A blue and white logo

Description automatically generated

Revisitando el modelo de crecimiento de Solow aumentado con capital humano

Trabajo Final

Sistemas Dinámicos

Semestre de Primavera, 2023

Docentes: Silvia Lasalle

Rodrigo Gilardoni

Federico Ariel Lopez

33144

# Introducción

La macroeconomía se suele estudiar de dos maneras. Por un lado está el estudio del corto plazo, es decir, las fluctuaciones de variables económicas que se dan en periodos relativamente breves. La inflación, el desempleo y, especialmente, el efecto de la política monetaria y fiscal sobre estos fenómenos, son el dominio de esta area. Aquella corriente “keynesiana” que, famosamente[[1]](#footnote-2), resta importancia al largo plazo se la suele enfrentar[[2]](#footnote-3) a la corriente “neoclásica.” Aquella corriente hace referencia a una supuesta eficiencia de los mercados y propone que estos se “limpian” o, dicho de otra forma, tienden a un equilibrio en el largo plazo.

Acemoglu (2009) nota que para el estudio del corto plazo hay aún mucho desacuerdo y una amplia variedad de modelos para explicar fluctuaciones, mientras que hay cierto acuerdo sobre los modelos a utilizarse para estudiar el crecimiento a largo plazo: El modelo de Solow es el fundacional de todos ellos (el modelo de Ramsey que extiende el de Solow, el modelo OLG de Diamond, crecimiento endógeno de Lucas). Fue el primer modelo que realmente parecía explicar bien las diferencias entre países y el crecimiento a largo plazo.

En este trabajo nos interesa analizar las propiedades matematicas de un sistema dinámico con dos variables en vez de una (el modelo de Solow tiene una sola variable, capital), por eso vamos a trabajar el modelo propuesto en Mankiw, Romer & Weil (1992). En este incluyen al capital humano además de los típicos determinantes de la producción, con la importante consecuencia de que la regresión ahora explica mas de ¾ de la varaición en el crecimiento de los paises. Este paper fue influyente porque hasta ese momento los análisis empíricos del modelo de Solow no se sostenían empíricamente y esa era la principal crítica elevada por sus detractores.

# El modelo

Un punto central en este modelo es la función de producción neoclásica, la cual cuenta con retornos constantes a escala y retornos marginales decrecientes a cada uno de los factores. Como es típico, usamos la función Cobb-Douglas:

Aquí K es el capital físico, H el capital humano, A es una medida de la tecnología (Total Factor Productivity) y L es la fuerza de trabajo. Los exponentes representan el retorno a acada factor y se debe cunplir tal que los retornos marginales sean decrecientes (la derivada va a ser una proporción del factor). El hecho de tener retornos constantes a escala nos permite obtener una función equivalente en términos per cápita, al dividir por y por ende cada factor individualmente no se considera función de A porque, importantemente, el crecimento tecnologico es exógeno en contraposicion a otros modelos como el de Lucas y Romer).

Denominamos estas variables de capital por unidad efectiva de trabajo con minúsculas. Nuestra función de producción es:

La idea mas importante de Solow fue pensar en el desarrollo a largo plazo del capital, es decir, su derivada. El ahorro privado es tomado como inversion en capital, entonces en el proximo periodo siempre el capital va a ser la proporcion de la producción ahorrada restado a la depreciacion de ese capital la cual se denomina . Además, como es una medida per capita, se debe contabilizar la dilución del capital entre nuevas unidades efectivas, lo cual es capturado por las tasas crecimiento de la TFP y n, crecimiento de la poblacion.

Entonces, el modelo que obtenemos es este:

## El modelo aumentado

Vamos a proceder como Mankiw, Romer & Weil asumiendo que . Distinguir la tasa de depreciacion de capital fisico y humano permite un analisis mas detallado como en Acemoglu pero por simplicidad vamos a asumir que son iguales. En la notación de sistemas dinámicos nos queda:

(Obviando que son funciones del tiempo). Buscamos la expresión de un punto de equilibrio () resolviendo . Procedo con la expresión de k, ya que luego la expresión de h es muy similar. Debemos resolver:

Es obvio a primera vista que es un punto de equilibrio. Para el análisis económico, este resultado es trivial porque implica que no hay producción en la economía, ya que el capital físico y humano son nulos. En ese punto la economía está estancada sin inversión ni trabajo, y por lo tanto, no hay crecimiento ni desarrollo. Campante, Stuzenegger & Velasco (2021) enfatizan la idea de que el crecimiento está implícito en el hecho de que son variables por unidades efectivas que las variavles K, H e Y crecen al ritmo de la población n y de la teconología g. De todas formas nos detenemos en este punto trivial luego de encontrar el otro, único punto de equilibrio. Llamo y despejo.

Análogamente, . Ahora reemplazo en la expresión de .

Distribuyo los exponentes y despejo k:

Elevo todo a la (

Y finalmente nos queda:

Similarmente obtenemos que,

Notamos que estamos trabajando con un sistema dinámico no lineal por lo que, por un lado, sabemos que puede tener más de un punto de equilibrio (en este caso, Acemoglu demuestra que este sistema en particular tiene solo dos unicos) y además podemos intentar el método de linealización. Para ello computamos la matriz jacobiana que nos va a servir para entender el comportamiento alrededor del punto de equilibtrio si los autovalores de la matriz en ese punto no son 0. El objetivo es aproximar la función no lineal usando polinomios de Taylor ya que se aproxima a la función alrededor del punto de equilibrio. La martiz es la siguiente:

Veamos el punto de equilibrio economicamente trivial. Sabemos que cerca de 0 la matriz queda simétrica:

Como es una matriz diagonal, sus autovalores son los elementos de la diagonal principal: .

Como parte de los supuestos del modelo, asumimos que las tasas de crecimiento son mayores a 0. Esto nos indicaría que el punto de equilibrio es estable y comenzando cerca del esperaríamos que el sistema llegue a ese punto, teniendo en cuenta que es una aproximación de este sistema que en realidad no es lineal. Aunque este punto es economicamente trivial, es interesante entender qué sucede con el sistema en su totalidad, luego se muestra otro analisis, grafico, de este punto.

El otro punto de equilibrio se puede analizar de la siguiente manera. Abreviando,

Sabiendo que los puntos de equilibtrio son

Vamos a reemplazar y simplificar cada uno de los elementos de la matriz jacobiana.

Despejo los términos

Coleccionando los exponentes, tenemos que

Para ;

Para ;

Para

Entonces

Para el siguiente elemento,

Para

Para ;

Para

Para el siguiente elemento,

Para ;

Para ;

Para

Para el siguiente elemento,

Para

Para ;

Para

Entonces la matriz jacobiana queda

Para obtener sus autovalores, igualamos el polinomio característico a 0.

Despejo:

Las raíces de este polinomio son:

Simplificando un poco:

En general, el sistema debe ser estable, ya que buscamos los niveles de capital en el que se equilibran a largo plazo las economías, según la teoría neoclásica. Para que el punto de equilibrio (el camino de crecimiento balanceado) sea estable, los autovalores deben ser menores a 0, es decir:

Vemos el caso . Prescindimos de ½.

Si continuamos trabajando con el supuesto estándar de que la depreciación *d* y los retornos a los factores son proporciones positivas:

Dados retornos marginales decrecientes a todo el capital, la desigualdad se cumple. Así, este autovalor es negativo siempre y cuando trabajemos con una función de producción neoclásica.

Similarmente para

Se concluye entonces que siempre converge para el punto de equilibrio de *balanced growth* si se usa una función neoclásica lo cual es esperado dados los supuestos del modelo. A continuación aplicamos valores a los parámetros que confirman la característica estacionaria y llevo a cabo interpretaciones de los resultados.

## Parámetros y datos empíricos

Baumann & Cohan en un estudio para el ministerio de economía en 2018 estimaron los parámetros fundamentales del modelo de Solow, en particular ponen el valor de en , un poco más alto que la estimación de Mankiw, Romer & Weil. El crecimiento de la población en ese momento venía siendo , relativamente bajo y en los ultimos años no ha cambiado. En cuanto al retorno total al capital fisico, Baumann & Cohan lo ponen cerca del 40%. Rezk, Mignon & Vega (2012) estiman los parámetros de un modelo aumentado y no simplemente el retorno al capital físico como hacen Baumann & Cohan. Si bien es más viejo, el retorno a las unidades de trabajo efectivas que proponen es bastante similar. Rezk, Mignon & Vega estiman que , mientras que en Baumann & Cohan es de 60%. Vamos a seguir aproximadamente la estimación en Rezk, Mignon & Vega para y .

Con respecto a la tasa de ahorro, por ahora vamos a dejar el supuesto que hacen en un principio Mankiw, Romer & Weil y también Acemoglu de un mismo nivel de ahorro para ambos capital físico y humano. El dato sale también de Baumann & Cohan que ponen la inversión privada en capital sobre PBI cerca del 20%. Comenzamos entonces con esta estimación:

Reemplazando estos valores en la función:

Y obtenemos los siguientes puntos de equilibrio:

El código adjunto calcula el punto de equilibrio y confirma este resultado. Abajo está el diagrama de fase producido en ese código para el sistema con el que estamos trabajando.

A graph of a graph

Description automatically generated with medium confidence

Lo que sugeriría es que, en el largo plazo, con los supuestos tal vez excesivos del modelo, el ratio de capital por trabajador efectivo es de 3%. Podría considerarse bajo este número lo cual se explica en lo alta que es la depreciación del capital . Con tan poca inversión en capital que elegimos (10%) es muy dificil que logre compensarse con ahorro tal depreciación. Luego estimamos otros valores del ahorro en capital físico y humano.

En cuanto al punto trivial, 0, se aprecia que los puntos que comiencen cerca y sobre los ejes convergen a él. En cuanto a , se ve claramente que converge y debería ser un punto de equilibrio asintóticamente estable.

En el gráfico están dibujadas también las trayectorias del sistema anterior. Abajo, el grafico con trayectorias desde distintos puntos iniciales. Vemos que en todos los trayectos que comienzan alrededor del punto de equilibrio tienden a él, mientras que el punto que comienza en (0.1, 0) tiende al punto de equilibrio (0,0).

A graph of arrows pointing at different directions

Description automatically generated with medium confidence

Chequeamos analíticamente que converja. Lo que esperamos es que la parte real de todos los autovalores de la matriz jacobiana sean menores a 0, de ser útil el método de linealización.

Al final del código de octave adjunto se realiza este cálculo y obtenemos los siguientes autovalores: -0.4560 y -0.7600, es decir que, efectivamente, es un punto de equilibrio estable.

Para concluir vamos a probar nuestro modelo con los datos que proveen Mankiw, Romer & Weil para comparar Argentina y Estados Unidos, modificando solamente los niveles de ahorro en capital que tenían según los datos del paper. Como vemos, el resultado puede parecer inusual, pero debemos recordar que el modelo asume niveles de ahorro perpetuamente constantes lo cual no es cierto. Precisamente esto quizás se pueda explicar porque argentina a comienzo de los 90’ atravesó el proceso de convertibilidad y estabilización de la economía, permitiendo el ahorro mientras el producto estaba comenzando a crecer luego de estar estancado. Ese nuevo shock de ahorro a una economía con poco producto podría estar haciendo que parezca que el destino a largo plazo de argentina es uno de mayor riqueza que Estados Unidos. Pero no duro más de diez años esa situación de ahorro y producción, volviendo hoy a niveles más similares a los predichos antes de 0,03 por trabajador efectivo. A la vez Estado Unidos no experimento fluctuaciones tan bruscas por lo que su camino podría asimilares un poco más al supuesto por Solow e implicaría el “verdadero” destino a largo plazo del capital en ese país. Habría que hacer un análisis mucho más detallado para comprobar estas suposiciones.

A graph of a graph of a number of points

Description automatically generated with medium confidence

# Conclusión

El enfoque de este trabajo resalta más las propiedades matemáticas de las teorías de crecimiento neoclásicas. Mankiw, Romer & Weil, al igual que Acemoglu cuando presenta este modelo, ponen la gran parte de su empeño en mostrar como sirve para mejorar el de la regresión explicando el crecimiento economico diferencial de los paises. Aquí nos centramos en el sistema dinámico que define el modelo, sus propiedades, límites y sus consecuencias. Es especialmente relevante dado que la mayor parte del trabajo se ha centrado en el modelo de Solow con una variable de capital y el análisis desde sistemas dinámicos se suele concentrar en el modelo de Ramsey, por ejemplo.

Este tipo de análisis se puede aplicar en otros como un análisis de los modelos que buscan endogeneizar ciertos componentes del modelo, como la tecnología y el ahorro (el de Ramsey o de Lucas, por ejemplo), llevando a más variables en el modelo. Este mismo sistema con capital físico y humano se ha planteado como un sistema aún más complejo, pero quizás más acertado utilizando sistemas dinámicos con *delays*. Son posibles áreas de más investigación en estos temas que pueden dar más profundidad y rigor a lo que ya se conoce sobre esos modelos.

# Bibliografía

Acemoglu, D. (2009). Introduction to Modern Economic Growth. Princeton University Press.

Baumann, I. & Cohan, L. (2018) CRECIMIENTO ECONÓMICO, PTF Y PIB POTENCIAL EN ARGENTINA. Ministerio de Hacienda

Campante, F., Sturzenegger, F., & Velasco, A. (2021). Advanced Macroeconomics: An Easy Guide. LSE Press. [https://doi.org/10.31389/lsepress.ame](https://doi.org/10.31389/lsepress.ame" \t "_new)

Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, D. A. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. The Quarterly Journal of Economics, 107(2), 407–437.

Rezk Mignon & Vega (2012) FORMACIÓN DE CAPITAL HUMANO EN ARGENTINA: CONTRIBUCIÓN AL PRODUCTON AL PRODUCTO BRUTO DOMÉSTICO. Universidad Nacional de Córdoba.

1. Keynes escribió en 1923 en A Tract on Monetary Reform “The long run is a misleading guide to current affairs. In the long run we are all dead”. [↑](#footnote-ref-2)
2. Robert J. Barro, 1989. "New Classicals and Keynesians, or the Good Guys and the Bad Guys," Swiss Journal of Economics and Statistics (SJES), Swiss Society of Economics and Statistics (SSES), vol. 125(III), pages 263-273. [↑](#footnote-ref-3)