Inducción en grafos

Algoritmos y Estructura de Datos III

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

04 de Septiembre de 2013

Inducción básica

- Quiero probar que para todo entero positivo n, se cumple $P(n)$. Basta con ver que
  1. $P(1)$ se cumple
  2. Si $P(n-1)$ se cumple, entonces $P(n)$ se cumple
- Decimos que (1) es el caso base y (2) es el paso inductivo.
- Recordar efecto domino

Inducción fuerte

- Quiero probar que para todo entero positivo n, se cumple $P(n)$ (nuevamente)
- Necesitamos asumir algo más fuerte:
  1. $P(1)$ se cumple
  2. Si $\forall k < n\ P(k)$ se cumple, entonces $P(n)$ se cumple
- Decimos que (1) es el caso base y (2) es el paso inductivo.

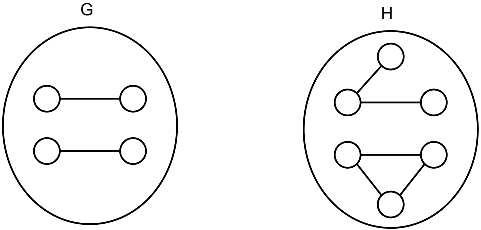
Probando cosas falsas...

Enunciado

Si todos los vértices tienen grado mayor a cero, el grafo es conexo

- Recordemos que un grafo es conexo si existe un camino entre cualquier par de vértices

Contraejemplos



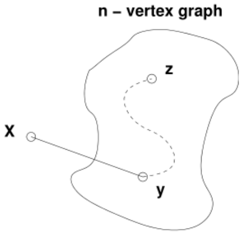
Demostración

- $P(n)$: Si cada vértice de un grafo con n vértices tiene grado mayor a cero, luego el grafo es conexo.
- Caso Base ($n \leq 2$):
  1. $P(1)$: No puede tener grado positivo, Cumple.
  2. $P(2)$: Solo un grafo que cumple tener grados positivos, K_2. Es un grafo conexo. Cumple.

Demostración: Paso Inductivo

- Debemos mostrar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \geq 2$.
- Considerar G_n tal que $\forall v \in V(G_n), d(v) > 0$ (vértices con grado mayor a cero).
- Por H.I. G_n está conectado. Agregamos el vértice x para obtener G_{n+1}.
- Para ver que G_{n+1} está conectado debemos ver que existe camino entre x y cualquier otro vértice z.

Ejemplo



- Para ver que G_{n+1} está conectado debemos ver que existe camino entre x a cualquier otro vértice z.
- Como x tiene grado positivo, existe una arista (x, y).
- Para llegar de x a z podemos usar la arista (x, y) y el camino $y - z$.
- Por lo tanto vale $P(n + 1)$.

Errores

- Cada paso es correcto, el problema es que esto no prueba $P(n+1)$.
- Para probar $P(n+1)$ debo probar que todo grafo de $n+1$ vértices (grados positivos) debe ser conexo.
- Lo que muestro es que todo grafo de $n+1$ vértices que puede ser construido agregando vértices de grado positivo a grafos conexos, es conexo.
- El error esta en suponer que todos los grafos de $n+1$ vértices pueden ser construidos usando todos los grafos de n vértices que cumplen la propiedad $P(n)$. (Ver contraejemplos)
- Para algunas propiedades puede ser cierto, pero para otras no lo es.

Evitar Errores

- Comenzar con un grafo arbitrario de $n+1$ vértices, remover un vértice, y aplicar H.I. $P(n)$ al nuevo grafo.
- Agregar nuevamente el vértice y ver que efectivamente se cumple $P(n+1)$.
- Probemos...

Evitar Errores

- Consideremos un grafo arbitrario G_{n+1}, con todos los vértices de grado positivo.
- Removemos un vértice arbitrario v
- Ahora tenemos un grafo G_n donde cada vértice tiene grado... depende los vecinos de v.
- El G_n podría tener vértices de grado 0, por lo que no podemos aplicar $P(n)$.
- Y ahora? No podemos seguir, y no hay problema con eso porque la propiedad no vale.

Problema

Enunciado

Todo G_n ($n \geq 2$) conexo tiene al menos dos vértices distintos v_1, v_2 tal que $G \setminus \{v_1\}$ y $G \setminus \{v_2\}$ son conexos.

- Recordar que si un grafo G no es conexo, entonces tiene al menos 2 componentes conexas.
- Vamos a usar Inducción en $|V(G)| = n$

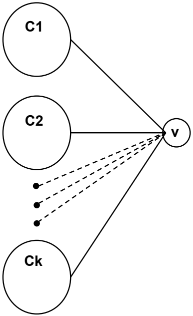
Caso Base

- P(n): Si un grafo G_n ($n \geq 2$) es conexo, entonces $\exists v_1 \neq v_2 \in V(G)$ tal que $G \setminus \{v_1\}$ y $G \setminus \{v_2\}$ son conexos.
- Si $n = 2$, y el grafo es conexo, es un K_2.
- Ver que cumple es trivial.

Paso Inductivo

- Sea G_{n+1} un grafo conexo con $n \geq 2$. Asumimos por H.I. que vale la propiedad para $G_i (i \leq n)$.
- Si: $\forall v \in V(G_{n+1})$, ocurre que $G \setminus \{v\}$ es conexo. Entonces, se cumple la propiedad para G_{n+1}.
- Sino: $\exists v \in V(G_{n+1})$ tal que $G \setminus \{v\}$ NO es conexo.
- Entonces $G \setminus \{v\}$ tiene las siguientes componentes conexas: $C_1, C_2, \ldots, C_k, (k \geq 2)$.

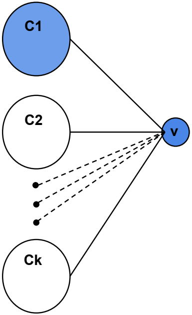
Paso Inductivo



- Entonces $G \setminus \{v\}$ tiene las siguientes componentes conexas: $C_1, C_2, \ldots, C_k, (k \geq 2)$.

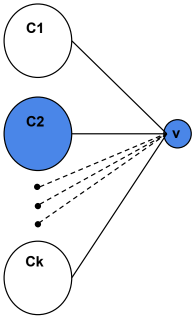
Paso Inductivo

- Definimos C'_i: $C_i \cup \{v\}$:



Paso Inductivo

- Definimos C_i': $C_i \cup \{v\}$:



- Cada C_i' es un grafo conexo con al menos dos vértices y $|V(C_i')| < n + 1$

Paso Inductivo

- Cada C'_i es un grafo conexo con al menos dos vértices, y $|V(C'_i)| < n+1$
- Por H.I. C'_1 tiene dos vértices distintos v_1, v_2 tales que $C'_1 \setminus \{v_1\}$ y $C'_1 \setminus \{v_2\}$ son conexos.
- Alguno de $\{v_1, v_2\}$ es distinto de v. Supongamos sin perdida de generalidad, $v_1 \neq v \rightarrow G_{n+1} \setminus \{v_1\}$ es conexo.
- Tengo al menos dos componentes conexas ($k \geq 2$):
- Por H.I. C'_2 tiene dos vértices distintos v_3, v_4 tales que $C'_2 \setminus \{v_3\}$ y $C'_2 \setminus \{v_4\}$ son conexos.
- Alguno de $\{v_3, v_4\}$ es distinto de v. Supongamos sin perdida de generalidad, $v_3 \neq v \rightarrow G_{n+1} \setminus \{v_3\}$ es conexo.

Paso Inductivo

- Cada C'_i es un grafo conexo con al menos dos vértices, y $|V(C'_i)| < n+1$
- Por H.I. C'_1 tiene dos vértices distintos v_1, v_2 tales que $C'_1 \setminus \{v_1\}$ y $C'_1 \setminus \{v_2\}$ son conexos.
- Alguno de $\{v_1, v_2\}$ es distinto de v. Supongamos sin perdida de generalidad, $v_1 \neq v \rightarrow$ $\boxed{G_{n+1} \setminus \{v_1\} \text{ es conexo.}}$
- Tengo al menos dos componentes conexas ($k \geq 2$):
- Por H.I. C'_2 tiene dos vértices distintos v_3, v_4 tales que $C'_2 \setminus \{v_3\}$ y $C'_2 \setminus \{v_4\}$ son conexos.
- Alguno de $\{v_3, v_4\}$ es distinto de v. Supongamos sin perdida de generalidad, $v_3 \neq v \rightarrow$ $\boxed{G_{n+1} \setminus \{v_3\} \text{ es conexo.}}$
- Encontré los vértices! Se cumple entonces $P(n+1)$

Fin

DUDAS