# 2.

Considerar el sistema dinámico discreto (de dos pasos) de una variable:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **(I)** |

(a) Dar una matriz y vectores tales que el sistema de dos variables sea equivalente a **(I)**.

(b) Analizar la estabilidad del sistema dado en (a) (sin precisar condiciones sobre el vector incial .

(c) Encontrar un valor para , , tal que el comportamiento de del sistema **(I)** sea convergente. Si la respuesta se relaciona con los hecho en el ítem (b) mostrar cómo.

**RESOLUCION**

(a)

Defino , lo cual implica que .

Entonces, puedo plantear el sistema de esta manera:

Y expresarlo como una operación de matrices de la forma :

(b)

Primero, para que haya un punto de estabilidad, este tiene que cumplir que , entonces y por ende la matriz debe ser inversible para que ese sea el punto de equilibrio. De otra forma, hay infinitos o no exiten equilibrios. En este caso, por lo que es inversible y tiene un punto de equilibrio.

Ahora, hay que analizar los autovalores de la matriz *A* para averiguar si converge o no al punto de equilibrio. Igualando el polinomio caracteristico a 0.

Obtenemos que y . Como , ; el sistema es inestable y no converge al punto .

(c)

Primero, voy a buscar los autovectores de A resolviendo:

Y el segundo es:

Recuerdo que la forma funcional es , y podemos despejar

Nos interesa que el comportamiento de cuando no diverja. El caso simple es el que el vector inicial es el punto de equilibrio, .

Como estamos asumiendo que *A* es diagonalizable, entonces sus autovectores son linealmente independientes y forman una base de . Eso implica que el vector puede expresarse como combinación lineal de los autovectores.

Necesitamos que sea 0 cancele el término . De esa manera el sistema tiende a . Para hallar otros puntos que lleven la función a converger usamos que , porque es una combinacion lineal de los autovectores, pero necesitamos que , entonces buscamos los valores que cumplan esa condicion de .

Cualquier valor de cumple la condición de que converje. Buscamos valor de y .

Busco con la forumla de dos pasos:

Entonces nos queda:

Y ahora usando la combinacion de antes

Asumo para encontrar un valor particular de y , pero podría ser cualquiera.

Por un lado,

Ahora despejo

Un par de valoares para y que cumplen las condiciones pedidas son y .

# 4.

Considerar el sistema

(a) Hallar sus puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad mediante una función de Lyapunov adecuada.

(b) Mostrar que si es continua, lo hecho en (a) se aplica al modelo dinámico más general:

¿Cómo tiene que ser para que el sustema sea asintóticamente estable, estable o inestable?

**RESOLUCION**

(a) Busco los puntos de equilibrio. Estos deben cumplir: I) ; II).

I)

II)

Dado que en ese producto solamente el término *y* puede ser 0 ( es siempre positiva), entonces . Eso implica que porque dijimos que . El punto de equilibrio es .

Ahora, analizamos la estabilidad con una función de Lyapunov de la forma . Esta cumple la condición de ser estrictamente positiva excepto en el punto de equilibrio.

Dado que es siempre positivo, se cumple que para todo el dominio incluyendo el punto de equilibrio. Esto quiere decir que es asintóticamente estable.

(b)

Podemos realizar el mismo analisis con la función de Lyapunov que hicimos antes para llegar a:

A partir de esto, vemos que si el sistema es asintóticamente estable. Si el sistema es simplemente estable, ya que podria ser 0 en puntos que no son el punto de equilibrio. Por otro lado, cuando , y por el teorema de Chetaev el punto de equilibtrio es inestable.