Grafos

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Grafos

Definiciones:

- Un **grafo** $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de **puntos** o **nodos** o **vértices** y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V.
- Los elementos de X se llaman **aristas**, **ejes** o **arcos**.
- Dados v y $w \in V$, si $e = (v, w) \in X$ se dice que v y w son **adyacentes** y que e es **incidente** a v y w.

Notación: $n = |V|$ y $m = |X|$

Multigrafos y seudografos

Definiciones:

- Un **multigrafo** es un grafo en el que puede haber varias aristas entre el mismo par de vértices distintos.

- Un **seudografo** es un grafo en el que puede haber varias aristas entre cada par de vértices y también puede haber aristas (*loops*) que unan a un vértice con sí mismo.

Definiciones de acuerdo a la nomenclatura de F. Harary, *Graph Theory*.

Grafos

Definiciones:

- El **grado** de un vértice v es la cantidad de aristas incidentes a v.

  Notación: $d(v)$ es el grado de v.

Grafos

Definiciones:

- El **grado** de un vértice v es la cantidad de aristas incidentes a v.

  Notación: $d(v)$ es el grado de v.

Teorema. La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual a 2 veces el número de aristas, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Grafos

Definiciones:

- Un grafo se dice **completo** si todos los vértices son adyacentes entre sí.

  Notación: K_n es el grafo completo de n vértices.

- Dado un grafo $G = (V, X)$, el grafo **complemento** tiene el mismo conjunto de vértices y un par de vértices son adyacentes si y solo si no son adyacentes en G.

  Notación: $\bar{G}$ es el grafo complemento de G.

Grafos

Definiciones:

- Un grafo se dice **completo** si todos los vértices son adyacentes entre sí.

  Notación: K_n es el grafo completo de n vértices.

- Dado un grafo $G = (V, X)$, el grafo **complemento** tiene el mismo conjunto de vértices y un par de vértices son adyacentes si y solo si no son adyacentes en G.

  Notación: $\bar{G}$ es el grafo complemento de G.

¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de n vértices?

Grafos

Definiciones:

- Un grafo se dice **completo** si todos los vértices son adyacentes entre sí.

  Notación: K_n es el grafo completo de n vértices.

- Dado un grafo $G = (V, X)$, el grafo **complemento** tiene el mismo conjunto de vértices y un par de vértices son adyacentes si y solo si no son adyacentes en G.

  Notación: $\bar{G}$ es el grafo complemento de G.

¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de n vértices?

Si G tiene n vértices y m aristas, ¿cuántas aristas tiene $\bar{G}$?

Caminos y circuitos

Definiciones:

- Un **camino** en un grafo es una sucesión de aristas $e_1 e_2 \dots e_k$ tal que un extremo de e_i coincide con uno de e_{i-1} y el otro con uno de e_{i+1} para $i = 2, \dots, k-1$.
- Un **camino simple** es un camino que no pasa dos veces por el mismo vértice.
- Un **circuito** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.
- Un **circuito simple** es un circuito de 3 o más vértices que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Distancia

Definiciones:

- La **longitud** de un camino es la cantidad de aristas que tiene ese camino.
- La **distancia** entre dos vértices v y w de un grafo se define como la longitud del camino más corto entre v y w.

  Notación: $d(v, w)$ denota la distancia entre v y w.
- Para todo vértice v, $d(v, v) = 0$.
- Si no existe camino entre v y w se dice que $d(v, w) = \infty$.

Proposición. Si un camino P entre v y w tiene longitud $d(v, w)$, P debe ser un camino simple.

Distancia

Proposición. La función de distancia cumple las siguientes propiedades para todo u, v, w pertenecientes a V:

- $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Distancia

Proposición. La función de distancia cumple las siguientes propiedades para todo u, v, w pertenecientes a V:

- $d(u,v) \geq 0$ y $d(u,v) = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $d(u,v) = d(v,u)$.
- $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

Proposición. Si P es un camino entre u y v de longitud $d(u,v)$ y $z, w \in P$, entonces P_{zw} es un camino entre z y w de longitud $d(z,w)$, donde P_{zw} es el subcamino de P entre z y w.

Subgrafos

Definiciones:

- Un grafo se dice **conexo** si existe un camino entre todo par de vértices.
- Dado un grafo $G = (V, X)$, un **subgrafo** de G es un grafo $H = (V', X')$ tal que $V' \subseteq V$ y $X' \subseteq X \cap (V' \times V')$.
- Un subgrafo $H = (V', X')$ de $G = (V, X)$, es un **subgrafo inducido** si para todo par de vértices u, $v \in V'$, $(u, v) \in X \iff (u, v) \in X'$.
- Una **componente conexa** de un grafo G es un subgrafo conexo maximal de G.

Grafos bipartitos

Definiciones:

- Un grafo $G = (V, X)$ se dice **bipartito** si existe una partición V_1, V_2 del conjunto de vértices V (es decir,

  1. $V = V_1 \cup V_2$,
  2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
  3. $V_1 \neq \emptyset$,
  4. $V_2 \neq \emptyset$)

  tal que todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2.

- Un grafo bipartito con partición V_1, V_2, es **bipartito completo** si todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2.

Grafos bipartitos

Definiciones:

- Un grafo $G = (V, X)$ se dice **bipartito** si existe una partición V_1, V_2 del conjunto de vértices V (es decir,

  1. $V = V_1 \cup V_2$,
  2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
  3. $V_1 \neq \emptyset$,
  4. $V_2 \neq \emptyset$)

  tal que todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2.

- Un grafo bipartito con partición V_1, V_2, es **bipartito completo** si todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2.

Teorema. Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene circuitos simples de longitud impar.

Isomorfismo

Definición:

- Dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ se dicen **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : V \to V'$ tal que para todo v, $w \in V$:
$$(v, w) \in X \iff (f(v), f(w)) \in X'.$$

Isomorfismo

Proposición. Si dos grafos son isomorfos, entonces

- tienen el mismo número de vértices,
- tienen el mismo número de aristas,
- para todo k, $0 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado k,
- tienen el mismo número de componentes conexas,
- para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.

Isomorfismo

¿Es cierta la recíproca de esta propiedad?

¿Hay condiciones necesarias y suficientes fácilmente verificables para ver si dos grafos son isomorfos?

Representación de grafos

Representación de grafos en la computadora

- Matrices
- Listas

Representación de grafos

Matriz de adyacencia de un grafo

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde los elementos a_{ij} de A se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene una arista entre los vértices } i \text{ y } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Representación de grafos

Matriz de incidencia de un grafo

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, donde los elementos b_{ij} de B se definen como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } i \text{ es incidente al vértice } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Representación de grafos

Teorema. Si A es la matriz de adyacencia del grafo G, el elemento a_{ij}^k de A^k es igual a la cantidad de caminos de longitud k entre i y j.

Corolario. $a_{ii}^2 = d(v_i)$.

Digrafos

Definiciones:

- Un **grafo orientado** o **digrafo** $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X donde V es el conjunto de puntos o nodos y X es un subconjunto del conjunto de los pares **ordenados** de elementos distintos de V.

- El **grado de entrada** $d_{in}(v)$ de un nodo v de un grafo orientado es la cantidad de arcos que *llegan* a v. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como segundo elemento.

- El **grado de salida** $d_{out}(v)$ de un nodo v de un grafo orientado es la cantidad de arcos que *salen* de v. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como primer elemento.

Digrafos

Definiciones:

- Un **camino orientado** en un grafo orientado es una sucesión de arcos $e_1 e_2 \dots e_k$ tal que el primer elemento del par e_i coincide con el segundo de e_{i-1} y el segundo elemento de e_i con el primero de e_{i+1} $i = 2, \dots, k-1$.
- Un **cicuito orientado** en un grafo orientado es un camino orientado que comienza y termina en el mismo nodo.
- Un digrafo se dice **fuertemente conexo** si para todo par de nodos u, v existe un camino orientado de u a v y otro de v a u.