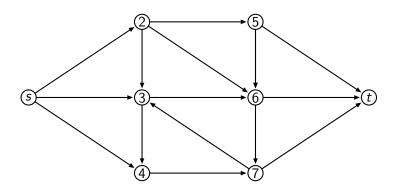
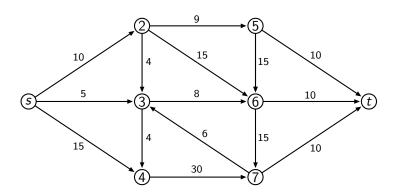
Algoritmos y Estructuras de Datos III

#### **Definiciones:**

- ▶ Una red N = (V, X) es un grafo orientado conexo que tiene dos nodos distinguidos una fuente s, con grado de salida positivo y un sumidero t, con grado de entrada positivo.
- ▶ Una función de capacidades en la red es una función  $c: X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ .





#### **Definiciones:**

- ▶ Un **flujo factible** en una red N = (V, X) con función de capacidad c, es una función  $f : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$  que verifica:
  - 1.  $0 \le f(e) \le c(e)$  para todo arco  $e \in X$ .
  - 2. Ley de conservación de flujo:

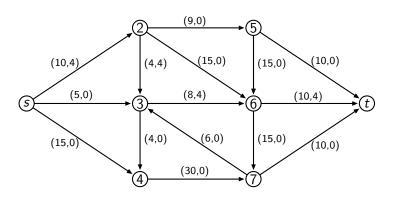
$$\sum_{e \in \mathit{In}(v)} f(e) = \sum_{e \in \mathit{Out}(v)} f(e)$$

para todo nodo  $v \in V \setminus \{s, t\}$ , donde

$$In(v) = \{e \in X, e = (w \rightarrow v), w \in V\}$$
$$Out(v) = \{e \in X, e = (v \rightarrow w), w \in V\}$$

▶ El valor del flujo es  $F = \sum_{e \in In(t)} f(e) - \sum_{e \in Out(t)} f(e)$ .





**Problema:** Determinar el flujo de valor máximo F que se puede definir en una red N = (V, X).

#### **Definiciones:**

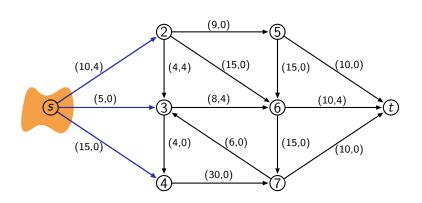
- ▶ Un **corte** en la red N = (V, X) es un subconjunto  $S \subseteq V \setminus \{t\}$ , tal que  $s \in S$ .
- ▶ Dados  $S, T \subseteq V$ ,  $ST = \{(u \rightarrow v) \in X : u \in S \text{ y } v \in T\}$

**Proposición:** Sea f un flujo definido en una red N = (V, X) y sea S un corte, entonces

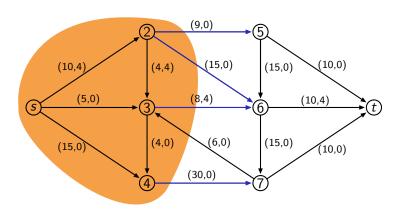
$$F = \sum_{e \in S\bar{S}} f(e) - \sum_{e \in \bar{S}S} f(e)$$

donde  $\bar{S} = V \setminus S$ .

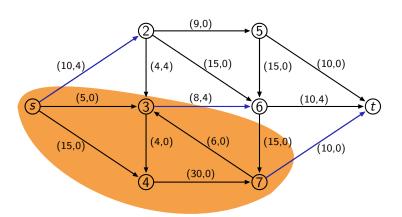












**Definición:** La capacidad de un corte S se define como

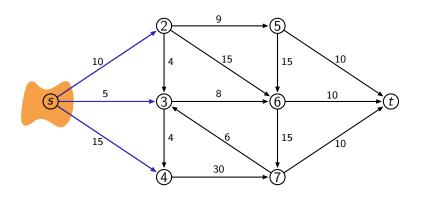
$$c(S) = \sum_{e \in S\bar{S}} c(e).$$

**Lema:** Si f es una función de flujo con valor F y S es un corte en N, entonces

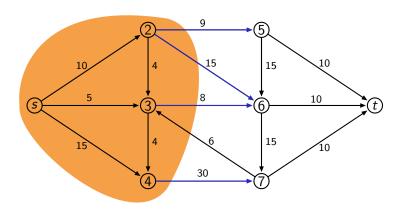
$$F \leq c(S)$$
.

**Corolario (certificado de optimalidad):** Si F es el valor de un flujo f y S un corte en N tal que F = c(S) entonces f define un flujo máximo y S un corte de capacidad mínima.

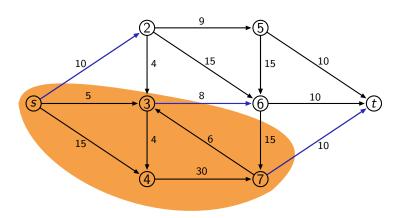
$$C = 30$$

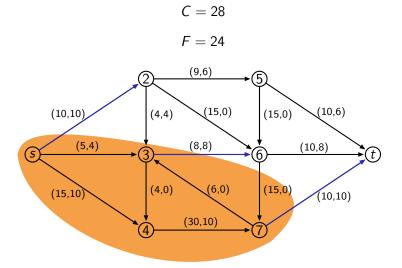


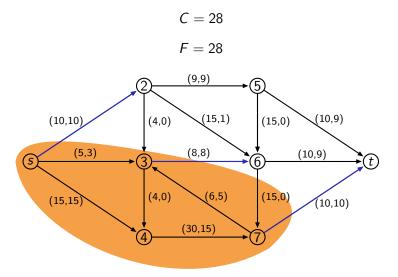
$$C = 62$$



$$C = 28$$





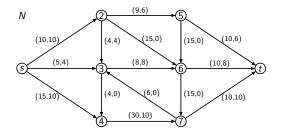


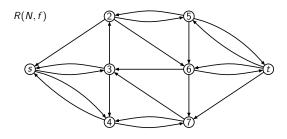
**Definiciones:** Dada una red N = (V, X) con función de capacidad c y un flujo factible f,

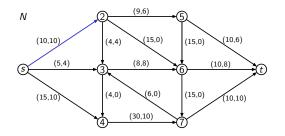
▶ Definimos la **red residual**,  $R(N, f) = (V, X_R)$  donde

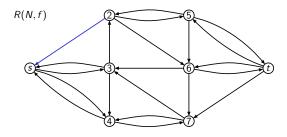
$$\forall (v \to w) \in X,$$

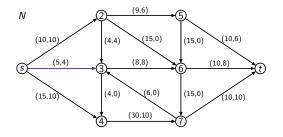
- $(v \to w) \in X_R \qquad \text{si} \qquad f((v \to w)) < c((v \to w))$
- $(w \to v) \in X_R \qquad \text{si} \qquad f((v \to w)) > 0.$
- ▶ Un **camino de aumento** es un camino orientado P de s a t en R(N, f).

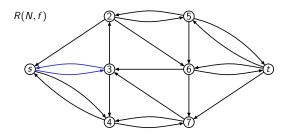


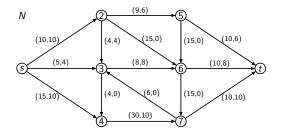


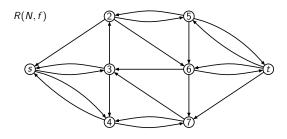


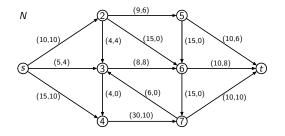


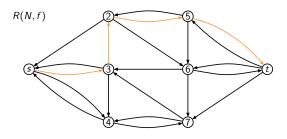












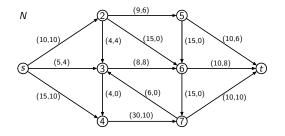
**Definiciones:** Dada una red N = (V, X) con función de capacidad c y un flujo factible f,

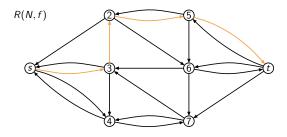
Para cada arco (v → w) en el camino de aumento P, definimos

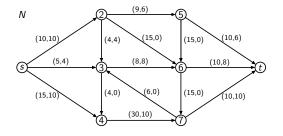
$$\Delta((v \to w)) = \begin{cases} c((v \to w)) - f((v \to w)) & \text{si } (v \to w) \in X \\ f((w \to v)) & \text{si } (w \to v) \in X \end{cases}$$

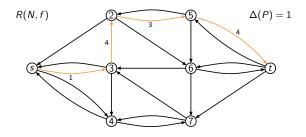
Y

$$\Delta(P) = \min_{e \in P} \{\Delta(e)\}$$









#### Flujo en Redes - Algoritmo de camino de aumento

```
Entrada: Dada una red N con función de flujo f, la red residual
R(N, f) = (V, X_R).
S := \{s\}
mientras t \notin S y \exists (v \to w) \in X_R y v \in S y w \notin S hacer
      ant(w) := v
      S := S \cup \{w\}
fin mientras
si t \notin S entonces
   retornar S corte de V
si no
   reconstruir P entre s y t usando ant a partir de t
   retornar P camino de aumento
fin si
```

#### Flujo en Redes - Algoritmo de camino de aumento

**Proposición:** El algoritmo de camino de aumento determina un camino de aumento si existe, y si no llega a incorporar a t en S es porque no hay camino de aumento.

El algoritmo de camino de aumento no dice en que orden deben incorporarse los nodos a S.

**Proposición:** Sea f un flujo definido sobre una red N con valor F y sea P un camino de aumento en R(N, f). Entonces el flujo  $\overline{f}$ , definido por

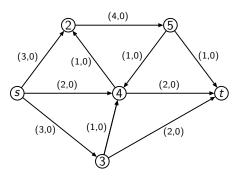
$$\bar{f}((v \to w)) = \begin{cases} f((v \to w)) & \text{si } (v \to w) \notin P \\ f((v \to w)) + \Delta(P) & \text{si } (v \to w) \in P \\ f((v \to w)) - \Delta(P) & \text{si } (w \to v) \in P \end{cases}$$

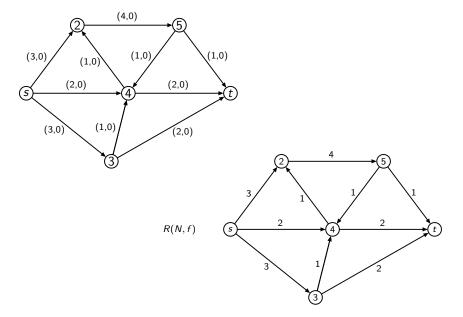
es un flujo factible sobre N con valor  $\bar{F} = F + \Delta(P)$ .

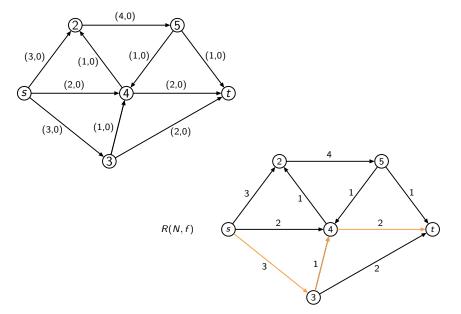
**Teorema:** Sea f un flujo definido sobre una red N. Entonces f es un flujo máximo  $\iff$  no existe camino de aumento en R(N, f).

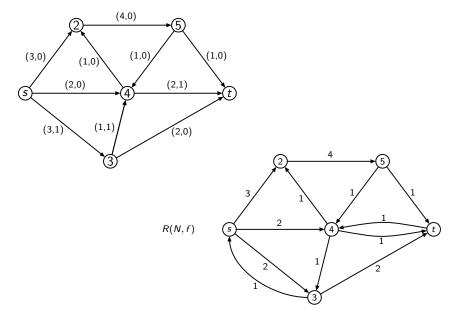
**Teorema:** Dada una red N, el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

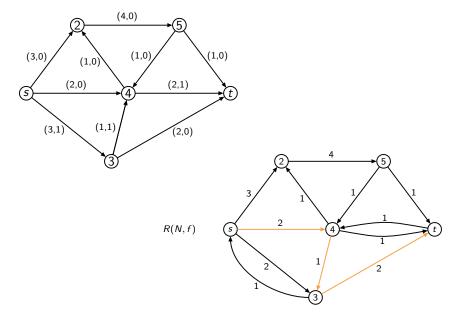
```
Entrada: Red N = (X, V) con función de capacidad c: X \to \mathbb{R}^+.
definir un flujo inicial en N
    (por ejemplo f(e) := 0 para todo e \in X)
mientras exista P := camino de aumento en R(N, f) hacer
    para cada arco (v \rightarrow w) de P hacer
       si (v \rightarrow w) \in X entonces
           f((v \rightarrow w)) := f((v \rightarrow w)) + \Delta(P)
       si no ((w \rightarrow v) \in X)
           f((w \rightarrow v)) := f((w \rightarrow v)) - \Delta(P)
       fin si
    fin para
fin mientras
```

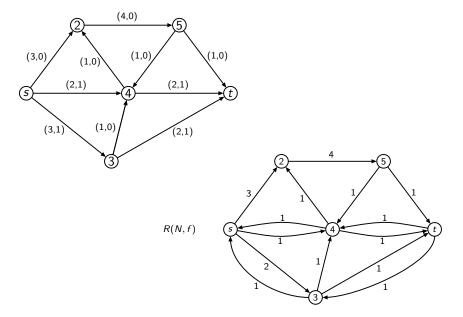


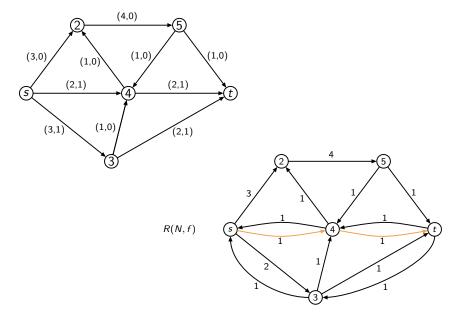


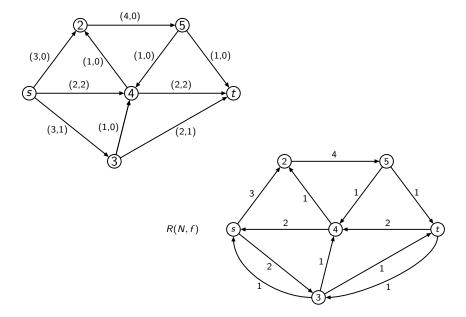


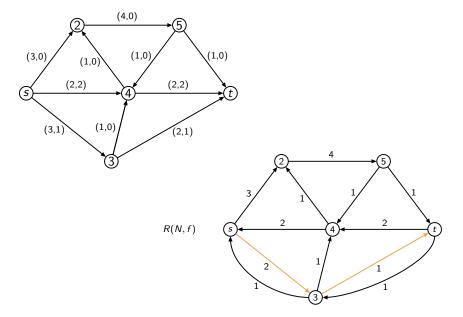


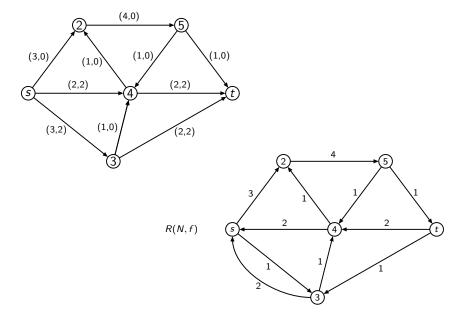


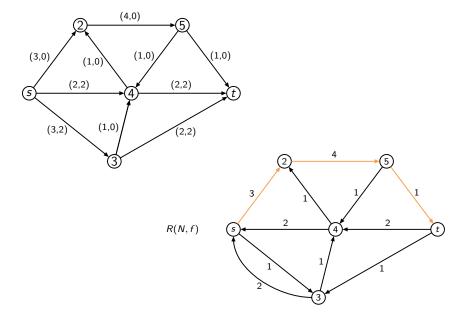


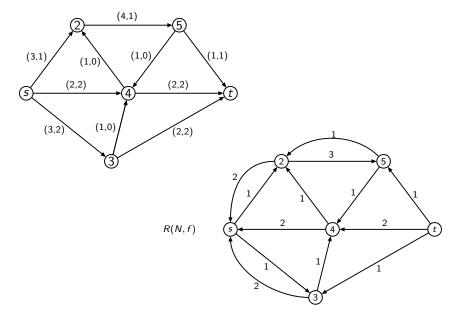


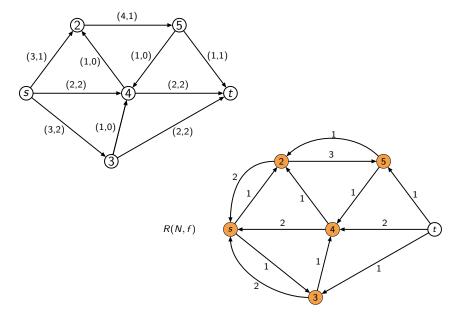












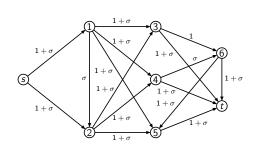
**Teorema:** Si las capacidades de los arcos de la red son enteras el problema de flujo máximo tiene un flujo máximo entero.

**Teorema:** Si los valores del flujo inicial y las capacidades de los arcos de la red son enteras el método de Ford y Fulkerson realiza a lo sumo nU iteraciones, siendo entonces  $\mathcal{O}(nmU)$ , donde U es una cota superior finita para el valor de las capacidades.

Si las capacidades o el flujo inicial son números irracionales, el método de Ford y Fulkerson puede no parar (realizar un número infinito de pasos).

Si no se especifica el orden en el que se eligen los arcos y nodos a marcar en el algoritmo de camino de aumento, el número de iteraciones puede ser no polinomial respecto del tamaño del problema.

$$\sigma = (\sqrt{5} - 1)/2$$



Iteración	Camino de aumento
6k + 1	s, 1, 2, 3, 6, t
6 <i>k</i> + 2	s, 2, 1, 3, 6, 5, t
6 <i>k</i> + 3	s, 1, 2, 4, 6, t
6 <i>k</i> + 4	s, 2, 1, 4, 6, 3, t
6 <i>k</i> + 5	s, 1, 2, 5, 6, t
6 <i>k</i> + 6	s, 2, 1, 5, 6, 4, t

## Flujo en Redes - Modificación de Edmonds y Karp

- Usa BFS en el algoritmo de camino de aumento para marcar nodos.
- ▶ La complejidad del algoritmo es  $\mathcal{O}(m^2n)$ .
- Hay otros algoritmos más eficientes (más complicados).