TP 3: Métodos Iterativos

Noviembre 24, 2022 Métodos Numéricos

Grupo 18

Integrante	LU	Correo electrónico
Vekselman, Natán	338/21	natanvek11@gmail.com
Arienti, Federico	316/21	fa.arienti@gmail.com
Manuel Lakowsky	511/21	mlakowsky@gmail.com
Brian Kovo	1218/21	brian.ilank@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

RESUMEN

Los *métodos iterativos* representan una forma alternativa y eficiente para la resolución de sistemas lineales. Dadas las condiciones necesarias, permiten aproximar el resultado de un sistema en un orden temporal cuadrático, sin amortización. Es decir, logran una complejidad menor a la que se logra con la mayoría de los otros métodos convencionales —como lo son aquellos que requieren un paso previo de factorización—, cuyo costo no amortizado suele ser cúbico.

En este trabajo evaluaremos la eficiencia de dos métodos iterativos, el método de *Jacobi* y el método de *Gauss-Seidel*, como alternativas para la resolución del algoritmo de *PageRank* —desarrollado en el tp1— sobre una serie de casos de test. Para ello, se propondrá una posible implementación en C++ de ambos métodos y se contrastará su eficiencia con una tercera implementación basada en el método de la *eliminación gaussiana* con *sustitución inversa*.

A su vez, extenderemos éste análisis para evaluar el comportamiento de los tres métodos en función de la *densidad* del grafo de entrada, para distintas familias de redes.

Palabras clave: método de Jacobi, Gauss-Seidel, Eliminación Gaussiana, PageRank.

CONTENIDOS

1. Introducción teórica

1.1. Métodos iterativos. Los *métodos iterativos* son procedimientos que nos permiten resolver algunos sistemas de ecuaciones lineales del tipo $\mathbf{A}x = b$. Contrario a los *métodos exactos* —como la *Eliminación Gaussiana*— que obtienen el resultado en un número finito de pasos, los métodos iterativos generan una sucesión $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ que, de converger, lo hace a la solución del sistema.

Como esquema básico, dado un $x^{(0)}$ inicial, se define de manera genérica una sucesión iterativa $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$x^{(k+1)} = \mathbf{T}x^{(k)} + c \tag{1}$$

donde $\mathbf{T}$ es nuestra matriz de iteración y c es un vector. En particular, $x^{(k)}$ va a converger a la solución de un sistema particular, para cualquier vector $x^{(0)}$ inicial, si y sólo si el radio espectral de la matriz de iteración $\mathbf{T}$ es menor a 1. Es decir:

$$\rho(\mathbf{T}) = max\{|\lambda| \ : \ \lambda \ autovalor \ de \ \mathbf{T}\} \ < \ 1 \tag{2}$$

En este informe, trabajaremos con los métodos de *Jacobi* y *Gauss-Seidel* para la resolución de sistemas $\mathbf{A}x = b$. Estos descomponen a la matriz $\mathbf{A}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U} \tag{3}$$

donde $\mathbf{D}$ es la diagonal de $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$ contiene los elementos negados por debajo de la misma y $\mathbf{U}$ los elementos negados por encima. Luego, los esquemas para ambos métodos iterativos son los siguientes:

Método de Jacobi

$$x^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})x^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}b \tag{4}$$

Método de Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}x^{(k)} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}b \tag{5}$$

Se puede demostrar que, de converger, ambos métodos lo harán a una solución del sistema pedido. Requerimos adicionalmente, para su aplicación, que $\mathbf{A}$ sea una matriz sin elementos nulos en la diagonal. De lo contrario no se podrán calcular las inversas de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D} - \mathbf{L}$.

1.2. **Implementación.**

1.2.1. *Representación de matrices.*

1.2.2. *Método de Jacobi.*

1.2.3. *Método de Gauss-Seidel.*

1.2.4. *Eliminación Gaussiana.*

2. Evaluación de Convergencia

2.1. Casos de test.

3. Evaluación temporal

3.1. Casos de test.

3.2. En función de la densidad del grafo de entrada.

4. Conclusiones

5. Apéndice