Matching, conjunto independiente y recubrimientos

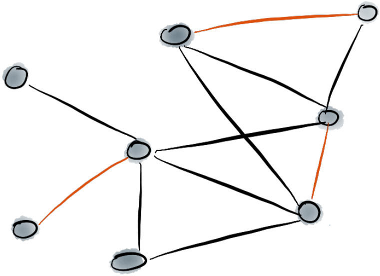
Flavia Bonomo

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Segundo cuatrimestre 2015

Matching

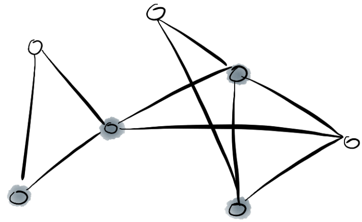
Dado un grafo $G = (V, E)$, un **matching o correspondencia** entre los vértices de G, es un conjunto $M \subseteq E$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.



La cantidad de aristas de un matching de cardinalidad máxima se denota por $\nu(G)$.

Recubrimiento de aristas por vértices

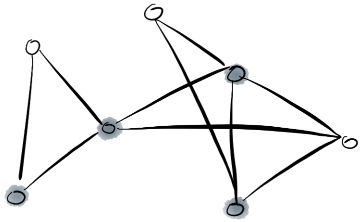
Dado un grafo $G = (V, E)$, un **recubrimiento de las aristas** de G, es un conjunto R_v de vértices tal que para todo $e \in E$, e es incidente al menos a un vértice $v \in R_v$.



La cantidad de vértices de un recubrimiento de aristas de cardinalidad mínima se denota por $\tau(G)$.

Recubrimiento de aristas por vértices

Dado un grafo $G = (V, E)$, un **recubrimiento de las aristas** de G, es un conjunto R_v de vértices tal que para todo $e \in E$, e es incidente al menos a un vértice $v \in R_v$.

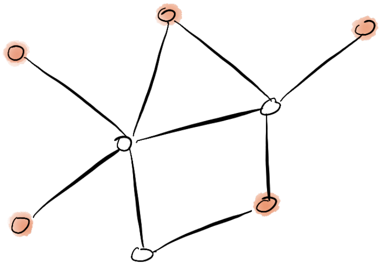


La cantidad de vértices de un recubrimiento de aristas de cardinalidad mínima se denota por $\tau(G)$.

Como no hay dos aristas de un matching que se puedan cubrir con un mismo vértice, $\tau(G) \geq \nu(G)$.

Conjunto independiente

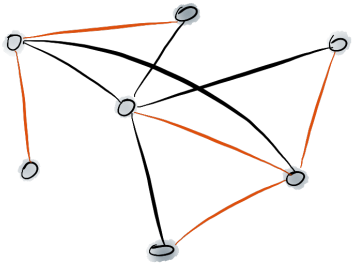
Dado un grafo $G = (V, E)$, un **conjunto independiente** de vértices de G, es un conjunto de vértices $I \in V$ tal que para toda arista $e \in E$, e es incidente a lo sumo a un vértice $v \in I$. O sea, vértices no adyacentes dos a dos.



La cantidad de vértices de un conjunto independiente de cardinalidad máxima se denota por $\alpha(G)$.

Recubrimiento de vértices por aristas

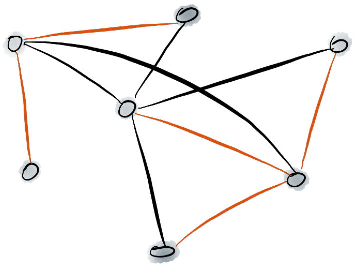
Dado un grafo $G = (V, E)$, un **recubrimiento de los vértices** de G, es un conjunto R_e de aristas tal que para todo $v \in V$, v es incidente al menos a una arista $e \in R_e$.



La cantidad de aristas de un recubrimiento de vértices de cardinalidad mínima se denota por $\rho(G)$.

Recubrimiento de vértices por aristas

Dado un grafo $G = (V, E)$, un **recubrimiento de los vértices** de G, es un conjunto R_e de aristas tal que para todo $v \in V$, v es incidente al menos a una arista $e \in R_e$.

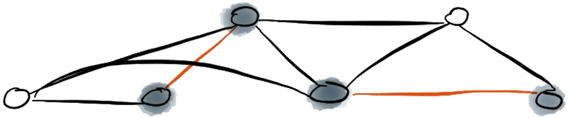


La cantidad de aristas de un recubrimiento de vértices de cardinalidad mínima se denota por $\rho(G)$.

Como no hay dos vértices de un conjunto independiente que se puedan cubrir con una misma arista, $\rho(G) \geq \alpha(G)$.

Matching máximo

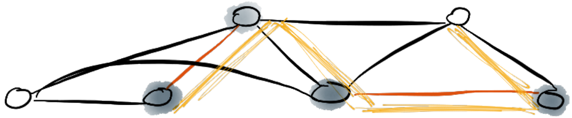
- Un vértice v se dice **saturado** por un matching M si hay una arista de M incidente a v.



Matching máximo

- Un vértice v se dice **saturado** por un matching M si hay una arista de M incidente a v.

- Dado un matching M en G, un **camino alternado** en G con respecto a M, es un camino simple donde se alternan aristas que están en M con aristas que no están en M.

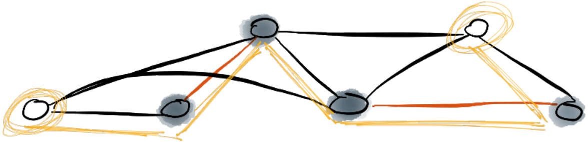


Matching máximo

- Un vértice v se dice **saturado** por un matching M si hay una arista de M incidente a v.

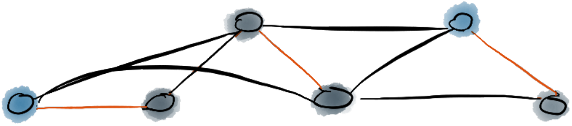
- Dado un matching M en G, un **camino alternado** en G con respecto a M, es un camino simple donde se alternan aristas que están en M con aristas que no están en M.

- Dado un matching M en G, un **camino de aumento** en G con respecto a M, es un camino alternado entre vértices no saturados por M.



Matching máximo

- Un vértice v se dice **saturado** por un matching M si hay una arista de M incidente a v.
- Dado un matching M en G, un **camino alternado** en G con respecto a M, es un camino simple donde se alternan aristas que están en M con aristas que no están en M.
- Dado un matching M en G, un **camino de aumento** en G con respecto a M, es un camino alternado entre vértices no saturados por M.



Matching máximo

Lema: Sean M_0 y M_1 dos matching en G y sea $G' = (V, E')$ con $E' = (M_0 - M_1) \cup (M_1 - M_0)$. Entonces las componentes conexas de G' son de alguno de los siguientes tipos:

- vértice aislado
- circuito simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1
- camino simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1.

Matching máximo

Lema: Sean M_0 y M_1 dos matching en G y sea $G' = (V, E')$ con $E' = (M_0 - M_1) \cup (M_1 - M_0)$. Entonces las componentes conexas de G' son de alguno de los siguientes tipos:

- vértice aislado
- circuito simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1
- camino simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1.

Hint: ¿Qué grado pueden tener los vértices de G'? En un circuito alternado, ¿puede haber más aristas de un matching que del otro?

Matching máximo

Lema: Sean M_0 y M_1 dos matching en G y sea $G' = (V, E')$ con $E' = (M_0 - M_1) \cup (M_1 - M_0)$. Entonces las componentes conexas de G' son de alguno de los siguientes tipos:

- vértice aislado
- circuito simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1
- camino simple con aristas alternadamente en M_0 y M_1.

Hint: ¿Qué grado pueden tener los vértices de G'? En un circuito alternado, ¿puede haber más aristas de un matching que del otro?

Teorema (Berge): M es un matching máximo de G si y sólo si no existe un camino de aumento en G con respecto a M.

Algoritmo de Edmonds para matching máximo

Jack Edmonds

Se basa en un teorema de Berge, y el "lema de las flores" de Edmonds (blossom lemma), que demuestra que se pueden contraer ciclos impares manteniendo ciertas propiedades relacionadas con matching máximo.

El algoritmo encuentra un matching máximo en tiempo $O(n^2 m)$.

Algoritmo de Edmonds para matching máximo

Dado un grafo H, sea $c_0(H)$ la cantidad de componentes conexas de H con número impar de vértices.
Lema (Berge): Sea M un matching de $G = (V, E)$, y $X \subseteq V$. Entonces $|M| \leq \frac{1}{2}(n - (c_0(G - X) - |X|))$.

Algoritmo de Edmonds para matching máximo

Dado un grafo H, sea $c_0(H)$ la cantidad de componentes conexas de H con número impar de vértices.
Lema (Berge): Sea M un matching de $G = (V, E)$, y $X \subseteq V$. Entonces $|M| \leq \frac{1}{2}(n - (c_0(G - X) - |X|))$.

Demo: Cada componente impar de $G - X$ que no está matcheada con X tiene por lo menos un vértice no saturado. Y podemos matchear a lo sumo $|X|$ componentes, con lo cual al menos $c_0(G - X) - |X|$ tienen vértices no saturados (al menos uno). $\square$

Algoritmo de Edmonds para matching máximo

Dado un grafo H, sea $c_0(H)$ la cantidad de componentes conexas de H con número impar de vértices.
Lema (Berge): Sea M un matching de $G = (V, E)$, y $X \subseteq V$. Entonces $|M| \leq \frac{1}{2}(n - (c_0(G - X) - |X|))$.

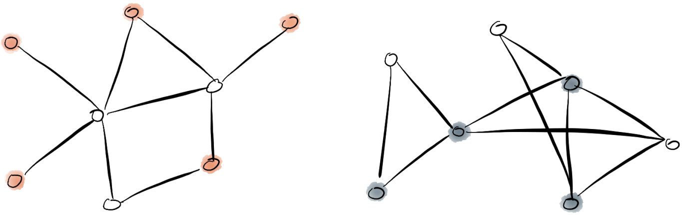
Demo: Cada componente impar de $G - X$ que no está matcheada con X tiene por lo menos un vértice no saturado. Y podemos matchear a lo sumo $|X|$ componentes, con lo cual al menos $c_0(G - X) - |X|$ tienen vértices no saturados (al menos uno). $\square$

Teorema (Berge) $\nu(G) = \min_{X \subseteq V} \frac{1}{2}(n - (c_0(G - X) - |X|))$.

Una demostración constructiva de este teorema es el propio algoritmo de Edmonds.

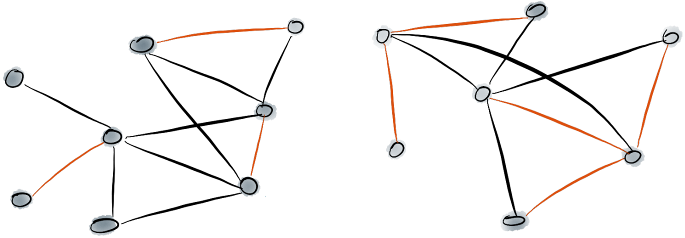
Relación entre los parámetros

Lema: $S \subseteq V$ es un conjunto independiente $\iff V \setminus S$ es un recubrimiento de aristas.



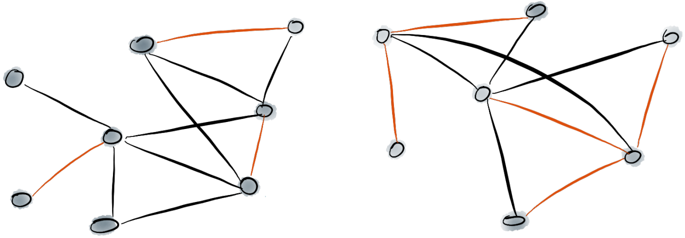
Relación entre los parámetros

Esta relación no se mantiene entre matchings y recubrimientos de vértices, como lo muestra este ejemplo:



Relación entre los parámetros

Esta relación no se mantiene entre matchings y recubrimientos de vértices, como lo muestra este ejemplo:



¿Bajo qué condiciones valdría cada una de las implicaciones?

Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G, $\alpha(G) + \tau(G) = n$.

Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G, $\alpha(G) + \tau(G) = n$.

Demo: Sale del lema anterior, que dice que $S \subseteq V$ es un conjunto independiente $\iff V \setminus S$ es un recubrimiento de aristas. $\square$

Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: $(\leq)$ Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: ($\leq$) Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

($\geq$) ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos?

$\square$

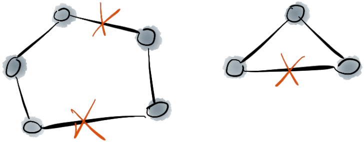
Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: ($\leq$) Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

($\geq$) ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos?

$\square$



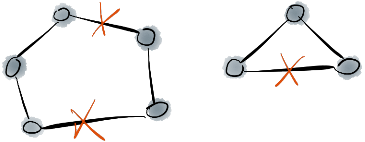
Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: ($\leq$) Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

($\geq$) ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos? ¿Puede haber caminos de 3 o más aristas?

$\square$



Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: ($\leq$) Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

($\geq$) ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos? ¿Puede haber caminos de 3 o más aristas?

$\square$

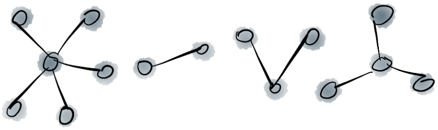
Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: ($\leq$) Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

($\geq$) ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos? ¿Puede haber caminos de 3 o más aristas?

$\square$



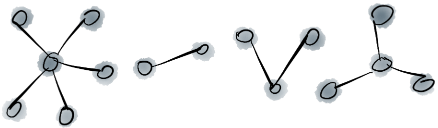
Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: ($\leq$) Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

($\geq$) ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos? ¿Puede haber caminos de 3 o más aristas? De cada una de las c estrellas puedo elegir una arista para formar un matching M:

□



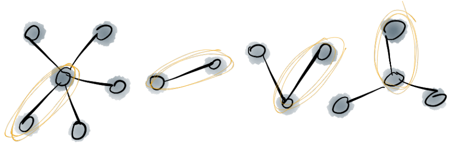
Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: $(\leq)$ Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

$(\geq)$ ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos? ¿Puede haber caminos de 3 o más aristas? De cada una de las c estrellas puedo elegir una arista para formar un matching M:

$\square$



Relación entre los parámetros

Teorema: Dado un grafo G sin vértices aislados, $\nu(G) + \rho(G) = n$.

Demo: ($\leq$) Sea M un matching máximo de G. Construimos un recubrimiento R_e con el propio M y una arista por cada uno de los $n - 2|M|$ vértices no saturados por M. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + (|M| + n - 2|M|) = n$.

($\geq$) ¿Qué forma tiene el subgrafo formado por las aristas de un recubrimiento mínimo de vértices R_e? ¿Puede haber ciclos? ¿Puede haber caminos de 3 o más aristas? De cada una de las c estrellas puedo elegir una arista para formar un matching M: $|M| = c$ y $|R_e| = n - c$. Entonces $\nu(G) + \rho(G) \geq |M| + |R_e| = n$. $\square$