Algoritmos y Estructuras de Datos III
Segundo cuatrimestre 2015

Programa

1. **Algoritmos:**
   - Definición de algoritmo. Máquina RAM. Complejidad. Algoritmos de tiempo polinomial y no polinomial. Límite inferior.
   - Técnicas de diseño de algoritmos: *divide and conquer*, *backtracking*, algoritmos golosos, programación dinámica.
   - Algoritmos aproximados y algoritmos heurísticos.

Programa

2. Grafos:

- Definiciones básicas. Adyacencia, grado de un nodo, isomorfismos, caminos, conexión, etc.
- Grafos eulerianos y hamiltonianos.
- Grafos bipartitos.
- Árboles: caracterización, árboles orientados, árbol generador.
- Planaridad. Coloreo. Número cromático.
- Matching, conjunto independiente, recubrimiento. Recubrimiento de aristas y vértices.

Programa

3. Algoritmos en grafos y aplicaciones:

- Representación de un grafo en la computadora: matrices de incidencia y adyacencia, listas.
- Algoritmos de búsqueda en grafos: BFS, DFS, A*.
- Mínimo árbol generador, algoritmos de Prim y Kruskal.
- Algoritmos para encontrar el camino mínimo en un grafo: Dijkstra, Ford, Floyd, Dantzig.
- Planificación de procesos: PERT/CPM.
- Algoritmos para determinar si un grafo es planar. Algoritmos para coloreo de grafos.
- Algoritmos para encontrar el flujo máximo en una red: Ford y Fulkerson.
- Matching: algoritmos para correspondencias máximas en grafos bipartitos. Otras aplicaciones.

Programa

4. Complejidad computacional:

- Problemas tratables e intratables. Problemas de decisión. P y NP. Máquinas de Türing no determinísticas. Problemas NP-completos. Relación entre P y NP.
- Problemas de grafos NP-completos: coloreo de grafos, grafos hamiltonianos, recubrimiento mínimo de las aristas, corte máximo, etc.

Bibliografía

1. G. Brassard and P. Bratley, *Fundamental of Algorithmics*, Prentice-Hall, 1996.
2. F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.
3. J. Gross and J. Yellen, *Graph theory and its applications*, CRC Press, 1999.
4. R. Ahuja, T. Magnanti and J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1993.
5. M. Garey and D. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP- Completeness*, W. Freeman and Co., 1979.

Algoritmos

- ¿Qué es un algoritmo?
- ¿Qué es un buen algoritmo?
- Dados dos algoritmos para resolver un mismo problema, ¿cuál es mejor?
- ¿Cuándo un problema está bien resuelto?

Complejidad computacional

Definición informal: La *complejidad* de un algoritmo es una función que representa el tiempo de ejecución en función del tamaño de la entrada del algoritmo.

- Complejidad en el peor caso
- Complejidad en el caso promedio

Complejidad computacional

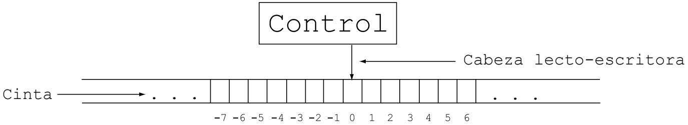
Definición informal: La *complejidad* de un algoritmo es una función que representa el tiempo de ejecución en función del tamaño de la entrada del algoritmo.

- Complejidad en el peor caso
- Complejidad en el caso promedio

Definición formal?

Modelos de Computadoras: Máquina de Turing Determinística (DTM)

- Consiste de un control finito, una cabeza lecto-escritora y una cinta con el siguiente esquema.



  - Σ finito, el alfabeto; $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
  - Q finito, el conjunto de estados;
  - $q_0 \in Q$, estado inicial; $Q_f \subseteq Q$, estados finales (q_{si} y q_{no} para problemas de decisión)

Máquina de Turing

- Sobre la cinta tengo escrito el input que es un string de símbolos de Σ a partir de la celda 1, y el resto de las celdas tiene $*$ (blancos).
- Definimos un programa S como un conjunto de quíntuplas $S \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times M$, donde $M = \{+1, -1\}$ son los movimientos de la cabeza a derecha o izquierda.
- **Para todo par (q_i, s_j), existe exactamente una quíntupla que comienza con ese par (máquina determinística).**

Máquina de Turing

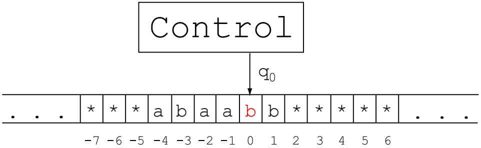
¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

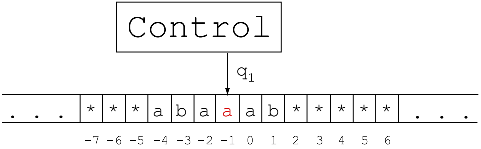


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

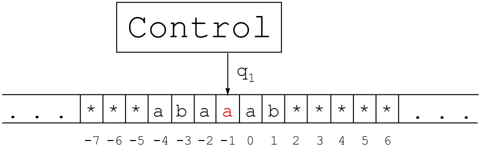


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

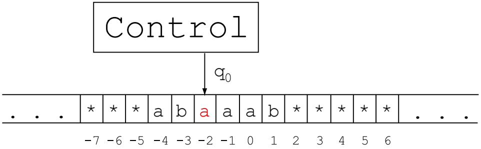


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

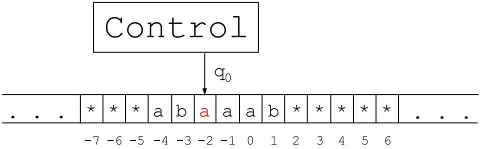


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

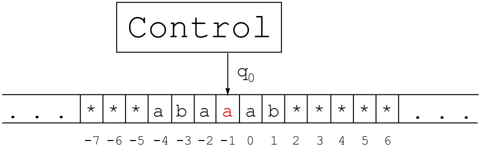


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

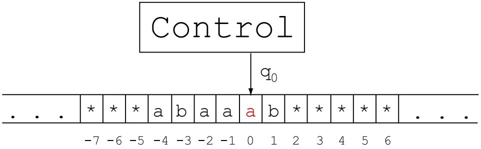


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

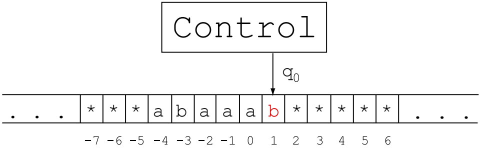


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

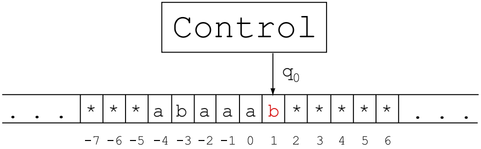


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

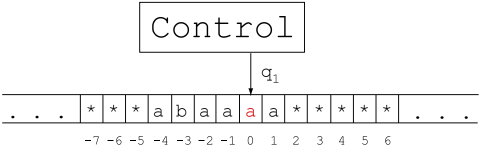


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

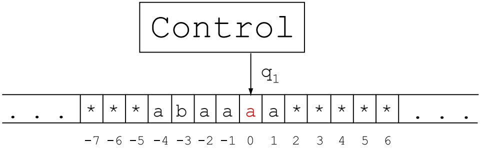


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

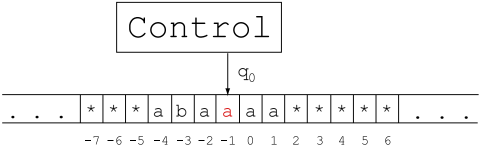


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

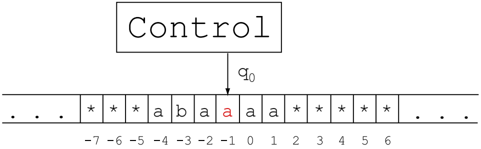


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

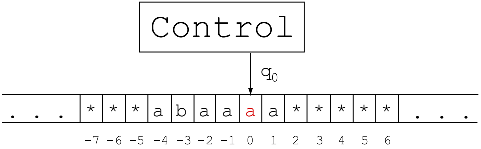


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

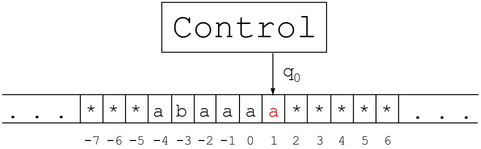


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

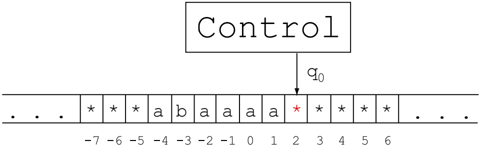


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

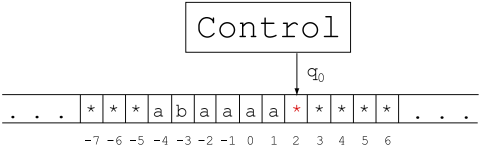


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$

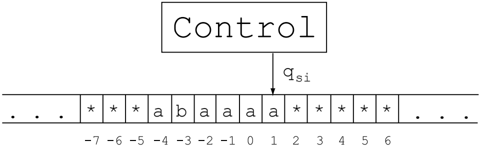


Máquina de Turing

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado q_i la cabeza lee s_h, entonces escribe s_k, se mueve a la derecha y pasa al estado q_j.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
  $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$;
  $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$,
  $(q_0, b, q_1, a, -1)$,
  $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$,
  $(q_1, a, q_0, a, -1)$,
  $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$,
  $(q_1, *, q_0, b, +1)$



Máquina de Turing

- Una máquina M resuelve el problema π si para toda instancia empieza, termina y contesta bien (o sea, termina en el estado final correcto).

Máquina de Turing

- Una máquina M resuelve el problema π si para toda instancia empieza, termina y contesta bien (o sea, termina en el estado final correcto).
- La complejidad de una DTM está dada por la cantidad de movimientos de la cabeza, desde el estado inicial hasta alcanzar un estado final, en función del tamaño de la entrada. $T_M(n) = \text{máx}\{m \text{ tq } \exists x \in D_\pi, |x| = n \text{ y } M \text{ con input } x \text{ tarda } m\}$

Modelos de Computadoras: Máquina RAM

Definición: Máquina de registros + registro acumulador + direccionamiento indirecto.

Motivación: Modelar computadoras en las que la memoria es suficiente y donde los enteros involucrados en los cálculos entran en una palabra.

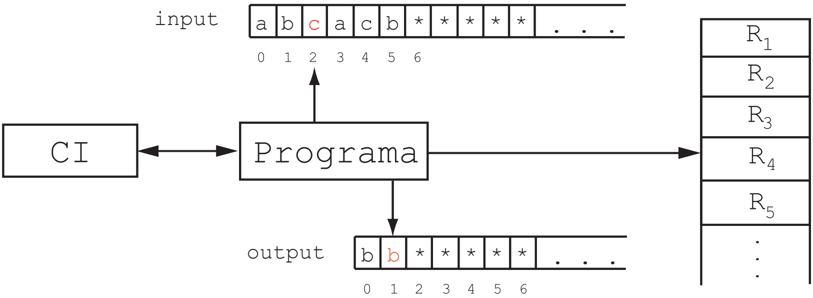
Modelos de Computadoras: Máquina RAM

Definición: Máquina de registros + registro acumulador + direccionamiento indirecto.

Motivación: Modelar computadoras en las que la memoria es suficiente y donde los enteros involucrados en los cálculos entran en una palabra.

- Unidad de entrada: Sucesión de celdas numeradas, cada una con un entero de tamaño arbitrario.
- Memoria: Sucesión de celdas numeradas, cada una puede almacenar un entero de tamaño arbitrario.
- Programa no almacenado en memoria (aún así es una máquina programable!).

Máquina RAM


input
a b c a c b * * * * * . . .
0 1 2 3 4 5 6
CI
Programa
output
b b * * * * * . . .
0 1 2 3 4 5 6
R1
R2
R3
R4
R5

Máquina RAM - Instrucciones

- LOAD operando - Carga un valor en el acumulador
- STORE operando - Carga el acumulador en un registro
- ADD operando - Suma el operando al acumulador
- SUB operando - Resta el operando al acumulador
- MULT operando - Multiplica el operando por el acumulador
- DIV operando - Divide el acumulador por el operando
- READ operando - Lee un nuevo dato de entrada $\rightarrow$ operando
- WRITE operando - Escribe el operando a la salida
- JUMP label - Salto incondicional
- JGTZ label - Salta si el acumulador es positivo
- JZERO label - Salta si el acumulador es cero
- HALT - Termina el programa

Máquina RAM - Operandos

- LOAD $= a$: Carga en el acumulador el entero a.
- LOAD i: Carga en el acumulador el contenido del registro i.
- LOAD $*i$: Carga en el acumulador el contenido del registro indexado por el valor del registro i.

Complejidad en la Máquina RAM

- Asumimos que cada instrucción tiene un tiempo de ejecución asociado.
- **Tiempo de ejecución de un algoritmo A:**
  $T_A(I) =$ suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la *instancia* I.
- **Complejidad de un algoritmo A:**
  $f_A(n) = \text{máx}_{I:|I|=n} T(I)$

Complejidad en la Máquina RAM

- Asumimos que cada instrucción tiene un tiempo de ejecución asociado.
- **Tiempo de ejecución de un algoritmo A:**
  $T_A(I) =$ suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la *instancia* I.
- **Complejidad de un algoritmo A:**
  $f_A(n) = \max_{I:|I|=n} T(I)$ (pero debemos definir $|I|$!).

Tamaño de una instancia

Definición (incompleta): Dada una instancia I, se define $|I|$ como el número de símbolos de un alfabeto finito necesarios para codificar I.

- Depende del alfabeto y de la base!
- Para almacenar $n \in \mathbb{N}$, se necesitan $L(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ dígitos binarios.
- Para almacenar una lista de m enteros, se necesitan $L(m) + mL(N)$ dígitos binarios, donde N es el valor máximo de la lista (notar que se puede mejorar!).
- etc.

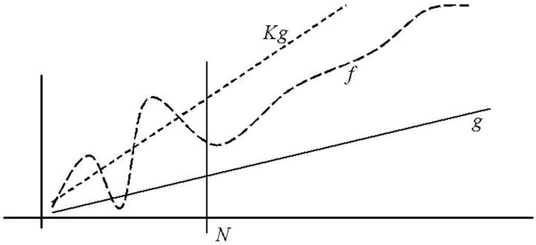
Tamaño de una instancia

- **Modelo uniforme:** Asumimos que los valores numéricos dentro de la instancia están acotados de antemano.
- **Modelo logarítmico:** Medimos el tamaño en bits de cada entero por separado, y no se asume una cota superior de antemano.

Notación O

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, decimos que:

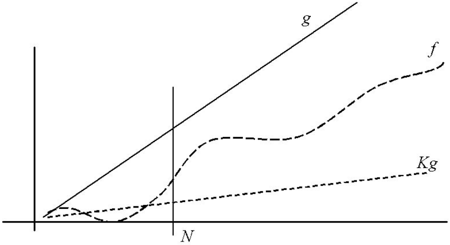
- $f(n) = O(g(n))$ si existen $K \in \mathbb{R}_+$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq c\, g(n)$ para todo $n \geq N$.



Notación O

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, decimos que:

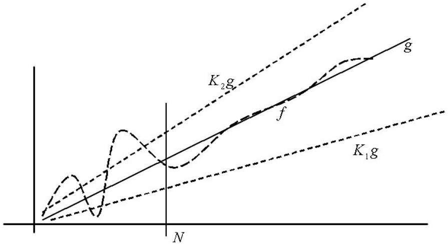
- $f(n) = O(g(n))$ si existen $K \in \mathbb{R}_+$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq c\, g(n)$ para todo $n \geq N$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ si existen $K \in \mathbb{R}_+$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \geq c\, g(n)$ para todo $n \geq N$.



Notación O

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, decimos que:

- $f(n) = O(g(n))$ si existen $K \in \mathbb{R}_+$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq c\, g(n)$ para todo $n \geq N$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ si existen $K \in \mathbb{R}_+$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \geq c\, g(n)$ para todo $n \geq N$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ si $f = O(g(n))$ y $f = \Omega(g(n))$.



Ejemplos

- Búsqueda secuencial: $O(n)$.
- Búsqueda binaria: $O(\log(n))$.

Ejemplos

- Búsqueda secuencial: $O(n)$.
- Búsqueda binaria: $O(\log(n))$.

- Ordenar un arreglo (bubblesort): $O(n^2)$.
- Ordenar un arreglo (quicksort): $O(n^2)$ en el peor caso (!).
- Ordenar un arreglo (heapsort): $O(n \log(n))$.

Ejemplos

- Búsqueda secuencial: $O(n)$.
- Búsqueda binaria: $O(\log(n))$.

- Ordenar un arreglo (bubblesort): $O(n^2)$.
- Ordenar un arreglo (quicksort): $O(n^2)$ en el peor caso (!).
- Ordenar un arreglo (heapsort): $O(n \log(n))$.

Es interesante notar que $O(n \log(n))$ es la complejidad **óptima** para algoritmos de ordenamiento basados en comparaciones (cómo se demuestra?).

Ejemplo dramático: Cálculo del determinante de una matriz

Recordemos: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define su *determinante* por

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

donde $i \in \{1, \dots, n\}$ y A_{ij} es la submatriz de A obtenida al eliminar la fila i y la columna j.

Ejemplo dramático: Cálculo del determinante de una matriz

Recordemos: Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se define su *determinante* por

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

donde $i \in \{1, \ldots, n\}$ y A_{ij} es la submatriz de A obtenida al eliminar la fila i y la columna j.

Complejidad: $f(n) = \begin{cases} n\, f(n-1) + O(n) & \text{si } n > 1 \\ O(1) & \text{si } n = 1 \end{cases}$

Ejemplo dramático: Cálculo del determinante de una matriz

Recordemos: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define su *determinante* por

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

donde $i \in \{1, \ldots, n\}$ y A_{ij} es la submatriz de A obtenida al eliminar la fila i y la columna j.

Complejidad: $f(n) = \begin{cases} n\,f(n-1) + O(n) & \text{si } n > 1 \\ O(1) & \text{si } n = 1 \end{cases}$

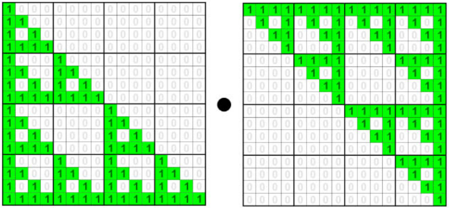
$= O(n!)$ (oops!).

Ejemplo dramático: Cálculo del determinante de una matriz

Algoritmo alternativo: Obtener la *descomposición* LU, escribiendo $PA = LU$. Entonces,

$$\det(A) = \det(P^{-1})\ \det(L)\ \det(U),$$

y todos los determinantes del lado derecho son sencillos de calcular.



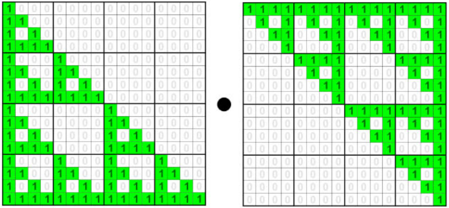
Ejemplo dramático: Cálculo del determinante de una matriz

Algoritmo alternativo: Obtener la *descomposición* LU, escribiendo $PA = LU$. Entonces,

$$\det(A) = \det(P^{-1})\ \det(L)\ \det(U),$$

y todos los determinantes del lado derecho son sencillos de calcular.

Complejidad: $f(n) = O(n^3) + 3O(n) = O(n^3)$



Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$

Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$O(n)$	0.01 ms	0.02 ms	0.03 ms	0.04 ms	0.05 ms

Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$O(n)$	0.01 ms	0.02 ms	0.03 ms	0.04 ms	0.05 ms
$O(n^2)$	0.10 ms	0.40 ms	0.90 ms	0.16 ms	0.25 ms

Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$O(n)$	0.01 ms	0.02 ms	0.03 ms	0.04 ms	0.05 ms
$O(n^2)$	0.10 ms	0.40 ms	0.90 ms	0.16 ms	0.25 ms
$O(n^3)$	1.00 ms	8.00 ms	2.70 ms	6.40 ms	0.12 sg

Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$O(n)$	0.01 ms	0.02 ms	0.03 ms	0.04 ms	0.05 ms
$O(n^2)$	0.10 ms	0.40 ms	0.90 ms	0.16 ms	0.25 ms
$O(n^3)$	1.00 ms	8.00 ms	2.70 ms	6.40 ms	0.12 sg
$O(n^5)$	0.10 sg	3.20 sg	24.30 sg	1.70 min	5.20 min

Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$O(n)$	0.01 ms	0.02 ms	0.03 ms	0.04 ms	0.05 ms
$O(n^2)$	0.10 ms	0.40 ms	0.90 ms	0.16 ms	0.25 ms
$O(n^3)$	1.00 ms	8.00 ms	2.70 ms	6.40 ms	0.12 sg
$O(n^5)$	0.10 sg	3.20 sg	24.30 sg	1.70 min	5.20 min
$O(2^n)$	1.00 ms	1.00 sg	17.90 min	12 días	35 años

Problemas bien resueltos

Definición: Decimos que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para el problema.

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$O(n)$	0.01 ms	0.02 ms	0.03 ms	0.04 ms	0.05 ms
$O(n^2)$	0.10 ms	0.40 ms	0.90 ms	0.16 ms	0.25 ms
$O(n^3)$	1.00 ms	8.00 ms	2.70 ms	6.40 ms	0.12 sg
$O(n^5)$	0.10 sg	3.20 sg	24.30 sg	1.70 min	5.20 min
$O(2^n)$	1.00 ms	1.00 sg	17.90 min	12 días	35 años
$O(3^n)$	0.59 sg	58 min	6 años	3855 siglos	2×10^8 siglos!

Problemas bien resueltos

Conclusión: Los algoritmos polinomiales se consideran satisfactorios (cuanto menor sea el grado, mejor), y los algoritmos supra-polinomiales se consideran no satisfactorios.

Problemas bien resueltos

Conclusión: Los algoritmos polinomiales se consideran satisfactorios (cuanto menor sea el grado, mejor), y los algoritmos supra-polinomiales se consideran no satisfactorios.

- Si los tamaños de instancia son pequeños, ¿es tan malo un algoritmo exponencial?
- ¿Cómo se comparan $O(n^{85})$ con $O(1{,}001^n)$?
- ¿Puede pasar que un algoritmo de peor caso exponencial sea eficiente en la práctica? ¿Puede pasar que en la práctica sea *el mejor*?
- ¿Qué pasa si no encuentro un algoritmo polinomial?

Tipos de problemas

- Problemas de cálculo
- Problemas de decisión
- Problemas de búsqueda
- Problemas de enumeración
- Problemas de optimización
- Problemas de optimización con información incompleta
- Otros....

Tipos de algoritmos

- Algoritmo exacto
- Heurística
- Algoritmo aproximado

Técnicas de diseño de algoritmos

- Algoritmos golosos
- *Divide and conquer* (dividir y conquistar)
- Recursividad
- Programación dinámica
- *Backtracking* (búsqueda con retroceso)
- Algoritmos probabilísticos

Algoritmos golosos

Idea: Construir una solución seleccionando en cada paso la mejor alternativa, sin considerar (o haciéndolo débilmente) las implicancias de esta selección.

Algoritmos golosos

Idea: Construir una solución seleccionando en cada paso la mejor alternativa, sin considerar (o haciéndolo débilmente) las implicancias de esta selección.

- Habitualmente, proporcionan heurísticas sencillas para problemas de optimización.
- En general permiten construir soluciones razonables, pero sub-óptimas.
- En algunos casos resultan en algoritmos aproximados, y se usan para problemas de optimización con información incompleta.
- Pero en general pueden dar soluciones arbitrariamente malas.
- Sin embargo, en ocasiones nos pueden dar interesantes sorpresas!

Ejemplo: El problema de la mochila

Datos de entrada:

- Capacidad $C \in \mathbb{R}_+$ de la mochila (peso máximo).
- Cantidad $n \in \mathbb{N}$ de tipos objetos.
- Peso $p_i \in \mathbb{R}_+$ del objeto i, para $i = 1, \ldots, n$.
- Beneficio $b_i \in \mathbb{R}_+$ del objeto i, para $i = 1, \ldots, n$.

Problema: Determinar cuántos objetos de cada tipo debemos incluir en la mochila sin excedernos del peso máximo C, de modo tal de maximizar el beneficio total entre los objetos seleccionados.

Ejemplo: El problema de la mochila

Algoritmo(s) goloso(s): Mientras no se haya excedido el peso de la mochila, agregar a la mochila el objeto i disponible que ...

- ... tenga mayor beneficio b_i.
- ... tenga menor peso p_i.
- ... maximice b_i/p_i.

Ejemplo: El problema de la mochila

Algoritmo(s) goloso(s): Mientras no se haya excedido el peso de la mochila, agregar a la mochila el objeto i disponible que ...

- ... tenga mayor beneficio b_i.
- ... tenga menor peso p_i.
- ... maximice b_i/p_i.

¿Qué podemos decir en cuanto a la calidad de las soluciones obtenidas por estos algoritmos? ¿Qué podemos decir en cuanto a su complejidad?

Ejemplo: Tiempo de espera total en un sistema

Problema: Un servidor tiene n clientes para atender, y los puede atender en cualquier orden. Para $i = 1, \ldots, n$, el tiempo necesario para atender al cliente i es $t_i \in \mathbb{R}_+$. El objetivo es determinar en qué orden se deben atender los clientes para minimizar la suma de los tiempos de espera de los clientes.

Ejemplo: Tiempo de espera total en un sistema

Problema: Un servidor tiene n clientes para atender, y los puede atender en cualquier orden. Para $i = 1, \ldots, n$, el tiempo necesario para atender al cliente i es $t_i \in \mathbb{R}_+$. El objetivo es determinar en qué orden se deben atender los clientes para minimizar la suma de los tiempos de espera de los clientes.

Si $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ es una permutación de los clientes que representa el orden de atención, entonces la suma de los tiempos de espera es

$$\begin{aligned} T &= t_{i_1} + (t_{i_1} + t_{i_2}) + (t_{i_1} + t_{i_2} + t_{i_3}) + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{n} (n - k + 1) t_{i_k}. \end{aligned}$$

Ejemplo: Tiempo de espera total en un sistema

Algoritmo goloso: En cada paso, atender al cliente pendiente que tenga menor tiempo de atención.

- Retorna una permutación $I_{\text{GOL}} = (i_1, \ldots, i_n)$ tal que $t_{i_j} \leq t_{i_{j+1}}$ para $j = 1, \ldots, n-1$.
- ¿Cuál es la complejidad de este algoritmo?

Ejemplo: Tiempo de espera total en un sistema

Algoritmo goloso: En cada paso, atender al cliente pendiente que tenga menor tiempo de atención.

- Retorna una permutación $I_{\mathrm{GOL}} = (i_1, \ldots, i_n)$ tal que $t_{i_j} \leq t_{i_{j+1}}$ para $j = 1, \ldots, n-1$.
- ¿Cuál es la complejidad de este algoritmo?
- Este algoritmo proporciona la solución óptima! (cómo se demuestra?)

Divide and conquer

- Si la instancia I de entrada es pequeña, entonces utilizar un algoritmo ad hoc para el problema.

- En caso contrario:
  - Dividir I en sub-instancias $I_1, I_2, \ldots, I_k$ más pequeñas.
  - Resolver recursivamente las k sub-instancias.
  - Combinar las soluciones para las k sub-instancias para obtener una solución para la instancia original I.

Ejemplo: Mergesort

Algoritmo *divide and conquer* para ordenar un arreglo A de n elementos (von Neumann, 1945).

- Si n es pequeño, ordenar por cualquier método sencillo.
- Si n es grande:
  - $A_1 :=$ primera mitad de A.
  - $A_2 :=$ segunda mitad de A.
  - Ordenar recursivamente A_1 y A_2 por separado.
  - Combinar A_1 y A_2 para obtener los elementos de A ordenados (apareo de arreglos).

Ejemplo: Mergesort

Algoritmo *divide and conquer* para ordenar un arreglo A de n elementos (von Neumann, 1945).

- Si n es pequeño, ordenar por cualquier método sencillo.
- Si n es grande:
  - $A_1 :=$ primera mitad de A.
  - $A_2 :=$ segunda mitad de A.
  - Ordenar recursivamente A_1 y A_2 por separado.
  - Combinar A_1 y A_2 para obtener los elementos de A ordenados (apareo de arreglos).

Este algoritmo contiene todos los elementos típicos de la técnica *divide and conquer*.

Ejemplo: Mergesort

Algoritmo *divide and conquer* para ordenar un arreglo A de n elementos (von Neumann, 1945).

- Si n es pequeño, ordenar por cualquier método sencillo.
- Si n es grande:
  - $A_1 :=$ primera mitad de A.
  - $A_2 :=$ segunda mitad de A.
  - Ordenar recursivamente A_1 y A_2 por separado.
  - Combinar A_1 y A_2 para obtener los elementos de A ordenados (apareo de arreglos).

Este algoritmo contiene todos los elementos típicos de la técnica *divide and conquer*.

Ejemplo: Multiplicación de Strassen

- Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El algoritmo estándar para calcular AB tiene una complejidad de $\Theta(n^3)$.
- Durante muchos años se pensaba que esta complejidad era óptima.

Ejemplo: Multiplicación de Strassen

- Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El algoritmo estándar para calcular AB tiene una complejidad de $\Theta(n^3)$.
- Durante muchos años se pensaba que esta complejidad era óptima.
- Sin embargo, Strassen (1969) pateó el tablero. Particionamos:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: Multiplicación de Strassen

Definimos:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (A_{21} + A_{22} - A_{11})\,(B_{22} - B_{12} + B_{11}) \\
M_2 &= A_{11} B_{11} \\
M_3 &= A_{12} B_{21} \\
M_4 &= (A_{11} - A_{21})\,(B_{22} - B_{12}) \\
M_5 &= (A_{21} + A_{22})\,(B_{12} - B_{11}) \\
M_6 &= (A_{12} - A_{21} + A_{11} - A_{22})\,B_{22} \\
M_7 &= A_{22}\,(B_{11} + B_{22} - B_{12} - B_{21}).
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Multiplicación de Strassen

Definimos:

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{21} + A_{22} - A_{11})\,(B_{22} - B_{12} + B_{11}) \\
M_2 &= A_{11} B_{11} \\
M_3 &= A_{12} B_{21} \\
M_4 &= (A_{11} - A_{21})\,(B_{22} - B_{12}) \\
M_5 &= (A_{21} + A_{22})\,(B_{12} - B_{11}) \\
M_6 &= (A_{12} - A_{21} + A_{11} - A_{22})\,B_{22} \\
M_7 &= A_{22}\,(B_{11} + B_{22} - B_{12} - B_{21}).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$AB = \begin{pmatrix} M_2 + M_3 & M_1 + M_2 + M_5 + M_6 \\ M_1 + M_2 + M_4 - M_7 & M_1 + M_2 + M_4 + M_5 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: Multiplicación de Strassen

- Este algoritmo permite calcular el producto AB en tiempo $O(n^{\log_2(7)}) = O(n^{2,81})$ (!).
- Requiere 7 multiplicaciones de matrices de tamaño $n/2 \times n/2$, en comparación con las 8 multiplicaciones del algoritmo estándar.
- La cantidad de sumas (y restas) de matrices es mucho mayor.

Ejemplo: Multiplicación de Strassen

- Este algoritmo permite calcular el producto AB en tiempo $O(n^{\log_2(7)}) = O(n^{2{,}81})$ (!).
- Requiere 7 multiplicaciones de matrices de tamaño $n/2 \times n/2$, en comparación con las 8 multiplicaciones del algoritmo estándar.
- La cantidad de sumas (y restas) de matrices es mucho mayor.

- El algoritmo asintóticamente más eficiente conocido a la fecha tiene una complejidad de $O(n^{2{,}376})$ (Coppersmith y Winograd, 1987).

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones de un espacio asociado a soluciones candidatos de un problema computacional. Se puede pensar este espacio tiene forma de árboles dirigidos (o grafos dirigidos en general pero sin ciclos).

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones de un espacio asociado a soluciones candidatos de un problema computacional. Se puede pensar este espacio tiene forma de árboles dirigidos (o grafos dirigidos en general pero sin ciclos).

- Habitualmente, utiliza un vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece un dominio/conjunto ordenado y finito S_i.
- Se extienden las soluciones candidatas agregando un elemento más al final del vector a, las nuevas soluciones candidatas son sucesores de la anterior.

Backtracking: Esquema General

BT(a, k)

1. Si a es solución
2. entonces solución:=a
3. debe_finalizar?:=verdadero
4. sino para cada $a' \in$ Sucesores(a, k)
5. BT($a', k+1$)
6. Si debe_finalizar?
7. entonces retornar solucion

Backtracking: Esquema General

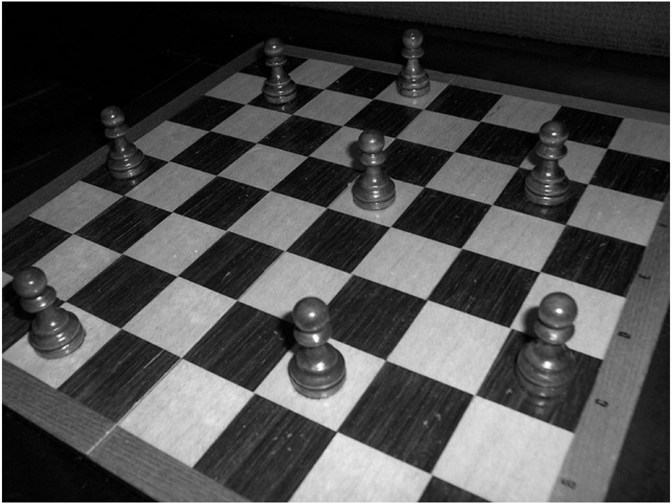
BT(a, k)

1. Si a es solución
2. entonces solución:=a
3. debe_finalizar?:=verdadero
4. sino para cada $a' \in$ Sucesores(a, k)
5. BT($a', k+1$)
6. Si debe_finalizar?
7. entonces retornar solucion

- solución es una variable global que guarda la solución final.
- debe_finalizar? es una variable booleana global que indica que se encontró o no la solución final, inicialmente tiene valor falso.

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna "amenace" a otra.



Ejemplo: Problema de las 8 reinas

Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna "amenace" a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna "amenace" a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

- Sabemos que cada fila debe tener exactamente una reina. Entonces a_i es la posición (columna) en la que está la reina de la fila i, o sea, podemos usar el vector $a = (a_1, \ldots, a_8)$ para representar una solución candidata.

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna "amenace" a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

- Sabemos que cada fila debe tener exactamente una reina. Entonces a_i es la posición (columna) en la que está la reina de la fila i, o sea, podemos usar el vector $a = (a_1, \ldots, a_8)$ para representar una solución candidata.

Tenemos ahora $8^8 = 16777216$ combinaciones.

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

- Es más, una misma columna debe tener exactamente una reina!

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

- Es más, una misma columna debe tener exactamente una reina!

Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

- Es más, una misma columna debe tener exactamente una reina!

  Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

- ¿Cómo chequear si un vector a es una solución?

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

- Es más, una misma columna debe tener exactamente una reina!

  Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

- ¿Cómo chequear si un vector a es una solución?

  $$a_i - a_j \notin \{i - j, 0, j - i\}, \forall i, j \in \{1, \ldots, 8\} \text{ e } i \neq j.$$

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

- Es más, una misma columna debe tener exactamente una reina!

  Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

- ¿Cómo chequear si un vector a es una solución?

  $$a_i - a_j \notin \{i-j, 0, j-i\}, \forall i, j \in \{1, \ldots, 8\} \text{ e } i \neq j.$$

- Ahora estamos en condición de implementar un algoritmo para resolver el problema!

Ejemplo: Problema de las 8 reinas

- Es más, una misma columna debe tener exactamente una reina!

Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

- ¿Cómo chequear si un vector a es una solución?

$$a_i - a_j \notin \{i - j, 0, j - i\}, \forall i, j \in \{1, \ldots, 8\} \text{ e } i \neq j.$$

- Ahora estamos en condición de implementar un algoritmo para resolver el problema!
- ¿Cómo generalizar para el problema de n reinas?