DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP 3: Camino mínimo y Flujo máximo

20 de Junio, 2023 — Algoritmos y Estructuras de Datos III

Integrante	LU	Correo electrónico
Zaid, Pablo	869/21	pablozaid2002@gmail.com
Arienti, Federico	316/21	fa.arienti@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

http://www.exactas.uba.ar

RESUMEN

En la teoría de grafos, el problema del *camino mínimo*[1] se refiere a una serie de problemas relacionados a encontrar, para un grafo —o digrafo— $G = (V,\ E)$ con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ asociada y ciertos pares de vértices $\mathcal{C}$, un conjunto de caminos $s \rightsquigarrow t$, $(s,\ t) \in \mathcal{C}$, para los cuales la suma total del peso de sus aristas —su *distancia*— es mínima de entre todos los caminos posibles con esos extremos. En este informe, nos vamos a concentrar en la variante del problema conocida como *camino mínimo con una única fuente*, donde interesa conocer la distancia de cualquier camino mínimo entre un vértice $s \in V$ y todo el resto de los vértices $w \in V \backslash \{s\}$.

Existen diversos métodos para la resolución de este problema. Entre ellos, los algoritmos *golosos* de *Bellman-Ford* y de *Dijkstra*, que se basan en el concepto de *relajación*[2] de aristas para la construcción de una solución.

El siguiente informe evalúa el problema del *tráfico*, explicado en el próximo apartado, y lo reformula como una aplicación particular del problema de *camino mínimo con una única fuente* que aprovecha la propiedad de subestructura óptima de los caminos mínimos. Además, evalúa la eficiencia de la solución propuesta de manera empírica.

Palabras clave: *camino mínimo, algoritmo de Dijkstra.*

Índice

[1] Ver Thomas H. Cormen; Charles E. Leiserson; Ronald L. Rivest y Clifford Stein. Introduction to algorithms. 2009. Sección 24: *Single-source shortest paths.*

[2] Podemos pensar en el proceso de relajación como un método por el cual se mejora, sucesivamente, la cota superior de la distancia que puede tener un camino mínimo. El mismo se basa en la propiedad de desigualdad triangular: si $\delta : E \to \mathbb{R}$ denota la distancia mínima entre cualquier par de vértices en un grafo G, entonces para cualquier par de vértices s y t y arista $(u,\ t) \in E$ con $u \neq s$, $\delta(s,\ t) \leq \delta(s,\ u) + w(u,\ t)$.

1. El problema del tráfico

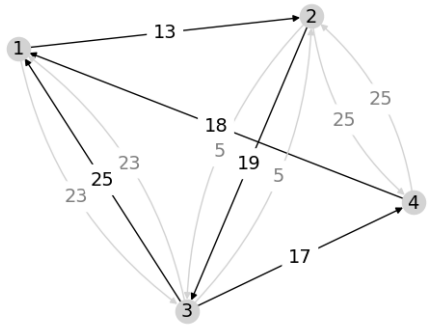
El problema del *tráfico* que consideraremos tiene la siguiente premisa. Dado una ciudad representada por un conjunto V de n puntos conectados por un conjunto E de m calles unidireccionales, dos puntos críticos s y $t \in V$, y un conjunto

$$P := \{p_1 \ ... \ p_k\}$$

de k calles bidireccionales candidatas, queremos saber cuál es la mínima distancia que deberemos recorrer para llegar de s a t, dado que se construya una de estas calles.

Para ello, vamos a contar con la longitud ℓ_i^c, $1 \leq i \leq m$ de cada calle en la ciudad y la longitud ℓ_j^p, $1 \leq j \leq k$ de cada calle posible a construir.

Por ejemplo, si tuvieramos la siguiente ciudad —cuyas calles candidatas están en color gris— y los puntos críticos $s = 1$ y $t = 4$



entonces podríamos construir la calle $2 \leftrightarrow 3$ con peso 5 para lograr un camino $1 \to 2 \to 3 \to 4$ con distancia mínima 35.

1.1. Modelado como un problema de camino mínimo. A partir del ejemplo anterior, vemos que el problema del *tráfico* se puede modelar de manera intuitiva como un problema de *camino minimo* en grafos: sea D el digrafo asociado a una ciudad $(V,\ E)$ y sea $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función de peso, donde $w(c_i) = \ell_i^c$, $c_i \in E$ para todo $1 \leq i \leq m$, y $w(p_i) = \ell_i^p$, $p_i \in P$ para todo $1 \leq i \leq k$. Luego, podemos resolver el problema del *tráfico* si evaluamos el camino mínimo entre s y t para cada digrafo en la sucesión

$$\{D\} \cup \{(V,\ E \cup \{e,\ \bar{e}\}) : e \in P\} \tag{1}$$

utilizando la función de peso w.

Sin embargo, esto no es eficiente. De emplear el algoritmo de *Dijkstra* con *min-heap*, la complejidad de peor caso estaría en $O(k \cdot m \log n)$. Vamos a ver cómo lo podemos mejorar.

1.2. El algoritmo. Notar primero que el camino mínimo entre dos vértices s y t satisface la propiedad de *subestructura óptima*[3]. Esto es, cada sección del camino forma, a su vez, un camino mínimo[4].

Sigue que, si $\delta_D : E \to \mathbb{R}$ es la distancia mínima entre cualquier par de vértices en un digrafo $D = (V,\ E)$ con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ que no tiene ciclos negativos, entonces para cualquier par de vértices s y t en V, para los cuales existe un camino $s \rightsquigarrow t$, y una arista $(u,\ v)$ perteneciente a este camino, $\delta_D(s,\ t) = \delta_D(s,\ u) + w(u,\ v) + \delta_D(v,\ t)$.

[3]Ver Cita 1, sección 16.2: *Elements of a greedy strategy.*

[4]Si no, podríamos reemplazar esta sección por otra de menor distancia, lo que es una contradicción.

Vamos a demostrar en la siguiente sección que una consecuencia de esta observación es que, de agregar una arista $e = (u,\ v)$ a D con peso ℓ no negativo, entonces

$$\delta_{D+e}(s,\ t) = \text{mín}\{\delta_D(s,\ u) + \ell + \delta_D(v,\ t),\ \delta_D(s,\ t)\}. \tag{2}$$

En particular, dado que $\delta_D(s,\ t) = \delta_{D^t}(t,\ s)$[5] y que nuestro problema se restringe a pesos no negativos, estas observaciones nos permiten considerar el siguiente algoritmo.

```
1 proc trafico(D: (V, E), P: sec< V × V × ℝ≥0 >, w: E → ℝ≥0, s, t: V) → ℝ≥0:
2     δ^s ← camino_minimo(D, w, s)
3     δ^t ← camino_minimo(D^t, w, t)
4     μ ← δ^s(t)
5     para (u, v, ℓ) en P:
6         γ1 ← δ^s[u] + ℓ + δ^t[v]   // s ⇝ u → v ⇝ t
7         γ2 ← δ^s[v] + ℓ + δ^t[u]   // s ⇝ v → u ⇝ t
8         μ ← min{μ, γ1, γ2}
9     retornar μ
```

Algoritmo 1. Pseudocódigo para el problema del *tráfico*.

El mismo aplica un algoritmo de *camino mínimo con única fuente* sobre el grafo de entrada D, a partir de s, y sobre el grafo transpuesto D^t, a partir de t, para saber la distancia mínima —que se guarda en los diccionarios δ^s y δ^t— de ambos vértices a todo el resto de los vértices en el digrafo. Luego, aplica la ecuación 2 para determinar cuál es la distancia mínima entre s y t en cada par de digrafos $(D + e,\ D + \bar{e})$[6] para cada calle bidireccional e en P.

1.3. Demostración de correctitud. Dada la discusión anterior, basta demostrar que la ecuación 2 se satisface para demostrar que el algoritmo 1 encuentra la distancia del camino mínimo entre s y t dentro del conjunto de digrafos definido en la ecuación 1.

Demostración. Sea D un digrafo $D = (V,\ E)$ con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ que no tiene ciclos negativos y sea $\delta_G : E \to \mathbb{R}$ la distancia mínima entre cualquier par de vértices en un digrafo G cualquiera.

Consideremos el digrafo $D + e$, con $e = (u,\ v)$, tal que e es una arista entre dos vértices de V que no está en D y tiene peso ℓ no negativo.

Si e no pertenece a ningún camino mínimo de s a t en $D + e$, sigue trivialmente que $\delta_{D+e}(s,\ t) = \delta_D(s,\ t)$, ya que $D \subset D + e$. Si, en cambio, sí pertenece, entonces debe ser que

$$\delta_{D+e}(s,\ t) \leq \delta_D(s,\ t)$$

ya que, o bien e *mejora* el camino mínimo entre ambos vértices, o bien lo mantiene igual, pero no puede suceder que lo empeore. Si no, dado que cualquier camino mínimo en D está en $D + e$, el camino que contiene a e no sería mínimo.

Del resultado anterior y, por la propiedad de *subestructura óptima* del camino mínimo, sigue que

$$\delta_{D+e}(s,\ t) = \begin{cases} \delta_{D+e}(s,\ u) + \ell + \delta_{D+e}(v,\ t) & \text{si } e \in\ C_{st}(D + e) \\ \delta_D(s,\ t) & \text{si no} \end{cases} \tag{3}$$

donde $C_{st} \subset D + e$ es el subgrafo de caminos mínimos entre s y t.

[5]Notar que los caminos en un digrafo son *dirigidos*. Luego, las distancias son simétricas respecto al digrafo transpuesto.

[6]Esto es equivalente a considerar el digrafo $D + \{e,\ \bar{e}\}$, ya que ambas aristas no pueden pertenecer a un mismo camino mínimo. Esto se debe a que, si ambas aristas pertenecieran en simultáneo, formarían un ciclo.

Dado que cualquier camino mínimo de s a u y cualquier camino mínimo de v a t en $D + e$ no puede contener a la arista e —ya que, si no, se formaría un ciclo—, podemos concluir que $\delta_{D+e}(s,\ u) = \delta_D(s,\ u)$ y $\delta_{D+e}(v,\ t) = \delta_D(v,\ t)$. En particular, sigue que la ecuación 3, es equivalente a

$$\delta_{D+e}(s,\ t) = \text{mín}\{\delta_D(s,\ u) + \ell + \delta_D(v,\ t),\ \delta_D(s,\ t)\}.$$

□

1.4. Complejidad temporal y espacial. El algoritmo `trafico` depende casi exclusivamente de la implementación de *camino mínimo* que utilicemos. Dado que no tenemos garantias sobre la estructura del grafo de entrada[7], más allá de que el peso de las aristas es no negativo, la mejor[8] complejidad que podemos lograr corresponde a utilizar el algoritmo de *Dijkstra* sobre una estructura de *fibonacci-heap*. El costo temporal resultante es $\Theta(k + m + n \log n)$, correspondiente a la construcción del digrafo de entrada y su transpuesta, dos invocaciones de *Dijkstra* y las k iteración del ciclo que comienza en la línea 5 del algortimo 1. Por su parte, el costo espacial es $\Theta(m + n)$, correspondiente a las estructuras de los digrafos y el costo espacial de *camino mínimo*.

2. Evaluación empírica

Para revisar la diferencia en eficiencia entre distintas implementaciones de `trafico`, consideramos las siguientes versiones del algoritmo de *Dijkstra*: 1. sobre un *min-heap*, por un costo temporal en $\Theta(m \log n)$[9]; 2. utilizando un arreglo de manera *ingenua* —lo que permite actualizar la distancia a un vértice en tiempo constante, a cambio de un costo en $\Theta(n)$ para encontrar la próxima arista candidata— con complejidad $\Theta(n^2)$; y 3. utilizando un *queue*[10] "lazy" —en vez de agregar todos los nodos a la cola, estos se van colocando a medida que aparecen en la lista de adyacencia de los nodos candidatos y nunca se remueven—, por una complejidad temporal y espacial en $\Theta(m \log n)$.

Teóricamente, *ingenuo* debería ser más eficiente para instancias *densas*, mientras que los otros dos resultan especialmente buenos para entradas *ralas*. Sin embargo los tres algoritmos tienen distintos detalles de implementación que resultan interesantes de analizar empíricamente.

Para cada una, realizamos una serie de tests para medir el tiempo de ejecución en función del tamaño de la entrada. Primero, evaluamos la influencia de la "densidad" del grafo para muestras aleatorias de tamaño $n = 15{,}000$, donde dejamos variar la cantidad de aristas m en el rango 15,000 y 11,247,750 (caso completo) de a deciles. Luego, con muestras de tamaño $n = 10{,}000k$ y $m = 2n$, para cada k natural en el rango $1 \leq k \leq 10$ —para evaluar el desempeño en grafos *ralos*— y, finalmente, con muestras de tamaño $N = 10^6 k$ para cada k natural en el rango $1 \leq k \leq 10$, con $m = 2n$ —para comparar, en mayor profundidad, el desempeño en grafos ralos de *heap* y *queue*—.

Efectuamos la primer evaluación diez veces para reducir la variación de los resultados y tomamos el promedio aritmético. Para la segunda evaluación lo hicimos 100 veces, dado que los tiempos eran muy cortos.

[7]En particular, las longitudes pueden ser distintas —lo que descarta el uso de *BFS*— y el digrafo no es necesariamente acíclico —lo que descarta el uso del algoritmo de orden topológico—.

[8]En base a los algoritmos conocidos.

[9]Ver cita 1, sección 24.3.

[10]En este caso, la estructura utilizada es la *priority queue* de C++.

Dado que nos interesa evaluar distintas implementaciones de *dijkstra*, controlamos los parámetros de la función de la siguiente forma: elegimos $k = 0$, $s = 1$, $t = 2$ y definimos cada arista $x_i = (a_i,\ b_i,\ w_i)$, para todo $1 \leq i \leq M$, $0 \leq w_i \leq 1000$ y $1 \leq a_i,\ b_i \leq n$ de manera aleatoria, tal que $a_i \neq b_i$ y $(a_i,\ b_i) \neq (a_j,\ b_j)$ para todo $1 \leq i,\ j \leq m$ e $i \neq j$.

Las figuras 1 y 2 exponen los resultados de la experimentación. Los tres algoritmos parecen —empíricamente— mantener la misma complejidad, pero con distintas constantes asociadas. Nótese que, a pesar de su superioridad asintótica, *ingenuo* resulta el más lento, incluso en el caso que ilustra un grafo completo.

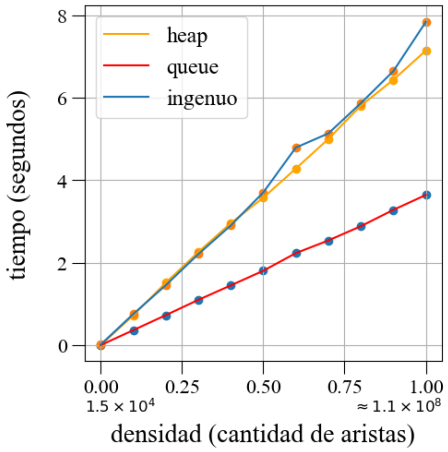


FIGURA 1. Tiempo de ejecución de `trafico` en función del porcentaje de "densidad" del grafo de entrada, con $n = 15{,}000$, para las implementaciones *ingenuo*, *heap*, y *queue*.

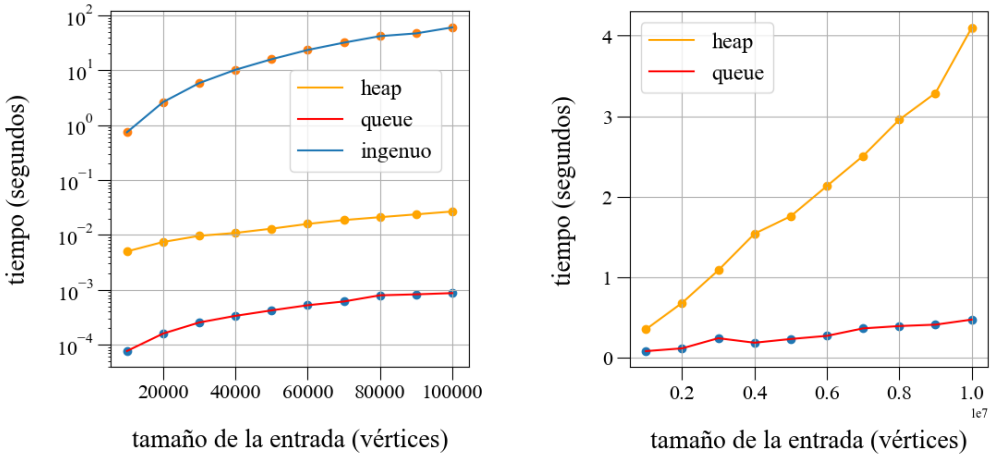


FIGURA 2. Izquierda: tiempo de ejecución de `trafico` en función del tamaño de entrada n para los algoritmos *ingenuo*, *heap*, y *queue*. Derecha: ejecución de `trafico` en función del tamaño de entrada n, con valores grandes, para *heap* y *queue*.

Por su parte, es llamativo que *queue* tenga mejor tiempo, ya que puede llegar a recorrer el mismo nodo varias veces si se ingresó a la cola en múltiples instancias. Sin embargo, consideramos que, como la estructura es parte de la biblioteca *prelude* de C++, es probable que esté bien optimizada, en comparación con *heap* que fue implementada "a mano".