TP 3: Camino mínimo y Flujo máximo

20 de Junio, 2023 Algoritmos y Estructuras de Datos III

Integrante	LU	Correo electrónico
Zaid, Pablo	869/21	pablozaid2002@gmail.com
Arienti, Federico	316/21	fa.arienti@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

http://www.exactas.uba.ar

RESUMEN

En la teoría de grafos, el problema del *camino mínimo*[1] se refiere a una serie de problemas relacionados a encontrar, para un grafo —o digrafo— $G = (V,\ E)$ con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ asociada y ciertos pares de vértices $\mathcal{C}$, un conjunto de caminos $s \rightsquigarrow t$, $(s,\ t) \in \mathcal{C}$, para los cuales la suma total del peso de sus aristas —su *distancia*— es mínima de entre todos los caminos posibles con esos extremos. En este informe, nos vamos a concentrar en la variante del problema conocida como *camino mínimo con una única fuente*, donde interesa conocer la distancia de cualquier camino mínimo entre un vértice $s \in V$ y todo el resto de los vértices $w \in V \backslash \{s\}$.

Existen diversos métodos para la resolución de este problema. Entre ellos, los algoritmos *golosos* de *Bellman-Ford* y de *Dijkstra*, que se basan en el concepto de *relajación*[2] de aristas para la construcción de una solución.

El siguiente informe evalúa el problema del *tráfico*, explicado en el próximo apartado, y lo reformula como una aplicación particular del problema de *camino mínimo con una única fuente* que aprovecha la propiedad de subestructura óptima de los caminos mínimos. Además, evalúa la eficiencia de la solución propuesta de manera empírica.

Palabras clave: *camino mínimo, algoritmo de Dijkstra.*

Índice

1. El problema del tráfico 2
1.1. Modelado como un problema de camino mínimo 2
1.2. El algoritmo 2
1.3. Demostración de correctitud 3
1.4. Complejidad temporal y espacial 4
2. Evaluación empírica 4

---

[1]Ver Thomas H. Cormen; Charles E. Leiserson; Ronald L. Rivest y Clifford Stein. Introduction to algorithms. 2009. Sección 24: *Single-source shortest paths.*

[2]Podemos pensar en el proceso de relajación como un método por el cual se mejora, sucesivamente, la cota superior de la distancia que puede tener un camino mínimo. El mismo se basa en la propiedad de desigualdad triangular: si $\delta : E \to \mathbb{R}$ denota la distancia mínima entre cualquier par de vértices en un grafo G, entonces para cualquier par de vértices s y t y arista $(u,\ t) \in E$ con $u \neq s$, $\delta(s,\ t) \leq \delta(s,\ u) + w(u,\ t)$.

1. El problema del tráfico

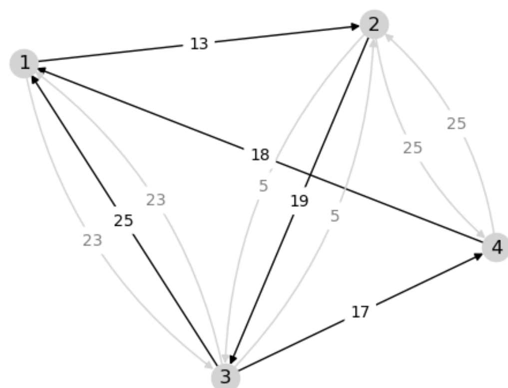
El problema del *tráfico* que consideraremos tiene la siguiente premisa. Dado una ciudad representada por un conjunto V de n puntos conectados por un conjunto E de m calles unidireccionales, dos puntos críticos s y $t \in V$, y un conjunto

$$P := \{p_1 \ldots p_k\}$$

de k calles bidireccionales candidatas, queremos saber cuál es la mínima distancia que deberemos recorrer para llegar de s a t, dado que se construya una de estas calles.

Para ello, vamos a contar con la longitud ℓ_i^c, $1 \leq i \leq m$ de cada calle en la ciudad y la longitud ℓ_j^p, $1 \leq j \leq k$ de cada calle posible a construir.

Por ejemplo, si tuvieramos la siguiente ciudad —cuyas calles candidatas están en color gris— y los puntos críticos $s = 1$ y $t = 4$



entonces podríamos construir la calle $2 \leftrightarrow 3$ con peso 5 para lograr un camino $1 \to 2 \to 3 \to 4$ con distancia mínima 35.

1.1. Modelado como un problema de camino mínimo. A partir del ejemplo anterior, vemos que el problema del *tráfico* se puede modelar de manera intuitiva como un problema de *camino minimo* en grafos: sea D el digrafo asociado a una ciudad $(V,\ E)$ y sea $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función de peso, donde $w(c_i) = \ell_i^c$, $c_i \in E$ para todo $1 \leq i \leq m$, y $w(p_i) = \ell_i^p$, $p_i \in P$ para todo $1 \leq i \leq k$. Luego, podemos resolver el problema del *tráfico* si evaluamos el camino mínimo entre s y t para cada digrafo en la sucesión

$$\{D\} \cup \{(V,\ E \cup \{e,\ \bar{e}\}) : e \in P\} \tag{1}$$

utilizando la función de peso w.

Sin embargo, esto no es eficiente. De emplear el algoritmo de *Dijkstra* con *min-heap*, la complejidad de peor caso estaría en $O(k \cdot m \log n)$. Vamos a ver cómo lo podemos mejorar.

1.2. El algoritmo. Notar primero que el camino mínimo entre dos vértices s y t satisface la propiedad de *subestructura óptima*[3]. Esto es, cada sección del camino forma, a su vez, un camino mínimo[4].

Sigue que, si $\delta_D : E \to \mathbb{R}$ es la distancia mínima entre cualquier par de vértices en un digrafo $D = (V,\ E)$ con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ que no tiene ciclos negativos, entonces

[3]Ver Cita 1, sección 16.2: *Elements of a greedy strategy.*

[4]Si no, podríamos reemplazar esta sección por otra de menor distancia, lo que es una contradicción.

para cualquier par de vértices s y t en V, para los cuales existe un camino $s \rightsquigarrow t$, y una arista $(u,\ v)$ perteneciente a este camino, $\delta_D(s,\ t) = \delta_D(s,\ u) + w(u,\ v) + \delta_D(v,\ t)$.

Vamos a demostrar en la siguiente sección que una consecuencia de esta observación es que, de agregar una arista $e = (u,\ v)$ a D con peso ℓ no negativo, entonces

$$\delta_{D+e}(s,\ t) = \text{mín}\{\delta_D(s,\ u) + \ell + \delta_D(v,\ t),\ \delta_D(s,\ t)\}. \tag{2}$$

En particular, dado que $\delta_D(s,\ t) = \delta_{D^t}(t,\ s)$[5] y que nuestro problema se restringe a pesos no negativos, estas observaciones nos permiten considerar el siguiente algoritmo.

```
proc trafico(D: (V, E), P: sec<V × V × ℝ_≥0>, w: E → ℝ_≥0, s, t: V) → ℝ_≥0:
    δ^s ← camino_minimo(D, w, s)
    δ^t ← camino_minimo(D^t, w, t)
    μ ← δ^s(t)
    para (u, v, ℓ) en P:
        γ_1 ← δ^s[u] + ℓ + δ^t[v]   // s ⇝ u → v ⇝ t
        γ_2 ← δ^s[v] + ℓ + δ^t[u]   // s ⇝ v → u ⇝ t
        μ ← min{μ, γ_1, γ_2}
    retornar μ
```

Algoritmo 1. Pseudocódigo para el problema del *tráfico*.

El mismo aplica un algoritmo de *camino mínimo con única fuente* sobre el grafo de entrada D, a partir de s, y sobre el grafo transpuesto D^t, a partir de t, para saber la distancia mínima —que se guarda en los diccionarios δ^s y δ^t— de ambos vértices a todo el resto de los vértices en el digrafo. Luego, aplica la ecuación 2 para determinar cuál es la distancia mínima entre s y t en cada par de digrafos $(D + e,\ D + \bar{e})$[6] para cada calle bidireccional e en P.

1.3. Demostración de correctitud. Dada la discusión anterior, basta demostrar que la ecuación 2 se satisface para demostrar que el algoritmo 1 encuentra la distancia del camino mínimo entre s y t dentro del conjunto de digrafos definido en la ecuación 1.

Demostración. Sea D un digrafo $D = (V,\ E)$ con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ que no tiene ciclos negativos y sea $\delta_G : E \to \mathbb{R}$ la distancia mínima entre cualquier par de vértices en un digrafo G cualquiera.

Consideremos el digrafo $D + e$, con $e = (u,\ v)$, tal que e es una arista entre dos vértices de V que no está en D y tiene peso ℓ no negativo. Si e no pertenece a ningún camino mínimo de s a t en $D + e$, sigue trivialmente que

$$\delta_{D+e}(s,\ t) = \delta_D(s,\ t)$$

ya que $D \subset D + e$. Si, en cambio, sí pertenece, entonces debe ser que

$$\delta_{D+e}(s,\ t) \leq \delta_D(s,\ t)$$

ya que, o bien e *mejora* el camino mínimo entre ambos vértices, o bien lo mantiene igual, pero no puede suceder que lo empeore. Si no, dado que cualquier camino mínimo en D está en $D + e$, el camino que contiene a e no sería mínimo.

[5] Notar que los caminos en un digrafo son *dirigidos*. Luego, las distancias son simétricas respecto al digrafo transpuesto.

[6] Esto es equivalente a considerar el digrafo $D + \{e,\ \bar{e}\}$, ya que ambas aristas no pueden pertenecer a un mismo camino. Esto se debe a que, si ambas aristas pertenecieran en simultáneo a un recorrido, entonces formarían un ciclo.

Del resultado anterior y, por la propiedad de *subestructura óptima* del camino mínimo, sigue que

$$\delta_{D+e}(s,\ t) = \begin{cases} \delta_{D+e}(s,\ u) + \ell + \delta_{D+e}(v,\ t) & \text{si } e \in\ C_{st}(D+e) \\ \delta_D(s,\ t) & \text{si no} \end{cases} \tag{3}$$

donde $C_{st} \subset D + e$ es el subgrafo de caminos mínimos entre s y t.

Dado que cualquier camino mínimo de s a u y cualquier camino mínimo de v a t en $D+e$ no puede contener a la arista e —ya que, si no, se formaría un ciclo—, podemos concluir que $\delta_{D+e}(s,\ u) = \delta_D(s,\ u)$ y $\delta_{D+e}(v,\ t) = \delta_D(v,\ t)$. En particular, sigue que la ecuación 3, es equivalente a

$$\delta_{D+e}(s,\ t) = \text{mín}\{\delta_D(s,\ u) + \ell + \delta_D(v,\ t),\ \delta_D(s,\ t)\}.$$

□

1.4. Complejidad temporal y espacial. El algoritmo `trafico` depende casi exclusivamente de la implementación de *camino mínimo* que utilicemos. Dado que el peso de las aristas es no negativo, la mejor[7] complejidad que podemos lograr corresponde a utilizar el algoritmo de *Dijkstra* sobre una estructura de *fibonacci-heap*, cuyo costo espacial es $\Theta(n)$ y cuyo costo temporal es $\Theta(m + n \log n)$[8]. Luego, nuestro problema resultaría en una complejidad temporal en $\Theta(k + m + n \log n)$, correspondiente a la construcción del digrafo de entrada y su transpuesta, dos invocaciones de *camino mínimo* y las k iteración del ciclo que comienza en la línea 5. El costo temporal estaría en $\Theta(m + n)$, correspondiente a las estructuras de los digrafos y el costo espacial de *camino mínimo*.

2. Evaluación empírica

[7] En base a los algoritmos conocidos.

[8] Ver cita 1, sección 24.3.