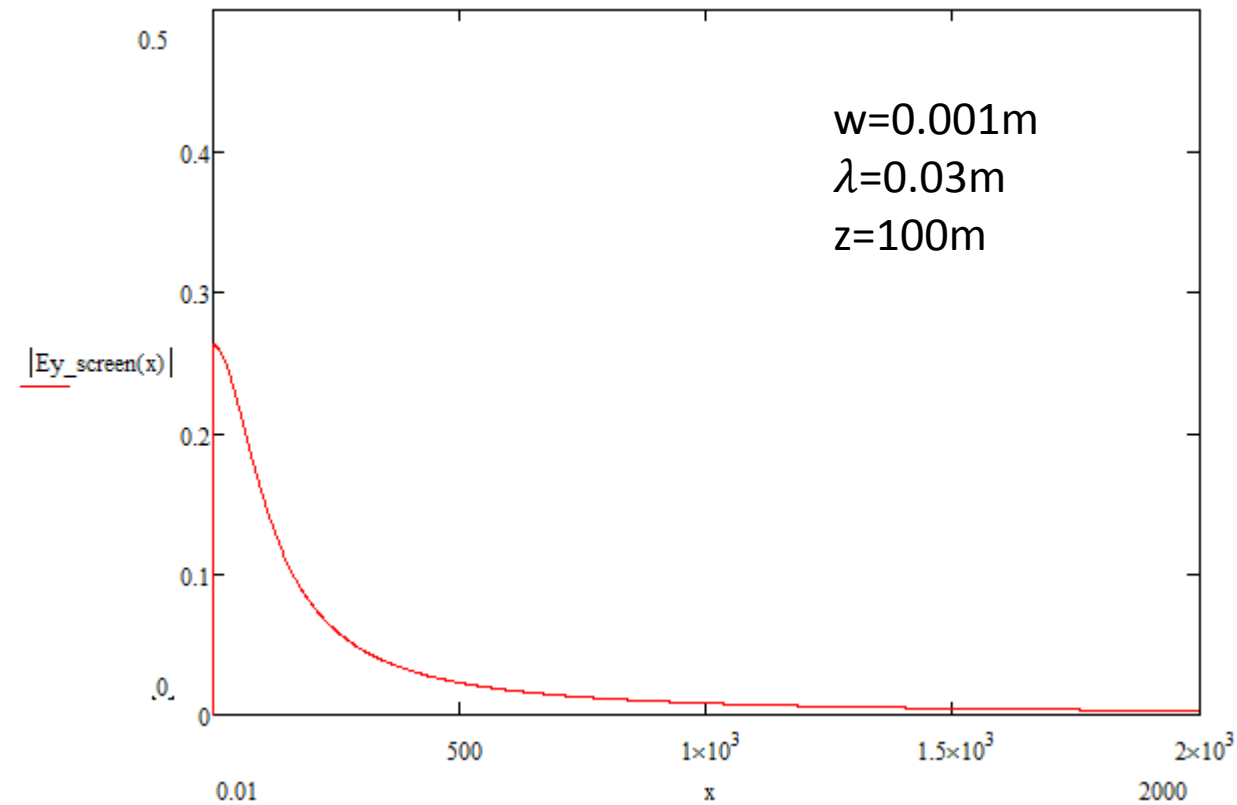


$$z := 100$$

$$u0(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

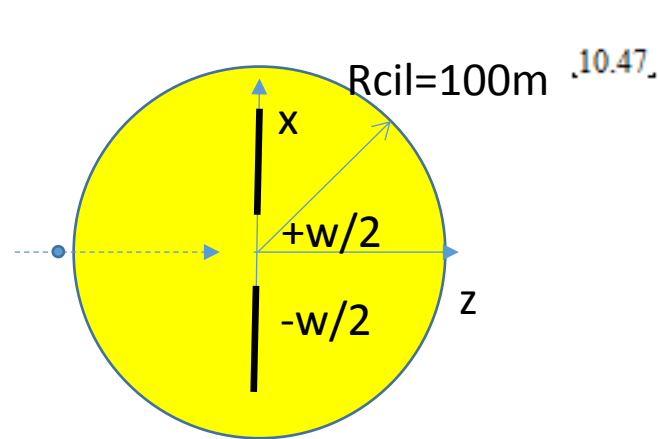
$$fs_screen(u) := \frac{-1}{(1 - u^2)^{1.5}}$$

$$k0 \cdot z = 2.094 \times 10^4$$



Campo (ampiezza) su uno schermo a distanza d dal piano contenente la fenditura

$$Ey_screen(x) := \frac{\sin\left(k0 \cdot \frac{w}{2} \cdot u0(x)\right)}{u0(x)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{fs_screen(u0(x))}}$$



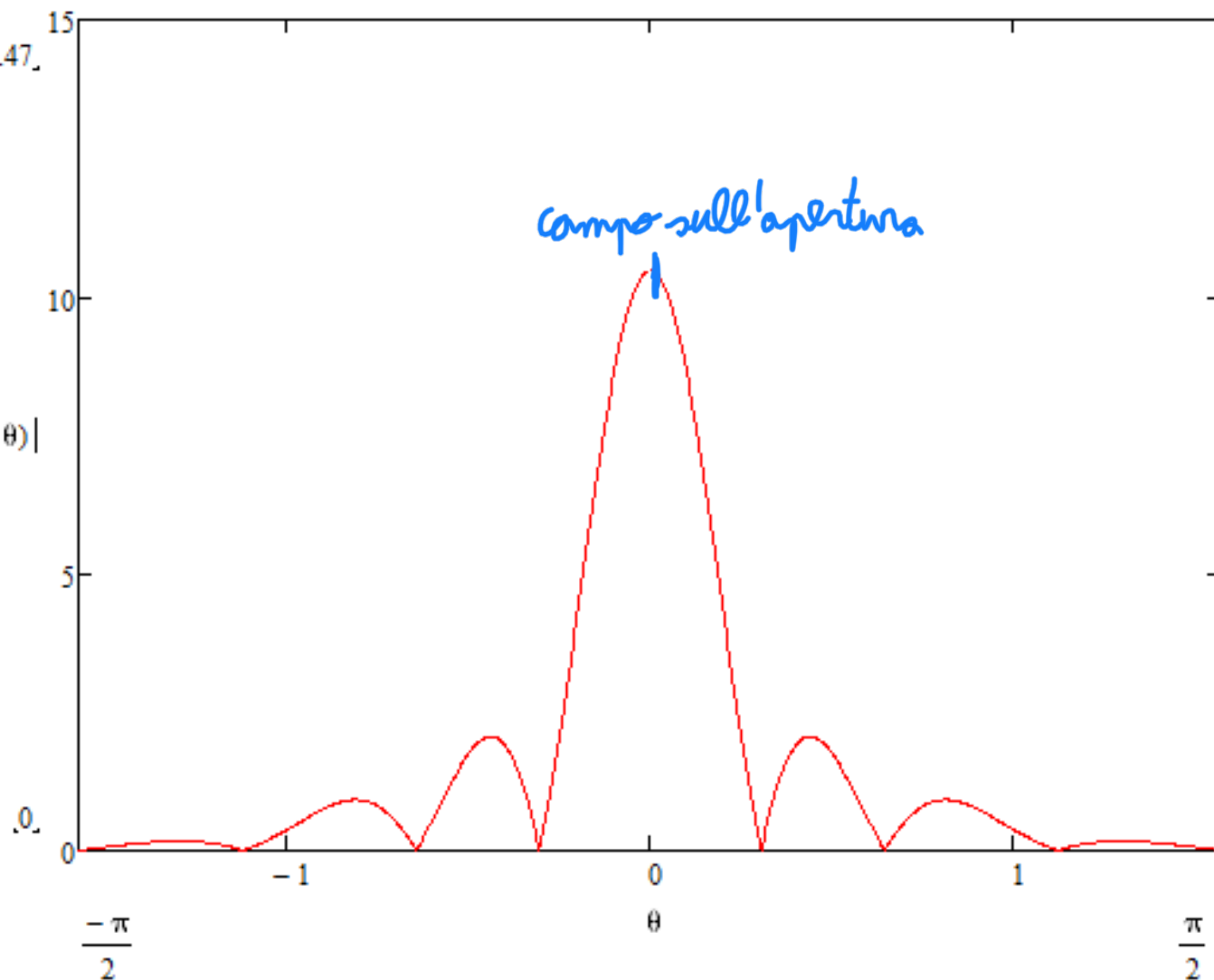
$$\lambda_0 := 30 \cdot 10^{-3}$$

$$w := 0.1$$

$$k_0 := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda_0}$$

$$k_0 \cdot \frac{w}{2} = 10.472$$

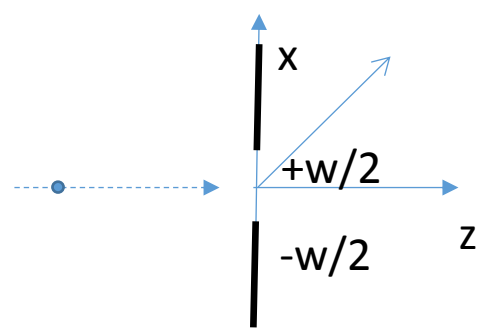
$$|E_y(R_{cil}, \theta)|$$



- Aumentando la dimensione della fenditura, ottengo delle figure di interferenza: ho il max del campo sull'apertura e delle alternanze di max/min locali.

Distanza schermo piano fenditura 100m

screen

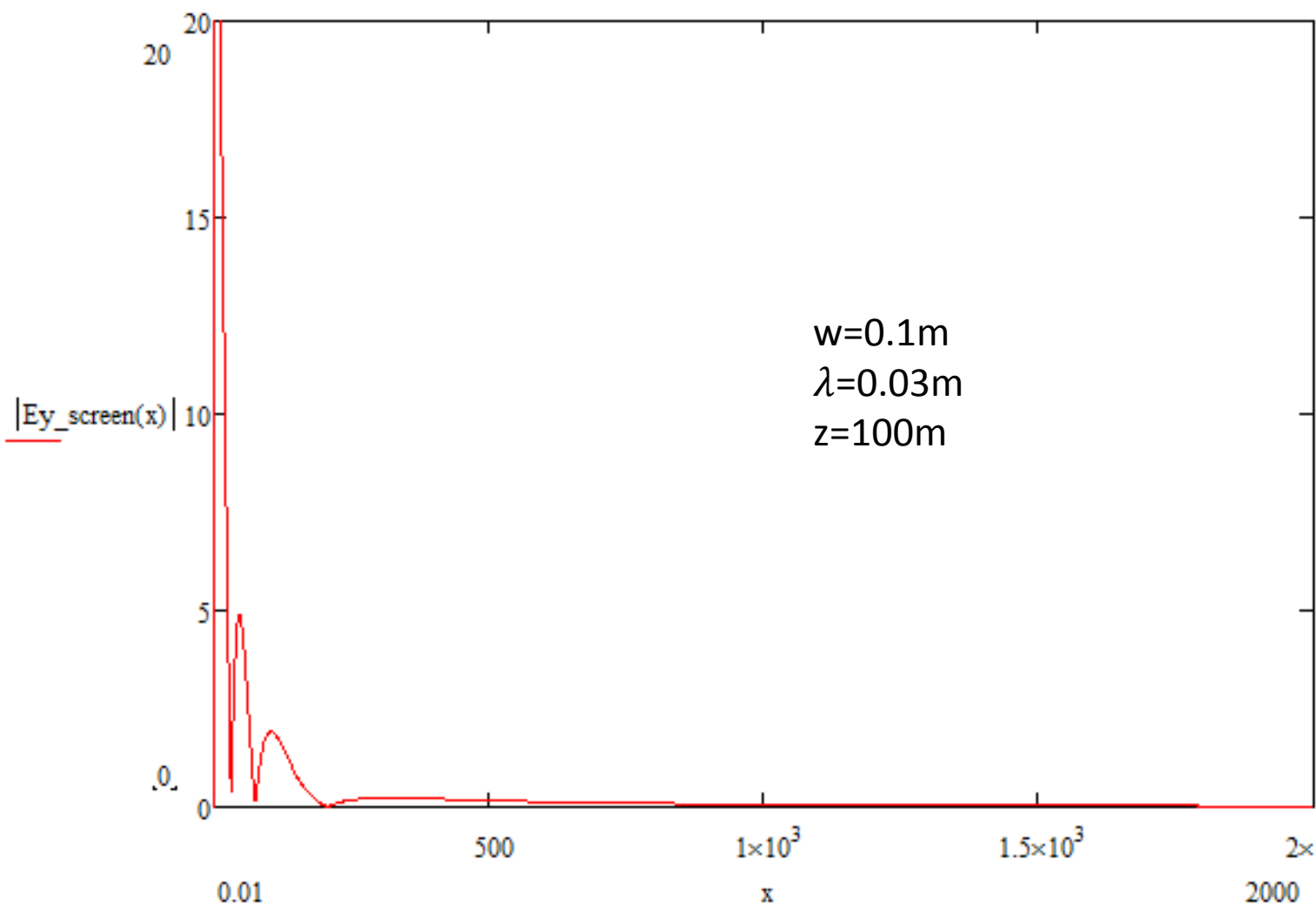


$z := 100$

$$u0(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$fs_screen(u) := \frac{-1}{(1 - u^2)^{1.5}}$$

$k0 \cdot z$



Campo (ampiezza) su uno schermo a distanza d dal piano contenente la fenditura

$$Ey_screen(x) := \frac{\sin\left(k0 \cdot \frac{w}{2} \cdot u0(x)\right)}{u0(x)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{fs_screen(u0(x))}}$$