Discriminante de Fisher

Dadas n muestras $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de un espacio de dimensión d, las cuales pertenecen a la clase ω_1 ($\mathcal{D}_1$) o la clase ω_2 ($\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$), se trata de encontrar una proyección $\mathbf{w}$ desde ese espacio de dimensión d a un espacio unidimensional mediante la transformación

$$y = \mathbf{w}^t \mathbf{x},$$

con $\|\mathbf{w}\| = 1$, de manera tal que las muestras transformadas $y_i = \mathbf{w}^t \mathbf{x}_i$ sean fácilmente separables en $\mathcal{Y}_1$ e $\mathcal{Y}_2$ dentro de este espacio unidimensional.

Discriminante de Fisher

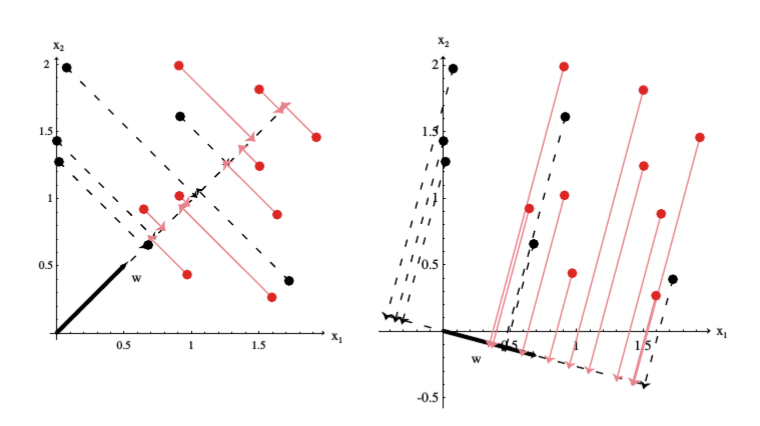

Figura : Proyección de las muestras en dos direcciones posibles.

Discriminante de Fisher

Definamos algunos vectores y matrices útiles.
La media muestral para cada clase será

$$\mathbf{m}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_i} \mathbf{x},$$

por otro lado, la media muestral de los puntos proyectados será

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{y \in \mathcal{Y}_i} y = \frac{1}{n_i} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_i} \mathbf{w}^t \mathbf{x} = \mathbf{w}^t \mathbf{m}_i.$$

La distancia entre las medias proyectadas es

$$|\tilde{m}_1 - \hat{m}_2| = |\mathbf{w}^t (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)|,$$

y se trata de encontrar la dirección $\mathbf{w}$ de manera que esta distancia sea grande respecto de las dispersiones de cada clase.

Discriminante de Fisher

Definamos la dispersión de las muestra proyectadas mediante

$$\tilde{s}_i^2 = \sum_{y \in \mathcal{Y}_i} (y - \tilde{m}_i)^2.$$

Por lo tanto, $(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2)/n$ es proporcional a la varianza de el conjunto de todos los datos.
Definimos al discriminante linear de Fisher como aquel para el cual la función

$$J(\mathbf{w}) = \frac{|\tilde{m}_1 - \hat{m}_2|^2}{\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2}$$

es máxima.

Discriminante de Fisher

Para expresar $J(\mathbf{w})$ dependiendo de $\mathbf{w}$ en forma explícita definamos las matrices de dispersión $\mathbf{S}_i$

$$\mathbf{S}_i = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^t,$$

y en base a estas, definamos la matriz de dispersión intra-clases $\mathbf{S}_W$ como

$$\mathbf{S}_W = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2,$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{s}_i^2 = \quad &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_i} (\mathbf{w}^t\mathbf{x} - \mathbf{w}^t\mathbf{m}_i)^2 \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_i} \mathbf{w}^t(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^t\mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^t\mathbf{S}_i\mathbf{w}. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2 = \mathbf{w}^t \mathbf{S}_W \mathbf{w}.$$

En el denominador de $J(\mathbf{w})$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2|^2 &= (\mathbf{w}^t \mathbf{m}_1 - \mathbf{w}^t \mathbf{m}_2)^2 \\ &= \mathbf{w}^t (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^t \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^t \mathbf{S}_B \mathbf{w}, \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{S}_B = (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^t,$$

la matriz de dispersión entre clases.

De lo anterior puede deducirse que la función criterio $J(\mathbf{w})$ puede expresarse como

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^t \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^t \mathbf{S}_W \mathbf{w}}.$$

Discriminante de Fisher

Para hallar la dirección (dada por el vector $\mathbf{w}$) que maximiza esta función podemos ver que

$$\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \propto (\mathbf{w}^t S_B \mathbf{w}) 2 S_W \mathbf{w} - (\mathbf{w}^t S_B \mathbf{w}) 2 S_B \mathbf{w},$$

igualando a cero lo anterior tenemos

$$(\mathbf{w}^t S_B \mathbf{w}) S_W \mathbf{w} = (\mathbf{w}^t S_B \mathbf{w}) S_B \mathbf{w}.$$

Como $(\mathbf{w}^t S_B \mathbf{w})$ y $(\mathbf{w}^t S_W \mathbf{w})$ son escalares, y además $S_B \mathbf{w}$ da como resultado un vector en la dirección $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$, entonces, de la anterior tenemos que

$$\mathbf{w} \propto S_W^{-1} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2).$$

De aquí se vé que, si la matriz de dispersión intraclase S_W es isotrópica, o sea, proporcional a la matriz identidad, entonces el vector $\mathbf{w}$ posee la dirección que une los centros de las clases.