Coloreo

Color crítico

Enunciado

Un grafo G es color crítico si sacando un vértice cualquiera disminuye el número cromático de G. Probar que si G es k-cromático y color crítico entonces:

a) G es conexo.

b) Todo vértice de G tiene grado mayor o igual a k - 1.

c) G no tiene puntos de corte.

Lema V

Dados G un grafo k-cromático, c un color, v un nodo de G, existe un coloreo f de G que usa solamente k colores y que cumple que $f(v) = c$.

Demostración Como G es k-cromático, existe f coloreo de k colores de G. Si $f(v) = c$, listo. Si no, puedo cambiar todos los nodos de color c a un color nuevo c' y ahora sí poner todos los nodos que tenían el mismo color que v con color c. Este nuevo coloreo f' es válido ya que dos nodos tienen igual color en f' si y solo si tienen el mismo color en f (y f sabemos que es válido).

Lema M

Dado G un grafo k-cromático, si existe H subgrafo propio inducido de G tal que $\chi(H) = \chi(G) \Rightarrow G$ no es color crítico.

Demostración Como H es un subgrafo propio inducido, entonces existe algún nodo v que no pertenece a H. $G - v$ tiene a H de subgrafo, y por propiedad de coloreo, $\chi(H) \leq \chi(G) \Rightarrow \chi(G) \geq k$, entonces saqué un nodo v pero el número cromático no disminuyó, G no es color crítico.

G color crítico $\Rightarrow$ G es conexo.

Sea G color crítico y k-cromático.
Por absurdo, supongo que G no es conexo. Entonces existen C_1, C_2, …, C_q $(q \geq 2)$ componentes conexas de G.

Caso 1: Si existe C_i tal que $\chi(C_i) = k$ entonces como C_i es un subgrafo inducido propio de G (pues hay otras componentes conexas), G no es color crítico. Abs! G era color crítico

Caso 2: Si $\forall C_i$, $\chi(C_i) < k$ entonces existen f_i coloreo de C_i usando algunos de los colores $1, \ldots, k-1$ para todo $i = 1, \ldots, q$. Luego puedo armar f coloreo de G, mezclando los coloreos encontrados para cada componente conexa.

$$f(v) = \begin{cases} f_1(v) & \text{si } v \in C_1 \\ f_2(v) & \text{si } v \in C_2 \\ & \vdots \\ f_q(v) & \text{si } v \in C_q \end{cases}$$

Como todos los nodos pertenecen a alguna C_i entonces f colorea todos los nodos. Además como f está definida en función de los f_i, usa a lo sumo los colores distintos que usan, es decir, $k - 1$. Por lo tanto f es un coloreo de $k - 1$ colores.
Falta verificar que el coloreo es válido, o sea, $(u,w) \in \mathrm{E}(G) \Rightarrow f(u) \neq f(w)$.
Si $(u,w) \in \mathrm{E}(G)$ entonces u y w pertenecen a la misma componente conexa $C_j \Rightarrow f(u) = f_j(u) \neq f_j(w) = f(w)$ (porque el eje $(u,w) \in \mathrm{E}(C_j)$ y f_j era un coloreo válido de C_j).
Concluyo entonces que f es un coloreo válido de G pero que usa menos de k colores, Abs! G era k-cromático.

G color crítico $\Rightarrow$ todo vértice de G tiene grado mayor o igual a k - 1

Sea G color crítico y k-cromático.
Por absurdo, supongo que existe v vértice de G tal que $d(v) < k-1$.
Como G es color crítico, $\chi(G-v) = k-1$, por lo tanto existe un coloreo f' de $G-v$ que usa a lo sumo los colores $1, \ldots, k-1$.
Como v tiene menos de $k-1$ adyacentes en G, existe algún color c de f' que ningún adyacente tiene. [1]
Si me logro armar un coloreo de todo G coloreando a v con c y el resto de los nodos igual que en f' estaría coloreando G con menos de k colores. Defino f de la siguiente manera:

$$f(u) = \begin{cases} c & \text{si } u = v \\ f'(u) & \text{si } u \neq v \end{cases}$$

Como todos los nodos son v o no lo son, entonces f colorea todo G. Además f está definida usando los colores de f' y c (que también era color de f') entonces usa $k-1$ colores. Quiero ver si f es un coloreo válido de G.

Si $(u,w) \in$ E(G) entonces hay dos casos:

Caso 1: Si $u = v$, $w \neq v$, entonces por [1] sé que $f(u) = c \neq f'(w) = f(w)$ (porque v es adyacente a w).

Caso 2: Si $u, w \neq v$, entonces $f(u) = f'(u) \neq f'(w) = f(w)$ porque $u, w \in G-v$ y f' era válido en $G-v$.

Concluyo entonces que f es un coloreo válido de G que usa menos de k colores. Abs! G es k-cromático.

G color crítico $\Rightarrow$ G no tiene puntos de corte

Sea G color crítico y k-cromático.
Por absurdo, supongo que existe v vértice de G tal que v es punto de corte. Entonces, existen $C_1, C_2, \ldots, C_q$ componentes conexas de $G-v$ ($q \geq 2$).
Me construyo unos subgrafos de G que son cada componente conexa de $G-v$ unida a v. Formalmente, $D_i = C_i + v$ $\forall i = 1, \ldots, q$.

Caso 1: Si existe D_i tal que $\chi(D_i) = k$ entonces como D_i es un subgrafo inducido propio de G (pues hay otras componentes conexas), G no es color crítico. Abs! G era color crítico

Caso 2: Si $\forall D_i$, $\chi(D_i) < k$ entonces existen f_i coloreo de D_i usando algunos de los colores 1, …, $k-1$ para todo $i = 1, \ldots, q$ y tal que $f_i(v) = 1$ (por **Lema V**).
Ahora puedo colorear todo G de la manera que coloreé cada D_i porque el único nodo que comparten es v y tiene el mismo color en todos los f_i. Defino f coloreo de G de la siguiente manera:

$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ f_i(u) & \text{si } u \in C_i \end{cases}$$

Como todos los nodos son v o están en algún C_i, entonces f colorea todo G. Además f está definida usando los colores de los f_i y 1 (que también era color de los f_i) entonces usa menos de k colores. Quiero ver si f es un coloreo válido de G.

Si $(u,w) \in$ E(G) entonces hay dos casos:

Caso 1: Si $u = v$, $w \neq v$ ($w \in D_j$ para algún j), entonces sé que $f(u) = f(v) = 1 \neq f_j(w) = f(w)$ (porque v es adyacente a w en D_j, v tenía color 1 en f_j y f_j era válido para D_j).

Caso 2: Si $u, w \neq v$, entonces $u, w \in C_j$ (para algún j), es decir, están en la misma componente conexa luego de sacar v de G, porque sino no habría un eje entre ellos. Luego $f(u) = f_j(u) \neq f_j(w) = f(w)$ porque $u, w \in C_j \subset D_j$ y f_j era válido en D_j.

Concluyo entonces que f es un coloreo válido de G que usa menos de k colores. Abs! G es k-cromático.