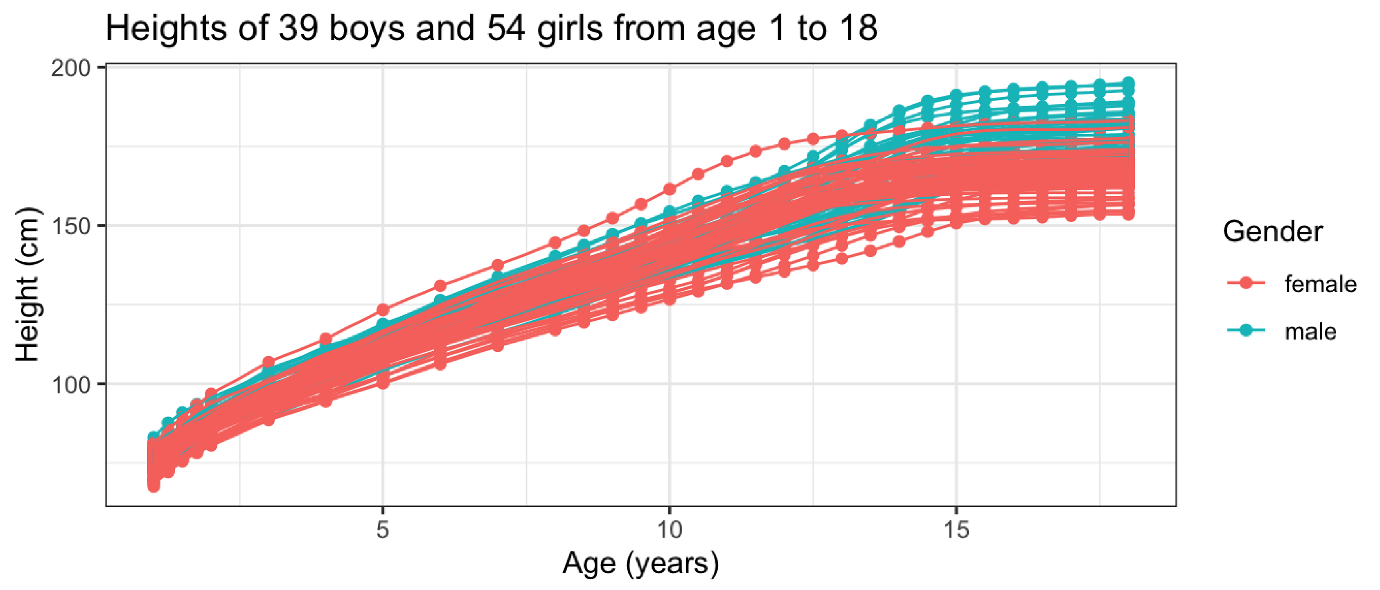
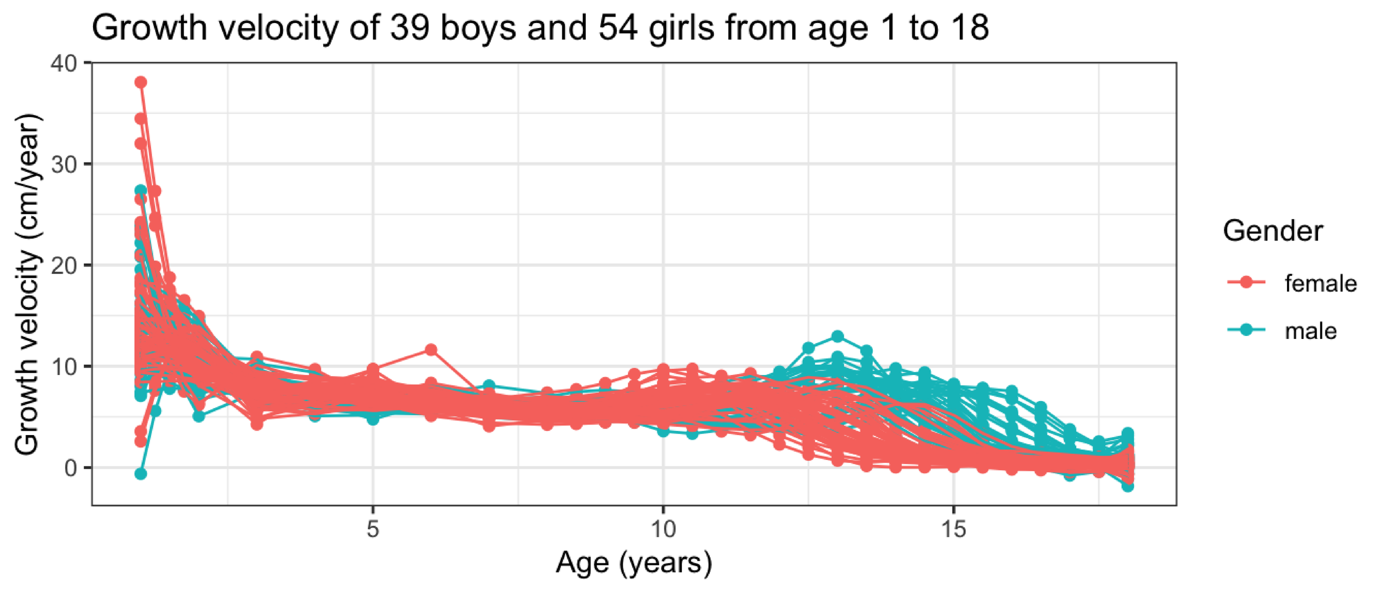
# Datos funcionales en redes neuronales

Federico Choque

## Introducción

Los datos en forma de funciones pueden provenir de diferentes fenómenos, como por ejemplo, la presión arterial medida a tiempo continuo en un intervalo de 24 horas o las curvas generadas por un electrocardiograma.




Datos de Berkeley Growth Study Data por Tuddenham y Snyder de 1954.

Se buscará adaptar varios métodos de redes neuronales para el caso de inputs sobre $\mathbb{R}^q$ al caso de inputs funcionales.

## Representación de los datos

$$\boxed{\text{Lo que tengo: } \{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{m} \rightarrow \text{Lo que quiero } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$$

Nos centraremos en el espacio de funciones $L^2$, esto permite extender muchas de las propiedades sobre distancias y productos internos de $\mathbb{R}^q$ al caso funcional. Como los datos funcionales son desconocidos en casi todo punto, se trabaja con aproximaciones en un subespacio de dimensión finita $\mathcal{A}$. Sea $\{\phi_k\}_{1\leq k\leq q}$, una base de $\mathcal{A}$, se aproxima:

$$f \quad \approx \quad \tilde{f} = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \phi_k$$

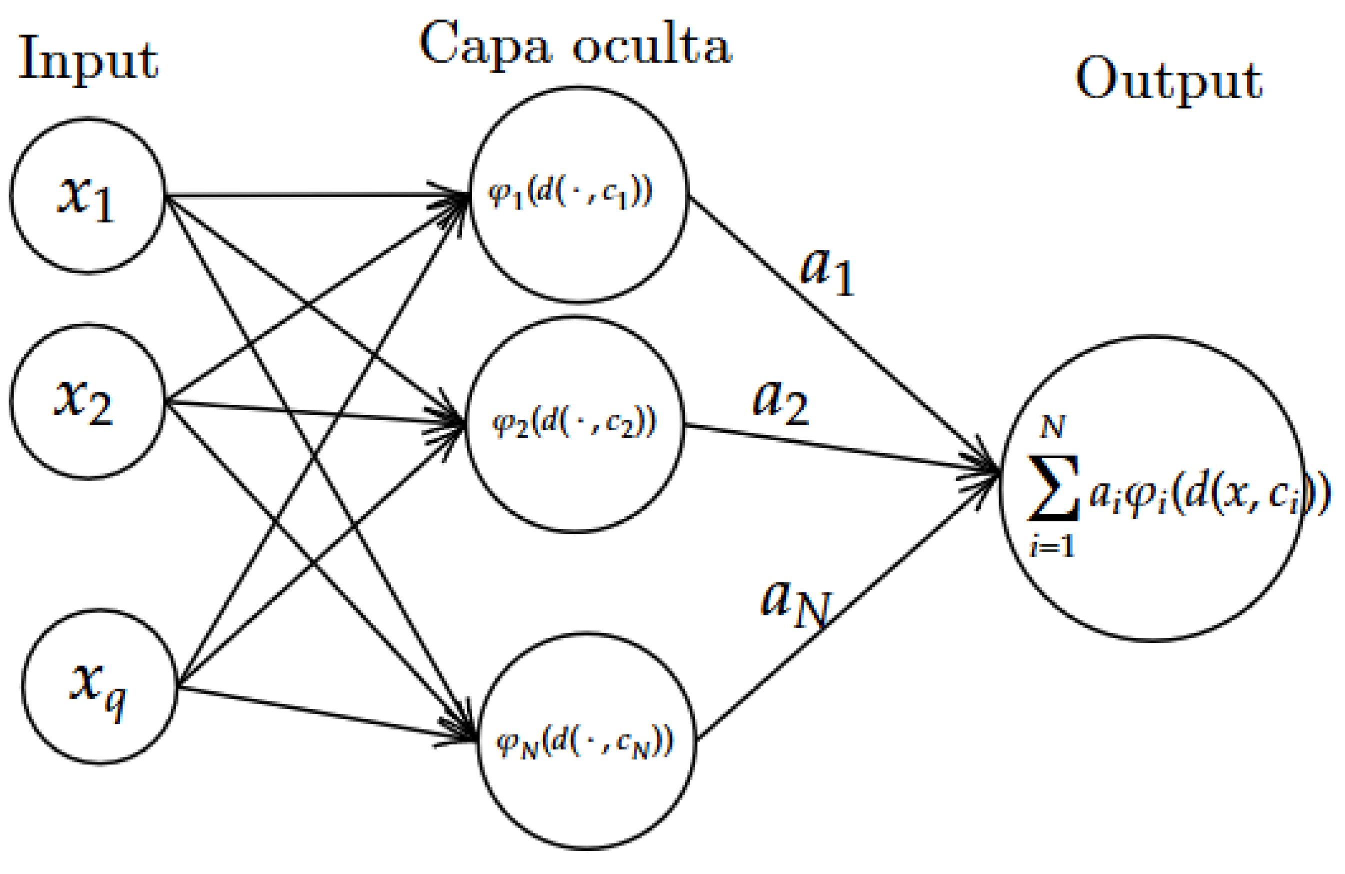
Idealmente la base usada se desea que sea **ortonormal** pues en ese caso las distancias y p.i. en $L^2$ se reducen al caso de $\mathbb{R}^q$.

$$f_1 = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \phi_k \quad \text{y} \quad f_2 = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \phi_k$$

$$\Longrightarrow \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} = \langle (\alpha_1, \ldots, \alpha_q), (\mu_1, \ldots, \mu_q) \rangle_{\mathbb{R}^q} \quad ||f_1||_{L^2} = ||(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)||_{\mathbb{R}^q}$$

## Radial basis function networks

Son redes de esta forma:




con $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{r\to\infty} \varphi_i(r) = 0$.

## Radial basis function networks

A veces aparece reescrito como

$$\sum_{i=1}^{N} a_i K_i \left( \frac{x - c_i}{\sigma_i} \right)$$

con $K_i : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{||x||\to\infty} K(x) = 0$ y $K_i(x) = K_i(y)$ para todo $x, y$ tales que $||x|| = ||y||$. Bajo ciertas condiciones las funciones generadas por la red, o sea, del conjunto

$$S_K = \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i K \left( \frac{x - c_i}{\sigma} \right) : a_i, c_i, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0, N \in \mathbb{N} \right\},$$

aproximan cualquier función $f : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$.

**Teorema 1** *Sea $K \in L^1(\mathbb{R}^q)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^q} K(x)dx \neq 0$ continua, entonces $S_K$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^q)$ con la métrica $d$ dada por*

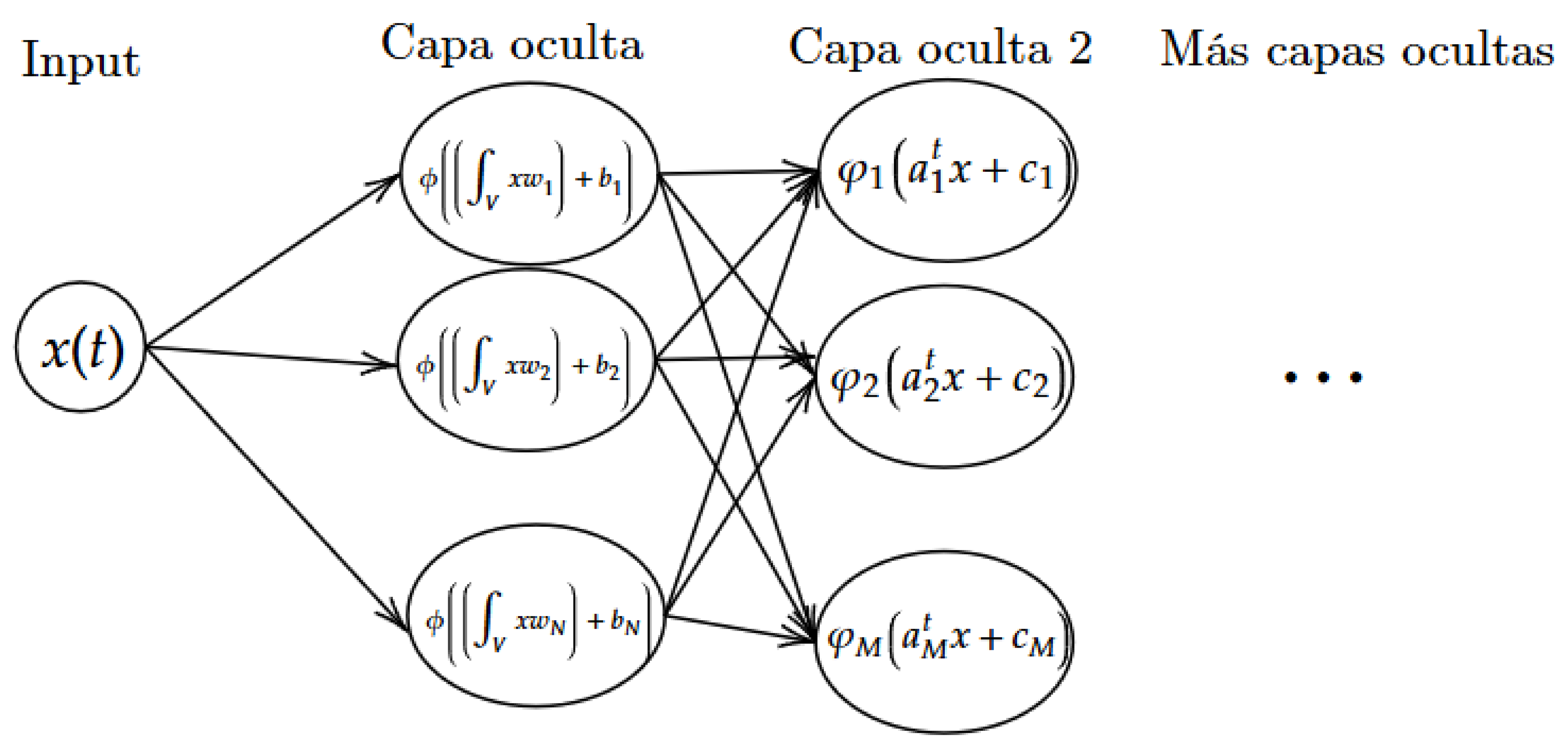
$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{||f - g||_{L^\infty([-n,n]^q)}}{1 + ||f - g||_{L^\infty([-n,n]^q)}}$$

## Multilayer perceptron

En este caso, cada neurona actúa de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{Recibe x(t)} \quad \rightarrow \quad \text{Devuelve } \phi\left(\int_V w(t)x(t)dt + b\right) \in \mathbb{R}}$$

siendo $\phi$ la función de activación de la neurona. Como el output de estas neuronas son valores numéricos, el resto de capas ocultas usan neuronas comunes.




También tienen la propiedad de ser aproximadores universales: Ciertas funciones $G$ de funciones $V \rightarrow \mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}$ son aproximables por funciones de este tipo de redes (supongamos una sola capa), o sea por aquellas en

$$S_\phi^W = \left\{ \rho(f) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi \left( \int_V w_i(t) f(t) dt + b_i \right) : w_i \in W, a_i, b_i \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Teorema 2** *Sean $p, p' \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $M$ un subconjunto denso de $L^{p'}(\mathbb{R}^q)$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrable sobre compactos, entonces para todo $K \subset L^p(\mathbb{R}^q)$ compacto, $S_\phi^M$ contiene un subconjunto denso en $C(K, \mathbb{R})$ con la métrica del supremo.*

## Referencias


- Ramsay, J., Silverman B. (1997) *Functional Data Analysis*
- Park, J., Sandberg I. (1991) *Universal Approximation Using Radial-Basis-Function Networks.*
- Rossi, F., Delannay, N., Conan-Guez, B., Verleysen M. (2004) *Representation of Functional Data in Neural Networks.*
- Rossi, F., Conan-Guez, B., Fleuret, F. (2002) *Theoretical Properties of Functional Multi Layer Perceptrons.*
- Rossi, F., Conan-Guez, B.. (2002) *Multi-Layer Perceptrons for Functional Data Analysis: a Projection Based Approach.*