

Esperienza 15: Misura della costante di Boltzmann

Gruppo BN

Lisa Bedini, Federico Belliardo, Marco Costa

May 21, 2017

1 Scopo dell'esperienza

Misurare la costante di Boltzmann dal rumore termico (Johnson-Nyquist) di una resistenza a temperatura nota, grazie ad un amplificatore, un filtro passa-banda e un convertitore RMS.

2 Materiale a disposizione

- INA114 Amplificatore
- AD708: OpAmp integrati
- AD736: RMS converter

Tutte le resistenze, i condensatori, le tensioni di alimentazione e la tensione in uscita dal circuito sono stati misurati con il multimetro digitale (in DC), quindi l'errore è stato propagato secondo le specifiche nel manuale ($0.8\% + 3$ digit per le resistenze, $4\% + 3$ digit per i condensatori, $0.5\% + 1$ digit per i voltaggi). I tempi e le restanti tensioni sono state misurate con i cursori dell'oscilloscopio: l'errore sui tempi è dato dalla risoluzione dei cursori stessi mentre quello sulle tensioni è stato propagato considerando solamente l'errore sul posizionamento dei cursori. E' stato trascurato l'errore sistematico del 3% dell'oscilloscopio nella misure di tensione poiché queste compaiono solo in rapporti e la componente sistematica tende a compensarsi.

3 Montaggio del circuito

3.1 Power filter

La tensione di alimentazione (positive e negative) sono state filtrate mediante circuiti passa-basso prima di fornirle agli integrati in modo da ridurne le fluttuazioni:

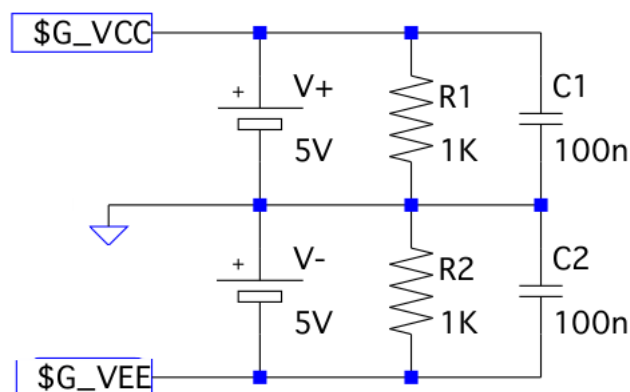


Figure 1: Filtri passa basso per le alimentazioni.

3.2 Preamplificatore

Il primo stadio di amplificazione è stato realizzato con un *Precision instrumentation amplifier* avente un guadagno atteso: $G_1 = 1 + \frac{50k\Omega}{1k\Omega} = 51$. Il secondo stadio è un semplice amplificatore invertente con guadagno teorico $G_2 = \frac{68k\Omega}{4.7k\Omega} = 14.5$. Il valore atteso dell'amplificazione complessiva è: $A_1 = 740$.

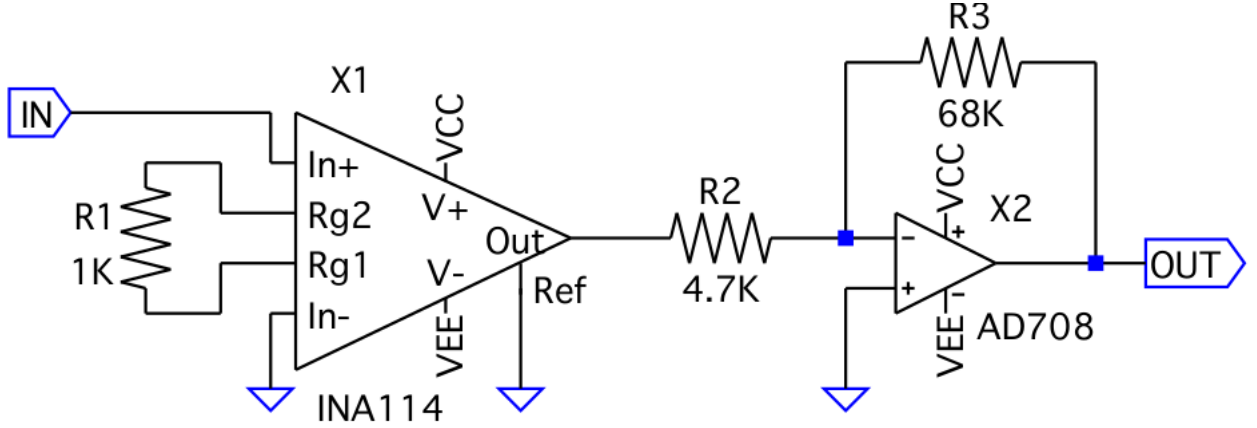


Figure 2: Preamplificatore realizzato con opAmp e INA114.

Per limitare il rumore tutte le terre si uno stesso "blocchetto" sono state collegate ai "blocchetti" adiacenti. Sono state collegate anche le due linee di terra usate in modo trasversale alla linea stessa. Il circuito è stato analizzato fornendo in ingresso con il generatore di funzioni un'onda sinusoidale di piccola ampiezza ($V_0 = 7.1 \pm 0.1\text{mV}$ picco-picco) e se ne è costruito il diagramma di Bode, come visualizzato in figura 3. Si è dunque misurata dunque l'ampiezza picco picco del segnale in uscita. L'ampiezza del segnale in ingresso è stata scelta come la più alta possibile che non mandi in saturazione l'opAmp a bassa frequenza. L'ingresso è prima dell'integrato INA114 e l'uscita dopo l'amplificatore invertente. Si è eseguito un fit (con la funzione *curve fit* di *pylab*) con la funzione di trasferimento di un integratore: $A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_t})^2}}$. Da questo si vede che il preAmp si comporta effettivamente come un filtro passa basso con una frequenza di taglio $f_t = 14 \pm 1\text{Hz}$ e un'ampiezza massima $A_{max} = 770 \pm 10$, che è maggiore di quella attesa poiché le resistenze reali hanno un valore leggermente diverso da quello di progettazione. La matrice di covarianza¹ è: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.02 & -7.00 \\ -7.00 & 167 \end{pmatrix}$. Con un $\chi^2/ndof = 114/10$.

$V_{out}(mV)$	$\Delta V_{out}(mV)$	$f(kHz)$	$\Delta f(kHz)$
5.36	0.04	0.00098	0.00001
5.36	0.04	0.0097	0.0001
5.36	0.04	0.098	0.001
5.36	0.04	0.99	0.01
5.36	0.04	3.00	0.03
5.36	0.04	5.98	0.06
4.96	0.04	10.0	0.1
4.24	0.04	14.8	0.1
3.48	0.04	20.1	0.2
2.84	0.02	25.5	0.3
1.37	0.02	49.7	0.5
0.52	0.01	100	1

Table 1: Tensioni in uscita dal preamplificatore V_{out} in funzione della frequenza f .

Per frequenze basse si vede in figura 4 che il circuito agisce da amplificatore e esegue uno sfasamento del segnale di πrad . Infatti l'integrato che funziona da passa basso aggiunge una fase nulla ma l'amplificatore è invertente. Alle alte frequenze (figura 5) l'integratore sfasa di $-\frac{\pi}{2}$, dunque lo sfasamento complessivo è $\frac{\pi}{2}$ e il segnale di uscita è anticipato.

Si vede che alle alte frequenze l'attenuazione per decade è maggiore di quella attesa di $20\frac{dB}{decade}$ questo è compatibile con la presenza di ulteriori poli che diventano importanti ad alta frequenza all'interno dell'opAmp. La deviazione dalla legge attesa (che rappresenta un andamento non solamente un errore sperimentale) è la causa del χ^2 fuori misura.

¹In tutta la relazione non si sono mai riportate le unità di misura delle entrate della matrice di covarianza, poiché sono le ovvie combinazioni delle unità in cui sono stati riportati i dati numerici: in questo caso mV e kHZ .

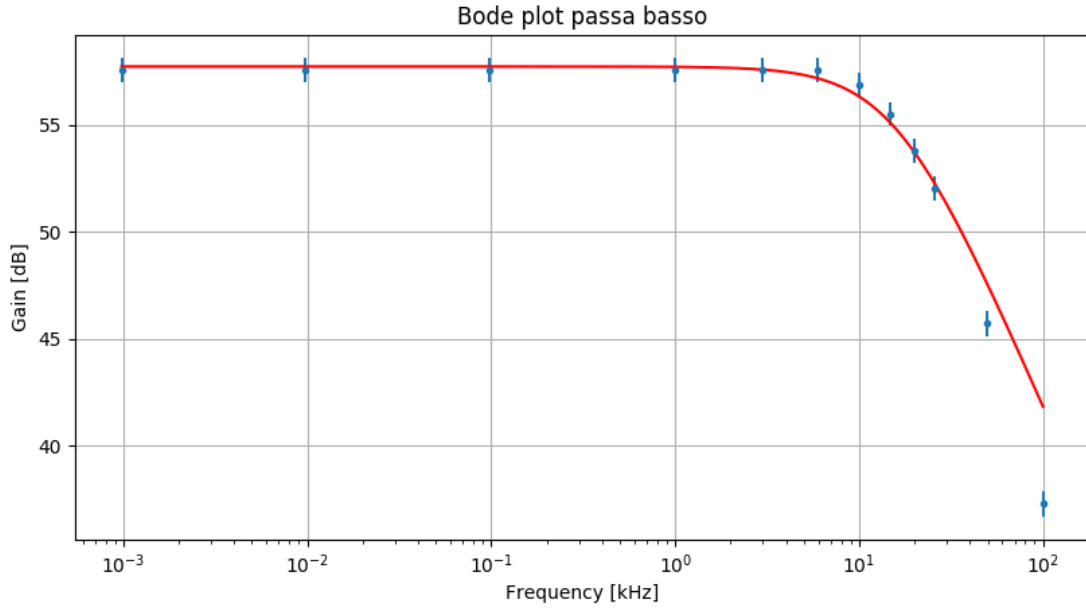


Figure 3: Diagramma di Bode del preamplificatore.

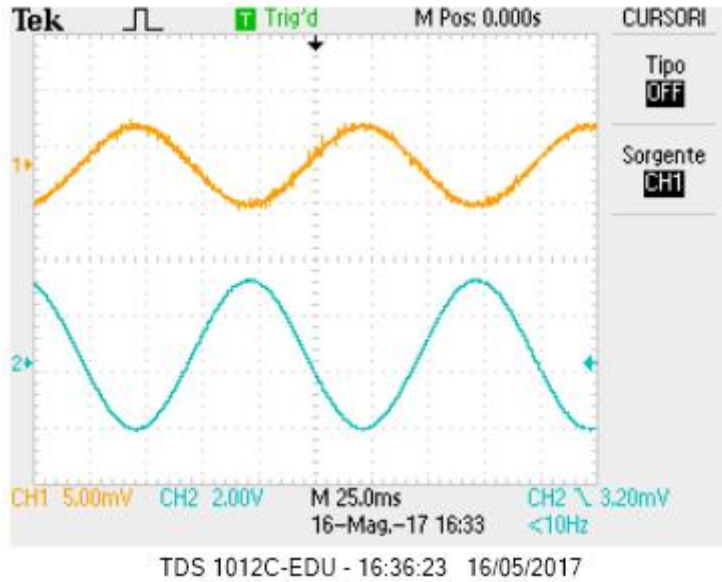


Figure 4: Onde sfasate di π rad in ingresso e uscita al preamplificatore.

3.3 Filtro passa-banda e postamplificatore

Si sono realizzati il filtro passa-banda e il postamplificatore come mostrato nelle figure.

L'analisi teorica del circuito passa-banda indica che questo ha una amplificazione massima $A_{banda} = \frac{R_3}{2R_1} = 8.7$ in corrispondenza della frequenza $f_t = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{R_3}} = 6.7 kHz$. La larghezza di banda prevista è: $\Delta f = \frac{1}{\pi R_3 C} = 667 Hz$, agli estremi della quale l'amplificazione è di 3 dB inferiore a quella di picco. Il postamplificatore ha invece un guadagno $A_{post} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 34$, come è ben noto. L'amplificazione a centro banda attesa è dunque $A_2 = A_{banda} A_{post} = 269$.

L'analisi in frequenza (e la costruzione del relativo diagramma di Bode) è stata eseguita su un segnale sinusoidale di ampiezza picco-picco $V_{in} = 28.6 \pm 0.5$. Abbiamo scelto questa ampiezza come la massima possibile che non mandi in saturazione gli opAmp. L'ingresso è prima del passabanda e l'uscita è dopo il postamplificatore.

E' stato eseguito un fit (figura 8) a tre parametri della funzione $A(\omega) = \frac{A_0 \Delta f}{\sqrt{(f^2 - f_0^2)^2 + f \Delta f}}$, ottenuta dal modello teorico con il principio della massa virtuale. Esso ha riportato come risultati: $A_0 = 235 \pm 1$, $f_0 = 6.349 \pm$

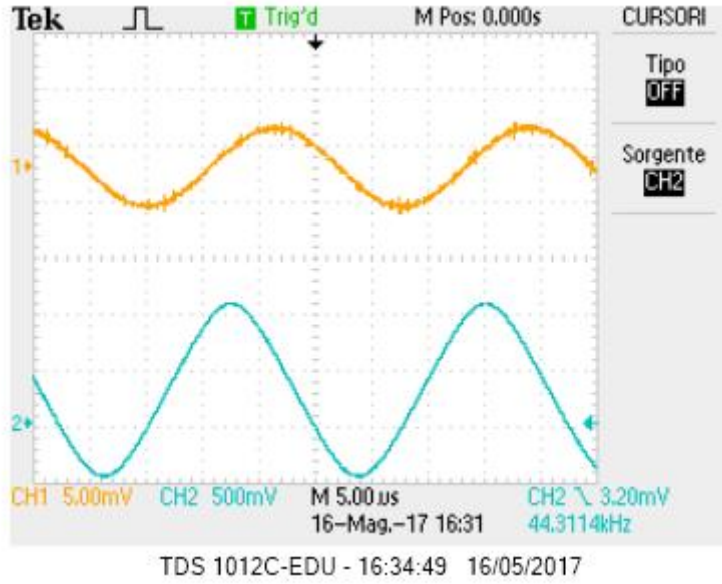


Figure 5: Onde sfasate di $\frac{\pi}{2}$ rad in ingresso e uscita al preamplificatore.

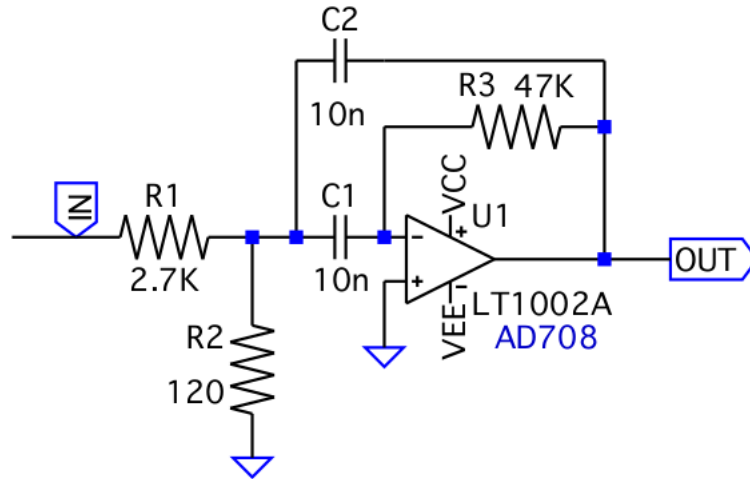


Figure 6: Filtro passa-banda realizzato con opAmp.

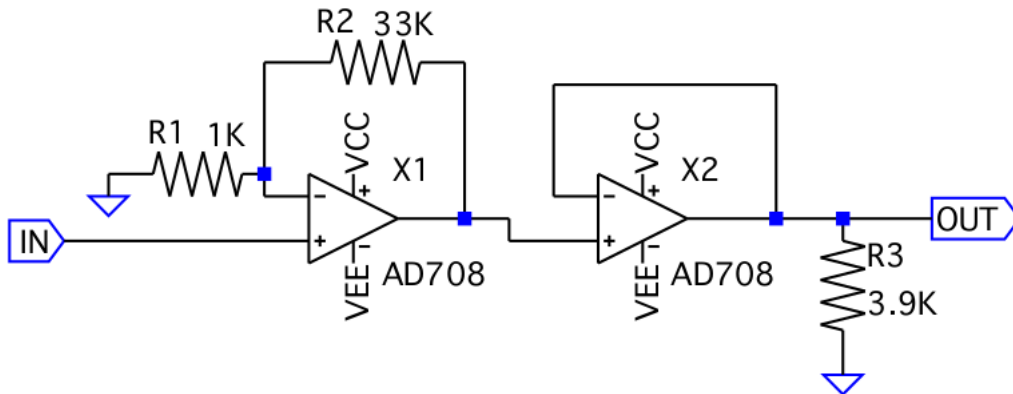


Figure 7: Postamplificatore realizzato con opAmp.

0.002kHz, $\Delta f = 638 \pm 6$ Hz. La matrice di covarianza risulta essere: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.34 & -2.93 \cdot 10^{-4} & -5.68 \cdot 10^{-3} \\ -2.93 \cdot 10^{-4} & 5.55 \cdot 10^{-4} & 1.36 \cdot 10^{-6} \\ -5.68 \cdot 10^{-3} & 1.36 \cdot 10^{-6} & 3.64 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$.

Con un $\chi^2/ndof = 136/22$.

Nuovamente il χ^2 elevato è dovuto al fatto che ad alte frequenze l'andamento è apprezzabilmente diverso da quello *fittato*.

$V_{out}(mV)$	$\Delta V_{out}(mV)$	$f(kHz)$	$\Delta f(kHz)$
0.011	0.005	0.098	0.001
0.118	0.004	1.00	0.01
0.0344	0.0005	0.300	0.003
0.160	0.004	1.31	0.01
0.19	0.01	1.59	0.02
0.340	0.008	2.50	0.03
0.564	0.008	3.50	0.04
1.03	0.02	4.60	0.05
2.48	0.04	5.60	0.06
4.40	0.08	5.99	0.06
3.06	0.08	5.75	0.06
5.92	0.08	6.18	0.06
6.48	0.08	6.43	0.06
5.56	0.08	6.58	0.07
3.80	0.08	6.83	0.07
2.92	0.04	7.05	0.07
2.38	0.08	7.25	0.07
1.88	0.04	7.50	0.07
1.37	0.02	8.00	0.08
1.07	0.02	8.54	0.09
0.90	0.01	9.02	0.09
0.66	0.01	10.0	0.1
0.097	0.001	27.6	0.3
0.28	0.04	15.2	0.1
1.41	0.02	5.00	0.05

Table 2: Tensioni in uscita dal passa banda e postamplificatore V_{out} in funzione della frequenza f .

Né l'amplificazione massima né la larghezza di banda misurate sono compatibili con quanto atteso. Questo è probabilmente dovuto a poli dell'opAmp (non idealità) che non sono ovviamente stati considerati.

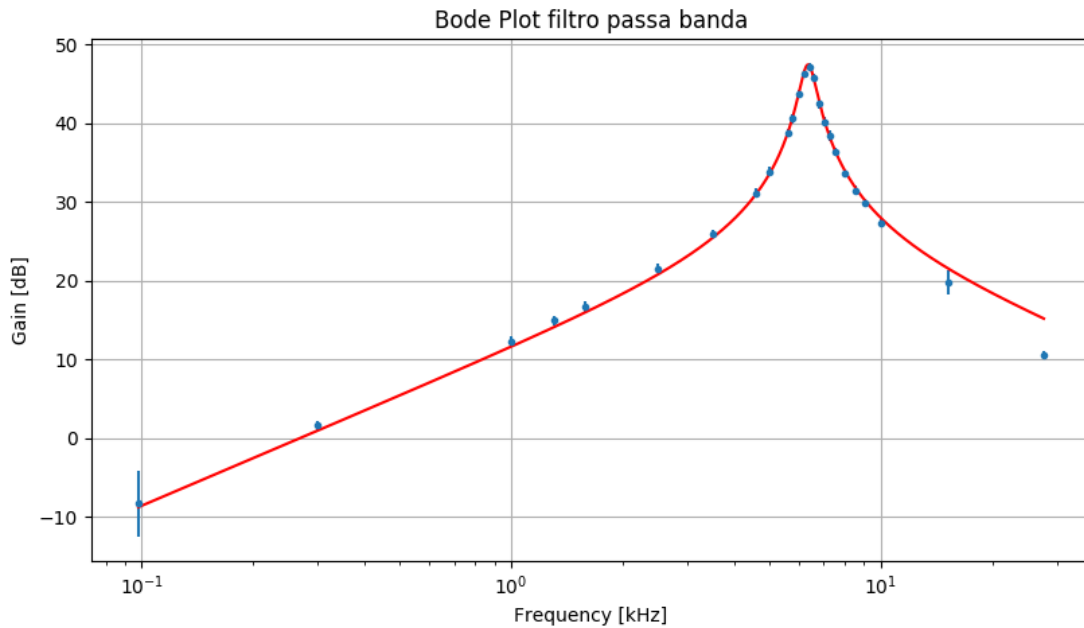


Figure 8: Fit del diagramma di Bode del circuito passa banda.

In conclusione l'amplificazione totale del circuito, ottenuta moltiplicando i guadagni di tutti gli amplificatori

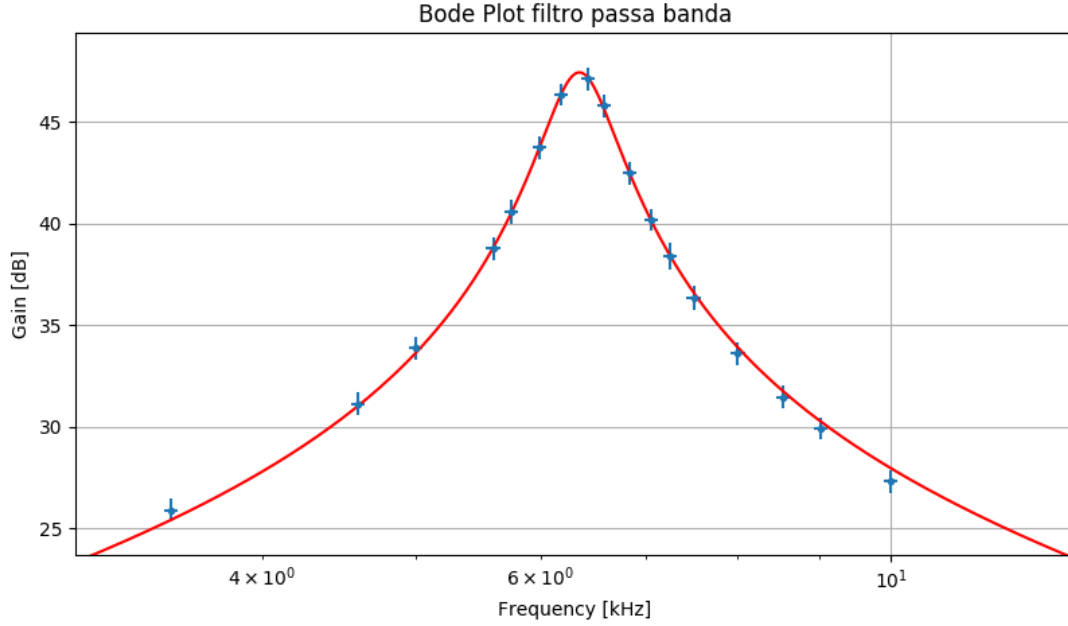


Figure 9: Dettaglio (intorno al massimo del Bode plot del passa banda).

misurati è: $A_0 = A_1 A_2 = (1.812 \pm 0.032) \cdot 10^5$, qui riportata perché usata nei calcoli seguenti.

3.4 Convertitore RMS

L'ultima parte del circuito ha lo scopo di trasformare un segnale alternato in un segnale continuo restituendone il valore quadratico medio ed è stato realizzato con l'apposito integrato nel circuito riportato in figura 10:

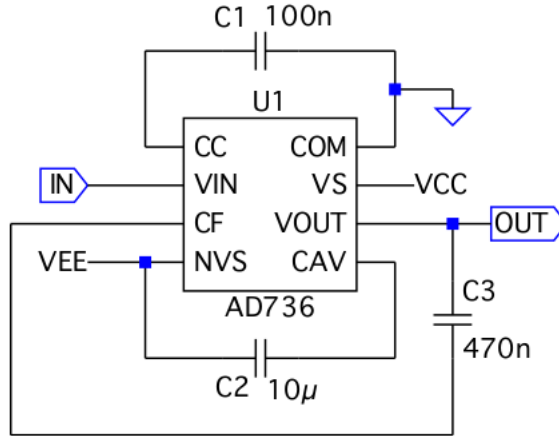


Figure 10: Circuito RMS realizzato con apposito integrato.

Inviando un segnale sinusoidale di ampiezza $V_{in} = 174 \pm 4\text{mV}$ ci aspettiamo un segnale in uscita continuo $V_{out,att} = 123 \pm 3\text{mV}$, in ottimo accordo con quello misurato $V_{out,mis} = 124 \pm 4\text{mV}$. In figura 11 si osservano il segnale in ingresso sinusoidale e il suo valore quadratico medio. Abbiamo verificato che entro il range di frequenze $500\text{Hz} - 10\text{kHz}$ il sistema funziona bene come RMS, fuori questo no. La banda passante del passabanda è ampiamente contenuta in questo range dunque questa limitazione non è un problema.

4 Misura della costante di Boltzmann

Il rumore (V_{rms}) totale è determinato dalla somma in quadratura dei rumori associati alla resistenza e quelli dovuti all'amplificatore, parametrizzati come rumori in serie e in parallelo all'amplificatore. Dalla teoria ci aspettiamo dunque: $V_{rms} = V_0 \sqrt{1 + \frac{R}{R_t} + (\frac{R}{R_n})^2}$ dove:

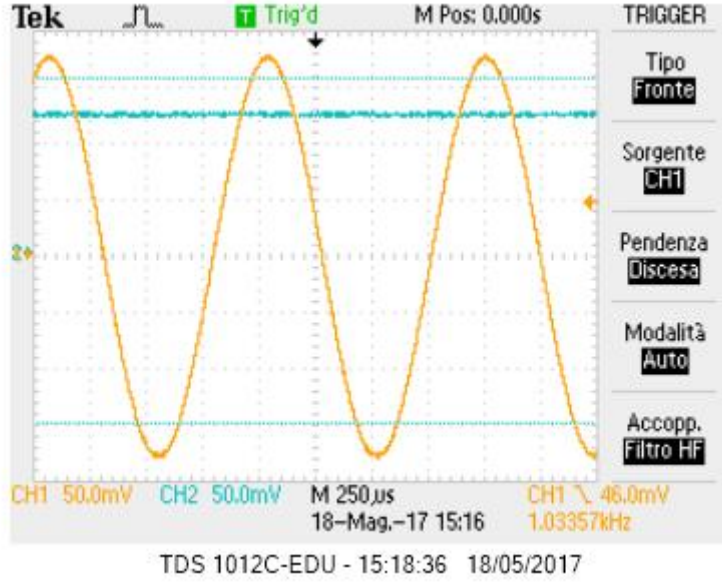


Figure 11: Verifica del funzionamento del circuito RMS.

- V_0 è il rumore in uscita a resistenza nulla (dato solo dal rumore in serie all'amplificatore)
- $R_t = \frac{V_0^2}{4k_b T A_0^2 \Delta f}$ è la resistenza equivalente del rumore in serie sull'ingresso dell'amplificatore (resistenza che genererebbe un rumore termico equivalente). Il parametro A_0 è l'amplificazione totale del circuito utilizzato (misurata), Δf è la larghezza di banda del circuito (a cui si suppone contribuisca solo il passa-banda), T è ovviamente la temperatura ambiente.
- R_n è il rapporto tra il rumore in parallelo e il rumore in serie dell'amplificatore. E' chiaro che il rumore in parallelo (a differenza del rumore in serie) è presente solamente se vi è una resistenza ai capi dell'ingresso dell'amplificatore.

Le misure sono state eseguite misurando la tensione in uscita dal convertitore RMS con il multimetro digitale. Si è visto che il RMS presentava forti oscillazioni e si è preso come errore sulla misura la semidispersione dei valori visualizzati dall'oscilloscopio e come misura la media di essi.

In tabella 3 sono riportati gli V_{rms} per un range di resistenze che va da $1.78k\Omega$ a $216k\Omega$. Per resistenze di valore superiore i dati sono risultati essere totalmente inaffidabili.

$R(k\Omega)$	$\Delta R(k\Omega)$	$V_{rms}(mV)$	$\Delta V_{rms}(mV)$
1.78	0.02	80	5
8.16	0.08	90	5
10.0	0.2	100	5
15.1	0.2	107	5
21.4	0.3	110	5
46.3	0.5	140	5
55.7	0.5	145	5
*80.8	0.7	175	10
*99.2	0.9	180	10
*118	2	215	10
*147	2	220	10
*216	3	230	10

Table 3: Misure di V_{rms} e relative resistenze.

Si è eseguito inizialmente un fit a tre parametri della funzione $V_{rms} = V_0 \sqrt{1 + \frac{R}{R_t} + (\frac{R}{R_n})^2}$. Il parametro R_n risultava tuttavia essere dell'ordine delle decine di $M\Omega$ dunque ininfluenza. In effetti R_n restituito dall'algoritmo di fit fluttuava anche di un ordine di grandezza al variare della valore iniziale dal quale si esegue la minimizzazione del χ^2 . Per questi motivi il fit è stato ripetuto a due parametri: $V_{rms} = V_0 \sqrt{1 + \frac{R}{R_t}}$. Nel successivo fit sono

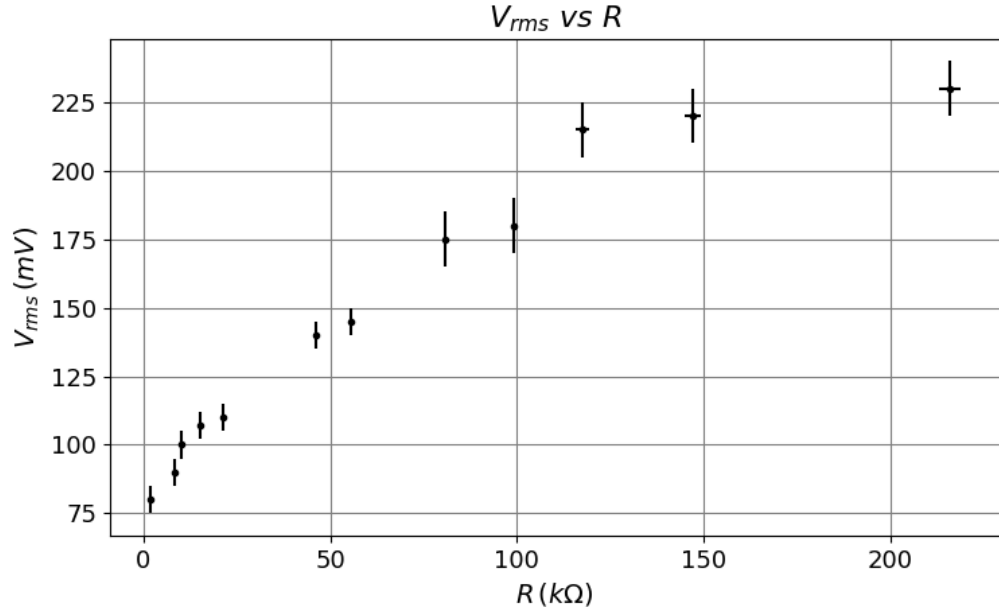


Figure 12: Plot di tutti i dati misurati V_{rms} vs R .

stati escluse le righe marcate con l'asterisco nella tabella 3 poiché affetti da fluttuazioni troppo grandi come si può vedere dagli errori².

I parametri riportati dal fit sono $V_0 = 80 \pm 3\text{mV}$ e $R_t = 23 \pm 4\text{k}\Omega$. La matrice di covarianza è: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 12.1 & 11.8 \\ 11.8 & 13.9 \end{pmatrix}$. Con un $\chi^2/ndof = 2.76/5$.

Invertendo la formula per R_t otteniamo: $k_B = \frac{V_0^2}{4R_t T A_0^2 \Delta f} = (1.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$. Gli errori più significativi che si propagano (in quadratura) in questa formula sono quelli sui parametri del fit della curva di rumore.

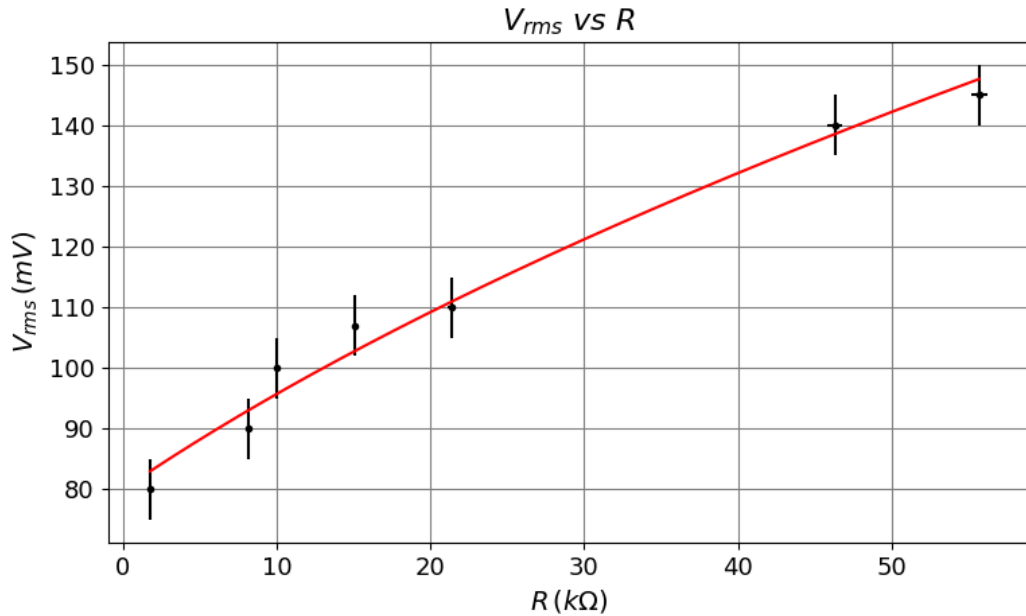


Figure 13: Fit V_{rms} vs R con i dati più stabili.

Il valore "vero" della costante di Boltzmann è $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$. Il valore da noi misurato è ragionevolmente in accordo con esso.

²Alla procedura di fit sono stati forniti solo gli errori sulle tensioni e non quelli sulle resistenze per semplicità, comunque trascurabili nella regione di dati usata.