



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Fisica “Enrico Fermi”
Corso di Laurea in Fisica

Introduzione all’Elettronica

Parte 2: Elettronica Analogica

*Roberto dell’Orso, Elisa Falchini, Vincenzo Flaminio
Donato Nicolò, Chiara Roda, Franco Spinella*

©Copyright 2005
Edizioni ETS
Piazza Carrara, 16-19, I-56126 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
PDE, Via Tevere 56, I-50019 Sesto Fiorentino (Firenze)

ISBN 88-467-1173-4

Avvertenze degli autori

Questo testo affronta un argomento che difficilmente potrebbe omettere il nome di compagnie che commercializzano software o hardware nel mondo dell'elettronica. Tutti i prodotti o le tecnologie a cui si fa riferimento sono marchi registrati a nome di queste compagnie.

Gli autori ringraziano anticipatamente i responsabili in questione e precisano che il materiale divulgato, anche se fa riferimento a marchi registrati, non ha carattere pubblicitario, né vuole favorire alcuno. Qualsiasi fraintendimento è da ritenersi di natura accidentale.

Prefazione

In questo volume abbiamo descritto gli argomenti trattati nel Corso di “Laboratorio di Fisica VI” tenuto da uno di noi (V.F.) negli ultimi 15 anni per gli studenti del Corso di Laurea in Fisica presso l’Università di Pisa. Esso fa seguito al volume dedicato all’elettronica digitale, che abbiamo di recente pubblicato.

Il Corso presuppone le conoscenze di base relative alle applicazioni delle leggi di Kirchhoff, dei teoremi di Thevenin e Norton, del metodo simbolico nella risoluzione di circuiti in alternata oltre a, naturalmente, l’utilizzo degli strumenti di laboratorio (oscilloscopio, tester, etc.). In questo volume si è comunque ritenuto opportuno inserire un capitolo dove questi concetti vengono richiamati, ed illustrati con alcuni semplici esempi.

Si è inserito un capitolo dedicato alle trasformate, il cui utilizzo ricorre molto spesso nel seguito, come pure uno dedicato alle linee di trasmissione. Segue una discussione elementare dei semiconduttori, diodi e transistor (bipolari e ad effetto di campo). Sono anche discusse varie applicazioni dei diodi, degli amplificatori a transistor, dei FET e degli amplificatori differenziali.

Un capitolo è dedicato alla struttura delle famiglie logiche (limitato alle più semplici tra queste).

Una parte importante del Corso è quella dedicata agli amplificatori operazionali ed alle loro applicazioni. Questi sono stati trattati in modo abbastanza dettagliato e con numerosi esempi. Abbiamo discusso in un capitolo a se il famoso “555” ed alcune sue applicazioni.

Segue una trattazione dei filtri attivi e poi del feedback negli amplificatori. Gli oscillatori sinusoidali sono discussi in un capitolo a parte, limitatamente alle strutture più semplici.

Segue una discussione dei convertitori Analogico-Digitale e Digitale-Analogico. Questi hanno oramai un utilizzo sempre più diffuso nei sistemi di trasmissione digitali. Abbiamo quindi ritenuto opportuno discutere in questo capitolo anche i concetti legati al “campionamento” ed il relativo teorema.

Un apposito capitolo è stato dedicato al rumore, ed in particolare al rumore nei circuiti elettronici.

L’ultimo capitolo, non strettamente legato al resto, ma che fa abbondante uso dei concetti illustrati nel resto del Corso ed illustra applicazioni dei vari circuiti discussi, è dedicato ai rivelatori di particelle e di radiazione ionizzante nonché alla relativa elettronica (preamplificatori ed amplificatori).

Abbiamo cercato di chiarire quanto esposto con numerosi esempi ed applicazioni. Nel far ciò abbiamo fatto abbondante ricorso alla versione “Demo” del programma di simulazione MICROCAP 7 [5]. Questo è stato adoperato anche per ottenere la

gran parte dei grafici contenuti nel testo. Ringraziamo la Spectrum Software per il permesso di far uso di tale programma, il cui utilizzo consigliamo a tutti gli studenti.

Desideriamo ringraziare i numerosi Colleghi che hanno collaborato con noi in questi anni, contribuendo a sviluppare la parte pratica del Corso, assistendo gli studenti e mettendo inoltre in evidenza numerosi errori contenuti nelle prime stesure dei relativi “appunti”. In particolare desideriamo ringraziare: Antonio Bardi, Alessandro Cardini, Alessandro Cerri, Francesco Forti, Paola Giannetti.

Un ringraziamento particolare, per la dedizione e la competenza con cui hanno gestito i laboratori didattici del secondo biennio di Fisica in tutti questi anni, al Responsabile dei laboratori, Carlo Bianchi, ed ai Tecnici Fabrizio Tellini e Virginio Merlin. Grazie al loro impegno il nostro lavoro è stato reso estremamente più agevole.

Indice

Indice	v
1 Richiami di teoria dei circuiti elettrici	1
1.1 Leggi di Kirchoff	1
1.2 Teoremi di Thévenin e di Norton	3
1.3 Principio di sovrapposizione	6
1.4 Generatori di tensione/corrente	7
1.4.1 Generatori ideali e reali	7
1.4.2 Generatori dipendenti	7
1.5 Quadripoli. Parametri h , y , z	8
1.6 Teorema di Miller	11
1.7 Circuiti RC e CR	13
1.7.1 Risposta a gradini ed a rampe	13
1.7.2 Risposta ad onde quadre	17
1.7.3 Risposta a segnali sinusoidali	18
1.8 Riflessione di impedenze nel primario di un trasformatore	19
2 Uso delle trasformate di Fourier e di Laplace	23
2.1 Introduzione	23
2.2 La trasformata di Fourier	23
2.3 Trasformata di Laplace	28
2.4 Esempi di calcolo di antitrasformate di Laplace	32
2.5 Risposta di un circuito ad un'eccitazione di forma generica	36
2.6 Funzioni esprimibili come rapporto di polinomi	38
2.7 Circuito LCR eccitato da un gradino unitario di tensione	42
2.8 Risposta di un circuito CR ad un segnale sinusoidale	47
3 Diagrammi di Bode e di Nyquist	51
3.1 Introduzione	51
3.2 Diagrammi di Bode	51
3.3 Quadripoli del secondo ordine	56
3.4 Funzioni di trasferimento con due poli complessi coniugati	64
3.5 Diagrammi di Nyquist	69
4 Linee di trasmissione	71
4.1 Introduzione	71
4.2 Cavi coassiali: principi generali	72

4.3	Riflessioni alle estremità di una linea	75
4.4	Riflessioni multiple	77
4.5	Effetti resistivi nelle linee di trasmissione	78
4.6	Adattamento d'impedenza per una linea	81
4.7	Linee di trasmissione commerciali	82
4.8	Linea chiusa su di un condensatore	83
5	Semiconduttori: Diodi e Transistor	87
5.1	Introduzione	87
5.2	Conduzione elettrica nei semiconduttori	90
5.3	Conduzione elettrica nei semiconduttori in presenza di impurezze	90
5.4	Diffusione in presenza di un gradiente di concentrazione	94
5.5	Giunzioni p-n	96
5.6	Caratteristica I-V del diodo	100
5.7	Resistenza differenziale del diodo e capacità associate alla giunzione	105
5.7.1	Capacità associate alla giunzione	107
5.8	Esempi di uso di diodi	109
5.8.1	Circuiti raddrizzatori	109
5.8.2	Rettificatore ad onda intera	113
5.8.3	Rivelatore di picco	114
5.8.4	Circuito fissatore (Clamping)	115
5.8.5	Duplicatore di tensione	118
5.8.6	Misura analogica di una frequenza d'impulsi	120
5.8.7	Circuito limitatore con diodi Zener	121
5.8.8	Interruttore a ponte di diodi	123
5.9	Il transistor bipolare	125
5.9.1	Introduzione	125
5.9.2	Struttura interna e funzionamento in zona attiva	126
5.9.3	Caratteristiche d'uscita del transistor	131
5.10	Nomenclatura adoperata per diodi e transistor	133
6	Transistor bipolarì	137
6.1	Caratteristiche del transistor bipolare	137
6.2	Il transistor in zona attiva	142
6.2.1	L'effetto Early	145
6.3	Il modello a π -ibrido (Giacchetto)	147
6.3.1	Conduttanza d'ingresso	148
6.3.2	Conduttanza di feedback	149
6.3.3	Base-Spreading resistance	149
6.3.4	Conduttanza d'uscita	150
6.4	La transconduttanza	150
6.5	Le configurazioni base-comune e collettore comune	152
6.6	Circuiti di polarizzazione del transistor	155
6.6.1	Polarizzazione per mezzo di una sorgente di corrente costante	161
6.7	Transistor Darlington	162
6.8	Specchi di corrente	166

7 Il modello di Ebers-Moll per i transistor bipolari	175
7.1 Basi del modello	175
7.2 Il transistor in interdizione	179
7.3 Il transistor in saturazione	179
8 Amplificatori a transistor bipolari	185
8.1 Introduzione	185
8.2 Inseguitore di emettitore	186
8.2.1 Guadagno in tensione	187
8.2.2 Impedenza d'ingresso	188
8.2.3 Impedenza d'uscita	189
8.2.4 Guadagno in corrente	189
8.2.5 Calcolo approssimato dei parametri	190
8.2.6 Emitter follower ad alta impedenza d'ingresso	192
8.2.7 Inseguitore d'emettitore: sommario delle caratteristiche	192
8.3 Amplificatore ad emettitore comune (CE)	193
8.4 Amplificatore CE con una resistenza sull'emettitore	194
8.4.1 Esempio	195
8.5 Amplificatori in cascata	201
8.6 Amplificatore in base comune	204
8.6.1 Guadagno in corrente	205
8.6.2 Impedenza d'ingresso	206
8.6.3 Guadagno in tensione	206
8.6.4 Impedenza d'uscita	206
8.7 Relazione tra guadagno in corrente ed in tensione	208
9 Caratteristiche dei FET ed amplificatori a FET	209
9.1 Introduzione	209
9.2 Struttura base dei JFET	209
9.3 Struttura base dei MOSFET	216
9.4 Caratteristiche dei FET	221
9.5 Circuito equivalente del FET	224
9.6 Schemi di polarizzazione per il FET	225
9.7 Amplificatori a FET	229
9.8 Inseguitore di source	232
9.9 Amplificatore a FET: struttura generale	234
9.10 Risposta in frequenza di un amplificatore a FET	238
9.10.1 Risposta alle alte frequenze	239
9.10.2 Risposta alle basse frequenze	245
9.10.3 Risposta sull'intero spettro di frequenze	246
9.11 Verifica delle approssimazioni fatte	246
9.12 Risposta dell'amplificatore ad un gradino di tensione	249
9.13 I CMOS	252
9.13.1 I CMOS come amplificatori	254
9.14 Appendice: funzione di trasferimento dell'amplificatore a FET	255
10 Amplificatori differenziali	261

10.1 Concetti generali	261
10.2 Amplificatore differenziale: schema base	263
10.3 Analisi della risposta a piccoli segnali dell'amplificatore differenziale	267
10.4 Impedenza d'ingresso dell'amplificatore differenziale	273
10.5 Generatore di corrente sull'emettitore	273
10.6 Amplificatore differenziale che fa uso di transistor Darlington	275
11 Struttura delle principali famiglie logiche	279
11.1 Introduzione	279
11.2 Livelli logici	279
11.3 Il <i>Fan-Out</i>	281
11.4 Circuiti in logica Diodo-Transistore (DTL)	283
11.5 Circuiti in logica TTL	287
11.6 Circuiti in logica CMOS	295
12 Amplificatori operazionali	297
12.1 Introduzione	297
12.2 Proprietà degli amplificatori operazionali	297
12.2.1 Ingresso differenziale	298
12.3 Applicazioni lineari degli amplificatori operazionali	299
12.3.1 Amplificatori invertenti e non-invertenti	300
12.3.2 Amplificatore non-invertente	305
12.3.3 Amplificatore della differenza di due segnali	307
12.3.4 Amplificatore della somma di due o più segnali	307
12.3.5 Integratore realizzato tramite un operazionale	309
12.3.6 Derivatore realizzato tramite un operazionale	314
12.3.7 Amplificatore di carica	318
12.3.8 Tensione di riferimento	320
12.3.9 Convertitori corrente-tensione e tensione-corrente	321
12.4 Applicazioni non-lineari degli amplificatori operazionali	325
12.4.1 Comparatore con isteresi	326
12.4.2 Multivibratore astabile (generatore di onde rettangolari)	328
12.4.3 Multivibratore monostabile	332
12.4.4 Generatore di onde triangolari	333
12.4.5 Limitatori e rettificatori	336
12.4.6 Rivelatori di picco	339
12.5 Limiti degli amplificatori operazionali	342
13 Il timer 555	349
13.1 Introduzione	349
13.1.1 Multivibratore astabile	350
13.2 Multivibratore monostabile	353
13.3 Trigger di Schmitt	355
13.4 Convertitore tensione-frequenza	356
14 Filtri attivi	359
14.1 Introduzione	359
14.1.1 Caratteristiche di risposta dei filtri	359

14.2 Generalità sui filtri	362
14.2.1 Esempi di filtri del primo e del secondo ordine	363
14.3 Funzione biquadratica di trasferimento	367
14.4 Corrispondenze tra tipi diversi di filtri	370
14.5 Il “ripple” nei filtri	371
14.6 Conversione di impedenze tramite operazionali	371
14.7 Filtri di Butterworth	377
14.8 Filtro di Butterworth del secondo ordine	381
14.9 Filtri di Bessel e di Chebyshev: confronto tra diversi tipi di filtro	384
14.10 Filtri biquadratici ad amplificatore singolo	386
14.10.1 Implementazione dei diversi tipi di filtri “biquad”	389
14.11 Filtri attivi a retroazione multipla	394
14.12 Filtri notch	397
14.13 Filtri a condensatori commutati	400
15 Il feedback negli amplificatori	403
15.1 Struttura generale del feedback	404
15.2 Altre proprietà del feedback negativo	405
15.2.1 Stabilizzazione del guadagno	405
15.2.2 Risposta in frequenza di un amplificatore	406
15.3 Le topologie di feedback negli amplificatori	408
15.3.1 Classificazione degli amplificatori	408
15.4 Effetto del feedback sulle impedenze di un amplificatore	411
15.4.1 Impedenze d’ingresso	411
15.4.2 Considerazioni generali	415
15.4.3 Impedenze d’uscita	415
15.5 Analisi dei circuiti con feedback	417
15.5.1 Individuazione del tipo di reazione	417
15.5.2 Analisi quantitativa del guadagno	419
15.6 Stabilità negli amplificatori con feedback	426
16 Oscillatori sinusoidali	429
16.1 Introduzione	429
16.2 Realizzazione di un oscillatore sinusoidale	431
16.3 L’oscillatore a sfasamento	432
16.4 Oscillatore a sfasamento a transistor bipolare	437
16.5 L’oscillatore sinusoidale in quadratura	439
16.6 Circuiti limitatori negli oscillatori sinusoidali	441
16.7 L’oscillatore a mezzo ponte di Wien	442
16.8 L’oscillatore a ponte di Wien	444
16.8.1 Poli e zeri di βA per l’oscillatore a ponte di Wien	446
16.8.2 Stabilità in frequenza dell’oscillatore a ponte di Wien	449
16.9 Oscillatori utilizzanti circuiti LC: considerazioni introduttive	452
16.9.1 Struttura generale di un oscillatore a tre punti	456
16.9.2 Oscillatori Colpitts	458
16.9.3 Oscillatori Hartley	462
16.9.4 Oscillatori LC a transistor	465

16.10Oscillatori al quarzo	472
16.10.1 Esempi di oscillatori al quarzo	480
16.11Risuonatori ceramici	484
16.12Appendice A: Non-linearietà dei dispositivi attivi adoperati	486
16.13Appendice B: relazione tra Q_0 ed il numero di oscillazioni in un tempo τ	489
17 Convertitori Digitale-Analogico ed Analogico-Digitale	491
17.1 Introduzione	491
17.2 Circuiti di Sample-and-Hold	492
17.3 Convertitori Digitale-Analogico	497
17.4 Convertitori Digitale-Analogico pilotati in corrente	503
17.5 Convertitori Analogico-Digitale (ADC)	505
17.5.1 ADC a contatore (Counting ADC)	505
17.5.2 ADC ad approssimazioni successive	507
17.5.3 Convertitore ADC a rampa singola	510
17.5.4 L'ADC a doppia rampa	511
17.5.5 Flash ADC	513
17.6 Caratteristiche dei DAC ed ADC commerciali	515
17.7 ADC e campionamento dei segnali	516
17.8 Il teorema del campionamento	520
18 Il rumore nei circuiti elettronici	525
18.1 Introduzione	525
18.2 Processi stocastici stazionari	526
18.2.1 Descrizione nel dominio del tempo	526
18.2.2 Analisi nel dominio della frequenza	532
18.2.3 Determinazione sperimentale della densità spettrale	536
18.3 Rumore termico	536
18.3.1 Metodo di Nyquist	538
18.4 Il rumore di tipo <i>shot</i>	540
18.5 Rumore 1/f	542
18.6 Circuiti equivalenti per il rumore	542
18.7 Rumore in un quadripolo	545
18.8 Dipendenza del rapporto segnale/rumore in un quadripolo dalla resistenza della sorgente	546
18.9 Cifra di rumore	547
18.10Rumore nel caso di una catena di più amplificatori in cascata	549
18.11Espressione analitica della cifra di rumore	550
18.12Temperatura di rumore	552
18.13Esempio: Transistor bipolare	553
18.14Il rumore nei componenti elettronici	557
18.14.1 Introduzione	557
18.14.2 Il rumore nel transistor bipolare	558
18.14.3 Il rumore nei FET	560
18.15Appendice A	562
18.16Appendice B	564

18.17 Appendice C	566
18.17.1 Teoremi di Campbell e di Carson	566
19 Elettronica per rivelatori di particelle	569
19.1 Introduzione	569
19.2 Caratteristiche di risposta dei rivelatori	570
19.2.1 Risoluzione energetica	570
19.2.2 Risposta temporale	572
19.2.3 Efficienza	573
19.2.4 Tempo morto	573
19.3 Rivelatori a scintillazione	574
19.4 Fotomoltiplicatori	576
19.4.1 Risoluzione energetica di un fotomoltiplicatore	580
19.4.2 Risoluzione temporale	583
19.5 Forma dell'impulso all'uscita del fotomoltiplicatore	584
19.6 Rivelatori a gas	588
19.6.1 Il Contatore Proporzionale	591
19.6.2 Il modo streamer limitato	595
19.7 Rivelatori a semiconduttore	596
19.7.1 Preamplificatori di carica per rivelatori a semiconduttore	603
19.8 Struttura della catena di rivelazione ed amplificazione	604
19.8.1 Preamplificatori e rumore	606
19.8.2 Rumore elettronico	608
19.8.3 "Formazione" dei segnali prodotti da rivelatori di particelle	612
19.8.4 Altri metodi di "shaping" dei segnali	617
19.8.5 Shaping $CR - (RC)^n$	617
19.8.6 Shaping triangolare	617
19.8.7 Spostamento della linea di zero	617
19.8.8 Deficit balistico e scelta delle costanti di tempo	620
19.8.9 Shaping e rumore	621
Bibliografia	625
Indice Analitico	628

Capitolo 1

Richiami di teoria dei circuiti elettrici

In questo capitolo saranno discussi alcuni dei teoremi che vengono frequentemente impiegati per effettuare l'analisi di circuiti elettronici composti da elementi passivi, quali resistenze, condensatori ed induttanze, insieme a generatori di tensione o di corrente.

1.1 Leggi di Kirchoff

Alla base della teoria dei circuiti elettrici troviamo le leggi di Kirchoff, che consentono di scrivere in forma consistente delle equazioni lineari da cui, note le sorgenti di tensione e/o di corrente, è possibile ottenere le correnti e le tensioni in tutti i punti della maglia.

Chiameremo “rami” della maglia gli elementi di questa attraversati da correnti determinate istante per istante dalle differenze di potenziale tra i loro estremi, che chiameremo “nodi” .

Ad esempio, nel circuito di figura 1.1, i tratti ab , bc , be , cd , de , ef , af sono rami. I punti a , b , ... f sono nodi.

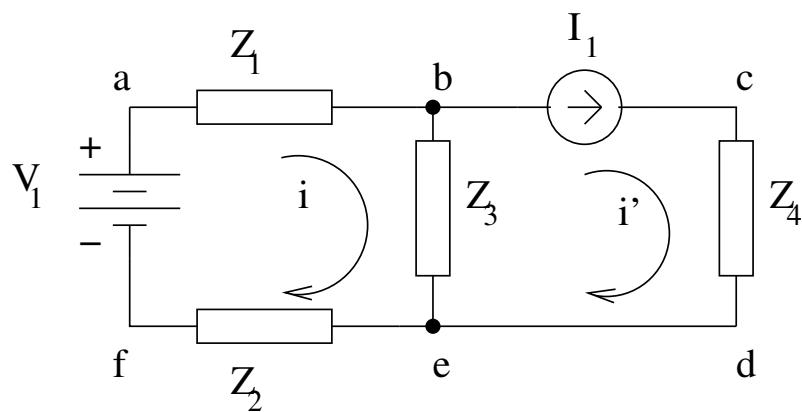


Figura 1.1: Circuito a due maglie.

Nell'esempio, il ramo af ha un generatore di tensione V_1 ed il ramo bc un generatore di corrente I_1 . Per una definizione dei concetti di generatore di tensione e generatore di corrente si veda il paragrafo 1.4.

Nel ramo ab è inserita un'impedenza Z_1 , nel ramo be un'impedenza Z_3 etc.

Per il generico ramo vale ovviamente la Legge di Ohm: la differenza di potenziale tra i due nodi che lo delimitano è uguale alla corrente I , che lo attraversa, moltiplicata per l'impedenza:

$$V = Z I \quad (1.1)$$

Nel caso in cui Z non sia puramente resistiva, allora, nell'equazione precedente Z sarà un operatore lineare. Ad esempio, se Z è costituita da un'induttanza:

$$V = -L \frac{d}{dt} I \quad (1.2)$$

mentre se Z è costituita da una capacità:

$$V = \frac{1}{C} \int I dt \quad (1.3)$$

Nel caso in cui la sollecitazione ($V(t)$, $I(t)$ nel nostro esempio) sia sunisoidale con pulsazione ω , sappiamo come il metodo simbolico possa essere adoperato per esprimere i suddetti operatori come numeri complessi:

$$\begin{aligned} V &= -j\omega L I && \text{nel caso induttivo} \\ V &= \frac{1}{j\omega C} I && \text{nel caso capacitivo} \end{aligned}$$

Vedremo nel seguito come la tecnica delle trasformate di Laplace (o di Fourier) possa essere adoperata per trasformare le equazioni (1.1), (1.2) e (1.3) in equazioni lineari a coefficienti costanti.

Le leggi di Kirchoff sono espresse come segue:

- I) la somma algebrica delle correnti che convergono verso un nodo è nulla;
- II) la somma algebrica delle differenze di potenziale lungo un circuito chiuso (maglia) è nulla.

La prima delle due leggi di Kirchoff esprime la conservazione della carica elettrica, la seconda la conservazione dell'energia.

Nell'applicare la seconda delle leggi di Kirchoff è conveniente introdurre le "correnti di maglia", come mostrato in figura 1.1. Notiamo che la corrente che attraversa il ramo be è $(i - i')$ nel verso che va da b ad e . Con tale definizione, la seconda delle leggi di Kirchoff ci dà:

$$\begin{cases} V_1 = Z_1 i + Z_3(i - i') + Z_2 i \\ i' Z_4 = Z_3(-i + i') \end{cases}$$

che costituisce un sistema di due equazioni (lineari nel senso detto prima) nelle incognite i e i' . Dall'ultima equazione segue:

$$(Z_4 - Z_3)i' = Z_3 i$$

da cui:

$$i = \frac{Z_4 - Z_3}{Z_3} i' = \left(\frac{Z_4}{Z_3} - 1 \right) i'$$

1.2 Teoremi di Thévenin e di Norton

Teorema di Thévenin

Un generico segmento di circuito, compreso tra due nodi, può essere, agli effetti del calcolo delle correnti e delle tensioni, sostituito da un generatore di tensione V_{Th} in serie con un'impedenza R_{Th} . La tensione V_{Th} è quella che si misurerebbe tra i nodi in questione aprendo il circuito. L'impedenza R_{Th} è quella che si misurerebbe tra i nodi, tenendo conto di tutti gli elementi presenti tra gli stessi e sostituendo ciascun generatore di corrente o di tensione con la sua impedenza interna.

Questo teorema viene spesso impiegato per ridurre il numero di maglie in un circuito.

Per esempio, il circuito a due maglie di figura 1.2, può essere ridotto ad una sola

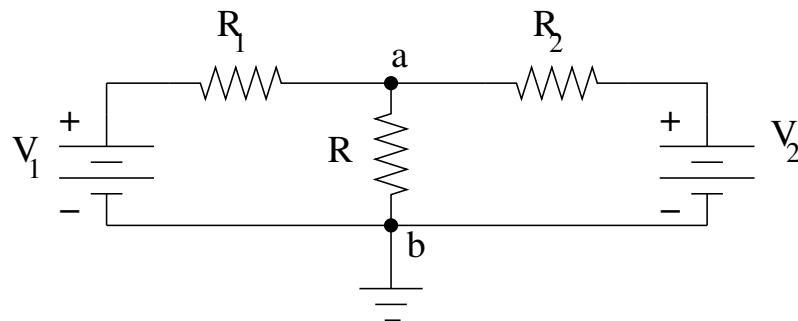


Figura 1.2: Circuito a due maglie.

maglia sostituendo i componenti alla sinistra dei nodi a e b (compresa la resistenza R) con il loro equivalente di Thévenin (figura 1.3):

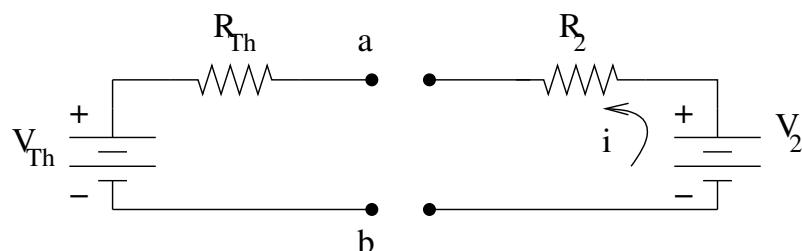


Figura 1.3: Circuito ad una maglia, ridotto sfruttando il Teorema di Thévenin.

$$R_{Th} = \frac{R R_1}{R + R_1}$$

$$V_{Th} = V_1 \frac{R}{R + R_1}$$

La corrente i che passa attraverso R_2 è data da:

$$i = \frac{V_2 - V_{Th}}{R_2 + R_{Th}} = \left(V_2 - V_1 \frac{R}{R + R_1} \right) / \left(R_2 + \frac{R R_1}{R + R_1} \right)$$

quindi

$$i = \frac{(V_2 - V_1)R + V_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

La tensione nel punto a sarà allora:

$$V_a = V_2 - R_2 i$$

e la corrente in R :

$$i_R = \frac{V_a}{R}.$$

Possiamo dimostrare il Teorema di Thévenin come segue.

Consideriamo una rete con n rami. Indichiamo con r_i ed f_i rispettivamente la resistenza e la forza elettro-motrice (f.e.m.) del ramo i -esimo. Supponiamo di aggiungere un ramo di resistenza r_0 tra due punti (nodi) qualsiasi della rete e che tra questi due punti esistesse, prima dell'aggiunta del nuovo ramo, una d.d.p. V . Detta R_0 la resistenza complessiva che la rete presenta tra i due punti dati, il teorema di Thévenin dice che la corrente i_0 nel nuovo ramo è data da:

$$i_0 = V/(R_0 + r_0)$$

Per dimostrarlo supponiamo che anche nel ramo r_0 sia inserita una f.e.m. f_0 . La corrente i_0 è una funzione lineare delle varie f.e.m. presenti nella maglia:

$$i_0 = \sum_{k=0}^n A_k f_k \quad A_k \text{ costanti}$$

Eliminando tutte le f_k (ma non le resistenze r_k), cioè ponendo $f_k = 0$ per $k \neq 0$, avremo:

$$i_0 = A_0 f_0$$

ma sappiamo che $f_0/r_0 = (r_0 + R_0)$, quindi

$$\frac{1}{A_0} = r_0 + R_0$$

Riportiamo ora il circuito nelle condizioni precedenti tornando ad inserire le f_k e diamo inoltre ad f_0 valore pari a $-V$ tale che sia $i_0 = 0$:

$$0 = -VA_0 + \sum_{k=1}^n A_k f_k$$

poiché il ramo r_0 ora non assorbe corrente, questa V coinciderà con la d.d.p. esistente tra i due punti nel circuito primitivo.

Ponendo ora $f_0 = 0$ ed utilizzando le equazioni scritte il precedenza otteniamo:

$$i_0 = \sum_{k=0}^n A_k f_k = \sum_{k=1}^n A_k f_k = V A_0 = \frac{V}{r_0 + R_0}$$

che dimostra il teorema di Thévenin.

Teorema di Norton

Un generico segmento di circuito, compreso tra due nodi, può essere, agli effetti del calcolo delle correnti e delle tensioni, sostituito da un generatore di corrente i_{No} in parallelo con un'impedenza R_{No} . La corrente i_{No} è quella che fluirebbe tra i nodi in questione se questi fossero messi in corto circuito. L'impedenza R_{No} è quella misurata tra i medesimi nodi, tenendo conto di tutti gli elementi presenti tra gli stessi e sostituendo ciascun generatore di corrente o di tensione con la sua impedenza interna.

Esaminiamo ad esempio ancora il circuito a due maglie di figura 1.2 e sostituiamolo la maglia di sinistra con il suo equivalente di Norton; esso viene quindi ridotto al circuito di figura 1.4:

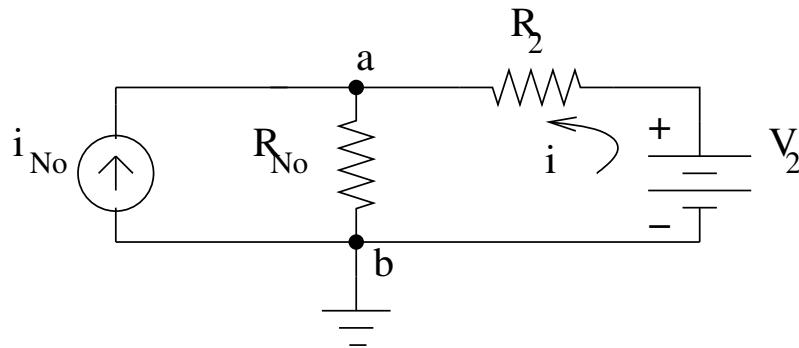


Figura 1.4: Circuito equivalente a quello di figura 1.2 ottenuto sfruttando il Teorema di Norton.

$$i_{No} = \frac{V_1}{R_1} \quad R_{No} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

La tensione tra i nodi a e b e la corrente attraverso la R_2 sono date da:

$$V_{ab} = (i + i_{No}) R_{No} \quad i = \frac{V_2 - V_{ab}}{R_2}$$

da cui

$$i = \frac{V_2}{R_2} - (i + i_{No}) \frac{R_{No}}{R_2}$$

$$i \left(1 + \frac{R_{No}}{R_2} \right) = \frac{V_2}{R_2} - i_{No} \frac{R_{No}}{R_2}$$

$$i(R_2 + R_{No}) = V_2 - R_{No}i_{No}$$

$$i = \frac{V_2}{R_2 + R_{No}} - \frac{R_{No}}{R_2 + R_{no}}i_{No}$$

Sostituendo in questa le espressioni di R_{No} e i_{No} :

$$i = V_2 / \left(R_2 + \frac{R R_1}{R + R_1} \right) - \frac{R R_1}{R + R_1} \frac{V_1}{R_1} / \left(R_2 + \frac{R R_1}{R + R_1} \right) =$$

$$= \frac{(V_2 - V_1)R + V_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

cioè il medesimo risultato che si ottiene con l'applicazione del Teorema di Thévenin.

Corollario dei teoremi di Thévenin e Norton

Dai teoremi di Thévenin e Norton segue che un generatore di tensione V in serie con una resistenza R è equivalente ad un generatore di corrente I in parallelo con R , purché sia $V = RI$ (figura 1.5).

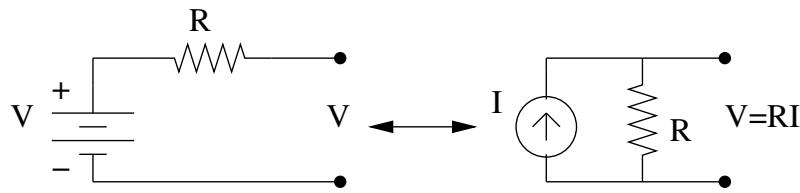


Figura 1.5: Sinistra: generatore di tensione in serie ad una resistenza; destra: generatore di corrente in parallelo ad una resistenza. I due circuiti si equivalgono purché $V = RI$.

Come corollario segue quindi che “la tensione a circuito aperto è uguale alla corrente a circuito chiuso moltiplicata per la resistenza”.

Nonostante la sua semplicità, questa relazione può risultare molto utile nell'analisi dei circuiti.

1.3 Principio di sovrapposizione

In una rete lineare in cui siano presenti più sorgenti di tensione e/o corrente la risposta può essere calcolata a partire dalla risposta ottenuta in presenza di una sola delle sorgenti e sommando poi tutte le risposte. Nel calcolo della risposta ad una generica delle sorgenti occorre sostituire tutte le altre con le loro impedenze interne (cioè, ogni sorgente ideale di tensione con una resistenza nulla ed ogni sorgente ideale di corrente con una resistenza infinita).

Applichiamo il principio di sovrapposizione al circuito già esaminato di figura 1.2.

Se fosse presente solo V_2 (con V_1 sostituito da un cortocircuito) la corrente in R_2 sarebbe:

$$i'_2 = \frac{V_2}{R_2 + \frac{R R_1}{R + R_1}} = \frac{V_2(R + R_1)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Se fosse invece presente solo V_1 (con V_2 sostituito da un cortocircuito) la corrente in R_2 sarebbe:

$$i_2'' = -\frac{V_1}{R_2} \left(1 - \frac{R_1(R + R_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2} \right) = \frac{-V_1R}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2}$$

In presenza di entrambe le sorgenti avremo:

$$i_2 = i_2' + i_2'' = \frac{(V_2 - V_1)R + R_1V_2}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2}$$

cioè nuovamente il medesimo risultato ottenuto facendo uso dei teoremi di Thévenin e Norton.

1.4 Generatori di tensione/corrente

I generatori sono componenti circuitali attivi e rappresentano dispositivi capaci di fornire energia elettrica al circuito cui sono connessi.

1.4.1 Generatori ideali e reali

I tipi di generatori ideali normalmente considerati sono due: quello di tensione e quello di corrente.

- Un generatore ideale di **tensione** fornisce un valore di tensione assegnato ($V = V_s$) indipendentemente dalla corrente erogata e quindi dal circuito a cui è connesso (figura 1.6 a).

Un generatore ideale di tensione deve necessariamente avere resistenza interna nulla, altrimenti la tensione ai suoi capi sarebbe $V = V_s - r_s i$ (dipendente dalla corrente erogata).

Un generatore reale di tensione può essere assimilato ad un generatore ideale in serie con la propria resistenza interna (figura 1.6 b).

- Un generatore ideale di **corrente** fornisce una corrente di valore assegnato ($i = i_s$) indipendentemente dalla tensione tra i terminali del generatore e quindi dal circuito a cui è connesso (figura 1.6 c).

Un generatore ideale di corrente deve necessariamente avere resistenza interna infinita, altrimenti la corrente erogata sarebbe pari a $i = i_s - V/r_s$ (dipendente dalla tensione ai suoi capi).

Un generatore reale di corrente può essere assimilato ad un generatore ideale in parallelo con la propria resistenza interna (figura 1.6 d).

1.4.2 Generatori dipendenti

Un generatore dipendente eroga un segnale di tensione/corrente dipendente dalla corrente/tensione presente in un'altra parte del circuito.

Un esempio è quello di figura 1.7, nel quale il generatore dipendente αi_1 eroga una corrente che è proporzionale, secondo la costante α , alla corrente nella maglia d'ingresso i_1 . La corrente nella maglia d'uscita i_2 sarà:

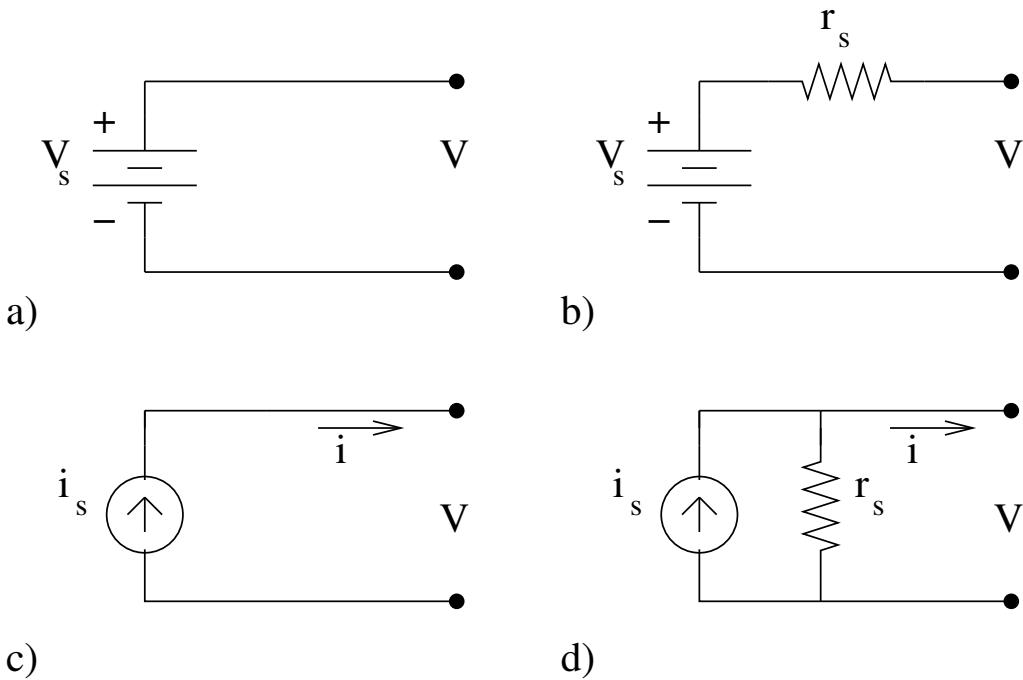


Figura 1.6: a): generatore ideale di tensione; b): generatore reale di tensione; c) generatore ideale di corrente; d) generatore reale di corrente.

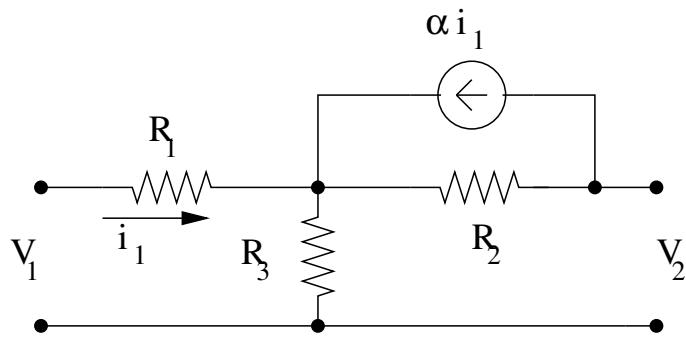


Figura 1.7: Circuito che contiene un generatore dipendente di corrente.

$$i_2 = \alpha i_1 + i$$

Un altro esempio è quello di figura 1.8, nel quale abbiamo nella maglia d'uscita un generatore di tensione che eroga una tensione proporzionale alla tensione presente tra i terminali d'ingresso $V = \mu V_f$.

1.5 Quadripoli. Parametri h , y , z

Sebbene i componenti circuituali con due terminali siano quelli più comuni, esistono numerosissimi componenti circuituali con N terminali ($N > 2$). Il modello circuitale di un elemento con N terminali prende il nome di N -polo ($N = 3$ tripolo, $N = 4$ quadripolo).

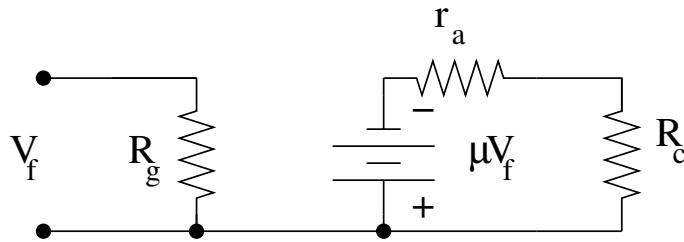


Figura 1.8: Circuito che contiene un generatore dipendente di tensione.

Nella teoria dei circuiti gli N -poli hanno un duplice ruolo. Primo, sono adoperati come modelli di parti complesse di circuiti che interagiscono con le restanti parti del circuito di cui fanno parte attraverso più di due terminali. È possibile caratterizzare il funzionamento di queste parti indipendentemente dal circuito in cui esse sono inserite. Secondo, gli elementi con più di due terminali sono adoperati come modelli per componenti complessi quali i transistor, gli amplificatori operazionali, etc.

Il funzionamento di un N -polo è definito dalle relazioni esistenti tra le intensità delle correnti che attraversano i terminali e le tensioni tra i terminali.

Un N -polo ha N intensità di corrente distinte, tante quanti sono i terminali, e $N(N - 1)/2$ tensioni distinte, tante quante sono le coppie di terminali senza ripetizione. Naturalmente tutte queste grandezze non sono completamente indipendenti l'una dall'altra; il numero di grandezze indipendenti necessarie per descrivere il funzionamento dell' N -polo può essere ridotto grazie alle due leggi di Kirchoff. In generale, per un componente con N terminali, solo $N - 1$ intensità di corrente e $N - 1$ tensioni sono indipendenti (descrittive). Il funzionamento di un N -polo è descritto da $N - 1$ relazioni tra le intensità di corrente e le tensioni descrittive; relazioni che dipendono solo dalla costituzione fisica del componente che l'elemento rappresenta.

Una coppia di terminali è detta *porta* se la somma delle intensità delle correnti che li attraversano è uguale a zero. A ciascuna porta è associata un'intensità di corrente ed una tensione.

Molti degli elementi circuitali che saranno introdotti in seguito in questo volume, possono essere descritti come quadripoli a due porte, o *doppi bipoli* (e saranno chiamati semplicemente quadripoli).

Vediamo l'esempio di figura 1.9, in esso compare una coppia di terminali d'in-



Figura 1.9: Doppio bipolo o quadripolo.

gresso (porta d'ingresso) ed una coppia di terminali d'uscita (porta d'uscita). Le intensità di corrente entranti nei quattro terminali verificano le seguenti relazioni:

$$i_1 + i_3 = 0 \quad i_2 + i_4 = 0$$

così possiamo associare alla porta d'ingresso semplicemente l'intensità di corrente i_1 e la tensione v_1 , a quella d'uscita, la corrente i_2 e la tensione v_2 .

Il funzionamento dei quadripoli a due porte è descritto da due relazioni indipendenti tra le due intensità di corrente i_1 e i_2 e le due tensioni v_1 e v_2 ; relazioni che dipendono unicamente dalla natura fisica del componente che il doppio bipolo rappresenta.

Naturalmente esiste la possibilità che due quadripoli, diversi nella composizione circuitale interna, si comportino in modo identico relativamente alle grandezze elettriche (correnti e tensioni) sui terminali. Quando questo si verifica, i due quadripoli sono detti *equivalenti* e possono essere scambiati tra loro senza influenzare il comportamento della rete elettrica nella quale sono inseriti.

Un quadripolo lineare non può comprendere nella sua rete generatori indipendenti di tensione o corrente; però possono essere presenti generatori dipendenti da una grandezza elettrica ai terminali o interna.

Abbiamo visto che delle quattro variabili (i_1 , i_2 , v_1 e v_2) che descrivono il quadripolo, solo due possono essere assegnate indipendentemente, le altre sono legate alla prime da equazioni lineari. Ognuna delle differenti scelte delle possibili coppie di variabili indipendenti (i_1-i_2 , i_1-v_1 , etc) conduce ad una descrizione matematica diversa; poiché le possibilità sono sei, esistono sei diversi modelli matematici che descrivono un quadripolo.

Modello a parametri y

Il modello a parametri y (conduttanza) viene usato per descrivere le correnti caratteristiche del quadripolo in funzione delle tensioni ai capi dei terminali d'ingresso ed uscita:

$$i_1 = f_1(v_1, v_2)$$

$$i_2 = f_2(v_1, v_2)$$

il circuito equivalente al quadripolo che vogliamo descrivere con il modello a parametri y è quello di figura 1.10. Il sistema di equazioni lineari associate è:

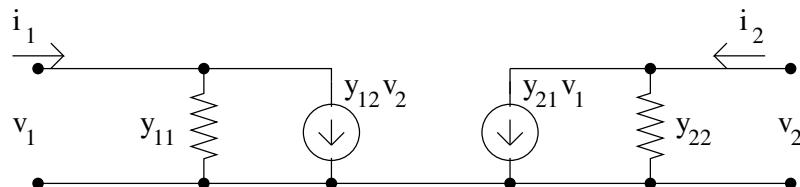


Figura 1.10: Circuito equivalente a parametri y .

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\ i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{cases}$$

I parametri y si possono determinare mediante i rapporti corrente-tensione imponendo la condizione che una delle due tensioni sia nulla; operativamente, quindi, devono essere chiusi in cortocircuito i terminali d'ingresso ($v_1 = 0$) e di uscita ($v_2 = 0$).

Modello a parametri z

Scegliendo come variabili indipendenti le correnti di ingresso e di uscita (i_1 e i_2), le equazioni che descrivono il comportamento del quadripolo hanno la forma:

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases}$$

Il modello circuitale che ne deriva è denominato modello a parametri z o parametri impedenza, dato che i coefficienti delle correnti rappresentano delle impedenze. I parametri z si possono determinare misurando i rapporti tensione-corrente avendo aperto l'opportuna coppia di terminali in modo da avere $i_1 = 0$ e $i_2 = 0$.

Modelli a parametri ibridi

I modelli a parametri ibridi si ottengono considerando come variabili indipendenti le grandezze i_1 e v_2 oppure v_1 e i_2 ; nel primo caso il quadripolo è descritto dal modello a parametri h , nel secondo dal modello a parametri g .

Il circuito equivalente al quadripolo descritto col modello a parametri h è quello di figura 1.11, e le equazioni lineari associate sono:

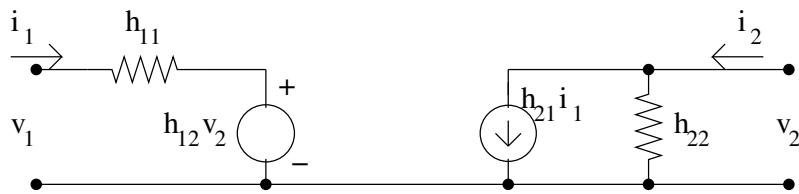


Figura 1.11: Circuito equivalente a parametri h .

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases}$$

dove i parametri h_{12} e h_{21} sono numeri puri, il parametro h_{11} ha le dimensioni di una impedenza, mentre il parametro h_{22} quelle di una conduttanza.

La determinazione sperimentale di questi parametri si effettua prima aprendo il circuito d'ingresso ($i_1 = 0$) e alimentando l'uscita (si ottengono h_{12} e h_{22}) e poi cortocircuitando l'uscita ($v_2 = 0$).

1.6 Teorema di Miller

Sia dato un circuito con un generico numero di nodi. Indichiamo con V_i il potenziale dell' i -esimo nodo. Consideriamo due di questi nodi, ad esempio quelli 1 e 2 di

figura 1.12 ed ammettiamo di conoscere il rapporto tra le tensioni $V_2/V_1 = K$. Ci chiediamo quale sarà la corrente che fluisce in un'impedenza Z inserita tra i nodi 1 e 2.

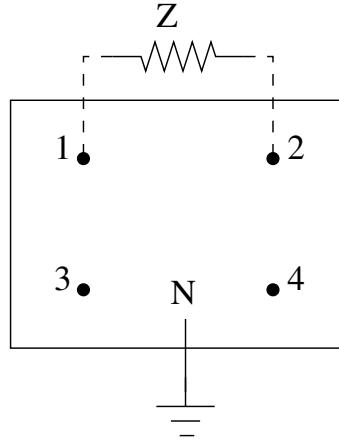


Figura 1.12: Generico circuito con N poli.

Il Teorema di Miller ci dice che la corrente erogata dal nodo 1, che attraversa 2, (e, più in generale, la risposta del circuito) può essere calcolata ricorrendo al circuito equivalente di figura 1.13, dove:

$$Z_1 = \frac{Z}{1 - K} \quad Z_2 = -\frac{Z K}{1 - K}$$

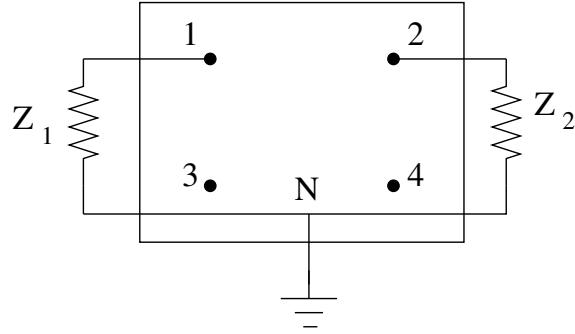


Figura 1.13: Circuito equivalente a quello di figura 1.12 ottenuto grazie al Teorema di Miller.

Infatti la corrente che fluisce in Z è:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{Z} = V_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \frac{1}{Z} = V_1 \frac{1 - K}{Z} = \frac{V_1}{Z/(1 - K)} = \frac{V_1}{Z_1}$$

cioè la medesima corrente che attraversa, dal nodo 1, l'impedenza Z_1 verso massa.

Analogamente, la corrente che fluisce in Z dal nodo 2 è:

$$I = \frac{V_2 - V_1}{Z} = V_2 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \frac{1}{Z} = \frac{V_2(1 - 1/K)}{Z} = \frac{V_2(K - 1)}{K Z} = \frac{V_2}{Z_2}.$$

1.7 Circuiti RC e CR

Circuiti costituiti da sole resistenze e capacità sono importanti, in quanto essi permettono di realizzare *filtri* senza far uso di induttanze (più complesse dal punto di vista tecnologico).

Un filtro è un circuito che lascia passare solo segnali compresi in un certo intervallo in frequenze. Si dice filtro passa-basso un circuito che lascia passare solo le frequenze più basse di una prefissata, detta frequenza di taglio. Viceversa si dice filtro passa-alto un circuito che seleziona frequenze più alte di una prefissata.

Un circuito che funzioni come filtro passa-basso si può ottenere semplicemente mettendo in serie una resistenza ed un condensatore, il segnale in ingresso si invia ai capi della serie ed il segnale in uscita si legge ai capi del condensatore (figura 1.14).

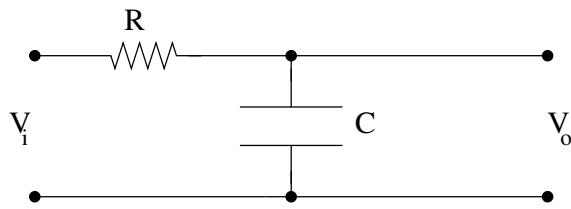


Figura 1.14: Circuito RC o passa-basso (integratore).

Per avere un filtro passa-alto sempre con un circuito formato da una serie tra un condensatore ed una resistenza, il segnale in uscita deve essere letto ai capi della resistenza, che, in questa configurazione, segue il condensatore (figura 1.15).

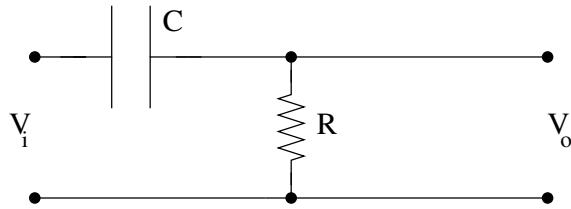


Figura 1.15: Circuito CR o passa-alto (derivatore).

1.7.1 Risposta a gradini ed a rampe

Vediamo prima di tutto quale è la risposta di un circuito passa-basso ad un gradino unitario in ingresso.

Sempre considerando il circuito di figura 1.14 possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} v_i = Ri + \frac{1}{C} \int idt \\ i = \frac{v_i - v_o}{R} \end{cases}$$

sostituendo la seconda nella prima:

$$\begin{aligned}
 v_i &= R \frac{v_i - v_o}{R} + \frac{1}{RC} \int v_i dt - \frac{1}{RC} \int v_o dt \\
 v_o &= \frac{1}{RC} \int v_i dt - \frac{1}{RC} \int v_o dt \\
 RC \frac{dv_o}{dt} + v_o &= v_i
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

la cui soluzione è data da (figura 1.16):

$$v_o = 1 - e^{-t/\tau} \quad \tau \equiv RC$$

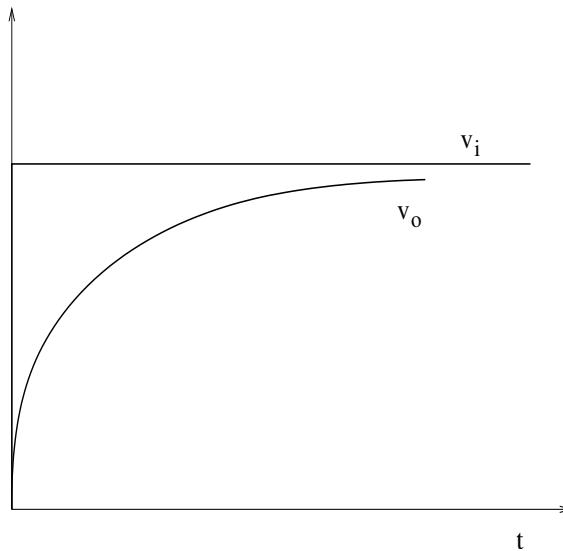


Figura 1.16: Risposta di un circuito RC passa-basso ad un gradino.

La risposta dello stesso circuito ad un segnale in ingresso che rappresenti una rampa ($v_i = \alpha t$) si trova risolvendo ancora l'equazione (1.4). La soluzione dell'equazione omogenea è $v_o = e^{-t/\tau}$ e la soluzione particolare dell'equazione completa è $v_o = \alpha(t - \tau)$; le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\begin{cases} t = 0 & v_o = 0 \\ t = \infty & v_o = \alpha t \end{cases}$$

quindi la risposta del circuito è data da:

$$v_o = \alpha \tau (e^{-t/\tau} - 1) + \alpha t$$

Considerando lo sviluppo dell'esponenziale per $t \ll \tau$ abbiamo:

$$v_o = \alpha \tau \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} \dots \right) + \alpha t \simeq \frac{\alpha t^2}{\tau 2}$$

cioè, a parte il fattore $1/\tau$, l'integrale del segnale in ingresso. Al crescere di t , tuttavia, l'andamento diviene nuovamente lineare.

Questo tipo di risposta (l'integrale dell'ingresso per tempi piccoli rispetto ad RC) si ottiene anche per altre forme d'onda in ingresso. La caratteristica di avere in uscita un segnale corrispondente all'integrale di quello in ingresso è propria di questo tipo di circuito che, difatti, viene anche chiamato indegratore.

Consideriamo adesso il circuito di figura 1.15, il filtro-passa alto; per un gradino unitario in ingresso avremo:

$$v_o = v_i - v_c = v_i - v_i(1 - e^{-t/\tau})$$

dove v_c è la tensione ai capi del condensatore, quindi il segnale in uscita è dato da (figura 1.17):

$$v_o = e^{-t/\tau} \quad (1.5)$$

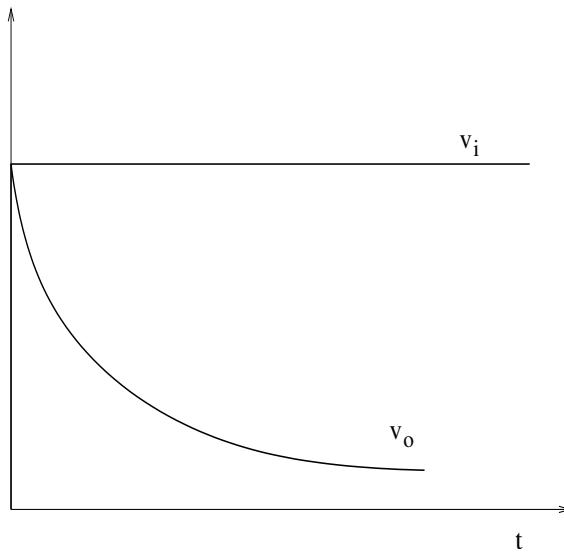


Figura 1.17: Risposta di un circuito CR passa-alto ad un gradino.

Questo tipo di circuito “blocca” completamente ogni segnale continuo e, più in generale, ogni segnale alle basse frequenze (di qui il nome di filtro passa-alto).

Vediamo adesso in che senso questo tipo di circuito può essere usato come derivatore. Per il circuito CR possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} v_o = v_i - \frac{1}{C} \int i dt \\ i = \frac{v_o}{R} \end{cases}$$

sostituendo la seconda nella prima avremo:

$$\begin{aligned} v_o &= v_i - \frac{1}{RC} \int v_o dt \\ \frac{v_o}{RC} + \frac{dv_o}{dt} &= \frac{dv_i}{dt} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Consideriamo i due casi limite: quello in cui v_i stia cambiando molto rapidamente e quello in cui cambi molto lentamente.

Nel primo caso, come si è già visto, poiché la differenza di potenziale ai capi del condensatore non può cambiare rapidamente, si ha che dv_o/dt sarà grande (come dv_i/dt) ed allora il termine v_o/RC potrà in prima approssimazione essere trascurato rispetto a dv_o/dt . In tal caso, quindi avremo

$$v_o = v_i + \text{cost.}$$

dove la costante dipende dalle condizioni iniziali.

Nel secondo caso v_i cambia molto poco in un tempo pari alla costante di tempo RC del circuito, ovvero $RC \ll T$ dove T è il tempo in cui v_i subisce una variazione apprezzabile. Avremo:

$$\frac{v_o}{RC} \gg \frac{dv_o}{dt}$$

trascurando quindi a primo membro nell'equazione (1.6) il termine dv_o/dt , avremo:

$$v_o = RC \frac{dv_i}{dt}$$

cioè il segnale in uscita verrà ad essere proporzionale alla derivata di quello in ingresso.

Prendiamo come esempio il caso di un segnale a rampa:

$$v_i = at$$

l'equazione differenziale del circuito si scrive in tal caso:

$$\frac{v_o}{RC} + \frac{dv_o}{dt} = \alpha$$

e la soluzione di tale equazione è:

$$v_o = \alpha RC (1 - e^{-t/RC})$$

Per $t \ll RC$ possiamo sostituire l'esponenziale in parentesi con il suo sviluppo in serie:

$$e^{-t/RC} \simeq 1 - \frac{t}{RC} + \dots$$

quindi:

$$v_o = \alpha t$$

Vediamo così che per tempi piccoli rispetto alla costante di tempo RC il segnale in uscita segue quello in ingresso. Per tempi grandi, invece, il termine esponenziale tenderà a zero ed avremo:

$$v_o \simeq \alpha RC$$

Se il fronte di salita di un generico tipo di impulso può essere approssimato con una rampa, possiamo usare questo circuito come derivatore ed ottenere la pendenza attraverso la misura del valore asintotico del segnale in uscita.

1.7.2 Risposta ad onde quadre

Supponiamo di mandare in ingresso ad un circuito CR passa-alto (figura 1.15) un'onda quadra di periodo $2T$ ed ampiezza V .

Per $t < T$ il segnale in uscita è quello calcolato in precedenza come risposta ad un ingresso a gradino (equazione (1.5)). A $t = T$ il segnale in ingresso diminuisce la sua ampiezza di un valore pari a V e di conseguenza anche quello di uscita “cade” di V in quanto la differenza di potenziale ai capi di C non può cambiare improvvisamente:

$$\Rightarrow \quad t = T \quad v_o = (Ve^{-T/\tau} - V) < 0$$

A partire da tale istante l'uscita comincia a risalire verso lo zero con legge esponenziale e con la medesima costante di tempo di prima:

$$v_o = V(e^{-T/\tau} - 1)e^{-(t-T)/\tau}$$

Se vogliamo che la distorsione sia minima, occorre che la costante di tempo RC sia grande rispetto a T . Tuttavia c'è sempre una caduta alla fine del segnale in ingresso. Inoltre l'integrale della parte di segnale in uscita sopra lo zero è uguale a quello della parte negativa (figura 1.18).

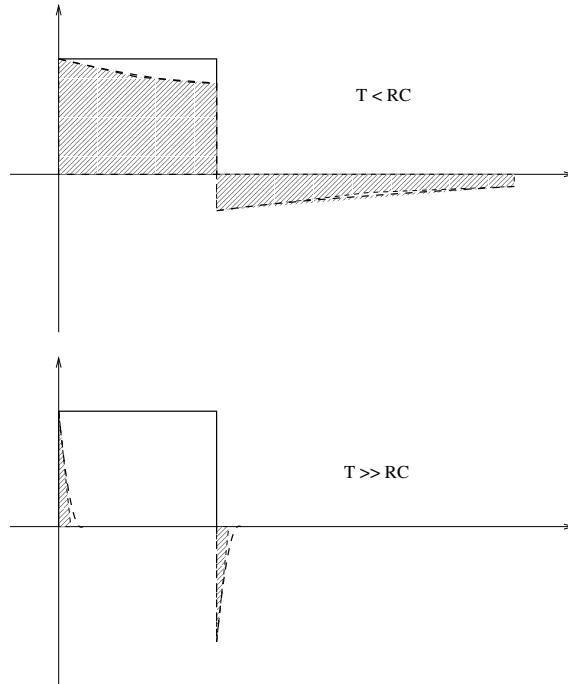


Figura 1.18: Risposta ad un'onda quadra di un circuito CR passa-alto.

Riassumendo, le caratteristiche della risposta di un circuito passa-alto ad un'onda quadra periodica in ingresso sono le seguenti:

- il segnale in uscita è periodico, con lo stesso periodo di quello in ingresso;
- l'area sopra l'asse dei tempi è uguale all'area sotto;

- quando l'ingresso subisce una brusca variazione, anche l'uscita subisce una brusca variazione nello stesso verso;
- durante un qualsiasi intervallo di tempo in cui l'ingresso mantiene un livello costante, l'uscita decade esponenzialmente verso lo zero.

1.7.3 Risposta a segnali sinusoidali

Esaminiamo ora la risposta di un circuito passa-alto ad un'onda sinusoidale.

Consideriamo ancora il circuito di figura 1.15. Le impedenze del condensatore e della resistenza sono :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad Z_R = R$$

il segnale in uscita è dato da:

$$\begin{aligned} v_o &= v_i \frac{R}{Z_{tot}} = v_i \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = v_i \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \\ &= v_i \frac{j\omega RC(1 - j\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} = v_i \frac{j\omega RC + (\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} (\omega RC + j)$$

quindi il segnale in ingresso viene attenuato di un fattore

$$A = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

che tende ad 1 per ω che tende ad infinito, ed a ωRC per $\omega RC \ll 1$. Il segnale è inoltre sfasato di un angolo θ con

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{\omega RC}$$

Se il segnale in ingresso è un'onda sinusoidale del tipo

$$v_i = V \sin(\omega t)$$

allora il segnale in uscita è

$$v_o = AV \sin(\omega t + \theta)$$

Per avere un derivatore perfetto, deve essere $\theta = \pi/2$ e quindi dovremmo avere $R = 0$ oppure $C = 0$. Tuttavia, se $\omega RC = 0.01$, allora $\theta = 89.4^\circ$ e quindi l'approssimazione è molto buona.

Esaminiamo ora, la risposta all'onda sinusoidale di un circuito passa-basso :

$$v_o = v_i \frac{Z_C}{Z_{tot}} = v_i \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= v_i \frac{1}{1 + j\omega RC} = v_i \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

quindi in questo caso il fattore di attenuazione è pari a:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

che tende a zero per ω che tende ad infinito. Lo sfasamento è invece dato da:

$$\operatorname{tg}(\theta) = -\omega RC$$

Si può verificare il comportamento del circuito come integratore attraverso un'analisi della risposta ad un segnale sinusoidale. In tal caso infatti, se l'ingresso è una funzione del tipo $\cos(\omega t)$, il segnale in uscita dovrà essere del tipo $\sin(\omega t)$, ovvero

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)$$

se lo sfasamento fosse diverso da $\pi/2$, il comportamento non sarebbe quello di un buon integratore. È, invece, possibile verificare che lo sfasamento è $\geq 89.4^\circ$ (invece di 90°) se $RC \geq 15T$, dove T è il periodo dell'onda.

Una forma d'onda sinusoidale, al passaggio attraverso una rete lineare (cioè una rete contenente i soli operatori lineari R , $\frac{1}{C} \int dt$, $L \frac{d}{dt}$) rimane sinusoidale. L'unico effetto che il circuito ha su di essa è quello di introdurre eventualmente uno sfasamento. Questa è una caratteristica delle sole forme d'onda sinusoidali. Ogni altra forma d'onda subisce delle modifiche nella forma. Il processo attraverso il quale la forma di un segnale non sinusoidale è alterata dalla trasmissione attraverso una rete lineare è chiamato “*linear wave shaping*”.

1.8 Riflessione di impedenze nel primario di un trasformatore

Se una generica impedenza Z è presente nel secondario di un trasformatore, quale ad esempio quella mostrata in figura 1.19, l'impedenza “vista” nel primario è legata a Z ed al rapporto di trasformazione da una semplice relazione, che ora esamineremo.

Il rapporto di trasformazione per la tensione è legato al rapporto tra i numeri di spire n_1 ed n_2 presenti rispettivamente nel circuito primario ed in quello secondario, dalla nota relazione:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

L'analogia relazione per la corrente è:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

La relazione tra corrente e tensione nel circuito secondario è d'altronde:

$$\frac{v_2}{i_2} = Z$$

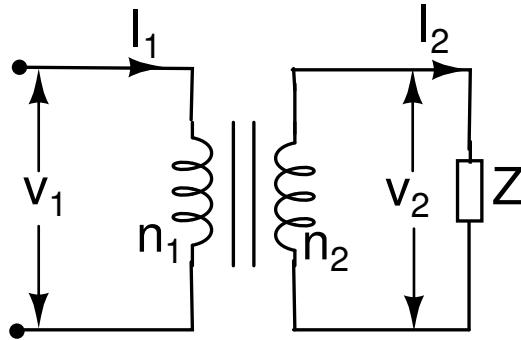


Figura 1.19: Riflessione dell'impedenza Z nel primario di un trasformatore.

L'impedenza "vista" guardando nel primario è:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

Sostituendo in questa i valori forniti dai rapporti di trasformazione per tensione e corrente, otteniamo:

$$Z_{in} = \frac{V_2 n_1 / n_2}{I_2 n_2 / n_1} = Z \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \quad (1.7)$$

Se Z è una semplice resistenza R , avremo:

$$R_{in} = R \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \quad (1.8)$$

Se Z è una capacità $Z = 1/j\omega C$, avremo:

$$C_{in} = C \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \quad (1.9)$$

Se infine Z è un'induttanza $Z = j\omega L$, avremo:

$$L_{in} = L \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \quad (1.10)$$

Il trasformatore potrebbe consistere in un autotrasformatore, quale quello mostrato in figura 1.20.

In tal caso possiamo applicare le medesime relazioni appena scritte, con l'intesa che ora n_1 è il numero di spire nel circuito d'ingresso, mentre n_2 va ora sostituito con il numero totale di spire presenti nel circuito secondario, $n = n_1 + n_2$. La resistenza, capacità ed induttanza viste nel circuito primario saranno ora date da:

$$R_{in} = R \left(\frac{n_1}{n} \right)^2 \quad (1.11)$$

$$C_{in} = C \left(\frac{n}{n_1} \right)^2 \quad (1.12)$$

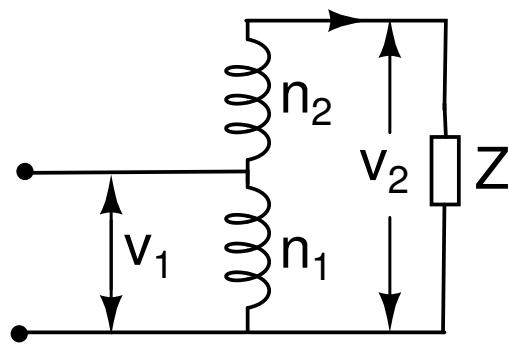


Figura 1.20: Riflessione dell'impedenza Z nel primario di un autotrasformatore.

$$L_{in} = L \left(\frac{n_1}{n} \right)^2 \quad (1.13)$$

Capitolo 2

Uso delle trasformate di Fourier e di Laplace

2.1 Introduzione

Per risolvere le equazioni integro-differenziali che compaiono nel calcolo della risposta di una rete elettrica a determinati segnali applicati, è utile far uso del metodo delle trasformate. Queste infatti trasformano le equazioni integro-differenziali in equazioni algebriche, la cui soluzione è in genere molto più agevole.

Ci limiteremo in questa sezione a fornire gli elementi minimi essenziali per affrontare e risolvere i problemi che comunemente si incontrano in elettronica.

Alcuni semplici esempi saranno anche discussi, per rendere più esplicito l'uso del metodo.

Per approfondimenti si rimanda alla bibliografia elencata in fondo a questa sezione, in particolare alle referenze [1] ed [3].

2.2 La trasformata di Fourier

Sia data una funzione del tempo $f(t)$. La sua trasformata di Fourier è definita come:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Fisicamente possiamo pensare che la $f(t)$ sia costituita da una somma infinita di oscillazioni sinusoidali, ciascuna caratterizzata da una pulsazione ω ed un'ampiezza. La grandezza:

$$F(\omega)d\omega/2\pi$$

rappresenta l'ampiezza con cui compare in tale somma infinita l'oscillazione di frequenza compresa nell'intervallo che va da f ad $f + df$, dove $f = \omega/2\pi$.

Se la $F(\omega)$ è nota, è possibile ricavare la $f(t)$, antitrasformando:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

Dalle definizioni (2.1) ed (2.2), sviluppando il termine:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

si vede facilmente che la $F(\omega)$ è reale se $f(t)$ è una funzione pari di t , cioè se $f(t)=f(-t)$, mentre è immaginaria se $f(t)$ è una funzione dispari: $f(t)=-f(-t)$.

Le seguenti proprietà della trasformata di Fourier sono spesso utili:

- *Linearità*: se $F_1(\omega) = F[f_1(t)]$ ed $F_2(\omega) = F[f_2(t)]$ ed a_1, a_2 sono delle costanti, allora:

$$F[a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] = a_1F_1(\omega) + a_2F_2(\omega)$$

- *proprietà di scaling*: se $F(\omega) = F[f(t)]$ ed a è una costante reale, allora:

$$F[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- *proprietà di traslazione temporale*: se $F(\omega) = F[f(t)]$ allora:

$$F[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- *proprietà di traslazione in frequenza*: se ω_0 è una costante reale e $F(\omega) = F[f(t)]$ allora:

$$F[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

Calcoliamo ad esempio la trasformata della $f(t)$ mostrata nel grafico superiore della figura 2.1, che rappresenta un impulso rettangolare di altezza h e durata t_1 .

Facendo uso della (2.1) troviamo:

$$F(\omega) = h \int_0^{t_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{h}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_1}) = ht_1 \frac{\sin(\omega t_1/2)}{\omega t_1/2} e^{-j\omega t_1/2}$$

L'andamento in funzione di ω della $F(\omega)$ è mostrato nel grafico inferiore della figura 2.1. Vediamo che $F(\omega)$ diminuisce all'aumentare di $|\omega|$. Per $|\omega|$ molto grandi possiamo considerare $F(\omega) = 0$, senza commettere un errore apprezzabile. Notiamo anche che se t_1 diminuisce, il range dei valori di ω in cui $F(\omega)$ è apprezzabile si allarga.

Ad esempio, vediamo in figura 2.2 come cambia la $F(\omega)$ se dimezziamo t_1 rispetto al valore che esso aveva in figura 2.1. In questa figura la curva tratteggiata è quella relativa ad un valore di $t_1 = 1.2$ mentre quella a tratto continuo è ottenuta con un valore di $t_1 = 0.6$. Le componenti di alta frequenza sono tanto più importanti quanto più stretto è l'impulso.

Quando si fa uso della $f(t)$ per descrivere un'eccitazione (o una risposta) si dice che si lavora *nel dominio del tempo*. Quando si fa invece uso della sua trasformata di Fourier $F(\omega)$ si dice che si lavora *nel dominio della frequenza*.

Alle proprietà della trasformata di Fourier elencate sopra, dobbiamo aggiungerne due che riguardano la trasformata della derivata e dell'integrale di una funzione $f(t)$. Se $f(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, allora la trasformata della derivata della $f(t)$ è:

$$F\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = j\omega F(\omega) \quad (2.3)$$

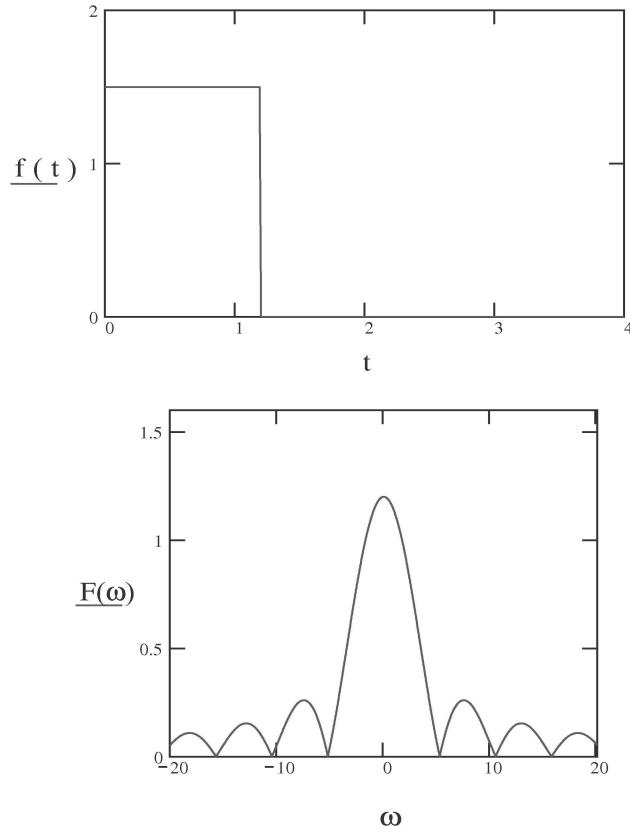


Figura 2.1: Il grafico superiore mostra un impulso rettangolare di altezza $h=1.5$ e durata $t_1 = 1.2s$, quello inferiore la sua trasformata di Fourier

cioè, la derivazione rispetto a t corrisponde alla moltiplicazione della trasformata della funzione iniziale per $j\omega$. Analogamente, per l'integrale troviamo:

$$F \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} \quad (2.4)$$

cioè, l'integrazione rispetto a t corrisponde alla divisione della trasformata iniziale per $j\omega$.

Esaminiamo l'applicazione della tecnica della trasformata di Fourier al calcolo della risposta di un semplice circuito RL come quello mostrato in figura 2.3, cui sia applicato in ingresso un gradino di tensione $V(t) = V_0 u(t)$ (dove $u(t)$ è la funzione *gradino unitario*, che è uguale a 0 per $t < 0$ e ad 1 per $t > 0$).

L'equazione di Kirckhoff per la maglia fornisce:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

dove $i(t)$ è la corrente nella maglia. Prendendo la trasformata di entrambi i membri di questa equazione, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega L \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt + R \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt$$

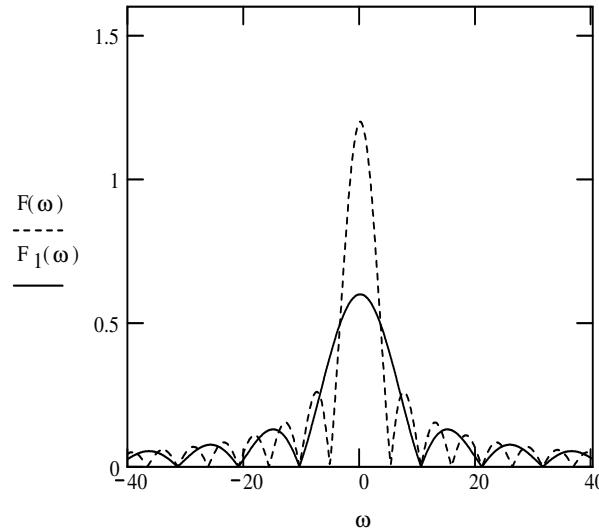


Figura 2.2: Trasformata di Laplace per l'impulso rettangolare. Linea tratteggiata: $t_1 = 1.2\text{s}$; linea a tratto continuo: $t_1 = 0.6\text{s}$

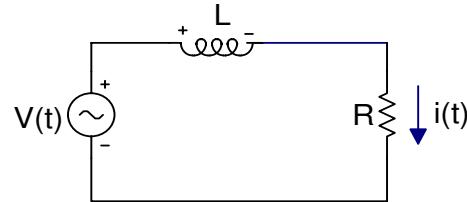


Figura 2.3: Circuito LR

cioè, in simboli:

$$V(\omega) = (R + j\omega L)I(\omega) \equiv Z(\omega)I(\omega)$$

dove $Z(\omega)$ è la *trasformata di Fourier dell'impedenza del circuito*.

L'incognita del nostro problema, cioè la corrente $i(t)$ nella maglia, può esser facilmente calcolata a partire dalla trasformata $I(\omega)$:

$$I(\omega) = \frac{V(\omega)}{R + j\omega L} = \frac{V(\omega)}{Z(\omega)} = V(\omega)Y(\omega)$$

dove $Y(\omega)$ è la trasformata di Fourier dell'ammettenza ($Y(\omega) = 1/Z(\omega)$). La $Y(\omega)$ è anche detta, nel caso generale, la *funzione di Green* del problema.

Come visto, il termine induttivo dà un contributo alla tensione $V(\omega)$ pari a $(j\omega L)I(\omega)$. Ciò si esprime dicendo che *la trasformata dell'impedenza associata all'induttanza è $Z_L = j\omega L$* . Tale terminologia è analoga a quella che si ha nel metodo simbolico applicato a segnali sinusoidali.

Analogamente si può verificare che la trasformata di un'impedenza capacitiva è data da $1/(j\omega C)$, dove C è la capacità. Infatti, per un condensatore inizialmente scarico, caricato da una corrente $i(t)$, la differenza di potenziale ai suoi capi è data da:

$$v(t) = \frac{\int_0^t i(t') dt'}{C}$$

Prendendo la trasformata di entrambi i membri, e facendo uso della relazione:

$$F \left[\int_0^t f(t') dt' \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

si trova:

$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(\omega) = Z(\omega) I(\omega)$$

che è quanto asserito. Il risultato trovato è nuovamente simile a quello noto nel caso del metodo simbolico applicato a segnali sinusoidali. Potremo quindi, in un generico problema, sostituire direttamente alle impedenze le loro trasformate ed ottenere così direttamente la funzione di Green del sistema.

Consideriamo ad esempio il circuito di figura 2.4:

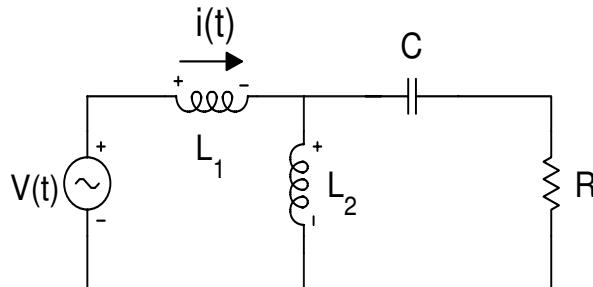


Figura 2.4: Circuito L-LCR

dove:

$$Z_1 = j\omega L_1, \quad Z_2 = j\omega L_2, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_R = R$$

Si ottiene:

$$V(\omega) = Z(\omega) I(\omega)$$

con:

$$Z(\omega) = (Z_C + Z_R) \| Z_2 + Z_1 = \frac{(R + 1/(j\omega C))j\omega L_2}{R + 1/(j\omega C) + j\omega L_2} + j\omega L_1$$

La $Z(\omega)$ descrive completamente le proprietà fisiche del circuito in esame. Essa è in generale una funzione complessa di ω , caratterizzata quindi da un modulo ed una fase, entrambi funzioni di ω .

Nei casi esaminati la soluzione completa del problema, cioè il calcolo della relazione tra $v(t)$ ed $i(t)$, richiederà poi l'uso dell'antitrasformata, applicata ai due termini delle relazioni ottenute tra $V(\omega)$ ed $I(\omega)$. Vedremo più avanti come ciò possa esser realizzato.

2.3 Trasformata di Laplace

Se $f(t)$ è una funzione di t , la sua trasformata di Laplace è una funzione della variabile complessa σ definita da:

$$L(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.5)$$

dove la variabile complessa $s = \sigma + j\omega$.

L'antitrasformata è ottenuta tramite un'integrazione nel piano s complesso:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2.6)$$

dove l'integrazione è effettuata lungo la retta indicata in figura 2.5 dalla linea tratteggiata.

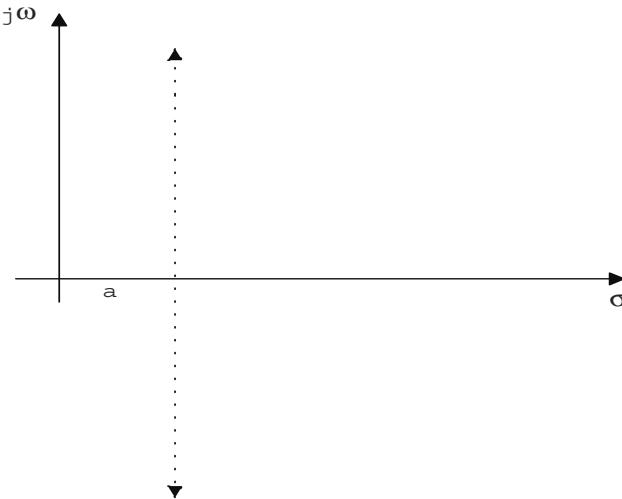


Figura 2.5: Piano s complesso. La linea tratteggiata è quella lungo cui va effettuata l'integrazione della $F(s)e^{st}$ per il calcolo dell'antitrasformata di Laplace

Analogamente al caso della trasformata di Fourier, anche ora esistono alcune relazioni che è utile ricordare.

- proprietà di *scaling*:

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} L\left(\frac{s}{a}\right)$$

- proprietà di *traslazione temporale*:

$$L[f(t - \tau)] = L(s)e^{-s\tau}$$

- proprietà di *traslazione in frequenza*:

$$L[f(t)e^{-\alpha t}] = L(s + \alpha)$$

Va infine ricordata la trasformata della derivata e dell'integrale della funzione $f(t)$. Per quel che concerne la derivata prima, abbiamo una relazione analoga a quella incontrata nel caso della trasformata di Fourier:

$$L[f'(s)] = sL(s) - f(0^+) \quad (2.7)$$

dove $f(0^+)$ è il limite destro di $f(t)$ per t tendente a 0. Più in generale, per la derivata n^{ma} di $f(t)$, abbiamo:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - \dots - \frac{df^{n-1}(0)}{dt^{n-1}}$$

Per ciò che concerne la trasformata dell'integrale della $f(t)$, abbiamo:

$$L\left[\int_0^t f(t')dt'\right] = \frac{1}{s}L(s) \quad (2.8)$$

Dobbiamo notare che l'integrale (2.5) non esiste per una qualsivoglia funzione, per valori generici della parte reale σ di s . Se infatti σ è negativo, il termine $\exp(-st)$ farà sì che l'integrando diverga per $t \rightarrow \infty$. Se invece σ è positivo il termine $\exp(-st)$ tenderà a zero per t tendente ad infinito e l'integrale sarà in genere finito. Più in generale, per una generica funzione $f(t)$ il seguente test consente di determinare quali siano i valori di σ che rendono convergente l'integrale. Si calcoli:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt$$

Se tale integrale esiste per $\sigma > \sigma_0$, dove σ_0 è una costante, allora esisterà la trasformata di Laplace della $f(t)$ per $\sigma > \sigma_0$.

La classe delle funzioni che possono essere trasformate in tal modo è nota come *classe delle funzioni di ordine esponenziale*. Esempi di funzioni appartenenti a tale classe sono:

- $f(t) = t^n$, per la quale è: $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0$ per n generico, se $\sigma > 0$
- $f(t) = e^{5t}$, per la quale è: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{5t} e^{-\sigma t} = 0$ per $\sigma > 5$

Una funzione che non è di ordine esponenziale è: $f(t) = \exp(t^2)$.

Tutte le funzioni che normalmente incontreremo nella applicazioni elettroniche saranno di ordine esponenziale. Per ulteriori dettagli vedasi la referenza [1].

Avremo spesso bisogno delle L-trasformate di alcune funzioni elementari, che riassumiamo qui di seguito:

$f(t)$	$L(s)$
$u(t)$ (<i>funzione gradino</i>)	$1/s$
t (<i>rampa</i>)	$1/s^2$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$u(t-a)$ (<i>gradino unitario ritardato</i>)	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$\delta(t)$ (<i>funzione δ di Dirac</i>)	1

Ricordando che una funzione di variabile complessa s che sia espressa come rapporto tra due polinomi a coefficienti reali nella variabile s è completamente individuata, a meno di una costante moltiplicativa, dai suoi poli e zeri nel piano complesso s , potremo rappresentare le $F(s)$ appena scritte, come mostrato nelle figure 2.6 e 2.7, dove un cerchietto indica uno zero ed una X un polo.

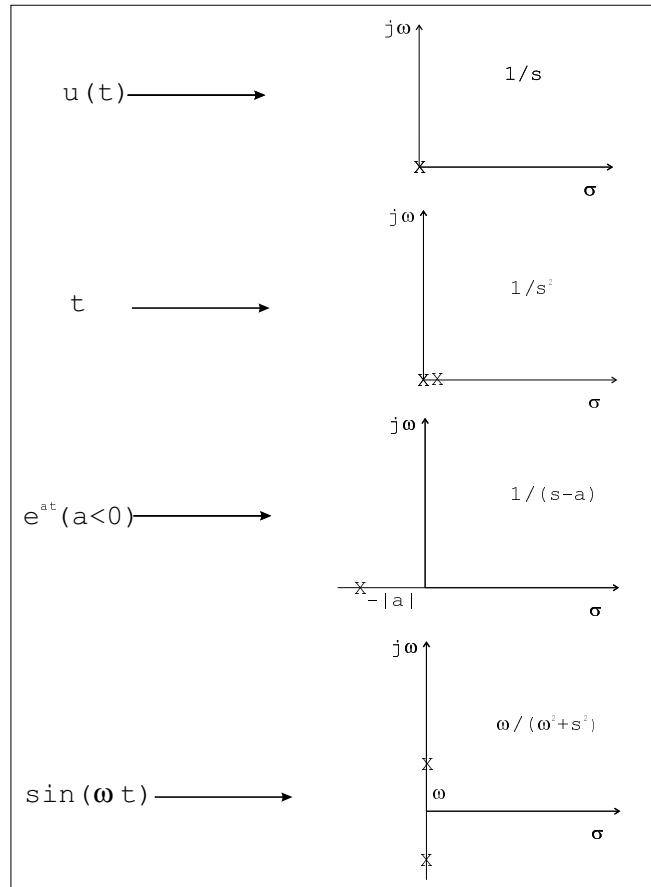


Figura 2.6: Rappresentazione di alcune funzioni elementari tramite le posizioni degli zeri e dei poli nel piano s complesso: un polo è indicato con una X , uno zero con un O

Dall'esame delle figure 2.6 e 2.7 possiamo fare le seguenti considerazioni generali:

- i poli sono o reali o complessi coniugati
- ad un polo reale singolo è associata una funzione $f(t)$ di tipo esponenziale
- a due poli complessi coniugati sono associate funzioni di tipo sinusoidale
- se i poli si trovano nel semipiano destro, la $f(t)$ diverge
- quanto più un polo reale negativo è lontano dall'origine, tanto più velocemente l'esponenziale tende a zero
- quanto maggiore è la distanza dall'origine di una coppia di poli complessi coniugati, tanto più elevata è la frequenza d'oscillazione della corrispondente $f(t)$

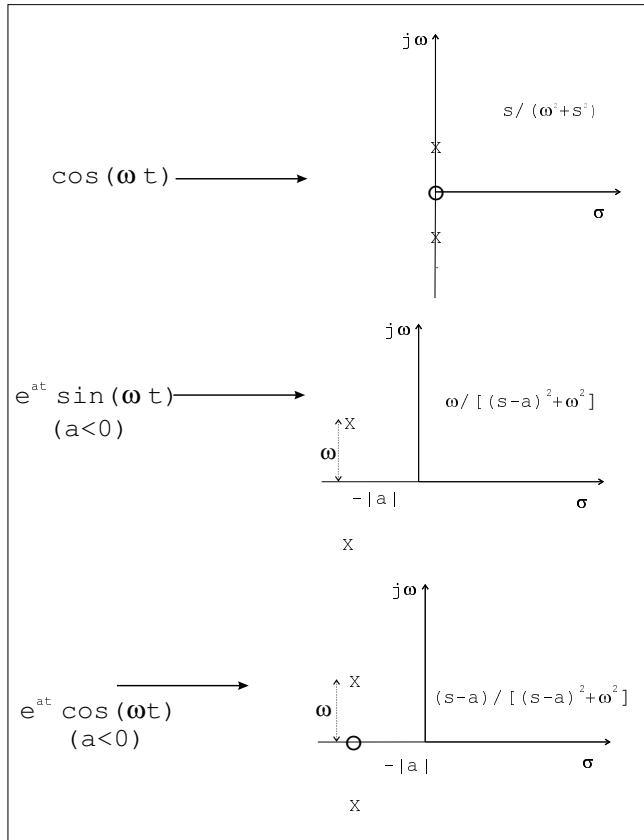


Figura 2.7: Rappresentazione di alcune funzioni elementari tramite le posizioni degli zeri e dei poli nel piano s complesso: un polo è indicato con una X , uno zero con un O

Se l'equazione trasformata è del tipo:

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

dove $X(s)$ è la trasformata dell'eccitazione, $Y(s)$ quella della risposta e $G(s)$ è la funzione di Green del sistema, la risposta $y(t)$ può essere ottenuta antitrasformando la $Y(s)$. Per far ciò si cerca di esprimere la $Y(s)$ come somma di frazioni parziali, di ciascuna delle quali si conosca l'antitrasformata. Data la linearità della trasformata, la risposta sarà la somma delle singole antitrasformate.

In tale tipo di calcoli sono utili i cosiddetti teoremi *del valore iniziale* e *del valore finale*:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) \quad (2.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (2.10)$$

Le trasformate di Laplace vengono normalmente definite per funzioni che sono nulle per $t < 0$. Ciò copre la più gran parte delle funzioni d'interesse in elettronica.

È possibile estendere il metodo delle trasformate di Laplace al caso di funzioni non nulle per $t < 0$, ma esiste allora un'ambiguità nella trasformata inversa.

Da un punto di vista pratico esiste poca differenza tra i metodi di Fourier e di Laplace. Tuttavia, poiché la trasformata di Laplace esiste per una più ampia classe di funzioni, è normalmente più conveniente usare quest'ultimo metodo. Ad esempio, le funzioni che crescono indefinitamente nel tempo non posseggono una trasformata di Fourier e quindi esse (che compaiono quando si debba analizzare il comportamento di sistemi instabili) debbono essere trattate con il metodo delle trasformate di Laplace.

Nelle applicazioni elettroniche si incontrano spesso trasformate di Laplace della forma:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - \nu_1)(s - \nu_2)(s - \nu_3) \cdots (s - \nu_n)} \quad (2.11)$$

dove $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ sono i le radici della funzione $D(s)$, cioè i poli della funzione $N(s)/D(s)$.

Esaminiamo ora alcuni esempi, per poi analizzare metodi generali per il calcolo dell'antitrasformata.

2.4 Esempi di calcolo di antitrasformate di Laplace

Equazione differenziale lineare del secondo ordine

Si debba risolvere la seguente equazione lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4e^{-3t}u(t)$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= 2 \\ \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} &= -1 \end{aligned}$$

Si prenda la trasformata di Laplace di entrambi i membri dell'equazione:

$$s^2X(s) - sx(0) - \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = \frac{4}{s+3}$$

Sostituendo i valori iniziali, questa fornisce:

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = \frac{4}{s+3} + 2s + 5$$

da cui:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Questa può esser riscritta come:

$$X(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

L'antitrasformata di questa si scrive in modo diretto come somma delle antitrasformate delle singole frazioni:

$$x(t) = (5e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$$

Questa è quindi la soluzione dell'equazione differenziale, con le condizioni al contorno imposte.

Esempi relativi a circuiti elettrici

In modo analogo a quanto visto nel caso delle trasformate di Fourier possiamo, anche nel caso delle trasformate di Laplace, evitare di scrivere l'equazione differenziale associata ad un dato circuito, scrivendo direttamente l'equazione algebrica che si ottiene sostituendo a ciascun componente (induttanza, capacità, resistenza) nonché a ciascun generatore di tensione o di corrente, i rispettivi L-trasformati. Ciò segue ovviamente dalla linearità delle equazioni.

Per una resistenza R sappiamo che è:

$$v(t) = Ri(t)$$

per cui, in termini delle L-trasformate:

$$V(s) = RI(s)$$

la L-trasformata dell'impedenza associata alla resistenza R è quindi:

$$Z_R = R$$

Nel caso di un'induttanza abbiamo invece:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

la cui L-trasformata è:

$$V(s) = L[sI(s) - i(0)] = LsI(s) - Li(0)$$

dove $i(0)$ è la corrente nell'induttanza per $t = 0$.

Da questa otteniamo poi:

$$I(s) = \frac{1}{Ls}V(s) + \frac{i(0)}{s}$$

Se poi le condizioni iniziali sono tali che $i(0) = 0$ otteniamo:

$$V(s) = LsI(s)$$

per cui l'impedenza trasformata è:

$$Z_L(s) = Ls$$

Un risultato analogo a quello del metodo simbolico, con la sola sostituzione di s a $j\omega$.

Nel caso di un condensatore troviamo in modo analogo:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

da cui:

$$I(s) = C [sV(s) - v(0)] = CsV(s) - Cv(0)$$

e poi:

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

Se la tensione ai capi del condensatore è inizialmente nulla: $v(0) = 0$, avremo:

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

Ancora una volta un risultato analogo a quello del caso simbolico, con la sola sostituzione della variabile complessa s a quella immaginaria $j\omega$.

Risposta di un circuito RC passa-basso ad un gradino unitario

Consideriamo lo schema del circuito passa-basso mostrato in figura 3.1, dove ammettiamo che la differenza di potenziale ai capi del condensatore sia nulla per $t=0$.

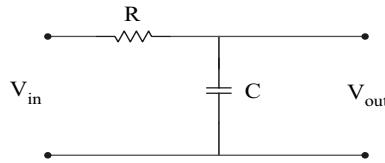


Figura 2.8: Circuito RC passa-basso

Applicando il metodo delineato nella sezione precedente, troviamo la seguente relazione tra le trasformate dell'input e dell'output:

$$V_{out}(s) = V_{in}(s) \frac{1}{1 + sRC} = V_{in}(s) \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

dove $\tau = RC$. Poichè la trasformata dell'input (gradino unitario) è uguale ad $1/s$, avremo quindi:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s\tau} \frac{1}{s + 1/\tau}$$

Scriviamo il secondo membro di questa espressione nella forma:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s + 1/\tau}$$

con a e b costanti da determinare. Uguagliando le due espressioni di $V_{out}(s)$, troviamo $a = 1$ e $b = -1$. La trasformata della risposta sarà quindi:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}$$

la cui antitrasformata è:

$$v_{out} = 1 - e^{-t/\tau}$$

che è il risultato noto per tale circuito, da analisi elementari.

Risposta di un circuito RC passa-basso ad una rampa

Ammettiamo ora che al medesimo circuito RC sia applicata in ingresso una rampa di pendenza unitaria: $f(t) = t$. La funzione di trasferimento, è la stessa del caso precedente. La differenza è nel fatto che ora la trasformata dell'input è $1/s^2$. Avremo quindi:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{\tau s^2} \frac{1}{s + 1/\tau} = \frac{1}{\tau s} \left(\frac{1}{s} \frac{1}{s + 1/\tau} \right) = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right]$$

ed in definitiva:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + 1/\tau}$$

L'antitrasformata di questa è:

$$v_{out} = t - \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Risposta ad un gradino unitario di un circuito RL

Analogamente al caso del circuito RC, anche in quello del circuito RL di figura 2.9, cui sia applicato in ingresso un gradino unitario di tensione e dove si ammetta che la corrente sia nulla per $t=0$, possiamo scrivere in modo ovvio la relazione tra le L-trasformate dell'input e dell'output:

$$V_{out}(s) = V_{in}(s) \frac{sL}{R + sL} = V_{in}(s) \frac{s}{s + R/L} = V_{in}(s) \frac{s}{s + 1/\tau}$$

con $\tau = L/R$. Da questa segue:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s} \frac{s}{s + 1/\tau} = \frac{1}{s + 1/\tau}$$

e quindi:

$$v_{out}(t) = e^{-t/\tau}$$

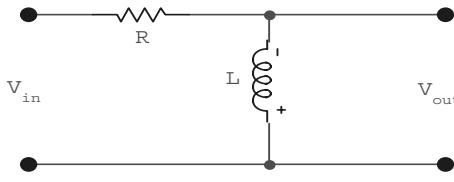


Figura 2.9: Circuito RL

Risposta ad una rampa del circuito RL

Questa volta la trasformata dell'eccitazione è $1/s^2$, per cui avremo:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s^2} \frac{s}{s + 1/\tau} = \frac{1}{s} \frac{1}{s + 1/\tau}$$

che può esser messa nella forma:

$$V_{out}(s) = \tau \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right)$$

la cui antitrasformata è:

$$v_{out}(t) = \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Notiamo che negli ultimi esempi abbiamo implicitamente ammesso che le condizioni iniziali fossero: $i(0) = 0$ nel caso del gradino applicato al circuito RL e $v_{out}(0) = 0$ nel caso della rampa.

2.5 Risposta di un circuito ad un'eccitazione di forma generica

Negli esempi esaminati abbiamo sempre considerato eccitazioni di forma particolarmente semplice: gradini unitari o rampe. Ci proponiamo ora di esaminare il caso in cui il segnale applicato abbia una forma generica, descritta da una funzione $S(t)$ quale ad esempio quella mostrata in figura 2.10.

Possiamo calcolare la risposta del circuito facendo uso del principio di sovrapposizione. Consideriamo cioè il segnale $S(t)$ in un piccolo intervallo di tempo $(t_1, t_1 + \Delta t_1)$. Se Δt_1 è molto piccolo, potremo schematizzare tale segnale con una funzione δ^1 : $A\delta(t_1)$, dove A è la grandezza $S(t_1)\Delta t_1$ (per $\Delta t_1 \rightarrow 0$). La risposta $R_1(t)$ del circuito a tale segnale sarà quindi approssimabile, per $\Delta t \rightarrow 0$ con la risposta a tale funzione δ :

$$R_1(t) = Ay(t - t_1)$$

dove $y(t - t_1)$ rappresenta la risposta del circuito al tempo t ad una δ applicata al tempo t_1 .

¹ δ è la funzione $\delta(x)$ introdotta da Dirac

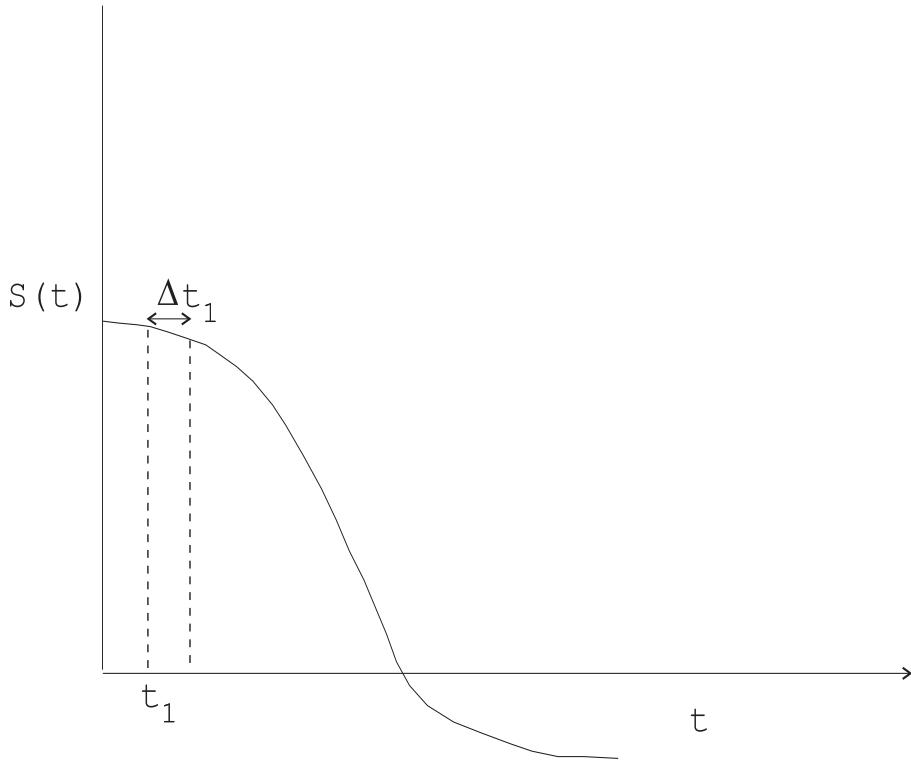


Figura 2.10: Funzione di forma generica. Applicazione della trasformata di Laplace per il calcolo della risposta di un circuito

Sostituendo in quest'espressione ad A il termine $S(t_1)\Delta t_1$, otteniamo:

$$R_1(t) = S(t_1)y(t - t_1)\Delta t_1$$

che, per $\Delta t_1 \rightarrow 0$ si scrive:

$$R_1(t) = S(t_1)y(t - t_1)dt_1$$

Per il principio di sovrapposizione e la linearità del sistema, la risposta del circuito al tempo t sarà la somma (cioè l'integrale) della risposta a tutti gli impulsi elementari che hanno avuto luogo negli istanti t_i , con $t_i < t$. In altri termini:

$$R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(t) \rightarrow \int_0^t S(t')y(t - t')dt'$$

Ponendo in questa $\tau = t - t'$, otteniamo:

$$R(t) = \int_0^t S(t - \tau)y(\tau)d\tau \quad (2.12)$$

Questo è noto come l'*integrale di convoluzione* delle funzioni $S(t)$ e $y(t)$. Quindi la risposta di un circuito ad un'eccitazione generica $S(t)$ è ottenibile attraverso la (2.12), una volta nota la risposta $y(\tau)$ alla funzione $\delta(t)$.

Si può facilmente dimostrare che:

$$\mathcal{L}[R(t)] = \mathcal{L}[S(t)] \cdot \mathcal{L}[y(t)]$$

ovvero:

$$\int_0^\infty R(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty S(t)e^{-st}dt \cdot \int_0^\infty y(t')e^{-st'}dt'$$

Per dimostrare tale relazione, calcoliamo la trasformata di Laplace del membro di destra della (2.12):

$$\int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t S(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

e trasformiamo l'integrale interno estendendolo fino a $+\infty$. Possiamo far ciò moltiplicandolo per la funzione $u(t-\tau)$, che è nulla per $t < \tau$. L'espressione precedente diventa:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^\infty S(t-\tau)y(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty y(\tau)d\tau \int_0^\infty S(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt$$

L'integrale interno è nullo per $t < \tau$. Integriamo quindi tra τ ed ∞ :

$$\int_0^\infty y(\tau)d\tau \int_\tau^\infty S(t-\tau)e^{-st}dt$$

Poniamo ora $t' = t - \tau$. L'espressione precedente diviene:

$$\int_0^\infty y(\tau)d\tau \int_0^\infty S(t')e^{-s(t'+\tau)}dt' = \int_0^\infty y(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^\infty S(t')e^{-st'}dt'$$

che è appunto il prodotto delle trasformate:

$$Y(s) \cdot S(s)$$

2.6 Funzioni esprimibili come rapporto di polinomi

Negli esempi esaminati abbiamo incontrato funzioni esprimibili come rapporti tra polinomi nella variabile complessa s , di cui abbiamo, con metodi relativamente semplici, calcolato l'antitrasformata.

Abbiamo raggiunto lo scopo esprimendo la funzione come somma di frazioni elementari, aventi ciascuna un'antitrasformata nota, e sommando poi le antitrasformate dei singoli termini. Tale decomposizione è nota come *sviluppo in frazioni parziali*.

Ammetteremo sempre che, nella funzione data, il grado del polinomio a numeratore sia minore di quello a denominatore ed analizzeremo il metodo di decomposizione distinguendo tre casi diversi.

a) *Poli reali semplici*

Supponiamo cioè che la funzione da antitrasformare, $F(s)$ possa essere scritta come:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s + \alpha)D_1(s)}$$

dove il numero reale α non è una radice di $D_1(s)$. Possiamo allora scrivere $F(s)$ nella forma:

$$F(s) = \frac{k}{s + \alpha} + F_1(s)$$

Per determinare la costante k , moltiplichiamo entrambi i membri di quest'equazione per $s + \alpha$:

$$(s + \alpha)F(s) = k + (s + \alpha)F_1(s)$$

cioè:

$$\frac{N(s)}{D_1(s)} = k + (s + \alpha)F_1(s)$$

Ponendo ora $s = -\alpha$, otteniamo:

$$k = (s + \alpha) F(s)|_{s=-\alpha} = \left. \frac{N(s)}{D_1(s)} \right|_{s=-\alpha} = \frac{N(-\alpha)}{D_1(-\alpha)}$$

Trovato in tal modo k , il problema dello sviluppo in frazioni parziali di $F(s)$ è ricondotto a quello dello sviluppo di $F_1(s)$. Se questa ha un polo semplice β , il processo può esser ripetuto relativamente ad F_1 . Notiamo che:

$$F_1(s) = F(s) - \frac{k}{s + \alpha}$$

Consideriamo ad esempio la funzione:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Poichè questa funzione ha solo poli semplici ed inoltre il grado del polinomio a numeratore è inferiore di quello del polinomio a denominatore, lo sviluppo in frazioni parziali è:

$$X(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

dove:

$$k_1 = (s+1) X(s)|_{s=-1} = \left. \frac{2s^2 + 11s + 19}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = 5$$

$$k_2 = (s+2) X(s)|_{s=-2} = \left. \frac{2s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2} = -5$$

$$k_3 = (s+3) X(s)|_{s=-3} = \left. \frac{2s^2 + 11s + 19}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-3} = 2$$

Ne segue che:

$$X(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

e quindi:

$$x(t) = (5e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}) u(t)$$

b) *Polì semplici complessi*

Poichè le radici complesse di un polinomio a coefficienti reali compaiono sempre insieme alle complesse coniugate, scriveremo $F(s)$ nella forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)D_1(s)}$$

dove $\alpha \pm j\beta$ non sono radici di $D_1(s)$.

$F(s)$ può ora esser messa nella forma:

$$F(s) = \frac{k}{(s + \alpha + j\beta)} + \frac{k^*}{(s + \alpha - j\beta)} + F_1(s)$$

Ora determineremo k (e quindi k^*) seguendo la stessa procedura adottata nel caso di radici reali semplici.

$$\begin{aligned} k &= (s + \alpha + j\beta)F(s)|_{s=-\alpha-j\beta} = \left. \frac{N(s)}{(s + \alpha - j\beta)D_1(s)} \right|_{s=-\alpha-j\beta} = \\ &= \frac{N(-\alpha - j\beta)}{(-2j\beta)D_1(-\alpha - j\beta)} \end{aligned}$$

Una volta che k e k^* siano stati così determinati, i due termini complessi ottenuti possono essere combinati ponendo $k = a + jb$:

$$\frac{k}{(s + \alpha + j\beta)} + \frac{k^*}{(s + \alpha - j\beta)} = \frac{(a + jb)(s + \alpha - j\beta) + (a - jb)(s + \alpha + j\beta)}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)}$$

cioè:

$$\dots \frac{2a(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{2b\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Consideriamo il seguente esempio:

$$Y(s) = \frac{10s^2 + 15s - 5}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{10s^2 + 15s - 5}{s(s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)}$$

la cui decomposizione in frazioni parziali è:

$$Y(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{k}{s + 1 + 2j} + \frac{k^*}{s + 1 - 2j}$$

dove:

$$k_0 = sY(s)|_{s=0} = \left. \frac{10s^2 + 15s - 5}{s^2 + 2s + 5} \right|_{s=0} = -1$$

$$k = (s + 1 + 2j)Y(s)|_{s=-1-2j} = \left. \frac{10s^2 + 15s - 5}{s(s + 1 - 2j)} \right|_{s=-1-2j} = \frac{11}{2} + j\frac{3}{2}$$

Ne segue che:

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{11/2 + j3/2}{s + 1 + 2j} + \frac{11/2 - j3/2}{s + 1 - 2j} = -\frac{1}{s} + \frac{11(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{3 \cdot 2}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

L'antitrasformata è allora:

$$y(t) = (-1 + 11e^{-t}\cos(2t) + 3e^{-t}\sin(2t)) u(t)$$

c) *Poli multipli*

Supponiamo che $F(s)$ abbia la forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - s_0)^n D_1(s)}$$

dove $-s_0$ non è una radice di $D_1(s)$ e, nel caso generale, complesso. In tal caso scriviamo $F(s)$ come:

$$F(s) = \frac{k_1}{s + s_0} + \frac{k_2}{(s + s_0)^2} + \cdots + \frac{k_{n-1}}{(s + s_0)^{n-1}} + \frac{k_n}{(s + s_0)^n} + F_1(s)$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa equazione per $(s + s_0)^n$ troviamo:

$$(s + s_0)^n F(s) = k_1(s + s_0)^{n-1} + k_2(s + s_0)^{n-2} + \cdots + k_{n-1}(s + s_0) + \\ + k_n + (s + s_0)^n F_1(s)$$

Ponendo in questa $s = -s_0$, otteniamo:

$$k_n = (s + s_0)^n F(s)|_{s=-s_0}$$

Per trovare ora k_{n-1} , dopo aver moltiplicato per $(s + s_0)^n$, prendiamo la derivata rispetto ad s di entrambi i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [(s + s_0)^n F(s)] &= \\ &= (n - 1)k_1(s + s_0)^{n-2} + (n - 2)k_2(s + s_0)^{n-3} + \cdots \\ &\quad + 2k_{n-2}(s + s_0) + k_{n-1} + 0 + (s + s_0)^n \frac{dF_1(s)}{ds} + n(s + s_0)^{n-1} F_1(s) \end{aligned}$$

Ponendo ora $s = -s_0$, otteniamo:

$$k_{n-1} = \frac{d}{ds} [(s + s_0)^n F(s)]|_{s=-s_0}$$

Prendendo invece la derivata seconda, troviamo:

$$2k_{n-2} = \frac{d^2}{ds^2} [(s + s_0)^n F(s)]|_{s=-s_0}$$

In generale, per $r = 0, 1, 2, \dots, n - 1$:

$$k_{n-r} = \frac{1}{r!} \frac{d^r}{ds^r} [(s + s_0)^n F(s)]|_{s=-s_0}$$

Consideriamo il seguente esempio:

$$F(s) = \frac{s - 2}{s(s + 1)^3}$$

Questa può essere espressa come:

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{(s + 1)^2} + \frac{k_3}{(s + 1)^3}$$

Applicando il metodo indicato sopra troviamo:

$$\begin{aligned} k_0 &= sF(s)|_{s=0} = \frac{s-2}{(s+1)^3}\Big|_{s=0} = -2 \\ k_3 &= (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s-2}{s}\Big|_{s=-1} = 3 \\ k_2 &= \frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s-2}{s} \right]_{s=-1} = \frac{2}{s^2}\Big|_{s=-1} = 2 \\ k_1 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 F(s)]\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s^2} \right)\Big|_{s=-1} = 2 \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$F(s) = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^3}$$

la cui antitrasformata è:

$$f(t) = \left(-2 + 2e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{3}{2}t^2e^{-t} \right) u(t)$$

I risultati ottenuti ci consentono di scrivere in modo immediato la risposta di un circuito quando se ne conosca la trasformata di Laplace, almeno nel caso che si presenta più di frequente, in cui i poli sono singoli o doppi (reali o complessi).

Se la trasformata è scritta nella forma:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-\nu_1)(s-\nu_2)\cdots(s-\nu_n)} \quad (2.13)$$

ed i poli sono tutti singoli, la $f(t)$ è data da:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N(s)(s-\nu_i)e^{st}}{D(s)} \right)_{s=\nu_i} \quad (2.14)$$

Se alcuni dei poli sono doppi, l'ultima espressione scritta continua a valere per il contributo dei poli singoli, mentre un polo doppio darà un contributo aggiuntivo:

$$\left(\frac{N(s)(s-\nu_k)^2}{D(s)} \right)_{s=\nu_k} te^{\nu_k t} + \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{N(s)(s-\nu_k)^2}{D(s)} \right) \right]_{s=\nu_k} e^{\nu_k t} \quad (2.15)$$

Ulteriori dettagli possono esser trovati nelle referenze [2], [3] e [4]. Nelle prossime sezioni analizzeremo alcuni circuiti facendo uso della tecnica delle trasformate.

2.7 Circuito LCR eccitato da un gradino unitario di tensione

Il circuito di figura 2.11 sarà ora analizzato con la tecnica delle trasformate di Laplace, ammettendo che la sorgente di tensione fornisca un gradino unitario e che le condizioni iniziali siano:

$$i_L(0) = 0$$

$$v_C(0) = 0$$

Possiamo ora sostituire a ciascun componente la sua L-trasformata, con che l'equazione della maglia si scrive:

$$\begin{aligned} V(s) &= \left(sL + \frac{R/sC}{R + 1/sC} \right) I(s) = \left(sL + \frac{R}{1 + sRC} \right) I(s) = \\ &= \frac{L(\tau s^2 + s + R/L)}{1 + \tau s} I(s) \end{aligned}$$

dove $I(s)$ è la trasformata della corrente $i_L(t)$ nell'induttanza, $V(s)$ la trasformata dell'eccitazione e dove si è posto $\tau = RC$.

Da questa otteniamo:

$$I(s) = \frac{1 + \tau s}{sL(\alpha + s + \tau s^2)}$$

dove abbiamo sostituito a $V(s)$ la sua espressione ($1/s$) e posto $\alpha = R/L$. La trasformata della differenza di potenziale ai capi dell'induttanza è allora:

$$V_{AB}(s) = sLI(s) = \frac{1 + \tau s}{\alpha + s + \tau s^2}$$

Ora potremo avere soluzioni molto diverse a seconda che le radici del polinomio a denominatore siano:

1. reali e coincidenti
2. reali e distinte
3. complesse coniugate

Le radici in questione sono date da:

$$s_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau\alpha}}{2\tau}$$

Il discriminante è:

$$\Delta = 1 - 4\alpha\tau = 1 - 4R^2C/L$$

Le radici saranno reali e coincidenti se $\Delta = 0$ cioè se:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

saranno reali e distinte se il discriminante è positivo:

$$R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Saranno infine complesse coniugate se:

$$R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

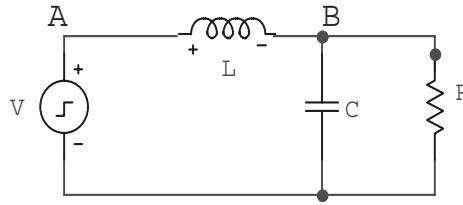


Figura 2.11: Circuito LCR

Consideriamo il caso di radici distinte (reali o complesse).

In tal caso la trasformata della risposta può essere scritta come:

$$V_{AB}(s) = \frac{1 + \tau s}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Usiamo ora le equazioni (2.14) e (2.15) per trovare l'antitrasformata. Troviamo:

$$v_{AB} = \frac{1 + \tau s_1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{1 + \tau s_2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$$

Se s_1 ed s_2 sono complessi, con $s_1 = s_2^* = \lambda$, allora:

$$v_{AB} = \frac{(1 + \lambda\tau)e^{\lambda t} - (1 + \lambda^*\tau)e^{\lambda^*t}}{\lambda - \lambda^*}$$

Poniamo ora:

$$Re\lambda = a, \quad Im\lambda = b$$

Avremo allora, dopo qualche passaggio:

$$v_{AB} = \frac{e^{at}}{b} [(1 + a\tau)\sin(bt) + b\tau\cos(bt)]$$

Notiamo che $a = -1/(2RC)$. Vediamo allora che l'oscillazione si smorza con una costante di tempo pari a $2RC$. La tensione nel punto B sarà:

$$v_B = v_{in} - v_{AB} = 1 - v_{AB}$$

La figura 2.12 mostra la risposta del circuito nel caso in cui si sia scelto:

$$C = 1nF, \quad L = 10\mu H$$

e per valori di R compresi tra 200Ω e 500Ω , che forniscono valori complessi per s_1 ed s_2 .

Se i poli sono reali e distinti avremo, indicandoli con s_1 ed s_2 :

$$v_{AB} = \frac{(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \tau(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})}{s_1 - s_2}$$

Notiamo che è:

$$s_1 - s_2 = \frac{\delta}{\tau} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\tau} = \frac{\sqrt{1 - 4R^2C/L}}{RC} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{LC}}$$

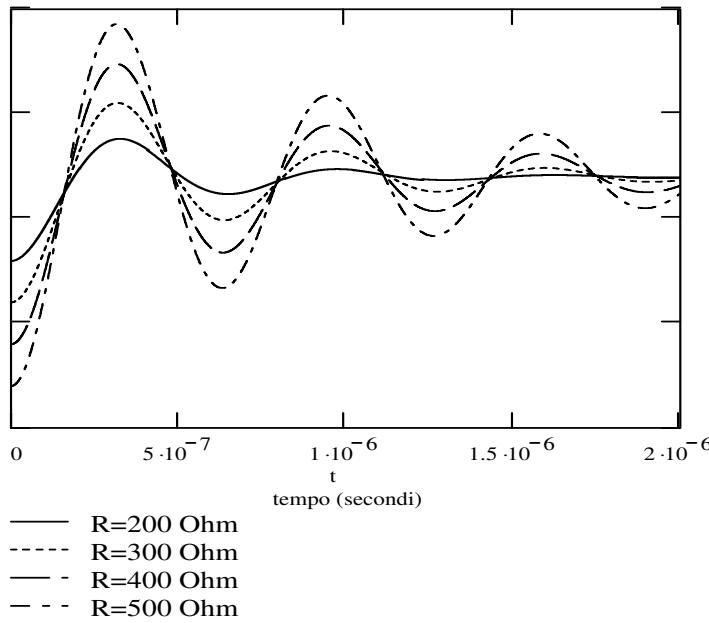


Figura 2.12: Risposta del circuito di figura 2.11 eccitato da un gradino unitario di tensione, per valori di R compresi tra 200 e 500 Ω . Il valore di L è 10 μH ; quello di C 1 $n\text{F}$

dove si è posto: $\delta = \sqrt{\Delta}$. Abbiamo ovviamente:

$$s_1 = \frac{-1 + \delta}{2\tau}$$

$$s_2 = \frac{-1 - \delta}{2\tau}$$

$$s_1 - s_2 = \frac{\delta}{\tau}$$

Si ottiene infine dopo alcuni passaggi:

$$v_{AB} = \frac{\tau}{2\delta} e^{-t/2\tau} \left[\left(e^{\frac{\delta t}{2\tau}} - e^{-\frac{\delta t}{2\tau}} \right) + \delta \left(e^{\frac{\delta t}{2\tau}} + e^{-\frac{\delta t}{2\tau}} \right) \right]$$

La figura 2.13 mostra l'andamento della tensione in B nel caso in cui C ed L abbiano i medesimi valori del caso precedente e per valori di R compresi tra (10 Ω) e (50 Ω). Come si vede, la tensione nel punto B sale tanto più lentamente quanto minore è il valore di R.

Consideriamo ancora un circuito LRC, ora con i tre componenti messi in serie tra di loro ed in serie al generatore (vedasi la figura 2.14). Quest'ultimo fornisce anche in questo caso un gradino unitario di tensione.

Ammettiamo che i valori dei componenti siano:

$$R = 12\Omega , \quad L = 2H , \quad C = 0.02F$$

e le condizioni iniziali:

$$i_L(0) = 0 , \quad v_C(0) = 0$$

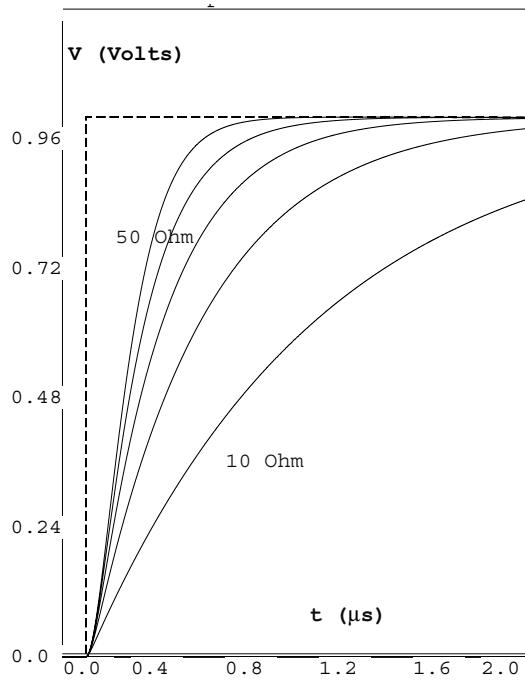


Figura 2.13: Risposta del circuito di figura 2.11 eccitato da un gradino unitario di tensione, per valori di R compresi tra 10 e 50 Ω . Il valore di L è 10 μH ; quello di C 1 $n\text{F}$

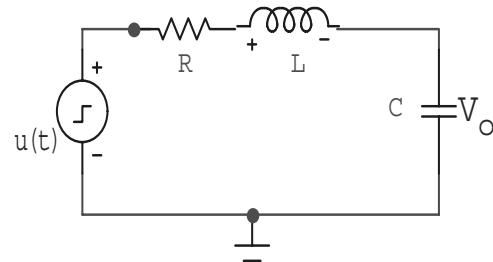


Figura 2.14: Circuito RLC-serie

Le trasformate dei componenti e dell'eccitazione sono allora:

$$Z_R = 12 \ , \ Z_L = 2s \ , \ Z_C = 50/s \ , \ U(s) = 1/s$$

La trasformata della tensione d'uscita V_o sarà allora:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_L} U(s) = \frac{50/s}{50/s + 2s + 12} \left(\frac{1}{s} \right) = \\ &= \frac{25}{(25 + 6s + s^2)s} = \frac{k_0}{s} + F(s) \end{aligned}$$

dove:

$$k_0 = s V_o(s)|_{s=0} = 1$$

Ne segue:

$$F(s) = V_o(s) - \frac{k_0}{s} = \frac{25}{s(s^2 + 6s + 25)} - \frac{1}{s} = -\frac{6+s}{s^2 + 6s + 25}$$

Otteniamo infine per $V_o(s)$:

$$V_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{6+s}{(s+3)^2 + 4^2} = \frac{1}{s} - \frac{3+s}{(s+3)^2 + 4^2} - \frac{4 \cdot 3/4}{(s+3)^2 + 4^2}$$

Si ottiene allora per l'antitrasformata:

$$v_o(t) = 1 - e^{-3t} \left(\cos(4t) + \frac{3}{4} \sin(4t) \right) u(t)$$

2.8 Risposta di un circuito CR ad un segnale sinusoidale

La tecnica delle trasformate di Laplace si rivela di grande utilità anche nei casi in cui il segnale applicato sia sinusoidale. Esaminiamo il caso particolare di un circuito CR come quello di figura 2.15, in cui il segnale applicato è:

$$v_{in} = v_o \sin(\omega t)$$

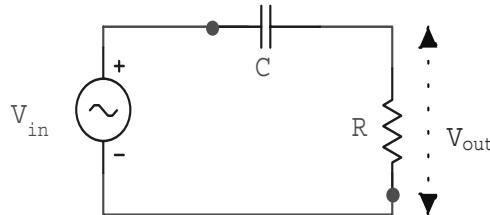


Figura 2.15: Circuito RC eccitato da una sorgente sinusoidale di tensione

La funzione di trasferimento di questo circuito è:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{s\tau}} = \frac{s}{s + a}$$

dove: $\tau = RC$ e $a = 1/\tau$.

la trasformata di Laplace di v_{in} è:

$$V_{in}(s) = \frac{v_o \omega}{s^2 + \omega^2}$$

la trasformata del segnale in uscita sarà:

$$V_{out}(s) = \frac{v_o \omega s}{(s^2 + \omega^2)(s + a)} \quad (2.16)$$

che può esser riscritta come:

$$V_{out}(s) = \frac{v_o \omega s}{(s + j\omega)(s - j\omega)(s + a)} \quad (2.17)$$

Questa può esser scritta come la somma di termini di cui si conosce l'antitrasformata, con i metodi descritti in precedenza. Si ottiene:

$$V_{out}(s) = \frac{A}{s + j\omega} + \frac{B}{s - j\omega} + \frac{C}{s + a}$$

dove:

$$A = \frac{v_o \omega}{2(\omega^2 + a^2)} (a + j\omega)$$

$$B = \frac{v_o \omega}{2(\omega^2 + a^2)} (a - j\omega)$$

$$C = -\frac{av_o \omega}{\omega^2 + a^2}$$

Ne segue per l'antitrasformata:

$$v_{out}(t) = Ae^{-j\omega t} + Be^{j\omega t} + Ce^{-at}$$

Questa, facendo uso delle espressioni trovate per i coefficienti A, B, C, può esser riscritta come:

$$v_{out}(t) = \frac{v_o \omega}{\omega^2 + a^2} \left[\frac{1}{2} (a + j\omega) e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} (a - j\omega) e^{j\omega t} - ae^{-at} \right]$$

Sviluppando i termini $\exp(\pm j\omega t)$ e semplificando, questa diventa:

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &= \frac{v_o \omega}{\omega^2 + a^2} [a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) - ae^{-at}] = \\ &= \frac{v_o \omega}{\omega^2 + a^2} \left[\sqrt{a^2 + \omega^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t) \right) - ae^{-at} \right] \end{aligned}$$

Ponendo infine:

$$\cos\delta = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\sin\delta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

e quindi:

$$\tan\delta = \frac{a}{\omega}$$

La risposta può esser messa nella forma:

$$v_{out}(t) = \frac{v_o \omega}{\omega^2 + a^2} \left[\sqrt{a^2 + \omega^2} \sin(\omega t + \delta) - ae^{-at} \right] \quad (2.18)$$

Notiamo che è $v_{out}(0) = 0$.

Discutiamo ora questo risultato, confrontandolo con quello che avremmo ottenuto adoperando il normale metodo simbolico.

In tal caso avremmo avuto:

$$\begin{aligned}
 v'_{out}(t) &= v_o \sin(\omega t) \frac{1}{1 + 1/j\omega\tau} = v_o \sin(\omega t) \frac{1}{1 + a/j\omega} = \\
 &= v_o \sin(\omega t) \frac{j\omega}{a + j\omega} = v_o \sin(\omega t) \frac{j\omega(a - j\omega)}{a^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{\omega v_o}{a^2 + \omega^2} \sin(\omega t) \cdot (\omega + ja) = \\
 &= \frac{\omega v_o}{a^2 + \omega^2} \sin(\omega t) \sqrt{\omega^2 + a^2} \left[\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} + j \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \right]
 \end{aligned}$$

Si ottiene infine:

$$v'_{out} = \frac{\omega v_o}{\omega^2 + a^2} \sqrt{\omega^2 + a^2} \sin(\omega t) (\cos\delta + j\sin\delta)$$

Questa differisce dalla (2.18) per il termine $-a \exp(-at)$ che ora è assente.

Tale differenza può esser compresa se si pensa che, adoperando il metodo delle trasformate di Laplace noi teniamo correttamente conto del fatto che il segnale applicato è nullo per $t < 0$. Il termine $-a \exp(-at)$ rappresenta un transiente che decade con costante di tempo $\tau = 1/a$. Il metodo simbolico invece ammette che il segnale applicato sia stazionario, cioè sia stato applicato a tempi $t \ll 0$.

Capitolo 3

Diagrammi di Bode e di Nyquist

3.1 Introduzione

Ci proponiamo in questa sezione di discutere i metodi comunemente adoperati in elettronica per rappresentare graficamente le funzioni di trasferimento dei circuiti quadripolari. Tali metodi sono di notevole utilità sia per una visualizzazione immediata della risposta di un circuito che per discutere il problema della stabilità nei circuiti oscillanti e, più in generale, nei circuiti con feedback. Inizieremo con una breve discussione di quelli che sono noti come i *diagrammi di Bode*, e con la presentazione di alcuni esempi. Passeremo poi a discutere i *diagrammi di Nyquist*.

3.2 Diagrammi di Bode

Cominceremo con l'analizzare un esempio: quello del ben noto circuito RC passa-basso, che per comodità riportiamo in figura 3.1.

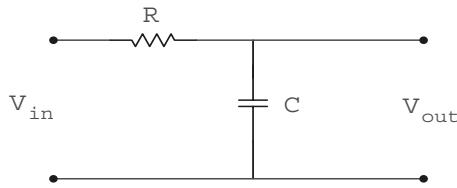


Figura 3.1: Circuito RC passa-basso

Come sappiamo, la funzione di trasferimento di questo circuito, espressa in funzione della variabile s (dove $s = j\omega$ o, più in generale, $s = \sigma + j\omega$ se facciamo uso delle trasformate di Laplace, con ω la frequenza angolare) è:

$$G(s) = \frac{k}{s - s_1}$$

dove $\tau = RC$ e $k = -s_1 = 1/\tau$. Tale funzione ha un polo in s_1 e nessuno zero.

Esaminiamo l'andamento del modulo di $G(s)$, espresso in decibel, in funzione del logaritmo di ω :

$$20 \log |G(\omega)| = 20 \log |k| - 20 \log |j\omega - s_1|$$

Per frequenze angolari $\omega \ll |s_1|$ questa diventa:

$$20 \log |G(\omega)| = 20 \log |k| - 20 \log |s_1| = 0 \quad (3.1)$$

essendo $|s_1| = |k|$. Vediamo quindi che il modulo della funzione di trasferimento espresso in dB si annulla. Ciò vuol dire che il guadagno $|G(\omega)|$ ha modulo unitario.

Ad alte frequenze ($\omega \gg |s_1|$) avremo invece:

$$20 \log |G(\omega)| = 20 \log |k| - 20 \log \omega \quad (3.2)$$

Questa ci dice che il modulo della funzione di trasferimento espressa in dB è una funzione lineare della variabile $20 \log \omega$.

Il grafico che si ottiene riportando per un circuito il modulo della funzione di trasferimento espresso in dB in funzione del $\log \omega$ è il *diagramma di Bode per il modulo* di G . Il diagramma relativo al circuito RC appena analizzato è mostrato in figura 3.2.

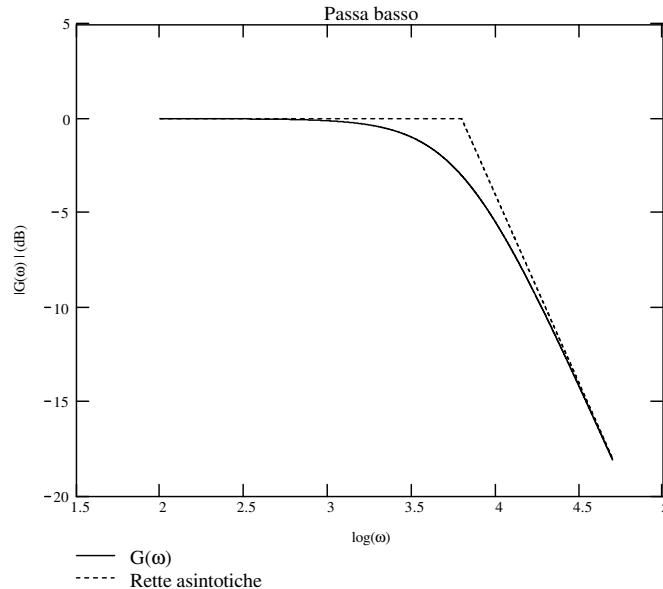


Figura 3.2: Diagramma di Bode per il modulo della funzione di trasferimento relativa al circuito RC passa-basso. La curva solida descrive l'andamento vero; le rette tratteggiate corrispondono agli andamenti asintotici

Poichè $G(\omega)$ è in genere un numero complesso, esso è caratterizzato anche da una fase $\phi(\omega)$. Il grafico che si ottiene riportando la fase in funzione del $\log \omega$ è il *diagramma di Bode per la fase*. L'insieme dei due diagrammi di Bode per un dato circuito caratterizza la risposta dello stesso.

In realtà, è spesso sufficiente esaminare le rette asintotiche che descrivono l'andamento del modulo (in dB) e della fase della funzione di trasferimento. Quelle relative a $|G(s)|$ per il filtro passa-basso sono mostrate con tratteggio in figura 3.2.

Nell'esempio in esame, relativo al modulo di $G(\omega)$, le due rette asintotiche sono quelle date dalle equazioni (3.1) e (3.2). Esse si incontrano, come si può facilmente verificare, nel punto:

$$\omega = |k| = \frac{1}{\tau}$$

(vedi figura 3.2). Notiamo che se ω raddoppia (cioè in un'ottava) la grandezza $20 \log \omega$ aumenta di circa un fattore 6. Poichè la funzione (3.2) è lineare nella variabile $20 \log \omega$, si vede che essa è tale da subire una variazione (diminuzione) di $6dB$ per ottava. Il filtro passa-basso ha quindi un andamento asintotico alle alte frequenze caratterizzato da una retta di pendenza (negativa) pari a $6dB$ per ottava.

Si può poi facilmente verificare che se la frequenza varia di un fattore 10 anzichè 2 (cioè in una decade) la funzione avrà subito una variazione di $20 dB$. Ciò si esprime dicendo che la retta in esame ha una pendenza (negativa) di $20 dB/decade$.

Nel punto in cui le due rette asintotiche si incontrano, il modulo della risposta vera $|G(\omega)|$ del circuito vale, come si può facilmente vedere, $1/\sqrt{2}$. In decibel, esso vale $-3 dB$, e quindi è 3 dB al di sotto del valore asintotico alle basse frequenze (che è 0 dB).

Esaminiamo ora il filtro passa-alto, mostrato in figura 3.3.

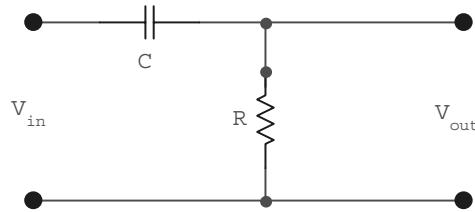


Figura 3.3: Circuito CR passa-alto

La funzione di trasferimento, come si può facilmente verificare, vale:

$$G(s) = \frac{s}{s - s_1}$$

con $s_1 = -1/\tau$. Questa ha uno zero nell'origine ($s=0$) oltre ad un polo in $s = s_1$. L'andamento del modulo di questa funzione (in dB) per $\omega \ll |s_1|$ è:

$$|G(s)|_{dB} = 20 \log \omega - 20 \log |s_1|$$

Vediamo che questa funzione cresce all'aumentare di $\log \omega$ con una pendenza di $6dB$ /ottava. Per frequenze molto alte ($\omega \gg |s_1|$) l'andamento diventa costante:

$$|G(s)|_{dB} = 0$$

cioè il guadagno diventa unitario.

Tali comportamenti, per alte e per basse frequenze, sono schematicamente indicati nel diagramma di Bode di figura 3.4, dove è anche riportata la curva che descrive l'andamento reale.

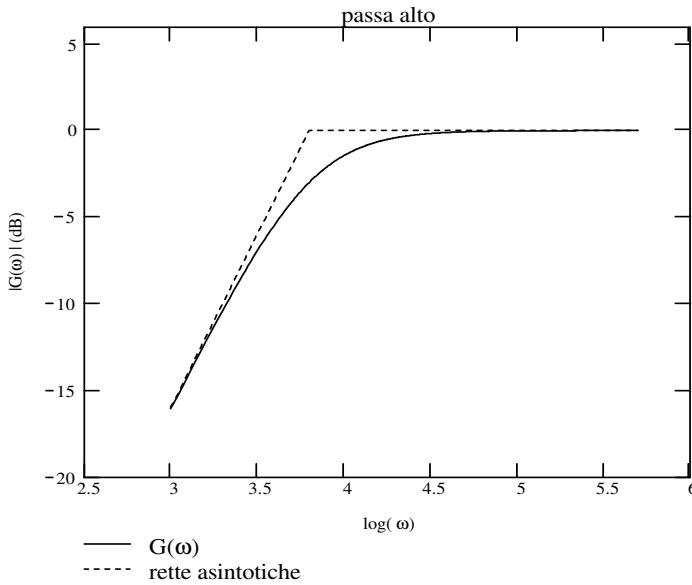


Figura 3.4: Plot di Bode per il modulo della funzione di trasferimento relativa al circuito CR passa-alto. La curva solida descrive l'andamento vero; le rette tratteggiate corrispondono agli andamenti asintotici

Le due rette asintotiche si incontrano nel punto: $\omega = |s_1| = 1/\tau$. In tale punto il valore vero di $|G(\omega)|_{dB}$ è -3 dB, come nel caso del circuito passa-basso.

Riassumendo, possiamo dire che ad una funzione di trasferimento con un polo semplice e nessuno zero, corrisponde un filtro passa-basso, caratterizzato da una risposta piatta (0 dB) a frequenze molto minori del valore assoluto del polo e da una risposta che decresce con pendenza di 6 dB/ottava ad alte frequenze. Le rette asintotiche che descrivono tali andamenti si incontrano nel punto $\omega = |s_1|$ dove s_1 è la posizione del polo. In corrispondenza a tale frequenza la funzione $|G(\omega)|_{dB}$ ha un valore che è -3 dB.

Una funzione di trasferimento con un polo semplice ed uno zero nell'origine corrisponde ad un filtro passa-alto, caratterizzato da un andamento crescente con una pendenza di 6 dB/ottava a basse frequenze ($\omega \ll |s_1|$), dove s_1 è la posizione del polo, e da un andamento costante (0 dB) ad alte frequenze. Le rette che descrivono i due andamenti asintotici si incontrano in $\omega = |s_1|$. In corrispondenza a tale frequenza angolare la funzione di trasferimento vale -3 dB.

Plots di Bode per la fase

La fase ϕ , nel caso del circuito passa-basso, è data da:

$$\tan \phi = \frac{\omega}{s_1} = -\omega\tau$$

cioè:

$$\phi = -\arctan(\omega\tau) \quad (3.3)$$

Vediamo che ϕ tende a zero se $\omega \ll |s_1|$, mentre tende ad $-\pi/2$ se $\omega \gg |s_1|$. L'andamento reale di ϕ , descritto dalla (3.3) è mostrato in figura 3.5, insieme agli andamenti asintotici (rette tratteggiate) per $\omega \gg |s_1|$ e per $\omega \ll |s_1|$.

Figura 3.5: Plot di Bode per la fase, relativo al circuito RC passa-basso. La curva solida descrive l'andamento vero; le rette tratteggiate corrispondono agli andamenti asintotici

Si può facilmente verificare che, per $\omega = \frac{0.1}{\tau}$, la fase è ancora vicina a zero, mentre per $\omega = 10\tau$ essa ha ormai raggiunto il suo valore asintotico $-\pi/2$.

Esaminiamo ora il caso del filtro passa-alto, già analizzato. È facile vedere che in tal caso la fase è data da:

$$\tan \phi = -\frac{s_1}{\omega} = \frac{1}{\omega\tau}$$

cioè:

$$\phi = \arctan(1/\omega\tau) \quad (3.4)$$

Vediamo da quest'equazione che $\phi \rightarrow \pi/2$ per $\omega \rightarrow 0$, mentre $\phi \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow \infty$. Tali andamenti asintotici sono mostrati in figura 3.6 (rette tratteggiate) insieme all'andamento vero, descritto dalla (3.4).

Anche in questo caso l'andamento asintotico per piccoli valori di ω ($\omega \ll 1/\tau$) differisce molto poco dall'andamento reale per $\omega = 0.1/\tau$, mentre l'andamento asintotico per grandi valori di ω ($\omega \gg 1/\tau$) differisce poco da quello reale quando $\omega = 10/\tau$.

La figura 3.7 mostra i plot di Bode relativi ad un circuito CR, con valori dei componenti dati da: $C = 1nF$, $R = 1k\Omega$. Questi sono stati ottenuti facendo uso del programma di simulazione Microcap VII [5].

Consideriamo ancora una funzione di trasferimento con un polo ed uno zero non nell'origine:

$$G(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_1} \quad (3.5)$$

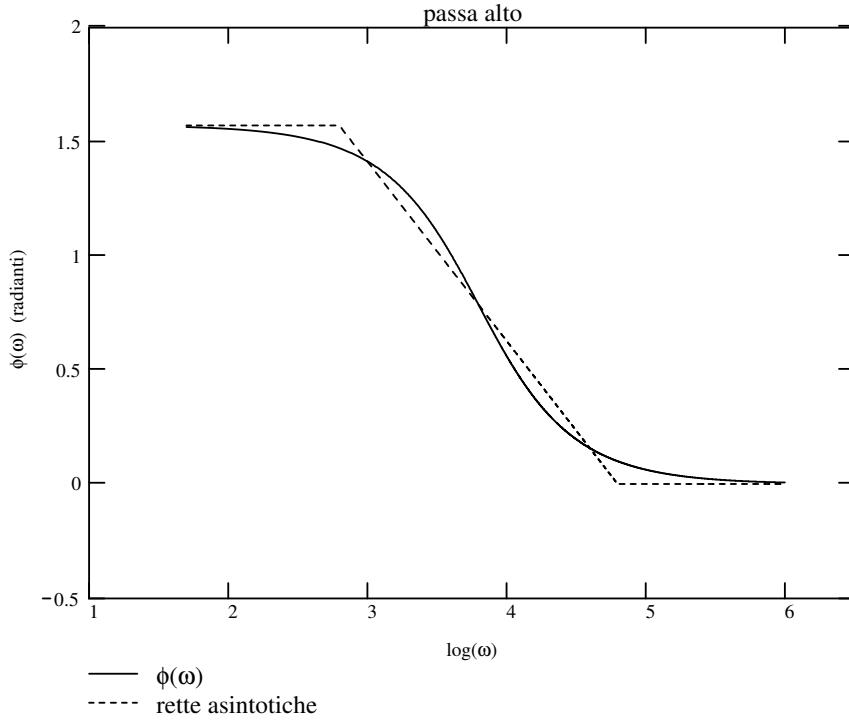


Figura 3.6: Plot di Bode per la fase, relativo al circuito CR passa-alto. La curva solida descrive l'andamento vero; le rette tratteggiate corrispondono agli andamenti asintotici

Il polo è in $s_1 = -1/\tau_1$; lo zero in $s_2 = -1/\tau_2$. Il plot di Bode per il modulo è mostrato in figura 3.8 (dove si è ammesso che sia $\tau_1 \ll \tau_2$).

Il plot di Bode per la fase può esser facilmente ottenuto facendo uso della relazione:

$$\phi = \arctan(\omega\tau_2) - \arctan(\omega\tau_1)$$

dove $\tau_1 < \tau_2$, cioè $1/\tau_2 < 1/\tau_1$. Avremo i seguenti andamenti asintotici:

- Per $\omega \ll \frac{1}{\tau_2}$ (e quindi anche $\omega \ll \frac{1}{\tau_1}$) $\Rightarrow \phi \approx 0$
- Per $\omega \gg \frac{1}{\tau_1}$ (e quindi anche $\omega \gg \frac{1}{\tau_2}$) $\Rightarrow \phi \approx 0$
- Per $\omega \gg \frac{1}{\tau_2}$ ed $\omega \ll \frac{1}{\tau_1} \Rightarrow \phi = \arctan(\omega\tau_2) \approx \pi/2$

Tali andamenti sono qualitativamente indicati nella figura 3.9.

3.3 Quadripoli del secondo ordine

Esaminiamo ora un sistema descritto da una funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{k}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (3.6)$$

Questa non ha alcuno zero, ma ha due poli nei punti s_1 ed s_2 . I poli s_1 ed s_2 possono essere reali e distinti, reali e coincidenti o complessi coniugati.

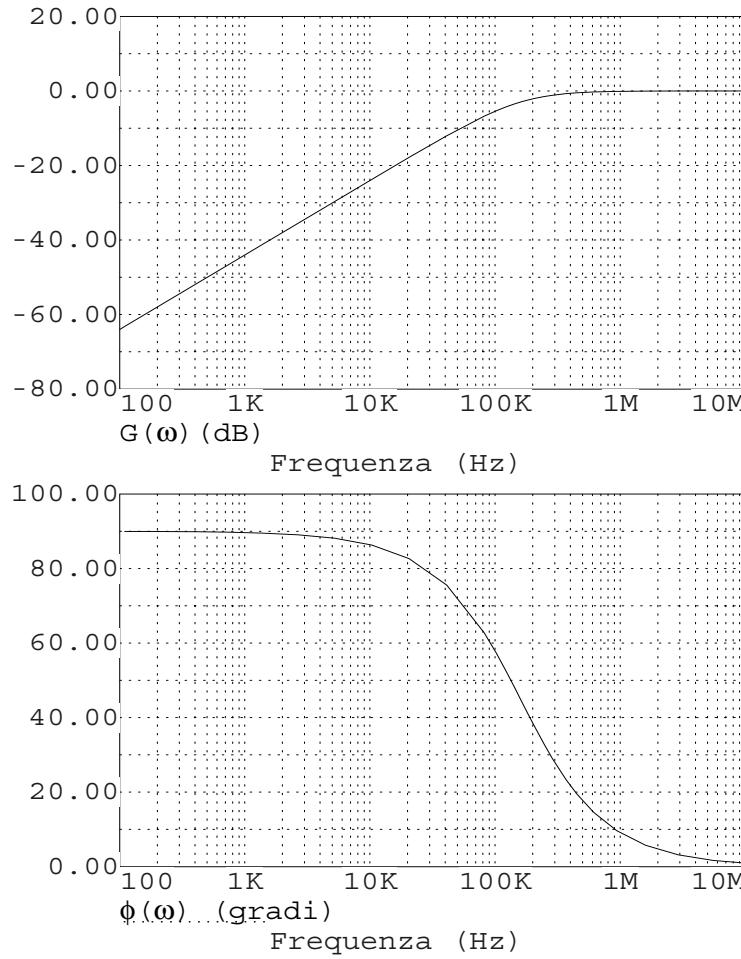


Figura 3.7: Plot di Bode per modulo (in alto) e fase (in basso) relativo al circuito RC passa-alto ottenuto con i valori dei componenti dati nel testo. Le curve sono state ottenute facendo uso del programma di simulazione Microcap.

Cominciamo con l'esaminare il caso in cui i due poli siano reali e coincidenti. In tal caso possiamo scrivere:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |k| - 20 \log |s - \bar{s}|^2 = 20 \log |k| - 40 \log |j\omega - \bar{s}|$$

con: $s_1 = s_2 = \bar{s}$ (reale).

Esaminiamo gli andamenti asintotici. Per $\omega \ll \bar{s}$:

$$|G(\omega)|_{dB} = 20 \log |k| - 40 \log |\bar{s}| = \text{costante} \quad (3.7)$$

Se invece è $\omega \gg \bar{s}$:

$$|G(\omega)|_{dB} = 20 \log |k| - 40 \log \omega$$

cioè si ha un andamento decrescente, con pendenza pari a -12 dB/ottava , cioè al doppio di quella che si aveva nel caso del filtro passa-basso del primo ordine.

Le due rette che descrivono l'andamento asintotico per basse e per alte frequenze si incontrano nel punto $\omega = \bar{s}$. In tale punto la $|G(\omega)|_{dB}$ vale:

$$|G(\omega)|_{dB} = 20 \log |k| - 40 \log |j\bar{s} - \bar{s}| =$$

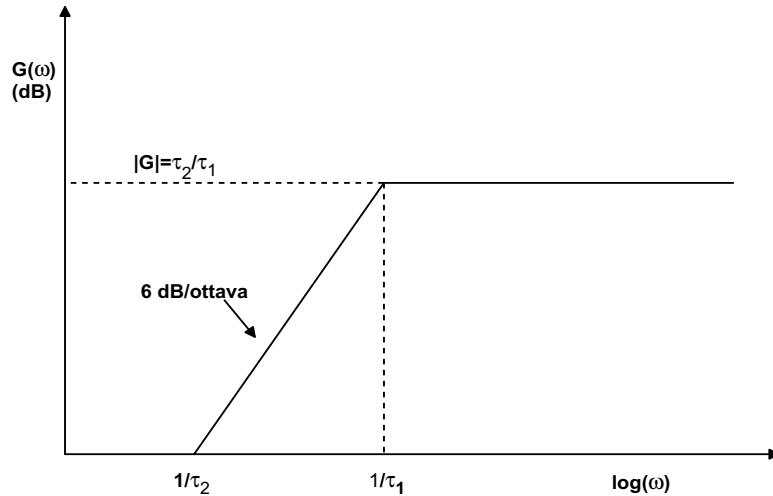


Figura 3.8: Rette asintotiche relative al plot di Bode per il modulo della funzione di trasferimento con un polo ed uno zero descritta dalla (3.5)

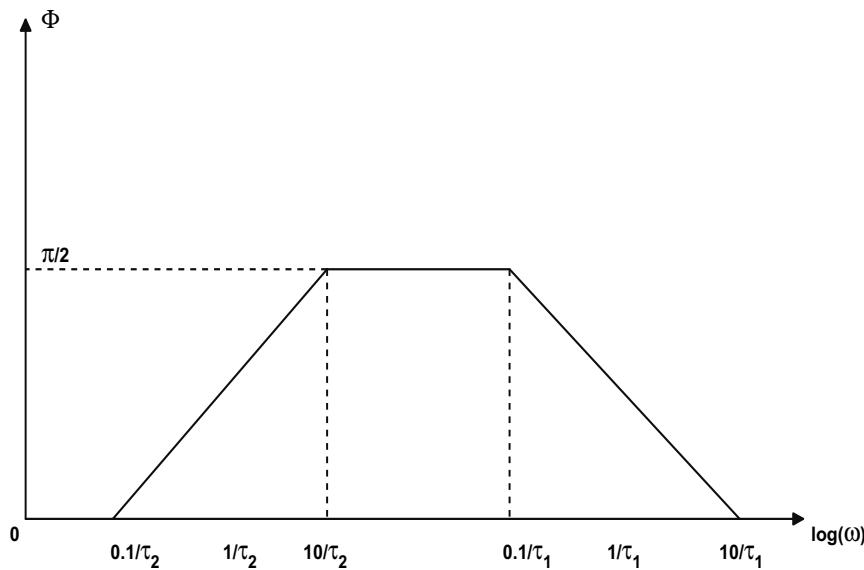


Figura 3.9: Rette asintotiche relative al plot di Bode per la fase della funzione di trasferimento con un polo ed uno zero descritta dalla (3.5)

$$= 20 \log |k| - 40 \log \bar{s} - 40 \log \sqrt{2} = \text{costante} - 6dB$$

dove la costante ha un valore uguale a quello dell'analoga costante presente nella (3.7). Si ha quindi un'attenuazione di $6dB$ rispetto a quella che si aveva a basse frequenze. Abbiamo quindi un filtro passa-basso con un *taglio* più netto di quello che avremmo avuto utilizzando un sistema del primo ordine.

Esaminiamo ora il caso di un sistema descritto dalla medesima funzione di trasferimento appena esaminata, ma nel quale le due radici s_1 ed s_2 del polinomio a denominatore siano reali e distinte. Ammettiamo per semplicità che esse siano

abbastanza distanti l'una dall'altra:

$$|s_1| \ll |s_2|$$

Facendo ora uso di quanto appreso finora, possiamo vedere che, se $\omega \ll |s_1|$ (e quindi $\omega \ll |s_2|$) avremo un andamento costante per $|G(\omega)|_{dB}$. Per valori di $\omega \gg |s_1|$ ed $\omega \ll |s_2|$, il contributo del termine $1/(s - s_2)$ sarà ancora costante, mentre il termine $1/(s - s_1)$ avrà un andamento decrescente, con una pendenza di 6 dB/ottava. Infine, per $\omega \gg |s_2|$ (e quindi $\omega \gg |s_1|$) alla pendenza di 6 dB/ottava causata dal termine $1/(s - s_1)$ si somma un ulteriore contributo di 6 dB/ottava causato dal termine $1/(s - s_2)$. L'andamento complessivo può in definitiva esser riassunto come indicato in figura 3.10.

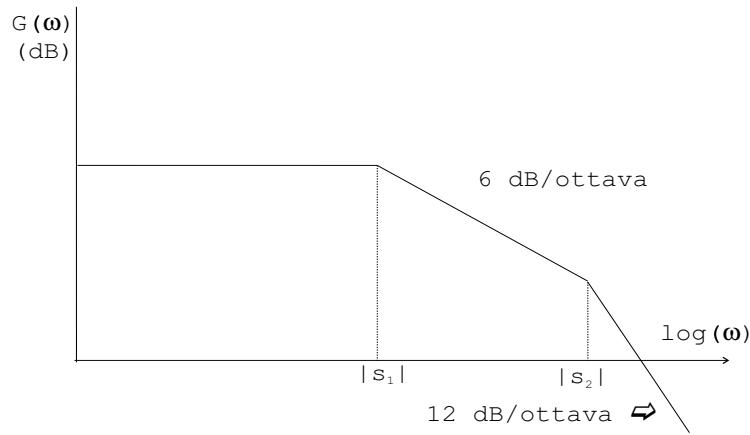


Figura 3.10: Rette asintotiche relative al plot di Bode per il modulo della funzione di trasferimento con due poli descritta dalla (3.6)

L'andamento della fase $\phi(\omega)$ per tale sistema è poi quello mostrato in figura 3.11.

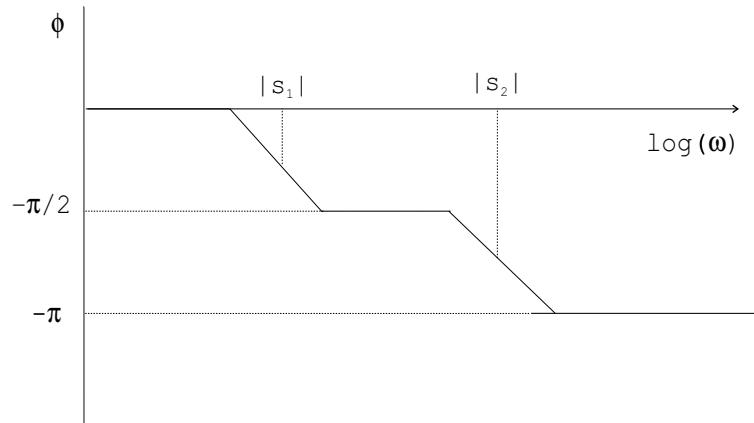


Figura 3.11: Rette asintotiche relative al plot di Bode per la fase della funzione di trasferimento con due poli descritta dalla (3.6)

Ci riserviamo di esaminare nella prossima sezione il caso di poli complessi coniugati, che merita un'attenzione particolare.

Esaminiamo ora il caso della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{ks^2}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (3.8)$$

con $|s_1| \ll |s_2|$. Questa funzione ha due zeri coincidenti nell'origine e due poli nei punti s_1 ed s_2 . Esaminiamo il relativo diagramma di Bode per il modulo. Si ha:

$$20 \log |G(\omega)| = 20 \log \left| \frac{k\omega^2}{(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)} \right|$$

Per frequenze angolari $\omega \ll |s_1|, |s_2|$, si ha:

$$|G(\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log \frac{k\omega^2}{s_1 s_2} = 20 \log \frac{k}{s_1 s_2} + 40 \log \omega$$

cioè un andamento crescente in funzione di $\log \omega$. La pendenza nel diagramma di Bode è di 12 dB/ottava. Per frequenze $\omega \gg |s_1|$ ed $\omega \ll |s_2|$ avremo invece:

$$|G(\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log \frac{k\omega}{|s_2|} = 20 \log \frac{k}{|s_2|} + 20 \log \omega$$

Vediamo che questa ha, nel diagramma di Bode, un andamento crescente con una pendenza di 6 dB/ottava. La retta che descrive l'andamento asintotico per $\omega \ll |s_1|$ e quella che descrive l'andamento asintotico per $|s_1| \ll \omega \ll |s_2|$ si incontrano nel punto di coordinata ω tale che:

$$20 \log \frac{k}{|s_1 s_2|} + 40 \log \omega = 20 \log \frac{k}{|s_2|} + 20 \log \omega$$

cioè: $\omega = |s_1|$.

Infine, per $\omega \gg |s_2| \gg |s_1|$ avremo:

$$|G(\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log k = \text{costante}$$

Vediamo quindi che il circuito descritto da questa funzione di trasferimento è un passa-alto. Calcoliamo il valore di ω per cui la retta che descrive il comportamento asintotico per $|s_1| \ll \omega \ll |s_2|$ incontra quella che descrive il comportamento asintotico per $\omega \gg |s_2|$. Troviamo facilmente:

$$\omega = |s_2|$$

In corrispondenza a tale valore di ω la funzione di trasferimento espressa in dB vale:

$$20 \log \left| \frac{ks_2^2}{(js_2 - s_1)(js_2 - s_2)} \right| = 20 \log k - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log k - 3dB$$

Cioè la risposta è, come in altri casi simili esaminati, 3 dB al di sotto del valore asintotico per $\omega \rightarrow \infty$.

L'andamento di tale funzione di trasferimento è mostrato nel diagramma di Bode di figura 3.12.

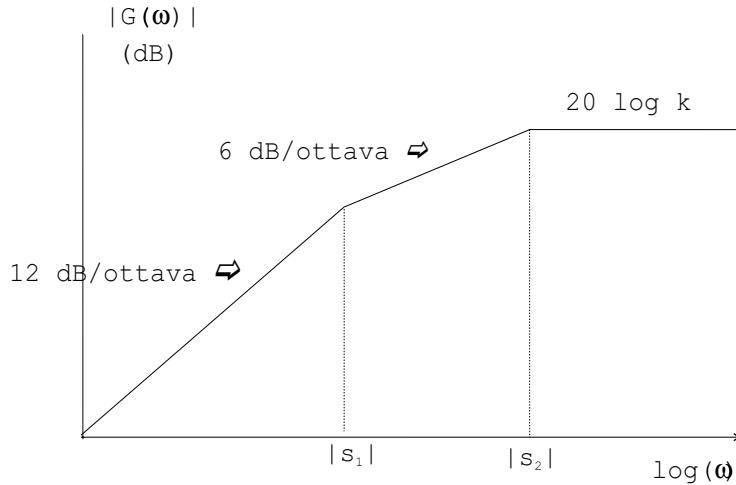


Figura 3.12: Rette asintotiche relative al plot di Bode per il modulo della funzione di trasferimento con uno zero doppio nell'origine e due poli, data dalla (3.8)

Esaminiamo ora un sistema descritto da una funzione con uno zero semplice nell'origine e due poli distinti:

$$G(s) = \frac{ks}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (3.9)$$

Per frequenze angolari $\omega \ll |s_1| \ll |s_2|$ avremo:

$$20 \log |G(\omega)| = 20 \log k + 20 \log \omega - 20 \log |s_1 s_2|$$

Cioè abbiamo un andamento crescente con una pendenza di 6 dB/ottava, come mostrato in figura 3.13.

Per frequenze angolari comprese tra s_1 ed s_2 avremo:

$$|G(\omega)|_{dB} = 20 \log k + 20 \log |s_2| = \text{costante}$$

Infine, per valori di ω molto maggiori di s_2 :

$$|G(\omega)|_{dB} = 20 \log k + 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 = 20 \log k - 20 \log \omega$$

cioè abbiamo un andamento decrescente, con una pendenza di -6 dB/ottava.

Anche in questo caso potremmo verificare che le rette che descrivono l'andamento asintotico per $\omega \ll |s_1|$ e per $\omega \gg |s_1|$ si incontrano in $\omega = |s_1|$, e che quelle che descrivono gli andamenti asintotici per $\omega \ll |s_2|$ e per $\omega \gg |s_2|$ si incontrano in $\omega = |s_2|$. Inoltre in tali punti il valore vero della $|G(\omega)|_{dB}$ è sotto di 3 dB rispetto al valore che la retta asintotica orizzontale fornisce. Abbiamo ovviamente un filtro passa-banda.

Consideriamo infine un circuito descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{k(s_2 + \omega_0^2)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

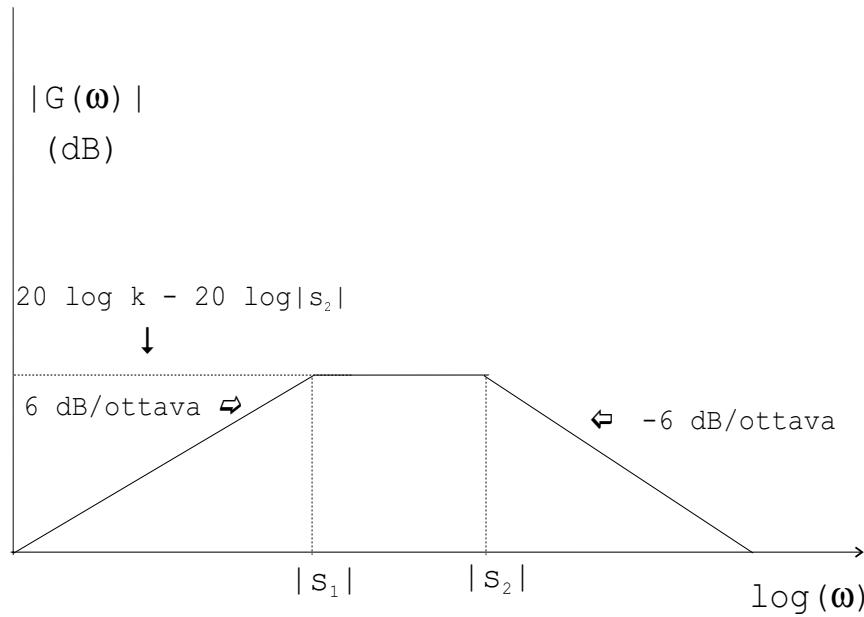


Figura 3.13: Rette asintotiche relative al plot di Bode per il modulo della funzione di trasferimento con uno zero semplice nell'origine e due poli, data dalla (3.9)

che ha due poli in s_1 ed s_2 e due zeri immaginari in $s = \pm j\omega_0$. Si può dimostrare che tale funzione descrive un filtro *elimina-banda*.

A conclusione delle considerazioni svolte, possiamo ora trarre alcune conclusioni di carattere generale:

- ad uno zero semplice nella funzione di trasferimento corrisponde nel diagramma di Bode un andamento crescente, con una pendenza di 6 dB/ottava;
- ad uno zero doppio corrisponde un andamento crescente con una pendenza di 12 dB/ottava;
- ad un polo semplice corrisponde un andamento decrescente con una pendenza di 6 dB/ottava;
- ad un polo doppio corrisponde un andamento decrescente con una pendenza di 12 dB/ottava.

Quindi, un'analisi dei poli e degli zeri della funzione di trasferimento può portare ad individuare in modo semplice il tipo di risposta che ci si deve aspettare dal circuito descritto dalla funzione stessa.

Esaminiamo come esempio il circuito mostrato in figura 3.14.

La funzione di trasferimento, come si può facilmente verificare, è:

$$G(s) = \frac{s}{(RC)s^2 + s + (R/L)} \quad (3.10)$$

Questa ha uno zero nell'origine, che fornisce un andamento crescente con pendenza di 6 dB/ottava. Il polinomio di secondo grado a denominatore ha un discriminante

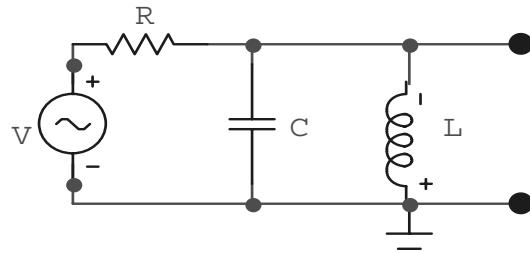


Figura 3.14: Circuito RCL, la cui funzione di trasferimento è data dalla (3.10)

dato da:

$$\Delta = \sqrt{1 - 4R^2C/L}$$

Vediamo da questa che le radici (e quindi i poli della funzione di trasferimento) saranno reali e distinte se:

$$R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Se ciò accade, indicando con s_1 ed s_2 le due radici (con $s_1 < s_2$) avremo un diagramma di Bode per il modulo, del tipo mostrato in figura 3.15. Vediamo che si tratta di un filtro passa-banda.

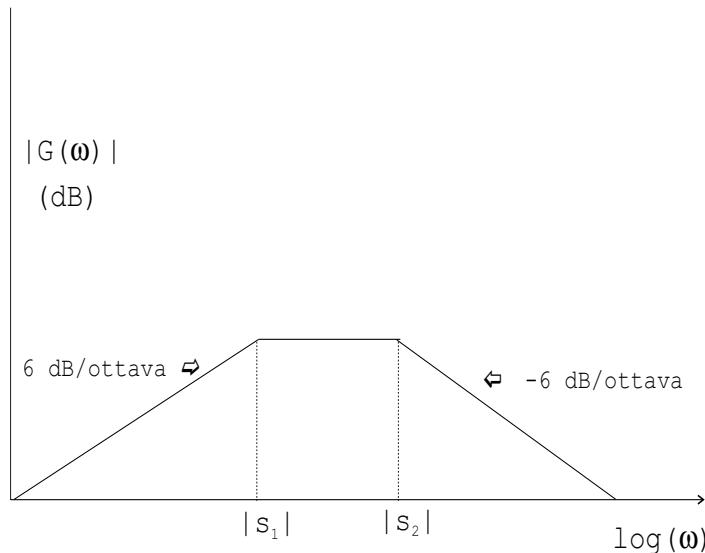


Figura 3.15: Plot di Bode per il modulo della funzione di trasferimento relativa al circuito di figura 3.14, nel caso in cui le due radici siano reali e distinte. Sono state riportate solo le rette asintotiche

Se le radici sono reali e coincidenti ($\Delta = 0$ ed $s_1 = s_2$), avremo un diagramma di Bode del tipo mostrato in figura 3.16.

Se infine il discriminante è negativo, i poli saranno complessi coniugati. Si può dimostrare che in questo caso gli asintoti sono uguali a quelli corrispondenti ad

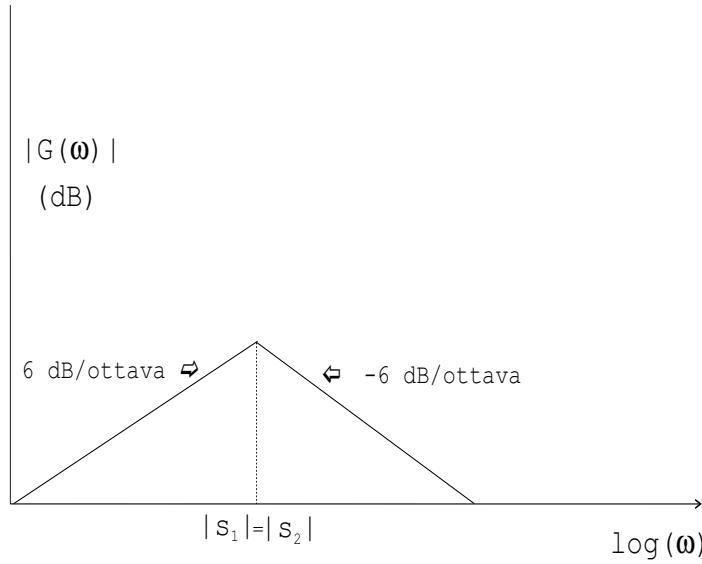


Figura 3.16: Plot di Bode per il modulo della funzione di trasferimento relativa al circuito di figura 3.14, nel caso in cui le due radici siano reali e coincidenti. Sono state riportate solo le rette asintotiche

un polo doppio, in $|s_1| = |s_1^*| = |s_2|$. Il comportamento della curva che descrive l'andamento della $|G(\omega)|_{dB}$ in prossimità del polo doppio ha un andamento che dipende dal rapporto tra parte immaginaria e reale del polo. Tale comportamento sarà studiato nella prossima sezione.

Notiamo infine che, con riferimento al diagramma di Bode mostrato in figura 3.15, la *larghezza di banda* è definita come: $BW = |s_2| - |s_1|$.

Ad esempio, con la seguente scelta dei valori dei componenti:

$$R = 1k\Omega, \quad L = 1mH, \quad C = 50\text{pF}$$

Si ottengono per questo circuito, facendo uso del programma di simulazione Microcap VI, i plot di Bode per modulo del guadagno e fase, mostrati in figura 3.17.

3.4 Funzioni di trasferimento con due poli complessi coniugati

Riprendiamo ora l'analisi della funzione di trasferimento con due poli, già incontrata nella precedente sezione, nel caso in cui i due poli s_1 ed s_2 siano complessi coniugati. Analizzeremo in realtà nuovamente il caso generale di una funzione con due poli, introducendo una notazione che si rivela utile in molti casi, ad esempio nell'analisi dei filtri attivi.

Possiamo riscrivere in generale il denominatore di una funzione di trasferimento con due poli:

$$(s - s_1)(s - s_2) \tag{3.11}$$

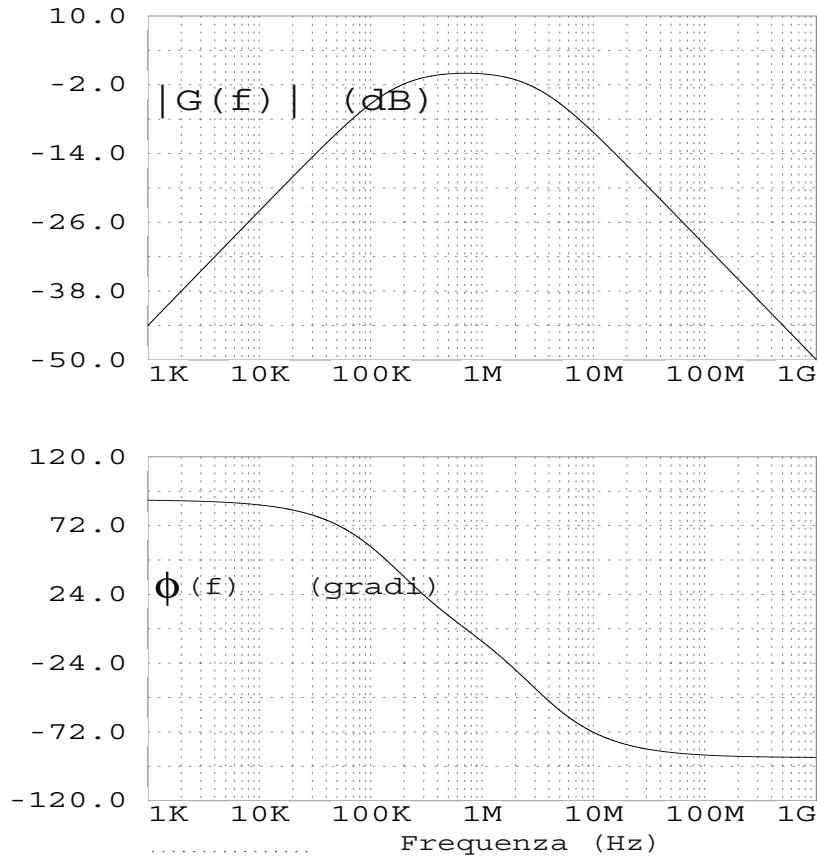


Figura 3.17: Plot di Bode per modulo e fase della funzione di trasferimento (3.10) relativa al circuito di figura 3.14. Le curve mostrate sono state ottenute facendo uso del programma di simulazione Microcap, con i valori dei componenti indicati nel testo

nella forma:

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2 \quad (3.12)$$

Sviluppando la (3.11) ed uguagliando i coefficienti a quelli che figurano nella (3.12), otteniamo:

$$\frac{\omega_0}{Q_0} = -(s_1 + s_2) \quad (3.13)$$

$$\omega_0^2 = s_1 s_2 \quad (3.14)$$

Invertendo queste equazioni si ottiene:

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\omega_0}{Q_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q_0} \right)^2 - 4\omega_0^2} \right] \quad (3.15)$$

I poli saranno reali e coincidenti per $\Delta = 0$, cioè:

$$\omega_0^2(1 - 4Q_0^2) = 0$$

da cui:

$$Q_0 = 0.5$$

I poli saranno reali e distinti per $Q_0 < 0.5$ mentre saranno complessi coniugati per $Q_0 > 0.5$. In quest'ultimo caso la parte reale dei due poli sarà:

$$\operatorname{Re}(s_1) = \operatorname{Re}(s_2) = -\frac{\omega_0}{2Q_0}$$

Notiamo che in questo caso, con $s_2 = s_1^*$, l'equazione:

$$\omega_0^2 = s_1 s_2 = s_1 s_1^* = |s_1|^2 = |s_2|^2$$

ci dice che ω_0 rappresenta la distanza di ciascuno dei due poli dall'origine. Ciò è mostrato in figura 3.18.

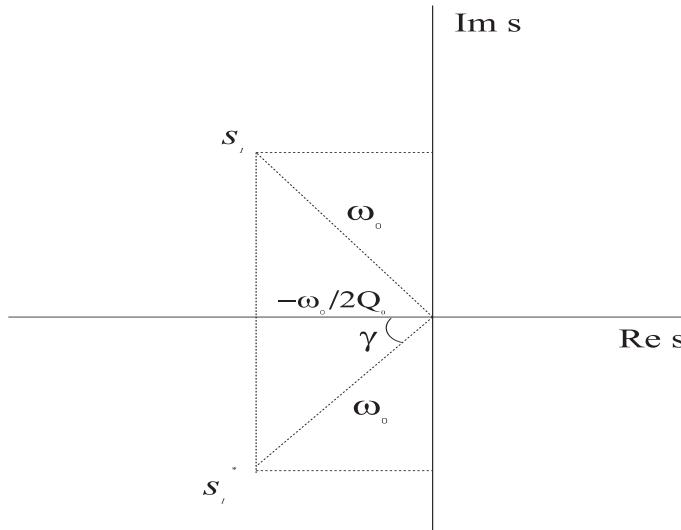


Figura 3.18: Poli nel piano s complesso, per una funzione di trasferimento con due poli complessi coniugati. Q_0 , ω_0 e γ sono quelli definiti nel testo

Dalla figura si vede che:

$$\cos \gamma = \frac{1}{2Q_0}$$

con $Q_0 > 0.5$

Poniamo ora:

$$s_1 = -\alpha + j\beta$$

$$s_2 = -\alpha - j\beta$$

e scriviamo la funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

Sostituendo ad s l'espressione $j\omega$ otteniamo:

$$|G|^2 = \frac{1}{[\alpha^2 + (\omega - \beta)^2][\alpha^2 + (\omega + \beta)^2]}$$

Calcoliamo ora il valore di ω in corrispondenza a cui $|G|$ è massimo. Essendo $|G|$ positivo, questo sarà anche il valore che rende massimo $|G|^2$, che sarà dato dalla soluzione dell'equazione:

$$\frac{d|G|^2}{dt} = 0$$

ovvero dell'equazione:

$$2(\omega - \beta) [\alpha^2 + (\omega + \beta)^2] + 2(\omega + \beta) [\alpha^2 + (\omega - \beta)^2] = 0$$

Questa si riduce facilmente a:

$$4\omega\alpha^2 + 2(\omega^2 - \beta^2) \cdot 2\omega = 0$$

la cui soluzione è:

$$\omega^2 = \beta^2 - \alpha^2$$

Troviamo cioè che la frequenza ω in corrispondenza alla quale la $|G|$ ha un massimo è data da:

$$\omega_{max} = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

Espressa in termini delle variabili ω_0 e Q_0 , questa si scrive:

$$\omega_{max}^2 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2} \right) \quad (3.16)$$

Il valore che la funzione $|G|$ acquista in tale punto può esser facilmente ottenuto come segue. Scriviamo la $G(s)$ nella forma:

$$G(s) = \frac{A_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2} \quad (3.17)$$

dove A_0 è il valore di $G(s)$ per $s=0$. Poniamo $s = j\omega$ e calcoliamo il modulo di G .

$$G(j\omega) = \frac{A_0\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q_0}\omega} \quad (3.18)$$

da cui:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_{max}} = \frac{A_0 Q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}} \quad (3.19)$$

La dipendenza di questa funzione da Q_0 è mostrata in figura 3.19.

Notiamo che, come si vede dall'equazione (3.16) un massimo nella risposta può avversi solo per:

$$\frac{1}{2Q_0^2} < 1$$

cioè per:

$$Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Per $Q_0 = 0.707$ troviamo:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_{max}} = A_0$$

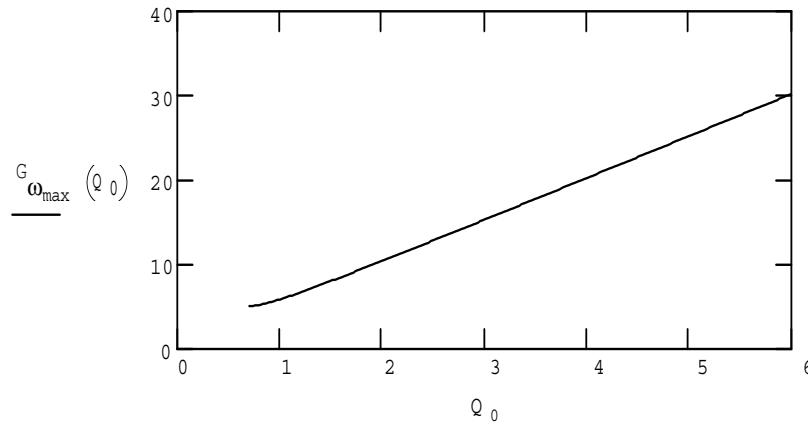


Figura 3.19: Dipendenza da Q_0 della funzione $|G(j\omega)|_{\omega=\omega_{max}}$ data dalla (3.19)

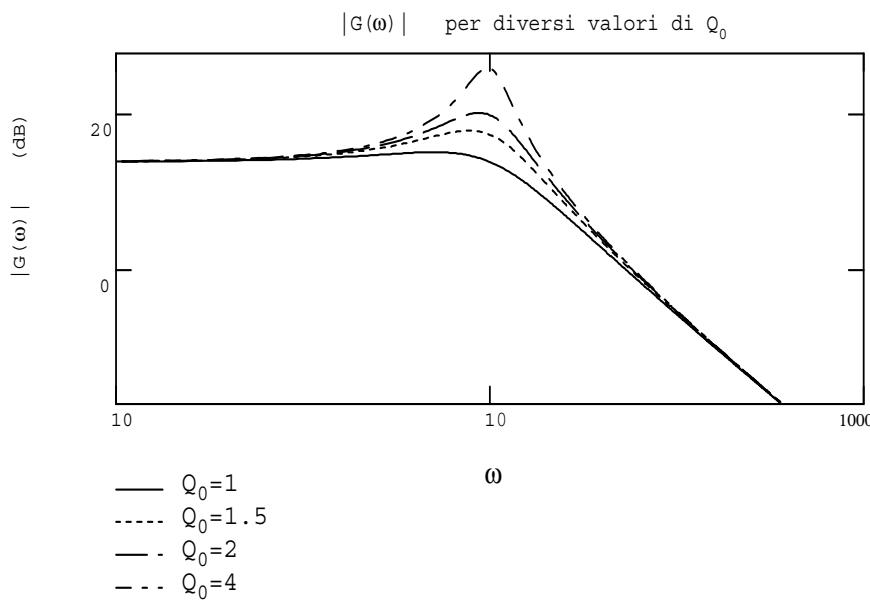


Figura 3.20: Diagramma di Bode per il modulo della $G(s)$ data dalla (3.17), per diversi valori di Q_0

Riportiamo nel grafico di figura 3.20 il diagramma di Bode per il modulo della $G(s)$ dato dall'equazione (3.17).

Vediamo da questi risultati, ed in particolare dalle equazioni (3.16) e (3.17), che la curva di risposta $|G(j\omega)|$ ha un massimo tanto più accentuato quanto più è elevato il Q_0 del circuito. La posizione del massimo si sposta, come mostrato dalla (3.16), al variare di Q_0 . ω_{max} aumenta all'aumentare di Q_0 e diviene uguale ad ω_0 per $Q_0 \rightarrow \infty$.

Poichè ω_0 è la distanza dei poli dall'origine e $-\frac{\omega_0}{2Q_0}$ è l'ascissa comune dei poli, vediamo che l'angolo che abbiamo indicato con γ aumenta all'aumentare di Q_0 . Vediamo cioè che la curva che descrive la risposta del sistema acquista in prossimità di ω_0 un picco che è tanto più accentuato quanto più i poli sono vicini all'asse

immaginario e lontani da quello reale.

3.5 Diagrammi di Nyquist

Se si riporta in un diagramma cartesiano, in ascissa la parte reale della funzione di trasferimento $G(j\omega)$ ed in ordinata la parte immaginaria, si ottiene quello che è noto come *diagramma di Nyquist* della $G(j\omega)$. Al variare di ω il punto rappresentativo del sistema si muove lungo una curva. Il vettore che unisce l'origine delle coordinate con il generico punto rappresenta la funzione di trasferimento in corrispondenza al valore di ω relativo al determinato punto. Ad esempio, la figura 3.21 mostra il diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento caratteristica di un circuito passa-basso:

$$G(j\omega) = \frac{1/\tau}{j\omega - 1/\tau} \quad (3.20)$$

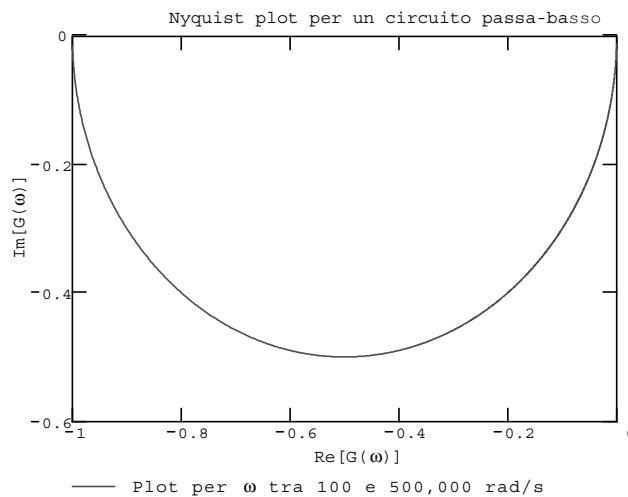


Figura 3.21: Diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento (3.20), per ω variabile tra 100 e 500,000 rad/s

Un'altro esempio è quello della funzione di trasferimento con un polo ed uno zero non nell'origine. Il relativo diagramma di Nyquist è mostrato in figura 3.22.

L'espressione analitica della funzione di trasferimento in quest'esempio è data da:

$$G(\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_2}{1 + j\omega\tau_1} \quad (3.21)$$

dove $\tau_1 = 3.979 \cdot 10^{-6}$ e $\tau_2 = 1.592 \cdot 10^{-4}$ ed ω varia tra 100 e 400,000 rad/s.

Un ulteriore esempio è quello di una funzione di trasferimento con uno zero non nell'origine e due poli:

$$G(\omega) = \frac{0.001 - j\omega\tau_2}{\omega(0.001 - j\omega\tau_1)} \quad (3.22)$$

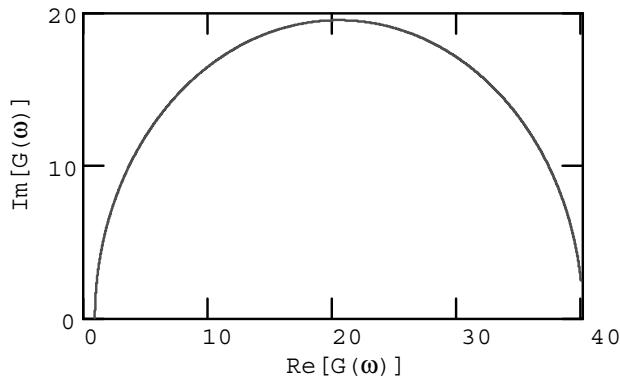


Figura 3.22: Diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento (3.21), per ω variabile tra 100 e 400,000 rad/s e con i valori di τ_1 e τ_2 indicati nel testo

con τ_1 e τ_2 uguali a quelli dell'esempio precedente.

Il relativo diagramma di Nyquist è mostrato in figura 3.23.

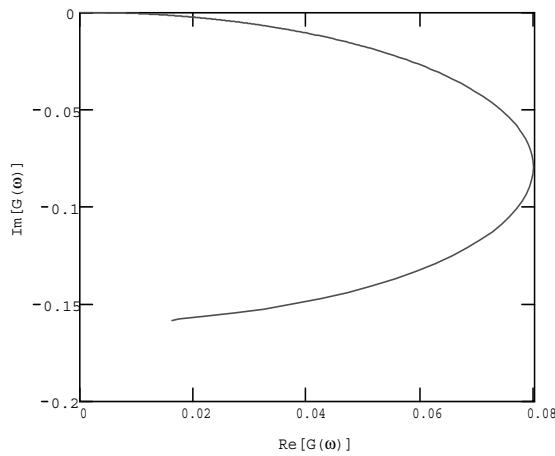


Figura 3.23: Diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento (3.22), per ω variabile tra 100 e 400,000 rad/s e con i valori di τ_1 e τ_2 indicati nel testo

Capitolo 4

Linee di trasmissione

4.1 Introduzione

Nelle attuali trasmissioni televisive via satellite si opera a frequenze di diversi GHz. I segnali che il decoder riceve sono tipicamente dell'ordine del GHz. Segnali di frequenza similmente elevata sono utilizzati nelle normali trasmissioni televisive, nonché nei sistemi di trasmissione dati.

I cavi elettrici che trasportano i segnali ai sistemi di decodifica/ricezione debbono essere tali da non introdurre distorsioni e da non attenuare apprezzabilmente il segnale. Se si adoperassero a tale scopo delle normali coppie di conduttori elettrici, si avrebbe una certa attenuazione. A questa si potrebbe pensare di ovviare con un successivo stadio di amplificazione. Purtroppo ciò non aiuterebbe, poiché l'attenuazione introdotta da un normale cavo elettrico è funzione della frequenza. Ciò fa sì che il segnale che arriva al ricevitore sia fortemente distorto.

Nel campo dell'elettronica digitale veloce è necessario trasmettere segnali logici costituiti da impulsi molto brevi (dell'ordine del ns), con ripidi fronti di salita e di discesa. Anche in tal caso, l'uso di normali cavi conduttori allungherebbe i fronti di salita e discesa, oltre a deformare la forma dell'impulso, con conseguenze disastrose per i sistemi di decodifica. Occorre quindi realizzare degli opportuni conduttori che abbiano bassa attenuazione (in modo da consentire la trasmissione su cavi molto lunghi) e soprattutto che non siano tali da introdurre distorsioni. Inoltre, tali conduttori debbono risultare immuni da disturbi elettromagnetici eventualmente presenti nell'ambiente.

I conduttori più comunemente adoperati a tale scopo sono i cavi coassiali, il cui uso è ormai ampiamente diffuso nel settore della comunicazione, come in quello della Fisica ed in molti settori dell'Industria.

Un uso importante che di tali cavi si fa in Fisica (specie in Fisica subnucleare) è quello di “ritardare” un segnale elettronico di una quantità predeterminata. Si parla in tal caso di *linee di ritardo*.

Nel seguito discuteremo la struttura e le proprietà dei cavi coassiali. Le considerazioni che svolgeremo hanno comunque validità più generale e possono esser applicate a linee di trasmissione aventi strutture diverse da quelle dei normali cavi coassiali.

4.2 Cavi coassiali: principi generali

In questa sezione discuteremo il principio di funzionamento di un cavo coassiale, ammettendo che esso sia privo di perdite, quali potrebbero nascere da effetti resistivi o da perdite nel dielettrico. Esamineremo alla fine del capitolo le complicazioni che possono esser causate da tali fattori.

Schematizzeremo un cavo coassiale come in figura 4.1.

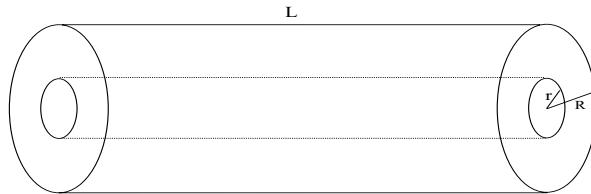


Figura 4.1: Sezione di un cavo coassiale, di lunghezza L , raggio interno r e raggio esterno R

Il conduttore interno ha raggio r , quello esterno R . Sappiamo che, ad una lunghezza unitaria di cavo è associata una capacità C_0 data da:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R/r)} [F]$$

dove $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ ed ϵ_r è la costante dielettrica relativa del mezzo compreso tra il conduttore interno e quello esterno. Analogamente, ad una lunghezza unitaria di conduttore è associata un'induttanza L :

$$L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln(R/r) [H]$$

dove $\mu = \mu_0\mu_r$ è il prodotto della permeabilità magnetica del vuoto per la permeabilità magnetica relativa.

Se il cavo ha lunghezza x , la sua capacità ed induttanza saranno:

$$C = C_0x$$

$$L = L_0x$$

Ammettiamo ora che ad un estremo del cavo sia applicato un segnale di tensione V . Il cavo, inizialmente scarico, comincerà caricarsi ed una corrente I fluirà nel conduttore. Potremo schematizzare la propagazione dei segnali di tensione e corrente nel cavo come mostrato in figura 4.2.

Qui si deve immaginare che sia stata fatta un “istantanea” ad un preciso istante t . Infatti sia $V(x)$ che $I(x)$ saranno in genere anche funzioni del tempo. Sappiamo che un'induttanza percorsa da una corrente variabile genera una differenza di potenziale ai propri capi data da:

$$\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$$

Nel nostro caso, l'induttanza $L\Delta x$ associata al tratto Δx di cavo genera una differenza di potenziale tra i suoi estremi (i punti a e b) data da:

$$V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0\Delta x \frac{\partial I}{\partial t}$$

Figura 4.2: Schema relativo alla propagazione di un'onda lungo una linea. La corrente all'istante generico t vale $I(x)$ nel punto di ascissa x . La differenza di potenziale tra i conduttori nel medesimo punto è $V(x)$. Nel medesimo istante queste, ad una distanza Δx , valgono rispettivamente $I(x+\Delta x)$ e $V(x+\Delta x)$

dove abbiamo usato il simbolo (∂) di derivata parziale, poichè I è funzione di x oltre che di t .

Questa, al limite $\Delta x \rightarrow 0$ fornisce:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \quad (4.1)$$

La capacità associata al tratto di cavo compreso tra a e b ($C_0\Delta x$) possiede una carica Q data da:

$$Q = CV = C_0\Delta x V$$

dove V è la differenza di potenziale media tra conduttore interno e conduttore esterno nel tratto Δx . Poichè prenderemo il limite $\Delta x \rightarrow 0$, questa sarà la differenza di potenziale tra i due conduttori nel punto x . La corrente netta uscente dal tratto di lunghezza Δx è:

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{\partial V}{\partial t} = -C_0\Delta x \frac{\partial V}{\partial t}$$

Al limite $\Delta x \rightarrow 0$ questa fornisce:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (4.2)$$

L'equazione (4.1) ci dice che la corrente variabile genera un gradiente di tensione; la (4.2) ci dice che la tensione variabile genera un gradiente di corrente.

Derivando la (4.1) rispetto a t e la (4.2) rispetto ad x , si trova:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = -L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \quad (4.4)$$

Da queste si ottiene poi:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

Cioè troviamo l'importante risultato che sia V che I soddisfano l'equazione delle onde con $u = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0}}$. La costante u è la velocità di propagazione dell'onda. Il suo inverso è il ritardo per unità di lunghezza. La soluzione, sia per V che per I , sarà quindi della forma $f(x \pm ut)$.

Ne segue che un qualsiasi segnale sinusoidale si propagherà lungo il cavo con la medesima velocità u , qualunque sia la frequenza f del segnale. Di qui segue, facendo uso dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico qualsiasi, che il sistema non introduce distorsioni. Si noti che il risultato raggiunto è vero per un qualsiasi cavo coassiale a condizione di trascurare le perdite.

Esaminiamo ora la propagazione di un gradino di tensione come quello indicato in figura 4.3, lungo un cavo coassiale.

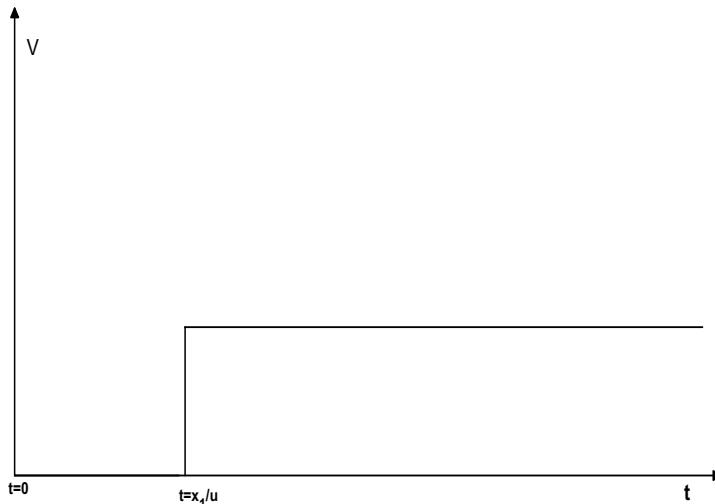


Figura 4.3: Gradino di tensione di altezza V . Il gradino si propaga lungo la linea con velocità u

Se il gradino di tensione è applicato ad una estremità della linea al tempo $t=0$, esso comincerà a caricare la linea, ed un impulso di corrente si propagherà lungo questa con velocità u . Il fronte di tensione si propagherà con la medesima velocità. Al tempo t , la carica totale accumulata in un tratto di linea di lunghezza $x = ut$ sarà:

$$Q = It$$

con $Q = CV = C_0 x V = C_0 u t V$.

Notiamo che V è l'altezza del fronte di tensione, che è costante. Quindi:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C_0 u V = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} V$$

Il rapporto in ogni punto tra tensione e corrente sarà:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (4.7)$$

Questa va sotto il nome di impedenza caratteristica della linea.

Notiamo che Z_0 ha le dimensioni di una resistenza, ma ciò non deve far pensare che la linea sia assimilabile ad una impedenza di valore Z_0 . Il significato di Z_0 è solo quello del rapporto tra tensione e corrente per un'onda che viaggi lungo la linea. A destra del fronte d'onda la tensione è nulla, come nulla è la corrente.

Per un'onda che si propaghi in verso contrario adotteremo la convenzione di scegliere il segno negativo per la corrente, con che:

$$\frac{V}{I} = -Z_0 = -\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (4.8)$$

Valori tipici di Z_0 sono nel campo ($50 - 200 \Omega$).

Valori di Z più elevati (fino a qualche $k\Omega$) possono essere ottenuti aumentando L . Ciò si può realizzare con un cavo che utilizzi un conduttore interno avvolto a spirale, eventualmente su di un supporto centrale di materiale ferromagnetico. Se il solenoide è fittamente avvolto, il campo magnetico nella zona compresa tra i due conduttori è trascurabile rispetto a quello nel conduttore centrale. L'induttanza è quindi determinata dal conduttore interno solenoidale e vale:

$$L_0 = \frac{\mu n^2 \pi a^2}{4} = \mu_r n^2 \pi^2 a^2 \cdot 10^{-7} \quad (H/m)$$

Essendo il ritardo per unità di lunghezza della linea proporzionale, a parità di C_0 , alla $\sqrt{L_0}$, ne segue che questo tipo di linea ad alto Z_0 avrà anche un elevato valore del ritardo per unità di lunghezza.

4.3 Riflessioni alle estremità di una linea

Se l'onda di tensione è progressiva (cioè si propaga nel verso crescente delle x) essa sarà del tipo:

$$V = f\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Se essa è regressiva:

$$V = f\left(t + \frac{x}{u}\right)$$

L'onda di corrente sarà:

$$I = \frac{1}{Z_0} f\left(t \pm \frac{x}{u}\right)$$

Agli estremi della linea debbono però essere soddisfatte delle condizioni al contorno. Ammettiamo infatti che la linea sia chiusa su di una resistenza R , di valore diverso da Z_0 . In tal caso, all'estremità della linea dovrà esser soddisfatta la condizione:

$$\frac{V}{I} = R \neq Z_0$$

che l'onda incidente non può soddisfare. Dovrà allora aver origine un'onda riflessa (di tensione e corrente) tale che la somma delle onde incidente e riflessa soddisfi la condizione.

Se indichiamo con ρ il coefficiente di riflessione, cioè se ρV ($-1 \leq \rho \leq 1$) è l'ampiezza di tensione dell'onda riflessa, l'ampiezza di corrente della stessa sarà:

$$I_r = -\rho \frac{V}{Z_0}$$

Le ampiezze complessive di tensione e di corrente all'estremità della linea saranno allora:

$$\begin{aligned} V_t &= V(1 + \rho) \\ I_t &= I + I_r = \frac{V}{Z_0}(1 - \rho) \end{aligned}$$

Il rapporto V_t/I_t sarà quindi:

$$\frac{V_t}{I_t} = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

che deve uguagliare R . Ne segue

$$\frac{R}{Z_0} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

da cui:

$$\rho = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \quad (4.9)$$

cioè l'onda riflessa avrà ampiezza pari a ρV . Il parametro ρ è noto come *coefficiente di riflessione*.

Esaminiamo ora i seguenti casi particolari:

- (a) $R = 0 \rightarrow \rho = -1$. In tal caso l'onda di tensione riflessa è capovolta rispetto a quella incidente
- (b) $R = \infty \rightarrow \rho = +1$. In tal caso l'onda riflessa è uguale a quella incidente
- (c) $R = Z_0 \rightarrow \rho = 0$. In tal caso non c'è onda riflessa. Si dice che la linea è *chiusa sulla sua impedenza caratteristica*

Consideriamo ora un generatore di segnali, avente una impedenza d'uscita R_s , chiuso su di una linea di trasmissione avente impedenza caratteristica R_0 , come mostrato in figura 4.4.

L'impedenza vista tra i terminali d'uscita (a-b) del generatore guardando verso destra è R_0 . Se $u(t)$ è un gradino di tensione, V_i sarà:

$$V_i = \frac{R_0}{R_0 + R_s} u(t)$$

ad esempio, se la linea è adattata all'ingresso cioè se $R_s = R_0$, si avrà:

$$V_i = \frac{1}{2} u(t)$$

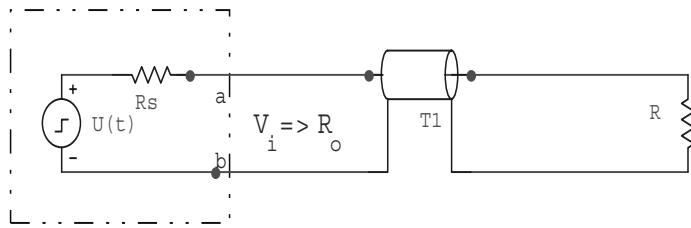


Figura 4.4: Generatore d'impedenza d'uscita R_s , chiuso su di una linea avenire impedenza caratteristica R_0 . La linea è chiusa all'altra estremità su di un'impedenza R

Guardiamo ora cosa accade al gradino di tensione quando esso, dopo un tempo T , raggiunge l'altra estremità della linea. Ciò dipenderà ovviamente dal valore di R . Ammettiamo per cominciare che sia $R = 0$. In tal caso avremo $\rho = -1$. Quindi, dopo un tempo T (pari alla lunghezza L della linea divisa per la velocità di propagazione del segnale lungo la linea) dall'estremo di questa partirà un segnale di tensione $V_r = -V_i = -u(t)/2$.

Tale segnale arriverà all'ingresso della linea dopo un ulteriore tempo T . A partire da tale istante il segnale di tensione fra i punti a e b sarà $u/2 - u/2 = 0$. In definitiva il segnale di tensione in $a-b$ avrà l'andamento mostrato in figura 4.5(a).

Se la lunghezza della linea è molto piccola il segnale sarà un impulso stretto, come mostrato in figura 4.5(b).

Tale metodo è adoperato talvolta per generare un segnale di breve durata a partire da un segnale lungo, il quale abbia un brusco fronte di salita (o di discesa).

Un esempio è mostrato in figura 4.5(c),(d).

4.4 Riflessioni multiple

Ammettiamo ora che né l'impedenza d'uscita del generatore che alimenta la linea (avente lunghezza L) né l'impedenza che chiude la linea all'estremità di ricezione siano adattate. Siano cioè esse entrambe diverse dall'impedenza caratteristica della linea. Chiamiamo ρ' il coefficiente di riflessione all'estremità di ingresso e ρ quello all'estremità d'uscita. Esaminiamo l'andamento temporale del segnale alla estremità d'ingresso, per un segnale a gradino $u(t)$. Quando il segnale parte, a $t = 0^+$, esso vale u . Al tempo $t_D = L/u$, un segnale riflesso, pari a ρu comincia a muoversi dall'estremità d'uscita verso sinistra. Per $t = 2t_D$ il segnale ρu arriva al punto d'ingresso ($x=0$). In tale istante il segnale in $x=0$ passa dal valore u al valore $u + \rho u = (1 + \rho)u$. In questo stesso istante, un segnale riflesso pari a $\rho' \rho u$ parte dall'estremità di ingresso verso destra. Al tempo $t = 3t_D$ questo segnale arriva all'estremità della linea e viene nuovamente riflesso. Il nuovo segnale riflesso vale: $\rho \rho' \rho u$. Questo arriva in $x=0$ al tempo $4t_D$ e viene a sommarsi ai precedenti. In definitiva, se osserviamo il segnale in $x=0$ avremo:

- per $t < 2t_D$; $V = u$
- per $2t_D < t < 4t_D$; $V = u + \rho u$

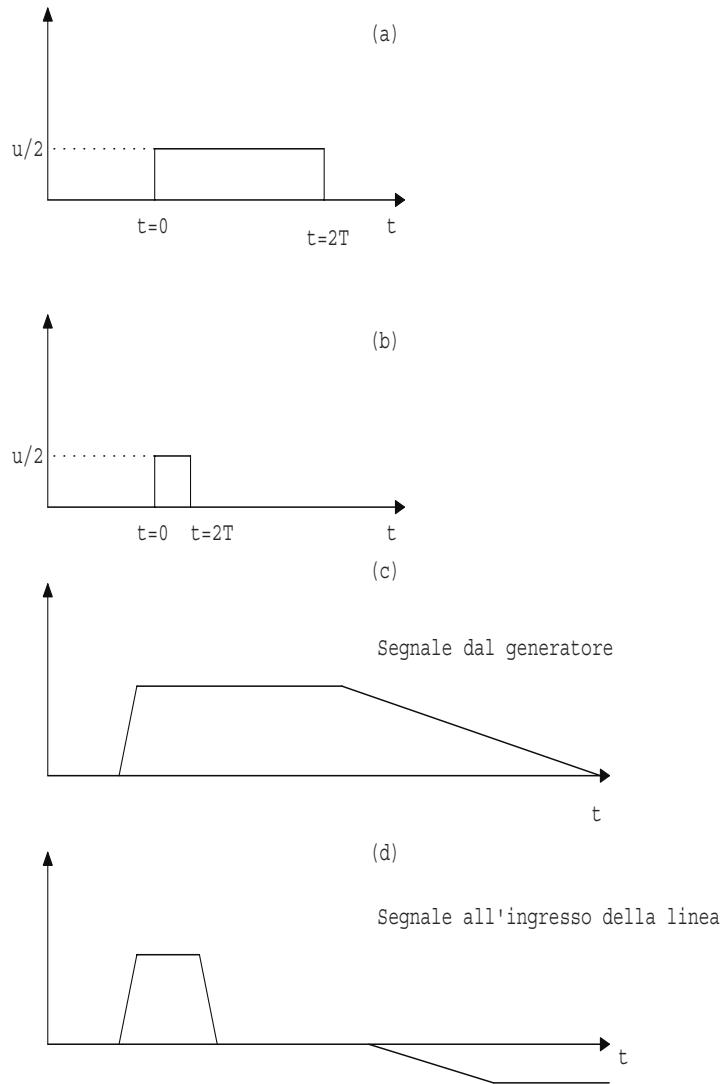


Figura 4.5: Effetto delle riflessioni di un gradino all'estremità di una linea cortocircuitata. (a) impulso rivelato tra i punti a e b di figura 4.4 nel caso generico; (b) impulso rivelato nel caso in cui la linea sia molto corta; (c) segnale fornito dal generatore, con un ripido fronte di salita ed una lenta discesa; (d) segnale rivelato tra i punti a e b di figura 4.4 in corrispondenza a tale segnale fornito dal generatore

- per $4t_D < t < 6t_D$; $V = u + \rho u + \rho' \rho u$
- per $6t_D < t < 8t_D$; $V = u + \rho u + \rho' \rho u + \rho \rho' \rho u$

Notiamo che, essendo ρ e ρ' entrambi minori di 1, i successivi termini saranno sempre più piccoli.

4.5 Effetti resistivi nelle linee di trasmissione

Le linee fin qui considerate erano caratterizzate da una capacità C_0 ed un'induttanza L_0 per unità di lunghezza ma erano altrimenti prive di perdite ohmiche. Se degli ele-

menti resistivi sono anche presenti, un elemento di linea potrà essere schematizzato come in figura 4.6:

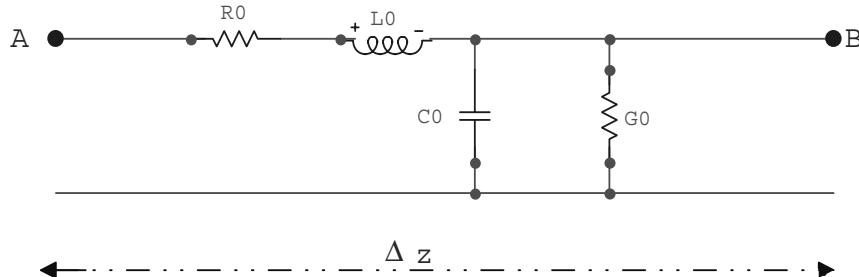


Figura 4.6: Linea di ritardo con perdite ohmiche. R_0 , C_0 , L_0 e G_0 sono definiti nel testo

Qui in aggiunta ad una capacità C_0 ed induttanza L_0 per unità di lunghezza, abbiamo una resistenza R_0 (serie) ed una conduttanza G_0 (parallelo) per unità di lunghezza.

Le equazioni diventano ora, indicando al solito con ΔV la differenza di potenziale fra i punti B e A, con ΔI la differenza tra la corrente uscente da B e quella entrante in A e con z la coordinata misurata lungo la linea:

$$\Delta V = -R_0 \Delta z I(z, t) - L_0 \Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (4.10)$$

$$\Delta I = -G_0 \Delta z V(z, t) - C_0 \Delta z \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (4.11)$$

Cioè:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -R_0 I(z, t) - L_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -G_0 V(z, t) - C_0 \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (4.13)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (L_0 G_0 + R_0 C_0) \frac{\partial V}{\partial t} + R_0 G_0 V \quad (4.14)$$

Questo ovviamente si riduce all'equazione (4.6) se $R_0 = G_0 = 0$.

Un'equazione analoga può essere facilmente ottenuta per la corrente $I(z, t)$.

Esaminiamo ora la risposta di tale linea ad un segnale sinusoidale:

$$V = V(z) e^{j\omega t} \quad (4.15)$$

Sostituendo nella (4.14) si trova:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = V(z) [R_0 G_0 - L_0 C_0 \omega^2 + j\omega (L_0 G_0 + R_0 C_0)] \equiv \gamma^2 V(z)$$

con:

$$\gamma^2 \equiv -L_0 C_0 \omega^2 + j\omega (L_0 G_0 + R_0 C_0) + R_0 G_0 = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) \quad (4.16)$$

La variabile:

$$\gamma \equiv \alpha + j\kappa \equiv \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \quad (4.17)$$

è detta costante di propagazione.

La soluzione generale dell'equazione differenziale (4.14) è quindi del tipo:

$$V(z, t) = V_1 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - kz)} + V_2 e^{\alpha z} e^{j(\omega t + kz)} \quad (4.18)$$

Questa è nuovamente la somma di un'onda progressiva e di una regressiva. Ciascuna delle due onde è però moltiplicata per un esponenziale ($e^{\pm\alpha z}$) che introduce un'attenuazione con costante $\lambda = 1/\alpha$.

Notiamo che sia α che k dipendono da ω . Ciò ha l'effetto di introdurre una distorsione in un generico segnale applicato. Infatti si vede che le diverse componenti di Fourier di un tale segnale sono attenuate in modo diverso, come diversa è la loro velocità di propagazione: $v = \omega/k$.

Risolvendo la (4.16) si trova:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}[(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}] \quad (4.19)$$

$$k^2 = \frac{1}{2}[-(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}] \quad (4.20)$$

A frequenze ω tali che $R_0/\omega L_0 \ll 1$ e $G_0/\omega C_0 \ll 1$, α e k possono essere approssimati con:

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right)$$

$$k \approx \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

Con ciò la velocità di propagazione $v = \omega/k \approx 1/\sqrt{L_0 C_0}$, come nel caso di una linea priva di perdite.

Inoltre, in tale approssimazione la costante di attenuazione α viene ad essere indipendente dalla frequenza. Nel caso dei cavi coassiali tale regione di alte frequenze inizia attorno ai 100 kHz.

A frequenze più elevate l'effetto pelle fa sì che la parte di conduttore responsabile della conduzione si riduca ad uno strato superficiale tanto più sottile quanto più elevata è la frequenza dei segnali trasmessi. Ciò porta ad un aumento della resistenza e di conseguenza ad una lunghezza d'attenuazione¹ che diminuisce all'aumentare della frequenza. Se indichiamo con ρ la resistività del conduttore, con δ la "skin depth", cioè la profondità di penetrazione dell'onda elettromagnetica nel conduttore (dipendente da ω) e con a il raggio del conduttore, si trova che la resistenza per unità di lunghezza è approssimativamente uguale a:

$$R_0 = \frac{\rho}{2\pi\delta} \left(\frac{1}{a} \right)$$

¹Definita come la lunghezza dopo la quale il segnale si è attenuato di un fattore e .

Ad esempio, nel caso del rame ($\sigma = 5.8 \cdot 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$), se $a=1$ mm, e δ dato da:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}$$

cioè:

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot 5.8 \cdot 10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 0.166 \sqrt{\frac{1}{\omega}} = 0.066 \sqrt{\frac{1}{f}} [m/\sqrt{s}] = \\ &= 6.6 \sqrt{\frac{1}{f}} [cm/\sqrt{s}] \end{aligned}$$

Ne segue che, per un cavo di rame avente un raggio del conduttore interno di 1 mm, R_0 vale all'incirca:

$$R_0 = \frac{1000}{2\pi \cdot 0.066 \cdot 5.8 \cdot 10^7} = 4.15 \cdot 10^{-5} \sqrt{f} [\Omega \sqrt{Hz} \cdot m^{-1}]$$

che, ad una frequenza di 1 GHz da:

$$R_0 = 1.3 \Omega$$

per un cavo avente un metro di lunghezza.

La dipendenza della resistenza del cavo dall'inverso della radice quadrata della frequenza è confermata dai dati sperimentali.

Se ad una estremità di un cavo avente una resistenza per unità di lunghezza R_0 ed una capacità per unità di lunghezza C_0 , è applicato un gradino di tensione, il segnale misurato all'estremità opposta non è esattamente un gradino. Esso sarà caratterizzato da un tempo di salita τ che è dato dal prodotto RC , dove R è la resistenza e C la capacità del cavo. Poiché C è uguale a C_0 moltiplicato per la lunghezza del cavo ed analogamente R è uguale a R_0 moltiplicato per la lunghezza del cavo, ne segue che il tempo di salita del segnale è pari a $R_0 C_0$ moltiplicato per il quadrato della lunghezza del cavo. Ad esempio, per un cavo del tipo di quello esaminato, il tempo di salita tipico dopo una lunghezza di 10 m è circa 1 ns.

Le case costruttrici forniscono il valore di τ , cioè del tempo di salita misurato su di un cavo lungo 10 m. Valori tipici per cavi adoperati in elettronica veloce sono 0.04-0.2 ns.

4.6 Adattamento d'impedenza per una linea

Le riflessioni che i segnali possono subire alle estremità di una linea di trasmissione possono dar luogo ad inconvenienti. Ammettiamo ad esempio di voler osservare all'oscilloscopio un certo impulso, avente una determinata altezza e durata, fornito da un generatore d'impulsi avente una bassa impedenza d'uscita. Se, come quasi sempre accade, facciamo uso di un cavetto da 50Ω per inviare il segnale in esame ad un oscilloscopio, dobbiamo tener conto del fatto che una tipica impedenza d'ingresso di questo è dell'ordine del $M\Omega$. In tali condizioni il coefficiente di riflessione all'ingresso dell'oscilloscopio sarà circa 1. Il segnale riflesso arriverà, dopo un piccolo ritardo, all'uscita del generatore, dove si sommerà al segnale che questo sta inviando. In

tal modo avremo, in tempi brevissimi (dell'ordine del ritardo del cavo, cioè pochi ns) un gran numero di riflessioni tra generatore ed oscilloscopio, con il risultato di osservare un segnale completamente diverso da quello originato dal generatore.

È quindi necessario liberarsi delle riflessioni. Ciò sarebbe possibile se l'impedenza d'ingresso dell'oscilloscopio fosse uguale a quella della linea (50Ω nel nostro caso). Alcuni oscilloscopi sono già predisposti in modo che si possa "commutare" l'impedenza d'ingresso, tra $1 M\Omega$ e 50Ω . Nei casi in cui tale predisposizione non esista è possibile "adattare" l'ingresso, ponendo in parallelo ad esso un "tappo" da 50Ω . Lo schema è quello di figura 4.7.

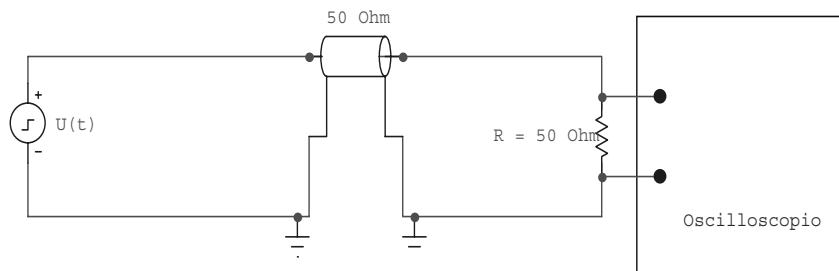


Figura 4.7: Adattamento d'impedenza di una linea

Esistono dei connettori appositi che svolgono tale funzione.

Situazioni simili a quella descritta possono verificarsi in altre applicazioni: può ad esempio accadere che la linea abbia un'impedenza *maggior*e di quella del circuito che essa deve alimentare. In tal caso occorrerà mettere *in serie* all'ingresso del circuito un'opportuna impedenza, tale che la somma dell'impedenza d'ingresso del circuito e di quella aggiunta sia uguale all'impedenza della linea. In tutti questi casi si dice che si effettua un *adattamento d'impedenza*.

Il problema delle riflessioni può essere ulteriormente complicato dalla presenza, all'ingresso del circuito che la linea deve alimentare, di impedenze di tipo induttivo o capacitivo. Un'analisi di questo tipo di riflessioni è discussa nel capitolo dedicato alle trasformate di Laplace, come applicazione di queste.

4.7 Linee di trasmissione commerciali

Sono comunemente disponibili in commercio un'enorme varietà di cavi coassiali, che differiscono per il diametro dei conduttori, la natura del materiale, lo spessore e natura del dielettrico che separa il conduttore interno da quello esterno etc..

Normalmente il materiale adoperato per i conduttori è rame, rame/stagno o altre leghe speciali. Il dielettrico può essere polietilene, nylon, polipropilene o altre sostanze plastiche.

Nella pratica radiotelevisiva si fa uso di cavi aventi impedenza caratteristica di 75Ω . Nei sistemi di telecomunicazione si fa uso di cavi da 50Ω . Questo è anche il caso delle linee di ritardo adoperate in esperimenti di Fisica Subnucleare, dove si

adoperano cavi già predisposti, con opportuni connettori (aventi impedenza di 50Ω) alle estremità, e con lunghezze diverse, corrispondenti a ritardi che vanno da 0.5 ns a qualche decina di ns.

I cavi maggiormente adoperati in Fisica Subnucleare sono quelli corrispondenti allo standard RG-58C/U (50Ω) con diametro esterno di 2.95 mm, nonchè quelli del tipo RG-174/U (sempre di 50Ω) con diametro di 1.52 mm.

Nel campo dell'informatica e della telematica si adoperano spesso cavi da 93Ω o 105Ω , come pure cavi da 75Ω .

Le lunghezze d'attenuazione, come i diametri, variano molto da tipo a tipo di cavo. Inoltre, come già accennato, la lunghezza d'attenuazione cambia con la frequenza. Normalmente tale parametro è quotato nei cataloghi in unità di dB/100 piedi. Un'attenuazione di 1 dB/100 piedi corrisponde all'incirca ad una diminuzione dell'ampiezza del segnale dell'80% ogni 30 m.

Lunghezze d'attenuazione tipiche (per cavi coassiali che rientrano nella standard MIL-C-17) con diametro esterno di 0.86 mm vanno da 15 dB/100 piedi a frequenze di 100 MHz, a 258 dB/100 piedi a frequenze di 20 GHz.

Cavi coassiali dello stesso tipo, ma con diametro di 3.58 mm, hanno lunghezze d'attenuazione migliori: esse variano tra 3 dB/100 piedi a 100 MHz e 68 dB/100 piedi a 20 GHz.

4.8 Linea chiusa su di un condensatore

Abbiamo visto che se una linea di ritardo avente impedenza caratteristica Z_0 è chiusa su di un'impedenza Z , il coefficiente di riflessione (cioè il rapporto tra l'ampiezza del segnale riflesso e quella del segnale incidente) è dato da:

$$\rho = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (4.21)$$

Ci proponiamo ora di calcolare, facendo uso della tecnica delle trasformate di Laplace, la riflessione di un impulso rettangolare di durata T ed ampiezza unitaria, all'estremità di una linea chiusa su di un condensatore, come mostrato in figura (4.8).

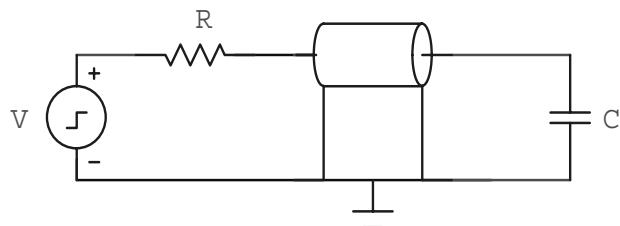


Figura 4.8: Linea chiusa su di un condensatore: schema utilizzato per il calcolo delle riflessioni

Un gradino unitario di tensione è descritto dalla funzione $u(t)$, nulla per $t < 0$ ed uguale ad 1 per $t \geq 0$. La trasformata di Laplace del gradino è, come sappiamo,

$1/s$. Un gradino *ritardato* di un tempo T è descritto dalla funzione $u(t - T)$, la cui trasformata è:

$$\frac{1}{s} e^{-sT}$$

Un impulso rettangolare di ampiezza unitaria e durata T può esser ottenuto (vedi figura 4.9) sottraendo $u(t - T)$ da $u(t)$:

$$r(t) = u(t) - u(t - T)$$

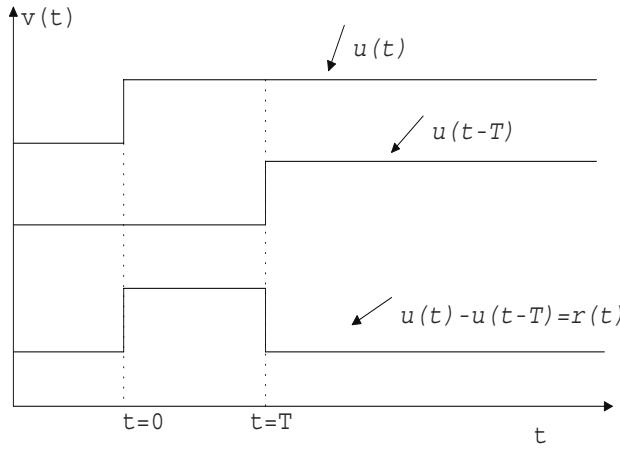


Figura 4.9: Impulso unitario di durata T , ottenuto per sottrazione da due gradini unitari che hanno inizio rispettivamente al tempo $t = 0$ ed al tempo $t = T$

La trasformata di Laplace di questo è:

$$\tilde{r}(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT})$$

dove abbiamo fatto uso del simbolo \sim (tilde) ad indicare la trasformata. L'impulso riflesso all'estremità della linea sarà dato da:

$$v_r(t) = \rho r(t)$$

Il segnale presente ai capi del condensatore C è la somma dell'impulso incidente e di quello riflesso:

$$v_c(t) = v_r(t) + r(t) = (1 + \rho)r(t) = \frac{2Z_C}{Z_C + Z_0}r(t)$$

dove Z_C è l'impedenza capacitiva, la cui trasformata è: $\tilde{Z}_C = 1/sC$.

Trasformando i due membri di questa equazione otteniamo:

$$\tilde{v}_c(s) = 2 \frac{1/sC}{Z_0 + 1/sC} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) = 2 \left[\frac{1}{s(1 + s\tau)} - \frac{1}{s(1 + s\tau)} e^{-sT} \right]$$

dove si è posto $\tau = CZ_0$.

Il termine $1/[s(1+s\tau)]$ può esser riscritto come:

$$\frac{1}{s(1+\tau s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_c(s) &= 2 \left[\frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) - \frac{1}{s+1/\tau} (1 - e^{-sT}) \right] = \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau} \right) - e^{-sT} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau} \right) \right]\end{aligned}$$

la cui antitrasformata è:

$$v_c(t) = 2 [u(t)(1 - e^{-t/\tau}) - u(t-T)(1 - e^{-(t-T)/\tau})] \quad (4.22)$$

La figura 4.10 mostra l'andamento di questa funzione nel caso in cui sia: $C = 3nF$, $Z_0 = 600\Omega$, $T = 8\mu s$.

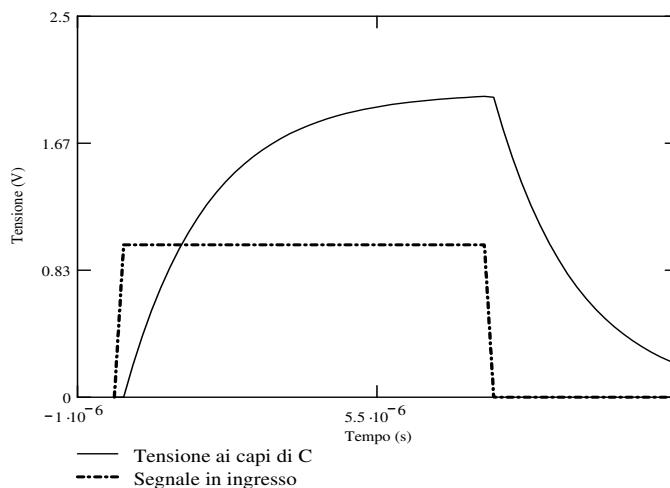


Figura 4.10: Riflessione di un impulso di durata T all'estremità di una linea chiusa su di un condensatore. L'impulso, di durata $T=8\mu s$, è indicato dalla forma d'onda tratteggiata. La curva solida è la risultante dell'onda incidente e di quella riflessa, rivelabile ai capi del condensatore. L'impedenza della linea è $Z_0=600 \Omega$; la capacità $C = 3nF$

Se misuriamo l'andamento temporale della tensione all'*ingresso* della linea, ed ammettiamo che i successivi impulsi siano temporalmente ben separati (cioè la loro frequenza sia molto bassa) ed inoltre che il ritardo t_D della linea sia grande rispetto alla lunghezza T dell'impulso, potremo vedere l'effetto della sola onda riflessa. Questa è data dalla differenza tra la soluzione già trovata (4.22) ed $r(t)$, cioè:

$$v_i(t) = u(t)(1 - 2e^{-t/\tau}) - u(t') \left(1 - 2e^{-t'/\tau} \right)$$

dove: $t' = t - T$. Questo segnale di tensione appare in realtà al tempo t_D (se lo zero dei tempi è quello in cui ha luogo la riflessione, come nell'esempio precedente, o al tempo $2t_D$ se lo zero dei tempi è l'istante in cui il segnale è partito dal generatore d'impulsi). L'andamento temporale di $v_i(t)$ ottenuto facendo uso di un programma di simulazione (Microcap 6 [5]) è mostrato in figura 4.11. I dati adoperati sono:

- lunghezza T dell'impulso: 50 ns;
- frequenza degli impulsi: 1 MHz;
- impedenza caratteristica della linea: $Z_0 = 100\Omega$;
- titardo della linea: $t_D = 750\text{ns}$;
- capacità: $C = 350\text{pF}$.

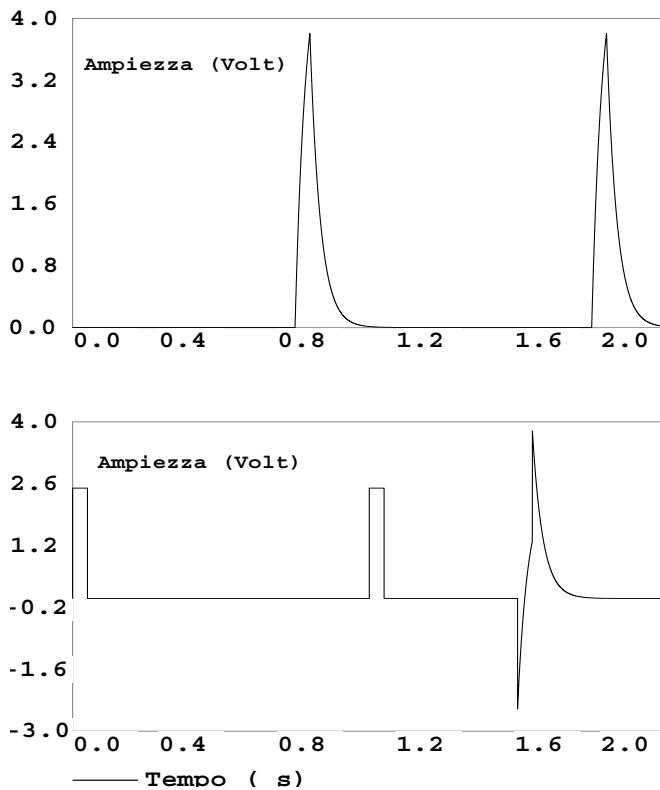


Figura 4.11: Riflessione all'estremità di una linea chiusa su di un condensatore. Il grafico superiore mostra il segnale ai capi del condensatore; quello inferiore mostra il segnale all'ingresso della linea. I valori dei componenti ed i parametri del segnale applicato sono indicati nel testo.

Il grafico in alto mostra il segnale ai capi di C. Questo, come si vede, è ritardato di 750 ns rispetto all'istante in cui il segnale è partito dal generatore. Il successivo segnale compare ai capi di C dopo ulteriori 1000 ns, ed è associato al secondo impulso in ingresso.

Il grafico inferiore mostra l'andamento dei segnali all'ingresso della linea. Vediamo due successivi impulsi inviati dal generatore, mentre il primo impulso riflesso compare con un ritardo $2t_D = 1.5 \mu\text{s}$ dall'inizio del primo impulso.

Capitolo 5

Semiconduttori: Diodi e Transistor

5.1 Introduzione

In questo capitolo ci proponiamo di fornire i concetti che sono alla base del funzionamento dei diodi al silicio e dei transistor bipolari. Inizieremo con una descrizione, alquanto sommaria, del processo di conduzione elettrica nei solidi ed in particolare nei semiconduttori. Esamineremo poi i processi che hanno luogo all’interfaccia tra due semiconduttori aventi conducibilità diverse e descriveremo le caratteristiche dei diodi ed alcune delle loro applicazioni. Passeremo poi a studiare la struttura ed il funzionamento del transistor bipolare a giunzione.

Prima di iniziare, val la pena di riassumere gli eventi che portarono, nel 1940, alla scoperta del diodo a giunzione presso i laboratori Bell di New York e successivamente, nel dicembre del 1947, alla scoperta, presso i medesimi laboratori, del transistor.

Per molti anni gli apparecchi radio avevano fatto uso, per la rivelazione dei segnali, di “raddrizzatori”, consistenti in un cristallo su cui veniva tenuta premuta l’estremità di un sottile filo metallico (noto in gergo come “baffo di gatto”). Tale tipo di rivelatore (adoperato anche da Marconi nella sua prima trasmissione attraverso l’Atlantico il 12 Dicembre 1901) era molto instabile ed il suo funzionamento era ben lungi dall’essere stato compreso. Esso era stato scoperto da Munk A. Rosenhold, ma la scoperta era passata inosservata, fino a che non fu “riscoperto” da F. Braun nel 1874, ed adoperato in elettronica da Jagadis Chandra Bose nel 1899. Si era quindi passati a rivelatori basati su valvole termoioniche (diodi). Questi avevano però l’inconveniente di avere una elevata capacità tra gli elettrodi, il che rendeva estremamente difficile il loro uso ad alte frequenze. La seconda guerra mondiale pose il problema della rivelazione di navi o velivoli in avvicinamento, tramite la rivelazione di segnali di alta frequenza riflessi da tali mezzi. Ciò richiedeva rivelatori (ed amplificatori) che funzionassero nella zona delle microonde. Ci fu quindi una corsa allo sviluppo di rivelatori che potessero sostituire le valvole, e si ritornò quindi ad esplorare la possibilità di utilizzare i cristalli. Tra i cristalli più studiati fino a quel momento vi erano il Selenio, il Germanio, il Silicio ed altri. Il Fisico Karl Lark-Horovitz (un Viennese divenuto Americano nel 1936) che era Professore alla Purdue University, si era concentrato sul Germanio, ed era riuscito, nel 1942, ad

ottenere dei cristalli di Germanio di elevata purezza.

Verso la fine degli anni '30 cominciava ad esser chiaro che vi erano buone possibilità di realizzare sistemi elettronici in grado di operare ad alte frequenze facendo uso di tali cristalli. Nel 1936 Mervin Kelly, dei Laboratori Bell, mise su un gruppo di fisica dello stato solido. Nel gruppo lavoravano William (Bill) Shockley, Russell Ohl, Jack Scaff ed altri. VÀ notato che già nel 1938 due ricercatori Tedeschi (Pohl e Hilsch) avevano descritto un amplificatore a stato solido che faceva uso di un cristallo di Bromuro di Potassio, a cui avevano attaccato tre "baffi di gatto" (un antenato del futuro transistor). Tuttavia questo lavorava solo a basse frequenze e non era molto interessante.

Verso l'inizio del 1939, presso i Laboratori Bell, Russell Ohl era riuscito a produrre dei cristalli di silicio con un grado di purezza del 99.8% ed a farne funzionare alcuni come *raddrizzatori* (anche se solo a frequenze non elevate). Il 23 febbraio egli notò che un particolare cristallo non possedeva, a differenza degli altri, la proprietà di lasciar passare la corrente in una sola direzione. Osservando più accuratamente il cristallo egli notò che esso aveva una sottile fessura nel mezzo. Provò allora a far passare corrente attraverso il cristallo in varie condizioni sperimentali ed osservò che la corrente cambiava se il cristallo era posto vicino ad un saldatore caldo o anche vicino ad una lampada ad incandescenza. Si rese così conto del fatto che era la luce che, investendo il cristallo faceva passare una corrente. Quando Ohl portò il cristallo perché fosse esaminato dai responsabili dei Laboratori, questi si dimostrarono molto scettici e lo dettero a Walter Brattain perché ne rimisurasse le caratteristiche.

Ulteriori indagini furono portate avanti dallo stesso Ohl, in collaborazione con Mervin Kelly, Walter Brattain e Joseph Becker. Si notò che, collegando le due facce del cristallo ad un voltmetro ed accendendo una torcia tascabile , il voltmetro indicava un brusco salto di tensione, di circa mezzo Volt. Successive misure ed osservazioni svelarono l'arcano: i livelli di purezza del cristallo erano diversi dai due lati della fessura; uno dei lati aveva così un eccesso di elettroni liberi, l'altro un deficit. A causa della diffusione, gli elettroni in eccesso da quel particolare lato della fessura si muovevano verso il lato opposto, creando in tal modo una distribuzione disuniforme di carica e di conseguenza una barriera di potenziale in corrispondenza della fessura. Ciò costituiva un *diodo*, per cui la corrente elettrica poteva fluire solo nel verso corrispondente a quello decrescente del potenziale. Quando Ohl accendeva la lampada, l'energia dei fotoni emessi era sufficiente ad imprimere agli elettroni l'energia cinetica necessaria ad attraversare la barriera di potenziale, producendo così una corrente elettrica. Ohl, senza rendersene conto, aveva realizzato una primordiale *cella solare*, che riceve energia dal sole e la converte in elettricità. I Laboratori Bell avevano ora un sistema per sostituire gli ingombranti e costosi tubi a vuoto con minuscoli diodi al silicio.

Altrettanto empirica fu l'invenzione del transistor, realizzata da Walter Brattain, Robert Gibney, William Shockley e John Bardeen, sempre ai Bell Labs, tra il novembre ed il dicembre 1947.

L'idea base era quella di realizzare un dispositivo che funzionasse in modo analogo ad una valvola (triodo) termoionica, in cui una tensione applicata all'elettrodo posto tra catodo ed anodo (la griglia) "modula" la corrente che fluisce nel tubo. Ora però si trattava di inserire l'analogico della griglia nella zona di semiconduttore che separa la zona ricca di portatori di carica negativi, da quella ricca di portatori

positivi. Essendo lo spessore di tale zona dell'ordine di qualche micron, l'operazione era tutt'altro che banale.

John Bardeen, il teorico che, insieme agli sperimentali Shockley e Brattain, ebbe nel 1956 il Nobel per le ricerche che portarono all'invenzione del transistor, nella sua "Nobel lecture", così descrive questi sviluppi:

Era stata a lungo coltivata la speranza di realizzare un triodo, o dispositivo amplificatore, facendo uso di un semiconduttore. Due erano state le possibilità suggerite. La prima scaturiva da un'analogia tra una giunzione rettificatrice metallo-semiconduttore ed un diodo a vuoto. Se fosse in un qualche modo stato possibile inserire una griglia nella regione di carica spaziale in corrispondenza della giunzione, si sarebbe riusciti a controllare il flusso di elettroni attraverso la stessa. Una grossa difficoltà pratica era costituita dal fatto che la zona di carica spaziale ha tipicamente uno spessore di 10^{-4} cm. Che tuttavia l'idea fosse valida era stato dimostrato da Hilsch e Pohl che avevano costruito un triodo facendo uso di un cristallo di alogenuro alcalino, in cui lo spessore della zona di carica spaziale era dell'ordine del cm. Poiché tuttavia in tale dispositivo l'amplificazione era limitata a frequenze dell'ordine di 1 Hz, esso non era di alcuna utilità pratica in applicazioni elettroniche.

*La seconda idea era quella di controllare la conduzione in un film sottile o piastra di semiconduttore, tramite l'applicazione di un campo elettrico perpendicolare alla piastra medesima (chiamato l'**effetto di campo**). In forma semplificata, la piastra forma una delle armature di un condensatore, di cui l'altra armatura costituisce l'elettrodo di controllo. Quando una tensione è applicata all'armatura di controllo, cariche elettriche vengono indotte sulla piastra. Se le cariche indotte sono dei portatori elementari liberi, la conduzione (lungo la piastra) dovrebbe cambiare al variare della tensione applicata. Quest'idea fu suggerita da Shockley; i suoi calcoli indicavano che, adottando un'opportuna geometria e materiali adatti, l'effetto avrebbe dovuto essere abbastanza grande da produrre un'amplificazione.*

Una serie di tentativi furono effettuati in condizioni sperimentali le più disparate (fino ad immergere campioni di silicio in acqua per liberare la superficie dalla condensazione !) prima di arrivare a realizzare un dispositivo, quale il transistor, in grado di essere adoperato come amplificatore e quindi di sostituire le ingombranti e delicate valvole termoioniche (triodi, tetrodi, pentodi etc.). Il primo prototipo di *transistor* realizzato aveva una struttura molto simile a quella realizzata da Pohl e Hilsch nel 1938, cioè era costituito da un cristallo di Germanio, cui erano stati attaccati tre "baffi di gatto". Si era alla fine del 1947, ma i laboratori tennero la cosa segreta fino all'anno successivo. Nel frattempo si preoccuparono però di brevettare l'invenzione e di convincere i militari a non bloccare la diffusione dell'informazione ! Il 30 Giugno 1948 tennero una conferenza stampa in cui annunciavano la scoperta. Questa passò quasi inosservata. Era stato comunque realizzato il primo *transistor*, l'analogo del triodo a vuoto di cui parla Bardeen. Il nuovo dispositivo faceva ancora uso dei contatti metallici, ma pochi anni più tardi (1951) furono sviluppati i primi prototipi di transistor a giunzione quali li conosciamo oggi (in dimensioni enormemente più piccole). Si dovette attendere fino al 1954 prima di incontrare la prima serie versione commerciale, anche se una pubblicità della Raytheon del 1952 dichiara che il primo transistor prodotto da loro (il ck703) risaliva al 1948 ! Comunque i primi transistor prodotti (il ck703 ed il ck716 della Raytheon) non furono un grande successo dal punto di vista commerciale. Il primo ad essere prodotto in

grandi quantità fù invece il ck722.

I Bell Labs inziarono a vendere brevetti del transistor a giunzione nel 1952, al prezzo di 25,000 dollari per brevetto. Un brevetto fù acquistato da una compagnia di Tokyo, la “Tokyo Tsushin Kogyo” (che nel 1955 diventò la Sony). Questa compagnia produsse le prime radio interamente a transistor, con un’ampia diffusione commerciale. In realtà già la Texas aveva prodotto radio a transistor uno o due anni prima, ma non era stata altrettanto abile nel commercializzarla.

Resoconti dettagliati della cronistoria di queste invenzioni possono esser consultati alle riferimenti [38], [39], [40], [41], [43], [44].

5.2 Conduzione elettrica nei semiconduttori

Inizieremo con alcuni brevi richiami dei concetti che sono alla base della conduzione elettrica nei solidi, quali i semiconduttori. La densità di corrente è definita da:

$$J = nqv \quad (5.1)$$

dove n è il numero di cariche elementari per cm^3 , q la carica elementare e v la velocità di drift. Quest’ultima è legata (per campi elettrici non troppo elevati) al campo elettrico da una relazione di proporzionalità:

$$v = \mu E \quad (5.2)$$

dove μ è una costante (mobilità) caratteristica del materiale. Le dimensioni fisiche di tale costante sono:

$$[\mu] = [cm^2/(Volt \cdot s)]$$

Si tratta, come si vede, di unità ibride, appartenenti in parte al sistema SI ed in parte al cgs.

La densità di corrente può, facendo uso delle equazioni (5.1) e (5.2), essere espressa come:

$$J = nq\mu E = \sigma E \quad (5.3)$$

dove $\sigma = nq\mu$ è la conduttività, che è l’ inverso della resistività ρ (notiamo che in questa equazione q è il *modulo* della carica elettrica elementare, a differenza del medesimo simbolo adoperato nella (5.1)):

$$\sigma = 1/\rho \quad (5.4)$$

5.3 Conduzione elettrica nei semiconduttori in presenza di impurezze

La conduttività nei semiconduttori allo stato puro è estremamente bassa, a causa dell’esiguo numero di elettroni liberi per unità di volume. In effetti, nel silicio allo stato puro i legami atomici covalenti tra atomi contigui determinano una struttura

cristallina estremamente stabile. Il silicio, tetravalente, forma legami covalenti che possono esser qualitativamente illustrati, in un piano, come mostrato in figura 5.1.

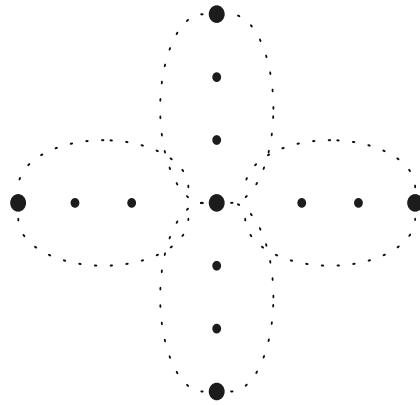


Figura 5.1: Schema dei legami covalenti nel silicio cristallino

Nella figura sono mostrati gli atomi (pallini solidi), gli elettroni (punti) ed i legami covalenti (linee tratteggiate). Ciascun atomo ha quattro elettroni di valenza. Nella struttura cristallina a questi vengono ad aggiungersi quattro elettroni di valenza di altrettanti atomi contigui, creando una struttura atomica estremamente stabile.

In tali condizioni la conduzione può solo aver luogo a causa della rottura di qualcuno dei legami chimici covalenti, causata dall'agitazione termica.

Se, a causa di tale agitazione, un elettrone viene liberato, esso, in presenza di un campo elettrico, contribuirà alla corrente elettrica.

Notiamo che, se n è il numero di elettroni resi liberi per unità di volume, essi lasciano dietro di sè un ugual numero di lacune libere, cioè di siti atomici dove i legami chimici richiederebbero un elettrone. Tali lacune si comportano come cariche positive libere: sotto l'azione di un campo elettrico esse si muovono nella direzione del campo dando un proprio contributo alla corrente. Tale contributo si somma a quello dovuto agli elettroni. Ciò è stato verificato sperimentalmente facendo uso dell'effetto Hall.

Se indichiamo con p la concentrazione delle cariche positive libere, avremo per il loro contributo alla densità di corrente:

$$J_p = p\mu_p qE \quad (5.5)$$

dove μ_p è la mobilità delle lacune. Questa differisce da quella degli elettroni μ_n :

$$\mu_p \simeq 500 \text{ [cm}^2/\text{Vs}] \quad (5.6)$$

$$\mu_n \simeq 1300 \text{ [cm}^2/\text{Vs}] \quad (5.7)$$

La densità di corrente complessiva sarà:

$$J = n\mu_n qE + p\mu_p qE = (n\mu_n + p\mu_p) qE = \sigma E \quad (5.8)$$

cioè:

$$\sigma = (n\mu_n + p\mu_p)q \quad (5.9)$$

Come accennato, i moti d'agitazione termica liberano un ugual numero di elettroni e lacune per unità di volume:

$$n = p \equiv n_i \quad (5.10)$$

n_i è nota come la *concentrazione intrinseca* di elettroni (lacune) nel silicio allo stato puro.

Si noti però che se un qualche meccanismo interviene a modificare una delle due concentrazioni (e l'introduzione di opportune impurezze è un tale meccanismo) quella dell'altro componente cambia in verso opposto, in modo tale che sia sempre:

$$np = n_i^2 \quad (5.11)$$

Tale relazione è nota come *legge dell'azione di massa*.

Il parametro n_i dipende dalla temperatura ed è esprimibile come:

$$n_i = A_0 T^3 e^{-E_{G_0}/kT} \quad (5.12)$$

dove T è la temperatura assoluta, k la costante di Boltzmann (in $eV/^{\circ}K$), A_0 è una costante ed E_{G_0} è l'energia necessaria a rompere un legame covalente a $0^{\circ}C$.

Per il silicio a $300^{\circ}K$ si ha:

$$n_i \simeq 1.5 \cdot 10^{10}/cm^3$$

mentre il numero di atomi/ cm^3 è all'incirca 10^{22} . La dipendenza di E_G dalla temperatura è approssimativamente:

$$E_G(T) \sim 10^{-4}T$$

A temperatura ambiente: $E_{G_0} \simeq 1.1eV$.

Introducendo nel materiale piccole quantità di impurezze (*drogaggio*), la condutività può variare di molti ordini di grandezza. Le impurezze comunemente adoperate sono atomi pentavalenti (come l'arsenico) o trivalenti (come il boro). Nel primo caso l'atomo che viene a sostituire, nella struttura cristallina, un atomo di silicio, ha un elettrone che risulterà più debolmente legato e contribuirà alla concentrazione di elettroni liberi. Gli atomi che costituiscono tale tipo di impurezze sono noti come *donori*. Nel caso in cui il *drogaggio* venga effettuato con una sostanza trivalente, l'atomo che, nella struttura cristallina, viene a sostituire un atomo di silicio ha un elettrone in meno (dal punto di vista chimico) ed è quindi in grado di *catturare* un elettrone libero. Si parla in tal caso di un atomo *accettore*. Nel primo caso si dice che il drogaggio è di tipo *n*, nel secondo di tipo *p*. Se indichiamo, nel caso pentavalente, con N_D la concentrazione dei donori avremo, nell'ipotesi che sia $N_D \gg n_i$:

$$n = N_D$$

$$p \cdot n = p \cdot N_D = n_i^2$$

da cui:

$$p = \frac{n_i^2}{N_D} = \frac{n_i}{N_D} n_i \ll n_i$$

cioè la concentrazione di lacune sarà fortemente ridotta. Si dice che in tal caso gli elettroni sono i *portatori maggioritari*, le lacune i *portatori minoritari*. L'opposto ovviamente avviene se il drogaggio è di tipo *p*.

Esaminiamo un esempio. La conduttività del silicio allo stato puro:

$$\sigma = n_i q (\mu_n + \mu_p)$$

facendo uso dei valori numerici:

$$n_i = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\mu_n = 1300 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\mu_p = 500 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

è uguale a:

$$\sigma = 4.32 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$$

da cui:

$$\rho = 2.31 \cdot 10^5 \Omega \text{cm}$$

Ammettiamo ora di aggiungere un donore per ogni 10^8 atomi di silicio. Avremo per il numero di donori/ cm^3 :

$$N_D = \frac{N_{Av} d}{P} 10^{-8}$$

Dove N_{Av} è il numero di Avogadro, d la densità e P il peso molecolare.

Sostituendo i valori numerici:

$$N_{Av} = 6.02 \cdot 10^{23}$$

$$P = 28.1$$

$$d = 2.33 \text{ g cm}^{-3}$$

troviamo:

$$n = N_D = 4.99 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

mentre la concentrazione delle lacune diviene, per la legge dell'azione di massa, del tutto trascurabile.

La conduttività diviene allora:

$$\sigma \simeq n q \mu_n = 0.1 (\Omega \text{cm})^{-1}$$

e quindi:

$$\rho = 9.6 (\Omega \text{cm})$$

Il rapporto tra il nuovo valore della resistività e quello relativo al silicio allo stato puro diviene allora:

$$R_\rho = \frac{9.6}{2.31 \cdot 10^5} = 4.16 \cdot 10^{-5}$$

cioè una diminuzione di un fattore 24,000.

Ciò è in ultima analisi legato al fatto che la percentuale (10^{-8}) di atomi aggiunti significa $5 \cdot 10^{14}$ donori/ cm^3 , da confrontare con $1.5 \cdot 10^{10}$ elettroni nel silicio allo stato puro.

5.4 Diffusione in presenza di un gradiente di concentrazione

Se un semiconduttore, quale il silicio, è drogato in modo non uniforme, inizia ad aver luogo un processo di diffusione dei portatori liberi (elettroni o lacune) da quelle regioni dove la concentrazione è più elevata verso zone di minor concentrazione. Il processo ha un'origine puramente statistica ed è analogo alla diffusione di un gas da regioni di maggior densità verso quelle dove la densità è minore.

Consideriamo infatti un lungo tubo rettilineo pieno di un gas con concentrazione $n(x)$ non uniforme e sia l'asse x parallelo alla direzione del tubo (figura 5.2).

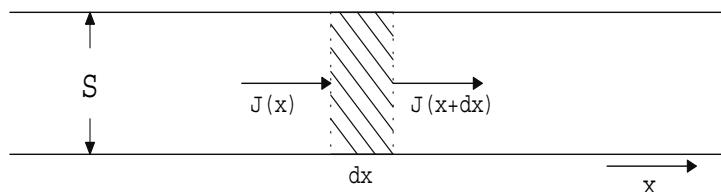


Figura 5.2: Diffusione in un tubo pieno di gas con concentrazione non uniforme

Se S è la sezione del tubo, $J(x)$ la densità di corrente (cioè il numero di molecole che nell'unità di tempo attraversano l'unità di superficie nella posizione di ascissa x) l'incremento per unità di tempo del numero di particelle nello strato tratteggiato in figura è dato da:

$$S [J(x) - J(x + dx)] = -S \frac{dJ(x)}{dx} dx$$

Se indichiamo con $n(x, t)$ il numero di atomi per unità di volume, tale incremento, nel punto di ascissa x , è anche dato da:

$$Sdx \frac{dn}{dt}$$

Per cui si ha :

$$\frac{dJ}{dx} = -\frac{dn}{dt}$$

ovvero:

$$dJ = -\frac{dn}{dt}dx = -\frac{dn}{dx}\frac{dx}{dt}dx$$

cioè:

$$J = -D \frac{dn}{dx} \quad (5.13)$$

Questa equazione ci dice che la densità di corrente è proporzionale al gradiente della densità, cambiato di segno.

Il parametro D è noto come *coefficiente di diffusione*.

Un fenomeno identico ha luogo nel caso della diffusione dei portatori di carica in una barretta di un semiconduttore ove sia stato effettuato un drogaggio non uniforme.

Scriveremo quindi in tal caso per la densità di corrente elettrica:

$$J_p(x) = -qD_p \frac{dp}{dx} \quad (5.14)$$

nel caso di un drogaggio non uniforme di portatori positivi (lacune). Qui D_p è il coefficiente di diffusione per le lacune e $p(x)$ il gradiente di concentrazione delle stesse.

Analogamente, nel caso di un drogaggio di tipo n (elettroni) avremo:

$$J_n(x) = qD_n \frac{dn}{dx} \quad (5.15)$$

dove D_n è il coefficiente di diffusione per gli elettroni e dove l'assenza del segno (-) presente nella (5.14) è legato al fatto che ora la carica dei portatori è negativa (q è il modulo della carica elettrica).

Sussiste la seguente relazione (nota come equazione di Einstein) tra i coefficienti di diffusione e le mobilità:

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{D_n}{\mu_n} \equiv V_T = \frac{\bar{k}T}{q} \simeq \frac{T}{11600} \quad (5.16)$$

dove \bar{k} è la costante di Boltzmann in *Joule/°k* e T la temperatura assoluta.

Il parametro V_T nel sistema SI è esprimibile in Volt e, a temperatura ambiente, vale approssimativamente 26 mV.

In presenza di un campo elettrico diretto lungo l'asse x , alla corrente di diffusione viene a sommarsi quella dovuta al campo, data dalle equazioni (5.3) e (5.5). La corrente totale sarà allora data da:

$$J_p(x) = q\mu_p pE - qD_p \frac{dp}{dx} \quad (5.17)$$

nel caso di un gradiente di concentrazione di lacune, e da:

$$J_n(x) = q\mu_n nE + qD_n \frac{dn}{dx} \quad (5.18)$$

se è presente un gradiente di concentrazione di elettroni.

In condizioni stazionarie, a circuito aperto, la densità di corrente totale deve annullarsi. Avremo cioè :

$$\mu_p p E = D_p \frac{dp}{dx}$$

da cui, con E legato al potenziale da:

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

si ottiene:

$$\frac{D_p}{\mu_p} \frac{dp}{dx} = -p \frac{dV}{dx}$$

cioè :

$$dV = -V_T \frac{dp}{p}$$

che, integrata fra due generici punti 1 e 2, fornisce:

$$V_{12} \equiv V_2 - V_1 = V_T \ln \frac{p(x_1)}{p(x_2)} = V_T \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (5.19)$$

o anche:

$$p_1 = p_2 e^{V_{21}/V_T} \quad (5.20)$$

la (5.20) è nota come equazione di Boltzmann. L'analogia equazione per le lacune è:

$$n_1 = n_2 e^{-V_{21}/V_T} \quad (5.21)$$

Moltiplicando membro a membro le equazioni (5.20) e (5.21), riotteniamo la legge dell'azione di massa:

$$n_1 p_1 = n_2 p_2$$

5.5 Giunzioni p-n

Se in una barretta di silicio viene effettuato un drogaggio di tipo p in una metà e di tipo n nell'altra, come mostrato in figura 5.3, si avrà in un tempo brevissimo una diffusione di lacune da sinistra verso destra ed un'analogia diffusione di elettroni da destra verso sinistra.

Tale processo è rapidamente contrastato dal campo elettrico, diretto da destra verso sinistra, che nasce come conseguenza di tale flusso. Si raggiunge così una situazione di equilibrio in cui, a circuito aperto, non è più presente alcuna corrente. Notiamo che gli elettroni che dalla zona n diffondono verso la zona p, hanno un'elevatissima probabilità di essere "catturati" dalle lacune presenti in tale zona non appena essi abbiano superato la giunzione. Analogamente, le lacune che dalla zona p fluiscono verso la zona n sono catturate dagli elettroni presenti in tale zona subito al di là della giunzione. La zona dai due lati della giunzione viene in tal modo ad essere priva di cariche libere. A tale zona si dà il nome di *zona di svuotamento* o *zona di transizione* o anche *zona di carica spaziale*.

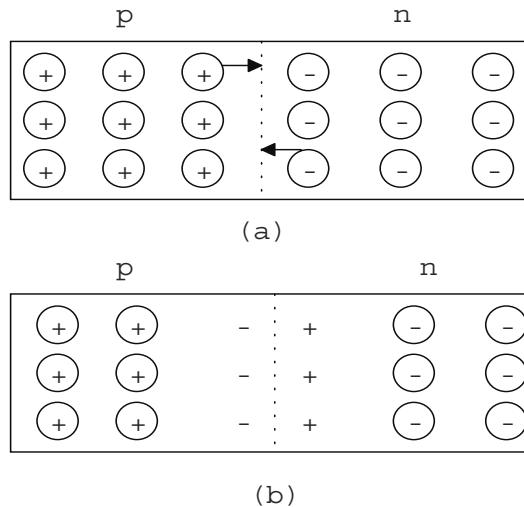


Figura 5.3: Schema di una giunzione p-n. Grafico superiore: distribuzione dei portatori nella giunzione appena prodotta. Grafico inferiore: distribuzione dei portatori all'equilibrio

Lo spessore della zona di svuotamento è tipicamente molto piccolo, ma può essere aumentato applicando un'opportuna differenza di potenziale “inversa”, come vedremo tra poco.

Se indichiamo con p_{p_0} la concentrazione iniziale (cioè prima che la diffusione abbia luogo) di lacune sul lato sinistro della giunzione e con p_{n_0} l'analogia concentrazione di lacune sul lato destro, con N_A la concentrazione di accettori sul lato p con N_D la concentrazione di donori sul lato n, avremo:

$$p_{p_0} = N_A$$

$$p_{n_0} = \frac{n_i^2}{N_D}$$

Segue allora dalla (5.19) che tra due punti 1 e 2, situati il primo a sinistra ed il secondo a destra della giunzione, si avrà una differenza di potenziale data da:

$$V_0 = V_{21} = V_T \ln \frac{p_{p_0}}{p_{n_0}} = V_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \quad (5.22)$$

Le figure 5.3 (a) e (b) illustrano ciò che avviene dei portatori di carica a seguito della diffusione. La zona all'immediata sinistra della giunzione viene a perdere lacune a causa della diffusione di queste verso la zona n. Essa acquista così una carica netta negativa. Analogamente la zona all'immediata destra della giunzione viene a perdere elettroni a causa della diffusione di questi verso la zona p. Essa acquista così una carica netta positiva.

L'andamento qualitativo della distribuzione delle cariche è mostrato nella parte superiore della figura 5.4. Nasce come conseguenza un campo elettrico rivolto nel verso negativo dell'asse x, il cui andamento è mostrato nella parte inferiore della figura. Il corrispondente andamento del potenziale è mostrato nella parte superiore della figura 5.5.

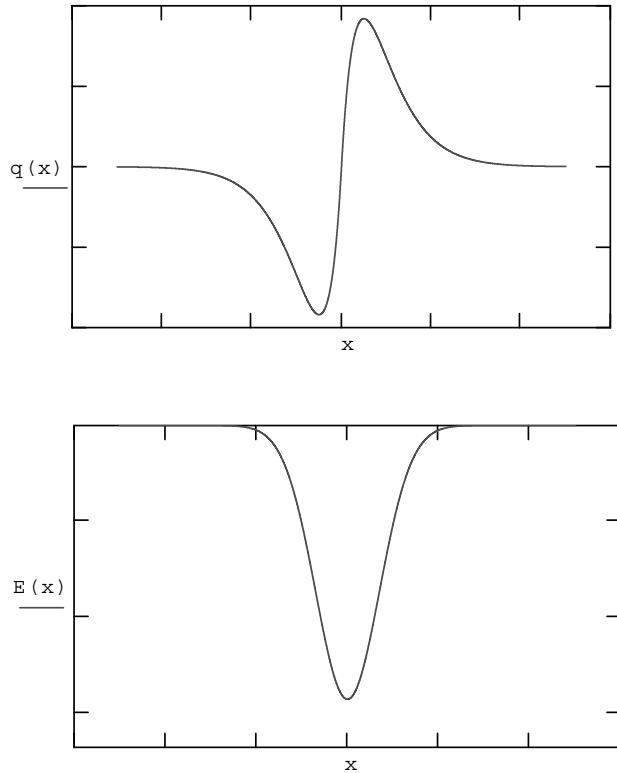


Figura 5.4: Grafico superiore: andamento della carica netta attraverso una giunzione p-n. Grafico inferiore: andamento del campo elettrico.

La barriera di potenziale che così si crea, impedisce alle lacune presenti nella zona p di continuare a diffondere verso la zona n, e viceversa, agli elettroni presenti nella zona n di diffondere verso la zona p. In realtà la situazione è un tantino più complicata, poiché i portatori liberi (elettroni nella zona n e lacune nella zona p) hanno una distribuzione di energie che, classicamente, è descritta dalla funzione di Boltzmann:

$$f(\epsilon) = Ce^{-\epsilon/kT} \quad (5.23)$$

che ci dà il numero di portatori di carica aventi energia maggiore di ϵ . In questa relazione, k è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta. Esiste quindi un certo numero di portatori di carica con energia sufficiente a superare la barriera di potenziale V_0 . Ciò costituisce una corrente diretta dal lato p verso il lato n. Tuttavia la corrente netta totale risulta nulla. Ciò è dovuto al fatto che nella zona n esistono, sia pure in piccolissima concentrazione, cariche positive (lacune) libere. La presenza di queste lacune (portatori minoritari) è legata ai moti d'agitazione termica. Queste possono diffondere nella zona n verso la giunzione dove, a causa del verso del campo, sono rapidamente accelerate verso la zona p. Analogamente esistono nella zona p elettroni liberi (portatori minoritari) che diffondono verso la giunzione e sono poi

rapidamente accelerati dal campo verso la zona n. L'insieme di queste due correnti, nota complessivamente come "corrente termica" I_s , controbilancia all'equilibrio la corrente legata alle cariche maggioritarie che hanno energia sufficientemente elevata da superare la barriera di potenziale (corrente di ricombinazione, I_r).

All'equilibrio quindi avremo:

$$I_s = I_r$$

ora, la corrente di ricombinazione, per quanto visto è proporzionale a:

$$I_r = C e^{-qV_0/kT}$$

ottenuta dalla (5.23) sostituendo ad ϵ l'energia qV_0 corrispondente alla barriera di potenziale che le cariche debbono superare.

Notiamo ancora che la corrente termica I_s non dipende dall'altezza della barriera di potenziale V_0 ; se quindi l'altezza della barriera viene alterata per una qualche azione esterna, I_s rimane uguale a:

$$I_s = C e^{-qV_0/kT}$$

mentre la corrente di ricombinazione I_r diviene:

$$I_r = C e^{-qV'/kT}$$

dove V' è il nuovo valore della barriera di potenziale.

Immaginiamo ora che al dispositivo considerato venga applicata una polarizzazione inversa, con il lato n collegato al positivo di una batteria V ed il lato p collegato al negativo. La polarità è tale da far allontanare dalla giunzione sia lacune nella zona p che elettroni nella zona n. Di conseguenza, la regione con densità di carica negativa si estende ulteriormente alla sinistra della giunzione e quella con densità di carica positiva si estende a destra. Si ha cioè un allargamento della zona di svuotamento, un conseguente aumento della differenza di potenziale, che ora diviene $V_0 + V$ ed in definitiva nessun sostanziale passaggio di corrente. Ciò è mostrato nella parte inferiore della figura 5.5.

Se al contrario ammettiamo che la giunzione sia polarizzata in modo diretto, si avrà una riduzione della barriera di potenziale ed un flusso di corrente.

Nel primo caso avremo:

$$V' = V_0 + V$$

e nel secondo:

$$V' = V_0 - V$$

In entrambi i casi avremo una differenza tra I_s ed I_r e quindi una corrente netta.

Esaminiamo dapprima il caso in cui la polarizzazione sia *diretta*. La corrente sarà allora:

$$I = I_r - I_s = C e^{-q(V_0-V)/kT} - C e^{-qV_0/kT} = C e^{-qV_0/kT} (e^{qV/kT} - 1) =$$

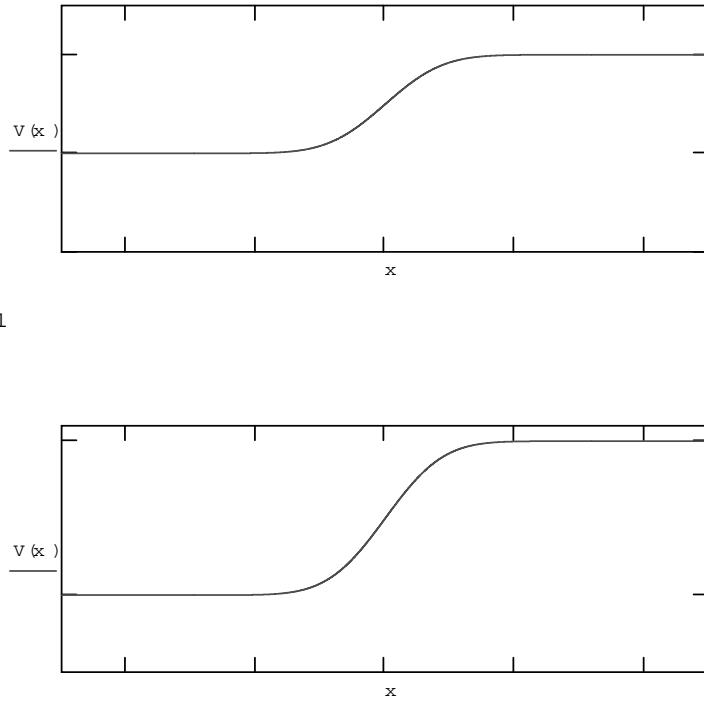


Figura 5.5: Grafico superiore: andamento del potenziale attraverso una giunzione p-n. Il grafico inferiore mostra come il potenziale venga modificato dall'applicazione di una tensione inversa

$$= I_0 (e^{qV/kT} - 1) \quad (5.24)$$

con:

$$I_0 = C e^{-qV_0/kT}$$

Nel caso in cui la polarizzazione si inverte, cambia semplicemente il segno di V nella (5.24). Questa equazione può quindi essere adoperata per descrivere il funzionamento del diodo sia nel caso in cui la polarizzazione sia diretta che nel caso di polarizzazione inversa¹.

Questo è il comportamento di un diodo raddrizzatore, il cui simbolo è mostrato in figura 5.6 e dove è anche indicato il verso in cui la corrente può fluire in polarizzazione diretta ($qV \gg kT$).

5.6 Caratteristica I-V del diodo

La caratteristica del diodo, cioè la relazione tra tensione applicata e corrente nel diodo è esprimibile nella forma:

¹Notiamo che se V è positivo e qV molto maggiore di kT , la (5.24) diviene approssimativamente $I = I_0 e^{qV_0/kT}$ e la corrente può acquistare valori elevati. Se viceversa V è negativo (e qV maggiore in modulo di kT) avremo: $I = -I_0$, una corrente molto piccola.

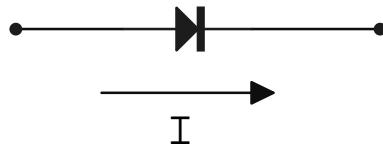


Figura 5.6: Simbolo adoperato per un normale diodo a semiconduttore. Il verso indicato per la corrente è quello in cui essa scorre quando si applichi una polarizzazione diretta

$$I = I_0 (e^{V_D/\eta V_T} - 1) \quad (5.25)$$

Dove η è un parametro numerico che per il silicio vale all'incirca $1 \div 2$, ed I_0 è una costante, nota come *corrente inversa di saturazione*. I_0 è molto piccolo: esso può valere $10^{-14} \div 10^{-15} \text{ A}$ nel caso del silicio.

L'andamento della funzione espressa dall'equazione (5.25) è mostrato in figura 5.7.

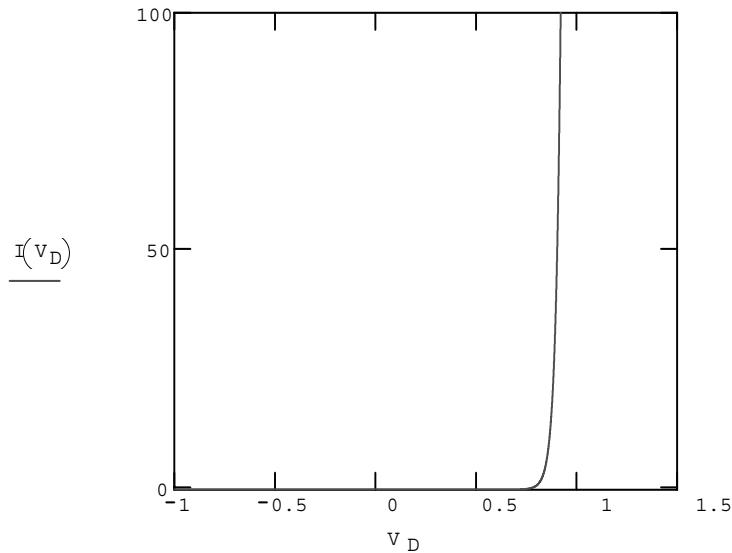


Figura 5.7: Caratteristica corrente-tensione per un diodo a giunzione (equazione (5.25))

Vediamo che per tensioni applicate negative, la corrente risulta estremamente piccola (non visibile nel grafico).

Se V_D è positivo (polarizzazione diretta) possiamo distinguere il caso in cui sia $V_D \gg V_T$ da quello in cui sia $V_D \leq V_T$.

Nel primo caso il termine esponenziale dominerà rispetto al termine costante. L'andamento della corrente sarà cioè un esponenziale crescente. Esaminiamo alcuni casi numerici, ammettendo che sia $I_0 = 10^{-14} \text{ A}$, $\eta = 1$, $V_T = 25 \text{ mV}$ (Tabella (5.1)).

Vediamo che la corrente è trascurabile fino a tensioni applicate di $\simeq 0.6 \text{ V}$. A 0.7 V la corrente è aumentata in misura apprezzabile. Normalmente si assume che

V_D (mV)	I (A)
25	$2.7 \cdot 10^{-14}$
100	$5.5 \cdot 10^{-13}$
200	$3.0 \cdot 10^{-11}$
400	$8.9 \cdot 10^{-8}$
600	$26.0 \cdot 10^{-5}$
700	$14.5 \cdot 10^{-3}$
800	$790.0 \cdot 10^{-3}$

Tabella 5.1: Esempi numerici di correnti rilevate attraverso un diodo (I) per una tensioni applicate ai suoi capi pari a V_D per un diodo con caratteristiche: $I_0 = 10^{-14} A$, $\eta = 1$, $V_T = 25 mV$.

il diodo sia interdetto per tensioni dirette inferiori a $0.65 V$, mentre conduca per tensioni $\geq 0.7 V$. Come si vede dalla tabella, quando il diodo è in conduzione, a causa della rapida variazione della corrente al variare della tensione, si ha che ad importanti variazioni di corrente corrispondano piccolissime variazioni di tensione. Ciò può esser visto in modo quantitativo facendo uso della (5.25) nel caso $V_D \gg \eta V_T$. Per due diversi valori della corrente, I_1 ed I_2 avremo infatti:

$$I_1 = I_0 e^{\eta V_{D_1} / V_T}$$

$$I_2 = I_0 e^{\eta V_{D_2} / V_T}$$

Dal rapporto di queste due equazioni si ha allora:

$$\frac{I_1}{I_2} = e^{\eta(V_{D_1} - V_{D_2}) / V_T}$$

e, prendendo il logaritmo di entrambi i membri:

$$V_{D_1} - V_{D_2} = \frac{V_T}{\eta} \ln \frac{I_1}{I_2} \simeq 25 mV \times \ln \frac{I_1}{I_2}$$

Se la corrente I_1 è pari a dieci volte I_2 si ha:

$$V_{D_1} - V_{D_2} \simeq 57 mV$$

In altri termini, la caduta di potenziale ai capi del diodo cambia molto poco al variare della corrente che lo attraversa. Ciò è legato al fatto che la caratteristica di figura 5.7, quando il diodo conduce, è all'incirca una retta verticale (di pendenza poco inferiore a $\pi/2$).

Per una resistenza R la legge di Ohm è:

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{V}$$

Un valore elevato del rapporto I/V corrisponde ad un piccolo valore della resistenza, cioè dell'inverso della pendenza della retta che ne descrive il comportamento nel piano $I - V$.

Si può quindi parlare di una resistenza associata al diodo quando questo è in conduzione. Tale resistenza, che denoteremo con R_f , ha un valore estremamente piccolo.

Esaminando la caratteristica del diodo nella zona in cui esso è polarizzato inversamente, vediamo che tale zona della caratteristica corrisponde ad una resistenza di valore molto elevato, che nel seguito indicheremo con R_r .

Consideriamo ora l'esempio di figura 5.8.

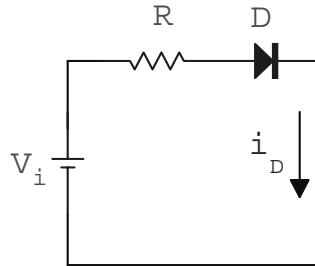


Figura 5.8: Semplice circuito che utilizza un diodo

L'equazione del circuito è ²:

$$v_i = R i_D + v_D$$

da cui:

$$i_D = -\frac{1}{R}v_D + \frac{v_i}{R}$$

che è l'equazione di una retta (retta di carico) nel piano $(v_D - i_D)$. In quest'equazione i_D e v_D sono entrambe incognite. Tuttavia esse sono legate tra loro dalla (5.25), per cui possono, in linea di principio, esser facilmente calcolate.

Un modo per risolvere il problema è quello di ricorrere al grafico della (5.25) e disegnare sul medesimo la retta di carico, come mostrato nel grafico di figura 5.9.

²Qui e nel seguito adopereremo la seguente notazione per segnali di corrente (ed analogia per segnali di tensione):

$$I_D = \text{corrente continua (quiescente).}$$

Cioè, una lettera maiuscola con sottoscritta maiuscola denota una quantità stazionaria.

$$i_D = \text{corrente totale}$$

Cioè, una lettera minuscola con sottoscritta maiuscola denota la quantità totale, somma di quella stazionaria e della componente variabile.

$$i_d = \text{"segnale" di corrente}$$

Cioè, una lettera minuscola con sottoscritta minuscola denota la componente variabile.

In altre parole, nel caso della corrente si ha:

$$i_D = I_D + i_d$$

La retta ha una pendenza pari a $-1/R$. Essa interseca l'asse verticale (corrente) per $i_D = V_i/R$ e quello orizzontale (tensione) per $V_D = V_i$.

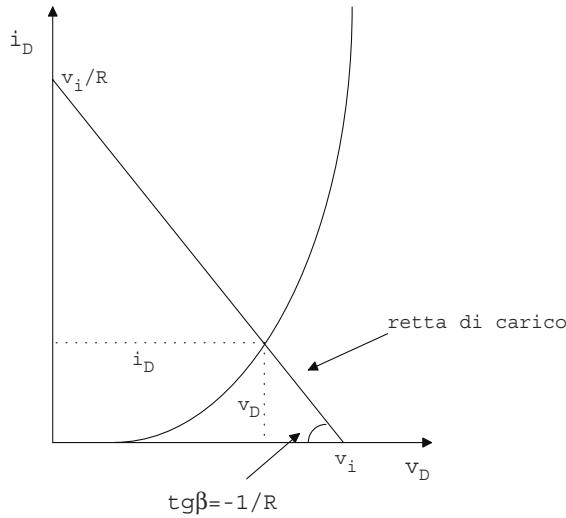


Figura 5.9: Retta di carico per il diodo di figura 5.8

Esaminiamo ora ciò che accade se il diodo è polarizzato inversamente, cioè se $v_D \leq 0$. In tale regione ci aspetteremmo che $I \simeq -I_0$, che cioè la corrente (che ora fluisce in verso opposto) fosse trascurabilmente piccola. In realtà si trova che, anche se molto piccola, questa corrente è diversi ordini di grandezza più elevata di quanto predetto dall'equazione del diodo. Per esempio, un diodo per piccoli segnali, avente un valore di $I_0 = 10^{-14} \div 10^{-15}$ può esibire una corrente inversa dell'ordine del nA . Inoltre tale corrente aumenta all'aumentare della tensione inversa applicata nonché all'aumentare della temperatura.

Tale corrente è in parte legata alla presenza, in minute quantità, di portatori di carica di tipo p nella regione n e di tipo n nella regione p ed in parte a perdite dielettriche.

I portatori di cui sopra vanno sotto il nome di *portatori minoritari*, per distinguere dai *portatori maggioritari* che sono quelli introdotti con il drogaggio delle due zone. La loro presenza è dovuta alla rottura dei legami chimici, causata dai moti di agitazione termica.

La corrente I, molto piccola per tensioni inverse applicate non eccessivamente grandi, subisce un brusco aumento se la tensione inversa applicata supera un certo valore (tensione di *breakdown*). Tale comportamento è mostrato in figura 5.10.

La tensione di breakdown è quella corrispondente al “ginocchio” nel grafico di figura e viene indicata con il simbolo V_Z (dove Z sta per Zener). Al “ginocchio” la corrente aumenta molto rapidamente all'aumentare della tensione applicata³. Per questo motivo i diodi possono essere adoperati in questa regione come stabilizzatori di tensione. Sono disponibili in commercio appositi diodi (diodi Zener) con valori

³molto più rapidamente di quanto essa non aumenti per tensioni dirette maggiori di V_γ .

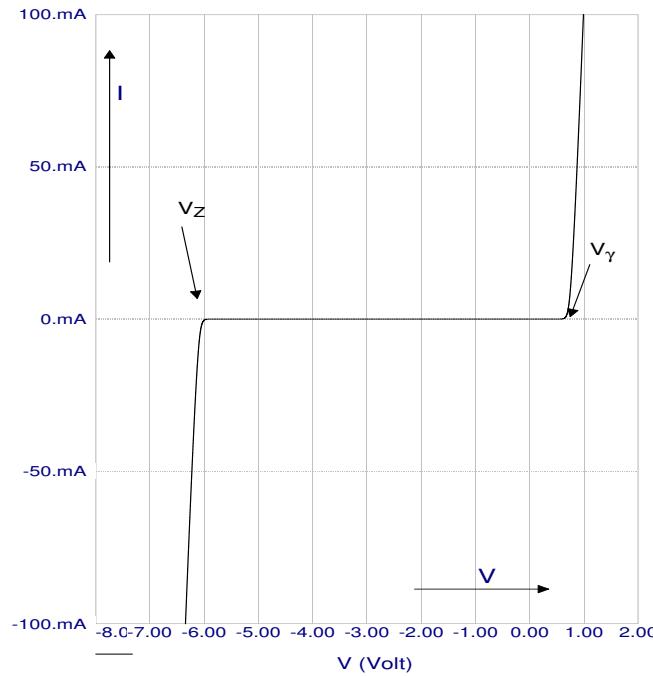


Figura 5.10: Caratteristica di un diodo Zener

della tensione V_Z stabiliti dal produttore (di norma da qualche Volt a qualche centinaio di Volt). Il simbolo adoperato per il diodo Zener è mostrato in figura 5.11. La corrente fluisce nel verso indicato con I_f in figura se la polarizzazione è diretta e maggiore di V_γ , nel verso indicato con I_r se la polarizzazione è inversa e maggiore (in modulo) di V_Z .

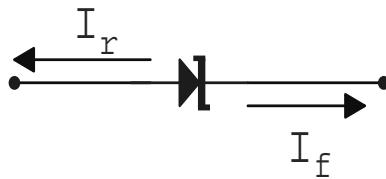


Figura 5.11: Simbolo adoperato per il diodo Zener. I_f è la corrente quando il diodo è polarizzato direttamente; I_r quando è polarizzato inversamente, con tensione maggiore di V_Z

5.7 Resistenza differenziale del diodo e capacità associate alla giunzione

La caratteristica I-V del diodo:

$$I = I_0 (e^{V/\eta V_T} - 1)$$

può, per segnali continui e polarizzazione diretta, essere schematizzata come mostrato nella parte destra della figura 5.12, cioè sostituendo il tratto di curva compreso tra 0 e 0.7 Volt con un tratto orizzontale ($I=0$) ed il tratto esponenziale successivo con una retta avente una pendenza determinata dal parametro ηV_T .

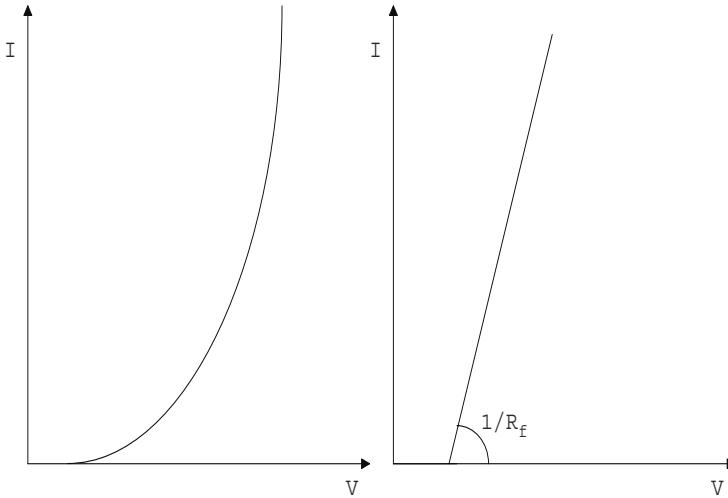


Figura 5.12: Rappresentazione “a tratti” della caratteristica del diodo (grafico di destra) confrontata con quella reale (grafico di sinistra)

Ciò equivale a sostituire al diodo reale uno ideale (cioè avente $V_\gamma = 0$ ed $R_f = 0$) in serie con un generatore di tensione di valore $V_\gamma \simeq 0.7$ V ed una resistenza R_f , come mostrato in figura 5.13.

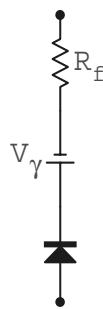


Figura 5.13: Schematizzazione di un diodo reale, tramite un diodo ideale (avente $V_\gamma = 0$, in serie con una resistenza ed una batteria di valore $V_\gamma = 0.7$ V

Se al diodo è invece applicato un segnale variabile, costituito dalla somma di un segnale continuo (positivo) e di uno variabile, di piccola ampiezza:

$$V = V_0 + v$$

(dove cioè $dV = v$).

avremo:

$$i_D = I_0 e^{V/\eta V_T}$$

da cui si ottiene che la componente variabile i_d della corrente è legata alla componente variabile v della tensione, da:

$$i_d \equiv d(i_D) = I_0 \frac{1}{\eta V_T} e^{V/\eta V_T} dV = \frac{i_D}{\eta V_T} dV = \frac{i_D}{\eta V_T} v \simeq \frac{I}{\eta V_T} v$$

Ne segue:

$$\frac{v}{i_d} \equiv r_d = \frac{\eta V_T}{I} \simeq \frac{25}{I(\text{mA})}$$

La grandezza r_d è la *resistenza differenziale* del diodo. Vediamo che la resistenza differenziale dipende dalla corrente totale I che lo attraversa e diminuisce all'aumentare di questa. Se quindi ad un diodo è applicato un segnale variabile di tensione di piccola ampiezza, la corrispondente variazione di corrente si ottiene dividendo l'ampiezza (variazione) del segnale di tensione per la resistenza differenziale r_d . Per $I = 1 \text{ mA}$, la resistenza differenziale è pari a circa 25Ω .

5.7.1 Capacità associate alla giunzione

Se al diodo è applicato un segnale di alta frequenza, questo può esser trasmesso anche nel caso in cui la polarizzazione applicata sia inversa. In effetti, con tale polarizzazione la zona di svuotamento può, con buona approssimazione, essere assimilata ad un dielettrico che separa due zone “conduttrici”, la zona p e quella n . In tali condizioni abbiamo l’equivalente di un minuscolo condensatore a facce piane e parallele, in cui la separazione tra le armature è pari alla larghezza W della zona di svuotamento. Se A è l’area della giunzione ed ϵ la costante dielettrica effettiva della zona di svuotamento, la capacità sarà data da:

$$C_j = \frac{\epsilon A}{W}$$

Questa è nota come “capacità incrementale” o “capacità di transizione”.

Poichè W cambia al cambiare della tensione inversa applicata, varia corrispondentemente la capacità del nostro condensatore. Si ha cioè un condensatore la cui capacità può esser fatta variare applicando un comando elettrico (tensione) esterno. Dispositivi di questo tipo sono disponibili in commercio (*varicap*).

Analizziamo più in dettaglio il funzionamento del diodo in tali condizioni. Se in un tempo dt cambiamo la tensione applicata di dV , avremo una corrispondente variazione dQ della carica presente sul lato p della giunzione (uguale in modulo a quella presente sul lato n). Avremo quindi una corrente:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \frac{dV}{dt} = C_j \frac{dV}{dt}$$

Analizzando in dettaglio l’andamento di W in funzione della tensione inversa applicata, si trova:

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 + \frac{V_R}{V_0}}} \quad (5.26)$$

dove V_R è la tensione inversa applicata, V_0 è la tensione associata al diodo non polarizzato ($0.6 \div 0.8 \text{ V}$) e C_{j0} è la capacità del diodo per $V_R = 0$.

Questa relazione è valida per una giunzione $p-n$ “brusca”. Una relazione di uso più generale è [42]:

$$C_j = \frac{C_{j_0}}{\left(1 + \frac{V_R}{V_0}\right)^m} \quad (5.27)$$

dove m è una costante il cui valore dipende dal modo in cui la concentrazione del drogaggio varia andando dal lato p a quello n . Tale parametro varia tra $1/3$ ed $1/2$.

Vediamo che in ogni caso la capacità di transizione C_j decresce al crescere della tensione inversa applicata V_R . Valori tipici di C_j sono di circa 1 pF .

Se il diodo è polarizzato in modo diretto, la larghezza W della zona di svuotamento diminuisce e di conseguenza aumenta la capacità di transizione C_j . Tuttavia, per tale polarità del potenziale applicato, una seconda capacità, molto più grande della prima, interviene. Questa, nota come “capacità di diffusione” o “capacità di immagazzinamento”, è legata al tempo che i portatori di carica immessi da una delle due regioni nell’altra, impiegano a ricombinarsi.

Esaminiamo ciò che accade. Se il diodo è polarizzato direttamente da una batteria, questa immette lacune nella zona p ed elettroni nella zona n . Tali cariche, arrivando nella zona di svuotamento, si ricombinano con le cariche legate che sono presenti in tali zone (elettroni nella zona p e lacune nella zona n), causando in tal modo un restringimento della zona di svuotamento ed un abbassamento della barriera di potenziale. Ciò a sua volta permette che ulteriori lacune attraversino la giunzione dalla zona p verso la zona n e ad ulteriori elettroni di muoversi in verso contrario. Sono questi movimenti di cariche che sono all’origine della conduzione nel diodo quando esso è polarizzato direttamente.

Le cariche così immesse da una regione nell’altra debbono però *ricombinarsi* con quelle di segno opposto che esse incontrano nella nuova regione. Se indichiamo con τ il tempo medio che una carica impiega a ricombinarsi e con Q la carica totale spostata in tale tempo, la corrente sarà:

$$I_D = I = \frac{Q}{\tau} = I_0 e^{V_D/\eta V_T}$$

Se ora definiamo la capacità di diffusione come:

$$C_d = \frac{dQ}{dV_D}$$

avremo:

$$C_d = \frac{\tau I_0}{\eta V_T} e^{V_D/\eta V_T} = \frac{\tau I_D}{\eta V_T} \quad (5.28)$$

Ed essendo:

$$r_d = \frac{\eta V_T}{I_D}$$

troviamo infine:

$$C_d = \frac{\tau}{r_d} \quad (5.29)$$

Esaminiamo ad esempio un diodo al silicio, con $\eta = 2$, $I_D = 25 \text{ mA}$, $V_T = 25 \text{ mV}$ e $\tau = 1 \text{ ns}$. Troviamo:

$$C_d = \frac{10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 0.5 \text{ nF}$$

che è molto maggiore di C_j .

Il parametro τ , che è critico in questo contesto, può variare tra pochi ns e centinaia di μs .

È la presenza della capacità di diffusione che limita l'uso dei diodi a giunzione a frequenze molto elevate. Per applicazioni a tali frequenze si può far uso di diodi basati su giunzioni metallo-semiconduttore, noti come *diodi Schottky*, il cui simbolo è mostrato in figura 5.14.

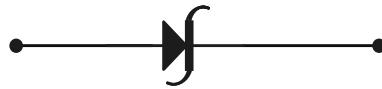


Figura 5.14: Simbolo adoperato per il diodo Schottky

5.8 Esempi di uso di diodi

5.8.1 Circuiti raddrizzatori

Cominciamo con il considerare un semplice circuito raddrizzatore, che fa uso di una resistenza in serie ad un diodo (figura 5.15).

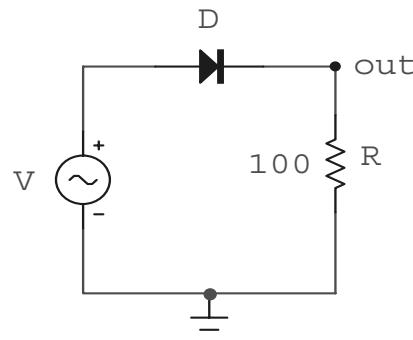


Figura 5.15: Semplice circuito raddrizzatore a diodo

Il segnale alternato applicato è:

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t)$$

con:

$$V_0 = 5 \text{ V}$$

ed:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$$

Inoltre è $R = 100\Omega$.

Nel nostro esempio il diodo ha un valore di $V_\gamma = 0.81 \text{ V}$. Una corrente potrà fluire nella resistenza R se la differenza di potenziale V_D ai capi del diodo supera V_γ . L'equazione del circuito è:

$$V_0 \sin(\omega t) = V_D + RI$$

La corrente si annulla per:

$$V_0 \sin(\omega t) = V_D \simeq 0.81 \text{ V}$$

ciò avviene per:

$$\sin(\omega t) = \frac{0.81}{5} \simeq 0.162$$

Da questa si trova che il primo istante in cui la corrente si annulla è:

$$t_1 \simeq 0.43 \text{ ms}$$

La corrente si annulla nuovamente per:

$$t_2 \simeq 7.9 \text{ ms}$$

Quando la corrente si annulla, la tensione in output si annulla anch'essa.

Il grafico di figura 5.16 mostra il segnale in ingresso (linea solida) e quello in uscita (linea tratteggiata), ottenuti facendo uso della versione Demo del programma di simulazione Microcap [5]. La curva nel grafico inferiore è la differenza di potenziale ai capi del diodo (cioè la differenza delle due curve nel grafico superiore).

Come si vede, nel segnale in uscita risulta "tagliata" la parte inferiore. Il circuito ha "raddrizzato" l'onda in ingresso.

Se il V_γ del diodo può esser trascurato rispetto all'ampiezza del segnale applicato, allora l'intera semionda positiva verrà ad essere trasmessa e quella negativa bloccata.

Analizziamo la risposta in tale approssimazione, per un segnale in ingresso:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Il segnale in uscita avrà un valor medio dato da:

$$V_{0,dc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V_0 \cos(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 \cos(\omega t) dt \quad (5.30)$$

essendo nullo il contributo negli intervalli di tempo $(-T/2, -T/4)$ e $(T/4, T/2)$. Questa può essere riscritta come:

$$V_{0,dc} = \frac{1}{\omega T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_0 \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_0 \cos x dx = \frac{V_0}{\pi} \quad (5.31)$$

I raddrizzatori a diodi sono adoperati spesso per ottenere una tensione continua a partire da una alternata. Ad esempio, se si vuole alimentare un apparecchio radio portatile o ricaricare la batteria di un telefonino, si fa uso di un trasformatore

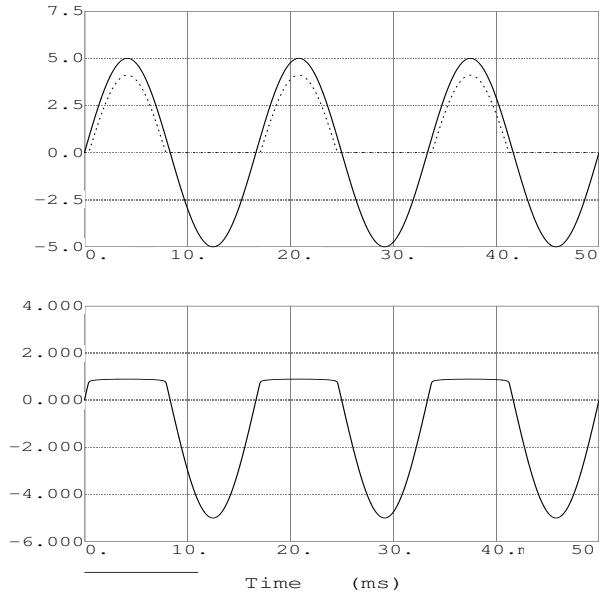


Figura 5.16: Il grafico superiore mostra la forma d'onda sinusoidale in ingresso (curva a tratto solido) ed in uscita (curva a tratteggio) per il circuito raddrizzatore di figura 5.15. La curva inferiore è la tensione ai capi del diodo. Le curve sono state ottenute, con i valori dei componenti e dei segnali indicati nel testo, facendo uso del programma Microcap

alimentato dalla rete elettrica a 220 Volt per generare un segnale (della medesima frequenza) di pochi Volt. Un successivo circuito raddrizzatore converte questo in un segnale unipolare, ancora variabile, del tipo appena descritto. Vedremo ora come si possa, ricorrendo ad opportuni filtri, ridurre la componente variabile presente in tale segnale.

L'onda in uscita nel circuito di figura 5.15 ha componenti di Fourier a frequenze ω , 2ω , 3ω , 4ω etc. Analizziamo lo sviluppo in serie di Fourier, facendo uso delle relazioni d'uso generale:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots$$

con i coefficienti a_i , b_i dati da:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega t dt$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega t dt$$

...

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos m\omega t dt$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin m\omega t dt$$

Nel nostro caso l'integrazione va effettuata tra $-T/4$ e $T/4$, poiché la nostra $f(t)$ è nulla al di fuori di tale intervallo. Inoltre, data la simmetria della funzione per uno scambio $t \rightarrow -t$, tutti i coefficienti b_n sono nulli. Effettuando il calcolo dei vari integrali, si trova facilmente:

$$V(t) = V_0 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega t + \dots \right) \quad (5.32)$$

I termini successivi hanno coefficienti sempre più piccoli, e saranno trascurati.

Volendo "filtrare" ulteriormente il segnale, ridurre cioè il contributo delle armoeniche, si può ricorrere ad un filtro "passa-basso" RC, come mostrato in figura 5.17:

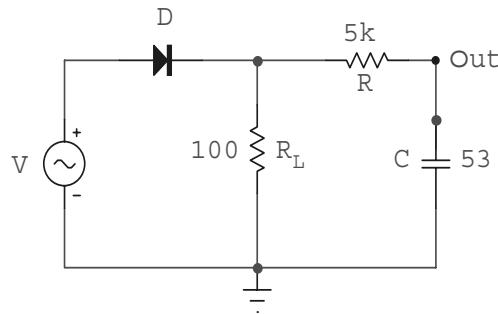


Figura 5.17: Circuito raddrizzatore a diodo. Il segnale è ulteriormente "filtrato" facendo uso dei componenti R-C aggiunti nella parte destra del circuito

Ammettiamo che sia $R_L \ll R$ e scegliamo inoltre un valore di capacità tale che sia $RC = 100/\omega$. In tal caso, la risposta del circuito può esser facilmente ottenuta facendo uso del principio di sovrapposizione. Infatti possiamo considerare la parte RC del circuito come alimentata da un generatore ideale di tensione, di valore pari alla tensione, già calcolata, presente ai capi di R_L . Essendo R di valore grande rispetto ad R_L essa costituisce un modesto carico per il suddetto generatore, per cui possiamo ritenere che, con ottima approssimazione, la tensione ai capi di R_L già calcolata, in assenza del circuito RC, sia uguale a quella in presenza di esso.

Possiamo inoltre, facendo uso del principio di sovrapposizione, sostituire al suddetto generatore ideale, la serie dei tre generatori mostrati in figura 5.18, corrispondenti ai primi tre termini nello sviluppo (5.32).

Dalla figura 5.18 otteniamo, per il *modulo* della risposta ai singoli generatori:

$$V_{out,dc} = \frac{V_0}{\pi}$$

per il segnale continuo;

$$V_{out,1} = \frac{V_0}{2} \frac{Z_C}{R + Z_C}$$

per il segnale a frequenza angolare ω , dove è $Z_C = 1/j\omega C$.

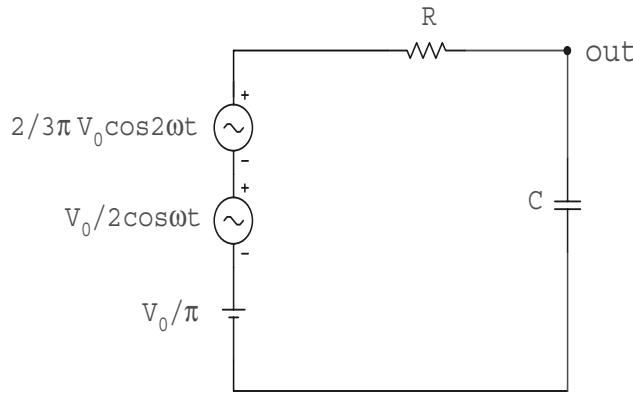


Figura 5.18: Schema adoperato per il calcolo del segnale all'uscita del circuito di figura 5.17

Sostituendo si ottiene per $V_{out,1}$:

$$V_{out,1} = \frac{V_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{V_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 100^2}} \simeq \frac{V_0}{200}$$

Per il termine successivo nello sviluppo, corrispondente al segnale di frequenza angolare 2ω , avremo:

$$V_{out,2} = \frac{2V_0}{3\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + 200^2}} = \frac{V_0}{300\pi}$$

Trascurando i termini di ordine più elevato, avremo quindi:

$$V_0(t) \simeq V_0 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{200} \cos \omega t + \frac{1}{300\pi} \cos 2\omega t + \dots \right)$$

Il rapporto tra il valore quadratico medio delle componenti variabili (ripple) e quello della componente continua è pertanto:

$$\rho = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{200^2} + \frac{1}{(300\pi)^2}} = \frac{\pi}{280} \simeq 0.011$$

Vediamo così che la componente variabile (ripple) rappresenta appena l'1% di quella continua.

5.8.2 Rettificatore ad onda intera

Nel circuito raddrizzatore appena discusso, solo una metà (quella positiva) del segnale alternato applicato veniva trasmessa. È possibile migliorare tale circuito facendo in modo che la metà inferiore del segnale, cambiata di segno, sia anch'essa trasmessa. Un circuito che realizza tale funzione è quello di figura 5.19.

Il secondario del trasformatore ha una presa centrale, collegata a massa. Durante la semionda positiva la tensione ai capi della metà superiore del secondario è tale

da polarizzare direttamente il diodo D_1 , mentre quella ai capi della metà inferiore polarizza D_2 in modo inverso. In questa fase quindi la corrente segue il percorso superiore indicato in figura e fluisce poi nel carico R_L collegato a massa. Durante la semionda negativa viene invece ad essere polarizzato direttamente D_2 ed inversamente D_1 . Vediamo allora che la corrente seguirà il percorso indicato in figura dalla linea inferiore, ma attraverserà R_L nel medesimo verso di prima. Si vede cioè che entrambe le semionde sono state raddrizzate.

Anche in questo caso è poi possibile diminuire il contributo delle armoniche nella tensione ai capi di R_L , ponendo a valle un opportuno circuito passa-basso.

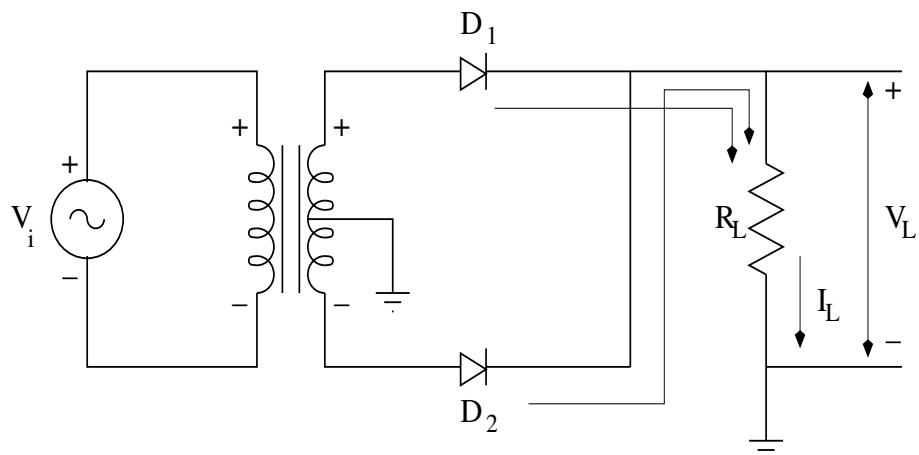


Figura 5.19: Rettificatore ad onda intera

5.8.3 Rivelatore di picco

È spesso necessario ricorrere a circuiti che *memorizzino* per un breve intervallo di tempo, il valore massimo che un segnale di tensione ha raggiunto. Un tipico uso di circuiti di questo tipo si incontra nei sistemi di “sample-and-hold” che precedono un Convertitore Analogico-Digitale (ADC). La memorizzazione del segnale di tensione può esser ottenuta facendo sì che esso vada a caricare un condensatore. Occorre però impedire che questo si scarichi quando il segnale diminuisce o diviene negativo.

Il circuito di figura 5.20, noto come *rivelatore di picco*, implementa tale funzione.

Se infatti il segnale V_i è positivo e crescente, trascurando per un attimo la resistenza R_L ed ammettendo che sia $V_\gamma \approx 0$, vediamo che il diodo D viene ad esser polarizzato direttamente e di conseguenza il condensatore si carica “seguendo” V_i . In realtà V_γ non è zero, quindi avremo che la tensione ai capi del condensatore sarà data da:

$$V_C = V_i - V_\gamma$$

Se ora V_i comincia a diminuire, avremo che il condensatore, oramai carico ad un certo valore V_C , mantiene tale valore (sempre trascurando la resistenza R_L). Il diodo D verrà ora ad essere interdetto e non ci sarà alcuna corrente nei circuito. Se V_i comincia a risalire nuovamente, il diodo verrà ad essere nuovamente polarizzato in modo diretto se è:

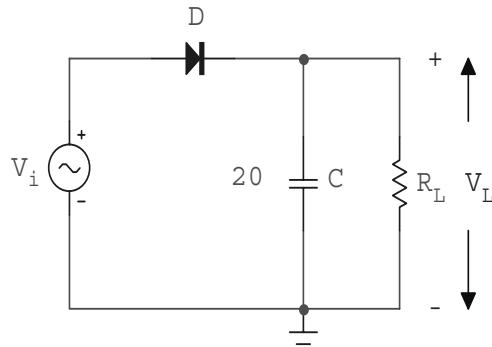


Figura 5.20: Rivelatore di picco

$$V_i > V_\gamma + V_C$$

Se V_i supera tale valore di soglia, il diodo consentirà il passaggio della corrente e la tensione ai capi del condensatore comincerà nuovamente ad aumentare, “seguendo” V_i (a meno del termine costante V_γ).

Se vogliamo che la tensione ai capi del condensatore rappresenti la “memoria” del massimo raggiunto da V_i , per un tempo finito τ , dobbiamo far sì che il condensatore abbia modo di scaricarsi dopo tale tempo. A ciò provvede la resistenza R_L . La costante di tempo $R_L C$ dovrà essere dell’ordine del tempo τ voluto. L’andamento del segnale all’uscita del circuito di figura, ottenuto facendo uso del programma di simulazione [5], è mostrato in figura 5.21.

I valori scelti sono:

$$R_L = 2k$$

$$C = 20\mu F$$

Il segnale in ingresso (curva solida nella figura) è una sinusoide:

$$V_i = 5 \sin 2\pi\nu t$$

con $\nu = 60 \text{ Hz}$.

Il segnale in uscita è mostrato dalla linea tratteggiata. Notiamo che esso ha un valore massimo che differisce da V_i di circa 0.7 Volt e che non rimane costante, ma diminuisce in modo esponenziale. La “memoria” può esser allungata aumentando il valore di R_L .

Invertendo il verso del diodo è poi possibile trasformare, come è facile verificare, il rivelatore di picco positivo in un rivelatore di picco negativo.

5.8.4 Circuito fissatore (Clamping)

È necessario in alcuni casi “fissare” ad un certo valore continuo il massimo (o il minimo) di un segnale sinusoidale di tensione. I circuiti che svolgono tale funzione sono noti come circuiti *fissatori* o *clamping*.

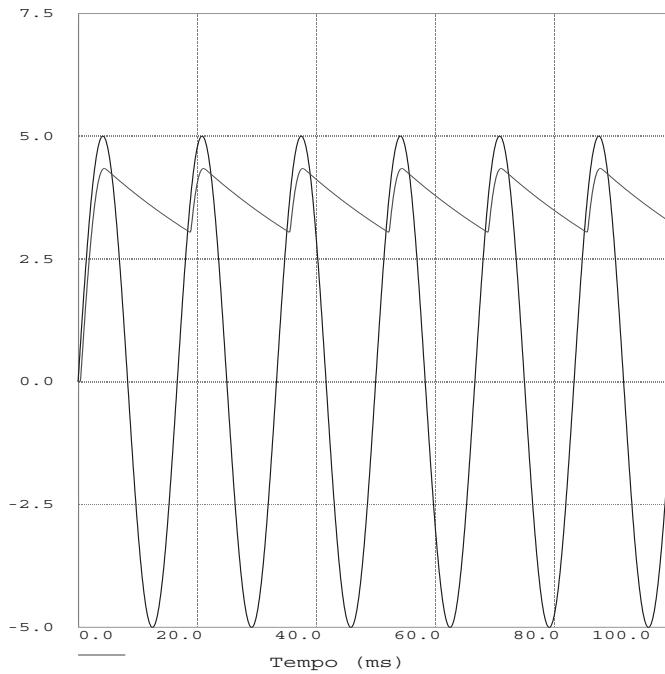


Figura 5.21: Segnale all'ingresso (curva solida) ed all'uscita (curva a tratteggio) del rivelatore di picco di figura 5.20. I valori dei componenti e quelli del segnale sono indicati nel testo. I risultati sono quelli forniti dal programma di simulazione Microcap

Un circuito che fissa a V_γ il valore massimo di un segnale sinusoidale, è quello di figura 5.22.

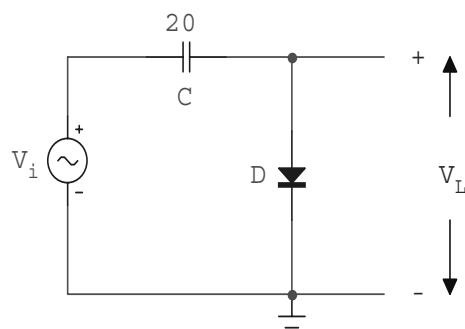


Figura 5.22: Circuito clamping

Se infatti il segnale in ingresso sale, il segnale V_L sale anch'esso, fino a che V_i non sia divenuto uguale a V_γ . A partire da tale istante il diodo inizia a condurre e $V_L = V_\gamma$. Ora, la tensione sull'armatura sinistra del condensatore continua a salire, seguendo V_i , mentre quella sull'armatura destra rimane fissa a V_γ . Se ora V_i comincia a diminuire, e con esso la tensione sull'armatura sinistra del condensatore, quella sull'armatura destra comincerà a scendere anch'essa, interdicendo il diodo. Vediamo che in tal modo V_L continua a diminuire nell'intervallo di tempo in cui V_i

diminuisce. Poiché V_L partiva da un valore V_γ , esso diminuirà, divenendo presto negativo.

Se V_0 è l'ampiezza del segnale sinusoidale V_i , il minimo valore che V_L raggiungerà è quindi:

$$V_{L,min} = V_\gamma - 2V_0$$

Se ora V_i comincia nuovamente ad aumentare, V_L aumenterà anch'esso, fino a raggiungere un valore massimo V_γ quando V_i acquista il suo valore massimo V_0 .

In tutta la fase descritta il diodo rimane interdetto. Esso svolge unicamente il ruolo di far caricare il condensatore nella fase iniziale in cui V_i inizia a crescere.

L'andamento dei segnali V_i e V_L è rappresentato dalle curve di figura 5.23. La sinusoide superiore è V_i , quella inferiore V_L . Il segnale sinusoidale in ingresso ha un'ampiezza di 5 V ed una frequenza di 60 Hz.

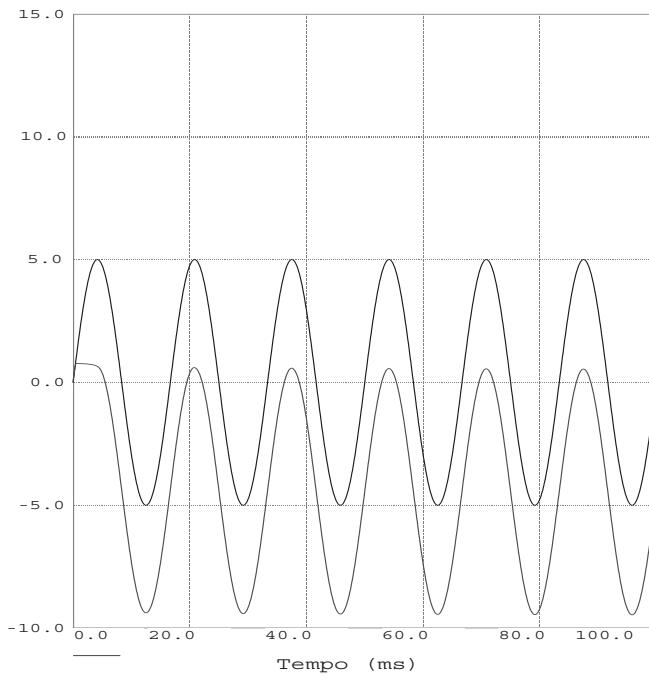


Figura 5.23: Segnale in ingresso (curva superiore) ed uscita (curva inferiore) del circuito clamping di figura 5.22. Le curve sono state ottenute, con i valori dei componenti e dei segnali indicati nel testo, facendo uso del programma Microcap

È possibile effettuare un clamp ad una tensione diversa da V_γ , modificando il circuito con l'aggiunta di una batteria, come mostrato in figura 5.24. Qui si è scelto una batteria da -2 V . Con tale scelta, il massimo della tensione in uscita è fissato a:

$$V_\gamma - V_R = 0.8 - 2.0 = -1.2\text{ V}$$

I relativi segnali sono mostrati in figura 5.25.

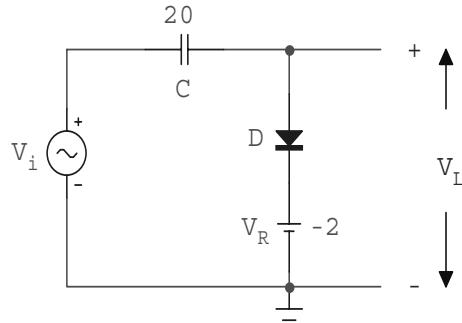


Figura 5.24: Circuito clamping modificato con l'aggiunta di una batteria, per effettuare un “clamp” ad un tensione diversa da V_γ

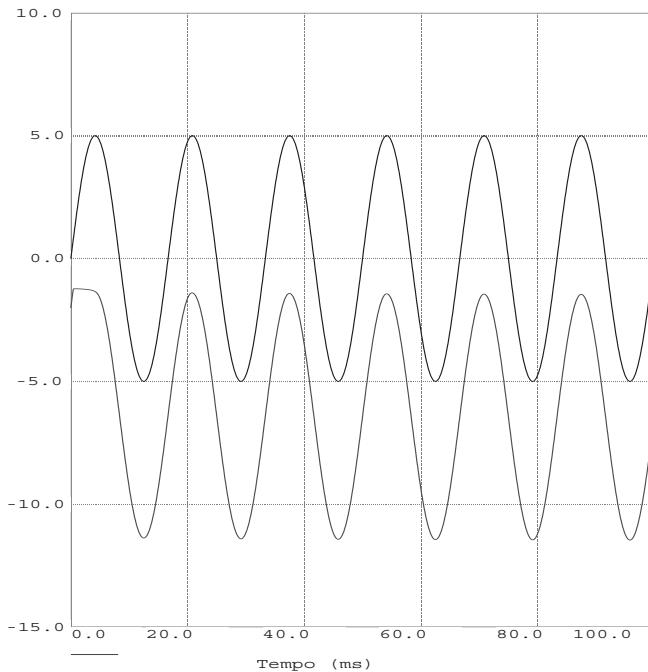


Figura 5.25: Segnali in ingresso (curva superiore) ed uscita (curva inferiore) del circuito clamping di figura 5.24. Le curve sono state ottenute, con i valori dei componenti e dei segnali indicati nel testo, facendo uso del programma Microcap

5.8.5 Duplicatore di tensione

La figura 5.26 mostra un circuito che fornisce in uscita una tensione continua pari a $-2V_0$, dove V_0 è l'ampiezza del segnale sinusoidale applicato in ingresso.

Il circuito è costituito da un *clamp* seguito da un *rivelatore di picco* per segnali negativi.

La metà sinistra del circuito, costituita dalla capacità C e dal diodo D , fissa il massimo del segnale in uscita (quello ai capi delle diode D) ad un valore V_γ . La metà destra (D_1 , C_1) “memorizza” il valore minimo ($V_\gamma - 2V_0$) che tale segnale assume.

Il grafico di figura 5.27 mostra in alto l’andamento del segnale applicato (curva

superiore) e di quello ai capi di D (curva inferiore) ed in basso il segnale di tensione in uscita V_{out} . Vediamo che, dopo un breve tempo di assestamento, legato alla carica dei condensatori, la tensione in uscita acquista un valore di circa:

$$V_\gamma - 2 \times 5 = -9.2 \text{ Volt}$$

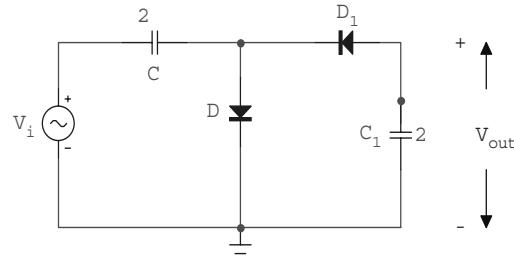


Figura 5.26: Circuito duplicatore di tensione

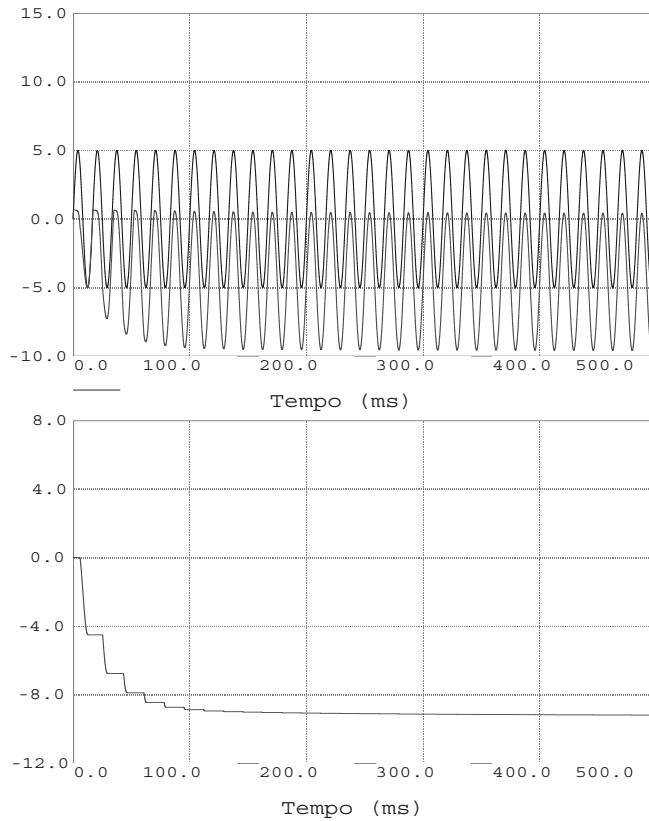


Figura 5.27: Il grafico superiore mostra il segnale all'ingresso del circuito duplicatore di tensione (curva superiore) e quello ai capi del diodo (curva inferiore). Il grafico inferiore mostra il segnale continuo ottenuto (dopo la fase di stabilizzazione iniziale). Le curve sono state ottenute, con i valori dei componenti e dei segnali indicati nel testo, facendo uso del programma Microcap

5.8.6 Misura analogica di una frequenza d'impulsi

Il circuito di figura 5.28 è a volte adoperato come tachimetro nelle automobili. Esso fornisce una tensione in uscita proporzionale al numero di impulsi al secondo inviati in ingresso. Gli impulsi costituiscono un treno d'onde rettangolari, di altezza e durata fissa. Analizziamo il funzionamento.

Ciascun impulso positivo in ingresso “carica” il condensatore C_1 attraverso il diodo D_1 . Per questa polarità dell’impulso D_2 risulta interdetto. Quando l’impulso torna a zero, la tensione sull’elettrodo sinistro del condensatore scende, e scende simultaneamente quella sull’elettrodo destro (il comportamento è uguale a quello, già esaminato, del circuito clamping). Ora la tensione dell’elettrodo destro di C_1 , che era rimasta bloccata a V_γ , può scendere a valori negativi, con che D_2 può cominciare a condurre, caricando negativamente il condensatore C_2 . Come si vede dallo schema, C_2 è di valore molto maggiore di C_1 . La costante di tempo con cui esso si scaricherà attraverso la resistenza R è quindi molto grande, e comunque molto maggiore del tempo di carica. Se il numero di impulsi al secondo è n e l’altezza d’impulso V , la carica associata a ciascun impulso è C_1V e la corrente media $i = C_1Vn$. Questa corrente produce ai capi di C_2 un aumento della tensione pari a $\delta V_2 = nVC_1/C_2$. Si raggiungerà dopo un certo tempo una situazione stazionaria in cui il processo di carica di C_2 viene rallentato dall’aumento del potenziale V_2 , mentre la scarica di C_2 attraverso R continua con legge esponenziale. In questa fase asintotica (raggiunta nella pratica dopo una frazione di secondo) la tensione ai capi di C_2 è proporzionale al numero n di impulsi al secondo. La parte del circuito costituita dal condensatore C_1 e dai diodi agisce da “pompa” di carica elettrica; C_2 da “serbatoio”.

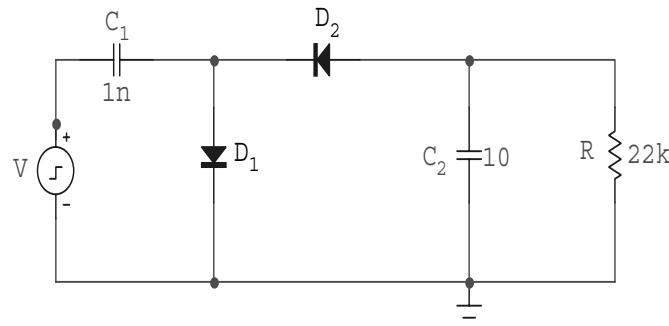


Figura 5.28: Circuito per la misura analogica di una frequenza d’impulsi

I risultati di una simulazione di questo circuito, ottenuti facendo uso del programma microcap [5], sono mostrati nelle figure 5.29 e 5.30. I valori dei componenti adoperati sono quelli di figura 5.28. Il segnale in ingresso è un’onda quadra, di periodo $200 \mu s$ e duty-cycle 50%. La figura 5.29 mostra il segnale in ingresso (grafico superiore) e quello ai capi di C_2 (grafico inferiore) limitatamente ai primi 2 ms. La figura 5.30 mostra la tensione ai capi di C_2 su di un intervallo temporale di 0.8 s. È evidente la crescita asintotica del segnale in uscita (negativo) verso -450 mV.

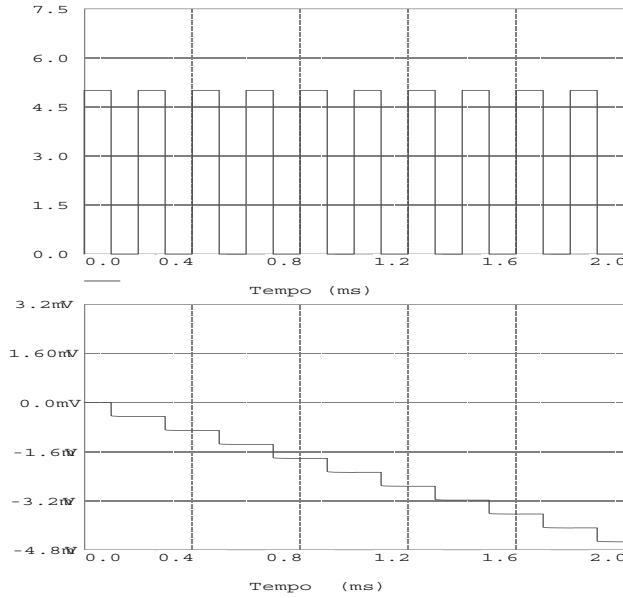


Figura 5.29: Il grafico superiore mostra la sequenza d'impulsi inviati al circuito di figura 5.28. Quello inferiore mostra il segnale in uscita. I risultati mostrati sono stati ottenuti facendo uso del programma Microcap

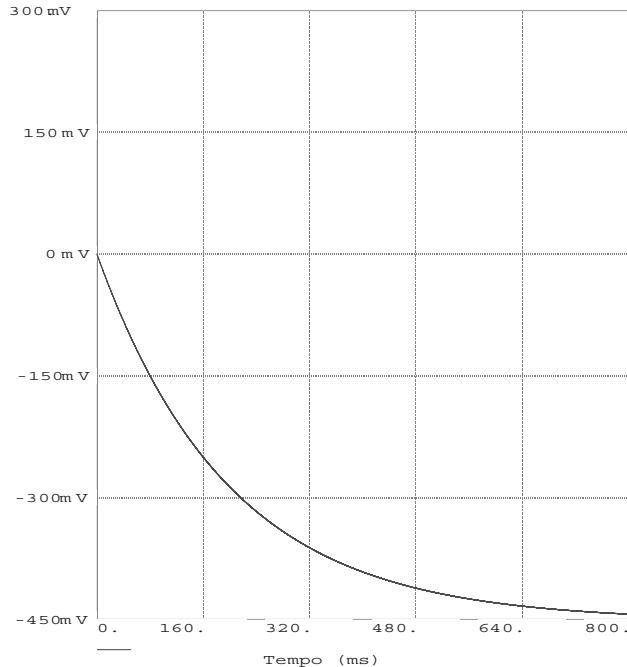


Figura 5.30: Segnale in uscita dal circuito di figura 5.28 su di una scala temporale espansa (fino a 800 ms)

5.8.7 Circuito limitatore con diodi Zener

Il circuito di figura 5.31 limita, sia nella semionda positiva che in quella negativa, il segnale sinusoidale applicato in ingresso. Nell'esempio di figura, l'ingresso ha una

frequenza di 1 kHz ed un'ampiezza di 10 V. Lo Zener adoperato è un 1N4731, che ha $V_Z = 4.3 \text{ V}$. Il taglio avviene quindi a:

$$V_Z + V_\gamma = 4.3 + 0.7 \approx 5.0 \text{ V}$$

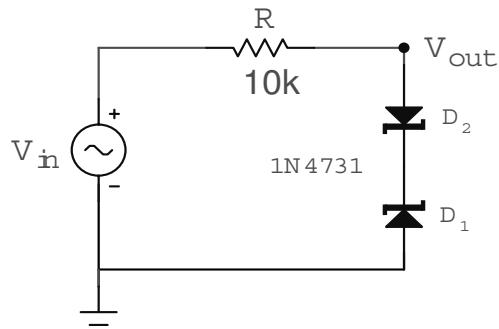


Figura 5.31: Circuito limitatore con diodi Zener

Il risultato ottenuto facendo uso del programma di simulazione è mostrato in figura 5.32.

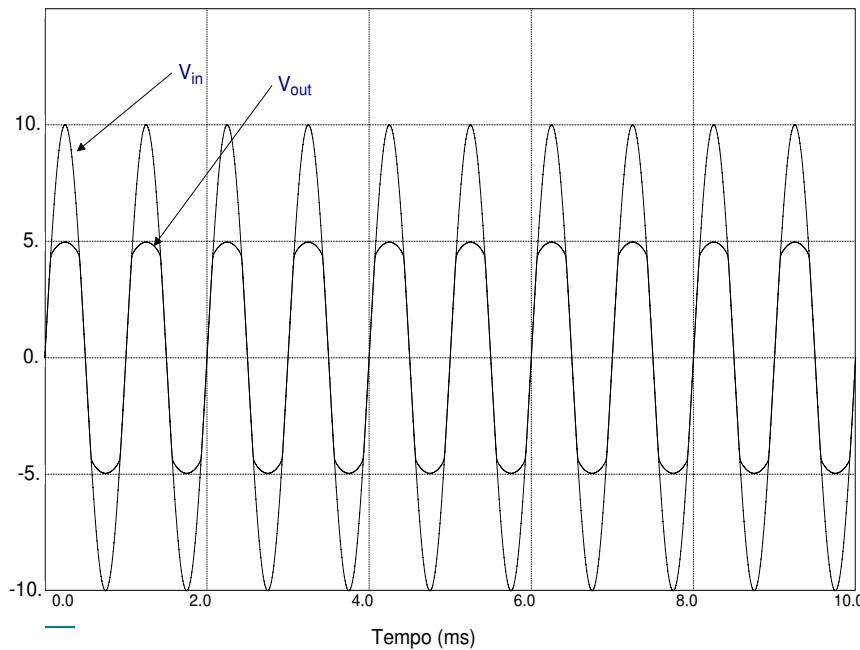


Figura 5.32: Segnale in ingresso (sinusoide di ampiezza 5 V) ed uscita per il circuito di figura 5.31

5.8.8 Interruttore a ponte di diodi

È spesso necessario far uso di “interruttori” comandati da un segnale di tensione. Il circuito di figura 5.33 trasmette o meno in uscita il segnale di tensione presente in ingresso, a seconda del segno della tensione di controllo V_k .

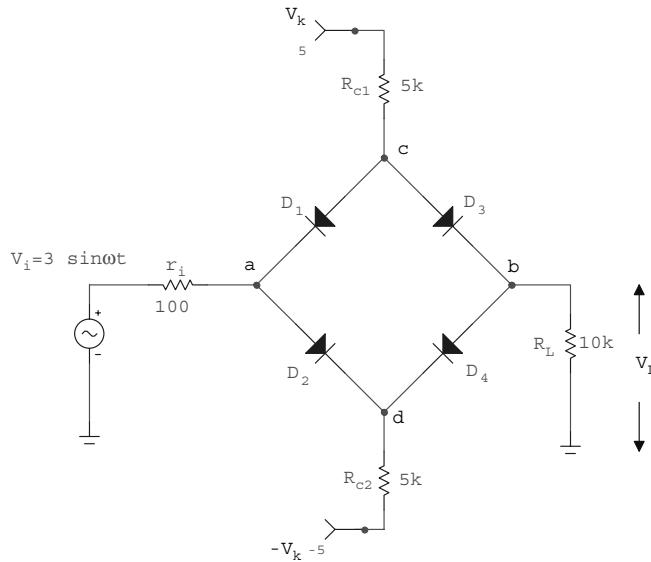


Figura 5.33: Interruttore a ponte di diodi

Esaminiamone il funzionamento.

Ammettiamo, per cominciare, che la tensione di controllo V_k sia stata fissata a +5 V. Se $V_i = 0$, i diodi D_1 e D_2 condurranno. La tensione nel punto c sarà $V_i + V_\gamma = 0 + 0.6 = 0.6$ V (stiamo ora ammettendo che il V_γ dei diodi adoperati sia 0.6 V). Ora D_3 e D_4 condurranno ed avremo:

$$V_b = V_c - 0.6 = 0 \text{ V}$$

Cioè la tensione in uscita V_L sarà uguale a quella in ingresso. Ammettiamo ora che V_i e quindi V_a aumenti e salga ad esempio a 0.2 V. Ora V_c salirà a $0.2 + 0.6 = 0.8$ V. V_b sarà allora:

$$V_b = V_c - 0.6 = 0.2 \text{ V}$$

ancora una volta uguale a V_i . Vediamo quindi che, fintantoché i diodi conducono, V_L segue V_i .

Ammettiamo ora di portare V_k a -5 V. Ora i diodi D_1 e D_2 saranno interdetti, e così pure D_3 e D_4 . In R_L non passerà alcuna corrente e $V_L = 0$.

Vediamo quindi che il ponte di diodi trasmette il segnale V_i se $V_k = +5$ V, mentre l'uscita è nulla per $V_k = -5$ V.

Ci chiediamo ora quale sarà il massimo valore che V_i può assumere affinché, con $V_k = +5$ V, il sistema continui a trasmettere, senza deformarlo o tagliarlo, il segnale applicato in ingresso.

Ovviamente, se V_a diviene così grande che la differenza di potenziale ai capi di D_1 sia nulla (in pratica, minore di $V_\gamma = 0.6 \text{ V}$), il diodo D_1 sarà interdetto, o quasi; la differenza di potenziale ai suoi capi sarà $\sim 0 \text{ V}$.

Ammettiamo, per fare un esempio, che sia $V_a = 4.8 \text{ V}$. In tali condizioni D_1 sarà al limite della conduzione, con una differenza di potenziale ai suoi capi di $\sim 0 \text{ V}$. Quindi $V_c \simeq 4.8 \text{ V}$. Notiamo che in queste condizioni D_3 continuerà a condurre, con una differenza di potenziale ai suoi capi di circa 0.6 V , il che implica una tensione di uscita $V_b \simeq 4.8 - 0.6 = 4.2 \text{ V}$. Vediamo che in tali condizioni V_b non è più uguale a V_a . Notiamo ancora che D_2 continua a condurre, con che: $V_d = V_a - 0.6 = 4.2 \text{ V}$. Il diodo D_4 , con una differenza di potenziale all'incirca nulla ai suoi capi, è al limite dell'interdizione, come D_1 . La corrente in esso i_{D_4} sarà uguale a 0. Chiamando V_i^m il massimo valore che il segnale in ingresso può assumere prima che le correnti attraverso D_1 e D_4 si annullino avremo, ponendo $R_{c_1} = R_{c_2} \equiv R_c$:

$$V_a = V_i^m$$

$$V_d = V_a - V_\gamma = V_i^m - V_\gamma$$

$$V_c = V_a = V_i^m$$

$$V_b = V_c - V_\gamma = V_a - V_\gamma = V_L$$

dove:

$$R_L i_L = V_k - R_c i_L - V_\gamma$$

cioè:

$$i_L (R_L + R_c) = V_k - V_\gamma$$

da cui:

$$i_L = \frac{V_k - V_\gamma}{R_L + R_c}$$

Da questa segue:

$$V_L = R_L i_L = \frac{R_L}{R_L + R_c} (V_k - V_\gamma) = V_i^m - V_\gamma$$

e quindi:

$$V_i^m = V_\gamma + \frac{R_L}{R_L + R_c} (V_k - V_\gamma)$$

Se ad esempio è:

$$R_L = 10 \text{ k} \quad ; \quad R_c = 5 \text{ k} \quad ; \quad V_k = 5 \text{ V}$$

avremo:

$$V_i^m = 0.6 + \frac{10}{15} (5 - 0.6) = 3.5 \text{ V}$$

5.9 Il transistor bipolare

5.9.1 Introduzione

Abbiamo già accennato, nell'introduzione a questo capitolo, all'idea coltivata attorno al 1945 da numerosi ricercatori, di realizzare un amplificatore a stato solido che funzionasse in modo analogo ad una valvola termoionica (triodo o simile). L'idea era cioè quella di controllare la corrente in un diodo al silicio, inserendo nella zona di separazione tra la parte p e quella n, l'analogo di una griglia. Nel transistor bipolare a giunzione, quale oggi lo conosciamo, si controlla la corrente che fluisce tra due zone di ugual drogaggio, mediante una corrente immessa in una sottile zona, di drogaggio opposto, realizzata tra le prime due. Ciò è schematicamente mostrato in figura 5.34, dove le due zone che rispettivamente emettono e ricevono la corrente controllata dalla corrente I_g , sono di tipo n, mentre la zona che le separa, che svolge il ruolo della griglia in un tubo a vuoto, è di tipo p.

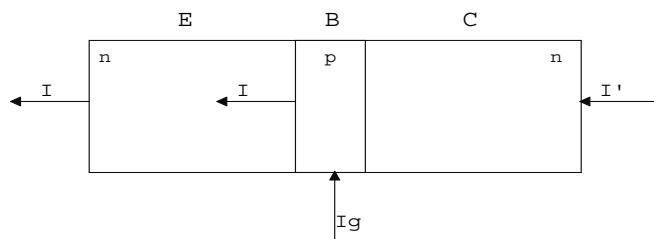


Figura 5.34: Struttura schematica di un transistor bipolare a giunzione. Sono indicate le zone occupate dall'emettitore (E), base (B) e collettore (C)

Un transistor bipolare è quindi un dispositivo che controlla una corrente mediante un'altra corrente (molto piccola). Ciò lo differenzia da un triodo, in cui è una tensione (la tensione di griglia) a controllare la corrente che passa nel tubo.

Un transistor di questo tipo è detto “npn”. Esistono anche transistor “pnp” in cui le polarità sono invertite. I simboli adoperati per i due tipi di transistor sono mostrati in figura 5.35.

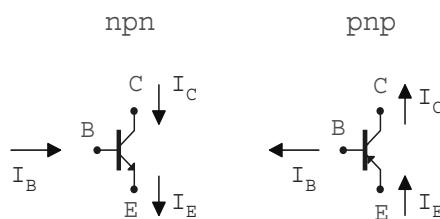


Figura 5.35: Simboli adoperati per i transistor bipolari a giunzione. A sinistra: transistor npn; a destra: transistor pnp

I terminali che rispettivamente emettono e raccolgono le cariche il cui flusso costituisce la corrente nel transistor sono detti rispettivamente di “emettitore” e

di “collettore”. Il terminale collegato alla zona intermedia è quello di “base”. In un transistor npn la corrente è dovuta (principalmente) ad elettroni emessi dall’emettitore e raccolti poi dal collettore. In un transistor pnp la corrente è dovuta (principalmente) a lacune emesse dall’emettitore e raccolte poi dal collettore. Tale corrente è controllata dalla corrente immessa nella base. Il verso della corrente convenzionale (cioè di cariche positive) è, in entrambi i tipi di transistor, indicato dal verso della freccia nella gamba di emettitore.

È possibile, con una semplice esperienza, mettere in evidenza l’elevato guadagno in corrente di un transistor. Il circuito, consistente in un transistor (meglio se ad alto guadagno), una batteria da 9 V, una resistenza da $100\ \Omega$ ed un LED, è mostrato in figura 5.36.

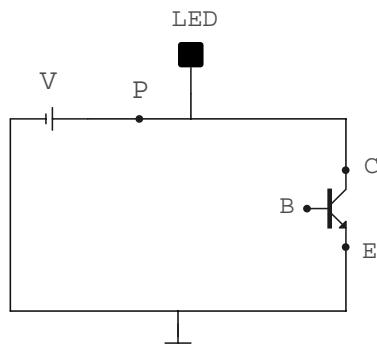


Figura 5.36: Schema di un semplice esperimento illustrativo del funzionamento di un transistor bipolare a giunzione

Nella configurazione di figura, con il terminale di base non collegato, il LED rimane spento essendo nulla la corrente nel transistor. Se ora stringiamo tra due dita di una mano il terminale di base e tra due dita dell’altra mano il positivo della batteria (punto P) il LED si accenderà. Ciò dimostra che è sufficiente la piccolissima corrente (pochi μA) che, attraverso il nostro corpo, fluisce tra il positivo della batteria, la giunzione base-emettitore e massa, per far passare nel transistor una corrente (qualche mA) abbastanza elevata da far accendere il LED.

5.9.2 Struttura interna e funzionamento in zona attiva

La struttura interna del transistor bipolare è mostrata in figura 5.37, relativa ad una transistor npn.

Come si vede, abbiamo due diodi contrapposti: quello emettitore-base e quello base-collettore. All’equilibrio la distribuzione delle cariche, del campo elettrico e del potenziale sono quelle mostrate nelle figure 5.38, 5.39, 5.40.

Ammettiamo ora che la giunzione (diodo) emettitore-base sia polarizzata in modo diretto e quella collettore-base in modo inverso, come mostrato in figura 5.41.

Il corrispondente andamento del potenziale è quello di figura 5.42.

Attraverso la prima delle giunzioni suddette, elettroni passeranno per diffusione dall’emettitore nella base e lacune dalla base nell’emettitore. Il transistor è però costruito in modo che la concentrazione di lacune nella base sia molto più piccola

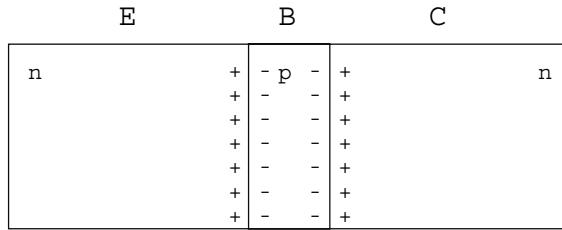


Figura 5.37: Struttura schematica del transistor bipolare a giunzione (di tipo npn)

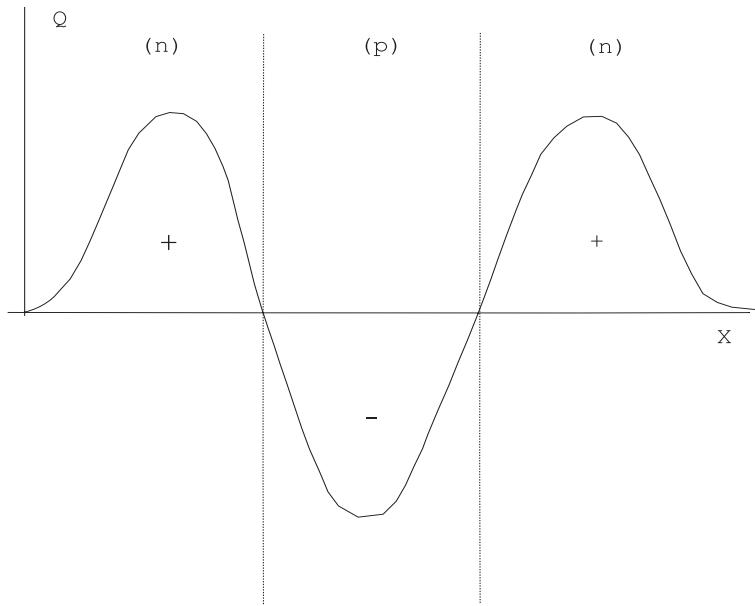


Figura 5.38: Distribuzione della carica in un transistor bipolare a giunzione non polarizzato

dell'analogia concentrazione di elettroni nell'emettitore. Ne segue che la corrente che attraversa il diodo emettitore-base è dovuta quasi esclusivamente ad elettroni che dall'emettitore passano nella base. Un ulteriore caratteristica del transistor è costituita dal fatto che lo spessore della base è molto stretto. Ne segue che un elettrone che dall'emettitore passa nella base, ha una probabilità molto piccola di esser "catturato" da una lacuna presente in tale zona. Indicheremo con $(1 - \alpha)$ (con α vicino ad 1) la probabilità che ciò avvenga.

Un elettrone che non venga catturato, attraversa il piccolo spessore della base e, giunto in corrispondenza della giunzione base-collettore (polarizzata inversamente) è rapidamente accelerato verso il circuito di collettore. La probabilità che ciò accada è α . Il parametro α è una caratteristica del dato transistor ed è in genere compreso tra 0.9 e 0.99.

Se un elettrone è catturato da una lacuna in base, si avrà una diminuzione della carica in tale regione (scomparsa di una lacuna). La batteria provvede però a ripristinare tale carica immettendo una corrente nella base. Chiameremo I_B tale "corrente di base". Poiché il numero di lacune che, in un dato tempo, catturano

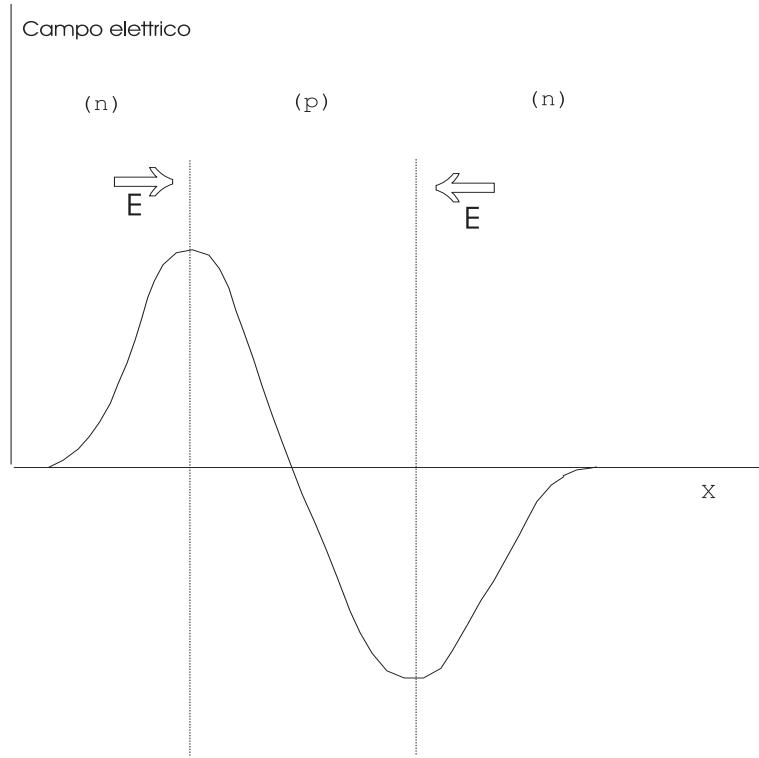


Figura 5.39: Andamento del campo elettrico in un transistor bipolare a giunzione non polarizzato

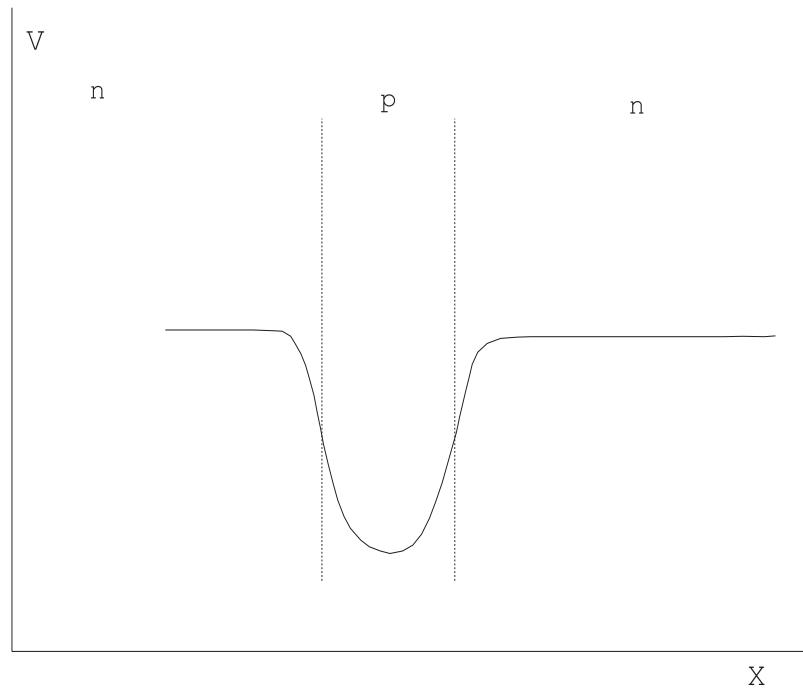


Figura 5.40: Andamento del potenziale in un transistor bipolare a giunzione non polarizzato

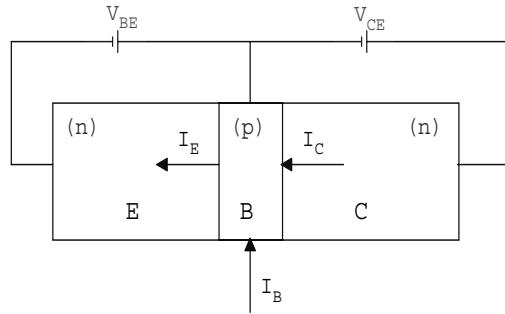


Figura 5.41: Schema base di un transistor bipolare a giunzione npn polarizzato in zona attiva. Sono indicate, oltre alle batterie che forniscono la polarizzazione, le correnti di collettore (I_C) di base (I_B) e di emettitore (I_E), con i loro versi reali.

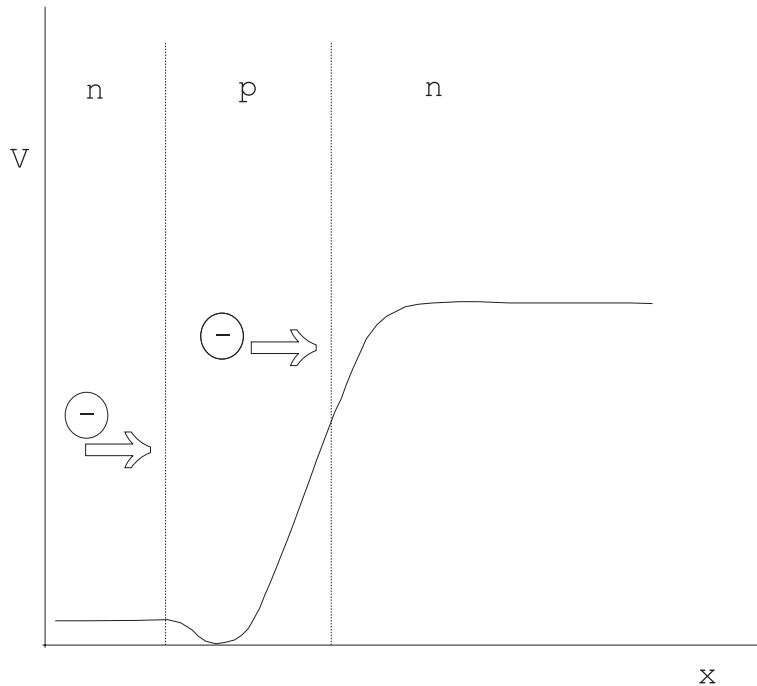


Figura 5.42: Andamento del potenziale in un transistor bipolare a giunzione npn polarizzato in zona attiva.

elettroni è proporzionale ad $1 - \alpha$, avremo:

$$I_B \sim (1 - \alpha) I_E$$

Analogamente, la corrente che fluisce tra collettore e base, proporzionale al numero di elettroni che, immessi dall'emettitore nella base, riescono a “passare” nel circuito di collettore, sarà proporzionale ad α :

$$I'_C \sim \alpha I_E$$

Occorre tener presente che alla corrente di collettore contribuisce anche quella dovuta ai portatori minoritari (lacune) presenti nel collettore. Questi infatti sono

accelerati verso la base dal campo esistente in corrispondenza della giunzione base-collettore (polarizzata inversamente). Tale corrente è la *corrente inversa* nel diodo base-collettore: I_0 .

In definitiva, la corrente di collettore è data da:

$$I_C = I'_C + I_0 = I_0 + \alpha I_E$$

Con la convenzione per i segni delle correnti mostrata in figura 5.43, avremo allora:

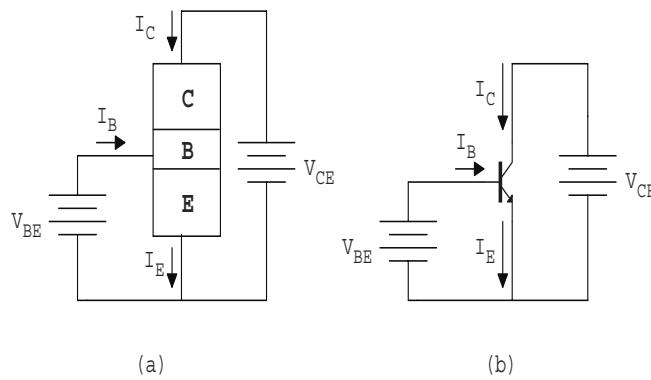


Figura 5.43: Schemi di polarizzazione per un transistor bipolare a giunzione che lavori in zona attiva. V_{BE} è la differenza di potenziale tra base ed emettitore; V_{CE} è la differenza di potenziale tra collettore ed emettitore

$$I_B + I_C = I_E$$

Dalle due ultime equazioni si ottiene poi:

$$I_C = I_0 + \alpha I_E = I_0 + \alpha I_B + \alpha I_C$$

da cui:

$$I_C = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_B + \frac{1}{1 - \alpha} I_0 \quad (5.33)$$

Il parametro $\alpha/(1 - \alpha)$ è noto come il β del transistor. Esso varia tra qualche decina e qualche centinaio. La precedente equazione può quindi essere scritta nella forma:

$$I_C = \beta I_B + \frac{1}{1 - \alpha} I_0 \quad (5.34)$$

In genere I_0 è molto piccolo e può esser trascurato. Tuttavia v'è ricordato che esso è moltiplicato per il fattore $1/(1 - \alpha)$ che, al pari di β , varia tra qualche decina e qualche centinaio. Inoltre I_0 aumenta molto all'aumentare della temperatura. Esistono quindi delle circostanze in cui, per ottenere risultati precisi, occorre tener conto di tale termine.

Nel seguito useremo l'equazione nella forma:

$$I_C = \beta I_B \quad (5.35)$$

Questa ci dice che la corrente di collettore, se il transistor è polarizzato come detto sopra (transistor in *zona attiva*) è una funzione lineare della corrente di base. La corrente di emettitore differisce di poco da quella di collettore:

$$I_E = I_C + I_B = I_C + \frac{I_C}{\beta} \simeq I_C$$

Essendo $\beta \gg 1$.

Notiamo che:

- β può variare molto tra un transistor e l'altro, anche se i due transistor sono nominalmente uguali;
- β varia al variare del “punto di lavoro”, cioè delle tensioni applicate al transistor;
- β varia al variare della temperatura.

Se una corrente variabile è inviata in base si avrà una corrispondente variazione della corrente di collettore:

$$\Delta I_C = \beta \Delta I_B + I_B \frac{\partial \beta}{\partial I_B} \Delta I_B$$

In genere il termine $\partial \beta / \partial I_B$ è piccolo, per cui, con la notazione adottata per le grandezze variabili, avremo:

$$i_c = \beta i_b \quad (5.36)$$

A rigore, se il termine $\partial \beta / \partial I_B$ non può esser trascurato, occorre distinguere tra il β che compare nella (5.35), che è il fattore moltiplicativo tra corrente di base e di collettore e quello che figura nella (5.36). Per motivi che vedremo in seguito, il parametro β che compare nella (5.35) è indicato con il simbolo: h_{FE} . Il β che compare nella (5.36), riferito a grandezze variabili, è quindi indicato con pedici minuscoli: h_{fe} . Faremo spesso l'approssimazione:

$$h_{FE} \approx h_{fe}$$

5.9.3 Caratteristiche d'uscita del transistor

La relazione tra corrente di emettitore e differenza di potenziale V_{BE} applicata tra emettitore e base, è essenzialmente data dalla caratteristica del diodo: la corrente di emettitore aumenta molto rapidamente all'aumentare di V_{BE} (con $V_B > V_E$ per un transistor *n-p-n* polarizzato in zona attiva), in modo tale che V_{BE} si stabilizzi attorno a 0.7 Volt.

Di maggior interesse sono le cosiddette caratteristiche d'uscita, cioè le curve che descrivono la dipendenza della corrente di collettore dalla differenza di potenziale

V_{CE} tra collettore ed emettitore. La curva che descrive tale dipendenza per un dato transistor, dipende dal valore della corrente di base. Curve tipiche sono mostrate in figura 5.44. Le curve corrispondono a valori diversi della corrente di base I_B , crescente via che ci si sposta verso l'alto.

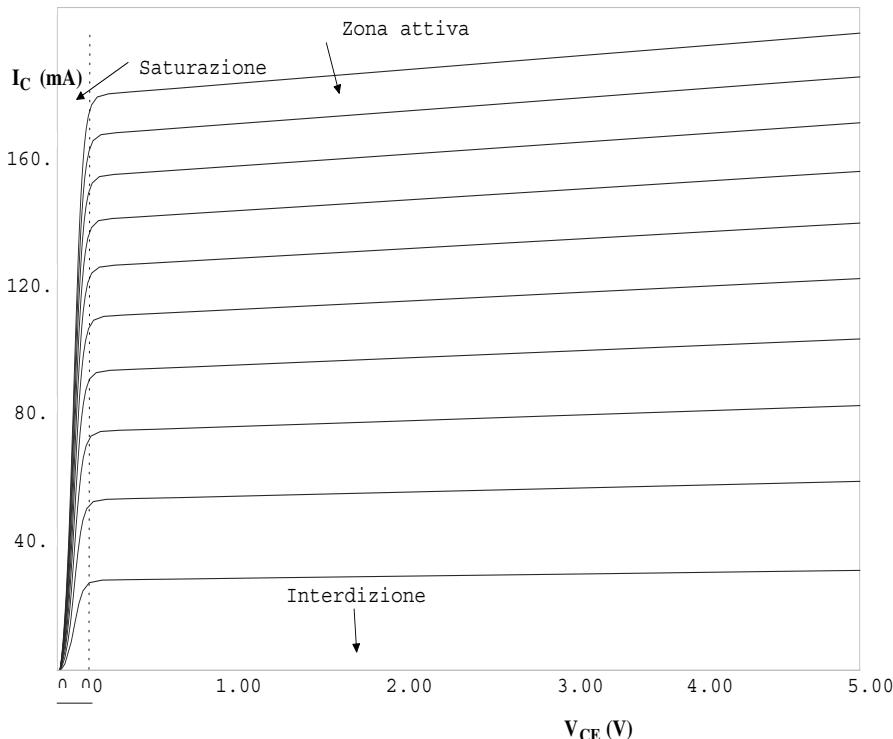


Figura 5.44: Caratteristiche d'uscita del transistor npn discusso nel testo. È riportata I_C in funzione di V_{CE} per diversi valori della corrente di base I_B . Questi sono crescenti dal basso verso l'alto

In questa figura dobbiamo distinguere tre regioni:

- La “zona attiva”, cioè quella in cui le caratteristiche sono all’incirca delle rette orizzontali (in realtà, come si vede e come discuteremo più avanti, con una piccola pendenza). In questa zona abbiamo una approssimata proporzionalità tra corrente di base e corrente di collettore, come descritto dalla (5.35). Essa è in genere scelta quando si voglia adoperare il transistor come amplificatore.
- La “zona di interdizione”, cioè quella in basso nel grafico, dove $I_C = 0$. Il transistor sarà in questa zona se $V_{BE} \ll V_\gamma$, con che il diodo emettitore-base è interdetto.

È bene precisare che ciò è vero fino a che la giunzione base-collettore continua ad esser polarizzata inversamente. Se così non fosse, se cioè la giunzione base-collettore fosse polarizzata direttamente e quella emettitore-base inversamente, verrebbero semplicemente ad essere scambiati, rispetto al funzionamento in zona attiva, i ruoli di emettitore e collettore. Si dice che allora il transistor funziona in *zona attiva inversa*. In tali condizioni vale una relazione simile

alla (5.35), dove però adesso la corrente I_C và sostituita da I_E :

$$I_E = \beta_R I_B$$

dove β_R (β “reverse”) è, per costruzione, molto minore del β che abbiamo finora incontrato (che viene spesso chiamato $\beta_F = \beta$ “forward”).

- (c) La zona a sinistra nel grafico, dove la relazione di linearità viene meno, è la “zona di saturazione”. Questa è caratterizzata, come si vede dal grafico, da valori di I_C molto più piccoli di quelli che si hanno, per la data corrente di base, nella zona lineare. Cioè in tale zona è :

$$I_C \ll \beta I_B \quad (5.37)$$

Quando il transistor opera in saturazione, la differenza di potenziale V_{CE} è molto piccola ($\simeq 0.2$ V). Inoltre, come si vede dalle caratteristiche, in tale zona la corrente di collettore non dipende più dalla corrente di base. Si entra in tale zona se sia la giunzione base-emettitore che quella base-collettore sono polarizzate direttamente. La corrente di collettore in tale zona è dovuta alle cariche minoritarie (lacune) presenti nel collettore, che passano in base.

5.10 Nomenclatura adoperata per diodi e transistor

I simboli adoperati per indicare i diversi tipi di diodi e transistor, seguono tre diverse convenzioni, note rispettivamente con i nomi di Pro-Electron, JEDEC (Joint Electron Device Engineering Council) e JIS (Japanese Industrial Standard). Il primo di questi è lo Standard Europeo, il secondo quello Americano, l’ultimo quello Giapponese. Il significato dei simboli adoperati nei diversi sistemi è riassunto nella tabella di figura 5.45 (Pro-Electron), 5.46 (JEDEC) e 5.47 (JIS).

Và detto per completezza che alcuni produttori adottano dei sistemi che non rispettano alcuno di questi Standard. Ad esempio:

- MJ = Motorola, transistor di potenza, custodia metallica;
- MJE = Motorola, transistor di potenza, custodia in plastica;
- MPS = Motorola, transistor di bassa potenza, custodia in plastica;
- TIP = Texas Instruments, transistor di bassa potenza, custodia in plastica;
-

Nei cataloghi forniti dai produttori compaiono un gran numero di parametri che caratterizzano un transistor. Nella tabella (5.2) elenchiamo i principali di questi parametri, con una breve spiegazione del loro significato.

V_{CEMax}	Massima differenza di potenziale tra collettore ed emettitore
I_{CMax}	Massima corrente di collettore
$h_{FE} (\beta)$	Guadagno in corrente (in DC)
P_{TotMax}	Massima potenza che il transistor può dissipare (data da $V_{CE} \times I_C$)
V_{CESat}	Differenza di potenziale tra collettore ed emettitore quando il transistor è in saturazione

Tabella 5.2:

Transistor and Diode Data

Part Numbers on Transistor & Diodes typically follow one of 3 conventions Pro-Electron, JEDEC, or JIS. These are described below.

Pro-Electron

Form: two letters, [optional letter], serial number,
Example: BC108A, BAW68, BF239

1 st Letter - specifies the semiconductor material	2 nd Letter - specifies the type of device	Optional 3 rd Letter	Serial number
A Germanium B Silicon C Gallium Arsenide R Compound Materials	A Diode, low power or signal B Diode, variable capacitance C Transistor, audio frequency low power D Transistor, audio frequency power E Diode, tunnel F Transistor, high frequency low power G Miscellaneous devices H Diode, sensitive to magnetism L Transistor, high frequency power N Photocoupler P Light detector Q Light emitter R Switching device, low power e.g. thyristor, diac, unijunction etc S Transistor, low power switching T Switching device power, e.g. thyristor, triac, etc. U Transistor, switching power W Surface acoustic wave device X Diode, multiplier, e.g. varactor Y Diode, rectifying Z Diode, voltage reference	The third letter indicates that the device is intended for industrial or professional rather than commercial applications. It is usually a W,X,Y or Z.	The characters following the first two letters form the serial number for the device type. Those intended for domestic use have a three-figure number (100 – 999), those intended for commercial use normally have one letter and two figures (W10 – Z99)

Figura 5.45: Caratteristiche dei transistor, secondo lo standard *Pro – Electron*

JEDEC (Joint Electron Device Engineering Council)**Form:** digit, letter, serial number, [suffix]**Example:** 2N2222A, 2N904

1 st Number designates the type of device	2 nd Number	The following figures denote the device serial number	Suffix Optional
1 Diodes 2 Bipolar transistors 3 FET devices 4/5 OptoCoupler	N	Serial number of component yields no indication of function or spec.	A = low gain B = medium gain C = high gain

Figura 5.46: Caratteristiche dei transistor, secondo lo standard JEDEC**Japanese Industrial Standard (JIS)****Form:** digit, two letters, serial number, [suffix]**Example:** 2SA1187, 2SB646

1 st Number designates the type of device	2 Letters	The following figures denote the device serial number	Suffix Optional
1 Diodes 2 Bipolar transistors 3 FET devices	SA: PNP HF transistor SB: PNP AF transistor SC: NPN HF transistor SD: NPN AF transistor SE: Diodes SF: Thyristors SG: Gunn devices SH: UJT SJ: P-channel FET/MOSFET SK: N-channel FET/MOSFET SM: Triac SQ: LED SR: Rectifier SS: Signal diodes ST: Avalanche diodes SV: Varicaps SZ: Zener diodes	Serial number of component yields no indication of function or spec. Since this is a serial number may provide insight into date.	Suffix indicates that the type is approved for use by various Japanese organisations

Manufacturer Specific

Apart from JEDEC, JIS and Pro-electron, manufacturers often introduce their own types, for commercial reasons (ie to get their name into the code) or to emphasise that the range belongs to a specialist application.
Common brand specific prefixes are:

MJ: Motorola power, metal case
MJE: Motorola power, plastic case
MPS: Motorola low power, plastic case
MRF: Motorola HF, VHF and microwave transistor
RCA: RCA
RCS: RCS
TIP: Texas Instruments power transistor (plastic case)
TIPL: TI planar power transistor
TIS: TI small signal transistor (plastic case)
ZT: Ferranti
ZTX: Ferranti

Examples- ZTX302, TIP31A, MJE3055, TIS43.

Figura 5.47: Caratteristiche dei transistor, secondo lo standard JIS

Capitolo 6

Transistor bipolari

6.1 Caratteristiche del transistor bipolare

Il transistor bipolare, quando usato nella zona attiva (cioè con $V_{BE} > V_\gamma$, $V_C > V_B$) si comporta come amplificatore di corrente. Una piccola corrente iniettata in base controlla una corrente molto maggiore che (in un transistor npn) attraversa il transistor nel verso collettore-base-emettitore, come mostrato in figura 6.1 (relativa alla configurazione nota come “emettitore comune” o CE, in cui l’emettitore è “comune” alla maglia d’ingresso ed a quella d’uscita).

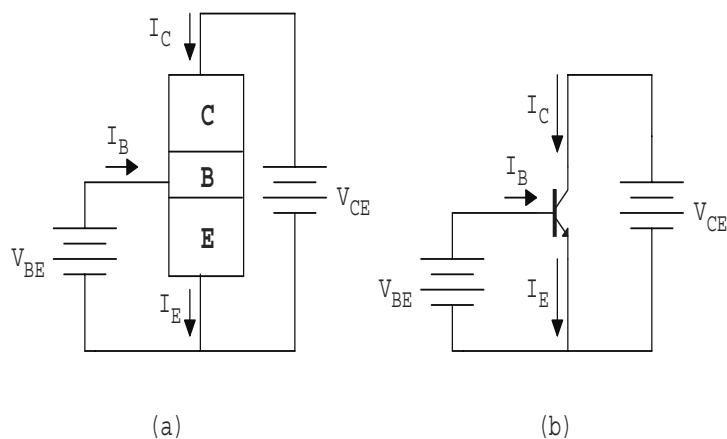


Figura 6.1: Transistor polarizzato nella configurazione emettitore-comune.

La batteria indicata con V_{CE} fa sì che il collettore sia polarizzato positivamente rispetto all’emettitore più di quanto la base sia polarizzata rispetto al medesimo emettitore. Ciò assicura che V_{CB} sia positivo.

Notiamo che il diodo emettitore-base, polarizzato direttamente, stabilirà una differenza di potenziale V_{BE} all’incirca uguale a 0.7 V (cioè al V_γ del diodo) indipendentemente dalla corrente I_B che entra in base¹. Quest’ultima potrà variare, con una conseguente variazione di I_C , mentre V_{BE} rimarrà praticamente costante.

¹In realtà, in presenza di segnale in base, V_{BE} varia attorno al valore 0.6 – 0.7 V, come evidente

A rigore quindi quello che abbiamo indicato con V_{BE} non potrà essere un generatore (ideale) di tensione, poiché in tal caso V_{BE} potrebbe esser maggiore di V_γ , ma al generatore V_{BE} dovrà essere associata una resistenza.

Una configurazione più realistica (ma poco adoperata, come vedremo più avanti) è quella di figura 6.2:

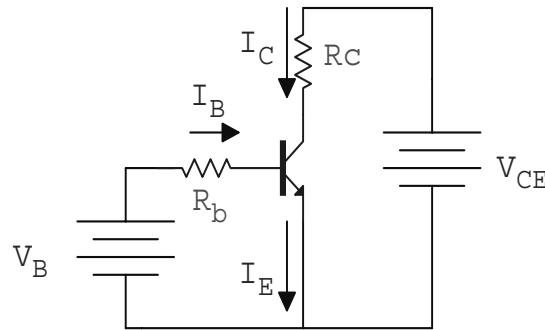


Figura 6.2: Transistor polarizzato in modo da lavorare come amplificatore, nella configurazione emettitore-comune. Sono presenti la resistenza di collettore R_C e quella di base R_B . Quest'ultima fa sì che la corrente di base rimanga approssimativamente costante.

In questa configurazione avremo:

$$V_{BE} = V_B - R_b I_B$$

dove $V_{BE} \approx 0.6 \div 0.7 \text{ V}$. Se ad esempio fissiamo $V_B = 2 \text{ V}$, $R_b = 28 \text{ k}\Omega$, avremo:

$$I_B = \frac{2 - 0.6}{28} \text{ mA} = 0.05 \text{ mA}$$

Se ora il transistor avesse un guadagno in corrente $h_{FE} = \beta = 100$, la corrente di collettore I_C sarebbe uguale a 5 mA e quella di emettitore:

$$I_E = I_C + I_B = 5.05 \text{ mA}$$

Ammettendo che sia $V_{CE} = 10 \text{ V}$ ed $R_c = 1 \text{ k}\Omega$, la tensione sul collettore sarà:

$$V_O = 10 - 5 = 5 \text{ V}$$

Se ora aggiungessimo in serie a V_B una tensione variabile (ad esempio sinusoidale), piccola rispetto a V_B , ad esempio una tensione avente un'ampiezza di 0.5 V, I_B varierà tra:

$$(I_B)_{max} = \frac{2.5 - 0.6}{28} \text{ mA} = 0.068 \text{ mA}$$

e

$$(I_B)_{min} = \frac{1.5 - 0.6}{28} \text{ mA} = 0.032 \text{ mA}$$

dalle caratteristiche del diodo. È proprio tale piccola variazione di V_{BE} a causare la variazione di corrente nel transistor.

con conseguenti variazioni di I_C comprese tra:

$$(I_C)_{max} = 6.8 \text{ mA}$$

e:

$$(I_C)_{min} = 3.2 \text{ mA}$$

e di V_O comprese tra:

$$(V_O)_{max} = (10 - 3.2) \text{ V} = 6.8 \text{ V}$$

e:

$$(V_O)_{min} = (10 - 6.8) \text{ V} = 3.2 \text{ V}$$

La variazione del segnale di tensione in uscita è:

$$\Delta V_O = (V_O)_{max} - (V_O)_{min} = 3.6 \text{ V}$$

mentre quella del segnale di tensione in ingresso è:

$$\Delta V_i = 0.5 - (-0.5) \text{ V} = 1 \text{ V}$$

ed il guadagno in tensione:

$$G_V = \frac{\Delta V_O}{\Delta V_i} = 3.6$$

Dobbiamo osservare che quando il segnale applicato in ingresso aumenta, la tensione in uscita diminuisce (e viceversa). Abbiamo cioè a che fare con un *amplificatore invertente*. Il valore ottenuto (3.6) è quindi il modulo di G_V , che è negativo.

Notiamo che il numeratore nell'espressione del guadagno dipende dal valore scelto per R_c . Se R_c fosse 1.4 k anzichè 1 K, avremmo infatti:

$$(V_O)_{max} = (10 - 3.2 \cdot 1.4) \text{ V} = 5.52 \text{ V}$$

e:

$$(V_O)_{min} = (10 - 6.8 \cdot 1.4) \text{ V} = 0.48 \text{ V}$$

per cui:

$$G_V = \frac{\Delta V_O}{\Delta V_i} = 5.04$$

Osserviamo che, se cercassimo di aumentare ulteriormente il guadagno scegliendo un valore di R_c ancora più alto, la tensione sul collettore scenderebbe a valori prossimi a zero o negativi. In tali condizioni il transistor non sarebbe più polarizzato in zona attiva.

Prendiamo ad esempio $R_c = 2.2 \text{ k}\Omega$. In assenza di segnale avremo $I_C = 5 \text{ mA}$ e quindi:

$$V_C = 10 - 5 \cdot 2.2 = (10 - 11) \text{ V} = -1 \text{ V}$$

In tali condizioni, la giunzione base-collettore viene ad essere polarizzata con una tensione $V_B - V_C = V_B - V_E + V_E - V_C = 0.6 + 1 = 1.6 \text{ V}$. Vediamo che ora sia

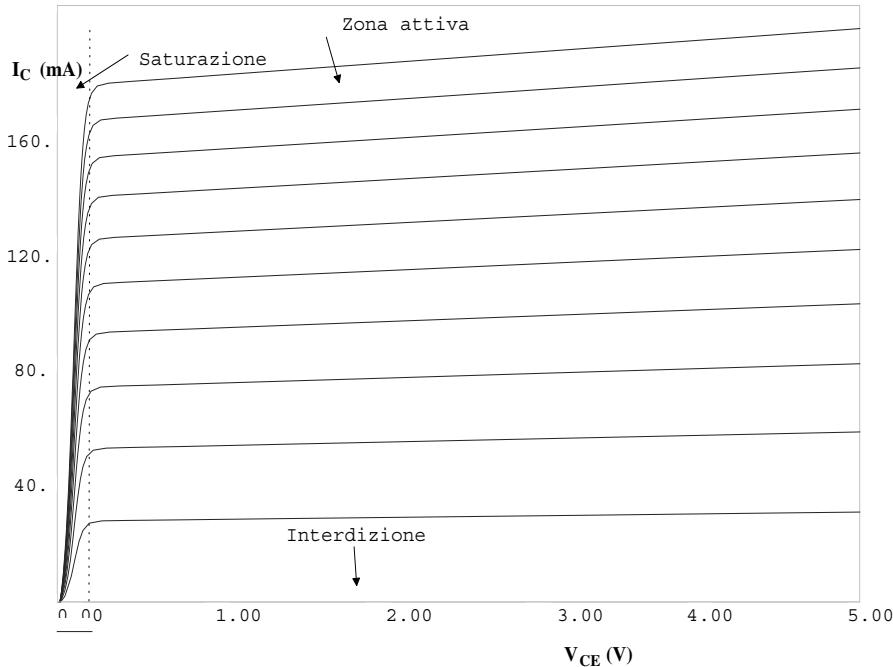


Figura 6.3: Caratteristiche di uscita del transistor bipolare. Sono indicate la *zona di saturazione*, quella *di interdizione* e quella *attiva*

la giunzione base-emettitore che quella base-collettore vengono ad essere polarizzate direttamente. Il transistor in tale condizione è “in saturazione”.

Poiché entrambi i diodi si assesteranno con tensioni di circa V_γ , avremo $V_C - V_E \approx 0$ V.

La zona di saturazione è caratterizzata, come è possibile vedere sulle caratteristiche del transistor (figura 6.3), da valori di I_B maggiori di quelli che, a parità di I_C , competono al medesimo transistor quando esso lavora in zona attiva.

Da un punto di vista pratico, un transistor può esser considerato in saturazione se è:

$$I_B \gg \frac{I_C}{\beta}$$

Se la giunzione base-emettitore è polarizzata inversamente (cioè se $V_{BE} < V_\gamma$), il transistor è “interdetto”. Elettroni non fluiscono più dall'emettitore nella base e di conseguenza la corrente nel transistor scende a valori prossimi a zero. In tali condizioni, se la configurazione è quella CE, tutta la tensione applicata al collettore è presente in uscita. Al contrario, come visto, se il transistor è in saturazione, $V_{CE} \approx 0$ (in realtà $V_{CE} \leq 0.2$ V) e quindi $V_O \cong (0 \div 0.2)V$.

Nei circuiti digitali il transistor viene spesso fatto lavorare nei due stati d’interdizione ($V_O \approx V_{CC}$) e di saturazione ($V_O \approx 0$ V) che vengono associati rispettivamente allo stato logico 1 ed allo stato logico 0.

La figura 6.4 mostra un tipico schema in cui il transistor è adoperato come amplificatore. Esso lavora quindi nella zona “lineare” delle caratteristiche.

La parte superiore della figura 6.5 mostra il segnale applicato in ingresso insieme al segnale misurato ai capi di R_L (uscita). La frequenza del segnale sinusoidale

applicato è 5 kHz e l'ampiezza ± 1 V. Come si vede, il segnale in uscita è invertito rispetto a quello in ingresso ed ha un'ampiezza di circa 3.5 V. Il grafico inferiore nella figura mostra l'andamento della tensione misurata tra base ed emettitore.

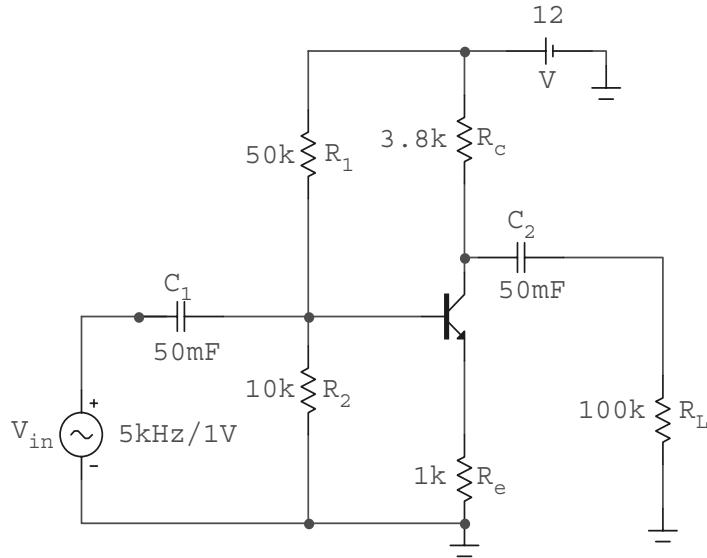


Figura 6.4: Amplificatore a transistor bipolare nella configurazione emettitore-comune. Le resistenze R_1 ed R_2 mantengono costante la tensione di base

Riassumendo quanto visto in questa sezione, un transistor può esser adoperato come elemento di un circuito logico, nel qual caso esso vien fatto lavorare nello stato di saturazione (differenza di potenziale tra collettore ed emettitore nulla) o d'interdizione (corrente di collettore nulla). Nel primo caso, mostrato in figura 6.6(a), la tensione di collettore verrà ad essere uguale a circa $(0.1 \div 0.2)$ V ed il relativo stato corrisponderà al livello logico “basso”. Nel secondo caso, illustrato in figura 6.6(b), la tensione di collettore verrà ad essere uguale a quella di alimentazione ed il relativo stato corrisponderà al livello logico “alto”.

Alternativamente, il transistor può esser adoperato come amplificatore. In tal caso esistono tre diverse possibilità, che più avanti analizzeremo in dettaglio:

1. Nella configurazione “emettitore comune” o CE, mostrata nella parte in alto a sinistra di figura 6.7, il transistor funziona da amplificatore (invertente) di tensione, con un buon guadagno anche in corrente.
2. Nella configurazione “base comune” o CB, mostrata nella medesima figura, il transistor funziona da amplificatore (non invertente) di tensione, con un basso guadagno in corrente.
3. Nella configurazione “collettore comune” o CC, anche nota come “inseguitore di emettitore” (EF), in basso nella figura, il transistor ha un elevato guadagno in corrente, ma nessun guadagno in tensione.

L'uso del transistor come amplificatore sarà discusso nel capitolo 8. Quello come elemento di circuiti logici nel capitolo 11. Nel resto di questo capitolo analizzeremo

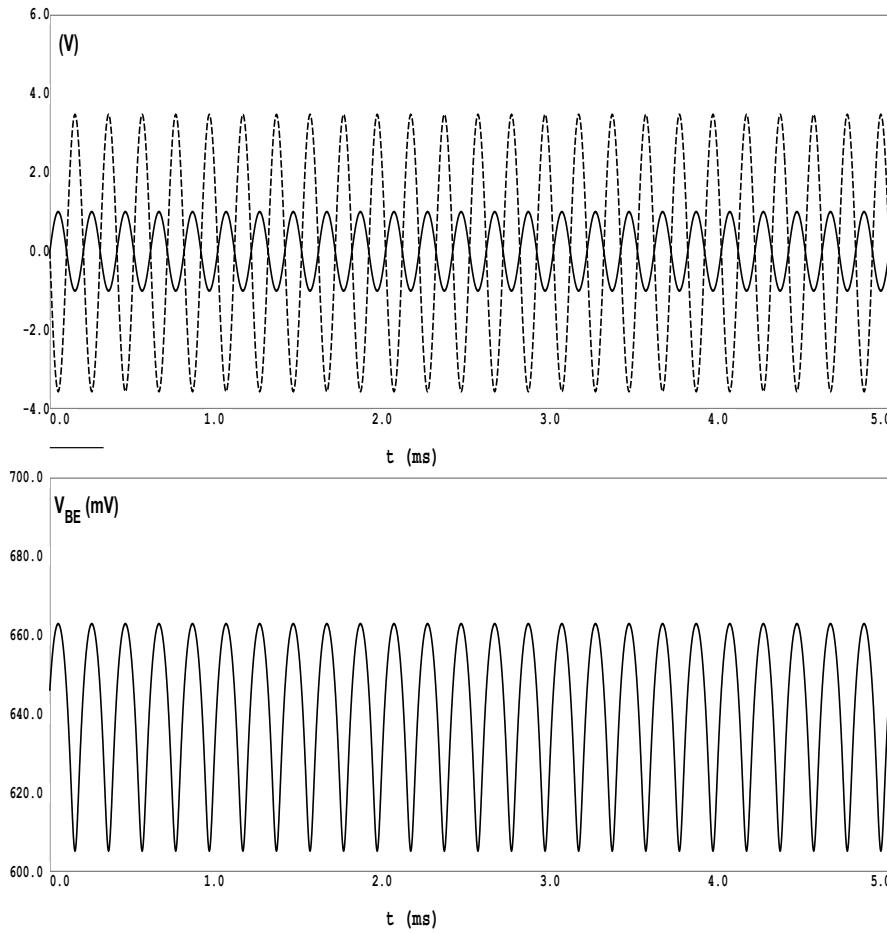


Figura 6.5: Nel grafico superiore la sinusoide tratteggiata mostra il segnale sinusoidale (ampiezza circa 1 V) applicato all'ingresso del transistor di figura 6.4. La sinusoide a tratto solido è il segnale ai capi di R_L . Il grafico inferiore mostra l'andamento della tensione misurata tra base ed emettitore

i metodi comunemente adoperati per fissare il punto di lavoro del transistor, una volta scelta la configurazione, nonché i “circuiti equivalenti” adoperati per calcolare la risposta di un amplificatore a transistor a segnali variabili di piccola ampiezza. Discuteremo anche alcuni particolari tipi di transistor e di combinazioni di transistor.

6.2 Il transistor in zona attiva

Come visto, in zona attiva la corrente di collettore è, in prima approssimazione, legata alla corrente di base da una relazione lineare:

$$i_c = \beta i_b \quad (6.1)$$

dove $\beta = h_{fe} \approx h_{FE}$, è il guadagno in corrente per piccoli segnali.

Adoperiamo le seguenti convenzioni:

- i_b = componente variabile della corrente di base;

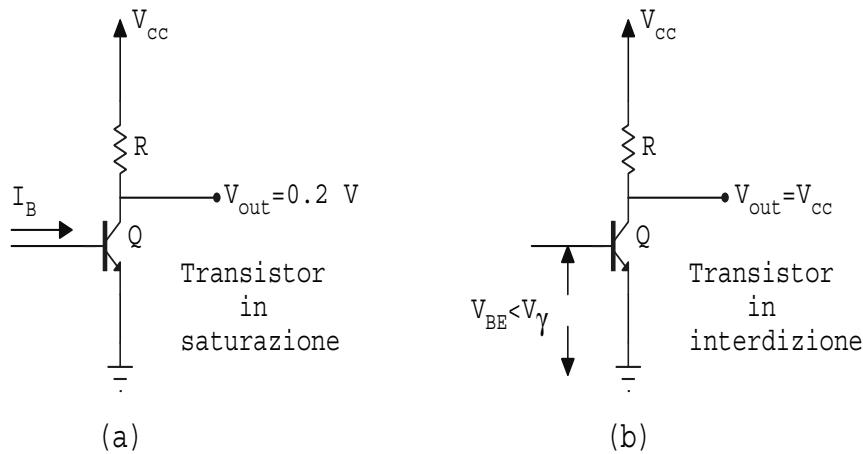


Figura 6.6: Il transistor bipolare come elemento di circuito logico. A sinistra vediamo il transistor in saturazione (uscita bassa=stato logico 0) ; a destra il medesimo transistor è in interdizione (uscita alta=stato logico 1)

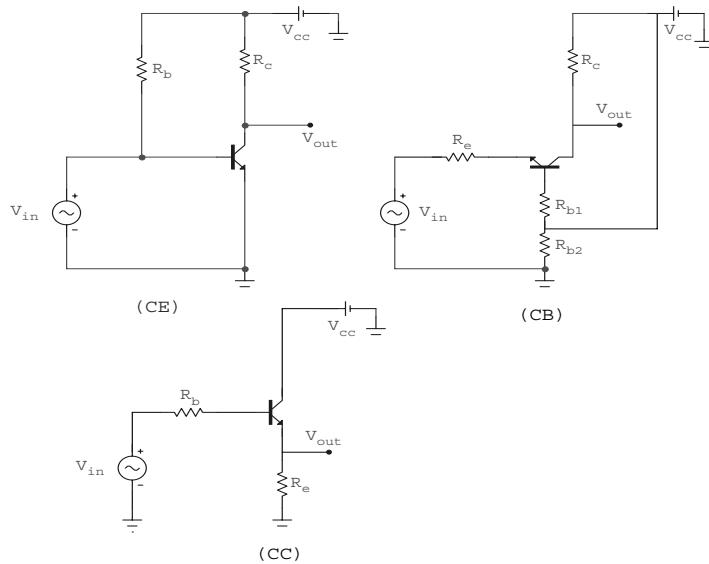


Figura 6.7: La configurazione in alto a sinistra mostra una tipica configurazione in cui il transistor bipolare è adoperato nella configurazione *emettitore-comune*. Quella in alto a destra è la configurazione *base-comune*. La configurazione in basso è quella *collettore-comune* o anche *inseguitore di emettitore*

- I_B = componente continua (quiescente) della corrente di base;
 - i_B = corrente di base totale $i_B = I_B + i_b$.

con analoghi simboli per le correnti di collettore e di emettitore.
Analogamente per le tensioni:

 - v_{ce} = componente variabile della tensione collettore-emettitore

- V_{CE} = componente continua della tensione collettore-emettitore;
- v_{CE} = tensione totale: $v_{CE} = V_{CE} + v_{ce}$.

Un “circuito equivalente” che descrive la relazione lineare 6.1 è quello indicato in figura 6.8, relativo alla configurazione CE.

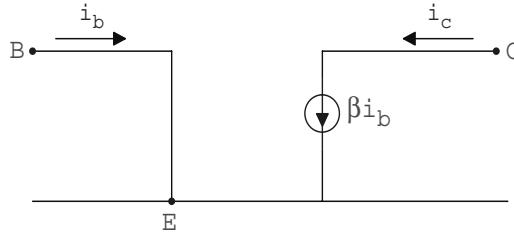


Figura 6.8: Circuito equivalente semplificato per il transistor bipolare che lavora in zona attiva. βi_b è un *generatore dipendente* di corrente

Nel circuito di figura sono indicati i terminali “esterni” di collettore, emettitore e base ed è presente nella maglia d’uscita un generatore ideale di corrente βi_b (un generatore *dipendente*, in cui appunto la corrente di maglia è funzione della corrente presente nella maglia d’ingresso, i_b).

Il circuito equivalente disegnato è troppo grossolano, poiché esso non tiene conto di alcune proprietà fisiche del transistor. Vediamo di esaminarle.

La prima cosa di cui dobbiamo tener conto è la resistenza associata al diodo base- emettitore. Come sappiamo, un tale diodo ha una “resistenza differenziale” (definita come $dv/di = r_e$) data da:

$$r_e = \frac{V_T}{I_E} \approx \frac{26}{I_E(mA)} (\Omega)$$

dove nel nostro caso I_E è la corrente di emettitore. “Guardiamo” ora dentro la base e chiediamoci quale sia la resistenza vista. In altre parole, immaginiamo che una variazione di potenziale ΔV_B sia applicata alla base e misuriamo la conseguente variazione ΔI_B della corrente. La resistenza “vista” guardando nella base è:

$$r_{b'e} = \frac{\Delta V_B}{\Delta I_B} = \frac{\Delta V_B}{\Delta i_E} \cdot \frac{\Delta i_E}{\Delta i_B} \cong \frac{\Delta V_B}{\Delta i_E} \cdot \beta$$

Ma ora vediamo che $\Delta V_B \cong \Delta V_{BE}$, per cui:

$$r_{b'e} = \frac{\Delta V_{BE}}{\Delta i_E} \cdot \beta = \beta r_e = \beta \frac{V_T}{I_E}$$

Questa è quindi la resistenza “vista guardando nella base”.

In realtà, a questo termine, associato alla resistenza del diodo base-emettitore, c’è da aggiungere un ulteriore termine, indipendente da I_E e da β , dovuto alla resistenza intrinseca della base. Questo termine, noto come la “base spreading resistance” ed indicato con $r_{bb'}$, vale mediamente $\approx 100 \Omega$. In definitiva quindi, la resistenza “vista

guardando nella base” è pari alla somma dei due termini: $r_{b'e} + r_{bb'}$. Per una corrente I_E tipica di 1 mA ed un β di 100 , vediamo che

$$r_{b'e} \approx 100 * 25/1 = 2500 \Omega$$

cioè è molto maggiore di $r_{bb'}$.

Il circuito equivalente disegnato in precedenza può, tenendo conto della resistenza di base, esser ora modificato come mostrato in figura 6.9, dove abbiamo introdotto un parametro $h_{ie} = r_{b'e} + r_{bb'}$.

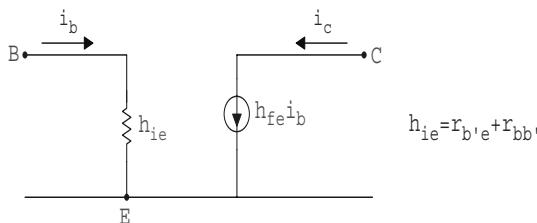


Figura 6.9: Circuito equivalente a parametri h del transistor adoperato in zona attiva, nella configurazione emettitore-comune

Il range di valori che h_{ie} ed h_{fe} assumono per un dato transistor è normalmente fornito dai costruttori.

6.2.1 L'effetto Early

Un ulteriore aspetto fisico nel funzionamento del transistor deve a questo punto esser preso in considerazione. Sappiamo che, in un transistor npn che lavora in zona attiva, una frazione α degli elettroni che dall'emettitore entrano in base (con giunzione base-emettitore polarizzata direttamente) passa nel collettore (la giunzione base-collettore è polarizzata inversamente). Una frazione $(1 - \alpha)$ è catturata dalle lacune presenti in base e contribuisce alla corrente di base. Notiamo che, essendo il droggaggio della base non elevato e la larghezza della base stretta, il parametro α è vicino ad 1 . Il β del transistor, definito come: $\beta = \alpha/(1 - \alpha)$, sarà quindi elevato. Se un qualche meccanismo interviene a ridurre la “larghezza effettiva” della base, diminuirà la probabilità che un elettrone sia catturato nella base, α diverrà ancora più vicino ad 1 e β aumenterà ulteriormente. Ad esempio, se α passa da 0.995 a 0.996 , β passerà da 199 a 249 . Una variazione di una parte su mille in α si traduce in una variazione del 25% in β !

Un meccanismo che causa simili variazioni è presente nei transistor, per effetto della polarizzazione inversa della giunzione base-collettore. Infatti, sappiamo che l'effetto della polarizzazione inversa in un diodo è quello di un allargamento della zona di svuotamento in prossimità della giunzione. Nel nostro caso, all'aumentare della tensione di collettore, aumenta la polarizzazione inversa della giunzione base-collettore e ciò causa un allargamento della zona di svuotamento nella base. Ciò diminuisce la larghezza effettiva della base e diminuisce quindi la probabilità che un elettrone immesso in base dall'emettitore sia catturato da una lacuna; in altre parole

diminuisce la grandezza che abbiamo chiamato $(1 - \alpha)$, ed aumenta α e quindi β . In altri termini, *il guadagno del transistor aumenta, con I_B costante, all'aumentare di V_{CE}* . Ciò fa sì che le caratteristiche d'uscita non siano delle rette orizzontali, ma inclinate, come mostrato in figura 6.10.

Il meccanismo che abbiamo appena illustrato va sotto il nome di *effetto Early*. I prolungamenti della parte rettilinea delle caratteristiche incontrano l'asse V_{CE} in corrispondenza di un valore V_A della tensione V_{CE} , chiamata “tensione Early”, come si vede in figura. Questa vale qualche centinaio di Volt.

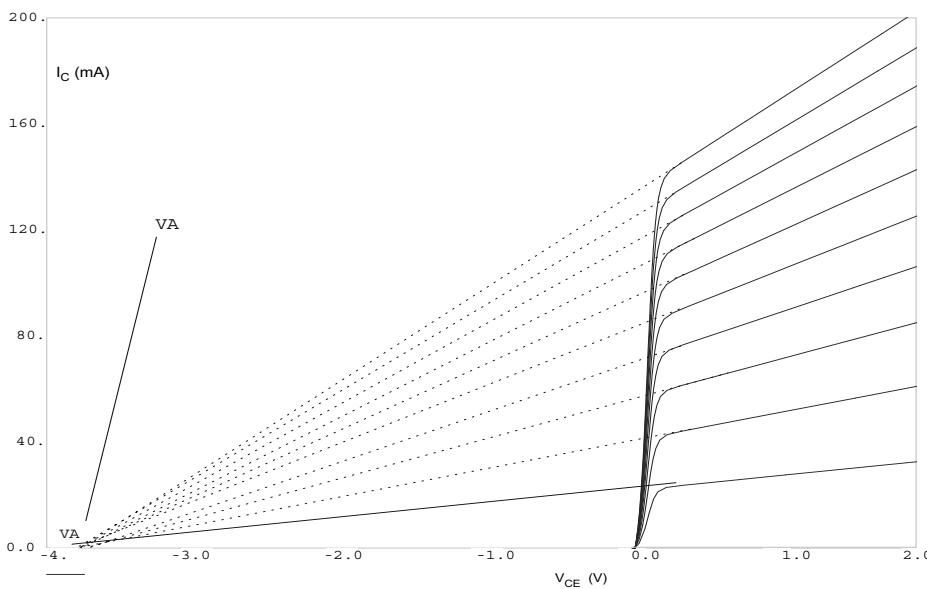


Figura 6.10: Illustrazione dell'effetto Early: le caratteristiche di uscita del transistor convergono verso un punto situato sull'asse negativo V_{CE} . Il valore V_{CE} di tale punto è la tensione Early V_A

Da un'analisi accurata del processo si trova che tale effetto può esser descritto sostituendo alla (6.1) la seguente equazione:

$$i_c = \beta i_b + \frac{1}{r_o} v_{ce}$$

Questa corrisponde a sostituire il generatore ideale di corrente nel circuito d'uscita, con un generatore in parallelo ad una resistenza r_o . Ciò è mostrato in figura 6.11.

La resistenza r_o ha valori molto grandi (centinaia di $k\Omega$). Spesso è quotato il suo inverso, $h_{oe} = 1/r_o$. Val la pena di menzionare che le sottoscritte “e” per i parametri h stanno ad indicare che esse si riferiscono alla configurazione “emettitore comune” (CE). La lettera h è l'iniziale di “hybrid” e sta a ricordare il fatto che i parametri h_{ie} , h_{oe} , h_{fe} sono “ibridi”, nel senso che hanno dimensioni fisiche diverse: h_{ie} è una resistenza, h_{oe} una conduttanza, h_{fe} è adimensionale.

L'effetto Early ha una seconda conseguenza, finora ignorata: all'aumentare della polarizzazione inversa base-collettore si ha una diminuzione della larghezza effettiva della base W e quindi una diminuzione della corrente di ricombinazione in base. Ciò implica che, a parità di valori di V_{BE} la corrente di base diminuisce all'aumentare di V_{CE} (o, a parità di corrente di base, V_{BE} aumenta). Vedi figura 6.12.

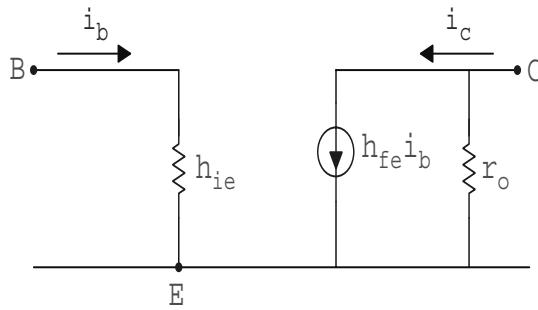


Figura 6.11: Modello a parametri h del transistor bipolare. Sono presenti i parametri h_{ie} , $h_{oe}=1/r_0$ ed h_{fe}

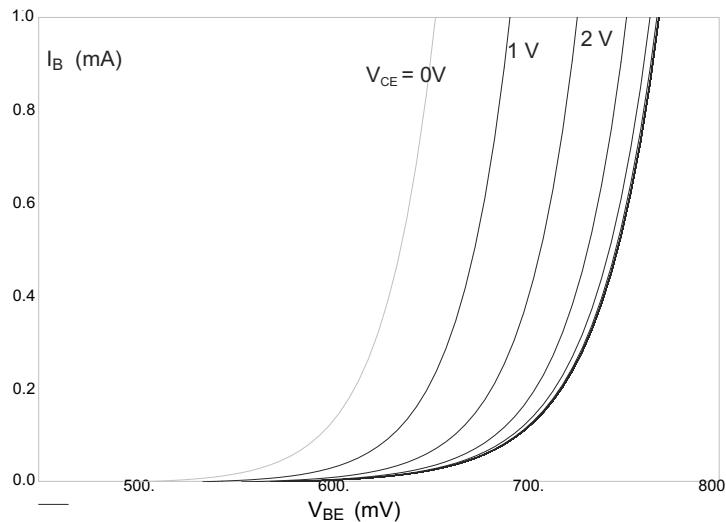


Figura 6.12: Caratteristiche d'ingresso del transistor bipolare: corrente di base I_B in funzione di V_{BE} , per valori diversi di V_{CE}

Ciò può esser parametrizzato introducendo, un ulteriore parametro: un generatore di tensione nella maglia d'ingresso, che genera una tensione $v'_b = h_{re}v_{ce}$ dipendente dalla tensione d'uscita.

Il circuito completo diventa ora quello di figura 6.13:

Valori tipici dei parametri ibridi nella configurazione “emettitore comune” sono:

$$h_{ie} \approx 1 \text{ k}\Omega, \quad h_{re} \approx 10^{-4}, \quad h_{fe} \approx 100, \quad h_{oe} \approx 10^{-5} \Omega^{-1}$$

6.3 Il modello a π -ibrido (Giacoletto)

Il modello che va sotto il nome di *Giacoletto* è quello di figura 6.14. Questo non ha il generatore di tensione $g_{re}v_{ce}$, ma in esso l'effetto Early è descritto dalla resistenza $r_{b'c}$ che unisce il nodo interno alla base B' con il collettore.

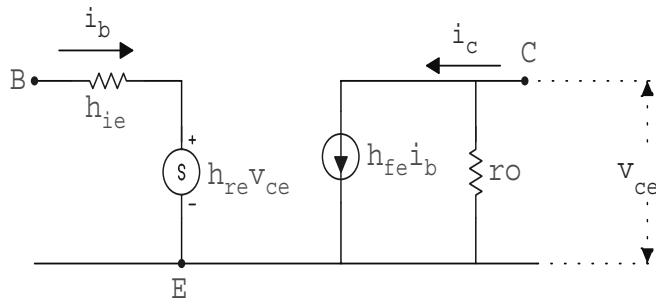


Figura 6.13: Modello completo a parametri h ibridi del transistor bipolare

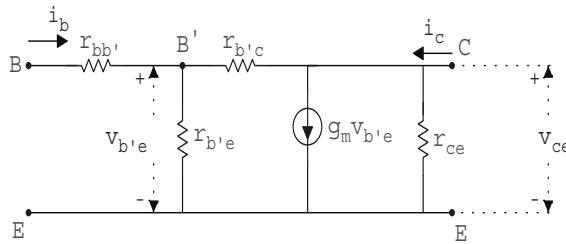


Figura 6.14: Il modello di Giacoletto del transistor bipolare

$r_{bb'}$ è la resistenza presente tra il terminale della base ed il contatto ohmico interno alla base stessa; $r_{b'b}$ è la resistenza presente tra il contatto ohmico interno alla base e l'emettitore.

Valori tipici dei parametri, a temperatura ambiente sono, per una corrente quiescente $I_C = 1.3 \text{ mA}$:

$$r_{bb'} = 100 \Omega, r_{b'e} = 2 k\Omega, r_{b'c} = 20 M\Omega, r_{ce} = 200 k\Omega$$

Si può far vedere che la transconduttanza g_m è funzione solo di $|I_C|$; a temperatura ambiente:

$$g_m = \frac{|I_C|(mA)}{V_T} = \frac{|I_C|(mA)}{26} (\text{mA/V})$$

che, per $I_C = 1.3 \text{ mA}$ vale 50 mA/V .

Facciamo vedere ora che tutte le componenti resistive in questo modello possono essere ottenute dai parametri h nella configurazione CE.

6.3.1 Conduttanza d'ingresso

Questa è $g_{b'e} = 1/r_{b'e}$. Dai valori numerici dati, si vede che $r_{b'c} \gg r_{b'e}$. Quindi la corrente di base i_b fluisce in $r_{b'e}$ e:

$$v_{b'e} = i_b r_{b'e}$$

La corrente di collettore a circuito chiuso è data da:

$$i_c = g_m v_{b'e} \approx g_m i_b r_{b'e} = h_{fe} i_b$$

da cui:

$$r_{b'e} = \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{h_{fe}}{|I_C|} V_T$$

o anche:

$$g_{b'e} = \frac{g_m}{h_{fe}}$$

notiamo che, nel range di correnti in cui h_{fe} rimane costante, $r_{b'e}$ è direttamente proporzionale alla temperatura ed inversamente proporzionale alla corrente quiescente I_C .

6.3.2 Conduttanza di feedback

Con l'input a circuito aperto, h_{re} è definito come il guadagno inverso di tensione. Ponendo $i_b = 0$ nel circuito a parametri h:

$$h_{re} = \frac{v_{b'e}}{v_{ce}} = \frac{r_{b'e}}{(r_{b'e} + r_{b'c})}$$

da cui:

$$r_{b'e} (1 - h_{re}) = h_{re} r_{b'c}$$

poichè $h_{re} \ll 1$, con buona approssimazione si ha:

$$r_{b'e} = h_{re} r_{b'c}$$

o:

$$g_{b'c} = h_{re} g_{b'e}$$

poichè $h_{re} \approx 10^{-4}$, si vede che: $r_{b'c} \gg r_{b'e}$.

6.3.3 Base-Spreading resistance

La resistenza d'ingresso con l'output in corto-circuito è h_{ie} . In queste condizioni $r_{b'e}$ è in parallelo con $r_{b'c}$. Poichè $r_{b'c} \gg r_{b'e}$, ne segue che $r_{b'e} \parallel r_{b'c} \cong r_{b'e}$, e quindi:

$$h_{ie} = r_{bb'} + r_{b'e}$$

$$r_{bb'} = h_{ie} - r_{b'e}$$

facendo uso dell'espressione ottenuta in precedenza per $r_{b'e}$, si ha che:

$$h_{ie} = r_{bb'} = h_{fe} \frac{V_T}{|I_C|} \approx h_{fe} \frac{V_T}{|I_C|}$$

poichè di solito $r_{b'e} \gg r_{bb'}$.

6.3.4 Conduttanza d'uscita

Nel circuito a parametri h, la conduttanza d'uscita è h_{oe} con l'input a circuito aperto. Per $i_b = 0$ avremo allora:

$$i_c = \frac{v_{ce}}{r_{ce}} + \frac{v_{ce}}{r_{b'c} + r_{b'e}} + g_m v_{b'e}$$

con $i_b = 0$ abbiamo $v_{b'e} = h_{re} v_{ce}$, e dall'equazione appena scritta si ha:

$$h_{oe} = \frac{i_c}{v_{ce}} = \frac{1}{r_{ce}} + \frac{1}{r_{b'c}} + g_m h_{re}$$

dove si è fatto uso del fatto che $r_{b'c} \gg r_{b'e}$. Facendo ora uso del fatto che:

$$g_m = h_{fe} g_{b'e}$$

e che:

$$g_{b'e} = \frac{g_{b'c}}{h_{re}}$$

otteniamo:

$$h_{oe} = g_{ce} + g_{b'c} + h_{fe} g_{b'e} h_{re} = g_{ce} + g_{b'c} + \frac{h_{fe} g_{b'e} g_{b'c}}{g_{b'e}}$$

cioè:

$$g_{ce} = h_{oe} - (1 + h_{fe}) g_{b'c}$$

Ad alte frequenze, i parametri h debbono esser considerati funzioni complesse della frequenza. Quindi il modello a parametri h non è utile ad analizzare amplificatori di alta frequenza.

Si può tener conto del comportamento di un transistor ad alte frequenze, nell'ambito del modello a parametri π -ibrido, come segue: viene aggiunta tra E e B' la capacità di diffusione dell'emettitore, e tra C e B' la capacità di transizione del collettore.

A basse frequenze è invece più conveniente usare il modello a parametri h.

6.4 La transconduttanza

Un modello che è spesso adoperato, in alternativa a quello a parametri h e che, a basse frequenze, è equivalente a questo, è quello che fa uso della transconduttanza g_m . Questa è definita come:

$$g_m = \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta v_{BE}} \right|_{v_{CE} \equiv V_{CEQ} = \text{cost.}} = \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \right|_{v_{ce}=0}$$

dove $v_{CE} = \text{costante}$ implica che la parte variabile v_{ce} di v_{CE} è stata cortocircuitata (idealmente con un condensatore di grossa capacità). Da questa si ottiene: $i_C = g_m v_{BE}$.

Il modello che fa uso della transconduttanza è simile a quello a π -ibrido, con l'eliminazione di $r_{b'c}$ (legato all'effetto Early). Il relativo diagramma è mostrato in figura 6.15, dove $v_\pi = v_{BE}$.

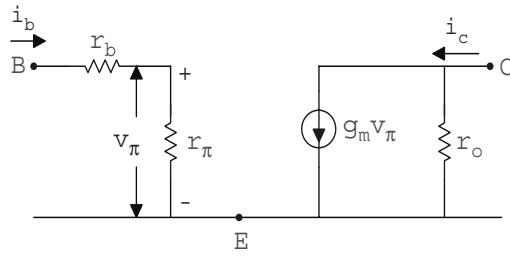


Figura 6.15: Modello del transistor bipolare che fa uso della transconduttanza g_m

poichè è: $v_\pi = r_\pi i_b$ avremo:

$$i_c = g_m v_\pi = g_m r_\pi i_b$$

per cui vediamo che $g_m r_\pi$ corrisponde ad h_{fe} nel modello a parametri h.
 g_m può esser calcolato a partire dalla corrente quiescente $i_C = I_{CQ}$. Infatti è:

$$i_C = \alpha i_E$$

da cui:

$$g_m = \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \right|_{v_{ce}=0} = \left. \alpha \frac{\partial i_E}{\partial v_{BE}} \right|_{v_{ce}=0}$$

dove la derivata $\frac{\partial i_E}{\partial v_{BE}}$ non è altro che la conduttanza differenziale del diodo:

$$\frac{\partial i_E}{\partial v_{BE}} = g_D = \frac{I_{EQ}}{V_T} \cong \frac{I_{EQ}}{26} (\Omega^{-1})$$

per cui:

$$g_m = \alpha \frac{I_{EQ}}{26} = \frac{I_{CQ}}{26} (\Omega^{-1})$$

Inoltre, la resistenza d'ingresso r_i è uguale a:

$$r_i = r_b + r_\pi = h_{ie}$$

Vediamo in definitiva che, tra i parametri g_m , r_b , ed r_π del presente modello e quelli del modello a parametri h, esistono le relazioni:

$$h_{ie} = r_b + r_\pi$$

$$h_{fe} = g_m r_\pi$$

$$h_{oe} = 1/r_o$$

6.5 Le configurazioni base-comune e collettore comune

La configurazione che abbiamo fin qui esaminato era quella in cui l'emettitore era comune al circuito d'ingresso ed a quello d'uscita (configurazione common-emitter o CE). Il modello a parametri h in tale configurazione era caratterizzato dai parametri: h_{ie} , h_{fe} , h_{re} , h_{oe}

Le configurazioni base-comune (CB) e collettore comune (CC), schematicamente indicate in figura 6.16 (a)-(b) (dove sono state omesse le resistenze di polarizzazione), possono essere descritte facendo uso di un modello formalmente identico, con la sola sostituzione dei parametri con la sottoscritta "e", con altri parametri, aventi la sottoscritta "b" (base comune o CB) o "C" (collettore comune o CC)

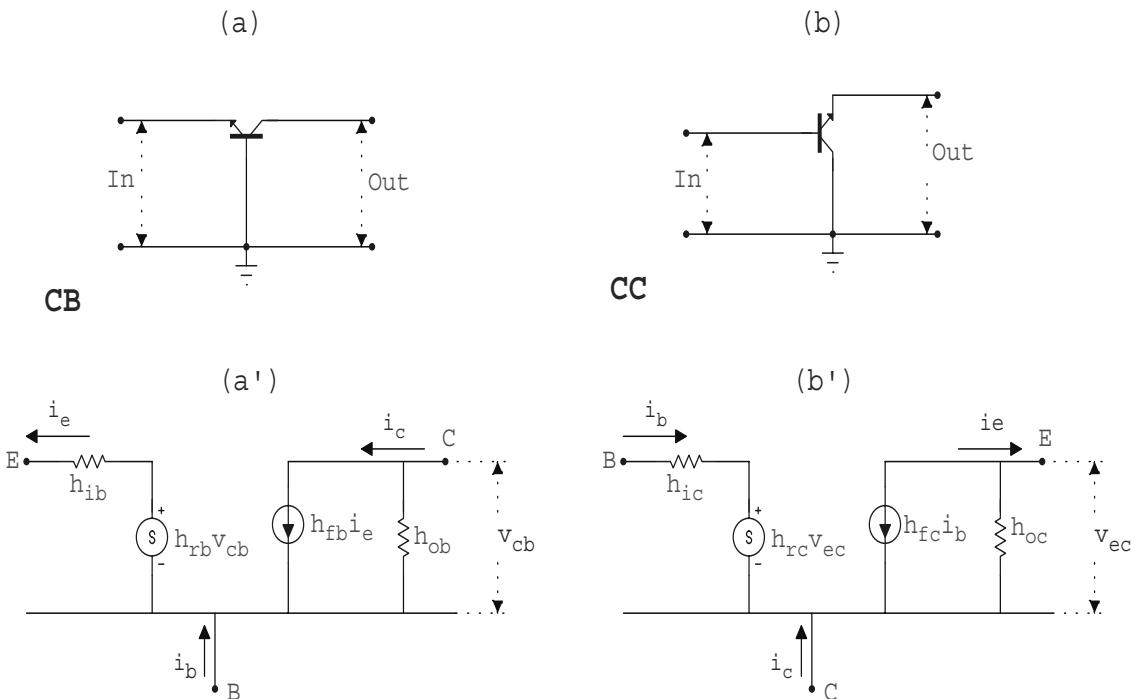


Figura 6.16: Configurazione base-comune (a) e collettore-comune (b) per l'amplificatore a transistor bipolare. In basso sono mostrati i relativi modelli a parametri h: (a') base-comune, (b') collettore-comune

Esistono delle relazioni tra i parametri h nelle tre configurazioni. Cominciamo con l'esaminare la configurazione CB.

A tale scopo, scriviamo le relazioni tra correnti e tensioni nella configurazione CE. Le convenzioni adoperate per i segni delle tensioni ed i versi delle correnti sono quelle mostrate in figura 6.17

Le relazioni sono le seguenti:

$$i_c = h_{fe} i_b + h_{oe} v_{ce} \quad (6.2)$$

$$v_{be} = h_{ie} i_b + h_{re} v_{ce} \quad (6.3)$$

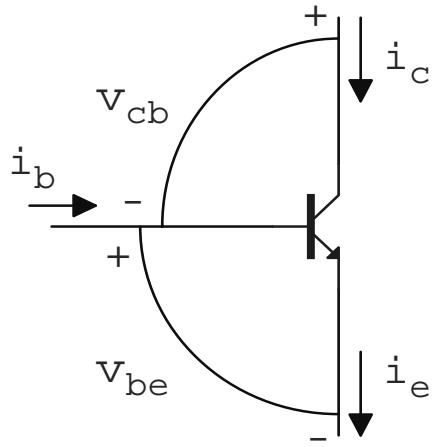


Figura 6.17: Convenzione adoperata nel testo per i segni di tensioni e correnti del transistor

L'analogia relazione, nella configurazione base comune, con riferimento al circuito equivalente mostrato in figura 6.16(a') è data dalle equazioni:

$$i_c = h_{fb}i_e + v_{cb}h_{ob} \quad (6.4)$$

$$v_{eb} = -h_{ib}i_e + h_{rb}v_{cb} \quad (6.5)$$

dove occorre notare che:

$$i_e = i_c + i_b \quad (6.6)$$

$$v_{ce} = v_{cb} + v_{be} \quad (6.7)$$

$$v_{be} = -v_{eb} \quad (6.8)$$

A partire da tali relazioni è facile dimostrare le seguenti relazioni approssimate:

$$h_{ib} = \frac{-h_{ie}}{1 + h_{fe}} \quad (6.9)$$

$$h_{fb} = \frac{h_{fe}}{1 + h_{fe}} \quad (6.10)$$

$$h_{ob} = \frac{h_{oe}}{1 + h_{fe}} \quad (6.11)$$

$$h_{rb} = -h_{re} + \frac{h_{ie}h_{oe}}{1 + h_{fe}} \quad (6.12)$$

Per ottenere tali relazioni, sostituiamo nelle equazioni (6.2), (6.3) le (6.6), (6.7), (6.8):

$$i_c = h_{fe}i_e - h_{fe}i_c + v_{cb}h_{oe} - v_{eb}h_{oe}$$

$$v_{be} = -v_{eb} = h_{ie}i_e - h_{ie}i_c + h_{re}v_{cb} - h_{re}v_{eb}$$

dalla seconda di queste equazioni segue:

$$v_{eb} = \frac{-h_{ie}}{1 - h_{re}} i_e + \frac{h_{ie}}{1 - h_{re}} i_c - \frac{h_{re}}{1 - h_{re}} v_{cb} \quad (6.13)$$

mentre la prima fornisce:

$$i_c (1 + h_{fe}) = h_{fe} i_e + v_{cb} h_{oe} - v_{eb} h_{oe} \quad (6.14)$$

sostituendo in questa l'espressione di v_{eb} data dalla (6.13) otteniamo:

$$i_c = \frac{h_{fe} + h_{ie} h_{oe} / (1 - h_{re})}{1 + h_{fe} + h_{ie} h_{oe} / (1 - h_{re})} i_e + \frac{h_{oe}}{(1 + h_{fe})(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}} v_{cb} \quad (6.15)$$

e, sostituendo questa nella (6.13):

$$v_{eb} = \frac{h_{ie}}{(1 + h_{fe})(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}} i_e + \frac{h_{ie} h_{oe} - h_{re}(1 + h_{fe})}{(1 + h_{fe})(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}} v_{cb} \quad (6.16)$$

Confrontando le (6.15) e (6.16) con le (6.4), (6.5), otteniamo le relazioni che esprimono in modo esatto i parametri h_{ib} , h_{fb} , h_{rb} , h_{ob} :

$$h_{ib} = \frac{-h_{ie}}{(1 + h_{fe})(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.17)$$

$$h_{fb} = \frac{h_{fe}(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}}{(1 + h_{fe})(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.18)$$

$$h_{rb} = \frac{-h_{re}(1 + h_{fe}) + h_{ie} h_{oe}}{(1 + h_{fe})(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.19)$$

$$h_{ob} = \frac{h_{oe}}{(1 + h_{fe})(1 - h_{re}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.20)$$

Poichè $h_{re} \ll 1$, queste sono, con ottima approssimazione:

$$h_{ib} = \frac{-h_{ie}}{(1 + h_{fe}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.21)$$

$$h_{fb} = \frac{h_{fe} + h_{ie} h_{oe}}{(1 + h_{fe}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.22)$$

$$h_{rb} = \frac{-h_{re}(1 + h_{fe})}{(1 + h_{fe}) + h_{ie} h_{oe}} + \frac{h_{ie} h_{oe}}{(1 + h_{fe}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.23)$$

$$h_{ob} = \frac{h_{oe}}{(1 + h_{fe}) + h_{ie} h_{oe}} \quad (6.24)$$

poichè inoltre tipicamente è $(1 + h_{fe}) \approx h_{fe} \approx 100$ mentre $h_{ie} h_{oe} \cong 0.01$, seguono le relazioni approssimate (6.9) ··· (6.12).

Passiamo ora ad esaminare la configurazione CC, per la quale, con le convenzioni per le correnti e le differenze di potenziale mostrate nelle figure 6.16(b') e 6.17, l'analogo delle equazioni 6.2 e 6.3 sono:

$$i_e = h_{fc}i_b - h_{oc}v_{ec} \quad (6.25)$$

$$v_{bc} = h_{ic}i_b + h_{rc}v_{ec} \quad (6.26)$$

Per trovare le relazioni tra i parametri nelle configurazioni CC e CE, sostituiamo nelle 6.2 e 6.3, le seguenti relazioni:

$$v_{ce} = -v_{ec}$$

$$i_e = i_b + i_c$$

Troviamo:

$$i_e - i_b = h_{fe}i_b + h_{oe}v_{ce} \quad (6.27)$$

$$v_{ce} - v_{cb} = h_{ie}i_b + h_{re}v_{ce} \quad (6.28)$$

cioè:

$$i_e = (h_{fe} + 1)i_b + h_{oe}v_{ce} \quad (6.29)$$

$$-v_{cb} = h_{ie}i_b + (h_{re} - 1)v_{ce} \quad (6.30)$$

da cui:

$$i_e = (h_{fe} + 1)i_b - h_{oe}v_{ec} \quad (6.31)$$

$$v_{bc} = h_{ie}i_b + (1 - h_{re})v_{ec} \quad (6.32)$$

Confrontando queste con le equazioni 6.25 e 6.26 troviamo la corrispondenza cercata:

$$h_{ic} = h_{ie} \quad (6.33)$$

$$h_{fc} = (h_{fe} + 1) \quad (6.34)$$

$$h_{rc} = 1 - h_{re} \quad (6.35)$$

$$h_{oc} = h_{oe} \quad (6.36)$$

6.6 Circuiti di polarizzazione del transistor

Dall'esame delle caratteristiche d'uscita del transistor è possibile, tenendo conto della particolare applicazione voluta (amplificatore, adattatore d'impedenza etc.), stabilire il punto di lavoro, cioè i valori quiescenti di I_C , I_B e V_{CE} nel caso si voglia adottare una configurazione CE. Fissati tali valori, occorrerà fissare un circuito di polarizzazione, cioè un insieme di tensioni e resistenze opportune, tali da stabilire, in assenza di segnale applicato, tali condizioni quiescenti.

Consideriamo come esempio quello di figura 6.18 ed ammettiamo di voler fissare I_C , I_B e V_{CE} a determinati valori quiescenti, che chiameremo I_{CQ} , I_{BQ} e V_{CEQ} .

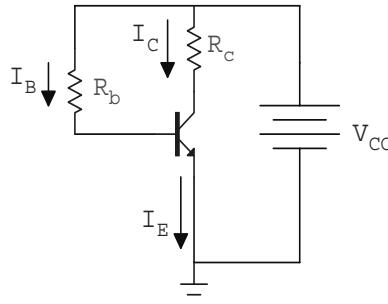


Figura 6.18: Circuito di polarizzazione del transistor: corrente di base costante

Dall'esame del circuito di base otteniamo:

$$V_{CC} - R_b I_{BQ} = V_{BE} \cong 0.7 \text{ V}$$

da cui:

$$R_b = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{I_{BQ}} \quad (6.37)$$

La scelta di V_{CC} non è del tutto libera, poiché il circuito di collettore deve essere scelto in modo tale che sia $I_C = I_{CQ}$ ed inoltre R_c deve essere tale da fornire la retta di carico voluta.

In effetti, dall'analisi del circuito di collettore otteniamo:

$$V_{CC} - R_c I_C - V_{CE} = 0 \quad (6.38)$$

che è l'equazione della retta di carico (vedi figura 6.19)

L'intercetta della retta di carico con l'asse V_{CE} è pari a V_{CC} , la pendenza è $-1/R_c$.

Ovviamente, la retta dovrà essere stata scelta in modo da passare per il punto Q:

$$V_{CEQ} = V_{CC} - R_c I_{CQ}$$

In tal modo, fissati V_{CC} ed R_c , R_b può essere ottenuto dalla (6.37).

Il circuito illustrato come esempio non è conveniente dal punto di vista pratico. Infatti in tale circuito il valore quiescente della corrente di base è fisso e ciò implica che la corrente di collettore $I_C = \beta I_B$, dipenda dal β del transistor. Poiché questo cambia molto tra un transistor ed un altro del medesimo tipo, il circuito di polarizzazione scelto non è molto conveniente. Potrebbe infatti accadere che, scelto un punto di lavoro sulla base delle caratteristiche fornite dal costruttore, e fissata quindi, con il circuito di polarizzazione in esame, una certa corrente di base I_B , ad essa corrisponda per il transistor che si sta realmente adoperando, un valore di I_C molto diverso dal valore di I_{CQ} voluto.

Se il valore di I_{CQ} sale, aumenta la caduta di potenziale ai capi di R_c e diminuisce quindi la tensione sul collettore. Se l'aumento di I_{CQ} è grande, si potrà arrivare ad una situazione in cui il collettore è positivo rispetto alla base: il transistor andrà in saturazione.

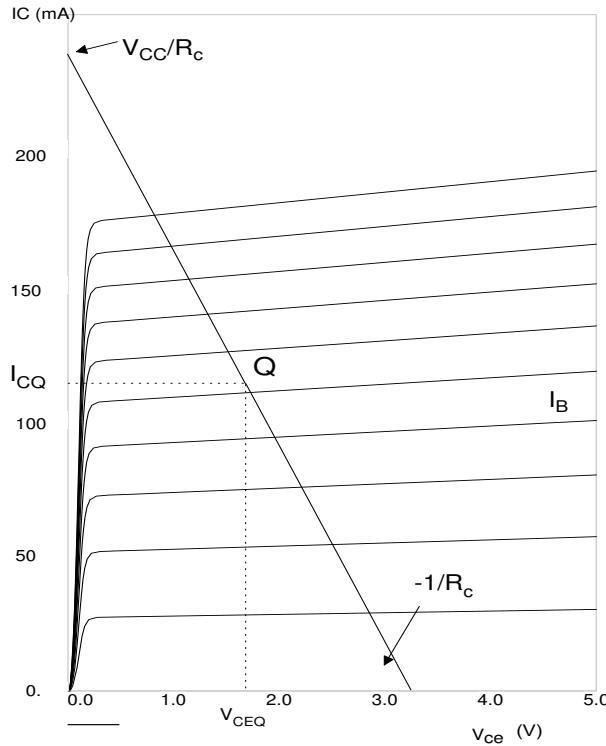


Figura 6.19: Transistor bipolare: caratteristiche d'uscita con sovrapposta la retta di carico. Q indica il punto quiescente di lavoro

Conviene quindi, anzichè mantenere I_B fisso, fare in modo che siano fissi I_C e V_{CE} .

Un secondo motivo per cui non è consigliabile tenere I_B fisso è la dipendenza di I_C , a parità di I_B , dalla temperatura.

In effetti, la corrente di collettore ha anche un termine proporzionale alla corrente inversa di saturazione I_{CO} :

$$I_C = \beta I_B + (\beta + 1) I_{CO}$$

ne segue:

$$\frac{dI_C}{dI_{CO}} = \beta + 1 \approx 100$$

e, poiché I_{CO} raddoppia per ogni 10°C di aumento della temperatura, avremo tipicamente, per un tale aumento di temperatura:

$$\Delta I_C = 2(\beta + 1) I_{CO}$$

dove $I_{CO} \approx 10 \text{ nA}$ a temperatura ambiente (per il silicio). Ne segue:

$$\Delta I_C \cong 200 \times 10 \times 10^{-6} \text{ mA} = 2 \mu\text{A}$$

Anche se tale effetto è piccolo, esso può innescare un processo cumulativo: l'aumento di I_C darà luogo ad un aumento di temperatura, che a sua volta farà aumentare I_C . Il processo è noto come “thermal runaway”, ed esso può portare alla distruzione del transistor o comunque a farlo lavorare fuori dalla zona attiva.

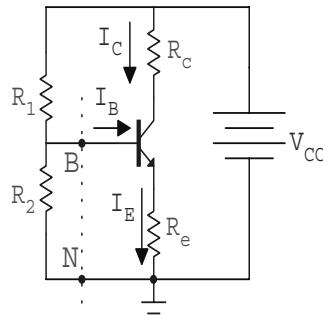


Figura 6.20: Amplificatore a transistor bipolare: circuito di polarizzazione a V_B costante

Un circuito che ovvia a tali inconvenienti è quello di figura 6.20.

In questo circuito, se aumenta I_C , aumenta anche I_E e ciò causa una caduta di potenziale ai capi di R_e , cioè una diminuzione di V_{BE} . Tale diminuzione di V_{BE} causerà una diminuzione della corrente di emettitore (e di base) e quindi una diminuzione di I_C . Questo è un tipico esempio di “reazione negativa”.

Per analizzare tale circuito, sostituiamolo la parte di esso situata a sinistra della linea BN con il suo equivalente di Thevenin (vedi figura 6.21).

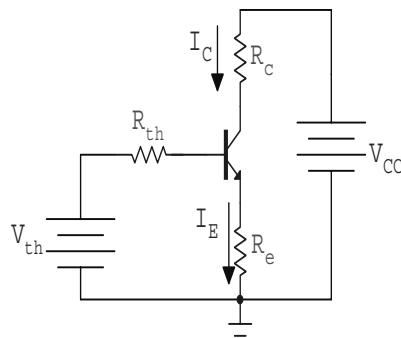


Figura 6.21: Amplificatore a transistor bipolare: circuito equivalente di quello a V_B costante di figura 6.20

con:

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} , \quad V_{th} = V_{CC} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Applicando il teorema di Kirchoff per le maglie al circuito di base, otteniamo:

$$V_{th} = I_B R_{th} + V_{BE} + (I_B + I_C) R_e \cong \frac{I_E}{\beta + 1} R_{th} + V_{BE} + I_E R_e$$

da cui:

$$I_E = \frac{V_{th} - V_{BE}}{R_e + R_{th}/(\beta + 1)} \quad (6.39)$$

Per far sì che I_E non risenta di variazioni nel valore di β né di cambiamenti di temperatura, imponiamo i seguenti vincoli:

- (a) $V_{th} \gg V_{BE}$
- (b) $R_e \gg R_{th}/(\beta + 1)$

la prima delle due condizioni fa sì che piccole variazioni di V_{BE} (attorno a 0.7 V) siano trascurabili rispetto a V_{th} , che dominerà nel numeratore dell'espressione di I_E . Tuttavia, V_{th} non può esser molto grande, poichè aumentando V_{th} dovrà aumentare la tensione del collettore (per mantenere polarizzata inversamente la giunzione base-collettore) e ciò, a parità di V_{CC} , diminuirà l'escursione del segnale ai capi di R_c e quindi il guadagno.

Un compromesso può esser raggiunto scegliendo $V_{th} \cong 1/3V_{CC}$, $V_{CB} \cong V_{CE} \cong 1/3V_{CC}$ e $I_C R_c \cong 1/3V_{CC}$.

La condizione (b) fa sì che I_E sia indipendente da β . Tale condizione può esser soddisfatta scegliendo R_{th} piccolo, cioè prendendo due resistenze R_1 ed R_2 di piccolo valore. Tuttavia anche questa scelta ha degli inconvenienti. Se R_1 ed R_2 sono piccole, avremo una notevole energia dissipata in esse per effetto Joule. Inoltre, la resistenza d'ingresso R_{in} del circuito è il parallelo di quella del transistor e di R_{th} . Un piccolo valore di R_{th} abbasserà quindi R_{in} , e ciò non è desiderabile nella più gran parte dei casi. Ancora una volta dobbiamo raggiungere un compromesso. Notiamo a questo riguardo che la condizione (b) può esser scritta:

$$(\beta + 1)R_e \gg R_{th}$$

e che il termine a sinistra di questa equazione è la resistenza d'ingresso del transistor con la resistenza R_e sull'emettitore. Il circuito d'ingresso può ora essere ridisegnato come mostrato in figura 6.22.

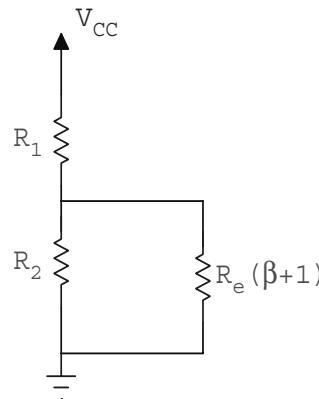


Figura 6.22: Circuito adoperato per il calcolo della tensione di base nella configurazione di figura 6.21

Vediamo che, se $R_e(\beta + 1)$ è grande, la tensione di base V_B sarà fissata dal partitore $R_1 - R_2$. Quindi la condizione (b) equivale a richiedere un V_B fisso, e ciò suggerisce che la corrente nella serie delle due resistenze $R_1 - R_2$ sia grande rispetto

alla corrente che entra in base. Tipicamente, si sceglie R_1 ed R_2 in modo tale che la corrente nella serie dei due sia nel range ($0.1 I_E \div I_E$).

Vediamo ad esempio di calcolare i valori delle resistenze, se si ammette di adoperare una $V_{CC} = +12V$ ed $I_C = 1 mA$. Si supponga $\beta = 100$. Seguiamo la regola stabilità in precedenza, cioè ammettiamo che $1/3$ del potenziale si ritrovi ai capi di R_c , $1/3$ sia V_{th} ed il rimanente $1/3$ sia la differenza di potenziale $V_{CB} (\simeq V_{CE})$.

Avremo quindi:

$$\begin{aligned} V_{th} &= 4 V \\ V_E &= V_{th} - V_{BE} = 4 - V_{BE} \approx 3.3 V \end{aligned}$$

Il valore di R_E sarà allora dato da:

$$\frac{V_E}{I_E} \cong 3.3 k\Omega$$

Avendo posto $I_E \cong I_C = 1 mA$.

Fissiamo inoltre una corrente nel partitore ($R_1 - R_2$) pari a $0.1 I_E$. Trascurando la corrente di base avremo:

$$R_1 + R_2 = \frac{12}{0.1 I_E} = 120 k\Omega$$

ed:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} = V_{th} = 4 V$$

da cui otteniamo:

$$R_1 = 80 k\Omega, R_2 = 40 k\Omega$$

Inoltre la condizione che la caduta di tensione ai capi di R_c sia $1/3 V_{CC}$ ci dà:

$$R_c \cdot 1 mA = 4 V \Rightarrow R_c = 4 k\Omega$$

Possiamo ora ottenere una valutazione più prossima al vero del valore di I_E , tenendo conto della corrente di base, che finora abbiamo trascurato. Dalla relazione (6.39) otteniamo:

$$I_E = \frac{4 - 0.7}{3.3 + R_{th}/101} = \frac{3.3}{3.3 + 26.7/101} = 0.926 mA$$

al posto del precedente valore $I_E = 1 mA$.

Un sistema alternativo per polarizzare il transistor è quello di figura 6.23.

Dalla figura vediamo che:

$$V_{CC} = I_E R_c + I_B R_b + V_{BE} = I_E R_c + \frac{I_E}{\beta + 1} R_b + V_{BE}$$

per cui la corrente di emettitore è:

$$I_E = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_c + R_b/(\beta + 1)}$$

Perchè I_E non dipenda da β , scegliamo $R_b/(\beta + 1) \ll R_c$.

Dobbiamo però far ciò tenendo conto del fatto che il valore di R_b determina l'escursione del segnale sul collettore, poichè è:

$$V_{CB} = I_B R_b = I_E \frac{R_b}{\beta + 1}$$

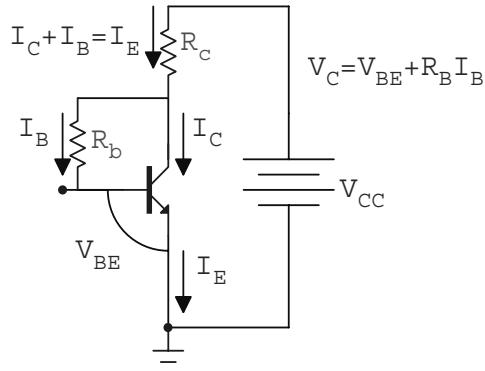


Figura 6.23: Schema alternativo per la polarizzazione di un transistor adoperato come amplificatore. Configurazione emettitore comune

6.6.1 Polarizzazione per mezzo di una sorgente di corrente costante

Possiamo fissare la corrente $I_{EQ} \simeq I_{CQ}$ inserendo un opportuno generatore di corrente nella gamba di emettitore.

Lo schema di principio è quello indicato nella parte sinistra della figura 6.24. Questo ha il vantaggio che ora la corrente di emettitore è indipendente dai valori di β e di R_b . È quindi possibile scegliere per R_b una resistenza di valore elevato, ottenendo in tal modo un circuito con elevata impedenza d'ingresso.

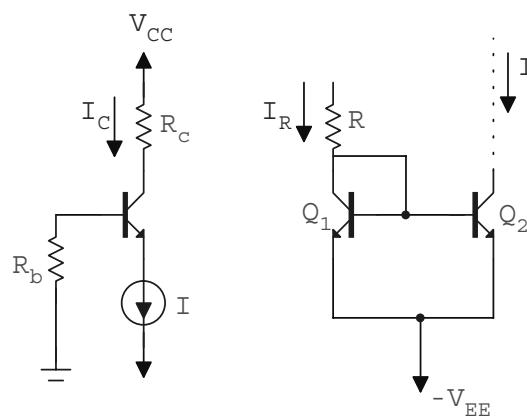


Figura 6.24: Amplificatore a transistor bipolare nella configurazione CE: schema di polarizzazione tramite una sorgente costante di corrente. A sinistra è riportato lo schema generico, a destra un'implementazione pratica del generatore di corrente costante tramite uno *specchio di corrente*

Un circuito che realizza uno schema del tipo di quello indicato, è mostrato nella parte destra della stessa figura. Questo genera la corrente costante I da utilizzare nel circuito di emettitore dell'amplificatore mostrato nella parte sinistra della figura.

Esaminiamo il comportamento di tale “specchio di corrente”, come è comunemente chiamato. I transistor Q_1 e Q_2 sono identici (sono realizzati con il medesimo materiale e sul medesimo chip). Notiamo che Q_1 è collegato “a diodo”, cioè ha il collettore unito alla base. Con tale collegamento, la giunzione base-collettore è polarizzata inversamente (sarebbe polarizzata direttamente se fosse $V_B > V_C$). I due transistor hanno sia le basi che gli emettitori uniti insieme, quindi $V_{BE1} = V_{BE2}$ e, poichè i due transistor sono identici, essi avranno uguali correnti. La corrente I sarà quindi uguale ad I_R , con:

$$I_R = \frac{V_{CC} + V_{EE} - V_{BE}}{R} \quad (6.40)$$

Esempio: Ammettiamo che sia: $V_{CC} = 10\text{ V}$, $\beta = 100$, $R_b = 100k$, $R_c = 7.5k$, $I = 1\text{ mA}$ e calcoliamo V_B , V_E , V_C . Ammettendo poi che sia $V_{EE} = 10\text{ V}$, calcoliamo il valore di R nel generatore di corrente.

V_C può esser ottenuta dalla caduta di potenziale sulla resistenza R_c percorsa da una corrente I_C , dove:

$$I_C = I_E - I_B = I_E - \frac{I_C}{\beta} \Rightarrow I_C = \frac{\beta}{\beta + 1} I_E = 0.99\text{ mA}$$

Si ha quindi:

$$V_C = 10 - 7.5 \cdot 0.99 = 2.575\text{ V}$$

La corrente di base è: $I_B = I_C/\beta = 0.0099\text{ mA}$, per cui la tensione di base è:

$$V_B = 0 - 0.0099 \cdot 100 = -0.99\text{ V} \cong -1\text{ V}$$

La tensione di emettitore è:

$$V_E = V_B - 0.7 = -1.7\text{ V}$$

Il valore di R nel generatore di corrente può esser ottenuto dalla (6.40):

$$I = 1\text{ mA} = \frac{10 + 10 - 0.7}{R}$$

da cui:

$$R = 19.3\text{ k}$$

6.7 Transistor Darlington

Ricordiamo che due parametri importanti in un transistor bipolare a giunzione sono il guadagno in corrente h_{fe} e l’impedenza di ingresso. Quest’ultima è data, con riferimento alla figura 6.25, da:

$$r_{in} \equiv h_{ie} = \frac{v_{be}}{i_b} = r_b + (h_{fe} + 1)r_e$$

dove r_e è la resistenza del diodo base-emettitore polarizzato direttamente, cioè:

$$r_e \approx \frac{25}{I_{CQ}(\text{mA})}$$

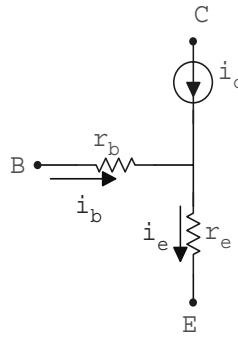


Figura 6.25: Transistor bipolare! visualizzazione dei parametri r_b ed r_e

pari a 2.5Ω se $I_{CQ} = 10 \text{ mA}$. con ciò:

$$r_{ie} = r_{in} = r_b + (h_{fe} + 1) \frac{25}{I_{CQ} (\text{mA})}$$

Se nel circuito di emettitore è inserita una resistenza R_e , questa verrà ad essere in serie ad r_e e la resistenza d'ingresso sarà ora:

$$r_{in} = r_b + (h_{fe} + 1)(r_e + R_e)$$

A volte r_b ed r_e possono essere trascurate rispetto ad R_e . Avremo allora:

$$r_{in} \cong (h_{fe} + 1)R_e$$

È possibile realizzare transistor con valori di h_{fe} ed h_{ie} molto maggiori, utilizzando coppie di transistor in cui l'emettitore del primo è collegato alla base del secondo. Tali transistor, noti come "Darlington"² sono commercializzati da varie ditte. Un esempio tipico è il 2N6285, che ha un guadagno in corrente di circa 2400, con correnti di collettore di 10A. Lo schema più semplice di un transistor Darlington è quello mostrato in figura 6.26.

Vediamo che la corrente di emettitore del primo transistor è la corrente di base del secondo.

Il guadagno complessivo in corrente di questo sistema può esser calcolato facilmente:

$$\begin{aligned} h_{fe} \equiv A_i &\equiv \frac{i_c}{i_{b1}} = \frac{i_{c1} + i_{c2}}{i_{b1}} = \frac{i_{c1}}{i_{b1}} + \frac{i_{c2}}{i_{b1}} = h_{fe1} + \frac{i_{c2} i_{b2} i_{c1}}{i_{b2} i_{c1} i_{b1}} = \\ &= h_{fe1} + \frac{h_{fe2} h_{fe1}}{\alpha_1} \cong h_{fe1} (1 + h_{fe2}) \end{aligned}$$

poichè $\alpha_1 \approx 1$.

Se i due transistor sono caratterizzati da valori uguali di h_{fe} , si ha, ponendo $h_{fe1} = h_{fe2} = h_{fet}$:

$$h_{fe} \approx h_{fet}^2$$

²Dal nome del ricercatore, Sidney Darlington, che li inventò nel 1953.

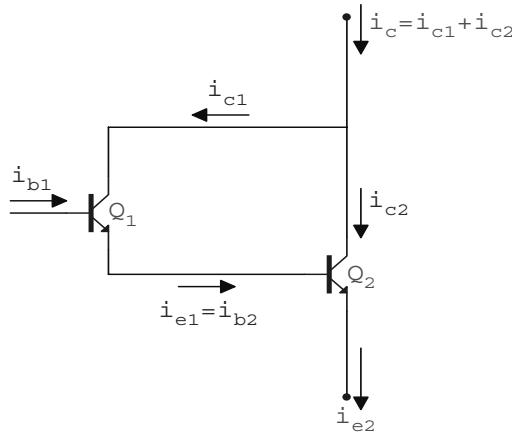


Figura 6.26: Schema base di un transistor Darlington

Vediamo quindi che il parametro h_{fe} di questo transistor composito (che è noto come transistor Darlington) è all'incirca uguale al quadrato dell' h_{fe} del singolo transistor.

Possiamo ora far vedere che anche l'impedenza d'ingresso risulta molto aumentata.

Guardando nella base di Q_1 vediamo infatti un'impedenza pari a :

$$R_i = h_{ie1} + (h_{fe1} + 1) h_{ie2}$$

con:

$$h_{ie2} \cong \frac{V_T}{I_{EQ2} (mA)} = \frac{25}{I_{EQ2} (mA)}$$

Notiamo che, essendo le correnti nei due transistor molto diverse, saranno parimenti diversi i loro parametri h_{ie} .

Segue:

$$\begin{aligned} R_i &= (h_{fe1} + 1) \frac{V_T}{I_{EQ1}} + (h_{fe1} + 1)(h_{fe2} + 1) \frac{V_T}{I_{EQ2}} = \\ &= (h_{fe1} + 1) V_T \left[\frac{1}{I_{EQ1}} + (h_{fe2} + 1) \frac{1}{I_{EQ2}} \right] = (h_{fe1} + 1) \frac{V_T}{I_{EQ2}} \left[\frac{I_{EQ2}}{I_{EQ1}} + (h_{fe2} + 1) \right] \end{aligned}$$

Le correnti nei due transistor sono nel rapporto:

$$\frac{I_{EQ2}}{I_{EQ1}} = (h_{fe2} + 1)$$

per cui:

$$R_i = 2(h_{fe1} + 1)(h_{fe2} + 1) \frac{V_T}{I_{EQ2}}$$

Vediamo quindi che l'impedenza d'ingresso complessiva è maggiore di quella del singolo transistor di un fattore $2(h_{fe} + 1)$.

Notiamo che un transistor Darlington ha un valore di V_{BE} che è il doppio di quello di un normale transistor. Nell'uso in un circuito digitale, un transistor di questo tipo

ha l'ulteriore inconveniente che il V_{CE} della coppia, quando questa è in saturazione, è uguale a $V_{CE1} + V_{BE2} \simeq 0.2 + 0.8 = 1$ V. Inoltre, un transistor Darlington come lo abbiamo disegnato è intrinsecamente lento, soprattutto se adoperato come elemento di un circuito digitale. Infatti Q_1 non può mandare rapidamente in interdizione Q_2 ³. Per ovviare a tale limitazione si modifica la configurazione indicata sopra, inserendo una resistenza tra la base e l'emettitore di Q_2 , come mostrato in figura 6.27.

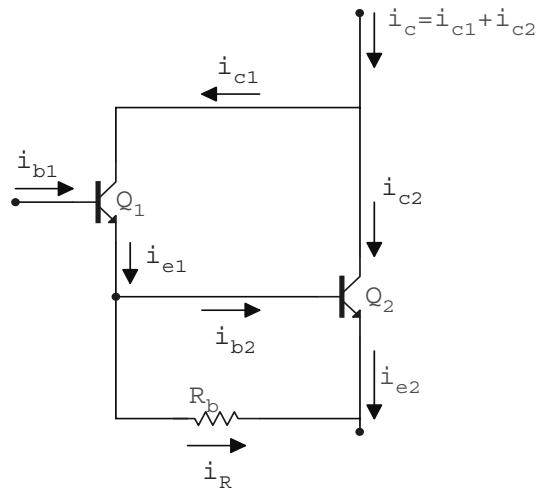


Figura 6.27: Schema base alternativo di un transistor Darlington

Ora avremo:

$$i_{e1} = i_{b2} + i_R = i_{b2} + \frac{0.7}{R_b}$$

da cui si vede che scegliendo opportunamente R_b si può ottenere un valore conveniente per i_{e1} , a partire dal valore minimo di i_{b2} .

Vediamo come si modifichino ora i valori di R_i e di h_{fe} del sistema. Notiamo che ora R_b è in parallelo con h_{ie2} , con che l'impedenza d'ingresso del circuito sarà:

$$R_i = h_{ie1} + (h_{fe1} + 1)(R_b \parallel h_{ie2})$$

Vediamo che ora l'impedenza d'ingresso è minore di quella del caso precedente.

Calcoliamo ora il guadagno in corrente. Abbiamo:

$$i_c = i_{c1} + i_{c2} = h_{fe1}i_{b1} + h_{fe2}i_{b2}$$

con:

$$i_{b2} = i_{e1} \frac{R_b}{R_b + h_{ie2}} = (h_{fe1} + 1)i_{b1} \frac{R_b}{R_b + h_{ie2}}$$

In definitiva otterremo:

$$i_c = h_{fe1}i_{b1} + h_{fe2}(h_{fe1} + 1)i_{b1} \frac{R_b}{R_b + h_{ie2}}$$

³Ricordiamo che, se Q_2 è in saturazione, perché esso possa uscirne deve liberarsi delle cariche accumulate in base. Ciò non può facilmente avvenire attraverso l'emettitore di Q_1 .

da cui:

$$A_i = \frac{i_c}{i_{b1}} = h_{fe1} + h_{fe2}(h_{fe1} + 1) \frac{R_b}{R_b + h_{ie2}}$$

Nel caso in cui sia $h_{fe1} = h_{fe2} = h_{fe}$, questa diventa:

$$A_i = h_{fe} + h_{fe}(h_{fe} + 1) \frac{R_b}{R_b + h_{ie2}} \cong h_{fe}^2 \frac{R_b}{R_b + h_{ie2}}$$

Vediamo quindi che anche il guadagno in corrente è inferiore a quello della configurazione in cui la resistenza R_b era assente.

Transistor Darlington sono disponibili in commercio come oggetti singoli, dove è normalmente inclusa la resistenza R . La figura 6.28 illustra le caratteristiche del transistor Darlington 2N7052 della Fairchild. Si noti la dipendenza delle caratteristiche dalla temperatura, nonché il fatto che il guadagno a temperatura ambiente è dell'ordine di 30,000 per correnti di collettore fino a centinaia di mA.

6.8 Specchi di corrente

Cominciamo con l'esaminare la configurazione mostrata in figura 6.29, in cui un transistor npn è montato con base e collettore uniti insieme.

È facile vedere che ora il transistor si comporta come un diodo. Infatti, la polarizzazione è tale che la giunzione emettitore-base è polarizzata direttamente, mentre quella base-collettore è polarizzata inversamente⁴.

La differenza di potenziale tra base ed emettitore sarà quella (V_{BE}) di un diodo polarizzato direttamente. La corrente in R sarà quindi:

$$I_R = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R}$$

con:

$$I_R = I_C + I_B = I_C(1 + \frac{1}{\beta}) = I_C \frac{1 + \beta}{\beta}$$

Segue da questa:

$$I_C = \frac{\beta}{1 + \beta} I_R = \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R} \approx I_R$$

Vediamo così che la corrente I_R (e così I_C) è determinata da V_{CC} e dal V_{BE} del transistor (oltre che da R).

Esaminiamo ora la configurazione mostrata in figura 6.30, dove ammettiamo che i due transistor siano identici:

Il transistor Q_1 fa passare una corrente in R data da:

$$I_R = \frac{V_{CC} - V_{BE1}}{R}$$

Essendo $V_{BE1} = V_{BE2} \equiv V_{BE}$ ed i due transistor identici, avremo che la corrente nel secondo transistor sarà uguale a quella del primo, indipendentemente dal valore di Z.

⁴La giunzione base-collettore sarebbe polarizzata direttamente se fosse $V_C > V_B$.

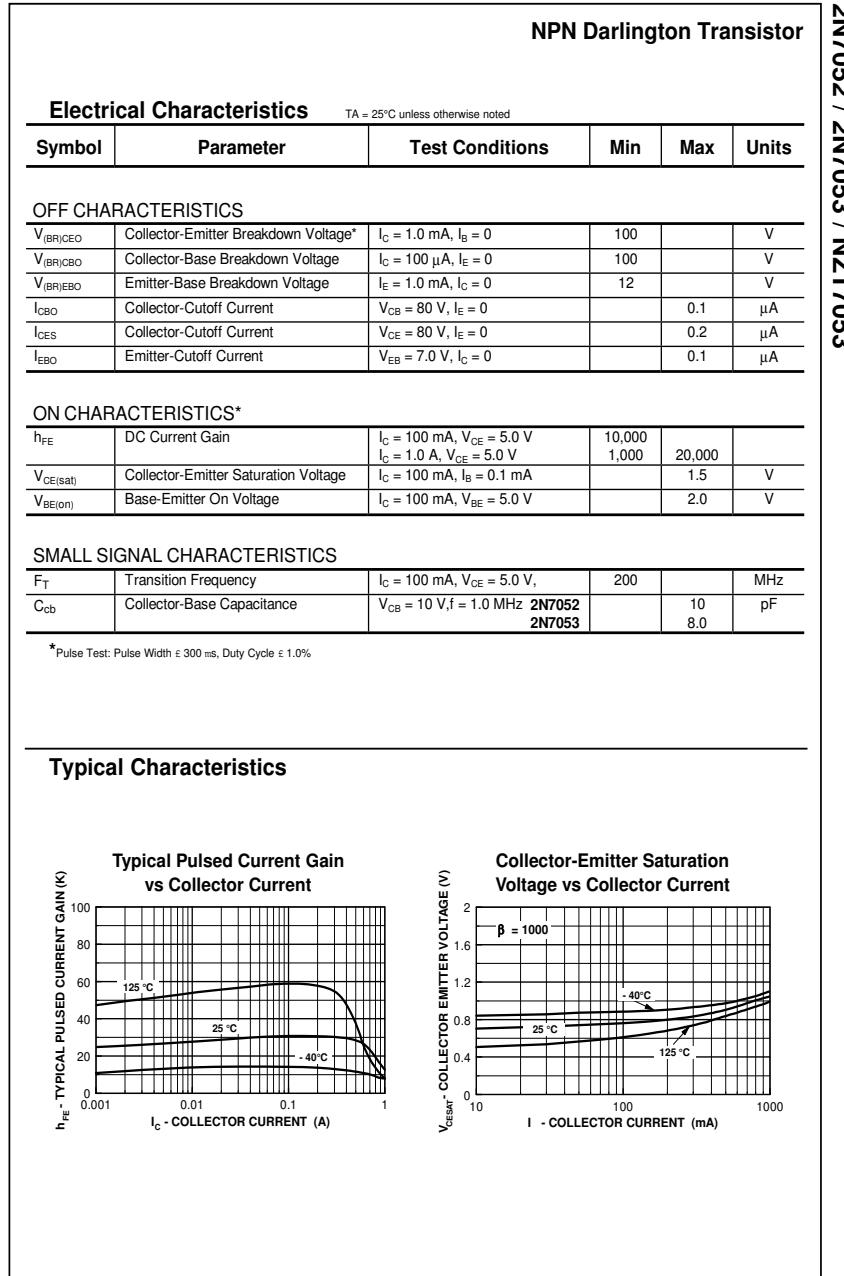


Figura 6.28: Caratteristiche di un tipico transistor Darlington

É come se il primo transistor *programmasse* la corrente che circolerà nel secondo. Più esattamente avremo:

$$I_R = I_C + I_{B1} + I_{B2} = I_C \left(1 + \frac{2}{\beta} \right)$$

con:

$$I_R = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R}$$

2N7052 / 2N7053 / NZT7053

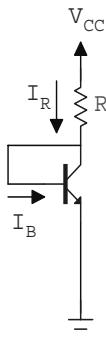


Figura 6.29: Transistor bipolare montato in modo da funzionare come diodo

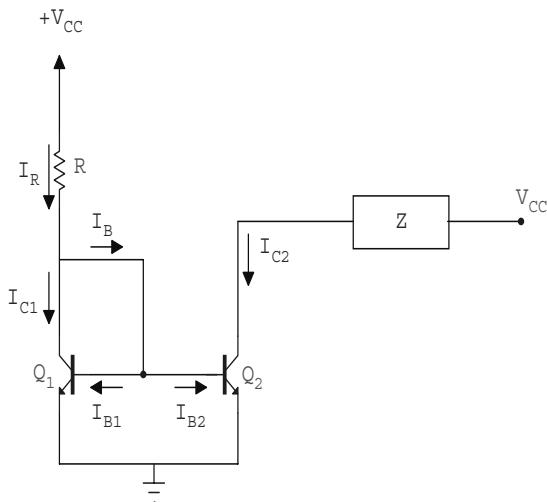


Figura 6.30: Specchio di corrente a transistor bipolare

per cui la corrente nel carico Z sarà:

$$I_Z = I_C = \frac{\beta}{\beta + 2} \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R} \approx \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R}$$

essendo $\beta \gg 1$.

In realtà, la corrente I_{C2} , cioè la corrente nel carico Z , non sarà rigorosamente uguale a questo valore, a causa dell'effetto Early. Ricordiamo infatti che il circuito d'uscita di un transistor in configurazione di emettitore comune può esser schematizzato come mostrato in figura 6.31, dove è:

$$r_o = \frac{1}{h_{oe}} = \frac{V_A}{I_C} \quad (V_A = \text{Tensione di Early})$$

La presenza di r_o , o meglio il fatto che r_o non sia infinitamente grande, è legata all'andamento leggermente crescente delle caratteristiche d'uscita del transistor, come mostrato in figura 6.32.

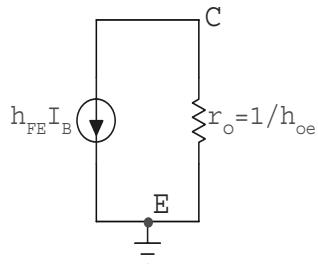


Figura 6.31: Conseguenza dell'effetto Early sulla corrente nel carico di figura 6.30

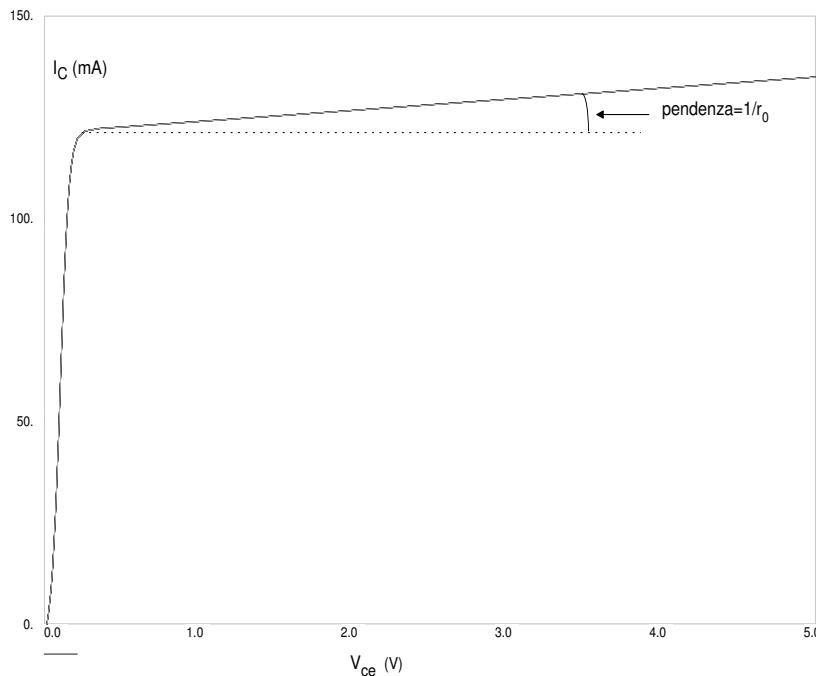


Figura 6.32: Transistor bipolare: caratteristica d'uscita che illustra l'effetto Early

La parte rettilinea della caratteristica interseca l'asse $I_C = 0$ in $V_{CE} = -V_A$ (tensione di Early). Ciò fa sì che al variare di V_{CE2} nel nostro specchio di corrente, I_{C2} non rimanga esattamente uguale ad I_{C1} , ma aumenti all'aumentare di V_{CE2} , cioè cambi al cambiare del carico Z .

Lo specchio di corrente appena esaminato può esser esteso a comprendere più transistor. In tal modo, la corrente che passa in un transistor può “pilotare” le correnti in un numero di carichi diversi. Ciò è indicato in figura 6.33.

Q_0 è il transistor che pilota gli altri. Le correnti I_1, I_2, I_3 saranno, a meno di deviazioni legate all'effetto Early, uguali alla corrente $I_{C0} = I_R$.

Si possono anche realizzare specchi multipli di corrente simili a quello appena descritto, con correnti I_1, I_2, I_3, \dots diverse l'una dall'altra, in rapporti prefissati. Ciò viene ottenuto utilizzando, in un integrato, transistor Q_1, Q_2, Q_3, \dots , aventi

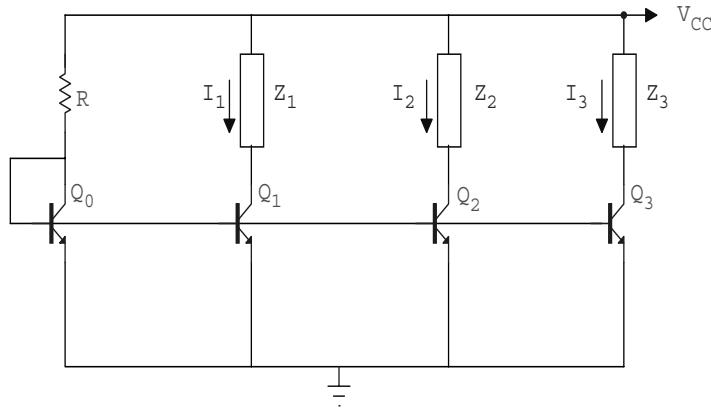


Figura 6.33: Specchio multiplo di corrente

ariee della giunzione di emettitore diverse l'una dall'altra.

Un metodo alternativo per programmare una corrente I_1 minore di quella nel transistor pilota Q_0 , è costituito dal cosiddetto specchio di Widlar. Questo difinisce dal normale specchio di corrente per l'inserimento di una resistenza nota sull'emettitore del transistor Q_1 , come mostrato in figura 6.34

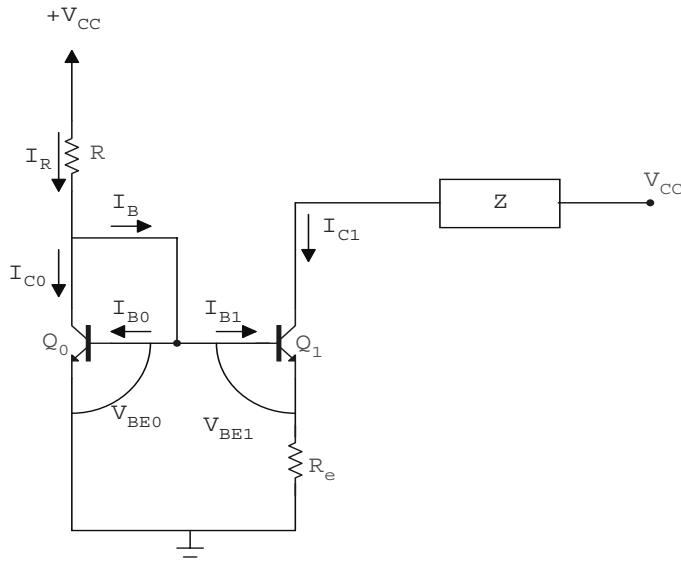


Figura 6.34: Generatore di corrente costante di Widlar

La presenza in tale circuito di R_e , fa sì che V_{BE0} sia diverso da V_{BE1} e quindi che $I_C1 \neq I_C0$. Si ha infatti:

$$V_{BE0} = V_{BE1} + R_e (I_C1 + I_B1)$$

da cui segue:

$$\Delta V_{BE} \equiv V_{BE0} - V_{BE1} = R_e (I_B1 + I_C1)$$

Ricordando che:

$$\frac{I_{C0}}{I_{C1}} = e^{\Delta V_{BE}/V_T}$$

per cui:

$$\Delta V_{BE} = V_T \ln \left(\frac{I_{C0}}{I_{C1}} \right)$$

si ha:

$$R_e = \frac{\Delta V_{BE}}{I_{B1} + I_{C1}} = V_T \ln \left(\frac{I_{C0}}{I_{C1}} \right) \frac{1}{I_{B1} + I_{C1}}$$

cioè:

$$R_e = \frac{V_T}{I_{C1} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} \ln \left(\frac{I_{C0}}{I_{C1}} \right) \quad (6.41)$$

Essendo poi:

$$I_R = \frac{V_{CC} - V_{BE0}}{R} = I_{C0} + I_{B0} + I_{B1} = I_{C0} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{I_{C1}}{\beta}$$

dove si desidera che sia $I_{C1} < I_{C0}$, con che il termine I_{C1}/β (con $\beta \gg 1$) può esser trascurato.

Si ha quindi nuovamente:

$$I_{C0} = \frac{\beta}{1 + \beta} I_R = \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{V_{CC} - V_{BE0}}{R}$$

Fissati I_{C0} ed I_{C1} si calcola R da quest'ultima e poi R_e dalla (6.41).

Esaminiamo ora l'impedenza d'uscita del generatore di corrente di Widlar, per segnali variabili di piccola ampiezza. Questa può esser calcolata facendo uso del circuito equivalente di figura 6.35.

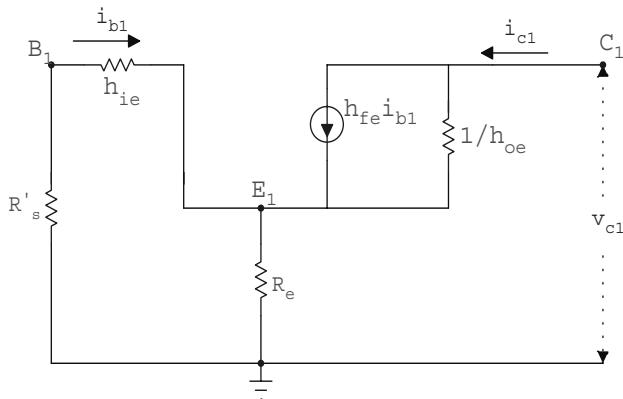


Figura 6.35: Generatore di corrente costante di Widlar: circuito adoperato per il calcolo della corrente

dove R'_s è il parallelo di R e dell'impedenza d'uscita di Q_0 . Per calcolare l'impedenza d'uscita, immaginiamo di applicare ai terminali d'uscita una corrente i_{c1} e calcoliamo la tensione v_{c1} .

$$v_{c1} = \frac{1}{h_{oe}} (i_{c1} - h_{fe} i_{b1}) + R'_P i_{c1} \quad (6.42)$$

dove:

$$R'_P = R_e \parallel (R'_s + h_{ie})$$

Trascurando il secondo termine nella (6.42) rispetto al primo (che prevale a causa del coefficiente $1/h_{oe}$) si ottiene:

$$v_{c1} = \frac{1}{h_{oe}} (i_{c1} - h_{fe} i_{b1}) \quad (6.43)$$

La maglia di sinistra dà poi:

$$i_{b1}(h_{ie} + R'_s) + R_e(i_{b1} + i_{c1}) = 0$$

da cui:

$$\begin{aligned} i_{b1}(h_{ie} + R'_s + R_e) &= -R_e i_{c1} \\ i_{b1} &= -R_e \frac{i_{c1}}{h_{ie} + R'_s + R_e} \end{aligned}$$

Sostituendo questa nella (6.42) si ha:

$$v_{c1} \cong \frac{1}{h_{oe}} \left(1 + \frac{h_{fe} R_e}{h_{ie} + R'_s + R_e} \right) i_{c1}$$

e quindi l'impedenza d'uscita sarà:

$$R_O \equiv \frac{v_{c1}}{i_{c1}} = \frac{1}{h_{oe}} \left(1 + \frac{h_{fe} R_e}{h_{ie} + R'_s + R_e} \right)$$

Se è inoltre $R_e \gg (h_{ie} + R'_s)$, si ha:

$$R_O \cong \frac{1 + h_{fe}}{h_{oe}}$$

cioè la resistenza d'uscita è $(1 + h_{fe})$ volte maggiore di quella del singolo transistor.

Uno specchio di corrente in cui l'effetto Early non può dar noia è costituito dal cosiddetto "specchio di Wilson", mostrato in figura 6.36(a).

Notiamo che ora base e collettore di Q_1 sono ad un potenziale V_{BE} rispetto a massa. Di conseguenza la base di Q_2 è ad un potenziale $2 V_{BE}$ rispetto a massa. Essendo la base di Q_2 unita al collettore di Q_0 , ne segue che $V_{CE0} = 2 V_{BE}$ =costante. In Q_0 ora non si ha effetto Early, essendo stato fissato V_{CE0} . D'altronde, la corrente nel carico è uguale a quella in Q_1 , che è uguale a quella in Q_0 e quindi è fissata una volta stabiliti i valori di V_{CC} e di R .

Si può dimostrare che I_C vale:

$$I_C = \frac{\beta^2 + 2\beta}{\beta^2 + 2\beta + 2} I_R$$

con:

$$I_R = \frac{V_{CC} - 2V_{BE}}{R}$$

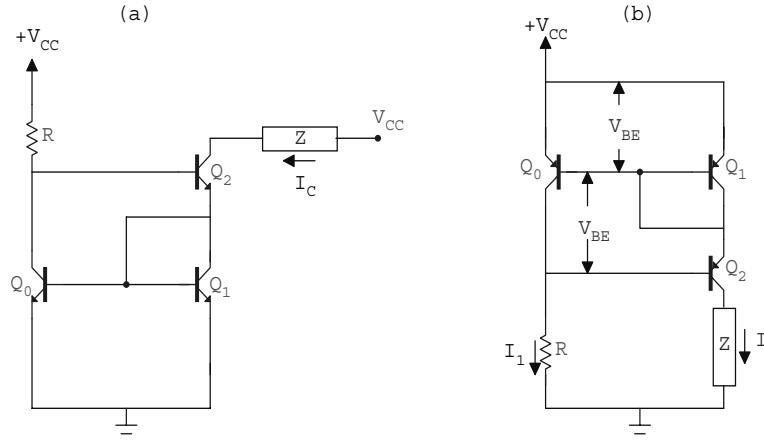


Figura 6.36: Il circuito mostrato in (a) è un generatore di corrente costante di Wilson che utilizza transistor npn. In (b): generatore di corrente costante di Wilson che utilizza transistor pnp

e quindi:

$$I_C - I_R = \frac{2I_R}{\beta^2 + 2\beta + 2}$$

$$\frac{|I_C - I_R|}{I_R} = \frac{2}{\beta^2 + 2\beta + 2} \ll 1\%$$

Gli specchi di corrente fin qui esaminati utilizzavano transistor (npn). In tali circuiti il carico era situato tra collettore e alimentazione. Utilizzando transistor pnp si può facilmente ottenere dei circuiti con carico a massa. Ad esempio, lo specchio di corrente di Wilson può esser realizzato con transistor pnp, come mostrato in figura 6.36(b).

Capitolo 7

Il modello di Ebers-Moll per i transistor bipolari

7.1 Basi del modello

Il modello a parametri h del transistor bipolare, o equivalentemente il modello a π , sono utilizzabili per calcolare le principali proprietà (guadagno in corrente, resistenza d'ingresso etc.) di amplificatori a transistor. Nella più gran parte dei casi, in tali applicazioni, i transistor lavorano in zona attiva. Un modello che schematizza il funzionamento del transistor in una qualsivoglia delle zone di funzionamento (zona attiva diretta, attiva inversa, saturazione, interdizione) è quello proposto da Ebers e Moll nel 1954, successivamente perfezionato da altri ed ampiamente adoperato per simulare al computer il comportamento del transistor¹

Le equazioni di Ebers-Moll hanno inoltre il vantaggio di esser “costruite” a partire dai principi fisici su cui è basato il comportamento del transistor. Se infatti indichiamo le correnti e tensioni nel transistor, facendo uso della notazione di figura 7.1, e ricordiamo che la corrente di collettore I_C è una frazione α della corrente di emettitore: $I_C = \alpha_D I_E$ avremo reso conto, approssimativamente, del funzionamento del transistor in zona attiva. Si noti che abbiamo chiamato α_D il parametro α , per indicare che intendiamo riferirci al funzionamento “diretto” (cioè nella normale zona attiva, con $V_{BE} > 0$ e $V_{BC} < 0$).

Ricordiamo ora che in zona attiva contribuisce alla corrente di collettore anche la corrente inversa di saturazione I_{CO} , dovuta alle cariche minoritarie (positive in un transistor npn) presenti nel collettore, accelerate verso la base (e poi l'emettitore) dalla polarizzazione inversa della giunzione base-collettore. A rigore dovremo quindi esprimere la corrente di collettore come:

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

Risulta più conveniente esprimere il secondo termine a secondo membro, nella forma completa che caratterizza un diodo (la giunzione base-collettore) polarizzato inversamente:

$$I_{CO} \rightarrow -I_{CO} (e^{V_{BC}/V_T} - 1)$$

¹Questo è adoperato ad esempio nel programma di simulazione “SPICE”; dove peraltro è possibile scegliere modelli più avanzati, quali quello di Gummel-Poon o altri.

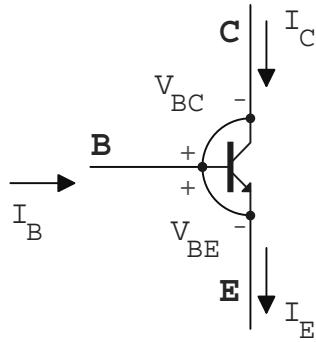


Figura 7.1: Simboli adoperati per correnti e tensioni nella discussione del modello di Ebers-Moll

che, nella zona di funzionamento attualmente in esame ($V_{BC} < 0$ e $|V_{BC}| \gg V_T$) coincide con $+I_{CO}$.

Il vantaggio di esprimere in tal modo il secondo termine è nel fatto che tale espressione è più generale. Essa renderà conto del funzionamento del transistor anche se la giunzione base-collettore è polarizzata direttamente. Scriveremo quindi:

$$I_C = \alpha_D I_E - I_{CO} (e^{V_{BC}/V_T} - 1) \quad (7.1)$$

Ammettiamo ora che sia la giunzione base-emettitore che quella base-collettore siano polarizzate inversamente. L'espressione precedente (scritta per V_{BC} negativo, e $|V_{BC}| \gg V_T$):

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

deve fornire, essendo con tali polarizzazioni il transistor interdetto, valori pressoché nulli per le correnti I_C ed I_E . Ciò è possibile se, accanto all'equazione (7.1), introduciamo una seconda equazione che fornisca I_E in funzione di V_{BC} , V_{BE} ed I_C . Il punto di partenza per costruire tale equazione è l'equazione che lega la corrente nel diodo base-emettitore alla differenza di potenziale V_{BE} :

$$I_E = I_{EO} (e^{V_{BE}/V_T} - 1)$$

Se il diodo è polarizzato direttamente ($V_{BE} > V_\gamma$), questa fornirà correttamente il valore della corrente I_E da adoperare nella (7.1).

Se il diodo è polarizzato inversamente avremo: $I_E = -I_{EO}$, cioè un contributo molto piccolo alla corrente (corrente inversa di saturazione della giunzione base-emettitore). Notiamo tuttavia che, con V_{BE} negativo, un ulteriore contributo alla corrente I_E può venire se la giunzione base-collettore è polarizzata *direttamente*. Infatti, in tali condizioni, il collettore immetterebbe elettroni nella base e questi, o meglio una frazione α_R di questi, passerebbero poi nell'emettitore².

²Il parametro α_R è l'analogo del parametro α_D che compare quando il transistor lavora in zona attiva diretta. Nelle condizioni ora in esame diremo che il transistor lavora in zona attiva inversa (la sottoscritta R sta per "reverse"). In genere è $\alpha_R \ll \alpha_D$

In termini della corrente, potremo dire che una frazione α_R della corrente di collettore, passa nell'emettitore:

$$I_E = \alpha_R I_C$$

a questa va poi *sommata* la corrente (I_{EO}) inversa di saturazione che, con $V_{BE} < 0$, fluisce tra emettitore a base:

$$I_E = \alpha_R I_C - I_{EO}$$

Infine, riscriviamo il secondo termine a secondo membro nel modo generale appropriato per un diodo, ottenendo:

$$I_E = \alpha_R I_C + I_{EO} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) \quad (7.2)$$

Le (7.1) e (7.2) sono le equazioni di Ebers-Moll. Il primo dei termini a secondo membro di ciascuna delle due equazioni rappresenta la “componente di transistor” della relativa corrente; il secondo la “componente di diodo”. Le due equazioni rendono conto del funzionamento del transistor in una qualsivoglia delle zone di funzionamento.

È facile verificare come da queste equazioni sia possibile ricavare le correnti in funzione delle tensioni:

$$I_E = \frac{I_{EO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) - \frac{\alpha_R I_{CO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BC}/V_T} - 1) \quad (7.3)$$

$$I_C = \frac{\alpha_D I_{EO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) - \frac{I_{CO}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BC}/V_T} - 1) \quad (7.4)$$

Possiamo anche ricavare le tensioni ai capi delle giunzioni in funzione delle correnti:

$$V_{BE} = V_T \ln \left[1 - \frac{I_E - \alpha_R I_C}{I_{EO}} \right] \quad (7.5)$$

$$V_{BC} = V_T \ln \left[1 - \frac{I_C - \alpha_D I_E}{I_{CO}} \right] \quad (7.6)$$

I parametri fisici α_D , α_R , I_{EO} , I_{CO} non sono indipendenti; essi sono legati tra loro da:

$$\alpha_D I_{EO} = \alpha_R I_{CO}$$

Abbiamo già incontrato il parametro β del transistor, pari al rapporto tra I_C ed I_B in zona attiva. Anche ora possiamo definire $\beta = h_{FE}$ come:

$$h_{FE} = \frac{I_C}{I_B}$$

e, per la componente variabile:

$$h_{fe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

Entrambi questi parametri possono esser espressi in funzione dei coefficienti presenti nelle equazioni di Ebers-Moll. Infatti, in zona attiva, con $V_{BC} < 0$ e $|V_{BC}| \gg V_T$, la (7.1) diventa:

$$I_C = \alpha_D I_E + I_{CO}$$

e, poichè $I_E = I_B + I_C$:

$$I_C = \alpha_D I_B + \alpha_D I_C + I_{CO}$$

da cui:

$$I_C = \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D} I_B + \frac{I_{CO}}{1 - \alpha_D} = h_{FE} I_B + \frac{I_{CO}}{1 - \alpha_D}$$

e, per h_{fe} , essendo in genere I_{CO} piccolo:

$$h_{fe} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \approx h_{FE} \approx \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D}$$

Ad esempio, per $\alpha_D = 0.98$ si ha $h_{FE} \approx h_{fe} \approx 50$.

Quando il transistor funziona in modo inverso, il ruolo dell'emettitore e del collettore vengono ad essere scambiati, ed I_C sostituisce I_E (e viceversa). Occorrerà ora far uso dell'equazione (7.2):

$$I_E = \alpha_R I_C - I_{E0}$$

dove $I_C = I_E - I_B$, per cui:

$$I_E = \alpha_R I_E - \alpha_R I_B - I_{E0}$$

e quindi:

$$I_E = -\frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R} I_B - \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_R}$$

per cui:

$$h_{FC} \equiv -\frac{I_E}{I_B} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

Dove la sottoscritta C in h_{FC} stà ad indicare che ora, con i ruoli di emettitore e collettore scambiati, la configurazione è di *collettore comune*.

Si noti che ora I_E è negativo, rispetto alla convenzione adottata in precedenza per i versi delle correnti.

In genere α_R è molto diverso da α_D . Valori tipici sono:

$$\alpha_R \approx 0.01 \div 0.2 \Rightarrow h_{FC} \approx 0.01 \div 0.25$$

Cioè il guadagno in corrente nel modo attivo-inverso è molto minore di quello relativo al modo attivo-diretto. Il transistor, a causa dei dettagli costruttivi (drogaggio di base, emettitore e collettore; dimensioni fisiche delle giunzioni) non è simmetrico per scambio emettitore-collettore.

7.2 Il transistor in interdizione

Se la tensione tra base ed emettitore non è sufficientemente elevata da polarizzare direttamente la relativa giunzione, la corrente di emettitore si riduce a zero. Se inoltre anche la giunzione di collettore è polarizzata inversamente, con $V_{BC} \gg V_T$, la I_E può esser ottenuta dall'equazione (7.3):

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) + \frac{\alpha_R I_{C0}}{1 - \alpha_D \alpha_R}$$

e, facendo uso della relazione:

$$\alpha_D I_{E0} = \alpha_R I_{C0}$$

si trova:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_D \alpha_R} (e^{V_{BE}/V_T} + \alpha_D - 1)$$

dove $\alpha_D \approx 1$, per cui:

$$I_E = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_R} e^{V_{BE}/V_T}$$

che, con α_R nel range di valori (0.01 \div 0.2), ci dà:

$$I_E \cong (1 \div 1.25) I_{E0} e^{V_{BE}/V_T}$$

Come nel caso di un diodo, I_E diverrà apprezzabile solo per $V_{BE} \geq 0.6 V$.

7.3 Il transistor in saturazione

Consideriamo il montaggio di figura 7.2, con il transistor che lavora in zona attiva.

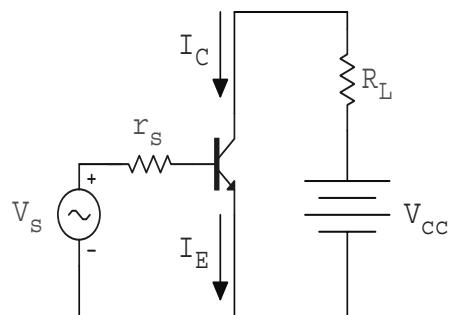


Figura 7.2: Configurazione emettitore-comune per un transistor npn

In tali condizioni la corrente di base sarà tale che la corrispondente corrente di collettore I_C provoca in R_L una caduta di potenziale molto minore di V_{CC} . In tali

condizioni, mentre la giunzione emititore-base è polarizzata direttamente, quella base-collettore è polarizzata inversamente.

Se si aumenta ora la corrente di base, si avrà un conseguente aumento della corrente di collettore, un aumento della caduta di potenziale in R_L ed in definitiva un minor valore di V_C , e quindi di V_{CE} . Aumentando ulteriormente la corrente di base si potrà raggiungere un punto tale che la differenza di potenziale base-collettore cambi segno, cioè la giunzione venga ad esser polarizzata *direttamente* (cioè nel verso tale da sfavorire il flusso delle cariche di minoranza elettroni presenti nella base, verso il collettore).

Notiamo che la giunzione base-emettitore continua ad iniettare elettroni nella base (cioè corrente nell'emettitore), ma questi elettroni non possono più esser raccolti dal circuito di collettore, a causa della polarizzazione della giunzione base-collettore. In tali condizioni si dice che il transistor è entrato in *saturazione*. Avremo una elevata corrente di base, una elevata corrente di emettitore ma una piccola corrente di collettore. Il rapporto I_C/I_B , che è uguale ad una costante (h_{FE}) in zona attiva, diviene ora molto minore di h_{FE} . Possiamo allora scegliere quale parametro che misura il “grado di saturazione”, il rapporto:

$$\sigma = \frac{I_C}{h_{FE} I_B}$$

che deve essere uguale ad 1 in zona attiva diretta.

Poichè la saturazione implica una polarizzazione diretta (o comunque non inversa) della giunzione base-collettore, ci si deve aspettare un legame tra σ e V_{BC} e, di conseguenza, tra σ e V_{CE} .

Con la convenzione per i segni già adottata in figura 7.1, la relazione tra V_{CE} , V_{BE} e V_{BC} è:

$$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC}$$

Dalle equazioni (7.5) e (7.6), trascurando il termine costante (1) (poichè per entrambe le giunzioni è $V_D \gg V_T$), si ottiene:

$$V_{BE} - V_{BC} = V_T \ln \left(\frac{I_E - \alpha_R I_C}{I_{E0}} \cdot \frac{I_{C0}}{I_C - \alpha_D I_E} \right)$$

Poichè inoltre è:

$$\frac{I_{C0}}{I_{E0}} = \frac{\alpha_D}{\alpha_R}$$

nonchè: $I_C = I_E - I_B$, l'equazione precedente, dopo alcuni semplici passaggi algebrici diventa:

$$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC} = V_T \ln \frac{I_E/h_{FC} + I_B}{I_B - I_C/h_{FE}}$$

con:

$$h_{FC} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

$$h_{FE} = \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D}$$

e, dividendo numeratore e denominatore per I_B :

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1 + \frac{I_E}{h_{FC} I_B}}{1 - \frac{I_C}{h_{FE} I_B}} = V_T \ln \frac{1 + \frac{I_C}{h_{FC} I_B} + \frac{1}{h_{FC}}}{1 - \sigma} =$$

$$= V_T \ln \frac{1 + \frac{I_C}{h_{FE} I_B} \cdot \frac{h_{FE}}{h_{FC}} + \frac{1}{h_{FC}}}{1 - \sigma} = V_T \ln \frac{\sigma \cdot \frac{h_{FE}}{h_{FC}} + \frac{1+h_{FC}}{h_{FC}}}{1 - \sigma}$$

L'andamento di questa funzione della variabile σ è mostrato in figura 7.3.

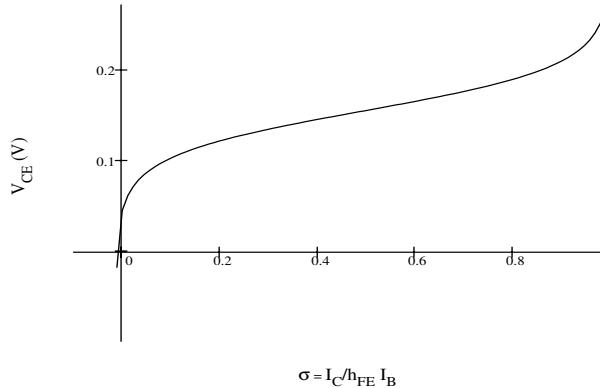


Figura 7.3: Andamento di V_{CE} in funzione della variabile $\sigma = I_C / (h_{FE} I_B)$ secondo l'equazione di Ebers-Moll

Esaminiamo alcuni punti caratteristici di tale funzione, o equivalentemente della sua inversa $\sigma(V_{CE})$.

(1) σ si annulla per:

$$V_{CE} = V_T \ln \left(\frac{1 + h_{FC}}{h_{FC}} \right)$$

con:

$$h_{FC} = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

per cui: $V_{CE} = V_T \ln (1/\alpha_R)$ che, con valori tipici di

$$V_T = 25 \text{ mV}, \quad \alpha_R = 0.2$$

vale:

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1}{\alpha_R} \approx 25 \ln 5 \text{ mV} = 40 \text{ mV}$$

cioè σ , e quindi la corrente di collettore, è praticamente nulla per $V_{CE} \approx 40 \text{ mV}$.

(2) σ è uguale ad 1 per:

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1}{h_{FC}} \frac{1 + h_{FE} + h_{FC}}{1 - \sigma} \rightarrow \infty$$

In pratica σ sarà prossimo ad 1 per valori di V_{CE} di $5 \div 10 \text{ V}$.

(3) Esaminiamo infine la zona di saturazione; quella in cui $V_{CE} \approx 0$. Questa è molto importante nei circuiti digitali, dove un basso valore di V_{CE} è essenziale

per una buona separazione del livello logico “basso” (transistor in saturazione) dal livello logico “alto” (transistor interdetto).

Vediamo che V_{CE} si annulla per:

$$\frac{1 + h_{FC}}{h_{FC}} + \frac{h_{FE}}{h_{FC}}\sigma = 1 - \sigma$$

cioè:

$$\sigma \left(1 + \frac{h_{FE}}{h_{FC}} \right) = -\frac{1}{h_{FC}}$$

e quindi:

$$\sigma \equiv \frac{I_C}{h_{FE} I_B} = -\frac{1}{h_{FE} + h_{FC}}$$

da cui:

$$\frac{I_C}{I_B} = -\frac{1}{1 + \frac{h_{FC}}{h_{FE}}}$$

che, per $h_{FE} = 100$ ed $h_{FC} = 0.25$, ci dà:

$$\frac{I_C}{I_B} \approx -0.997$$

Il punto d'inizio della saturazione può essere considerato quello in cui $\sigma \leq 0.9$, al quale corrisponde un valore di V_{CE}^{sat} dato da:

$$V_{CE}^{sat} = V_T \ln \left[10 \left(\frac{1 + h_{FC}}{h_{FE}} + 0.9 \frac{h_{FE}}{h_{FC}} \right) \right]$$

dove è $h_{FE} \gg 1 + h_{FC}$, per cui questa è approssimativamente:

$$V_{CE}^{sat} = V_T \ln \left(9 \frac{h_{FE}}{h_{FC}} \right) = 285 \text{ mV}$$

dove abbiamo ammesso che sia $h_{FE} = 100$ ed $h_{FC} = 0.01$.

In pratica, se si vuole utilizzare un transistor che operi in saturazione con il minor valore possibile di V_{CE} , si mantiene fisso I_C (ad esempio, nel circuito di figura 7.4, $I_C = V_{CC}/R_L$) e si cerca di ottenere il minimo valore possibile di V_{CE} aumentando I_B .

Se ad esempio volessimo un valore di $V_{CE} = 0.2 \text{ V}$ avremmo:

$$I_C = \frac{5 - 0.2}{1k} = 4.8 \text{ mA}$$

I_B dovrà allora esser maggiore di $4.8/h_{FE}$ che, con $h_{FE} = 50$ è:

$$I_B > 0.096 \text{ mA}$$

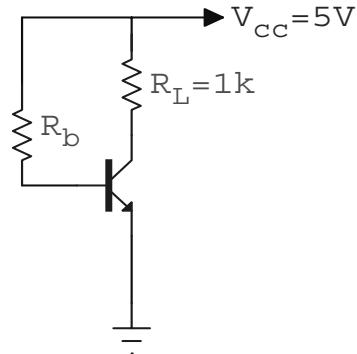


Figura 7.4: Schema per un transistor npn in saturazione

Possiamo, per precauzione, scegliere un valore doppio di questo: $I_B = 0.192 \text{ mA} \approx 0.2 \text{ mA}$. R_b dovrà allora valere:

$$R_b = \frac{5 - V_{BE}^{sat}}{0.2} (\text{k}\Omega)$$

dove $V_{BE}^{sat} \approx 0.8 \text{ V}$. Ne segue:

$$R_b = \frac{5 - 0.8}{0.2} = 21 \text{ k}\Omega$$

Spesso le case costruttrici forniscono, per un dato transistor, un grafico di V_{CE}^{sat} in funzione di σ o di I_C/I_B .

Capitolo 8

Amplificatori a transistor bipolari

8.1 Introduzione

In questa parte ci occuperemo delle strutture più frequentemente adoperate nella realizzazione degli amplificatori a transistor. Il termine “amplificatore” può voler dire un’amplificazione dell’ampiezza di un segnale di tensione, di corrente, di potenza, ma può anche implicare una trasformazione di un segnale di tensione in un segnale di corrente, o viceversa.

Se l’amplificatore fornisce in uscita una replica amplificata del segnale in tensione presente in ingresso, esso è un *amplificatore di tensione*. Il guadagno à allora definito come:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}}$$

Analogamente, se l’amplificatore fornisce in uscita una replica amplificata del segnale di corrente presente in ingresso, essa è un *amplificatore di corrente*, per il quale il guadagno è definito da:

$$A_i = \frac{i_{out}}{i_{in}}$$

Notiamo che un amplificatore di tensione avrà in genere una bassa impedenza d’uscita, mentre l’opposto è vero per un amplificatore di corrente.

Se un segnale di tensione v_{in} in ingresso è trasformato in un segnale di corrente i_{out} in uscita, si dice che si ha un amplificatore *a transconduttanza* per il quale il guadagno è:

$$G = \frac{i_{out}}{v_{in}}$$

dove G ha le dimensioni di Ω^{-1} .

Analogamente, se un segnale di corrente i_{in} in ingresso è trasformato in un segnale di tensione v_{out} in uscita, avremo un guadagno:

$$R = \frac{v_{out}}{i_{in}}$$

si dice in tal caso che l’amplificatore è *a transresistenza*.

Un amplificatore a transconduttanza ha in genere un’elevata impedenza d’ingresso ed un’elevata impedenza d’uscita, mentre un amplificatore a transresistenza ha una bassa impedenza d’ingresso ed una bassa impedenza d’uscita.

In questo capitolo ci occuperemo di discutere le strutture base di alcuni tipi di amplificatori. Ci limiteremo a cercare di comprendere la risposta di tali circuiti a segnali di piccola ampiezza, in modo da poter calcolare i parametri che caratterizzano il circuito facendo uso del modello a parametri h . I parametri che di volta in volta calcoleremo sono: il guadagno, la resistenza d'ingresso R_i e quella d'uscita d'uscita R_o .

Trascureremo gli effetti dovuti alle capacità delle giunzioni ed ai condensatori di accoppiamento e/o di bypass. La risposta che calcoleremo sarà quindi quella riscontrabile ove tali effetti capacitivi possano essere trascurati, cioè entro la “banda passante” dell’amplificatore.

La dipendenza della risposta dalla frequenza sarà discussa nel capitolo dedicato agli amplificatori a FET, dove l’effetto delle capacità è analogo a quello che si ha negli amplificatori a transistor bipolarì.

8.2 Inseguitore di emettitore

Esaminiamo l’amplificatore ad inseguitore di emettitore, o emitter follower mostrato in figura 8.1. Questo è anche noto come “amplificatore a collettore comune”.

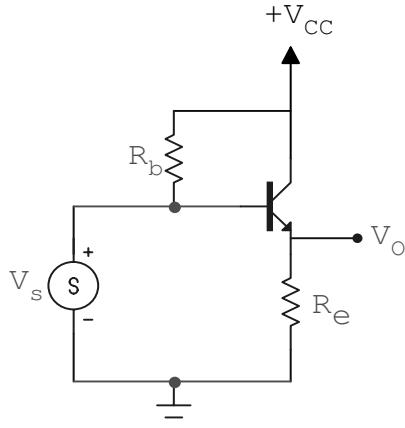


Figura 8.1: Inseguitore di emettitore

Ammettiamo di aver fissato i valori delle resistenze in modo da stabilire il punto di lavoro più opportuno.

Calcoleremo:

- (a) il guadagno in tensione;
- (b) il guadagno in corrente;
- (c) la resistenza d’ingresso;
- (d) la resistenza d’uscita.

Usiamo il modello a parametri h , con i soli parametri h_{ie} ed h_{fe} . Ammettiamo cioè che siano trascurabili i parametri h_{oe} ed h_{re} .

8.2.1 Guadagno in tensione

Con riferimento al circuito equivalente di figura 8.2, dove r_s è la resistenza d'uscita della sorgente v_s , avremo:

$$i_e = i_b + i_c = i_b(1 + h_{fe}) \quad (8.1)$$

$$v_o = R_e i_e = (1 + h_{fe}) R_e i_b \quad (8.2)$$

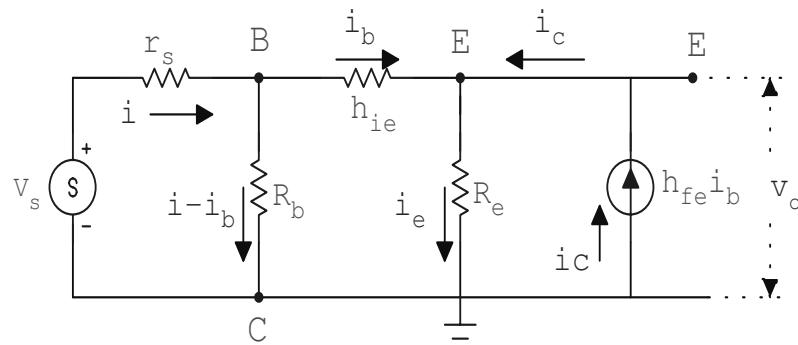


Figura 8.2: Circuito equivalente adoperato per il calcolo del guadagno e delle impedenze d'ingresso e d'uscita dell'inseguitore di emettitore di figura 8.1.

$$v_s = r_s i + R_b(i - i_b) = (r_s + R_b)i - R_b i_b \quad (8.3)$$

$$R_b(i - i_b) = h_{ie} i_b + R_e(1 + h_{fe}) i_b \quad (8.4)$$

Dalla (8.3) otteniamo:

$$i = \frac{v_s + R_b i_b}{r_s + R_b}$$

Sostituendo questa nella (8.4) si ha:

$$R_b \frac{v_s + R_b i_b}{r_s + R_b} - R_b i_b = h_{ie} i_b + R_e(1 + h_{fe}) i_b$$

Da questa segue poi:

$$\frac{R_b}{r_s + R_b} v_s = \left[h_{ie} + R_e(1 + h_{fe}) + R_b - \frac{R_b}{r_s + R_B} R_b \right] i_b$$

cioè:

$$R_b v_s = i_b [h_{ie}(r_s + R_b) + R_e(1 + h_{fe})(r_s + R_b) + R_b(r_s + R_b) - R_b^2]$$

dalla (8.2) segue:

$$i_b = \frac{v_o}{(1 + h_{fe}) R_e}$$

che, sostituita nell'ultima relazione scritta, fornisce:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{(1 + h_{fe}) R_e R_b}{h_{ie}(r_s + R_b) + R_e(1 + h_{fe})(r_s + R_b) + r_s R_b} =$$

$$= (1 + h_{fe}) \frac{R_e R_b}{r_s + R_b} \frac{1}{h_{ie} + R_e(1 + h_{fe}) + \frac{r_s R_b}{r_s + R_b}}$$

Se è poi:

$$R_e(1 + h_{fe}) \gg h_{ie} + \frac{r_s R_b}{r_s + R_b}$$

segue:

$$A_v \equiv \frac{v_0}{v_s} = \frac{R_b}{r_s + R_b}$$

cioè, nelle approssimazioni fatte, A_v dipende solo dalle resistenze r_s ed R_b .

Se inoltre è: $r_s \ll R_b$ si ha:

$$A_v \cong 1 \text{ (positivo)}$$

8.2.2 Impedenza d'ingresso

Questa è definita come:

$$R_i = \frac{v_s}{i}$$

Dalla (8.4) otteniamo:

$$i_b = \frac{R_b i}{R_b + h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})}$$

e dalla (8.3):

$$v_s = (R_b + r_s)i - R_b i_b = (R_b + r_s)i - \frac{R_b^2 i}{R_b + h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})}$$

Ne segue:

$$R_i = \frac{v_s}{i} = \frac{R_b r_s + h_{ie}(R_b + r_s) + R_e(1 + h_{fe})(R_b + r_s)}{R_b + h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})}$$

Se r_s può esser trascurato, questa diventa:

$$R_i = R_b \frac{h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})}{R_b + h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})}$$

che è il parallelo di R_b e di $h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})$. Questo vuol dire che l'impedenza intrinseca del circuito (ignorando R_b) è:

$$R_{in} = h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})$$

Se ad esempio è:

$$h_{ie} = 1 \text{ k}\Omega, h_{fe} = 100, R_b = 10 \text{ k}\Omega, R_e = 1 \text{ k}\Omega$$

troveremo:

$$R_{in} \approx 100 \text{ k}\Omega$$

ed:

$$R_i \approx 10 \text{ k}\Omega$$

Cioè l'impedenza d'ingresso intrinseca R_{in} dell'emitter follower è elevata.

8.2.3 Impedenza d'uscita

Per calcolare R_{out} , poniamo $R_e = \infty$, $v_s = 0$ (cioè cortocircuitiamo il generatore) ed immaginiamo di applicare tra emettitore e massa un segnale di tensione v . Calcoliamo la corrente i erogata dal generatore del segnale e poi R_{out} come:

$$R_{out} = \frac{v}{i}$$

Il circuito diventa quello di figura 8.3, dove si è trascurato R_b rispetto ad r_s .

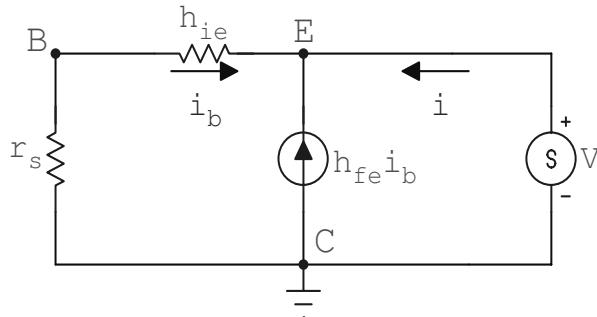


Figura 8.3: Circuito equivalente adoperato per il calcolo dell'impedenza d'uscita dell'inseguitore d'emettitore. Questo circuito è ottenuto da quello di figura 8.2 cortocircuitando il generatore e supponendo di introdurre tra emettitore e massa un segnale di tensione v

Avremo:

$$\begin{aligned} v &= -(r_s + h_{ie})i_b \\ i &= -(1 + h_{fe})i_b \end{aligned}$$

per cui:

$$R_{out} = \frac{v}{i} = \frac{r_s + h_{ie}}{1 + h_{fe}}$$

Se ad esempio fosse $r_s \approx 0$, $h_{ie} = 1 \text{ k}\Omega$ ed $h_{fe} = 100$, avremmo $R_{out} \cong 10 \Omega$.

La resistenza “vista” guardando nei terminali d'uscita è poi il parallelo di R_{out} ed R_e .

8.2.4 Guadagno in corrente

Con riferimento alla figura 8.4 (a), questo è definito come:

$$A_i = \frac{i_e}{i}$$

Avremo allora, facendo uso dello schema di figura 8.5:

$$A_i \equiv \frac{i_e}{i} = \frac{i_e i_b}{i_b i} = (1 + h_{fe}) \frac{R_b}{R_b + h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})}$$

se, come nell'esempio fatto in precedenza, è $R_{in} = h_{ie} + R_e(1 + h_{fe}) \gg R_b$, avremo:

$$A_i = \frac{R_b}{R_{in} + R_b} (1 + h_{fe}) \approx \frac{R_b}{R_{in}} (1 + h_{fe})$$

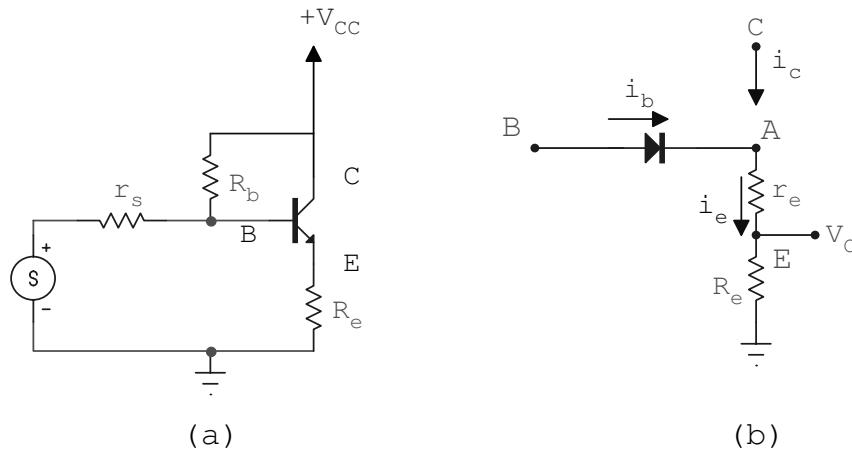


Figura 8.4: (a) l'inseguitore di emettitore, dove è stata messa in evidenza l'impedenza r_s del generatore. (b) modello del transistor che fa uso di un diodo e della resistenza r_e associata alla giunzione emettitore-base.

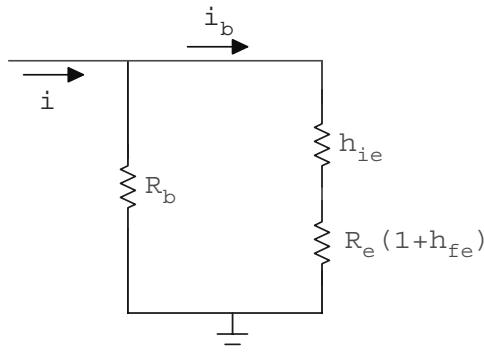


Figura 8.5: Modello adoperato per il calcolo del guadagno in corrente dell'inseguitore di emettitore

Il guadagno in corrente tra emettitore e base è comunque $(1 + h_{fe})$.

8.2.5 Calcolo approssimato dei parametri

I risultati ottenuti in modo “esatto”, utilizzando il modello a parametri h, possono essere ottenuti in modo approssimato con considerazioni intuitive.

Guadagno in tensione

Con riferimento alla figura 8.4 (a), osserviamo che, nella configurazione adoperata, l'ingresso (la base del transistor) e l'uscita (l'emettitore) sono separati soltanto da un diodo (la giunzione base-emettitore) polarizzato direttamente. Sappiamo d'altronde

che la resistenza (differenziale) diretta di un diodo è:

$$r_e = \frac{25}{I(mA)}$$

per cui il circuito: base (ingresso)-uscita (emettitore) può esser ridisegnato come mostrato nella medesima figura, nella parte (b), dove abbiamo evidenziato il diodo (ideale) e la resistenza r_e ad esso associata. Notiamo che:

$$V_A = V_B - 0.7$$

per cui:

$$\Delta V_A = \Delta V_B$$

D'altronde:

$$\Delta V_O = \Delta V_A \frac{R_e}{r_e + R_e} \approx \Delta V_A$$

e quindi:

$$A_v \cong \frac{\Delta V_O}{\Delta V_B} = \frac{\Delta V_O}{\Delta V_A} \cong 1$$

Abbiamo, nel far ciò, ignorato la resistenza r_s della sorgente, e quella di polarizzazione di base R_b . Tenendone conto il risultato cambia poco, come mostra il calcolo “esatto” visto in precedenza.

Impedenza d'ingresso

Questa è:

$$R_{in} = \frac{v_b}{i_b}$$

dove:

$$i_b = \frac{i_e}{1 + h_{fe}}$$

e:

$$v_b \cong v_e$$

per cui:

$$R_{in} = \frac{v_e}{i_e} (1 + h_{fe}) = R_e (1 + h_{fe})$$

Impedenza d'uscita

Questa è definita come:

$$\frac{v_o \text{ (a circuito d'uscita aperto)}}{i_0 \text{ (a circuito d'uscita in corto)}}$$

dove, a circuito d'uscita aperto, $v_o \approx v_b$.

Se il circuito d'uscita è “in corto”, cioè se l'emettitore collegato per il segnale a massa la corrente di base sarà:

$$i_b = \frac{v_b}{r_s}$$

e quindi:

$$i_e = \frac{v_b}{r_s} (h_{fe} + 1)$$

ne segue:

$$R_{out} = \frac{v_b}{\frac{v_b}{r_s}(1 + h_{fe})} = \frac{r_s}{1 + h_{fe}}$$

8.2.6 Emitter follower ad alta impedenza d'ingresso

La resistenza d'ingresso dell'Emitter follower, come visto, è all'incirca:

$$h_{ie} + (h_{fe} + 1) R_e$$

Un amplificatore con un'impedenza d'ingresso molto elevato può essere ottenuto sostituendo il transistor adoperato con un transistor "Darlington", la cui struttura base è stata discussa in precedenza.

Si è visto che per essa si ha:

$$h_{fe} \approx h_{fe1} h_{fe2} \cong (h_{fet})^2$$

Un emitter follower realizzato con un Darlington avrà quindi un'impedenza d'ingresso estremamente elevata. Se ad esempio scegliamo $R_e = 5 \text{ k}\Omega$ ed utilizziamo un Darlington con $h_{fet} = 100$ e quindi con $h_{fe} = 10^4$, avremo un'impedenza d'ingresso di:

$$R_{in} = 5 \cdot 10^7 \Omega = 50 \text{ M}\Omega$$

8.2.7 Inseguitore d'emettitore: sommario delle caratteristiche

Da quanto abbiamo visto, l'inseguitore d'emettitore è caratterizzato dalle seguenti espressioni approssimate per i parametri:

$$A_v \cong \frac{R_b}{r_s + R_b}$$

$$R_{in} \cong h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})$$

$$A_i \cong \frac{R_b}{R_{in}}(1 + h_{fe})$$

$$R_o \cong \frac{r_s + h_{ie}}{1 + h_{fe}}$$

Il guadagno in tensione è positivo ed inferiore ad 1; l'impedenza d'ingresso è elevata; il guadagno in corrente è elevato; l'impedenza d'uscita bassa.

Ad esempio, con la seguente scelta dei valori dei componenti:

$$R_b = 880 \text{ k}\Omega$$

$$R_e = 7 \text{ k}\Omega$$

$$r_s = 20 \text{ k}\Omega$$

$$h_{fe} = 240$$

$$h_{ie} = 6400$$

troviamo:

$$A_v = 0.98$$

$$R_{in} = 1.693 \text{ } M\Omega$$

$$A_i = 125$$

$$R_o = 109 \text{ } \Omega$$

Notiamo che il calcolo è stato effettuato in assenza di carico. Questo equivalebbe ad una resistenza in parallelo ad R_e (eventualmente con un accoppiamento capacitivo, per non modificare il punto di lavoro del transistor). Se ad esempio avessimo un carico di valore uguale ad R_e , dovremmo, nelle relazioni precedenti, sostituire ad R_e un valore metà. Con ciò l'impedenza d'ingresso diverrebbe:

$$R_{in} = h_{ie} + \frac{R_e}{2}(1 + h_{fe}) = 849 \text{ } k\Omega$$

8.3 Amplificatore ad emettitore comune (CE)

Il circuito base di un amplificatore CE è mostrato in figura 8.6 (a), accanto al circuito utilizzabile per il calcolo delle caratteristiche, mostrato in (b):

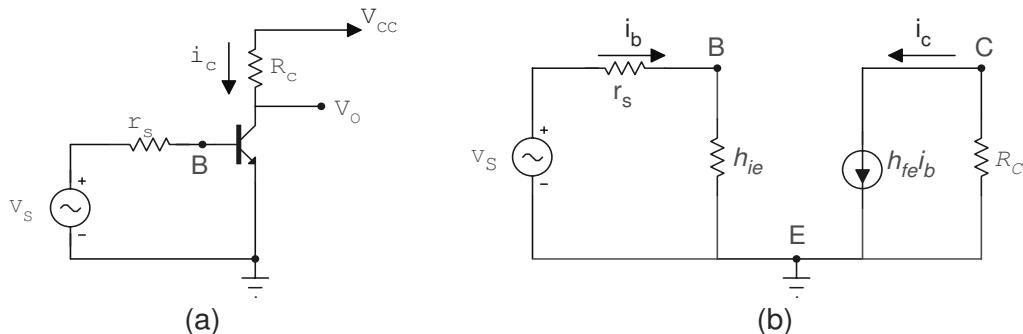


Figura 8.6: (a) amplificatore ad emettitore comune. (b) circuito equivalente adoperato per il calcolo delle caratteristiche dell'amplificatore

Il guadagno in corrente è dato da:

$$A_i = \frac{i_c}{i_b} = \frac{h_{fe} i_b}{i_b} = h_{fe}$$

La resistenza d'ingresso (senza tener conto di r_s) è poi:

$$R_i = \frac{v_{be}}{i_b} = h_{ie}$$

Il guadagno in tensione A_v può esser ottenuto dalla relazione (valida sempre):

$$A_v = -A_i \frac{R_c}{R_i}$$

Per dimostrarla, basta riscrivere A_v come:

$$A_v = \frac{v_o}{v_b} = \frac{v_o/R_c}{v_b/R_c} \frac{R_i}{R_i} = \frac{v_o/R_c}{v_b/R_i} \frac{R_c}{R_i} = -\frac{i_c R_c}{i_b R_i} = -A_i \frac{R_c}{R_i}$$

(poichè $v_o = -R_c i_c$).

Ne segue:

$$A_v = -h_{fe} \frac{R_c}{h_{ie}} \quad (\text{negativo})$$

Possiamo ricalcolare A_v tenendo conto della resistenza r_s della sorgente:

$$A_{vs} \equiv \frac{v_c}{v_s} = \frac{v_c v_b}{v_b v_s} = A_v \frac{v_b}{v_s} = A_v \frac{h_{ie}}{r_s + h_{ie}}$$

Ovviamente, se l'impedenza d'uscita del generatore, r_s , è trascurabile, ritrovaremos $A_{vs} = A_v$.

Per calcolare infine l'impedenza d'uscita R_o , poniamo al solito $v_s = 0$, $R_c = \infty$; immaginiamo poi di applicare un segnale di tensione v tra collettore e massa, calcoliamo la corrente assorbita i e definiamo R_o come:

$$R_o = \frac{v}{i}$$

Notiamo che, nel nostro circuito, con $v_s = 0$ si ha $i_b = 0$ e quindi $i_c = h_{fe} i_b = 0$. Ne segue:

$$R_o = \infty$$

In realtà, l'impedenza d'uscita non sarà infinita, se teniamo conto del parametro h_{oe} che compare nel modello a parametri h completo. In tal caso si può vedere che l'impedenza d'uscita è all'incirca uguale ad $1/h_{oe}$, che è dell'ordine di 10 k.

8.4 Amplificatore CE con una resistenza sull'emettitore

L'aggiunta di una resistenza sull'emettitore aiuta a stabilizzare il punto di lavoro rispetto a variazioni nei parametri del transistor, ed in particolare rispetto a variazioni di $\beta = h_{fe}$. Se infatti il β del transistor aumenta, ciò avrà come conseguenza un aumento della corrente di collettore e di emettitore. Tale aumento darà luogo ad una maggiore caduta di potenziale ai capi della resistenza di emettitore e, se il potenziale di base è fissato da un partitore, ad un minor valore di V_{BE} e quindi ad una minore corrente (feedback negativo).

Abbiamo già visto che il guadagno in tensione di un common-emitter è: $A_v = -h_{fe} R_c / h_{ie}$. Facciamo ora vedere che l'aggiunta di una resistenza sull'emettitore fa sì che il guadagno in tensione divenga:

$$A_v = -\frac{R_c}{R_e}$$

e quindi indipendente dai parametri del transistor, ma dipendente soltanto dalle resistenze esterne R_c ed R_e .

Usiamo ancora una volta il modello a parametri h semplificato (cioè ignoriamo h_{re} ed h_{oe}) e calcoliamo i parametri A_i , R_i , A_v , R_o dell'amplificatore (vedi figura 8.7).

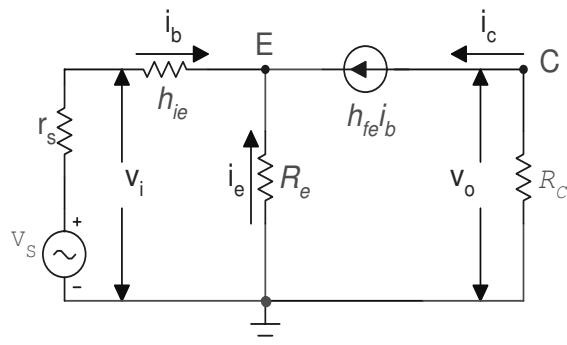


Figura 8.7: Circuito equivalente (a parametri h) adoperato per calcolare le caratteristiche dell'amplificatore CE con una resistenza inserita tra emettitore e massa

Avremo:

$$A_i = \frac{i_c}{i_b} = h_{fe}$$

$$R_i = \frac{v_i}{i_b} = \frac{h_{ie}i_b + R_e(i_b + i_c)}{i_b} = h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})$$

$$A_v = -A_i \frac{R_c}{R_i} = -\frac{h_{fe}R_c}{h_{ie} + R_e(1 + h_{fe})}$$

e se, come quasi sempre accade, è: $R_e(1 + h_{fe}) \gg h_{ie}$, si avrà:

$$A_v = -\frac{h_{fe}}{1 + h_{fe}} \frac{R_c}{R_e} \approx -\frac{R_c}{R_e}$$

La resistenza d'uscita sarà uguale a quella relativa al caso in cui R_e era assente.

Notiamo che il guadagno in tensione è minore di quello che si aveva in assenza di R_e (era uguale a $-h_{fe}R_c/h_{ie}$).

8.4.1 Esempio

Consideriamo l'amplificatore CE di figura 8.8.

Il transistor adoperato ha un $h_{fe} = 50$. I condensatori C_1 e C_3 , di valore molto grande ($50 \mu F$, hanno lo scopo di disaccoppiare l'amplificatore dal resto del circuito (compreso il generatore) per ciò che riguarda le tensioni e correnti stazionarie.

Il condensatore C_2 , posto in parallelo alla resistenza di emettitore, fa sì che l'emettitore sia realmente a massa per il segnale (non per la componente continua).

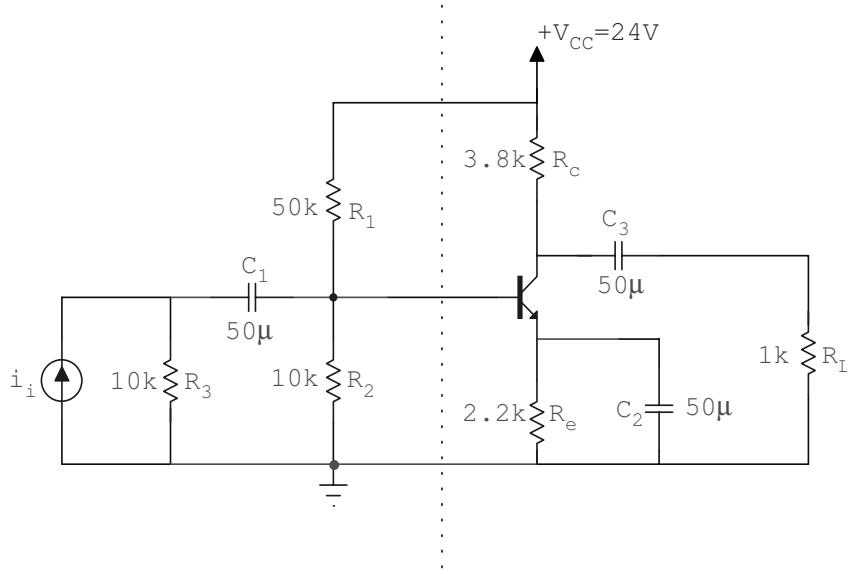


Figura 8.8: Amplificatore ad emettitore comune

Il generatore adoperato è stato schematizzato come un generatore ideale di corrente in parallelo con la propria resistenza interna.

Analizziamo dapprima il punto di lavoro del transistor. Dal punto di vista delle tensioni e correnti quiescenti, la parte del circuito posta a sinistra della linea tratteggiata può esser sostituita dal suo equivalente di Thevenin:

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 8.3 \text{ k}\Omega , V_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} 24 \text{ V} = 4 \text{ V}$$

Nella figura 8.9 abbiamo indicato le altre grandezze rilevanti ai fini del calcolo delle correnti: V_D ed R_e .

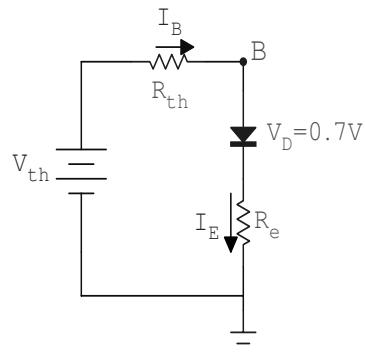


Figura 8.9: Schema adoperato per il calcolo delle correnti quiescenti nel transistor di figura 8.8. R_{th} è il parallelo di R_1 ed R_2 . V_D schematizza la giunzione di emettitore

Poichè si ha:

$$I_E = (h_{FE} + 1) I_B$$

avremo:

$$V_{th} = R_{th} I_B + V_D + R_e (h_{FE} + 1) I_B$$

da cui:

$$I_B = \frac{4 - 0.7}{8.3 + 51 \cdot 2.2} = 0.027 \text{ mA}$$

e quindi:

$$I_E = 0.027 \cdot (h_{FE} + 1) \cong 1.4 \text{ mA}$$

Ne segue:

$$V_{CE} \approx 24 - I_E (R_c + R_e) = 15.6 \text{ V}$$

e poi:

$$h_{ie} = r_{bb'} + h_{fe}r_e \cong h_{fe}r_e \cong h_{fe} \frac{25}{I_E (\text{mA})} = 0.893 \text{ k}\Omega$$

Calcoliamo ora A_i (ignorando h_{re} ed h_{oe}). Il circuito equivalente è quello di figura 8.10.

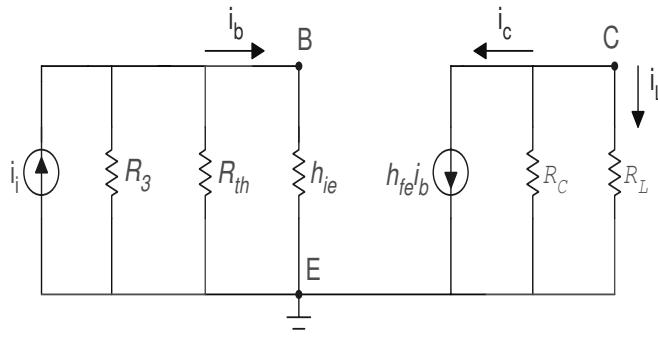


Figura 8.10: Circuito equivalente a parametri h adoperato per il calcolo dei parametri dell'amplificatore CE di figura 8.8. Sono stati trascurati i parametri h_{re} ed h_{oe}

Avremo:

$$i_b = i_i \frac{(R_3 \parallel R_{th} \parallel h_{ie})}{h_{ie}} = 0.835 i_i$$

$$A_i = \frac{i_L}{i_i} = \frac{i_L}{i_b} \frac{i_b}{i_i} = \frac{i_L}{i_b} \cdot 0.835$$

mentre è:

$$i_L = -h_{fe} i_b \cdot \frac{R_L R_c}{R_L + R_c} \cdot \frac{1}{R_L} = -h_{fe} i_b \frac{R_c}{R_L + R_c}$$

da cui:

$$\frac{i_L}{i_b} = -h_{fe} \frac{R_c}{R_L + R_c}$$

e si ottiene infine:

$$A_i = -0.835 \cdot 50 \frac{3.8}{1 + 3.8} = -33.0$$

(Notare che il segno (-) deriva dal fatto che stiamo considerando la corrente che dal collettore fluisce verso massa attraverso il carico. In precedenza si era considerata la corrente entrante nel collettore).

L'impedenza d'ingresso è il parallelo di h_{ie} , di R_{th} e della resistenza da 10 K:

$$R_{in} = 10k \parallel 8.3k \parallel 0.89k = 0.746k$$

L'impedenza d'uscita è semplicemente $R_c = 3.8k$.

Il guadagno in tensione è:

$$A_v = A_i \frac{R_L}{R_i}$$

(ora con il segno (+), vista la convenzione adoperata per A_i) cioè:

$$A_v = -33 \cdot \frac{1}{0.746} \cong -44.0$$

Vediamo ora come si modifichino i valori ottenuti, se si tiene conto dei parametri h_{re} ed h_{oe} , che finora sono stati ignorati.

Ammettiamo dunque che sia:

$$h_{re} = 10^{-4}, h_{oe} = 10^{-4} S$$

Il circuito equivalente ora diventa quello di figura 8.11.

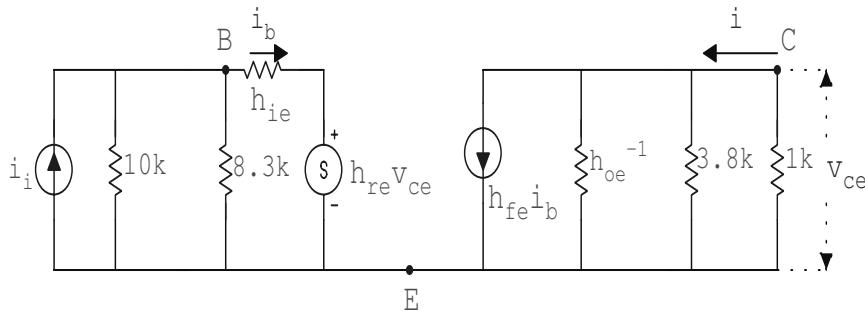


Figura 8.11: Circuito equivalente a parametri h adoperato per il calcolo dei parametri dell'amplificatore CE di figura 8.8. Sono stati inclusi anche i parametri h_{re} ed h_{oe}

Le due resistenze in parallelo nella maglia d'ingresso possono essere sostituite con la resistenza equivalente (4.53 K). Analogamente, la resistenza $1/h_{oe}$ e quella da 3.8 K nella maglia d'uscita possono esser sostituite con l'unica resistenza da 2.75 K. Si ottiene così un circuito più semplice figura 8.12.

Dall'analisi del circuito d'uscita otteniamo:

$$i = h_{fe}i_b + \frac{v_{ce}}{2.75k} = h_{fe}i_b - \frac{1k \cdot i}{2.75k}$$

da cui:

$$i \left(1 + \frac{1}{2.75} \right) = h_{fe}i_b$$

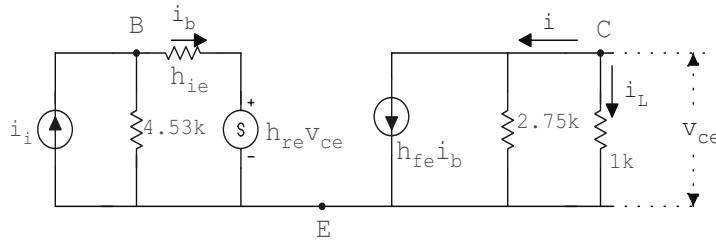


Figura 8.12: Semplificazione del circuito equivalente a parametri h di figura 8.11 adoperato per il calcolo dei parametri dell'amplificatore CE di figura 8.8.

che, con $h_{fe} = 50$, dà:

$$i = 36.7 i_b$$

e poi:

$$i_L = -i = -36.7 i_b \text{ (mA)}$$

$$v_{ce} = R_L i_L = -36.7 \cdot 10^3 i_b \text{ (V)}$$

L'analisi del circuito d'ingresso fornisce:

$$v_b = 10^{-4} v_{ce} + h_{ie} i_b = -10^{-4} \cdot 36.7 \cdot 10^3 i_b + 890 i_b \cong 890 i_b$$

Il guadagno in corrente sarà:

$$A_i = \frac{i_L}{i_i} = \frac{i_L i_b}{i_b i_i} = \frac{i_L i_b}{i_b v_b i_i}$$

con:

$$\frac{i_L}{i_b} = -36.7$$

$$\frac{i_b}{v_b} = \frac{1}{890} \text{ (S)}$$

per calcolare A_i ci serve ancora v_b/i_i . Ora, dal circuito d'ingresso troviamo:

$$i_i = i_b + \frac{v_b}{4.53k} = \frac{v_b}{890} + \frac{v_b}{4530} = \frac{v_b}{744}$$

ed infine:

$$\frac{v_b}{i_i} = 744.0$$

Quindi:

$$A_i = -36.7 \cdot \frac{744}{890} \cong -30.7$$

mentre prima si era trovato $A_i = -33$.

Calcoliamo ora, tenendo conto di tutti i parametri, la resistenza d'ingresso R_i . Ridisegniamo a tale scopo il circuito equivalente, come mostrato in figura 8.13.

Dalla maglia d'ingresso si ha:

$$R_i = \frac{v_b}{i_i} = \frac{h_{ie} i_b + h_{re} v_{ce}}{i_b} \quad (8.5)$$

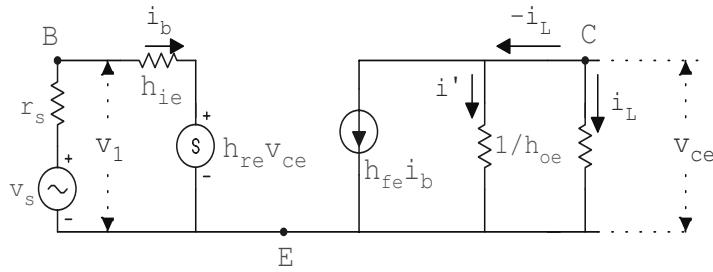


Figura 8.13: Circuito equivalente adoperato per il calcolo della resistenza d'ingresso dell'amplificatore CE di figura 8.8

e, dalla maglia d'uscita:

$$v_{ce} = R_L i_L$$

con:

$$i_L = -(h_{fe} i_b + v_{ce} h_{oe})$$

da cui:

$$v_{ce} = R_L (h_{fe} i_b + v_{ce} h_{oe})$$

che porta a:

$$v_{ce} (1 + R_L h_{oe}) = -R_L h_{fe} i_b$$

da cui:

$$\frac{v_{ce}}{i_b} = -\frac{R_L h_{fe}}{1 + R_L h_{oe}}$$

Questa, sostituita nella 8.5, dà:

$$R_i = h_{ie} - \frac{h_{re} h_{fe} R_L}{1 + R_L h_{oe}}$$

Con i valori dei parametri h dati e facendo uso anche del valore di $R_L = 1K$, troviamo:

$$R_i \cong h_{ie} - 5 (\Omega)$$

cioè una correzione piccolissima rispetto al valore precedente che, ignorando R_1 , R_2 , e la resistenza da 10 K, era appunto h_{ie} .

Il guadagno in tensione sarà ottenibile poi dalla solita relazione:

$$A_v = A_i \frac{R_L}{R_i}$$

Si trova:

$$A_v = -34.5$$

Calcoliamo infine l'impedenza d'uscita R_o :

$$R_o \equiv \frac{v_{ce}}{i_L} \quad (v_s = 0)$$

dove:

$$i_L = h_{fe} i_b + v_{ce} h_{oe} \quad (8.6)$$

i_b è calcolabile dalla maglia d'ingresso (con $v_s = 0$):

$$v_1 = -r_s i_b = h_{ie} i_b + h_{re} v_{ce}$$

da cui:

$$i_b = -\frac{h_{re} v_{ce}}{r_s + h_{ie}}$$

che, sostituita nella 8.6 fornisce:

$$i_L = v_{ce} h_{oe} - v_{ce} \frac{h_{fe} h_{re}}{r_s + h_{ie}} = v_{ce} \left\{ \frac{(r_s + h_{ie}) h_{oe} - h_{fe} h_{re}}{r_s + h_{ie}} \right\}$$

e l'impedenza d'uscita:

$$R_o = \frac{v_{ce}}{i_L} = \frac{r_s + h_{ie}}{(r_s + h_{ie}) h_{oe} - h_{fe} h_{re}}$$

che, essendo tipicamente $h_{fe} h_{re} \ll h_{oe}(r_s + h_{ie})$, è uguale a $1/h_{oe}$.

8.5 Amplificatori in cascata

Più stadi d'amplificazione possano esser posti in cascata per aumentare il guadagno o anche semplicemente per offrire un guadagno corrispondente a quello di un singolo stadio CE, unito ad una bassa impedenza d'uscita quale quella offerta da un emitter follower.

Esaminiamo ad esempio il circuito di figura 8.14.

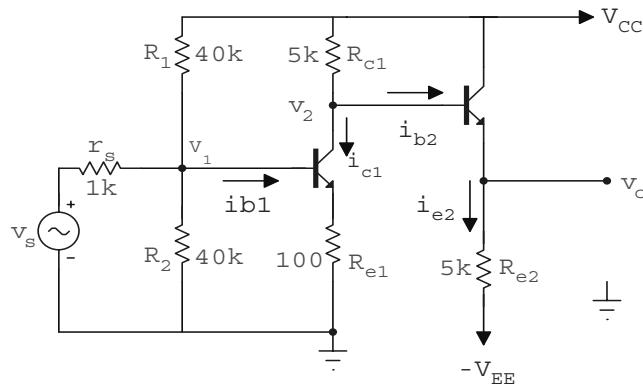


Figura 8.14: Amplificatori in cascata: un CE è seguito da un inseguitore di emettitore

Notiamo che il primo stadio è un CE con una piccola resistenza sull'emettitore, mentre il secondo è un emitter-follower. Il guadagno in tensione di tale amplificatore è:

$$A_v = \frac{v_o}{v_1} = \frac{v_o v_2}{v_2 v_1} = A_{v1} A_{v2}$$

cioè il prodotto dei guadagni dei singoli stadi.

Se si tiene conto della resistenza interna del generatore e si definisce in tal modo un nuovo guadagno A_{vs} :

$$A_{vs} \equiv \frac{v_o}{v_s} = \frac{v_o v_1}{v_1 v_s} = A_v \frac{v_1}{v_s} = A_v \frac{R'_{i1}}{r_s + R'_{i1}}$$

dove R'_{i1} è la resistenza d'ingresso del primo stadio.

Tale relazione segue dal fatto che le resistenze r_s ed R'_{i1} costituiscono un partitore.

Notiamo che R'_{i1} è la resistenza d'ingresso del primo stadio, che è il parallelo di $R_1 \parallel R_2$ con la resistenza $R_{i1} = h_{ie} + R_{e1}(1 + h_{fe})$.

Facendo uso dei valori numerici delle resistenze ed assumendo un h_{fe} di 100, troviamo (con $h_{ie} = 2k\Omega$):

$$\begin{aligned} R_1 \parallel R_2 &= 20k \\ R_{i1} &= 2 + 101 \cdot 0.1 = 12.1k \\ R'_{i1} &= \frac{12.1 \cdot 20}{12.1 + 20} = 7.54k \end{aligned}$$

per cui:

$$A_{vs} = A_v \frac{R'_{i1}}{R'_{i1} + r_s} = A_v \frac{7.54}{8.54} = 0.88A_v$$

Per calcolare il guadagno in tensione del primo stadio, facciamo uso della relazione che esprime tale guadagno in funzione del guadagno in corrente, della resistenza d'ingresso e di quella che costituisce il “carico” dello stadio ¹:

$$A_v = A_i \frac{R_L}{R_i} \quad (8.7)$$

Con R_i =resistenza d'ingresso ed R_L =carico totale.

Nel caso del primo stadio la resistenza R_{i1} è già stata calcolata, mentre R_L è rappresentata dal parallelo di R_{c1} e della resistenza d'ingresso del secondo stadio. Quest'ultimo ha:

$$R_{i2} = h_{ie} + (1 + h_{fe})R_{e2} = 2 + 101 \cdot 5 = 507k$$

Per cui:

$$R_{L1} = R_{i1} \parallel R_{c1} = 4.95 k\Omega$$

Poichè d'altronde il guadagno in corrente del primo stadio è $-h_{fe} = -100$, avremo:

$$A_{v1} = -100 \frac{R_{L1}}{R_{i1}} = -40.9$$

Il guadagno in corrente del secondo stadio, cioè il rapporto tra la corrente di emettitore e quella di base è chiaramente $1 + h_{fe}$. Il guadagno in tensione dell'mitter follower è stato già calcolato in precedenza. Nel caso in esame, siamo interessati al guadagno intrinseco dell'EF, cioè a quello che si ha per un valore dell'imedenza d'uscita dello stadio che lo precede uguale a zero. Ponendo quindi $r_s = 0$ nell'espressione di A_{v2} , otteniamo:

$$A_{v2} = \frac{(1 + h_{fe})R_{e2}}{h_{ie} + (1 + h_{fe})R_{e2}}$$

¹Per la dimostrazione della 8.7 si veda l'ultima sezione di questo capitolo.

e, poichè il denominatore di tale espressione è anche la resistenza d'ingresso dello stadio, R_{i2} , otteniamo:

$$A_{v2} = \frac{R_{i2} - h_{ie}}{R_{i2}} = 1 - \frac{h_{ie}}{R_{i2}}$$

Sostituendo i valori numerici: $R_{i2} = 507k$ e $h_{ie} = 2k$, si trova:

$$A_{v2} = 1 - \frac{2}{507} = 0.996$$

Il guadagno complessivo di tensione è quindi:

$$A_v = A_{v1} \cdot A_{v2} = -40.9 \cdot 0.996 = -40.74$$

Calcoliamo ora il guadagno in corrente. Questo non è uguale al prodotto dei guadagni in corrente dei singoli stadi, poichè non tutta la corrente in uscita dal collettore del primo stadio entra nella base del secondo. Ciò è evidente dallo schema equivalente di figura 8.15:

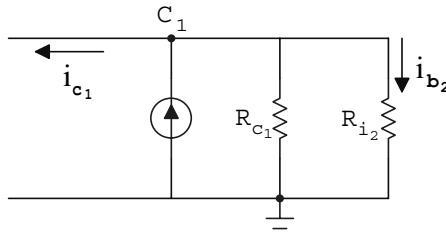


Figura 8.15: Circuito equivalente adoperato per il calcolo del guadagno in corrente complessivo dell'amplificatore di figura 8.14. R_{i2} è l'impedenza d'ingresso del secondo stadio; questa è in parallelo alla resistenza di collettore del primo stadio.

In tale schema R_{i2} è l'impedenza d'ingresso del secondo stadio. Si vede facilmente che:

$$\frac{i_{b2}}{i_{c1}} = -\frac{R_{c1}}{R_{c1} + R_{i2}} = -\frac{5}{5 + 507} = -9.77 \cdot 10^{-3}$$

Il guadagno complessivo in corrente è:

$$A_i = \frac{i_{e2}}{i_{b1}} = \frac{i_{e2}}{i_{b2} i_{c1}} \frac{i_{b2}}{i_{b1}}$$

dove la prima e l'ultima delle frazioni a secondo membro sono i guadagni in corrente del secondo e del primo stadio rispettivamente. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} A_i &= A_{i2} \cdot \frac{i_{b2}}{i_{c1}} \cdot A_{i1} = -(h_{fe} + 1) \cdot 9.77 \cdot 10^{-3} \cdot (-h_{fe}) = \\ &= 101 \cdot 9.77 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = -98.6 \end{aligned}$$

Calcoliamo infine l'impedenza d'uscita dell'amplificatore. Per un emitter-follower, quale è lo stadio finale del nostro circuito, questa è:

$$R_o = \frac{\bar{R}_s + h_{ie}}{1 + h_{fe}}$$

dove \bar{R}_s è l'impedenza d'uscita della sorgente che alimenta l'emitter-follower. Nel nostro caso questa è l'impedenza d'uscita del primo stadio ($R_{o1} = 5k$). Ne segue:

$$R_o = \frac{5 + 2}{101} \cong 69 \Omega$$

L'impedenza d'uscita calcolata tenendo conto anche della resistenza sull'emettitore è poco diversa:

$$R'_o = 69\Omega \parallel 5000\Omega = 68\Omega$$

Riassumendo, abbiamo un amplificatore con un'impedenza d'ingresso:

$$R'_i = R'_{i1} = 7.54k\Omega$$

un'impedenza d'uscita:

$$R'_o = 68\Omega$$

un guadagno in tensione, tenendo conto della resistenza d'uscita del generatore ($r_s = 1k\Omega$):

$$A_{vs} = A_v \cdot 0.88 = -40.74 \cdot 0.88 = -35.8$$

ed infine un guadagno in corrente:

$$A_i = -98.6$$

8.6 Amplificatore in base comune

La configurazione base di un amplificatore di questo tipo è quella mostrata nella figura 8.16(a).

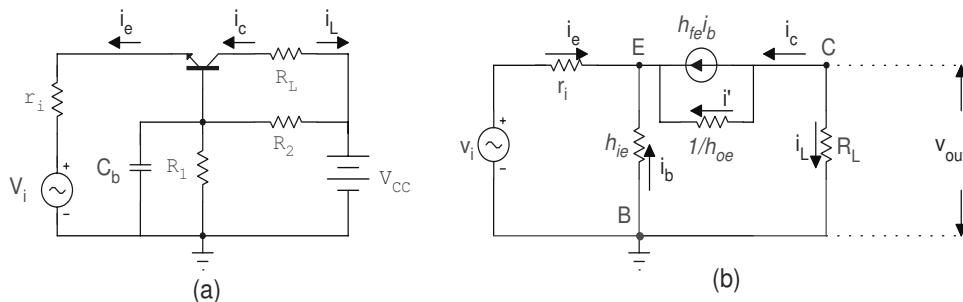


Figura 8.16: (a) amplificatore in base comune. (b) circuito equivalente adoperato per il calcolo dei parametri dell'amplificatore.

Il segnale d'ingresso è applicato all'emettitore. Il condensatore di bypass C_b fa sì che la base sia cortocircuitata a massa per il segnale, mentre le resistenze $R_1 - R_2$ garantiscono una corretta polarizzazione del transistor. Il segnale di tensione in uscita è quello tra collettore e massa (ovvero tra collettore e base).

Per calcolare i parametri di questo amplificatore, facciamo uso del modello a parametri h. A rigore, dovremmo far uso dei parametri h relativi alla configurazione

“base comune”, cioè h_{ib} , h_{fb} , h_{rb} , h_{ob} . Tuttavia possiamo, con un semplice riarrangiamento dei componenti, far uso dei parametri relativi alla configurazione “emettitore-comune”, h_{ie} , h_{fe} , h_{re} , h_{oe} . Inoltre, essendo h_{re} molto piccolo, trascureremo il suo contributo.

Essendo poi la base cortocircuitata a massa dalla capacità C_b , potremo ignorare le resistenze di polarizzazione R_1 ed R_2 . Si ottiene allora il circuito equivalente mostrato nella parte (b) della figura.

Calcoliamo ora i parametri di tale amplificatore.

8.6.1 Guadagno in corrente

Questo è dato da:

$$A_i = \frac{i_L}{i_e}$$

dove:

$$i_L = -i_c = -(h_{fe}i_b + i')$$

ed inoltre:

$$i' = (v_{cb} - v_{eb})h_{oe} = (v_{out} - v_{eb})h_{oe} = (-R_L i_c + h_{ie}i_b)h_{oe}$$

da cui segue:

$$i_L = -(h_{fe}i_b - R_L i_c h_{oe} + h_{ie}i_b h_{oe}) = -(h_{fe}i_b + R_L i_L h_{oe} + h_{ie}i_b h_{oe})$$

Da questa si ha poi:

$$i_L(1 + R_L h_{oe}) = -i_b(h_{fe} + h_{ie}h_{oe}) \quad (8.8)$$

dove è inoltre:

$$i_b = -(i_e + i_c) = -i_e + i_L$$

per cui:

$$i_L(1 + R_L h_{oe}) = i_e(h_{fe} + h_{ie}h_{oe}) - i_L(h_{fe} + h_{ie}h_{oe})$$

e quindi:

$$i_L(1 + R_L h_{oe} + h_{fe} + h_{ie}h_{oe}) = i_e(h_{fe} + h_{ie}h_{oe})$$

ed infine:

$$A_i = \frac{i_L}{i_e} = \frac{h_{fe} + h_{ie}h_{oe}}{1 + h_{fe} + h_{oe}(h_{ie} + R_L)}$$

poichè $h_{oe} \cong 10^{-4} \div 10^{-5}$, vediamo che, con $h_{ie} \approx 2k$ ed $R_L \leq 10k$, i termini che contengono h_{oe} possono esser trascurati, e si ottiene:

$$A_i \cong \frac{h_{fe}}{1 + h_{fe}} \cong 1$$

8.6.2 Impedenza d'ingresso

L'impedenza d'ingresso è:

$$R_i \equiv \frac{v_{eb}}{i_e} = \frac{h_{ie}i_b}{i_b + i_c} = \frac{h_{ie}}{1 + i_c/i_b} = \frac{h_{ie}}{1 - i_L/i_b}$$

dove i_L/i_b può esser ottenuto dalla 8.8:

$$\frac{i_L}{i_b} = -\frac{h_{fe} + h_{ie}h_{oe}}{1 + R_Lh_{oe}}$$

per cui si ottiene:

$$R_i = \frac{h_{ie}}{1 + \frac{h_{fe} + h_{ie}h_{oe}}{1 + R_Lh_{oe}}} = \frac{h_{ie}(1 + R_Lh_{oe})}{1 + (R_L + h_{ie})h_{oe} + h_{fe}}$$

anche qui i termini proporzionali ad h_{oe} possono essere trascurati rispetto agli altri; si ottiene quindi:

$$R_i \cong \frac{h_{ie}}{1 + h_{fe}}$$

che, per i valori tipici: $h_{ie} \cong 2k$, $h_{fe} \cong 100$, vale:

$$R_i \cong 20 \Omega$$

8.6.3 Guadagno in tensione

Il guadagno in tensione A_v è ottenibile dalla solita relazione:

$$A_v = A_i \frac{R_L}{R_i} = \frac{h_{fe}}{1 + h_{fe}} \frac{R_L}{h_{ie}/(1 + h_{fe})} = h_{fe} \frac{R_L}{h_{ie}}$$

dove abbiamo trascurato i termini proporzionali ad h_{oe} . Tali termini non possono esser trascurati nel calcolo di R_o .

8.6.4 Impedenza d'uscita

Per calcolare l'impedenza d'uscita, immaginiamo di applicare ai terminali d'uscita (cioè agli estremi cui è fissata R_L , dopo aver rimosso R_L) un generatore di corrente i_c , come mostrato in figura 8.17.

Cortocircuitiamo il generatore indipendente v_i (ma non la sua resistenza interna r_i) e calcoliamo la differenza di potenziale che risulta tra collettore e base: v_{cb} .

Avremo ovviamente:

$$v_{cb} = v_{ce} + v_{eb} \tag{8.9}$$

con:

$$v_{ce} = \frac{i'}{h_{oe}} = (i_c - h_{fe}i_b) / h_{oe} \tag{8.10}$$

ed anche:

$$i_b = -\frac{v_{eb}}{h_{ie}} \tag{8.11}$$

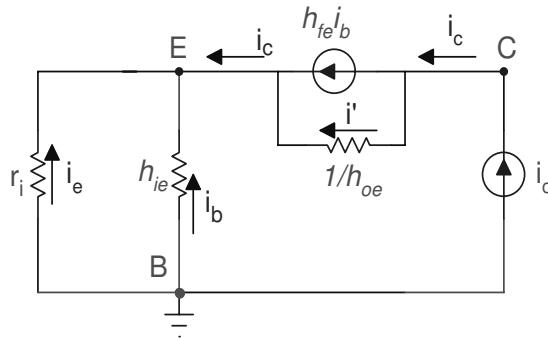


Figura 8.17: Circuito equivalente adoperato per il calcolo dell'impedenza d'uscita dell'amplificatore CB di figura 8.16

$$i_e = -\frac{v_{eb}}{r_i} \quad (8.12)$$

$$i_c = -(i_e + i_b) = v_{eb} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{h_{ie}} \right) = v_{eb} \frac{r_i + h_{ie}}{r_i h_{ie}} \quad (8.13)$$

La 8.11 e la 8.13 danno i_b in funzione di i_c :

$$i_b = -\frac{r_i}{r_i + h_{ie}} i_c$$

Sostituendo questa nella 8.10:

$$v_{ce} = \frac{i_c}{h_{oe}} \left[1 + \frac{r_i h_{fe}}{r_i + h_{ie}} \right]$$

Mentre la 8.13 fornisce:

$$v_{eb} = \frac{r_i h_{ie}}{r_i + h_{ie}} i_c$$

Segue allora dalla 8.9:

$$v_{cb} = v_{ce} + v_{eb} = i_c \left[\frac{1}{h_{oe}} \left(1 + \frac{r_i h_{fe}}{r_i + h_{ie}} \right) + \frac{r_i h_{ie}}{r_i + h_{ie}} \right]$$

e quindi:

$$\begin{aligned} R_o &= \frac{v_{cb}}{i_c} = \frac{1}{h_{oe}} \left(\frac{h_{ie} + r_i(1 + h_{fe})}{r_i + h_{ie}} \right) + \frac{r_i h_{ie}}{r_i + h_{ie}} = \\ &= \frac{1}{h_{oe}(r_i + h_{ie})} [r_i h_{ie} h_{oe} + h_{ie} + r_i(1 + h_{fe})] \end{aligned}$$

Se $r_i = 0$, questa diventa:

$$R_o = \frac{1}{h_{oe}}$$

8.7 Relazione tra guadagno in corrente ed in tensione

Per dimostrare in modo generale la relazione:

$$A_v = A_i \frac{R_L}{R_i}$$

facciamo riferimento al circuito equivalente di figura 8.18:

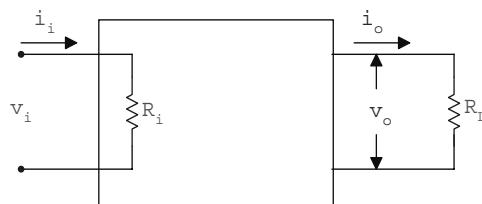


Figura 8.18: Circuito equivalente adoperato per il calcolo della relazione tra guadagno in corrente ed in tensione di un generico amplificatore. R_i è la resistenza d'ingresso; R_L il carico presente all'uscita

Vediamo facilmente che è:

$$i_i = \frac{v_i}{R_i}$$

$$i_o = \frac{v_o}{R_L}$$

da cui:

$$A_i \equiv \frac{i_o}{i_i} = \frac{v_o}{v_i} \frac{R_i}{R_L}$$

e quindi:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = A_i \frac{R_L}{R_i}$$

Capitolo 9

Caratteristiche dei FET ed amplificatori a FET

9.1 Introduzione

Abbiamo visto nell'introduzione al capitolo 5 che, negli anni in cui si effettuarono i primi esperimenti che avrebbero portato all'invenzione del transistor, si seguivano due diverse linee di ricerca. Una delle due, perseguita in particolare da Shockley, era quella di modulare la corrente in una sottile striscia di semiconduttore, mediante l'applicazione di un campo elettrico variabile, perpendicolare alla striscia medesima.

Si dice che quando, con il contributo determinante dello stesso Shockley, fù inventato il transistor bipolare a giunzione (*non* basato su tale idea) Shockley fosse alquanto deluso. La sua idea fù tuttavia perseguita e si arrivò infine, verso la fine degli anni '50, all'invenzione del *transistor a giunzione ad effetto di campo* (JFET)¹.

In questo capitolo, dopo aver discusso la struttura base dei JFET e poi dei MOSFET, passeremo ad esaminare in dettaglio le caratteristiche dei JFET e discuteremo alcune semplici applicazioni di tali dispositivi come amplificatori.

Analizzeremo in particolare la scelta del punto di lavoro e delle reti di polarizzazione, il calcolo della risposta per piccoli segnali a basse frequenze, ed infine i limiti posti dalle capacità parassite e da quelle di accoppiamento, sulla banda passante.

Anche se le applicazioni che esamineremo saranno limitate ai JFET, che sono dei tipici dispositivi a svuotamento, queste possono facilmente essere generalizzate al caso dei MOSFET, sia a svuotamento che ad arricchimento. Nel seguito di questo capitolo adopereremo il termine FET per JFET.

Per una trattazione più dettagliata dell'argomento, si consulti le referenze ([10]), ([7]), ([11]), ([25]).

9.2 Struttura base dei JFET

Uno schema di massima di un JFET a canale n è mostrato in figura 9.1.

In una barretta di semiconduttore di tipo n a debole drogaggio vengono impiantate, sulle due facce opposte, due zone fortemente drogati p (p^+). A queste due

¹Quello realizzato aveva prestazioni decisamente modeste. Si dovette aspettare l'inizio degli anni '70 perché i primi FET "planari" entrassero in uso

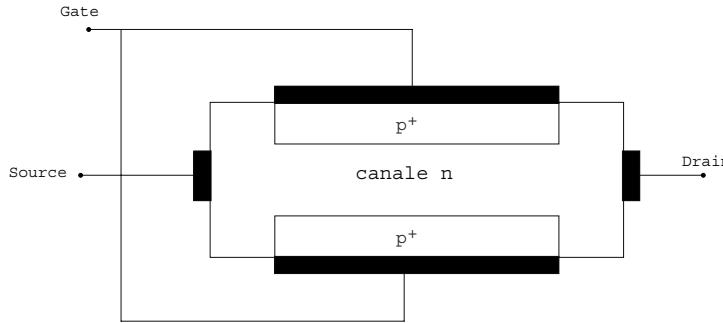


Figura 9.1: Rappresentazione schematica della struttura di un JFET. Le zone indicate in nero costituiscono i contatti metallici. Con p^+ sono indicate zone ad elevata concentrazione p .

zone vengono applicati contatti metallici, che costituiscono l'elettrodo di controllo (il “gate”). Alle due estremità opposte della barretta vengono applicati due ulteriori elettrodi, detti rispettivamente “source” e “drain”, tra cui scorrerà, come vedremo, la corrente che sarà modulata da un opportuno potenziale applicato al gate.

In corrispondenza delle giunzioni tra il “canale” n e le due zone p^+ si formano, in assenza di tensioni applicate, due diodi. A causa della asimmetria del drogaggio, la zona di svuotamento si estenderà in profondità all'interno della zona n.

Se, sempre in assenza di tensione applicata al gate, applichiamo una differenza di potenziale tra source e drain, con quest'ultimo positivo rispetto al source, elettroni fluiranno nel canale n, dal source verso il drain; cioè una corrente I_{DS} passerà nel verso drain-source. Tale corrente sarà, per piccoli valori di V_{DS} , proporzionale a questa. Ciò è illustrato nel tratto iniziale del grafico di figura 9.2 (curva superiore dove V_{GS} è tenuto a 0 Volt).

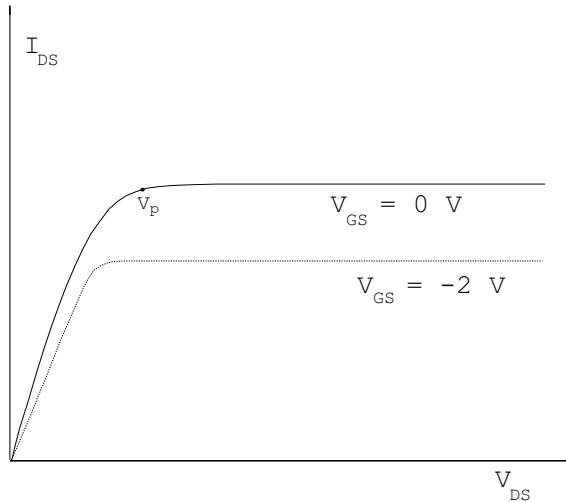


Figura 9.2: Caratteristica $I_{DS}-V_{DS}$ di un JFET a canale n. Le curve mostrate si riferiscono a valori diversi della differenza di potenziale Gate-Source V_{GS}

Se ora il gate è tenuto ad una tensione negativa rispetto al source, le giunzioni

$(n - p^+)$ verranno ad esser polarizzate inversamente, la zona di svuotamento si estenderà ancor più in profondità nel canale e di conseguenza la sezione del canale in cui sono ancora presenti cariche libere (la zona conduttriva del canale) si restringerà. Diminuirà quindi, a parità di V_{DS} , la corrente I_{DS} . Continuando ad aumentare la tensione inversa V_{GS} , la diminuzione della corrente I_{DS} sarà sempre più accentuata.

In altri termini, all'aumentare della polarizzazione inversa V_{GS} del gate, il dispositivo si comporta come una resistenza di valore sempre più elevato, come dimostrato dal tratto iniziale della curva inferiore di figura 9.2 (relativa, a titolo di esempio, ad un valore $V_{GS} = -2$ Volt). Ciò a condizione che V_{DS} rimanga, come vedremo, al di sotto di determinati valori.

Se V_{DS} raggiunge un certo valore di soglia $-V_P$ (con V_P negativo) si trova che la linearità della dipendenza di I_{DS} da V_{DS} viene meno, fino a che la corrente non diventa indipendente da V_{DS} . Ciò è mostrato in figura 9.2.

Il simbolo adoperato per il JFET a canale n è quello mostrato nella parte sinistra di figura 9.3.

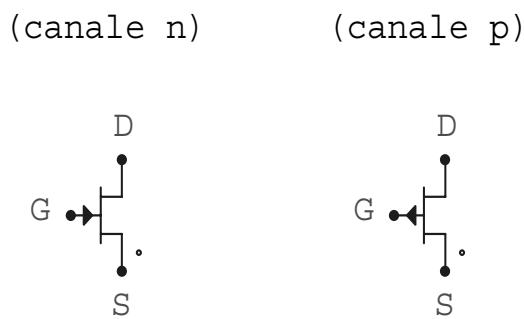


Figura 9.3: Simboli adoperati per i JFET. A sinistra: JFET a canale n; a destra: JFET a canale p

Esistono JFET a canale p, in cui il droggaggio delle inserzioni laterali (gate) è $n+$. In tali transistor al gate va data una tensione positiva rispetto al source. Il simbolo comunemente adoperato per tale JFET è mostrato nella parte destra della medesima figura. In entrambi i tipi di transistor il verso della freccia sul gate è quello che corrisponde ad una polarizzazione diretta della giunzione gate-canale.

Esaminiamo ora più in dettaglio cosa accade in un JFET a canale n quando, con $V_{DS} = 0$, alla giunzione gate-source venga applicata una polarizzazione inversa. In tali condizioni, la zona di svuotamento si estende sempre più in profondità all'interno del canale, la cui conducibilità è affidata alla parte dove continuano ad esser presenti cariche libere. Ciò è mostrato nella parte superiore della figura 9.4. Ne segue che, aumentando tale polarizzazione inversa, la resistenza del canale aumenta sempre più. Si raggiungerà infine una situazione in cui la resistenza del canale tra drain e source diviene (teoricamente) infinita. Si dice che il canale è “strozzato” ed al valore di V_{GS} per cui ciò avviene (negativo per un JFET a canale n, positivo per uno a canale p) si da il nome di *tensione di pinchoff*, indicata comunemente con il simbolo V_P . Notiamo che la tensione di pinchoff è la differenza di potenziale tra il gate ed

il punto P indicato nella parte inferiore della figura 9.4, quando si sia raggiunta la condizione per cui il canale è strozzato.

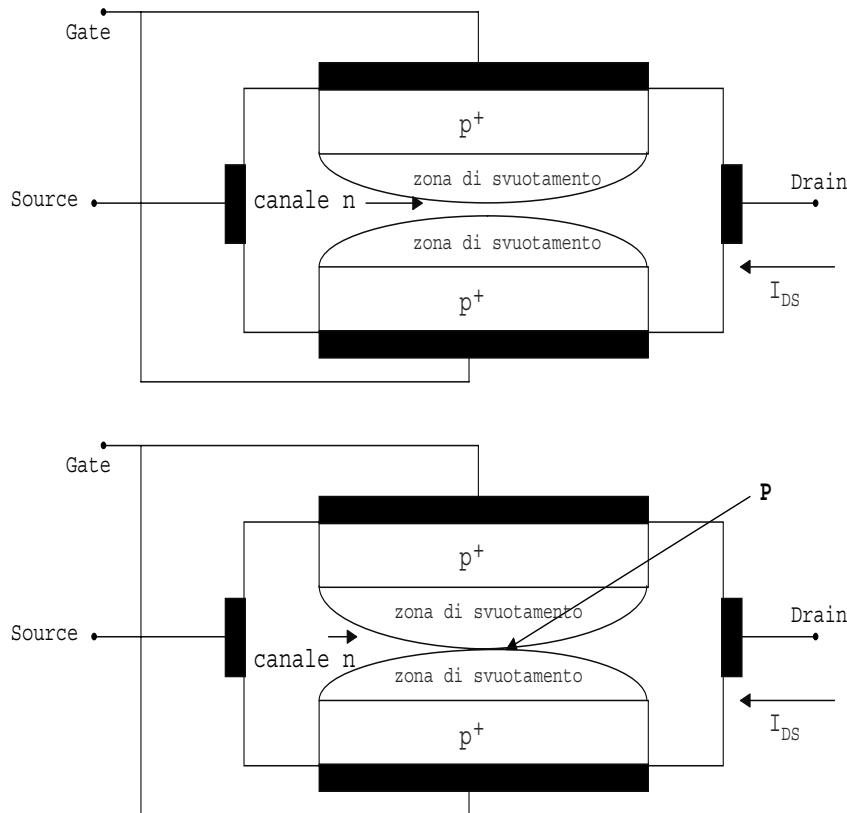


Figura 9.4: Effetto sulla distribuzione delle cariche nel canale, dell'applicazione di una polarizzazione inversa V_{GS} , con $V_{DS}=0$. In Nella figura in basso la differenza di potenziale è tale da causare il “pinchoff” del canale.

La condizione per cui la differenza di potenziale tra gate e canale è tale da causare il *pinchoff* può esser ottenuta anche se, *mantenendo nulla* V_{GS} , aumentiamo la differenza di potenziale V_{DS} . Infatti ciò fa aumentare la differenza di potenziale tra gate e canale, nella parte di questo più vicina al drain (quella dove il potenziale è più elevato). Ciò è mostrato nella parte superiore della figura 9.5, dove si può notare come la zona di svuotamento si sia deformata, avvicinandosi al drain. Continuando ad aumentare V_{DS} si raggiunge il pinchoff, come indicato nella parte inferiore della figura. Il punto indicato con P in figura raggiunge un valore di potenziale tale che V_{GP} sia uguale alla tensione di pinchoff V_P . In tali condizioni, essendo $V_{GS} = 0$ la differenza di potenziale tra source e punto P diviene uguale a quella tra gate e punto P. La differenza di potenziale tra il punto P ed il drain sarà molto piccola, per cui avremo:

$$V_{DS} = |V_P|$$

Quindi $|V_P|$ può anche esser definita come il minimo valore della differenza di potenziale tra drain e source che causa il pinchoff, con $V_{GS} = 0$.

Per valori di V_{DS} superiori a $|V_P|$, la corrente I_{DS} rimane costante, come mostrato in figura 9.2. Al valore di tale corrente per $V_{DS} = |V_P|$ (con $V_{GS} = 0$) si dà il nome di *corrente di saturazione*, indicata con il simbolo I_{DSS} .

Se V_{GS} è diverso da zero (e, per un JFET a canale n, negativo) si trova che il pinchoff ha luogo per valori di V_{DS} più piccoli.

Ciò è consistente con il fatto che il pinchoff ha luogo in corrispondenza ad una differenza di potenziale definita tra gate e canale, e che tale differenza di potenziale è determinata sia dal potenziale del gate che da quello del drain, rispetto al source.

Il valore di V_{DS} che causa il pinchoff, per un generico valore di V_{GS} , è minore di V_P .

Se aumentiamo il valore di V_{DS} al di sopra di $|V_P|$ troviamo che la differenza di potenziale del punto P di figura rispetto al source rimane uguale a V_P , mentre una differenza di potenziale pari a $V_{DS} - |V_P|$ nasce tra il drain ed il punto P. Grazie a questa differenza di potenziale, gli elettroni provenienti dal source possono, una volta raggiunto il punto P, dove inizia la zona di svuotamento, attraversarla e raggiungere il drain.

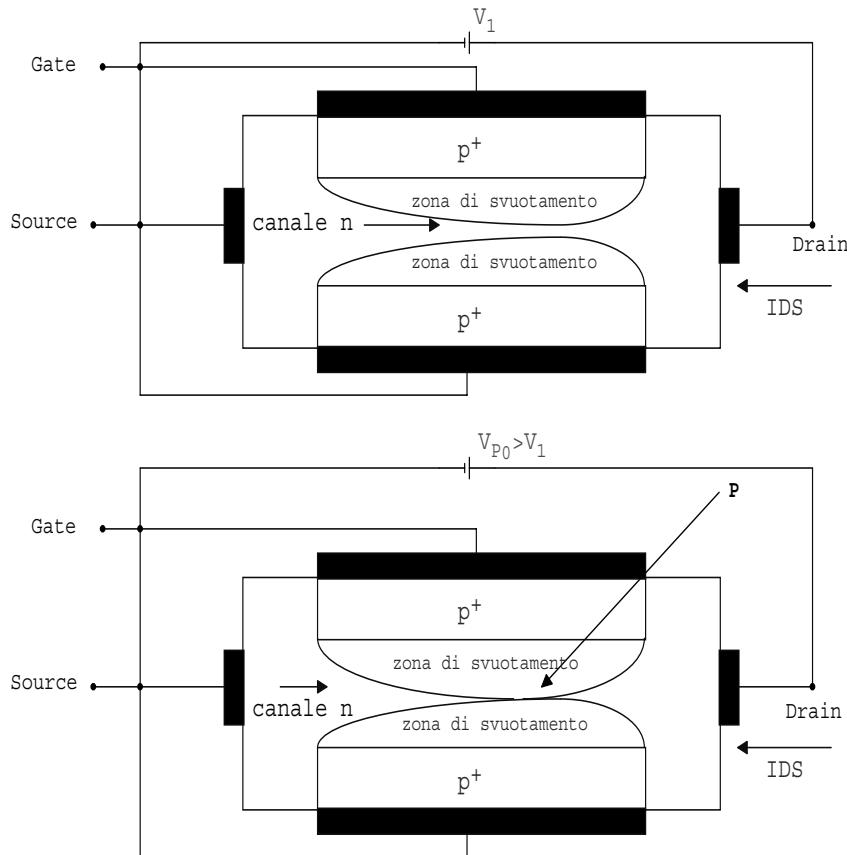


Figura 9.5: Effetto sulla distribuzione delle cariche nel canale, dell'applicazione di una polarizzazione diretta V_{DS} , con $V_{GS}=0$. Nella figura in basso la differenza di potenziale è tale da causare il “pinchoff” del canale.

L'andamento della corrente in funzione di V_{DS} , per diversi valori di V_{GS} , è mostrato in figura 9.6. Le curve riportate sono relative a valori di V_{GS} decrescenti

andando dall'alto verso il basso.

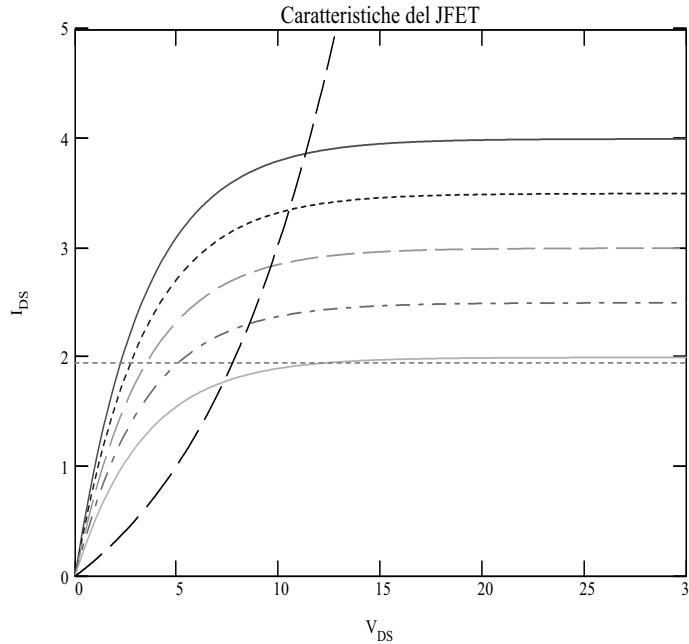


Figura 9.6: Andamento della corrente I_{DS} nel canale del JFET in funzione di V_{DS} , per diversi valori di V_{GS} . Le curve riportate sono relative a valori di V_{GS} decrescenti andando dall'alto verso il basso

Si può notare la zona ohmica iniziale, quella in cui c'è l'inizio della riduzione del canale e poi quella in cui le caratteristiche divengono orizzontali, nota come *zona di saturazione*. Il valore di I_{DS} in saturazione è tanto più grande quanto minore il valore di $|V_{GS}|$.

La differenza di potenziale in corrispondenza alla quale si ha l'inizio della saturazione è data da:

$$\bar{V}_{DS} \cong V_P - V_{GS}$$

Ovviamente, per $V_{GS} = V_P$ avremo $\bar{V}_{DS} = 0$. In tali condizioni si ha $I_{DS} = 0$ per qualsiasi valore di V_{DS} (JFET *interdetto*).

In figura 9.6 la curva tratteggiata unisce i punti di pinchoff corrispondenti ai diversi valori di V_{GS} .

IL JFET può essere adoperato come amplificatore nella zona in cui le caratteristiche sono delle rette orizzontali, cioè nella zona di saturazione. Vediamo che in tale zona una variazione della tensione applicata al gate: ΔV_{GS} , causa una variazione nella corrente: ΔI_{DS} , indipendente dal valore di V_{DS} . In altre parole, il JFET è un dispositivo attraverso cui si controlla una corrente con un segnale di tensione.

A differenza del transistor bipolare a giunzione, in cui alla conducibilità contribuiscono sia elettroni che lacune, in un JFET i portatori di carica sono di un solo segno: negativi per un JFET a canale *n*, positivi per uno a canale *p*. Di qui la denominazione di dispositivi *unipolari* spesso adoperata per indicare i JFET.

Poichè il diodo ($p^+ - n$) è polarizzato inversamente, l'impedenza "vista" dal generatore del segnale di tensione $\Delta V_{GS} = v_{gs}$ è molto elevata e la corrente che fluisce tra gate e canale è sostanzialmente nulla. Questo è un importante vantaggio del FET rispetto ai normali transistor bipolarì.

Aumentando ulteriormente la tensione V_{DS} si raggiunge un valore in corrispondenza al quale la corrente I_{DS} aumenta molto rapidamente. Ciò è legato al fatto che per tale valore di V_{DS} la differenza di potenziale tra gate e canale aumenta così tanto da causare un processo a valanga (breakdown). Il valore di V_{DS} a cui avviene il breakdown dipende quindi anche da V_{GS} . Indicando con BV_{DS} la tensione di breakdown, si trova che essa dipende da V_{GS} come segue:

$$|BV_{DS}| = |V_{BR}| - |V_{GS}|$$

dove con $|V_{BR}|$ abbiamo indicato la differenza di potenziale tra il gate ed il punto P di figura 9.4 che causa il brakdown della giunzione. Tensioni tipiche di breakdown sono nel range $20 \div 100$ Volt.

Riassumendo, possiamo distinguere, nel funzionamento del JFET, tre zone distinte:

- (a) La zona ohmica, in cui la differenza di potenziale drain-source è piccola ed il canale è ancora aperto. La corrente di drain in tale zona può essere espressa come:

$$I_D = K_p [2(V_{GS} - V_P) V_{DS} - V_{DS}^2]$$

per $0 < V_{DS} \leq (V_{GS} - V_P)$.

Questa, per $V_{DS} \ll |V_P|$ può esser approssimata come:

$$I_D = K_p [2(V_{GS} - V_P) V_{DS}]$$

La costante K_p è poi data da:

$$K_p = \frac{I_{DSS}}{V_P^2}$$

- (b) La zona di saturazione, $V_{DS} > (V_{GS} - V_P)$, in cui la corrente I_{DS} non dipende da V_{DS} . La corrente in tale zona è data da:

$$I_D = K_p (V_{GS} - V_P)^2$$

dove, per un JFET a canale n deve essere: $V_P \leq V_{GS} \leq 0$.

Il luogo dei punti di pinchoff, cioè della curva che separa la zona ohmica da quella di saturazione, può esser ottenuto da tale equazione ponendo $V_{GS} = V_{DS} + V_P$:

$$I_D = K_p V_{DS}^2$$

che è l'equazione di una parabola.

- (c) La zona di interdizione. Questa è la zona in cui la differenza di potenziale V_{GS} è minore di V_P (dove, per un JFET a canale n, V_P è negativo). In tale zona la corrente è nulla, $I_D = 0$.
- (d) La zona di *breakdown*, in cui la differenza di potenziale V_{DS} applicata è così elevata da causare un brusco aumento della corrente ed eventualmente la rottura del dispositivo.

9.3 Struttura base dei MOSFET

I MOSFET, o Metal-Oxide-Semiconductor-Field-Effect-Transistor, esistono in una notevole varietà di strutture: a *canale n*, a *canale p*, ad *arricchimento*, a *svuotamento*.

Esaminiamo, per cominciare, la struttura di un MOSFET a canale n ad arricchimento (*n channel enhancement*) noto come NMOS. Questa è mostrata in figura 9.7.

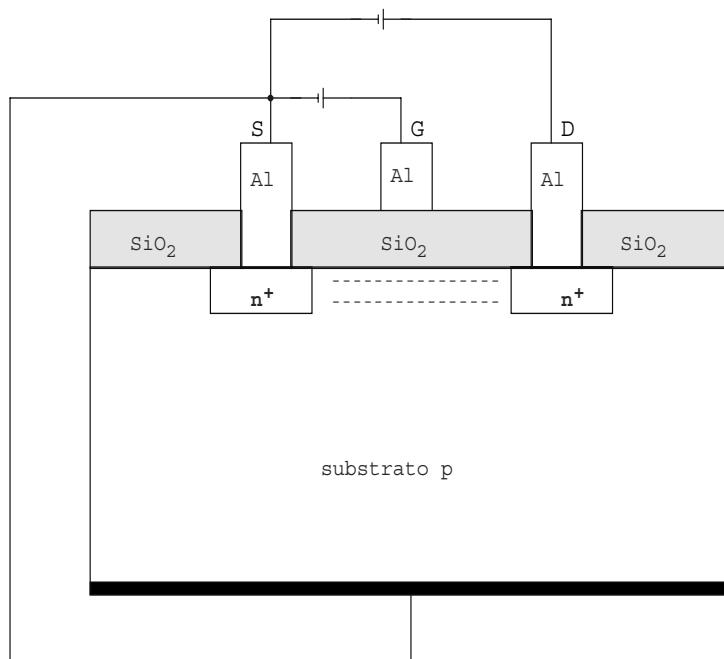


Figura 9.7: Struttura base di un MOSFET. Sono indicati i contatti metallici esterni (Alluminio), lo strato di biossido di silicio, le zone con drogaggio n^+ , il “substrato” p . Il “canale” tra le due zone n^+ è indicato in tratteggio.

Due regioni n^+ ad elevato drogaggio sono inserite in un substrato di tipo p . La superficie superiore è coperta da un sottile strato di biossido di silicio, eccezion fatta per due inserzioni metalliche (Al) che costituiscono i contatti esterni delle zone n^+ . La prima di queste costituisce il *Source*, la seconda il *Drain*. Sulla parte centrale della zona di SiO_2 esiste un ulteriore elettrodo d'alluminio (il *Gate*). Inferiormente esiste un ultimo elettrodo, quello del *Substrato*.

Normalmente il source ed il substrato sono uniti insieme, mentre il gate è tenuto ad un potenziale positivo rispetto al source. Anche il drain è tenuto ad un potenziale positivo rispetto al source.

Notiamo ora che, prima che tali potenziali vengano applicati, elettroni diffondono dalle zone n^+ verso la zona p del substrato. Se ora il gate è portato ad un potenziale positivo rispetto al source (ed al substrato), questi elettroni vengono attratti nella parte di substrato compresa tra drain e source, aumentando in tal modo la conducibilità di tale regione e creando un “canale” conduttivo. La differenza di

potenziale applicata tra drain e source causerà allora un passaggio di corrente nel verso drain-source. La minima differenza di potenziale V_{GS} per cui ciò avviene è detta “tensione di soglia” ed indicata con il simbolo V_t .

All'aumentare di V_{DS} , con V_{GS} costante e maggiore di V_t , la corrente aumenta. Il sistema si comporta come una resistenza (in modo analogo al JFET nella zona ohmica). Questa è quindi la zona ohmica del MOSFET.

Notiamo ora che l'aumento di V_{DS} , cioè di V_D , causa una diminuzione del valore relativo della tensione di gate rispetto a quella del canale in prossimità del drain, il che a sua volta causa un restringimento del “canale” in tale zona.

Quando V_{DS} diviene abbastanza grande e V_{DG} diventa inferiore a V_t (cioè: $V_{DG} = V_{GS} - V_{DS} \leq V_t$) si ha un pinchoff, analogo a quello già visto nel caso del JFET. Ogni ulteriore aumento di V_{DS} non causa sostanziali incrementi nella corrente I_{DS} . Il MOSFET è entrato nella “zona di saturazione”.

La caratteristica completa del MOSFET, cioè la dipendenza funzionale di I_{DS} da V_{DS} , per V_{GS} costante, è mostrata in figura 9.8.

Figura 9.8: Caratteristica di un MOSFET: I_{DS} in funzione di V_{DS} per V_{GS} = costante. Sono indicate la zona di saturazione ($V_{GS} > V_t$) e quella ohmica.

Continuando ad aumentare V_{DS} si raggiunge un punto in cui si verifica il breakdown del MOSFET e la corrente aumenta molto per ulteriori piccoli aumenti di V_{DS} . Ciò è del tutto analogo a quanto accade nel caso del JFET. Valori tipici della tensione di breakdown vanno da alcune decine di Volt a circa 100 Volt.

Il simbolo del MOSFET ad arricchimento a canale n, è quello di figura 9.9. La figura(a) mostra il simbolo completo, dove sono indicati i terminali di source (S), drain (D), gate (G) e substrato o body (B). Il verso della freccia è quello che corrisponde al diodo substrato-regione n^+ . La figura (b) è il simbolo abbreviato, adoperato quando il substrato è unito al source. Ora il verso della freccia è quello della corrente nel FET.

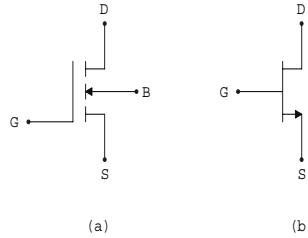


Figura 9.9: Simboli adoperati per un MOSFET *ad arricchimento* a canale n: (a) il simbolo completo; (b) simbolo abbreviato, adoperato quando il substrato è unito al source.

Notiamo che, essendo il gate completamente isolato, l'impedenza “vista guardando nel gate” è (teoricamente) infinita. Nella pratica essa è molto grande ($\approx 10^8 M\Omega$).

Nella zona ohmica ($V_{DS} \leq V_{GS} - V_t$), la caratteristica di trasferimento di un NMOS può esser espressa come:

$$I_{DS} = K_P [2(V_{GS} - V_t)V_{DS} - V_{DS}^2] \quad (9.1)$$

Per $V_{DS} \geq V_{GS} - V_t$, cioè nella zona di saturazione, la caratteristica di trasferimento si ottiene da questa, sostituendo a V_{DS} la grandezza $V_{GS} - V_t$. Infatti la corrente nella zona di saturazione è quella raggiunta dalla corrente nella zona ohmica, quando V_{DS} raggiunge il valore $V_{GS} - V_t$. Si ha quindi:

$$I_{DS} = K_P (V_{GS} - V_t)^2$$

Per $V_{GS} = 0$ questa diventa:

$$I_{DS} = K_P V_t^2 \equiv I_{DSS}$$

dove I_{DSS} è la corrente che fluisce tra drain e source quando $V_{GS} = 0$ (*corrente di saturazione*). I_{DSS} è molto piccola ($\approx nA$).

Segue dall’ultima relazione che la costante K_P è data da:

$$K_P = \frac{I_{DSS}}{V_t^2}$$

per cui:

$$I_{DS} = \frac{I_{DSS}}{V_t^2} (V_{GS} - V_t)^2 = I_{DSS} \left(\frac{V_{GS}}{V_t} - 1 \right)^2$$

Esiste il MOSFET a canale p ad arricchimento, in cui tutti i segni e le polarizzazioni sono invertiti rispetto a quello a canale n ora esaminato. Il funzionamento è altrimenti del tutto analogo.

I simboli adoperati per questo MOSFET (PMOS) sono mostrati in figura 9.10. Notiamo che ora la corrente scorre nel verso source-drain (con il gate unito al source).

Esaminiamo ora un dispositivo a *svuotamento*, prendendo ad esempio un MOSFET a canale n, quale quello mostrato in figura 9.11.

Ora nella zona compresa tra le due regioni n^+ esiste un canale n. In assenza di tensione applicata al gate il dispositivo quindi condurrà.

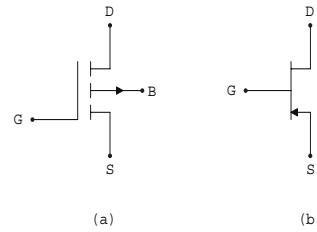


Figura 9.10: Simboli adoperati per un MOSFET *ad arricchimento* a canale p: (a) il simbolo completo; (b) simbolo abbreviato, adoperato quando il substrato è unito al source.

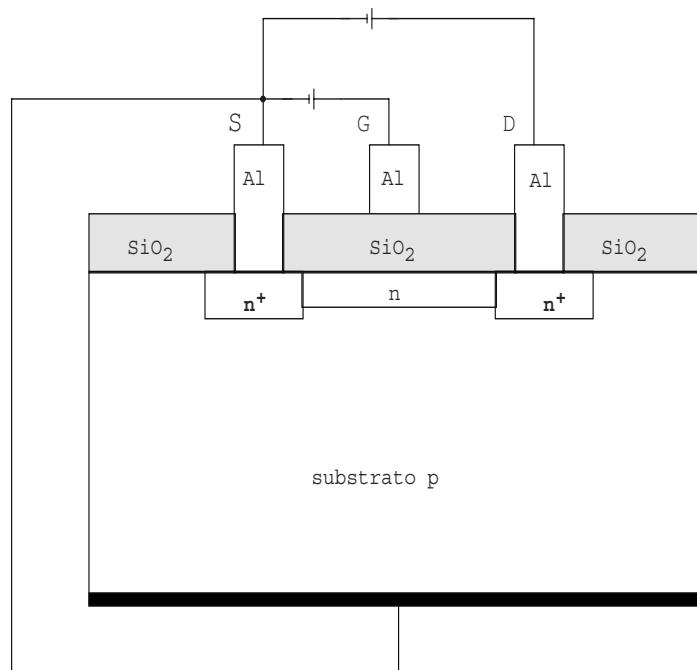


Figura 9.11: Struttura schematica di un MOSFET a canale n *a svuotamento*. Sono indicati contatti metallici in allumicio, lo strato di biossido di silicio, le zone con drogaggio n^+ , il canale n che viene chiuso quando il gate è tenuto ad un potenziale negativo rispetto al source.

Se il gate è tenuto ad un potenziale negativo rispetto al source (unito al substrato), gli elettroni contenuti nella zona n del substrato vengono respinti. Di conseguenza si formerà una zona di svuotamento, cioè un restringimento del canale. Viceversa, se il gate è tenuto ad un potenziale positivo, ulteriori elettroni saranno attratti verso lo strato superiore di SiO_2 ; si avrà un ulteriore allargamento del canale, cioè un aumento della conduttanza. In questo secondo caso si dice che il transistor opera nel modo di *arricchimento*, nel primo, di *svuotamento*.

Ammettiamo ora di operare nel modo di *svuotamento*, cioè con il gate tenuto ad un potenziale negativo. Se la differenza di potenziale V_{DS} vien fatta aumentare, la corrente aumenterà dapprima in modo lineare (zona ohmica) ma, per ulteriori

aumenti di V_{DS} si avrà un fenomeno analogo a quello già visto nei casi precedenti: la differenza di potenziale V_{DG} aumenta, e ciò causa un restringimento del canale in prossimità del drain. L'andamento della corrente I_{DS} in funzione di V_{DS} comincerà a deviare dalla linearità. Se la differenza di potenziale V_{DS} supera un certo valore, si ha il pinchoff del canale e la corrente diverrà, come nei casi precedenti, indipendente da V_{DS} . Questa è la *zona di saturazione* del transistor.

Come nel caso del JFET, chiamiamo V_P il valore di V_{DS} che causa la saturazione con $V_{GS} = 0$. Questo è anche il minimo valore di V_{GS} che causa il pinchoff con $V_{DS} = 0$.

La corrente che fluisce tra drain e source quando $V_{GS} = 0$ e $V_{DS} = |V_P|$ è nota come *corrente di saturazione*: I_{DSS} .

La caratteristica di questo transistor nel piano $I_{DS}-V_{DS}$, con $V_{GS} = 0$ è mostrata in figura 9.12.

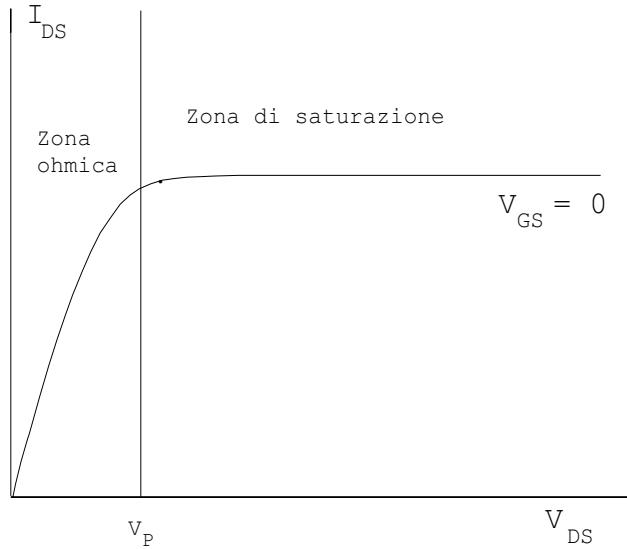


Figura 9.12: Caratteristica di un MOSFET: I_{DS} in funzione di V_{DS} per $V_{GS} = 0$.

La saturazione si ha per valori di V_{DS} tali che la differenza di potenziale gate-canale in prossimità del drain uguagli V_P . Cioè:

$$V_{GD} = V_{GS} - V_{DS} = V_P$$

o anche:

$$V_{DS} = V_{GS} - V_P$$

La caratteristica di trasferimento nella zona ohmica ($0 < V_{DS} \leq V_{GS} - V_P$) è data da:

$$I_{DS} = K_P [2(V_{GS} - V_P)V_{DS} - V_{DS}^2]$$

che, per piccoli valori di V_{DS} ($V_{DS} \ll V_P$) può esser approssimata da:

$$I_{DS} = K_P [2(V_{GS} - V_P)V_{DS}]$$

con:

$$K_P = \frac{I_{DSS}}{V_P^2}$$

Nella zona di saturazione: $V_{DS} \geq V_{GS} - V_P$, la differenza di potenziale tra drain e source è maggiore della tensione di pinchoff e la corrente I_{DS} diviene praticamente indipendente da V_{DS} . La corrente in tale zona può esser ottenuta dall'equazione precedente ponendo: $V_{DS} = V_{GS} - V_P$. Si ottiene allora:

$$I_{DS} = K_P (V_{GS} - V_P)^2$$

Per un valore prefissato di I_{DS} questa equazione fornisce due valori diversi di V_{GS} , solo uno dei quali è fisicamente significativo ($V_{GS} > V_P$ per un FET a canale n; $V_{GS} < V_P$ per uno a canale p). Il luogo dei punti di pinchoff, che definisce il confine tra la zona ohmica e quella di saturazione, si ottiene ponendo nell'ultima equazione:

$$V_{GS} = V_{DS} + V_P$$

Si trova:

$$I_{DS} = K_P V_{DS}^2$$

che è l'equazione di una parabola.

Il simbolo adoperata per il MOSFET a canale n a svuotamento è quello mostrato in figura 9.13. In (a) è mostrato il simbolo completo, in (b) quello relativo al caso in cui il source sia unito al substrato.

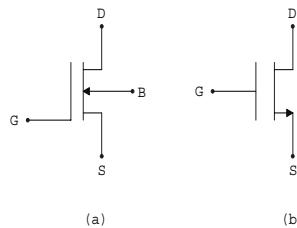


Figura 9.13: Simbolo adoperata per il MOSFET a canale n a svuotamento. In (a) è mostrato il simbolo completo, in (b) quello relativo al caso in cui il source sia unito al substrato.

Il simbolo adoperato per il MOSFET a canale p a svuotamento differisce da quello della figura solo per il verso delle frecce.

9.4 Caratteristiche dei FET

Le curve caratteristiche di un tipico FET a canale n sono mostrate in figura 9.14 dove v'è notato che, per un dispositivo a svuotamento quale il JFET, V_{GS} deve esser negativo.

I punti indicati con le labels A,B,C,..., sono i punti di *pinchoff* corrispondenti ai vari valori di V_{GS} .

La zona di saturazione inizia per $V_{DS} = V_A$ se $V_{GS} = V_1$, per $V_{DS} = V_B$ se $V_{GS} = V_2$, etc..

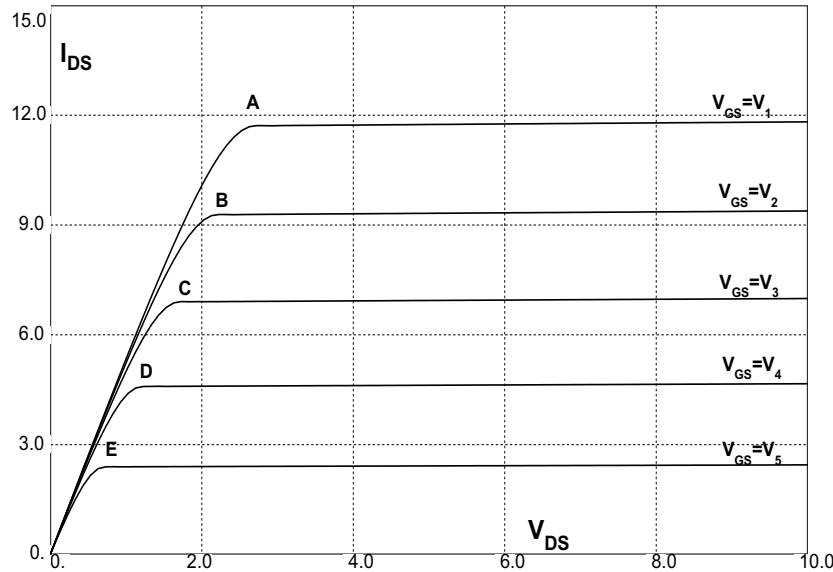


Figura 9.14: Caratteristiche tipiche di un JFET: è riportata la corrente I_{DS} in funzione di V_{DS} per valori diversi della differenza di potenziale V_{GS} . I punti indicati con A,B,.. sono i punti di *pinchoff* relativi ai dati valori di V_G

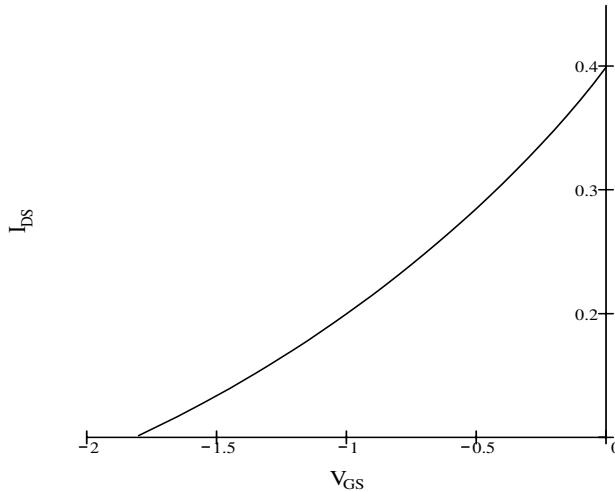


Figura 9.15: Relazione tra I_{DS} e V_{GS} nella zona di saturazione

La caratteristica che esprime l'andamento di I_D in funzione di V_{GS} nella zona di saturazione è mostrata in figura 9.15.

Questa è a volte espressa analiticamente nella forma:

$$I_{DS} = I_{DSS} \left[1 + 3 \frac{V_{GS}}{V_P} + 2 \left(-\frac{V_{GS}}{V_P} \right)^{3/2} \right] \quad (9.2)$$

che è spesso approssimata con un andamento quadratico:

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^n \quad (9.3)$$

con $n \approx 2$.

Come visto, un FET è un dispositivo che controlla una corrente (la corrente nel canale, I_{DS}) mediante una tensione (la differenza di potenziale V_{GS} tra gate e source). Un parametro importante è quindi la transconduttenza g_m :

$$g_m \equiv \frac{\Delta I_{DS}}{\Delta V_{GS}} \quad (9.4)$$

Facendo uso dell'ultima equazione (con $n=2$) si trova:

$$g_m = -\frac{2}{V_P} \sqrt{I_{DS} I_{DSS}} \quad (9.5)$$

La corrente I_{DS} nella zona di saturazione non è rigorosamente costante per V_{GS} fissato, ma dipende leggermente ² anche da V_{DS} . Scriveremo allora:

$$I_D \equiv I_{DS} = f(V_{GS}, V_{DS})$$

e, per piccole variazioni di V_{GS} e V_{DS} :

$$\delta I_D = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} \delta V_{GS} + \frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}} \delta V_{DS}$$

cioè, indicando con lettere minuscole le componenti variabili di correnti e tensioni:

$$i_d = g_m v_{gs} + g_d v_{ds} \quad (9.6)$$

dove:

$$g_d = \frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}} \quad (9.7)$$

è la conduttanza differenziale del canale nella zona di saturazione: $g_d = 1/r_d$.

Valori tipici di g_m ed r_d sono:

$$g_m \approx 3 \text{ mS}$$

$$r_d \approx 100 \text{ k}\Omega$$

Spesso r_d è così elevato da poter esser trascurato.

Confrontiamo la (9.6) con l'analogia equazione per il transistor bipolare nella configurazione "emettitore comune":

$$i_c = h_{fe} i_b + h_{oe} v_{ce}$$

con:

$$v_{be} = h_{ie} i_b$$

da cui:

$$i_c = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} v_{be} + h_{oe} v_{ce}$$

Dal confronto vediamo che il parametro h_{fe}/h_{ie} del transistor bipolare corrisponde al g_m del JFET, mentre h_{oe} corrisponde a g_d .

Il g_m tipico del FET è $(1 - 5) \text{ mS}$, mentre il parametro h_{fe}/h_{ie} del transistor bipolare vale $(40 - 400) \text{ mS}$.

²Ciò è analogo a quanto accade nel caso dei transistor bipolari, a causa dell'effetto "Early".

9.5 Circuito equivalente del FET

L'equazione (9.6) della sezione precedente porta in modo immediato al circuito equivalente di figura 9.16.

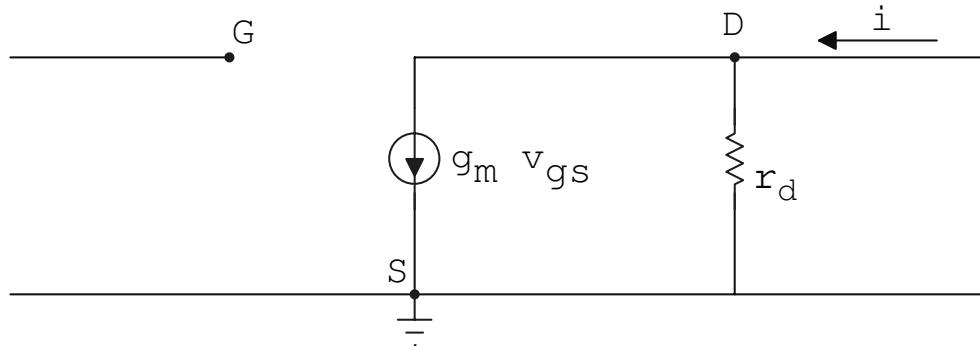


Figura 9.16: Circuito equivalente del JFET. g_m è la transconduttanza del JFET; r_d la resistenza d'uscita.

Notiamo che l'impedenza d'ingresso è effettivamente infinita, il che è rappresentato dal gate che risulta isolato nello schema equivalente. Usando poi il teorema di Thevenin, possiamo sostituire, come mostrato in figura 9.17, al generatore dipendente di corrente, in parallelo con r_d , un generatore di tensione, $-\mu v_{gs}$, in serie con r_d , dove $\mu = r_d g_m$.

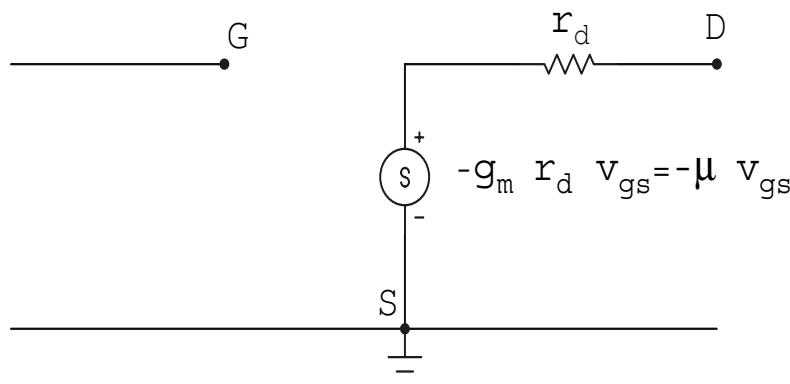


Figura 9.17: Circuito equivalente del JFET ottenuto da quello di figura 9.16, sostituendo al generatore di corrente $g_m v_{gs}$ in parallelo ad r_d un generatore di tensione $-g_m r_d v_{gs}$ in serie ad r_d

Il parametro $g_d = 1/r_d$ è noto come “conduttanza di drain” o “conduttanza d'uscita”. Il parametro μ è anche uguale a:

$$\mu = \frac{\partial V_{DS}}{\partial V_{GS}}|_{I_{DS}=\text{cost.}}$$

9.6 Schemi di polarizzazione per il FET

Uno schema tipico in cui un FET a canale n viene adoperato come amplificatore è quello mostrato in figura 9.18.

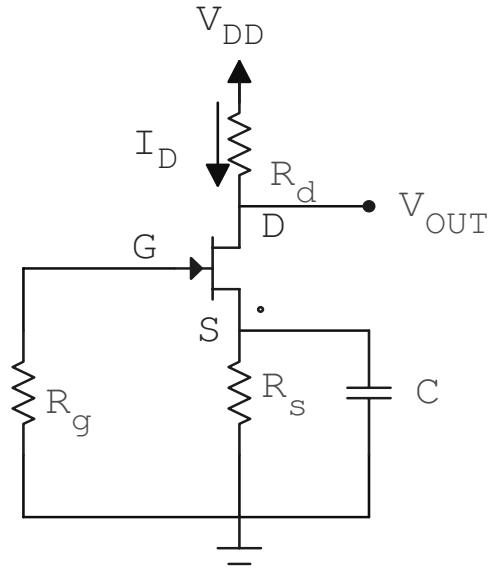


Figura 9.18: Schema di polarizzazione di un JFET adoperato come amplificatore. La resistenza R_g è di regola molto grande. La resistenza R_s ha in parallelo un condensatore C di valore abbastanza grande da costituire un *corto* per il segnale

Le resistenze R_g ed R_s servono a tenere il gate ad una tensione negativa rispetto al source. Indicando con $I_D = I_{DS}$ la corrente quiescente nel FET, si ha infatti:

$$V_{GS} = V_G - V_S = -R_s I_D \quad (9.8)$$

È anche:

$$V_{DD} = R_d I_D + V_{DS} + R_s I_D = (R_d + R_s) I_D + V_{DS} \quad (9.9)$$

Il condensatore C è un corto circuito per la componente variabile, mentre è un interruttore aperto per la corrente che polarizza il source.

Se sono dati V_{DD} , R_d , R_s , R_g , è immediato trovare il punto di lavoro, facendo uso delle caratteristiche di uscita o dell'espressione analitica di I_D vs V_{GS} :

$$I_D = I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 \quad (9.10)$$

Infatti, dall'equazione (9.8) si ha: $I_D = -V_{GS}/R_s$ e, uguagliando questa al secondo membro della (9.10), si ottiene:

$$I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 = -\frac{V_{GS}}{R_s}$$

che è un'equazione quadratica nella variabile V_{GS} . Risolta tale equazione si ottiene V_{GS} , I_D si ottiene facendo uso della (9.10) e V_{DS} facendo uso della (9.9).

Consideriamo il seguente esempio:

$$V_{DD} = 15 \text{ V} , R_d = 620 \Omega , R_s = 380 \Omega$$

$$R_g = 10 \text{ M}\Omega , I_{DSS} = 13 \text{ mA} , V_P = -4.4 \text{ V}$$

Troviamo facilmente:

$$V_{GS} = -1.77 \text{ V}$$

(L'equazione quadratica ha anche la soluzione $V_{GS} = -10.94$ cui però corrisponde $I_D = 0$).

Si ottiene da questa:

$$I_D = 4.65 \text{ mA}$$

ed infine:

$$V_{DS} = V_{DD} - (R_d + R_s)I_D = 10.35 \text{ V}$$

Allo stesso risultato si potrebbe arrivare, fissati i valori dei componenti, facendo uso delle caratteristiche di uscita, mostrate in figura 9.19.

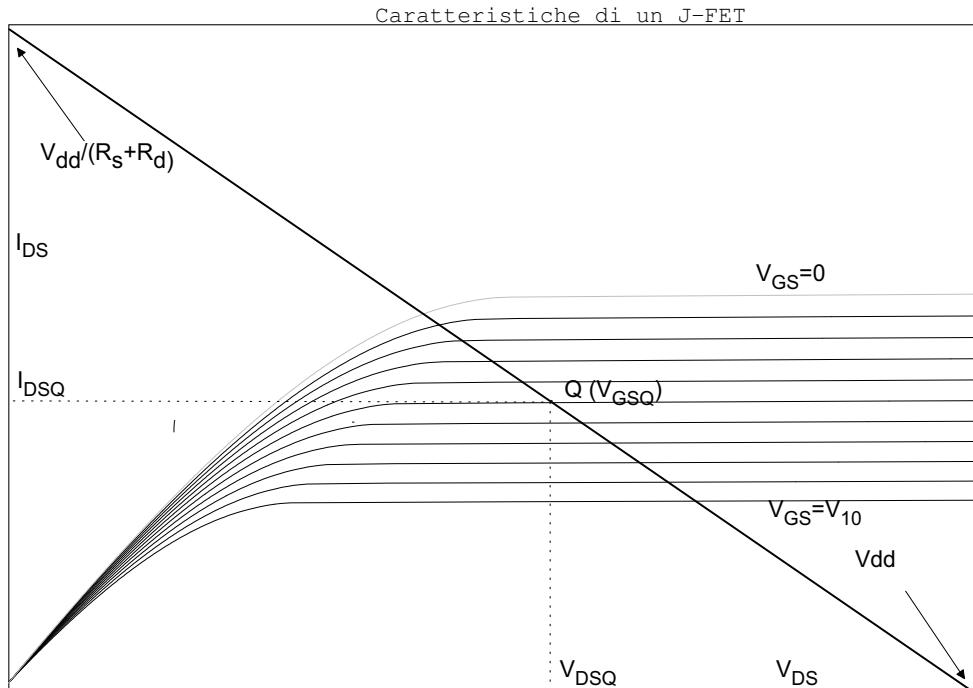


Figura 9.19: Retta di carico per il JFET di figura 9.18, sovrapposta alle caratteristiche del JFET (I_{DS} in funzione di V_{DS} per diversi valori di V_{GS}). La retta di carico è caratterizzata dai punti estremi: $I_{DS} = V_{DD}/(R_s + R_d)$ per $V_{DS}=0$ e $V_{DS} = V_{dd}$ per $I_{DS}=0$. Essa passa inoltre per il punto di lavoro quiescente $Q \equiv (V_{DSQ} \div I_{DSQ})$

Il valore di V_{DD} fissa il punto della retta di carico corrispondente a $I_D = 0$, mentre il rapporto tra V_{DD} ed $(R_d + R_s)$ fissa il punto corrispondente a $V_{DS} = 0$.

Il punto di lavoro Q sarà il punto d'intersezione tra la retta di carico e la curva caratteristica per la quale risulti essere:

$$I_D = -\frac{V_{GS}}{R_s}$$

Esaminiamo come secondo esempio il seguente.

Si vuol calcolare la rete di polarizzazione di un J-FET a canale n (BFW10) tale che il punto di riposo abbia:

$$I_{DSQ} = 6 \text{ mA} , V_{DSQ} = 10 \text{ V} , V_{DD} = 20 \text{ V}$$

I parametri I_{DSS} e V_P , forniti dal costruttore, sono:

$$I_{DSS} = 13 \text{ mA} , V_P = -4.5 \text{ V}$$

Il circuito di polarizzazione è il medesimo usato nell'esempio precedente. Calcoliamo ora i valori dei componenti. Dall'espressione analitica di I_D vs V_{GS} , troviamo:

$$V_{GS} = V_P \left(1 - \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}} \right)$$

cioè:

$$V_{GSQ} = V_P \left(1 - \sqrt{\frac{I_{DQ}}{I_{DSS}}} \right)$$

che, con i valori numerici dati, fornisce:

$$V_{GSQ} = -4.5 \left(1 - \sqrt{\frac{6}{13}} \right) = -1.44 \text{ V}$$

Con tale valore di V_{GSQ} troviamo:

$$R_s = -\frac{V_{GSQ}}{I_{DQ}} = 250 \Omega$$

$$R_d = \frac{V_{DD} - V_{DSQ} - R_s I_{DQ}}{I_{DQ}} = \frac{20 - 10 - 0.25 \cdot 6}{6} \approx 1.4 \text{ k}\Omega$$

Il valore della resistenza R_g non è molto importante. Esso può essere scelto in modo da ottimizzare il valore della resistenza d'ingresso dell'amplificatore.

Teniamo ora conto del taglio in frequenza posto dalla presenza del condensatore C. La costante di tempo associata al sistema R_sC :

$$\tau = R_s C = 250 C$$

corrispondente ad una frequenza $f_{min} = 1/(2\pi\tau)$.

Se si vuole adoperare l'amplificatore a frequenze f maggiori di 40 Hz, dovremo avere:

$$40 > \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{1500C}$$

da cui:

$$C > \frac{1}{40 \cdot 1500} \approx 16 \mu F$$

Per calcolare i valori dei componenti necessari per polarizzare un FET, è possibile alternativamente far uso della caratteristica mutua ($I_{DS} - V_{GS}$).

Consideriamo ad esempio il caso di un FET per il quale, dalla caratteristica mutua, si possa desumere che per il valore di I_{DSQ} voluto (10mA) sia $V_{GS} = -1V$. Se inoltre si vuole $V_{DSQ} = 10V$ e $V_{DD} = 20V$, dalle solite equazioni (9.8) e (9.9) si trova:

$$R_s = 100 \Omega$$

$$R_d = 900 \Omega$$

Uno schema di polarizzazione alternativo è quello che usa un partitore sul gate, come mostrato in figura 9.20.

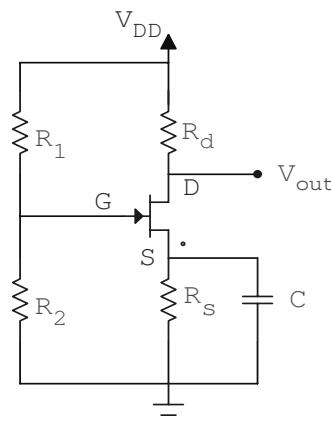


Figura 9.20: Schema di polarizzazione di un FET che utilizza un partitore per fissare la tensione del gate. La configurazione è quella *source comune*. La capacità C sarà scelta di valore abbastanza grande da costituire un corto alle frequenze di lavoro dell'amplificatore

Si supponga di voler far uso di un J-FET a canale n BF256B, la cui caratteristica di trasferimento è mostrata in figura 9.21.

Si sia inoltre scelto:

$$R_s = 1 k\Omega , \quad R_d = 3 k\Omega , \quad R_1 + R_2 = 2 M\Omega , \quad V_{DD} = 25 V$$

e fissato V_G a $+2 V$. Dalla maglia d'ingresso si ha:

$$V_{GS} = V_G - R_s I_D \tag{9.11}$$

dove:

$$V_G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD}$$

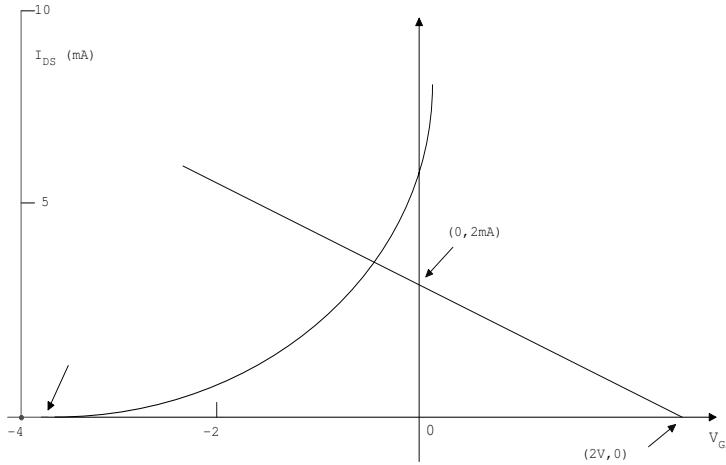


Figura 9.21: Retta di carico, sovrapposta alla caratteristica $I_{DS} \div V_{GS}$ per l'amplificatore di figura 9.20

da cui:

$$R_2 = (R_1 + R_2) \frac{V_G}{V_{DD}} = 160 \text{ k}\Omega$$

Per cui:

$$R_1 = 2 \text{ M}\Omega - R_2 = 1840 \text{ k}\Omega$$

Tracciamo ora sulla caratteristica, la retta di carico data dalla (9.11). Questa passa per i punti $(0, V_G/R_s)$ e $(V_G, 0)$; cioè, nel nostro caso, per i punti: $(0, 2 \text{ mA})$ e $(2V, 0)$. Le coordinate del punto d'intersezione con la caratteristica mutua sono:

$$I_{DQ} = 3.5 \text{ mA}$$

$$V_{GSQ} = -1.5 \text{ V}$$

Si ha poi per la tensione di drain:

$$V_{DSQ} = V_{DD} - (R_d + R_s)I_{DQ} = 25 - (3 + 1)3.5 \text{ V} = 11 \text{ V}$$

Al medesimo risultato si sarebbe potuti arrivare facendo uso delle caratteristiche “di drain” (I_{DS}, V_{DS}) anzichè di quelle di trasferimento.

9.7 Amplificatori a FET

Il parametro più importante nel calcolare la risposta di un FET adoperato come amplificatore è la transconduttanza g_m . Abbiamo già visto (equazione (9.5)) che essa è data da:

$$g_m = -\frac{2}{V_P} \sqrt{I_{DS} I_{DSS}}$$

Se ora definiamo:

$$g_{m0} = g_m(I_{DS} = I_{DSS}) = -\frac{2}{V_P} I_{DSS}$$

avremo:

$$g_m = g_{m0} \sqrt{\frac{I_{DS}}{I_{DSS}}} \quad (9.12)$$

o, alternativamente:

$$g_m = g_{m0} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right) \quad (9.13)$$

Vediamo così che la transconduttanza aumenta come la radice quadrata di I_{DS} , mentre dipende linearmente da V_{GS} e diminuisce al crescere del valore assoluto di questa.

Facciamo ora uso del modello del FET discusso in precedenza per calcolare il guadagno in tensione di un amplificatore a FET come quello mostrato in figura 9.22.

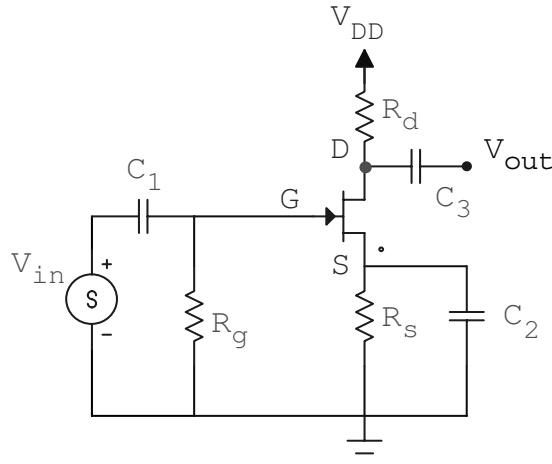


Figura 9.22: Amplificatore di tensione a FET

Se ammettiamo di potere, alle frequenze di lavoro, assimilare tutti i condensatori a dei cortocircuiti, lo schema equivalente utile per il calcolo del guadagno in tensione, definito come il rapporto tra v_{ds} e v_{gs} , è quello di figura 9.23.

Da questo si ottiene:

$$i_d = g_m v_{gs} + g_d v_{ds}$$

$$v_{ds} = -R_d i_d$$

con:

$$g_d = 1/r_d$$

Ne segue:

$$v_{ds} = -R_d g_m v_{gs} - R_d g_d v_{ds}$$

$$v_{ds} (1 + R_d g_d) = -R_d g_m v_{gs}$$

ed infine:

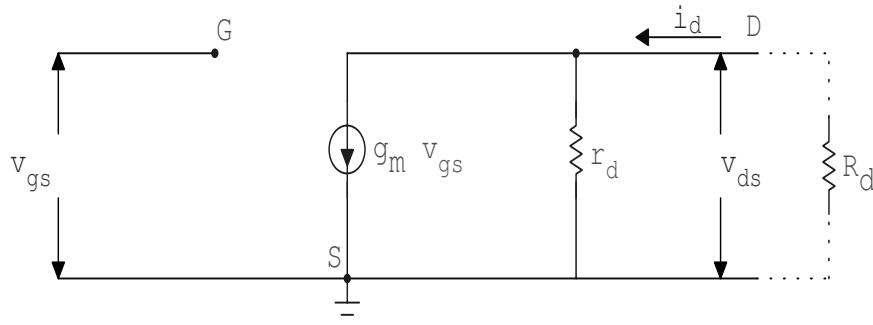


Figura 9.23: Circuito equivalente adoperato per il calcolo del guadagno in tensione dell'amplificatore a FET di figura 9.22

$$A_v \equiv \frac{v_{ds}}{v_{gs}} = -\frac{R_d g_m}{1 + R_d g_d} \quad (9.14)$$

Essendo poi:

$$1 + R_d g_d = 1 + R_d / r_d = \frac{r_d + R_d}{r_d}$$

il guadagno \$A_v\$ può anche essere espresso come:

$$A_v \equiv -\frac{g_m R_d r_d}{R_d + r_d} = -g_m R_d^* \quad (9.15)$$

dove \$R_d^*\$ è il parallelo di \$R_d\$ ed \$r_d\$.

Il circuito d'uscita può quindi essere schematizzato come un generatore di tensione pari a \$-g_m R_d^* v_{gs}\$ in serie con la resistenza \$R_d^*\$, come mostrato in figura 9.24, dove abbiamo anche specificato la resistenza di polarizzazione sul gate e l'eventuale carico \$R_L\$.

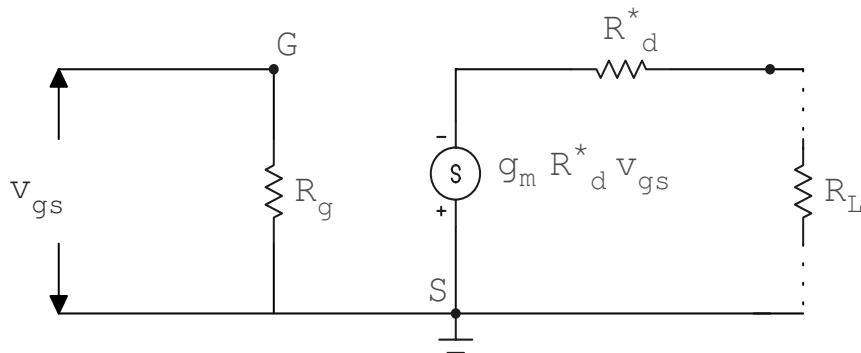


Figura 9.24: Circuito equivalente adoperato per il calcolo dell'impedenza d'uscita dell'amplificatore a FET di figura 9.22

Se ad esempio ammettiamo di far uso di un FET con \$g_m = 2 mS\$ ed una resistenza di drain \$R_d = 10 k\Omega\$, avremo un guadagno in tensione di 20.

Calcoliamo ora l'impedenza d'uscita di questo amplificatore. Per farlo usiamo la definizione:

$$Z_{out} = \frac{v_{out}(\text{circuito aperto})}{i_{out}(\text{corto circuito})}$$

dove:

$$v_{out}(\text{circuito aperto}) = \left[-\frac{R_d g_m}{1 + R_d g_d} \right]_{R_d=\infty} v_{gs} = -\frac{g_m}{g_d} v_{gs}$$

e:

$$i_{out}(\text{corto circuito}) = -g_m v_{gs}$$

Ne segue:

$$Z_{out} = \frac{1}{g_d} = r_d$$

9.8 Inseguitore di source

Il circuito di figura 9.25, analogo all'inseguitore di emettitore, è un *inseguitore di source*.

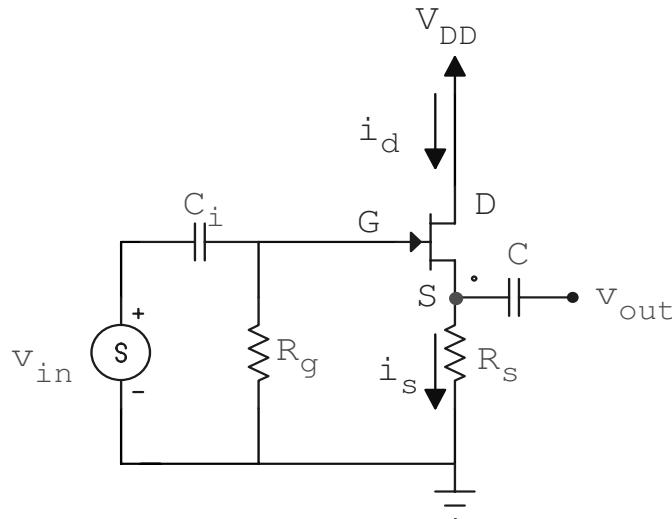


Figura 9.25: Inseguitore di source

Il guadagno in tensione è ottenibile facilmente se si ricorda che:

$$i_d = i_s = g_m v_{gs}$$

Essendo poi:

$$v_{out} = R_s i_s = R_s g_m v_{gs}$$

e:

$$v_{gs} = v_{in} - v_{out}$$

si ha:

$$v_{out} = R_s g_m v_{in} - R_s g_m v_{out}$$

da cui:

$$v_{out} (1 + R_s g_m) = R_s g_m v_{in}$$

ed infine:

$$A_v \equiv \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{R_s g_m}{1 + R_s g_m} \approx 1 \quad (9.16)$$

poichè $R_s g_m \gg 1$ (in realtà questa diseguaglianza non è sempre vera: se $R_s = 1 k\Omega$ e $g_m = 3mS$ segue che $R_s g_m = 3$ ed $A_v = 0.75$).

Consideriamo ad esempio un amplificatore che adopera un FET 2N3819, con:

$$g_m = 2mA/V$$

$$R_s = 4.7 k\Omega$$

Si trova:

$$A_v = \frac{9.4}{10.4} \approx 0.9$$

L'impedenza d'ingresso dell'inseguitore di source è determinata essenzialmente da R_g , che può esser scelto di valore molto alto ($> 20 M\Omega$). L'impedenza d'uscita è ottenibile dalla definizione:

$$R_{out} = \frac{v_{out}(\text{circuito aperto})}{i_{out}(\text{circuito chiuso})}$$

in questa espressione, il numeratore è:

$$v_{out} = A_v v_{in} = \frac{R_s g_m}{1 + R_s g_m} v_{in}$$

mentre il denominatore è semplicemente: $g_m v_{in}$.

Si ha cioè:

$$R_{out} = \frac{R_s g_m}{(1 + R_s g_m) g_m} \approx \frac{1}{g_m} \quad (9.17)$$

Nell'esempio fatto, $R_{out} = 1/(2mA/V) = 500 \Omega$.

Negli esempi visti, l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore a FET è ridotta, rispetto all'impedenza della giunzione di gate, dalla presenza delle resistenze di polarizzazione. Un fenomeno analogo si incontra nell'amplificatore a transistor bipolare, dove, peraltro, l'impedenza d'ingresso "intrinseca" non è altrettanto elevata.

Un metodo per ridurre l'effetto della resistenza di polarizzazione nell'inseguitore di source è quello noto come "bootstrap", di cui un esempio è quello di figura 9.26.

Prima di esaminarlo quantitativamente, vediamo di capire intuitivamente ciò che, in tale circuito, causa l'aumento dell'impedenza d'ingresso. La tensione del source, come sappiamo, "insegue" quella del gate. La tensione del punto P, se R_{s1} è piccola rispetto ad R_{s2} , "insegue" anch'essa la tensione di gate. La corrente i che attraversa la resistenza R_g è pari alla differenza di potenziale ai suoi capi divisa per R_g . Ora, la differenza di potenziale ai capi di R_g , per l'effetto di "inseguimento" menzionato, è molto piccola: se v_g aumenta, così fa anche v_p ; di conseguenza il rapporto v_g/i , che è appunto la resistenza "vista dal generatore", sarà grande. Vediamolo ora quantitativamente. La tensione del punto P è:

$$v_p = \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} v_s$$

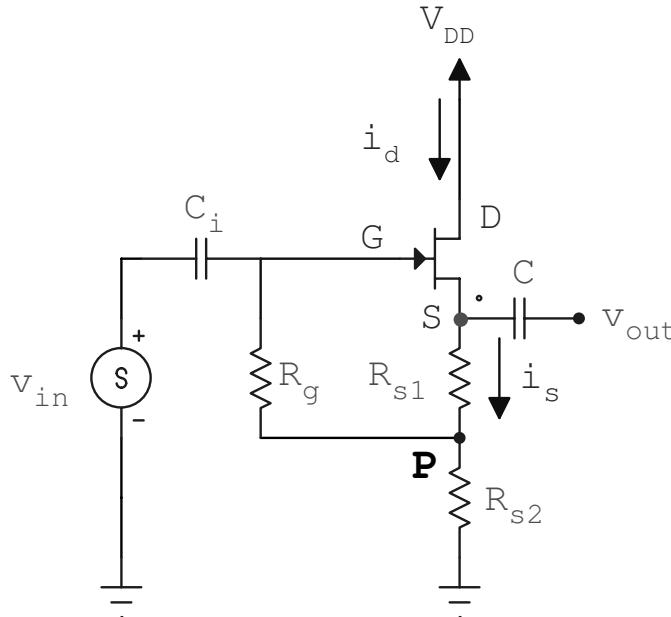


Figura 9.26: Inseguitore di source ad alta impedenza d'ingresso. La resistenza R_g , insieme ad R_{s1} ed R_{s2} realizza un circuito “bootstrap”.

mentre è:

$$R_g i = v_g - v_p = v_g - \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} v_s$$

L'impedenza “effettiva” di R_g è allora:

$$Z_{eff} = \frac{v_g}{i} = \frac{v_g}{\frac{v_g}{R_g} - \frac{R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}} \frac{v_s}{R_g}} = \frac{R_g}{1 - \frac{R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}} \frac{v_s}{v_g}}$$

Sostituendo ora al rapporto v_s/v_g la sua espressione data dalla (9.16). Troviamo:

$$Z_{eff} = \frac{R_g}{1 - \frac{R_{s2}g_m}{1+(R_{s1}+R_{s2})g_m}} \approx \frac{R_g}{1 - \frac{R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}}} = R_g \left(\frac{R_{s1} + R_{s2}}{R_{s1}} \right)$$

Vediamo così che se $(R_{s1} + R_{s2}) \gg R_{s1}$, si ha:

$$Z_{eff} \gg R_g$$

9.9 Amplificatore a FET: struttura generale

Abbiamo finora studiato le caratteristiche dell'amplificatore a FET nelle configurazioni source-comune o inseguitore di source. Nel primo caso la resistenza di source era “bypassata” dal condensatore, nel secondo non c'era alcuna resistenza sul drain e mancava il condensatore. Esaminiamo ora il caso generale in cui siano presenti sia R_d che R_s e che nessuna delle due abbia un condensatore in parallelo.

La struttura è quindi quella di figura 9.27. Il circuito equivalente utile per il calcolo del guadagno e delle impedenze d'uscita e d'ingresso è mostrato nella stessa figura

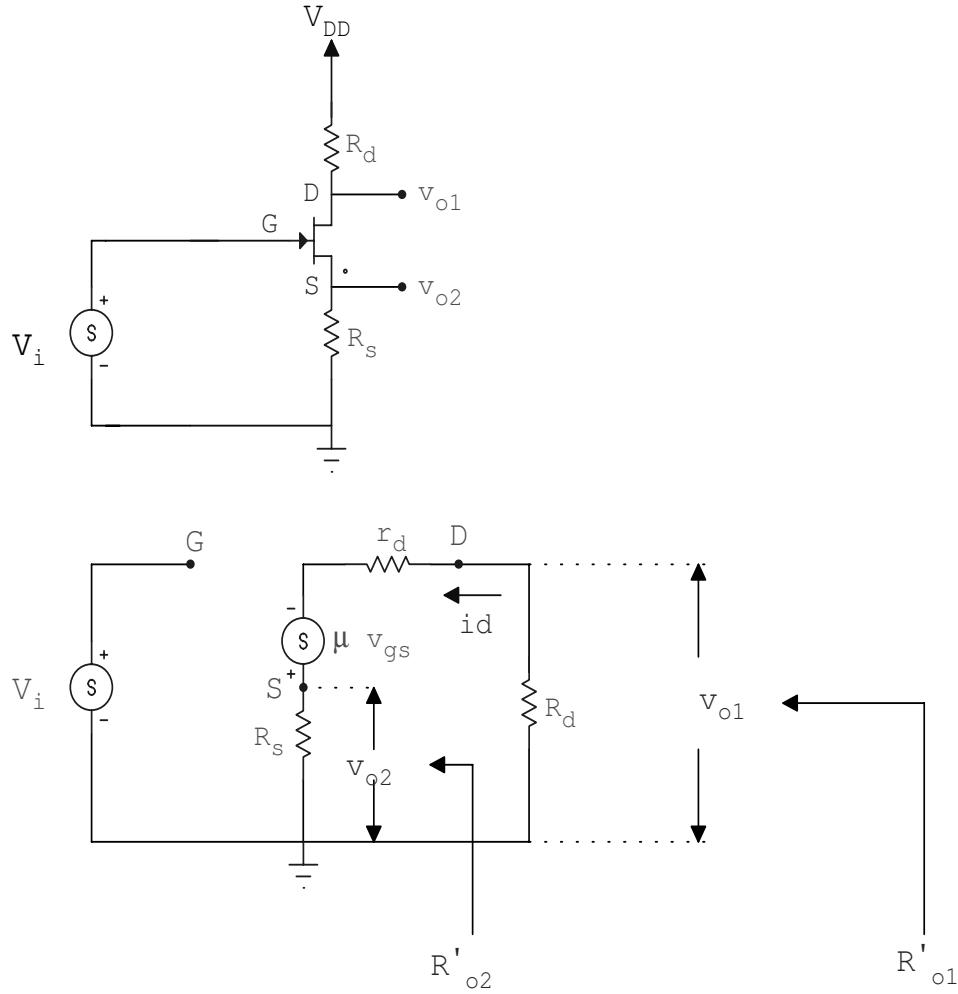


Figura 9.27: Struttura generale di un amplificatore a FET. Questo può esser adoperato come inseguitore di source, prelevando l'uscita \$v_{o2}\$ o come amplificatore prelevando l'uscita \$v_{o1}\$. In basso è mostrato il circuito equivalente adoperato per il calcolo delle caratteristiche dell'amplificatore. \$R'_{o1}\$ è l'impedenza d'uscita del circuito quando lo si usi come amplificatore; \$R'_{o2}\$ quella dell'inseguitore di source.

\$v_{o2}\$ è l'uscita nel caso in cui si adoperi il circuito come inseguitore di source; \$v_{o1}\$ quella relativa al caso in cui lo si adoperi come amplificatore common-source. Abbiamo adoperato, nel circuito equivalente, il generatore dipendente di tensione: \$\mu v_{gs} = g_m r_d v_{gs}\$ in serie con \$r_d\$.

Dall'equazione della maglia d'uscita otteniamo:

$$i_d (R_d + r_d + R_s) = \mu v_{gs}$$

$$v_{gs} = v_g - v_s = v_i - R_s i_d$$

Da queste due equazioni segue:

$$i_d (R_d + r_d + R_s) = \mu v_i - \mu R_s i_d$$

da cui:

$$i_d = \frac{\mu v_i}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)}$$

La tensione in uscita sul drain è:

$$v_{o1} = -R_d i_d = -\frac{\mu R_d v_i}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} \quad (9.18)$$

La tensione in uscita sul source:

$$v_{o2} = R_s i_d = \frac{\mu R_s v_i}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} \quad (9.19)$$

Il guadagno in tensione relativo al primo caso (amplificatore source-comune con resistenza sul source) è allora:

$$A_{v1} = \frac{v_{o1}}{v_i} = -\frac{\mu R_d}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} \quad (9.20)$$

(dove $\mu \gg 1$).

Questa può esser riscritta, trascurando 1 rispetto a μ e sostituendo $\mu = g_m r_d$ nella forma:

$$A_{v1} = -\frac{g_m r_d R_d}{R_d + r_d + R_s(1 + \mu)} = -\frac{g_m R_{\parallel}}{1 + g_m (R_s/R_d) R_{\parallel}} \quad (9.21)$$

dove:

$$R_{\parallel} = \frac{r_d R_d}{r_d + R_d}$$

Se è $g_m (R_s/R_d) R_{\parallel} \gg 1$, questa diventa $A_{v1} = -R_d/R_s$, cioè il guadagno viene a dipendere solo dalle resistenze R_d ed R_s e non dal g_m del FET. Ciò è analogo a quel che si trova nel caso di un amplificatore a transistor bipolare con resistenza sull'emettitore.

Calcoliamo ora, per questa configurazione, l'impedenza d'uscita R'_{o1} . Ricorriamo alla definizione:

$$R'_{o1} = \frac{v_{o1} \text{ (circuito aperto)}}{i_{o1} \text{ (circuito chiuso)}}$$

dove v_{o1} (circuito aperto) è il segnale di tensione in uscita in assenza di carico (a parte R_d), cioè:

$$v_{o1} \text{ (circuito aperto)} = -\frac{\mu R_d v_i}{R_d + r_d + (1 + \mu) R_s}$$

e la corrente in uscita i_{o1} (circuito chiuso) è ottenibile dal circuito equivalente di figura, ponendo un corto in parallelo ad R_d . Si ottiene in tal modo:

$$i_{o1} \text{ (circuito chiuso)} = -i_d = -\frac{\mu v_{gs}}{r_d + R_s}$$

con:

$$v_{gs} = v_g - v_s = v_i - R_s i_d$$

da cui si ottiene poi:

$$i_{o1} \text{ (circuito chiuso)} = -i_d|_{R_d=0} = -\frac{\mu v_i}{r_d + R_s(1 + \mu)}$$

Si ha così per l'impedenza d'uscita:

$$R'_{o1} = R_d \frac{r_d + R_s(1 + \mu)}{r_d + R_d + R_s(1 + \mu)} = R_d \parallel (r_d + R_s(1 + \mu)) \quad (9.22)$$

Si vede da quest'ultima espressione che la resistenza d'uscita R'_{o1} , calcolata senza tener conto di R_d è:

$$R_{o1} = r_d + R_s(1 + \mu) \quad (9.23)$$

Calcoliamo ora la resistenza d'uscita R'_{o2} .

$$R'_{o2} = \frac{v_{o2} \text{ (circuito aperto)}}{i_{o2} \text{ (circuito chiuso)}}$$

dove:

$$\begin{aligned} v_{o2} \text{ (circuito aperto)} &= \frac{\mu R_s v_i}{R_d + r_d + (1 + \mu) R_s} \\ i_{o2} \text{ (circuito chiuso)} &= i_{o2}|_{R_s=0} = \frac{\mu v_i}{R_d + r_d} \end{aligned}$$

da cui:

$$R'_{o2} = \frac{R_s(R_d + r_d)}{R_d + r_d + (1 + \mu) R_s} \quad (9.24)$$

Il guadagno in tensione nella configurazione inseguitore di source (con resistenza sul drain) è (facendo uso della (9.19)):

$$A_{v2} = \frac{v_{o2}}{v_i} = \frac{\mu R_s}{R_d + r_d + (1 + \mu) R_s}$$

che per $R_d = 0$ diventa:

$$A_{v2} = \frac{\mu R_s}{r_d + (1 + \mu) R_s} \approx \frac{g_m r_d R_s}{r_d + g_m r_d R_s}$$

Se ad esempio si sceglie:

$$R_s = 2 \text{ k}\Omega \quad , \quad R_d = 1 \text{ k}\Omega \quad , \quad r_d = 100 \text{ k}\Omega \quad , \quad g_m = 3 \text{ mS}$$

e quindi:

$$\mu = g_m r_d = 300$$

Avremo:

$$A_{v2} \approx 0.85 \quad , \quad R'_{o2} \approx 290 \Omega$$

9.10 Risposta in frequenza di un amplificatore a FET

Il guadagno dell'amplificatore a FET nella configurazione source-comune (con $R_s = 0$), calcolato in precedenza:

$$A_v = -\frac{R_d r_d}{R_d + r_d} g_m = -g_m R_d^*$$

è indipendente dalla frequenza. Ciò dipende dal fatto che si sono trascurate le capacità presenti nel circuito. Queste comprendono sia la capacità di accoppiamento, che le capacità parassite interne al FET, nonché quelle associate ai cavi che collegano il generatore dei segnali che si vogliono amplificare all'amplificatore stesso. L'effetto di tutte queste capacità è quello di ridurre la banda passante e di far sì che essa assuma l'aspetto mostrato in figura 9.28, dove è riportato, in funzione di $\log(f)$, il rapporto $|v_{out}/v_{in}|$ espresso in decibel.

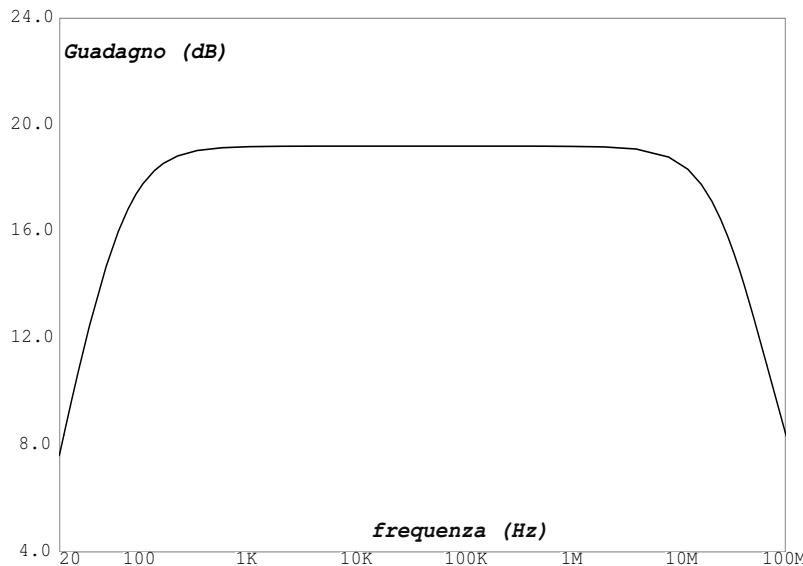


Figura 9.28: Risposta in frequenza tipica per un amplificatore: guadagno in dB in funzione del logaritmo della frequenza.

Vogliamo ora esaminare l'effetto delle varie capacità e vedere come esse influiscano sulla banda passante. Il circuito base, mostrato in figura 9.29, presenta le seguenti capacità:

- C_o : capacità d'uscita del generatore;
- r_s : resistenza d'uscita del generatore;
- C_f : capacità associata ai cavi di collegamento;
- C_a : condensatore d'accoppiamento;

- C_{gs} : capacità parassita tra gate e source nel FET;
- C_{gd} : capacità parassita tra gate e drain nel FET.

Esaminiamo ora in dettaglio l'effetto di queste capacità sulla banda passante, separatamente per le alte e le basse frequenze.

9.10.1 Risposta alle alte frequenze

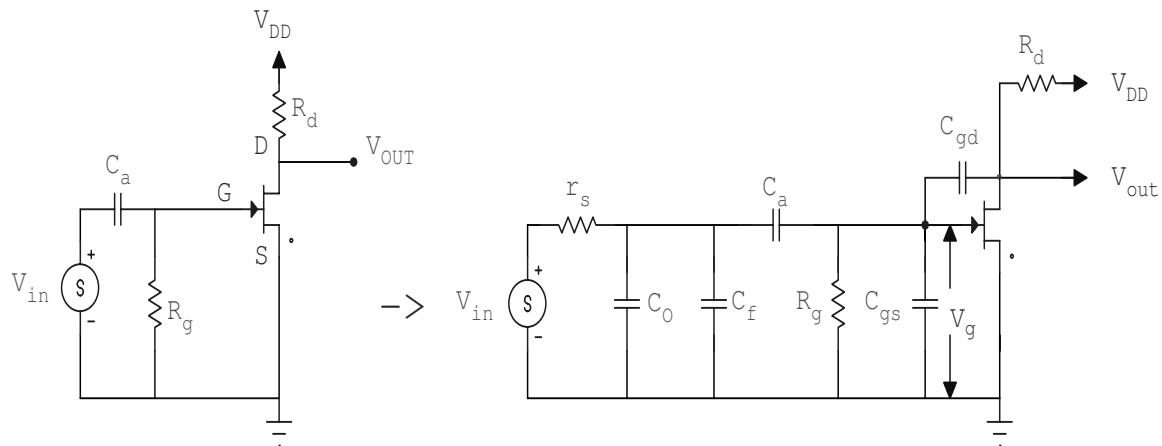


Figura 9.29: A sinistra è mostrato un semplice amplificatore a FET. C_a è il condensatore d'accoppiamento al generatore. Il diagramma di destra è il circuito equivalente adoperato per il calcolo della banda passante dell'amplificatore. La capacità C_{gd} schematizza la capacità interna presente tra gate e drain del FET. Analogamente C_{gs} schematizza quella presente tra gate e source.

Cominciamo con l'esaminare la risposta del circuito ad alta frequenza, dove C_a può esser assimilata ad un corto-circuito. In tali condizioni, le capacità C_o , C_f , C_{gs} risultano in parallelo, e possono esser sostituite da un'unica capacità C_1 . Il circuito diventa allora quello di figura 9.30 (a).

La resistenza R_g è in genere molto grande e può quindi esser trascurata. Sostituiamo inoltre al FET il suo circuito equivalente, costituito da un generatore di tensione $-g_m R_d^* v_g$, in serie con la resistenza $R_d \parallel r_d \equiv R_d^*$. Si ottiene così lo schema di figura 9.30 (b).

Facciamo ora l'ulteriore approssimazione (che verificheremo tra poco) consistente nel trascurare la caduta ai capi di R_d^* . Ammettiamo cioè che sia $v_{out} = -g_m R_d^* v_g$. Il circuito si trasforma allora ulteriormente in quello di figura 9.30 (c).

Applichiamo ora il teorema di Miller, facendo uso dell'impedenza che collega i terminali d'uscita v_{out} a quelli d'ingresso v_g . L'impedenza è quella costituita dalla serie di C_{gd} ed R_d^* :

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + R_d^* = \frac{1 + j\omega R_d^* C}{j\omega C}$$

doveabbiamo per brevità di scrittura posto $C \equiv C_{gd}$.

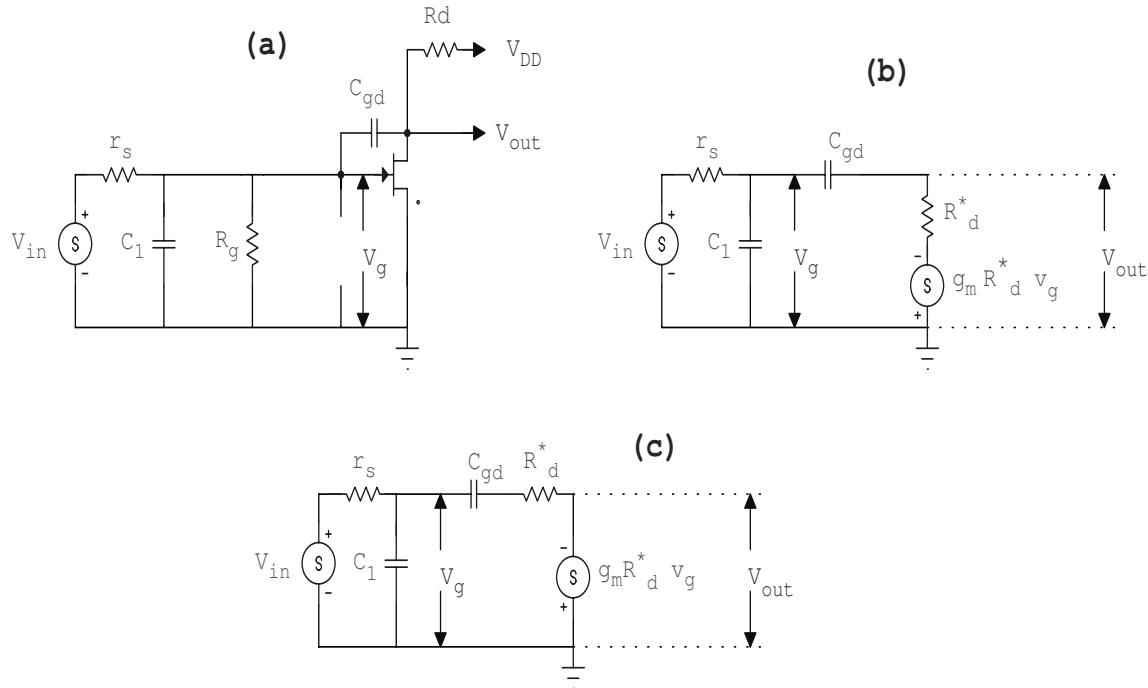


Figura 9.30: Circuiti equivalenti adoperati per il calcolo della banda passante dell’amplificatore a FET nella regione di alte frequenze. (a) il circuito mostrato nella parte destra di figura 9.29 è ridisegnato, eliminando la capacità C_a e sostituendo alle due capacità C_0 , C_f e C_{gs} il loro parallelo C_1 . (b) ulteriore modifica del circuito mostrato in (a), ottenuta eliminando R_g e sostituendo al FET un generatore di tensione di valore $g_m R_d^* v_g$ in serie con $R_d^* = R_d \parallel r_d$. (c) Circuito ottenuto da quello in (b) ammettendo di poter trascurare la caduta di tensione ai capi di R_d^* .

Il teorema di Miller dà il circuito di figura 9.31, dove le impedenze Z_1 e Z_2 sono date da:

$$Z_1 = \frac{Z}{1 - K}$$

$$Z_2 = \frac{ZK}{1 - K}$$

con: $K = -g_m R_d^*$.

Il guadagno in tensione è:

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{v_{out}}{v_g} \frac{v_g}{v_{in}} = -g_m R_d^* \frac{v_g}{v_{in}} \quad (9.25)$$

Le impedenze Z_1 e Z_2 sono date da:

$$Z_1 = \frac{1 + j\omega R_d^* C}{j\omega C(1 + g_m R_d^*)}$$

$$Z_2 = \frac{(1 + j\omega R_d^* C) g_m R_d^*}{1 + g_m R_d^*}$$

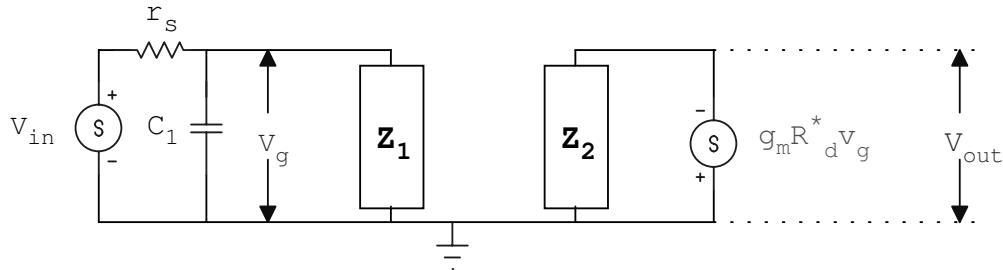


Figura 9.31: Circuito equivalente ottenuto da quello di figura 9.30(c) facendo uso del teorema di Miller.

Facciamo ancora un'approssimazione (la cui validità sarà verificata); ammettiamo che sia:

$$R_d^* \ll \frac{1}{\omega C}$$

cioè: $\omega C R_d^* \ll 1$.

Con ciò Z_1 diventa:

$$Z_1 \approx \frac{1}{j\omega C(1 + g_m R_d^*)}$$

L'impedenza del parallelo $Z_1 \parallel C_1$ è allora:

$$Z' = \frac{Z_1}{1 + j\omega C_1 Z_1} = \frac{1}{j\omega [C_1 + C(1 + g_m R_d^*)]}$$

La relazione tra v_g e v_{in} è quindi:

$$v_g = v_{in} \frac{Z'}{r_s + Z'} = v_{in} \frac{1}{1 + j\omega r_s [C_1 + C(1 + g_m R_d^*)]}$$

per cui:

$$\frac{v_g}{v_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega r_s [C_1 + C(1 + g_m R_d^*)]}$$

Facendo uso della (9.25) si ottiene poi:

$$A_v(\omega) = -\frac{g_m R_d^*}{1 + j\omega r_s [C_1 + C(1 + g_m R_d^*)]}$$

Ponendo $A_o = g_m R_d^*$ (guadagno a centro banda), questa può essere riscritta nella forma:

$$A_v(\omega) = -\frac{A_o}{1 + j\omega r_s [C_1 + C(1 + A_o)]} \quad (9.26)$$

Vediamo così che la capacità $C = C_{gd}$ risulta moltiplicata per il fattore $1 + A_o$, che è in genere grande. Ciò è conseguenza dell'effetto Miller. I FET sono normalmente costruiti in modo che la capacità C_{gd} (indicata in letteratura come C_{rss}) sia minore di C_{gs} (con il simbolo C_{iss} viene indicata la somma $C_{gd} + C_{gs}$). Valori tipici di

C_{rss} per i FET sono nel range (1-15) pF mentre per C_{iss} troviamo valori nel range (3-70) pF³.

Il modulo di A_v dipende da ω come:

$$|A_v(\omega)| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_U)^2}} \quad (9.27)$$

con:

$$\omega_U = \frac{1}{r_s [C_1 + C(1 + A_o)]} \quad (9.28)$$

Facendo ad esempio uso dei seguenti valori di C_{gd} , C_{gs} , r_s ed A_o (guadagno a centro banda):

$$C_{gd} = 2 \text{ pF}$$

$$C_{gs} = 4 \text{ pF}$$

$$r_s = 10 \Omega$$

$$A_o = 20$$

troviamo (ammettendo di poter trascurare C_1):

$$\omega_U = \frac{1}{10 [2 \cdot 10^{-12} \cdot 21]} \approx 2.38 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

cioè:

$$f_U = \frac{\omega_U}{2\pi} = 379 \text{ MHz}$$

L'andamento di $|A_v|$ (in dB) in funzione della frequenza f è mostrato, per un tipico amplificatore a FET, in figura 9.32.

Il valore di f_U per tale amplificatore è 26 MHz. A tale frequenza il guadagno si è ridotto di 3 dB rispetto al valore che esso ha a centro banda.

La frequenza f_U (26 MHz nel nostro esempio) definisce il taglio superiore della banda passante dall'amplificatore.

Dalla definizione (9.28) di ω_U segue che, per aumentare la banda passante occorre:

- diminuire A_o ;
- diminuire r_s ;
- diminuire C_1 ;
- diminuire C_{gd} .

Vediamo che diminuire quest'ultimo parametro è particolarmente importante poiché esso compare moltiplicato per A_o .

³Sia C_{gd} che C_{gs} dipendono molto dalla differenza di potenziale V_{DS} e decrescono all'aumentare di questa, per rimanere approssimativamente costanti per valori di V_{DS} maggiori di (10-15) V.

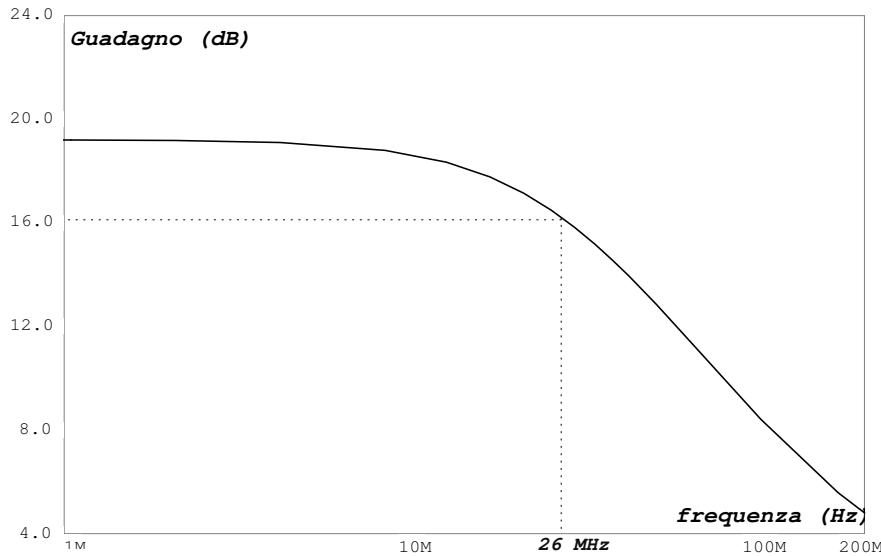


Figura 9.32: Andamento di $|A_v|$ (in dB) in funzione della frequenza f , nella regione delle alte frequenze, per un tipico amplificatore a FET

Un aumento del guadagno A_o a frequenze intermedie si accompagna ad una riduzione della banda passante. Si definisce quindi un fattore di merito dell'amplificatore:

$$F = A_o f_U$$

Cioè:

$$F = \frac{A_o}{2\pi r_s [C_1 + (1 + A_o)C_{gd}]}$$

A parità di F , un aumento di un fattore 10 nel guadagno A_o si accompagna (all'incirca) ad una riduzione di un fattore 10 nella banda passante.

Un esempio dell'effetto della capacità interna al FET tra gate e drain (C_{gd}) è mostrato in figura 9.33. Si vede chiaramente che, all'aumentare di C_{gd} tra 1 pF e 10 pF la frequenza di taglio superiore scende da 30 MHz a 3.0 MHz.

Verifichiamo ora, con un esempio numerico, la validità delle approssimazioni fatte.

La prima delle approssimazioni è consistita nel trascurare (vedi figura 9.30) la caduta di potenziale ai capi di R_d^* rispetto al potenziale del generatore dipendente $-g_m R_d^* v_g$. La seconda nel trascurare la caduta di potenziale ai capi di R_d^* rispetto a quella ai capi della capacità C_{gd} .

Ammettiamo che sia:

$$g_m = 2 mS, \quad R_d^* = 2 k\Omega, \quad v_g = 0.1 V, \quad C = C_{gd} = 2 pF, \quad f = 1 MHz$$

Avremo allora:

$$g_m R_d^* v_g = 0.4 V$$

La resistenza associata alla capacità C sarà:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \approx 80 k\Omega$$

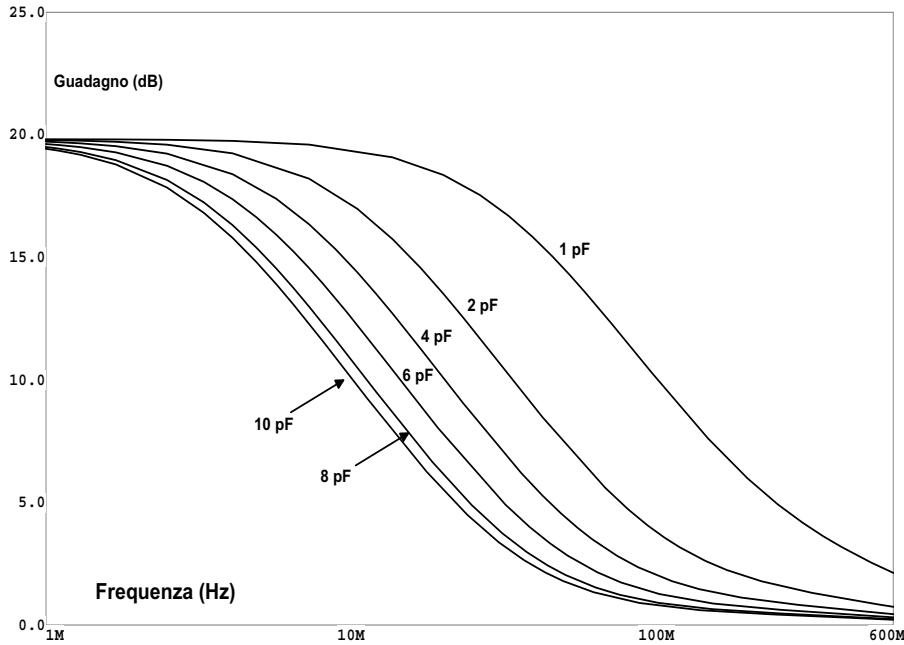


Figura 9.33: Risposta in frequenza dell’amplificatore a FET nella zona di alte frequenze, per valori di C_{gd} compresi tra 1 pF e 10 pF (indicati in figura). Per il guadagno A_0 a frequenze intermedie si è scelto un valore di 20. I valori dei componenti utilizzati nella simulazione (effettuata facendo uso del programma Microcap e della configurazione di figura 9.20) sono: $r_s=100 \Omega$; $R_d=5 \text{ k}$; $R_s=5 \text{ k}$; $R_1=80 \text{ k}$; $R_2=30 \text{ k}$. In parallelo ad R_s è presente una capacità di valore molto grande. Il FET utilizzato è il 2N3070, alimentato a 20 V.

Poichè questa è molto maggiore di R_d^* , vediamo che la caduta di potenziale ai capi di R_d^* è trascurabile rispetto a quella ai capi di C ($g_m Z_c v_g$), il che giustifica la seconda delle approssimazioni fatte (a maggior ragione se la frequenza fosse più bassa di quella scelta). L’approssimazione verrebbe meno solo a frequenze tali che:

$$Z_c \approx R_d^*$$

cioè:

$$f \approx \frac{1}{2\pi R_d^* C} \approx 400 \text{ MHz}$$

maggiori della frequenza di taglio dell’amplificatore.

Per verificare la prima delle approssimazioni calcoliamo la corrente nella serie $C - R_d^*$:

$$i = \frac{v_g(g_m R_d^* + 1)}{\sqrt{(R_d^*)^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \approx \omega C v_g (g_m R_d^* + 1)$$

La caduta di potenziale ai capi di R_d^* sarà allora:

$$v = R_d^* i = v_g (g_m R_d^* + 1) \frac{R_d^*}{1/(\omega C)} \approx 0.05 \cdot (g_m R_d^* + 1) v_g \ll (g_m R_d^* + 1) v_g$$

mentre la differenza di potenziale ai capi di C, alla frequenza di 1 Mhz, è $(g_m R_d^* + 1)v_g$. Vediamo quindi che la differenza di potenziale ai capi di R_d^* è, nel nostro esempio, solo il 5% di quella ai capi di C.

9.10.2 Risposta alle basse frequenze

Ci siamo fino a questo momento occupati della risposta dell'amplificatore alle alte frequenze. Vediamo ora di esaminarne il comportamento all'altra estremità dello spettro, a frequenze molto basse. In tale regione si farà ovviamente sentire l'effetto delle capacità in serie al segnale, cioè essenzialmente della capacità di accoppiamento C_a . Poiché in tale zona di frequenza, l'impedenza capacitiva $|1/(j\omega C_a)|$ è grande, potremo trascurare, rispetto a questa, l'impedenza d'uscita r_s del generatore.

Il circuito equivalente che adopereremo per calcolare la risposta in questa zona di frequenze è mostrato in figura 9.34.

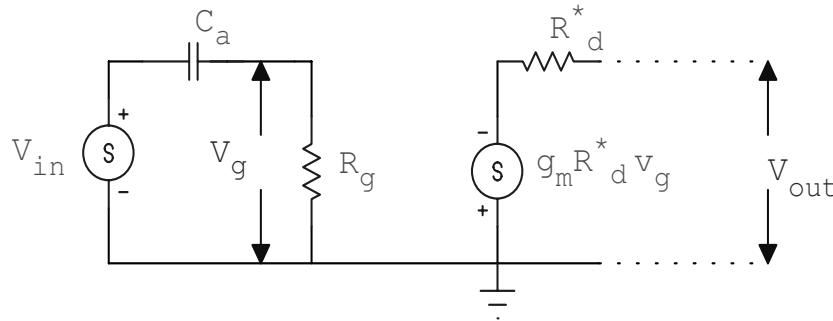


Figura 9.34: Circuito equivalente adoperato per il calcolo della risposta dell'amplificatore a FET alle basse frequenze.

In tale schema, v_g è dato da:

$$v_g = \frac{R_g}{R_g + \frac{1}{j\omega C_a}} v_{in} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_g C_a}} v_{in}$$

da cui segue:

$$v_{out} = -g_m R_d^* v_g = -\frac{A_o}{1 + \frac{1}{j\omega C_a R_g}} v_{in} \quad (9.29)$$

dove abbiamo posto:

$$A_o = g_m R_d^*$$

Il modulo della funzione di trasferimento $|A_v|$ è quindi:

$$|A_v(\omega)| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + (\omega_L/\omega)^2}} \quad (9.30)$$

dove abbiamo posto:

$$\omega_L = \frac{1}{C_a R_g}$$

Esso tende a 0 per $\omega \rightarrow 0$ e si riduce di 3 dB per $\omega = \omega_L$, cioè per un valore della frequenza f:

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi C_a R_g} \quad (9.31)$$

Se $R_g = 1 M\Omega$ e $C_a = 4 nF$; si trova:

$$f_L = \frac{1}{2\pi 10^6 4 10^{-9}} \cong 40 \text{ Hz}$$

La frequenza f_L definisce il limite inferiore della banda passante dell'amplificatore. Notiamo ancora che per $\omega = \omega_L$, la (9.29) ci dà per la quantità complessa A_v :

$$A_v = -\frac{A_o(1-j)}{2} \quad (9.32)$$

da cui vediamo che alla frequenza f_L c'è uno sfasamento di $\pi/2$ tra v_{in} e v_{out} .

9.10.3 Risposta sull'intero spettro di frequenze

L'espressione della risposta globale in frequenza può essere ottenuta combinando la (9.27) con la (9.30). Si trova:

$$A_v = -\frac{A_o}{(1+j\omega/\omega_U)(1-j\omega_L/\omega)}$$

il cui modulo è dato da:

$$|A_v| = \frac{A_o}{\sqrt{1+(\omega/\omega_U)^2}\sqrt{1+(\omega_L/\omega)^2}} \quad (9.33)$$

L'andamento del guadagno in funzione della frequenza f è qualitativamente quello mostrato nella figura 9.35. Il grafico superiore si riferisce al modulo del guadagno, espresso in decibel, quello inferiore allo sfasamento (in gradi). Notiamo che agli estremi della banda passante, ad esempio per $f = f_L$ o $f = f_U$ (indicati in figura dalle linee tratteggiate verticali), il segnale in uscita è non soltanto attenuato, ma anche fortemente fuori fase rispetto al valore che esso ha a centro banda.

Se quindi v_{in} ha componenti di Fourier su di una banda di frequenza che si estende dal centro banda fino ad uno degli estremi (quale è ad esempio il caso di un'onda quadra), v_{out} avrà componenti di Fourier che, per frequenze prossime all'estremità della banda, sono ridotte e sfasate. Ciò implica che v_{out} sarà *distorto* rispetto a v_{in} .

9.11 Verifica delle approssimazioni fatte

Nella sezione precedente abbiamo ricavato la risposta in frequenza dell'amplificatore a FET facendo uso di alcune approssimazioni. Ci proponiamo ora di calcolare la funzione di trasferimento senza fare alcuna approssimazione. Confronderemo poi il risultato con quello approssimato ottenuto prima.

Il circuito equivalente è quello di figura 9.36 Questo può esser trasformato in quello di figura 9.37, dove è:

$$Z_g = \frac{R_g}{1+sR_gC_{gs}}$$

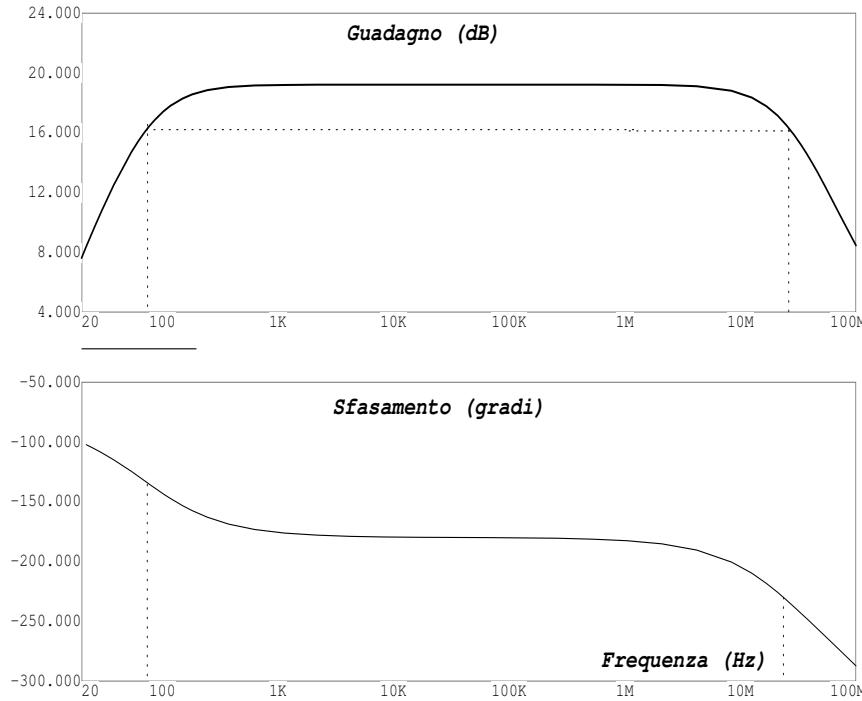


Figura 9.35: Diagrammi di Bode per la risposta in frequenza di un tipico amplificatore a FET (vedi equazione (9.33))

Facendo uso delle leggi di Kirchoff, si ottiene, come mostrato in appendice, il seguente risultato:

$$A_v(s) \equiv \frac{v_o}{v_s} = \frac{R_d^*(sC_{gd} - g_m)}{(1 + sC_{gd}R_d^*) \left[1 + sr_s C_s + \frac{1}{sC_a Z_g} + \frac{r_s(C_a + C_s)}{C_a Z_g} \right] + \frac{C_{gd}(sr_s(C_a + C_s) + 1)(1 + g_m R_d^*)}{C_a}} \quad (9.34)$$

Questa può esser messa nella forma di un rapporto tra polinomi nella variabile s . Infatti la $A_v(s)$ è ottenibile dalla (9.34), sostituendo a $Z_g(s)$ la sua espressione:

$$Z_g = \frac{R_g}{1 + sR_g C_{gs}}$$

Si trova, dopo alcuni semplici passaggi algebrici, che la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento è data da:

$$A_v(s) = \frac{A_0 s + A_1 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + B_3 s^3} \quad (9.35)$$

dove:

$$A_0 = -R_d^* g_m$$

$$A_1 = R_d^* C_{gd}$$

$$B_0 = \frac{1}{C_a R_g}$$

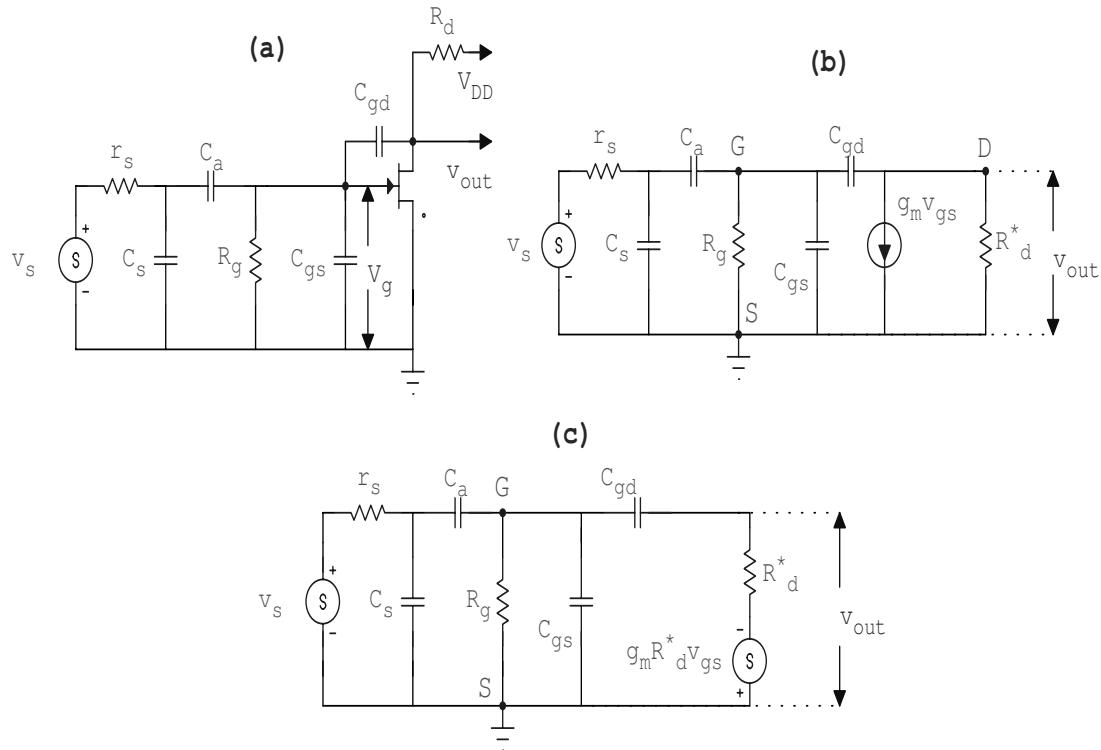


Figura 9.36: Circuito equivalente adoperato per il calcolo della risposta in frequenza, sull'intero spettro di frequenze, dell'amplificatore a FET

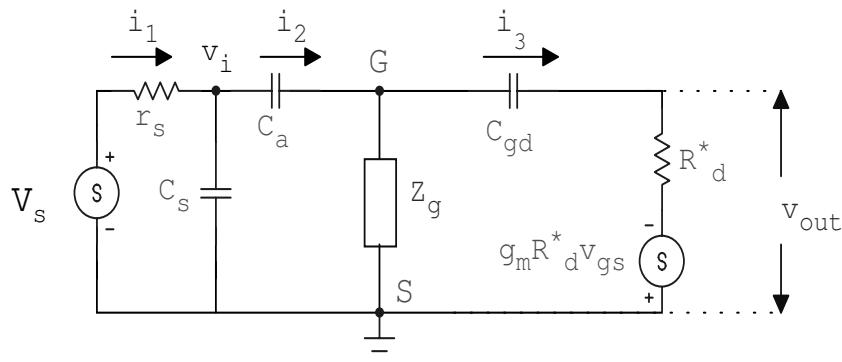


Figura 9.37: Circuito equivalente adoperato per il calcolo della risposta in frequenza, sull'intero spettro di frequenze, dell'amplificatore a FET. Questo è stato ottenuto da quello di figura 9.36(c) sostituendo a R_g e C_{gs} il loro parallelo Z_g .

$$B_1 = 1 + r_s \frac{C_a + C_s}{C_a R_g} + \frac{C_{gs}}{C_a} + \frac{R_d^* C_{gd}}{C_a R_g} + \frac{C_{gd}}{C_a} + \frac{C_{gd} g_m R_d^*}{C_a}$$

$$B_2 = r_s C_s + r_s \frac{(C_a + C_s) C_{gs}}{C_a} + C_{gd} R_d^* + \frac{C_{gd} R_d^* C_{gs}}{C_a} + \frac{C_{gd} r_s (C_a + C_s)}{C_a} +$$

$$+ \frac{C_{gd}r_s(C_a + C_s)g_m R_d^*}{C_a} + \frac{r_s(C_a + C_s)C_{gd}R_d^*}{C_a R_g}$$

$$B_3 = \frac{r_s(C_a + C_s)C_{gs}C_{gd}R_d^*}{C_a} + C_{gd}R_d^*r_sC_s$$

Il risultato ottenuto con la seguente scelta dei parametri:

$$R_d = 5000\Omega, \quad C_{gd} = 2pF, \quad C_a = 1nF, \quad r_s = 100\Omega, \quad C_{gs} = 5pF,$$

$$R_g = 100M\Omega, \quad g_m = 3 \cdot 10^{-3} S, \quad C_s = 2pF$$

è confrontato con quello del calcolo approssimato nelle figure 9.38 e 9.39, rispettivamente per la zona delle alte e delle basse frequenze.

Come si vede, il risultato esatto è praticamente identico a quello approssimato a basse frequenze, mentre se ne discosta alquanto ad alte frequenze.

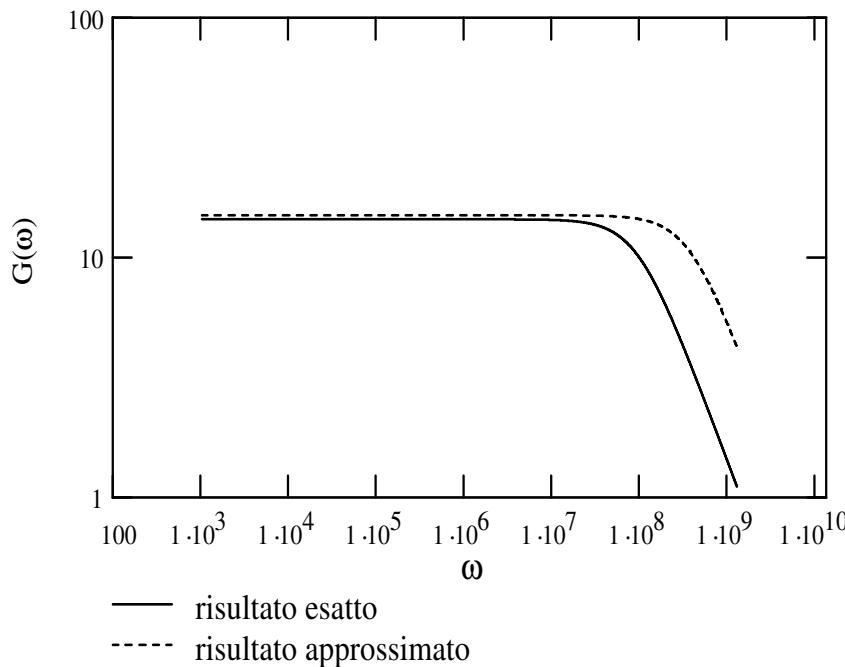


Figura 9.38: Confronto tra il risultato del calcolo esatto (equazione (9.35)) e di quello approssimato (equazione (9.33)), nella zona delle alte frequenze, per la risposta in frequenza dell'amplificatore a FET. I valori dei componenti adoperati sono quelli elencati nel testo.

9.12 Risposta dell'amplificatore ad un gradino di tensione

Come sappiamo, la risposta in frequenza di un generico circuito è legata alla risposta ad un gradino. Vediamo allora di calcolare tale risposta, che ci sarà utile quando ci occuperemo dell'elettronica per rivelatori di particelle nucleari.

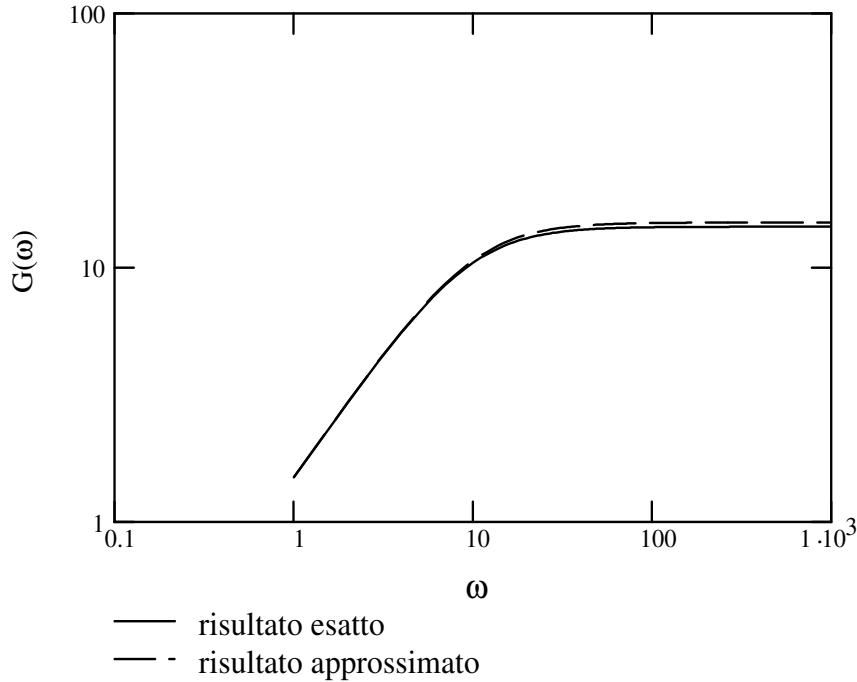


Figura 9.39: Confronto tra il risultato del calcolo esatto (equazione (9.35)) e di quello approssimato (equazione (9.33)), nella zona delle basse frequenze, per la risposta in frequenza dell'amplificatore a FET. I valori dei componenti adoperati sono quelli elencati nel testo.

La risposta al gradino è facilmente ottenibile una volta nota la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento. Questa è stata ottenuta nella sezione precedente (equazione (9.35)).

La risposta al gradino unitario è ora data dall'antitrasformata di $A_v(s)/s$, cioè di:

$$v_o(s) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + B_3 s^3} \quad (9.36)$$

Tale antitrasformata può esser calcolata numericamente facendo uso di programmi standard, quali Mathematica [45]. Con la seguente scelta dei valori dei componenti:

$$R_d = 5 \text{ k}\Omega, \quad C_{gd} = 2 \text{ pF}, \quad C_a = 1 \text{ nF}, \quad r_s = 100 \Omega, \quad C_{gs} = 5 \text{ pF},$$

$$R_g = 100 M\Omega, \quad g_m = 3 \text{ mS}, \quad C_s = 2 \text{ pF}$$

si trova:

$$A_0 = -15., \quad A_1 = 1.0 \cdot 10^{-8},$$

$$B_0 = 10., \quad B_1 = 1.037, \quad B_2 = 1.396 \cdot 10^{-8}, \quad B_3 = 7.01 \cdot 10^{-18}$$

L'antitrasformata ottenuta è mostrata in figura 9.40, dove essa è confrontata con il risultato approssimato ottenuto con il metodo discusso nelle sezioni precedenti. La curva relativa al calcolo “esatto” è quella inferiore.

Si nota che il segnale in uscita non è un perfetto gradino, ma ha un tempo di salita finito.

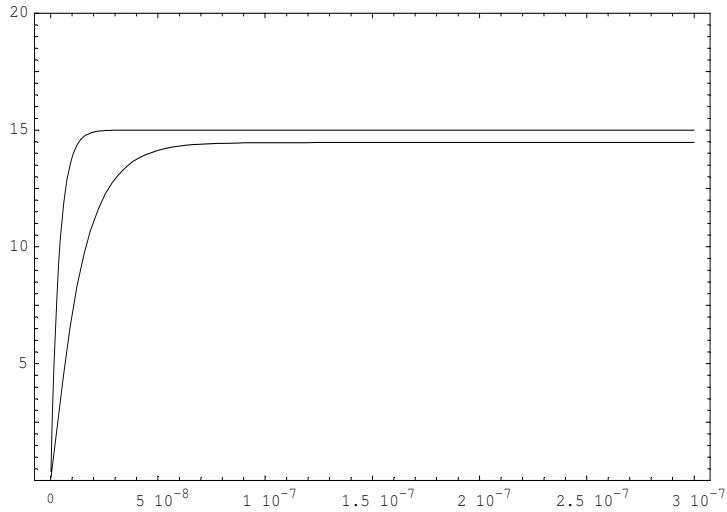


Figura 9.40: Risposta dell'amplificatore a FET ad un gradino, per tempi inferiori a $0.3 \mu\text{s}$. La curva superiore è quella relativa al calcolo approssimato, quella inferiore al calcolo senza approssimazioni. La scala dei tempi è in secondi.

L'andamento a tempi lunghi, mostrato in figura 9.41 mostra che la parte piatta del gradino acquista, dopo l'amplificatore, una pendenza finita. Questa è legata sostanzialmente alla costante di tempo R_gC_a e può esser ridotta scegliendo un piccolo valore di C_a .

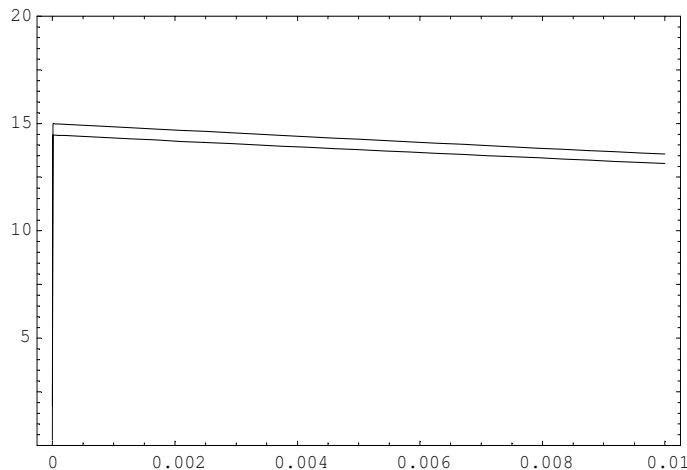


Figura 9.41: Risposta dell'amplificatore a FET ad un gradino, per tempi fino a 10 ms. La curva superiore è quella relativa al calcolo approssimato, quella inferiore al calcolo senza approssimazioni. La scala dei tempi è in secondi.

9.13 I CMOS

In questi ultimi anni hanno avuto una larghissima diffusione gli integrati basati sulla tecnologia CMOS (Complementary MOS). Il loro successo è dovuto alla ridottissima superficie occupata su di un chip da strutture basate su tale tecnologia e dal basso consumo.

Non entreremo nei dettagli costruttivi di tali circuiti, ma ci limiteremo invece a discutere il loro funzionamento, iniziando dal semplice utilizzo che se ne ha nella realizzazione di *invertitori* (porte NOT) nei circuiti logici.

Un CMOS consiste nella combinazione di un PMOS e di un NMOS i cui gates, uniti insieme, costituiscono il terminale d'ingresso come mostrato in figura 11.13. M1 è un NMOS, M2 un PMOS. Anche i terminali di drain sono uniti insieme e costituiscono l'uscita. Inoltre il substrato di ciascuno dei due transistor è unito al source corrispondente. Se un segnale positivo superiore alla tensione di soglia V_t del transistor NMOS è applicato al gate di questo, esso andrà in conduzione. Con tale tensione di gate, M2 sarà invece interdetto. Avremo quindi per la tensione d'uscita $V_{out}=0$. Se applichiamo al gate una tensione nulla, il transistor M1 sarà interdetto mentre M2 condurrà. In tali condizioni avremo $V_{out} = V_{cc}$, dove V_{cc} è la tensione di alimentazione. Nell'esempio di figura 11.13 la tensione d'alimentazione è di 5 V, uguale alla tensione applicata al gate dal livello alto del segnale. I segnali in ingresso ed in uscita da tale circuito, ottenuti facendo uso del programma di simulazione Microcap, sono mostrati in figura 9.43. Vediamo che l'uscita è in effetti il complemento dell'ingresso.

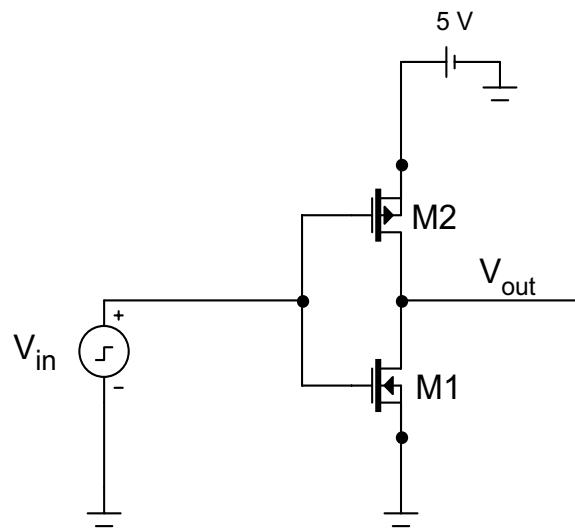


Figura 9.42: Esempio di invertitore in tecnologia CMOS. La medesima configurazione può esser adoperata per realizzare un amplificatore a CMOS

Un importante aspetto positivo di tale invertitore è costituito dal fatto che in nessuno dei due stati logici i transistor M1 ed M2 assorbono corrente dal generatore. Infatti, nello stato in cui M1 è in conduzione, M2 è interdetto, il che fa sì che

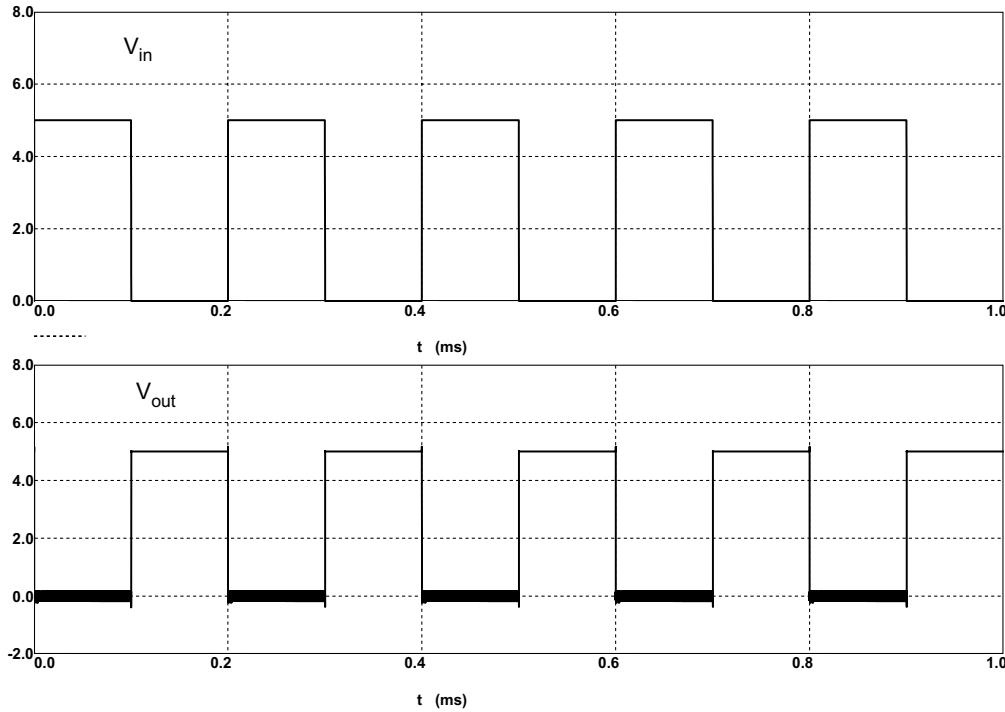


Figura 9.43: Segnali in ingresso (grafico superiore) ed in uscita (grafico inferiore) per l'invertitore a CMOS di figura 11.13.

il generatore non eroghi corrente. Analogamente, nello stato in cui M2 conduce, è interdetto M1, il che nuovamente impedisce il passaggio di corrente nella serie M1-M2.

Una dissipazione può solo avversi nella fase di commutazione tra i due stati logici. A ciò contribuiscono due processi separati. Il primo è legato alle capacità presenti a valle dell'invertitore, come mostrato in figura 9.44. Queste possono esser le capacità d'ingresso dei circuiti presenti a valle, come possono esser le capacità parassite associate ai collegamenti elettrici. Se ora l'output passa dal livello 0 al livello 1, tali capacità debbono (nell'esempio in cui i livelli di tensione siano 0 V e 5 V) caricarsi a 5 V in un piccolo intervallo di tempo dt . La corrente è quindi CdV/dt ed è tanto maggiore quanto più rapida la commutazione. Il secondo processo che contribuisce alla dissipazione di energia è legato al fatto che nel passaggio dalla fase di conduzione di M1 (ed interdizione di M2) a quello complementare, i due transistor attraversano la zona ohmica, in cui entrambi conducono. Nuovamente, in tale fase abbiamo quindi una dissipazione di energia.

Un indubbio vantaggio che i CMOS presentano quando siano adoperati come elementi di circuiti logici, è costituito dal fatto che essi operano tra livelli di tensione uguali rispettivamente a quelli della massa e dell'alimentazione. I livelli di tensione corrispondenti ai due livelli logici sono quindi molto ben definiti e separati tra loro.

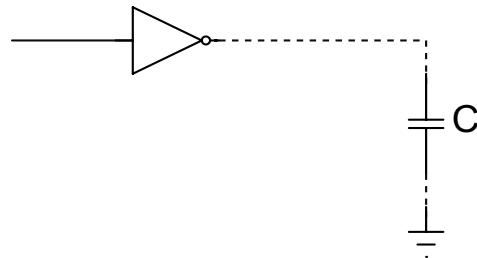


Figura 9.44: Capacità presenti all'uscita di un invertitore a CMOS

9.13.1 I CMOS come amplificatori

I CMOS possono esser adoperati, oltre che come componenti di circuiti logici, come amplificatori. La linearità che si ottiene non è tuttavia confrontabile con quella fornita da amplificatori basati su transistor bipolar o su FET.

Ricordiamo che un FET può esser adoperato oltre che nelle zone di saturazione ed interdizione, anche in quella ohmica. Nei CMOS che abbiamo esaminato nelle sezioni precedenti, i MOSFET lavoravano commutando tra la zona d'interdizione e quella di saturazione. La caratteristica di trasferimento del CMOS, ottenibile facendo uso dell'equazione (9.1) per un NMOS e dell'analogia per un PMOS, cioè la relazione tra V_{in} e V_{out} (vedi figura 11.13) è qualitativamente del tipo di quella riportata in figura 9.45.

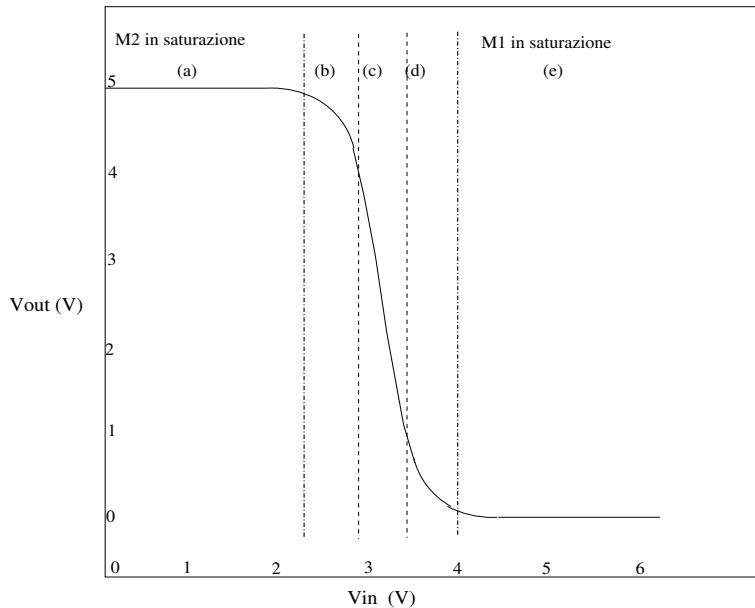


Figura 9.45: Caratteristica di trasferimento di un CMOS. Le zone indicate con le lettere *a* · · · *e* corrispondono rispettivamente a: (a) *M*2 in saturazione ed *M*1 interdetto; (b) *M*2 in saturazione ed *M*1 in zona ohmica; (c) entrambi i transistor in zona ohmica; (d) *M*2 in zona ohmica ed *M*1 in saturazione; (e) *M*2 interdetto ed *M*1 in saturazione

Esiste, come è evidente dalle caratteristiche mostrate, una zona intermedia tra

quelle estreme, in cui entrambi i transistor conducono. Più in particolare, la zona centrale della caratteristica (zona (c) in figura 9.45) in cui entrambi i transistor lavorano in zona ohmica. È in tale zona che il CMOS può esser adoperato come amplificatore. È evidente dalla figura che ad una piccola variazione di V_{in} corrisponde una variazione molto maggiore di V_{out} .

La linearità di tale amplificatore non è tuttavia molto buona. Esso trova applicazione in sistemi che non richiedano una grande fedeltà o che comunque non possano rinunciare ai vantaggi di basso consumo offerti dal CMOS.

Per far sì che l'amplificatore a CMOS lavori nella zona desiderata è necessario polarizzare i due MOSFET in modo tale che, in assenza di segnale applicato sia $V_G = V_D$. Ciò può esser ottenuto introducendo una resistenza di feedback tra i due terminali di Gate e di Drain, come mostrato in figura 9.46, dove è stata introdotta la resistenza R_2 da $10 \text{ M}\Omega$. La figura 9.47 mostra il modulo (in dB) del guadagno fornito da tale amplificatore per frequenze comprese tra 100 Hz ed 1 MHz. Il risultato è stato ottenuto facendo uso della versione demo del programma di simulazione Microcap.

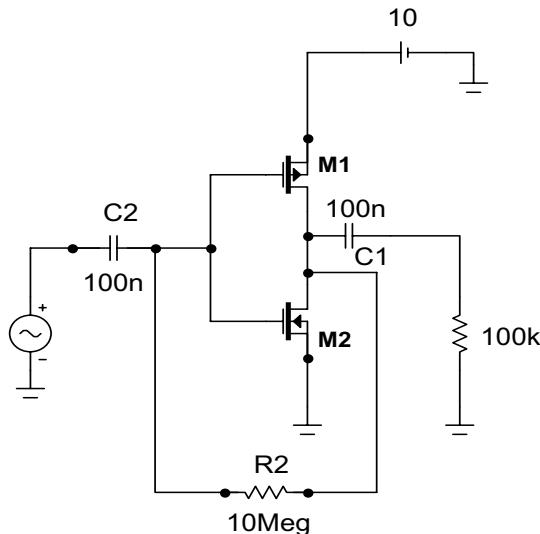


Figura 9.46: Amplificatore a CMOS. La resistenza di feedback R_2 è stata introdotta per stabilire il punto di lavoro con $V_G=V_D$.

9.14 Appendice: funzione di trasferimento dell'amplificatore a FET

Calcoliamo ora, facendo uso del circuito equivalente mostrato in figura 9.37, la funzione di trasferimento dell'amplificatore a FET.

La corrente attraverso la capacità C_s è pari a $i_1 - i_2$, per cui:

$$v_i = (i_1 - i_2) \frac{1}{sC_s} \quad (9.37)$$

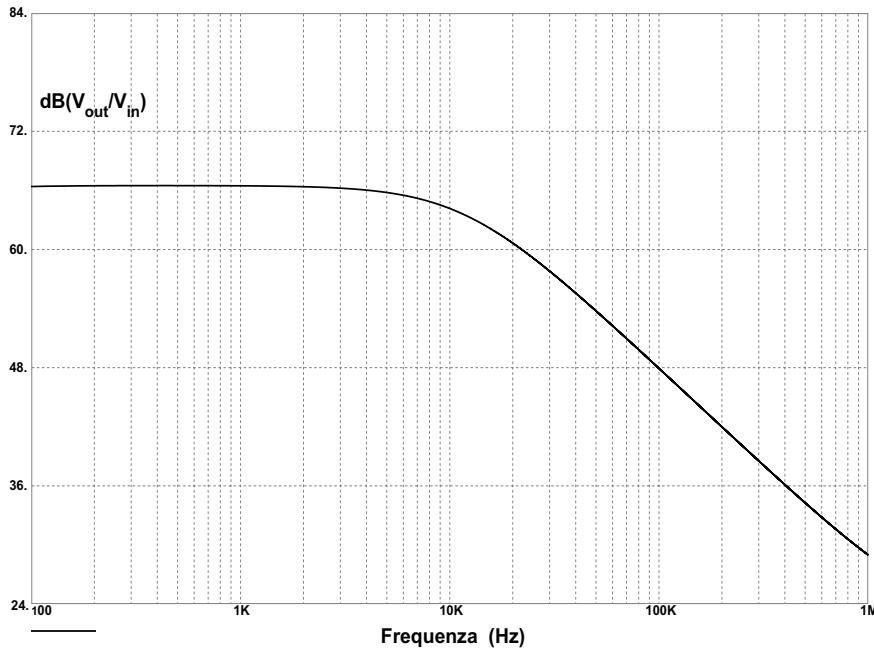


Figura 9.47: Guadagno in funzione della frequenza dell'amplificatore di figura 9.46.

dove:

$$v_i = v_s - i_1 r_s \quad (9.38)$$

Dalla (9.37) otteniamo:

$$i_1 = i_2 + sC_s v_i$$

che, sostituita nella (9.38) fornisce:

$$v_i = v_s - r_s i_2 - s r_s C_s v_i$$

cioè:

$$i_2 = -\frac{v_i}{r_s} (s r_s C_s + 1) \quad (9.39)$$

La corrente in Z_g è uguale a $i_2 - i_3$, per cui:

$$v_{gs} = (i_2 - i_3) Z_g \quad (9.40)$$

dove è:

$$v_{gs} = v_i - \frac{i_2}{sC_a} \quad (9.41)$$

Dalla (9.40) otteniamo:

$$i_2 = i_3 + \frac{v_{gs}}{Z_g}$$

che, sostituita nella (9.41) fornisce:

$$v_{gs} = v_i - \frac{i_3}{sC_a} - \frac{v_{gs}}{sC_a Z_g}$$

cioè:

$$v_{gs} \left(1 + \frac{1}{sC_a Z_g} \right) = v_i - \frac{i_3}{sC_a} \quad (9.42)$$

Dal nodo D abbiamo:

$$v_o = v_{gs} - \frac{i_3}{sC_{gd}} \quad (9.43)$$

nonchè:

$$v_o = R_d^* i_3 - g_m R_d^* v_{gs} \quad (9.44)$$

Calcoliamo ora i_3 facendo uso della (9.42) e sostituiamolo nella (9.43):

$$\frac{i_3}{sC_a} = v_i - v_{gs} \left(1 + \frac{1}{sC_a Z_g} \right)$$

cioè:

$$i_3 = sC_a v_i - v_{gs} \left(sC_a + \frac{1}{Z_g} \right) \quad (9.45)$$

sostituendo poi nella (9.43):

$$v_o = v_{gs} \left(1 + \frac{C_a}{C_{gd}} + \frac{1}{sC_{gd} Z_g} \right) \quad (9.46)$$

Sostituendo invece i_3 nella (9.44):

$$v_o = -g_m R_d^* v_{gs} + R_d^* sC_a v_i - R_d^* v_{gs} (sC_a + 1/Z_g)$$

da cui:

$$v_o = -v_{gs} \left(R_d^* g_m + R_d^* sC_a + \frac{R_d^*}{Z_g} \right) + R_d^* sC_a v_i$$

e quindi:

$$v_i = \frac{v_o + v_{gs} R_d^* (g_m + sC_a + 1/Z_g)}{R_d^* sC_a} \quad (9.47)$$

Sostituendo questa nella (9.46), si ottiene poi:

$$\begin{aligned} v_o &= v_{gs} \left(\frac{sC_{gd} Z_g + sC_a Z_g + 1}{sC_{gd} Z_g} \right) - \frac{C_a [v_o + v_{gs} (g_m + sC_a + 1/Z_g)]}{C_{gd} R_d^* sC_a} = \\ &= v_{gs} \left[\frac{sC_{gd} Z_g + sC_a Z_g + 1}{sC_{gd} Z_g} - \frac{g_m + sC_a + 1/Z_g}{sC_{gd}} \right] - \frac{v_o}{sR_d^* C_{gd}} \end{aligned}$$

da cui con facili passaggi si ottiene:

$$v_o = v_{gs} \frac{R_d^* (sC_{gd} - g_m)}{1 + sR_d^* C_{gd}} \quad (9.48)$$

Dobbiamo ancora esprimere v_{gs} in funzione di v_s . Esprimiamo v_{gs} in funzione di v_i e poi v_i in funzione di v_s .

Riscriviamo a tale scopo le (9.39) e (9.41):

$$v_{gs} = v_i - \frac{i_2}{sC_a}$$

con:

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{v_s}{r_s} - \frac{v_i}{r_s} (1 + sr_s C_s) \\ v_{gs} &= v_i - \frac{v_s}{sC_a r_s} + \frac{v_i}{sC_a r_s} (1 + sr_s C_s) \end{aligned}$$

e poi:

$$v_{gs} = v_i \frac{sr_s C_a + sr_s C_s + 1}{sr_s C_a} - \frac{v_s}{sr_s C_a} \quad (9.49)$$

Uguagliando la (9.43) e (9.44) si ottiene:

$$i_3 = \frac{sC_{gd} v_{gs} (1 + g_m R_d^*)}{1 + sC_{gd} R_d^*} \quad (9.50)$$

Uguagliando la i_3 data dalla (9.50) con la (9.45) si ottiene poi:

$$\frac{sC_{gd} v_{gs} (1 + g_m R_d^*)}{1 + sC_{gd} R_d^*} = sC_a v_i - v_{gs} \left(sC_a + \frac{1}{Z_g} \right)$$

da cui:

$$v_{gs} \left(sC_a + \frac{1}{Z_g} + \frac{sC_{gd} (1 + g_m R_d^*)}{1 + sC_{gd} R_d^*} \right) = sC_a v_i$$

e poi:

$$v_i = \frac{v_{gs}}{sC_a Z_g (1 + sC_{gd} R_d^*)} [sC_a Z_g (1 + sC_{gd} R_d^*) + (1 + sC_{gd} R_d^*) + sC_{gd} Z_g (1 + g_m R_d^*)] \quad (9.51)$$

Dalla (9.49) otteniamo:

$$v_i = \left(v_{gs} + \frac{v_s}{sr_s C_a} \right) \frac{sr_s C_a}{1 + sr_s (C_a + C_s)} \quad (9.52)$$

Uguagliando la (9.51) alla (9.52) si ha poi:

$$\begin{aligned} & \left(v_{gs} + \frac{v_s}{sr_s C_a} \right) \frac{sr_s C_a}{1 + sr_s (C_a + C_s)} = \\ &= \frac{v_{gs}}{sC_a Z_g (1 + sC_{gd} R_d^*)} \{ sZ_g C_a (1 + sC_{gd} R_d^*) + (1 + sC_{gd} R_d^*) + sZ_g C_{gd} (1 + g_m R_d^*) \} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} v_{gs} \left\{ \frac{sr_s C_a}{1 + sr_s (C_a + C_s)} - 1 - \frac{1}{sC_a Z_g} - \frac{C_{gd} (1 + g_m R_d^*)}{C_a (1 + sC_{gd} R_d^*)} \right\} &= \\ &= - \frac{v_s}{1 + sr_s (C_a + C_s)} \end{aligned}$$

Da questa si ottiene:

$$v_{gs} = -v_s \frac{sC_a Z_g (1 + sC_{gd}R_d^*)}{(1 + sC_{gd}R_d^*) [s^2 C_a^2 Z_g r_s - sC_a Z_g (sr_s(C_a + C_s) + 1) - (sr_s(C_a + C_s) + 1)]} - \\ - sC_{gd}Z_g (sr_s(C_a + C_s) + 1) (1 + g_m R_d^*)$$

Sostituendo questa nella (9.48) si ottiene infine:

$$v_o = v_s \frac{R_d^* (sC_{gd} - g_m)}{[1 + sC_{gd}R_d^*] \left[\frac{1}{sC_a Z_g} + (1 + sr_s C_s) + \frac{r_s(C_a + C_s)}{C_a Z_g} \right] + \frac{C_{gd}[sr_s(C_a + C_s) + 1][1 + g_m R_d^*]}{C_a}}$$

Che è la relazione cercata.

Questa può esser messa nella forma del rapporto di due polinomi nella variabile complessa s . Basterà sostituire a Z_g la sua espressione:

$$Z_g = \frac{R_g}{1 + sR_g C_{gs}}$$

Si ottiene in tal modo, dopo alcuni passaggi, che la funzione di trasferimento è data da:

$$G(s) = \frac{s^2 R_d^* C_{gd} - s R_d^* g_m}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + B_3 s^3}$$

dove:

$$B_0 = \frac{1}{C_a R_g}$$

$$B_1 = \left[1 + \frac{r_s(C_a + C_s)}{C_a R_g} + \frac{C_{gs}}{C_a} + \frac{C_{gd}R_d^*}{C_a R_g} + \frac{C_{gd}}{C_a} + \frac{C_{gd}}{C_a} g_m R_d^* \right]$$

$$B_2 = r_s C_s + r_s C_{gs} \frac{C_a + C_s}{C_a} + C_{gd} R_d^* + \frac{C_{gd} R_d^* C_{gs}}{C_a} + \frac{C_{gd} r_s (C_a + C_s)}{C_a} + \\ + \frac{C_{gd} r_s (C_a + C_s) g_m R_d^*}{C_a} + r_s C_{gd} R_d^* \frac{(C_a + C_s)}{C_a R_g}$$

$$B_3 = \left[r_s C_{gs} C_{gd} R_d^* \frac{C_a + C_s}{C_a} + C_{gd} R_d^* r_s C_s \right]$$

Capitolo 10

Amplificatori differenziali

10.1 Concetti generali

L'amplificatore differenziale è adoperato in un gran numero di casi, dove sia necessario amplificare la differenza tra due segnali. Una tipica applicazione si incontra nel caso in cui occorra trasmettere ad una certa distanza, in un ambiente soggetto a rumore elettronico un segnale di ampiezza ridotta. La linea che trasmette il segnale potrà prelevare dall'ambiente del rumore, che all'arrivo si troverà sommato al segnale.

Ammettiamo di usare, per la trasmissione, due linee e di trasmettere lungo la prima linea il segnale v e lungo la seconda il suo opposto $-v$. Ammettiamo inoltre che le due linee siano strettamente accoppiate tra loro in modo da prelevare dall'ambiente un ugual segnale di rumore v_n . Ciò può esser ottenuto avvolgendo a spirale una linea sull'altra. In tal caso il segnale all'arrivo sarà $v + v_n$ sulla prima linea e $-v + v_n$ sulla seconda.

Se ora il circuito che riceve il segnale è un amplificatore differenziale, esso amplificherà la differenza dei due segnali. Se A è il guadagno differenziale, il segnale all'uscita sarà:

$$v_o = A [(v + v_n) - (-v + v_n)] = 2Av$$

L'effetto del rumore sarà così annullato.

Diamo ora alcune definizioni comunemente adoperate nel caso degli amplificatori differenziali, facendo riferimento allo schema di figura 10.1.

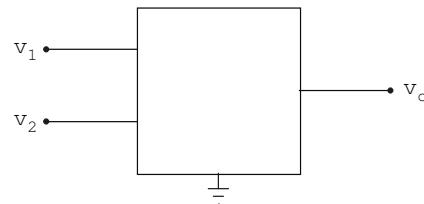


Figura 10.1: Schema di un amplificatore differenziale a due ingressi.

L'amplificatore ha due ingressi v_1 e v_2 , ed un'uscita v_o . Sia gli ingressi che l'uscita sono riferiti a massa. Chiamiamo “segnale differenza” la quantità:

$$v_d = v_2 - v_1 \quad (10.1)$$

e “segnale somma” o “segnale di ingresso nel modo comune”, la quantità:

$$v_a = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (10.2)$$

Se ora l'ingresso 2 è collegato a massa ed un segnale v_1 è applicato all'ingresso 1 avremo:

$$v'_o = A_1 v_1$$

Analogamente, se collegiamo a massa l'ingresso 1 ed applichiamo un segnale v_2 all'ingresso 2, avremo:

$$v''_o = A_2 v_2$$

Per il principio di sovrapposizione, applicando segnali v_1 e v_2 agli ingressi 1 e 2, avremo:

$$v_o = A_1 v_1 + A_2 v_2 \quad (10.3)$$

Le equazioni (10.1) e (10.2) forniscono:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_a - \frac{v_d}{2} \\ v_2 &= v_a + \frac{v_d}{2} \end{aligned}$$

che, sostituite nella (10.3), danno:

$$v_o = (A_1 + A_2)v_a + \frac{A_1 - A_2}{2}v_d \quad (10.4)$$

Si definisce “guadagno nel modo comune” la grandezza:

$$A_a = A_1 + A_2$$

Analogamente, si definisce “guadagno nel modo differenziale” la grandezza:

$$A_d = \frac{A_1 - A_2}{2}$$

Con tali definizioni la (10.4) diventa:

$$v_o = A_a v_a + A_d v_d \quad (10.5)$$

Per quanto detto in precedenza, un buon amplificatore differenziale deve avere un buon guadagno per l'ingresso differenziale ed un guadagno molto piccolo (idealmente nullo) per l'ingresso comune v_a . Dalla (10.5) abbiamo:

$$v_o = A_d \left(v_d + \frac{A_a}{A_d} v_a \right)$$

Il rapporto $\rho = A_d/A_a$ va sotto il nome di “rapporto di reiezione per il modo comune”. Si ha quindi:

$$v_o = A_d \left(v_d + \frac{1}{\rho} v_a \right)$$

Idealmente ρ dovrebbe essere infinito con che avremmo:

$$v_o = A_d v_d$$

10.2 Amplificatore differenziale: schema base

La coppia differenziale mostrata in figura 10.2 è alla base di qualsiasi amplificatore differenziale.

Non sono state indicate le resistenze di polarizzazione delle basi. Ammetteremo inoltre che i due transistor siano il più possibile simili, e che essi lavorino in zona attiva.

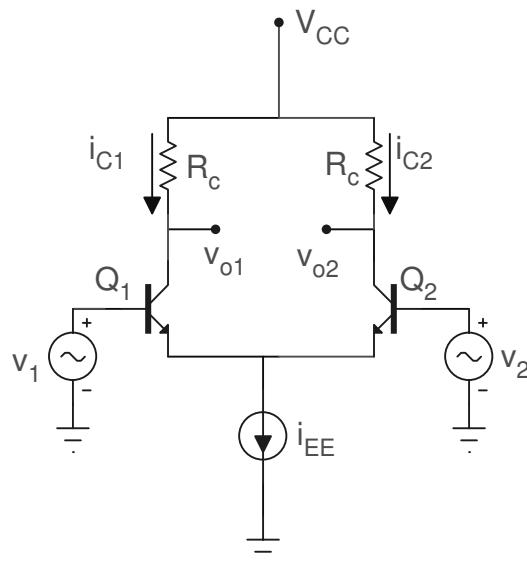


Figura 10.2: Coppia differenziale.

Notiamo che ora il segnale differenza è:

$$v_d \equiv v_1 - v_2 = v_{BE1} - v_{BE2}$$

Inoltre, trascurando la corrente inversa del diodo collettore-base:

$$i_{C1} = \alpha I_{E0} e^{v_{BE1}/V_T}$$

$$i_{C2} = \alpha I_{E0} e^{v_{BE2}/V_T}$$

dove α è comune ai due transistor, come pure I_{E0} .

Da queste segue:

$$\frac{i_{C2}}{i_{C1}} = e^{(v_{BE2}-v_{BE1})/V_T} = e^{-v_d/V_T}$$

La presenza del generatore di corrente sulla gamba di emettitore fa sì che:

$$i_{EE} = i_{E1} + i_{E2} = \frac{i_{C1} + i_{C2}}{\alpha}$$

da cui:

$$\alpha \frac{i_{EE}}{i_{C1}} = 1 + \frac{i_{C2}}{i_{C1}} = 1 + e^{-v_d/V_T}$$

ed infine:

$$i_{C1} = \frac{\alpha i_{EE}}{1 + e^{-v_d/V_T}} \quad (10.6)$$

$$i_{C2} = \frac{\alpha i_{EE}}{1 + e^{v_d/V_T}} \quad (10.7)$$

Ricordiamo che V_T vale approssimativamente 25 mV.

Se $v_d \gg V_T$ avremo:

$$i_{C1} = \alpha i_{EE}$$

$$i_{C2} = 0$$

Se invece v_d è negativo e $|v_d| \gg V_T$ abbiamo:

$$i_{C1} = 0$$

$$i_{C2} = \alpha i_{EE}$$

Le tensioni alle uscite v_{o1} e v_{o2} saranno:

$$v_{o1} = V_{CC} - R_c i_{C1}$$

$$v_{o2} = V_{CC} - R_c i_{C2}$$

L'andamento di tali tensioni in funzione di v_d , fornito dalle (10.6) e (10.7), è schematicamente mostrato in figura 10.3.

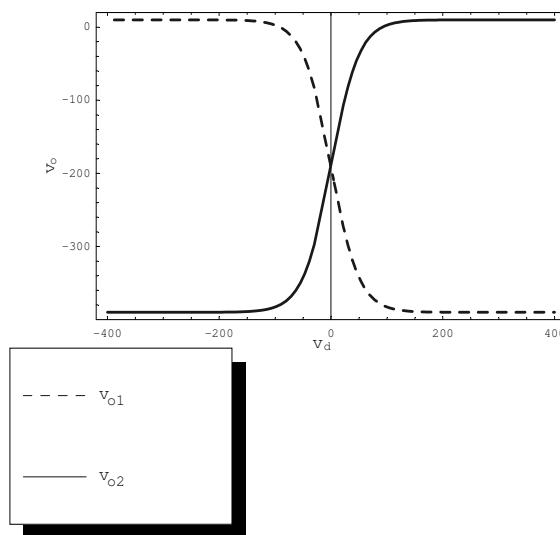


Figura 10.3: Tensioni in uscita alla coppia differenziale.

Notiamo che nelle zone all'estrema destra ed all'estrema sinistra si hanno valori costanti per v_{o1} e v_{o2} . Il circuito viene adoperato in tali zone quando si voglia realizzare un circuito logico (logica ECL). La zona più interessante per la realizzazione di un amplificatore differenziale è quella centrale in cui l'andamento delle curve è approssimativamente lineare.

Prima di esaminare in dettaglio la risposta, studiamo ora il punto di lavoro.

Poiché abbiamo due transistor, dobbiamo analizzare il punto di lavoro di entrambi, cioè fissare i_{C1} , v_{CE1} , i_{C2} , v_{CE2} .

Cominciamo ad esaminare il caso in cui $v_d = 0$, cioè $v_1 = v_2$. Sostituiamo inoltre il generatore di corrente con una semplice resistenza collegata ad una tensione negativa ($-V_{EE}$) come mostrato in figura 10.4.

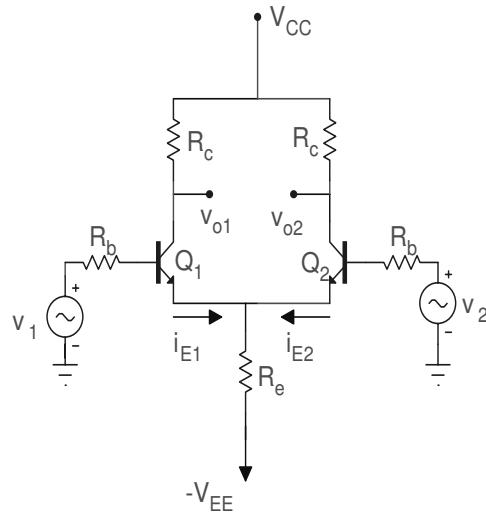


Figura 10.4: Coppia differenziale di figura 10.2 in cui il generatore di corrente è stato sostituito con una resistenza.

Data la (teoricamente) completa simmetria del circuito, possiamo limitarci a studiarne una metà. La resistenza R_e attraversata dalla corrente $i_{E1} + i_{E2} = 2i_E$ andrà ora sostituita da una resistenza $2R_e$ attraversata da i_E . La configurazione è quella mostrata in figura 10.5.

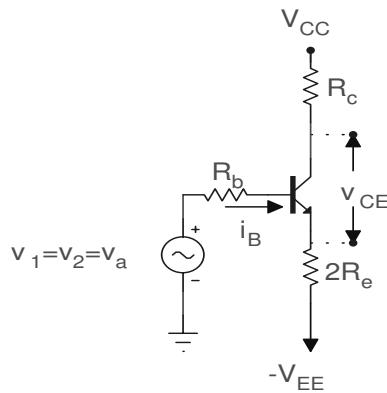


Figura 10.5: Parte sinistra della coppia differenziale di figura 10.4.

L'equazione della retta di carico è data da:

$$v_{CE} = V_{CC} - R_c i_C - 2R_e i_E + V_{EE} \cong V_{CC} + V_{EE} - i_C(R_c + 2R_e) \quad (10.8)$$

La maglia di base fornisce:

$$v_a = R_b i_B + V_{BE} + i_E(2R_e) - V_{EE}$$

dove si è trascurato il termine h_{ie} .

Da quest'ultima equazione si ottiene, con:

$$i_B = i_E / (h_{FE} + 1)$$

ed $i_E \approx i_C$:

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{R_b i_E}{1 + h_{FE}} + V_{BE} + 2R_e i_E - V_{EE} \\ i_C \left[2R_e + \frac{R_b}{1 + h_{FE}} \right] &= v_a - V_{BE} + V_{EE} \\ i_C &= \frac{v_a + V_{EE} - V_{BE}}{2R_e + R_b / (1 + h_{FE})} \end{aligned} \quad (10.9)$$

L'equazione (10.8) fornisce la retta di carico mentre la (10.9) ci fa vedere come varia il punto sulla retta di carico al variare di v_a (vedi figura 10.6).

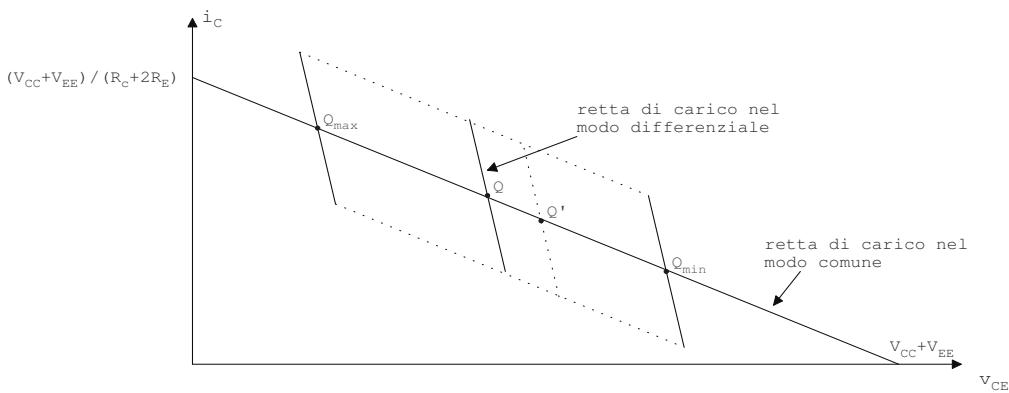


Figura 10.6: Rette di carico per il modo comune (retta a tratto solido, che interseca gli assi) e per il modo differenziale, relative all'amplificatore differenziale. Il segmento passante per il punto Q ed avente maggiore pendenza appartiene alla retta di carico per il modo differenziale.

Il punto Q è ottenibile dalla (10.9) ponendo $v_a = 0$:

$$i_C(Q) = \frac{V_{EE} - V_{BE}}{2R_e + R_b / (1 + h_{FE})}$$

I punti indicati con Q_{min} e Q_{max} sono ottenibili dalla medesima equazione (10.9) ponendo $v_a = v_a^{max}$ e $v_a = v_a^{min}$, sempre mantenendo $v_d = 0$.

Notiamo che, in tale situazione di perfetta simmetria, $v_{o1} = v_{o2}$.

Esaminiamo ora ciò che accade se v_d è diverso da zero, e $v_a = 0$. Dovremo ora porre $v_2 = -v_1 = v_d/2$. Essendo ora $v_a = 0$, il punto di lavoro sarà Q, che corrisponde anche a $v_d = 0$. Vediamo come tale punto si sposti al variare di v_d .

Per piccole variazioni (uguali ed opposte) di v_1 e v_2 , le correnti i_{E1} e i_{E2} subiranno variazioni uguali ed opposte; resterà però costante la loro somma:

$$i_E = i_{E1} + i_{E2}$$

Di conseguenza la tensione di emettitore rimarrà costante. Cambieranno invece V_{ce1} e V_{ce2} :

$$\Delta v_{CE1} = -R_c \Delta i_{C1}$$

$$\Delta v_{CE2} = -R_c \Delta i_{C2}$$

Indicando con v_{CEQ} , i_{CQ} i valori di v_{CE} e di i_C corrispondenti al punto di lavoro Q, una generica di tali equazioni può essere scritta nella forma:

$$v_{CE} - v_{CEQ} = -R_c(i_C - i_{CQ})$$

Nel grafico della figura 10.6 tale relazione è rappresentata da una retta passante per il punto Q ed avente pendenza pari a $-1/R_c$.

Si può vedere anche che, se v_a fosse stato diverso da zero, ad esempio tale da portare il punto di lavoro in Q', i valori di v_{CE} ed i_C ottenuti variando v_d sarebbero stati quelli situati sul segmento tratteggiato indicato, passante per il punto Q'; tale segmento appartiene ad una retta di pendenza pari a $-1/R_c$.

10.3 Analisi della risposta a piccoli segnali dell'amplificatore differenziale

L'analisi della risposta dell'amplificatore differenziale a segnali di piccola ampiezza, nella regione di basse frequenze, dove le capacità parassite possono essere trascurate, può esser effettuata tramite il modello a parametri h semplificato (cioè trascurando i parametri h_{re} ed h_{oe}) con una tecnica simile a quella adoperata nell'analisi del punto di lavoro.

I segnali applicati ai due ingressi, v_1 e v_2 , possono essere scritti, come già visto, in termini dei segnali somma e differenza v_a e v_d :

$$v_1 = v_a - v_d/2$$

$$v_2 = v_a + v_d/2$$

Il circuito base-emettitore dell'insieme dei due transistor è schematizzabile come indicato in figura 10.7, dove l'impedenza presente nel circuito di base, R_b (che tiene conto delle resistenze di polarizzazione di base e dell'impedenza d'uscita del generatore) è stata "riflessa" nel circuito di emettitore. Analoga cosa è stata fatta per h_{ie} , che è stata sostituita da $h_{ie}/(h_{fe} + 1) = h_{ib}$.

Il circuito di collettore è schematizzato in figura 10.8.

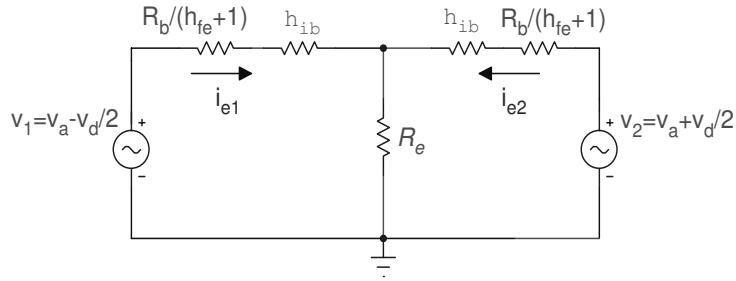


Figura 10.7: Modello a parametri h del circuito base-emettitore della coppia dei due transistor.

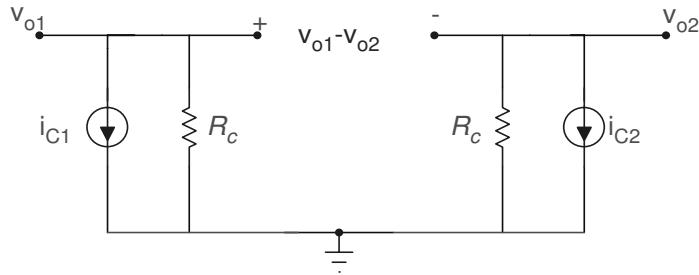


Figura 10.8: Modello a parametri h del circuito di collettore della coppia dei due transistor.

Notiamo ora che, analogamente a quanto fatto in precedenza, possiamo calcolare la risposta del sistema facendo uso del principio di sovrapposizione: calcolare cioè la risposta in presenza del solo segnale comune v_a , quella in presenza del solo segnale differenza v_d ed infine la risposta complessiva ottenibile nel caso generale in cui siano diversi da zero sia v_a che v_d .

Se $v_d = 0$ avremo $v_1 = v_2$ e quindi $i_{e1} = i_{e2}$. In tal caso la parte sinistra e quella destra del circuito di figura 10.7 risultano identiche e ci si può limitare a studiarne una metà. Occorre però tener conto del fatto che a ciascuna metà appartiene una resistenza $2R_e$. Il circuito diventa quindi quello di figura 10.9, dove è:

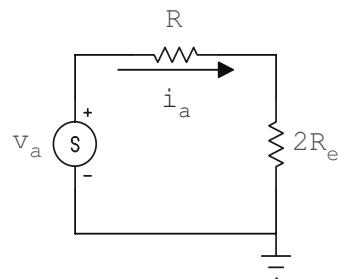


Figura 10.9: Schema della sola parte sinistra del circuito di figura 10.7 nel caso in cui $v_d = 0$.

$$R = h_{ib} + \frac{R_b}{h_{fe} + 1}$$

da cui segue:

$$i_a = \frac{v_a}{2R_e + h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}$$

Se ora è diverso da zero v_d e nullo v_a , il circuito diviene quello di figura 10.10.

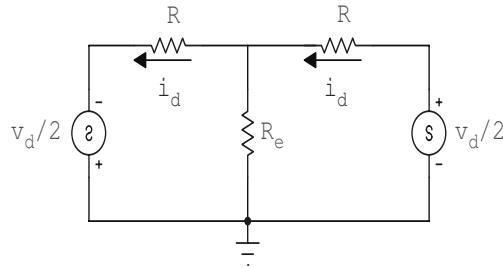


Figura 10.10: Schema della sola parte sinistra del circuito di figura 10.7 nel caso in cui $v_a = 0$.

Vediamo che ora le correnti nelle due maglie sono uguali e discordi per cui è nulla la corrente in R_e ed è di conseguenza uguale a zero la differenza di potenziale ai suoi capi. In tali condizioni R_e può essere sostituita da un corto circuito.

La metà sinistra del circuito diviene allora quella di figura 10.11, per cui:

$$i_d = -\frac{v_d/2}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}$$

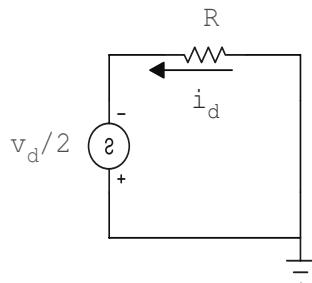


Figura 10.11: Schema della parte sinistra del circuito di figura 10.7.

Nel caso generale, in cui siano diversi da zero sia v_a che v_d , le correnti i_{e1} ed i_{e2} saranno date da:

$$i_{e1} = \frac{v_a}{2R_e + h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)} - \frac{v_d/2}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}$$

$$i_{e2} = \frac{v_a}{2R_e + h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)} + \frac{v_d/2}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}$$

Ammettendo che $i_c \approx i_e$, dalla maglia d'uscita si vede che le tensioni v_{o1} e v_{o2} sono:

$$v_{o1} = -R_c i_{c1} = \frac{R_c/2}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)} v_d - \frac{R_c}{2R_e + h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)} v_a$$

$$v_{o2} = -R_c i_{c2} = \frac{-R_c/2}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)} v_d - \frac{R_c}{2R_e + h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)} v_a$$

e quindi:

$$v_{o1} - v_{o2} = \frac{R_c}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)} v_d$$

cioè $v_{o1} - v_{o2}$ è proporzionale al segnale differenza v_d .

Le singole tensioni d'uscita v_{o1} e v_{o2} sono dipendenti linearmente da v_d , ma dipendono anche da v_a . Si può scrivere:

$$v_{o1} = A_d v_d - A_a v_a$$

$$v_{o2} = -A_d v_d - A_a v_a$$

con:

$$A_d = \frac{R_c/2}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}$$

$$A_a = \frac{R_c}{2R_e + h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}$$

Possiamo allora definire il rapporto di reiezione per il modo comune (CMRR) come:

$$CMRR = \rho \equiv \frac{A_d}{A_a} = \frac{2R_e + h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}{2[h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)]}$$

Se è $2R_e \gg h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)$, ρ può essere approssimato da:

$$\rho \approx \frac{R_e}{h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)}$$

Ad esempio se $h_{fe} = 100$, $R_b = 500\Omega$, $R_e = 1.5 k\Omega$, $R_c = 200\Omega$, $i_{CQ} \cong i_{EQ} = 2.5 mA$:

$$h_{ib} = \frac{V_T}{i_{EQ}} = \frac{25}{2.5} = 10 \Omega$$

$$\frac{R_b}{h_{fe} + 1} \approx 5 \Omega$$

$$\rho = \frac{1500}{15} = 100$$

cioè 40 dB. I valori di A_a e di A_d in tal caso varranno:

$$A_a = \frac{R_c}{2 \times 1.5k\Omega + 15\Omega} \approx \frac{200}{3000} = 0.067$$

$$A_d = \frac{R_c/2}{15\Omega} = \frac{100}{15} = 6.67$$

Valori tipici di ρ in amplificatori differenziali commerciali vanno da 80 a 100 dB (cioè da 10^4 a 10^5).

Il valore di ρ può essere considerevolmente aumentato aumentando il valore della resistenza R_e .

Tuttavia all'aumentare di R_e aumenta la caduta di potenziale ai suoi capi ed aumenta quindi la tensione di emettitore. Tale soluzione non è quindi raccomandabile.

Si può aumentare molto il valore di ρ utilizzando un circuito in cui R_e è sostituita da un transistor che funziona in base comune. Il circuito è indicato in figura 10.12.

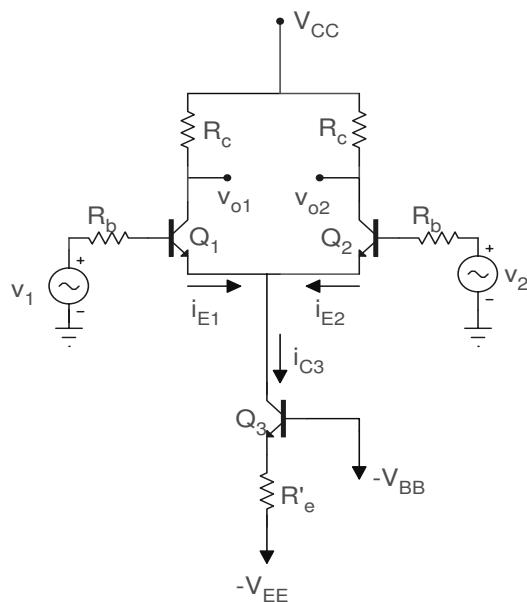


Figura 10.12: Schema di un amplificatore differenziale ad alto ρ .

Il transistor Q_3 fornisce la corrente necessaria ed al medesimo tempo presenta una elevata impedenza vista dagli emettitori dei transistor Q_1 , Q_2 . Tale impedenza è pari ad $1/h_{ob3}$, che è dell'ordine di $500\text{ k}\Omega$. Con tale modifica, il valore di ρ dell'esempio precedente diverrebbe $\rho \approx 3.3 \cdot 10^4$ ($\approx 90\text{ dB}$).

Come già visto in precedenza quando abbiamo analizzato il punto di lavoro dell'amplificatore differenziale, la retta di carico per il modo comune ($v_d = 0$, $v_a \neq 0$) ha pendenza pari a $-1/(R_c + 2R_e)$; quella relativa al modo differenziale ha pendenza pari a $-1/R_c$.

Nel caso attuale, quest'ultima retta di carico rimane invariata mentre, a causa dell'elevato valore della resistenza presente sull'emettitore del circuito differenziale, la retta di carico relativa al funzionamento nel modo comune diventa quasi orizzontale. Ciò è mostrato in figura 10.13, dove i punti Q_{min} e Q_{max} sulla retta di carico per il modo comune corrispondono ai valori minimi consentiti per le differenze di potenziale V_{CE} ai capi dei due transistor. Il grafico è quello relativo al transistor Q_1 , ma un grafico analogo si potrebbe disegnare per Q_2 . Valori molto piccoli di V_{CE} corrispondono alla saturazione del transistor. È immediato vedere che all'aumentare

di V_{CE1} , essendo fissati V_{CC} e V_{EE} , diminuisce V_{CE3} . Se V_{CE1} aumenta oltre un certo limite, V_{CE3} diviene così piccolo che Q_3 entra in saturazione.

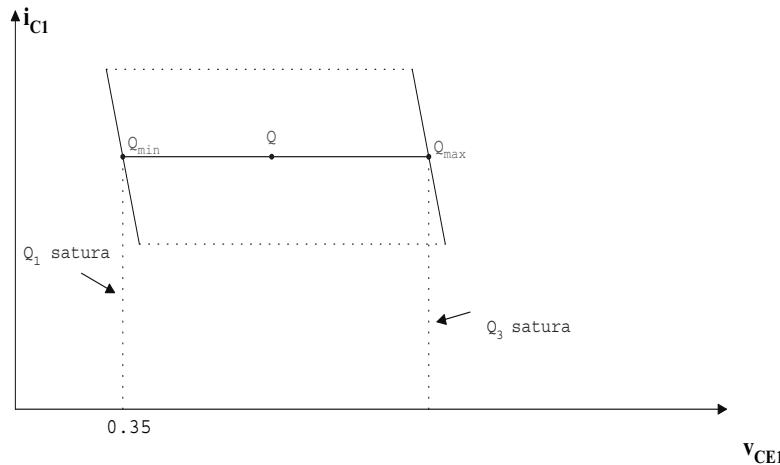


Figura 10.13: Retta di carico relativa al modo comune del circuito di figura 10.12.

I punti estremi Q_{min} e Q_{max} sulla retta di carico relativa al funzionamento nel modo comune possono quindi esser ottenuti imponendo che nessuno dei transistor vada in saturazione. Il transistor non andrà in saturazione (come si può vedere dalle equazioni di Ebers-Moll) se:

$$v_{CE} > V_T[2.2 + \ln(h_{FE}/h_{FC})]$$

Se ad esempio è $h_{FE} = 100$ ed $h_{FC} = 0.01$ si trova che deve essere $v_{CE} > 0.3 V$. Ora, il valore di v_{CE1} è determinato da v_a . Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} v_{C1} &= V_{CC} - R_c I_{CQ1} \\ v_{E1} &= v_a - R_b I_{BQ1} - 0.7 \\ v_{CE1} &= v_{C1} - v_{E1} = V_{CC} - R_c I_{CQ1} - v_a + R_b \frac{I_{CQ1}}{h_{FE}} + 0.7 \end{aligned}$$

ed una analoga equazione è vera per v_{CE2} .

La condizione $v_{CE1} > 0.35 V$ (preso al posto di 0.3 V, per sicurezza), implica:

$$v_a < V_{CC} - \left(R_c - \frac{R_b}{h_{FE}} \right) I_{CQ1} + 0.35$$

Il limite inferiore su v_a è posto dalla condizione che Q_3 non saturi. Notiamo che si ha:

$$v_a = R_b \frac{I_{CQ1}}{h_{FE}} + 0.7 - v_{CE3} - 0.7 - V_{BB}$$

da cui:

$$v_{CE3} = v_a - R_b \frac{I_{CQ1}}{h_{FE}} + V_{BB} > 0.35 V$$

segue:

$$v_a > R_b \frac{I_{CQ1}}{h_{FE}} - V_{BB} + 0.35$$

10.4 Impedenza d'ingresso dell'amplificatore differenziale

La resistenza vista dai generatori di tensione v_1 e v_2 , può essere facilmente calcolata a partire dal circuito equivalente base-emettitore, che ridisegniamo in figura 10.14.

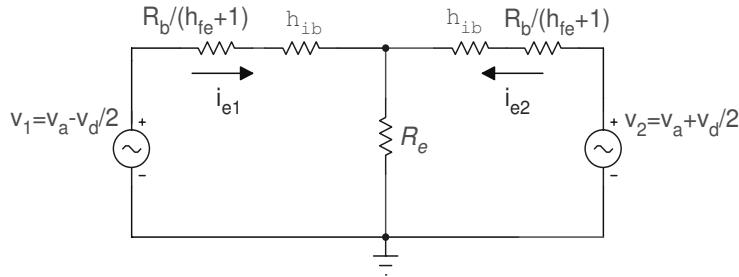


Figura 10.14: Circuito equivalente base-emettitore.

Poiché in genere R_e è molto maggiore di $h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)$, possiamo trascurare R_e . L'impedenza vista da v_1 si può allora ottenere immaginando di cortocircuitare v_2 e di calcolare R_{i1} come il rapporto tra v_1 ed i_{b1} , cioè:

$$R_{in} = R_{i1} = \frac{v_1}{i_{b1}} = \frac{v_1}{i_{e1} i_{b1}} = 2 \left(h_{ib} + \frac{R_b}{h_{fe} + 1} \right) \cdot (h_{fe} + 1)$$

Se ad esempio è $h_{fe} = 99$ e $I_{EQ1} = I_{EQ2} = 1 \text{ mA}$, avremo:

$$h_{ie} = (h_{fe} + 1)h_{ib} = (h_{fe} + 1) \frac{V_T}{I_{EQ}} = 2500 \Omega$$

da cui:

$$R_{in} = 5 \text{ k}\Omega + 200 \cdot R_b$$

e, con $R_b = 50 \Omega$: $R_{in} = 15 \text{ k}\Omega$.

Per ottenere valori più elevati di R_{in} è possibile sostituire il transistor della coppia con FET, o anche con transistor Darlington.

10.5 Generatore di corrente sull'emettitore

Un metodo utilizzato nella pratica per ottenere una corrente I_o costante nel ramo di emettitore dell'amplificatore differenziale, senza utilizzare una resistenza di valore elevato, è quello di inserire un generatore di corrente del tipo disegnato in figura 10.15.

Verifichiamo che effettivamente I_o è costante.

Dall'analisi della maglia base-emettitore di Q_3 segue:

$$V_{BE} + R_3 I_3 = V_B + V_{EE} \quad (10.10)$$

Calcoliamo ora V_B , trascurando la corrente di base.

$$V_B = -R_1 I$$

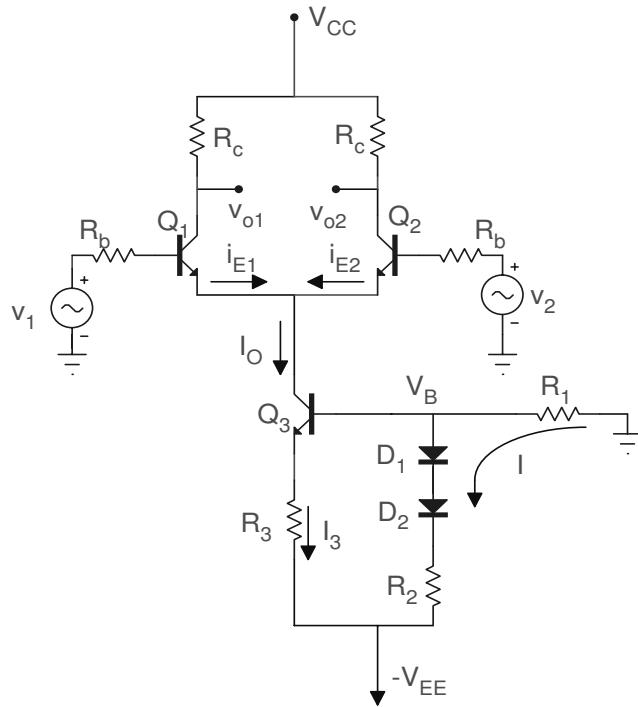


Figura 10.15: Schema di un amplificatore differenziale con corrente costante nel ramo di emettitore.

Notiamo che la corrente I che fluisce in R_1 è la stessa che fluisce in D_1 , D_2 ed R_2 . Inoltre:

$$V_B + V_{EE} = V_D + R_2 I$$

dove V_D è la caduta complessiva di potenziale ai capi dei due diodi.

Dalle due ultime equazioni si ottiene:

$$V_B + V_{EE} = V_D - \frac{R_2}{R_1} V_B$$

Cioè:

$$V_B \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = V_D - V_{EE}$$

$$V_B = (V_D - V_{EE}) \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Facendo ora uso della (10.10), si ottiene:

$$V_{BE} + R_3 I_3 = V_{EE} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_D \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Se R_1 ed R_2 sono scelte in modo che:

$$\frac{V_D R_1}{R_1 + R_2} = V_{BE}$$

segue:

$$I_3 = V_{EE} \frac{R_2}{R_3(R_1 + R_2)}$$

Il che ci dice che se V_{EE} è costante, allora anche I_3 è costante.

Notiamo che se V_{BE} aumentasse a causa di una variazione di temperatura, V_D aumenterebbe percentualmente della stessa quantità e quindi la relazione:

$$V_D \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_{BE}$$

continuerebbe ad esser vera. In tal modo il circuito è quindi stabilizzato contro eventuali variazioni di temperatura.

Si noti che $I_o = I_3$. Se differenziamo la (10.7) rispetto a $v_d = v_{BE1} - v_{BE2}$, otteniamo:

$$\frac{di_{C2}}{dv_d} \cong \frac{i_{EE}}{(1 + e^{v_d/V_T})^2} \times e^{v_d/V_T} \left(-\frac{1}{V_T} \right)$$

Per $v_d = 0$, cioè $v_{BE1} = v_{BE2}$, questa fornisce:

$$g_{md} \equiv \frac{di_{C2}}{dv_d} = \frac{i_{EE}}{4V_T} = \frac{I_o}{4V_T} \quad (10.11)$$

Questa equazione ci dice che per un dato valore di I_o , la transconduttanza di un amplificatore differenziale è pari ad un quarto di quella del singolo transistor (I_o/V_T).

Dalle considerazioni svolte all'inizio di questo capitolo segue che l'amplificatore differenziale è un buon *limitatore*: quando l'input $v_d = V_{B1} - V_{B2}$ supera $\pm 4V_T$ ($\pm 100 mV$ a temperatura ambiente) l'output può aumentare molto poco.

Dalla (10.11) segue poi che il valore di g_{md} è proporzionale ad I_o .

Si ha inoltre:

$$v_{o2} = g_{md} R_c v_d$$

È poi possibile modificare il guadagno dell'amplificatore differenziale aumentando I_o (controllo automatico del guadagno)

10.6 Amplificatore differenziale che fa uso di transistor Darlington

Abbiamo visto che un tipico transistor Darlington ha un valore di h_{fe} pari all'incirca al quadrato dell' h_{fe} del singolo transistor e che la sua impedenza d'ingresso è maggiore di quella di un singolo transistor di un fattore $2(h_{fe} + 1)$.

Un'amplificatore differenziale che fa uso di transistor Darlington è quello indicato in figura 10.16.

L'impedenza d'ingresso di ciascuno dei due transistor è:

$$R_D = 2(h_{fe} + 1)h_{ie} = 2(h_{fe} + 1)^2 h_{ib}$$

Si può allora facilmente vedere che il circuito equivalente è quello di figura 10.17:

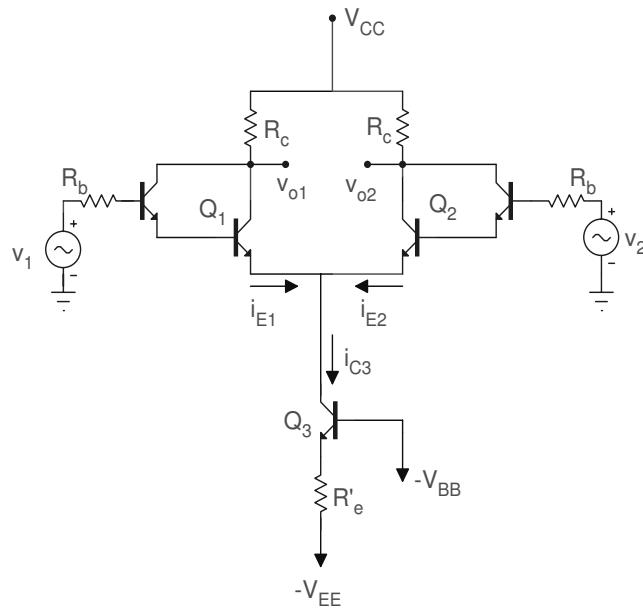


Figura 10.16: Schema di un amplificatore differenziale che fa uso di transistor Darlington.

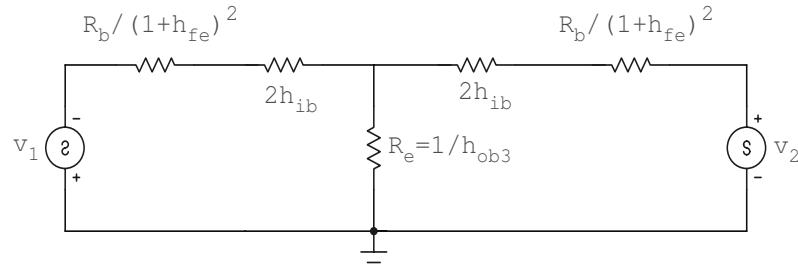


Figura 10.17: Circuito equivalente all'amplificatore differenziale di figura 10.16.

L'impedenza d'ingresso vista da v_1 (o da v_2) è, come prima:

$$R_i = 4(h_{fe} + 1)h_{ie1} = 4(h_{fe} + 1)^2h_{ib1}$$

Ad esempio, se $(h_{fe} + 1)=100$ ed $I_{EQ1}=1$ mA, troviamo:

$$R_i = 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{25}{1} = 1 M\Omega$$

Il rapporto di reiezione per il modo comune sarà:

$$\rho = \frac{R_e}{2h_{ib} + R_b/(h_{fe} + 1)^2}$$

Notiamo che, rispetto al caso in cui si adoperavano dei normali transistor:

$$h_{ib} \rightarrow 2h_{ib}$$

$$\frac{R_b}{1 + h_{fe}} \rightarrow \frac{R_b}{(1 + h_{fe})^2}$$

Capitolo 11

Struttura delle principali famiglie logiche

11.1 Introduzione

I circuiti logici che sono alla base dei computer, dei sistemi di controllo, di codifica e trasmissione dati digitali etc., sono classificabili in un certo numero di “famiglie”, ciascuna con proprie caratteristiche, quali i livelli di tensione, la velocità di commutazione, le dimensioni del componente elementare, la dissipazione di potenza e, non ultimo, il costo.

In questa sezione ci occuperemo delle caratteristiche delle principali di queste famiglie. A titolo illustrativo ci occuperemo della famiglia TTL (Transistor-Transistor Logic) e del suo precursore (non più adoperato) DTL (Diode-Transistor-Logic).

Motivi di spazio non ci consentono di trattare altre due famiglie che, in questi ultimi decenni, hanno avuto una enorme diffusione: i circuiti basati sulla logica MOS (Metal-Oxide-Semiconductor) e CMOS (Complementary MOS), e quelli basati sulla logica ECL (Emitter-Coupled-Logic). Il notevole successo dei circuiti MOS e CMOS è dovuto alla compattezza dei componenti elementari ed al ridotto consumo; quello dei secondi all'elevata velocità di commutazione. Ci limiteremo a dare un breve cenno, alla fine del capitolo, ai circuiti in logica CMOS.

Inizieremo con una breve discussione dei livelli di tensione che caratterizzano gli stati dei vari circuiti e di quello che è il margine di errore su tali livelli. Per una discussione delle caratteristiche costruttive delle famiglie MOS, CMOS ed ECL si veda le referenze [7] e [25].

11.2 Livelli logici

I livelli di tensione che corrispondono all'1 logico ed allo 0 logico sono definiti per ogni determinata famiglia logica. Ad esempio nella famiglia TTL tali livelli sono 0 V (livello “Low”=“L”) e 5 V (livello “High”=“H”). Ovviamente le fluttuazioni tra componente e componente ed il rumore che è sempre presente fanno sì che un livello H in logica TTL non sia proprio 5 V ed un livello L non sia esattamente 0 V.

Chiameremo V_{OH} il minimo livello di tensione che deve essere presente all'uscita del circuito se si vuole che questo livello sia riconosciuto come H. Analogamente

chiameremo V_{IH} il minimo livello di tensione che deve essere presente all'ingresso di un circuito se si vuole che questo sia riconosciuto come H.

È ovvio che un circuito non dovrà fornire in uscita un livello H di tensione inferiore a quello che esso stesso riconoscerebbe come livello alto in ingresso. Si deve cioè avere:

$$V_{OH} > V_{IH}$$

Se così non fosse, un piccolo disturbo presente (rumore, accoppiamento elettromagnetico con altri componenti presenti etc.) potrebbe far sì che un livello di tensione H all'uscita del circuito non risultasse tale all'ingresso di un altro circuito nominalmente identico al primo.

La differenza:

$$V_{OH} - V_{IH} = NM_H$$

è nota come il “margine d'errore” (*Noise Margin*=NM) relativo al livello alto.

Per il livello basso esistono analoghe definizioni. Si definisce il massimo livello di tensione che può esser presente all'uscita di un circuito perché questo sia riconosciuto come L: V_{OL} , ed il massimo livello di tensione che può esser presente all'ingresso del circuito perché esso sia riconosciuto come L: V_{IL} .

Ora dovrà essere:

$$V_{IL} > V_{OL}$$

Il relativo Noise Margin (NM) è:

$$NM_L = V_{IL} - V_{OL}$$

Esempio: circuito NOT (invertitore). Se tale circuito ha in ingresso un livello di tensione $V_I < V_{IL}$, esso dovrà fornire in uscita un segnale $V_O > V_{OH}$. Viceversa, se al suo ingresso è presente un segnale di tensione $V_I > V_{IH}$, l'uscita sarà $V_O < V_{OL}$. Tale comportamento è mostrato in figura 11.1.

Notiamo che, in tale diagramma, le zone scure non corrispondono a stati consentiti. Il circuito può solo effettuare transizioni tra gli stati indicati come “1 logico” (in alto a sinistra) e “0 logico” (in basso a destra).

Qualora l'ingresso o l'uscita del circuito venissero a trovarsi in una delle zone scure in figura, lo stato del circuito sarebbe indeterminato.

Normalmente, i livelli V_{IL} , V_{IH} , V_{OL} , V_{OH} sono specificati per valori delle correnti che non eccedano rispettivamente I_{IL} , I_{IH} , I_{OL} , I_{OH} .

La tabella 11.1 mostra valori tipici, forniti dai costruttori, per le famiglie TTL 54L/74L e CMOS 54C/74C.

Famiglia	V_{CC} (V)	V_{IL}, I_{IL}	V_{IH}, I_{IH}	V_{OL}, I_{OL}	V_{OH}, I_{OH}
54L/74L	5	0.7V , 0.18mA	2.0V, 10 μ A	0.3V, 2.0mA	2.4V, 100 μ A
54C/74C	5	0.8V	3.5V	0.4V, 360 μ A	2.4V, 100 μ A

Tabella 11.1: Valori tipici dei livelli di tensione per le famiglie TTL 54L/74L e CMOS 54C/74C.

All'interno delle famiglie TTL, CMOS etc. esistono “sottofamiglie” con valori lievemente diversi da questi dei vari parametri.

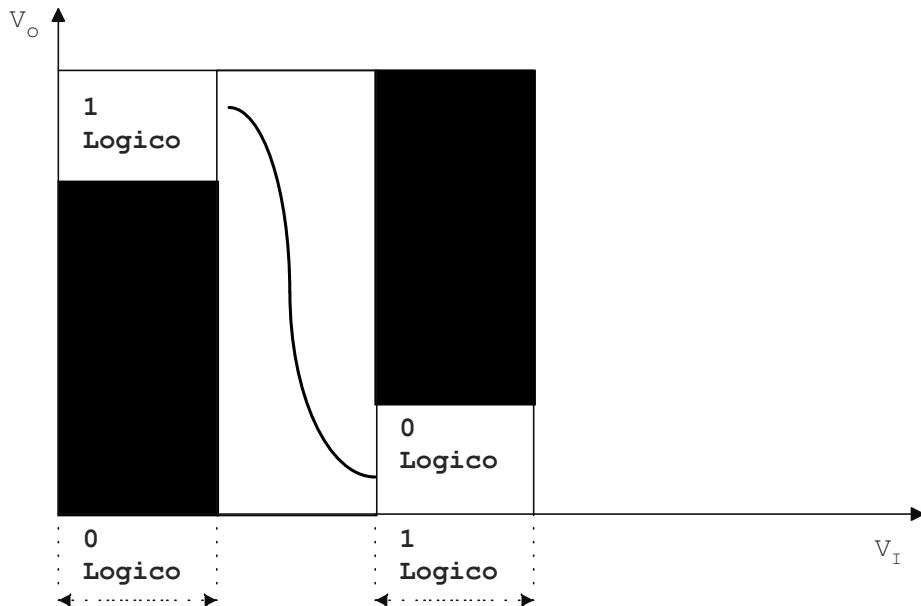


Figura 11.1: Livelli di tensione in uscita per un circuito invertitore. Le zone scure corrispondono a stati non consentiti.

Le caratteristiche della famiglia ECL sono mostrate, insieme a quelle della logica NIM, che è uno standard usato nei sistemi di acquisizione e trasmissione dei dati in esperimenti di fisica (in particolare in fisica nucleare e subnucleare) nella tabella 11.2.

Famiglia	V_{OL}	V_{OH}	V_{IL}	V_{IH}
ECL	-1.7V	-0.9V	-1.4V	-1.0V
NIM	(-1mA, 1mA)	(-14mA,-18mA)	(-4mA, 20mA)	(-12mA,36mA)

Tabella 11.2: Valori tipici dei livelli di tensione e corrente per le famiglie ECL e NIM.

Si noti che la logica ECL ha livelli negativi di tensione, mentre i livelli relativi alla logica NIM sono di corrente e non di tensione.

Poiché tuttavia è anche specificata l'impedenza dei collegamenti che è 50Ω in logica NIM (e TTL) mentre è 100Ω in logica ECL si vede che in logica NIM il livello logico 1 è circa -0.8 V mentre il livello logico 0 è circa 0 V.

11.3 Il *Fan-Out*

Se l'uscita di una certa porta logica è collegata agli ingressi (in parallelo) di più porte simili, occorrerà tener conto della corrente che queste assorbono. Tale corrente è infatti erogata dalla porta pilota e, qualora fosse troppo elevata, farebbe uscire la prima dalla sua zona di funzionamento normale.

Nella figura 11.2 la porta pilota A, con l'uscita al livello alto, deve erogare una corrente I_{OH} pari a $3I_{IH}$, dove I_{IH} è la corrente assorbita da ciascuna delle porte alimentate dalla prima.

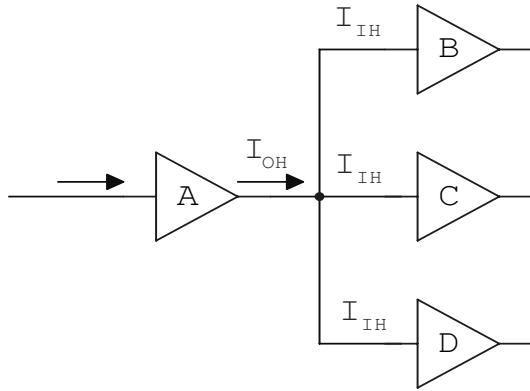


Figura 11.2: Esempio di porta logica la cui uscita è collegata agli ingressi in parallelo di più porte simili.

Possiamo schematizzare tale circuito nel modo indicato in figura 11.3.

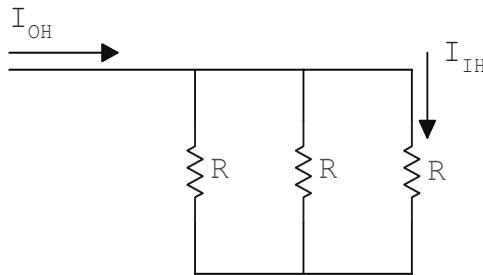


Figura 11.3: Schema del circuito di figura 11.2.

Se il numero delle porte collegate aumenta, aumenta la corrente erogata dalla porta pilota e di conseguenza, se I_{OH} non può più aumentare diminuisce la tensione V_{out} ai capi del carico costituito dal parallelo delle tre resistenze. Come si vede facilmente dalla figura, si ha:

$$V_{out} = \frac{R}{N} I_{OH}$$

dove N è il numero delle porte collegate (tre nell'esempio di figura).

Si ha in generale:

$$N_H < |I_{OH}/I_{IH}|$$

Analogamente, se l'uscita della porta pilota è nello stato basso, avremo:

$$N_L < |I_{OL}/I_{IL}|$$

Normalmente i costruttori quotano il più piccolo tra i due valori N_H, N_L . Tale quantità è nota come il *fan-out* della porta logica.

Vedremo nelle prossime sezioni come il fan-out possa esser calcolato in alcuni semplici circuiti logici e quali siano i fattori che lo limitano nei vari casi.

11.4 Circuiti in logica Diodo-Transistore (DTL)

Anche se tali circuiti hanno oramai un interesse puramente storico, è utile esaminarne il funzionamento poiché da essi sono poi nati i TTL. Un esempio di porta NAND in logica DTL è quello mostrato in figura 11.4.

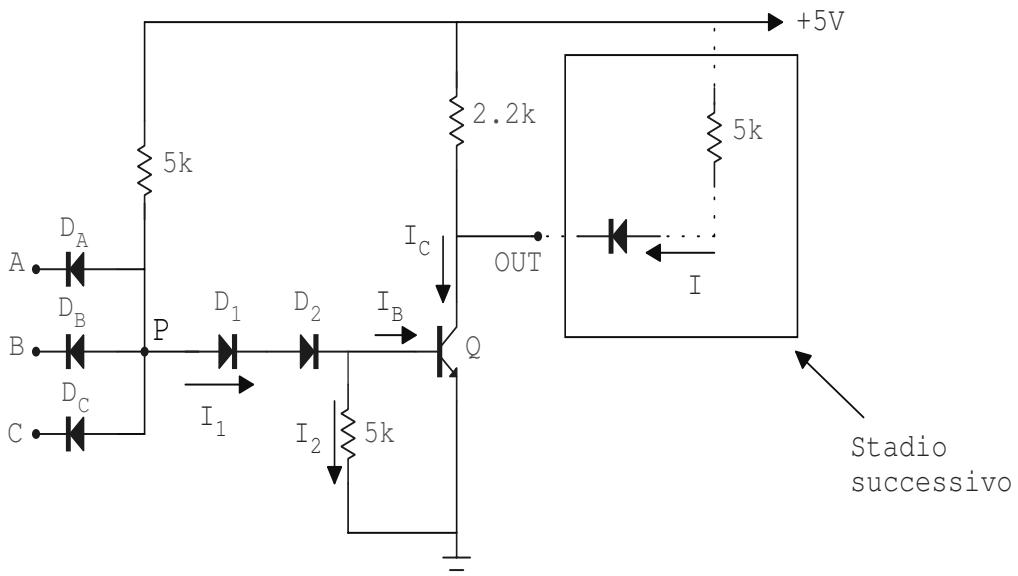


Figura 11.4: Schema di una porta NAND in logica DTL.

Se almeno uno degli ingressi A, B, C è basso ($< 0.2 \text{ V}$) il diodo corrispondente conduce e $V_P = 0.2 + 0.7 = 0.9 \text{ V}$. Perché i diodi D_1 e D_2 conducano, occorre che la tensione ai capi di ciascun diodo sia almeno uguale a 0.7 V e che inoltre la differenza di potenziale V_{BE} tra base ed emettitore del transistor sia anch'essa uguale a 0.7 V . In altri termini deve essere: $V_p > 2 \cdot 0.7 + 0.7 = 2.1 \text{ V}$. Quindi, nelle condizioni esaminate, D_1, D_2 sono interdetti. Il transistor, con la base a massa attraverso la resistenza da $5\text{k}\Omega$, è anch'esso interdetto, quindi $V_{out} = +5 \text{ V}$. Se tutti gli ingressi A, B, C sono invece alti ($+5 \text{ V}$) i diodi D_A, D_B, D_C saranno interdetti.

In tali condizioni i diodi D_1, D_2 condurranno, $V_P = 2.1 \text{ V}$ ed il transistor Q andrà in saturazione come ora verificheremo.

Esaminiamo lo stato del transistor, tenendo conto del fatto che, con i diodi d'ingresso interdetti, la corrente nei diodi D_1, D_2 è uguale alla corrente nella resistenza da $5 \text{ k}\Omega$ tra il punto P e l'alimentazione:

$$I_1 = \frac{5 - 2.1}{5k} = 0.58 \text{ mA}$$

Inoltre:

$$I_2 = \frac{0.7}{5k} = 0.14 \text{ mA}$$

Si ha quindi:

$$I_B = 0.58 - 0.14 \text{ mA} = 0.44 \text{ mA}$$

Se il transistor fosse in saturazione avremmo $V_{CE} \approx 0.2 \text{ V}$. Allora dovremmo avere:

$$I_B > \frac{I_C}{\beta}$$

Verifichiamo la consistenza:

$$I_C = \frac{5 - 0.2}{2.2k} = 2.18 \text{ mA}$$

$$\frac{I_C}{I_B} = \frac{2.18}{0.44} = 4.95$$

Il transistor sarà quindi in saturazione se è:

$$h_{FE} \gg \frac{I_C}{I_B} = 4.95$$

Se il nostro transistor ha un $h_{FE_{min}}$ di 30, l'uscita sarà:

$$V_{out} \approx 0.2 \text{ V} \quad (\text{stato LOW})$$

Vediamo così che il circuito si comporta come un NAND.

Valutiamo ora il fan-out.

Se l'uscita V_{out} è bassa, ed essa è collegata (come in figura) all'ingresso di uno stadio *identico*, la corrente nel diodo d'ingresso di tale stadio sarà:

$$I_D = \frac{5 - 0.9}{5k} = 0.82 \text{ mA}$$

Che chiamiamo *carico standard*. Tale corrente si somma a quella che attraversa il transistor Q_2 della porta pilota. Se collegiamo all'uscita del nostro NAND gli ingressi di N circuiti simili, la corrente che attraversa il transistor diventa:

$$I'_C = I_C + N \times 0.82 \text{ mA} = 2.18 + 0.82 \times N \text{ (mA)}$$

Chiediamoci ora quale sia la corrente massima che può attraversare il transistor senza che esso esca dalla saturazione. Questa è:

$$(I'_C)_{max} = h_{FE_{min}} \times I_B = 30 \cdot 0.44 = 13.2 \text{ mA}$$

Perché il transistor rimanga in saturazione deve essere: $I'_C < (I'_C)_{max}$, cioè:

$$2.18 + 0.82 \times N < 13.2 \text{ mA}$$

da cui:

$$N < \frac{13.2 - 2.18}{0.82} \simeq 13$$

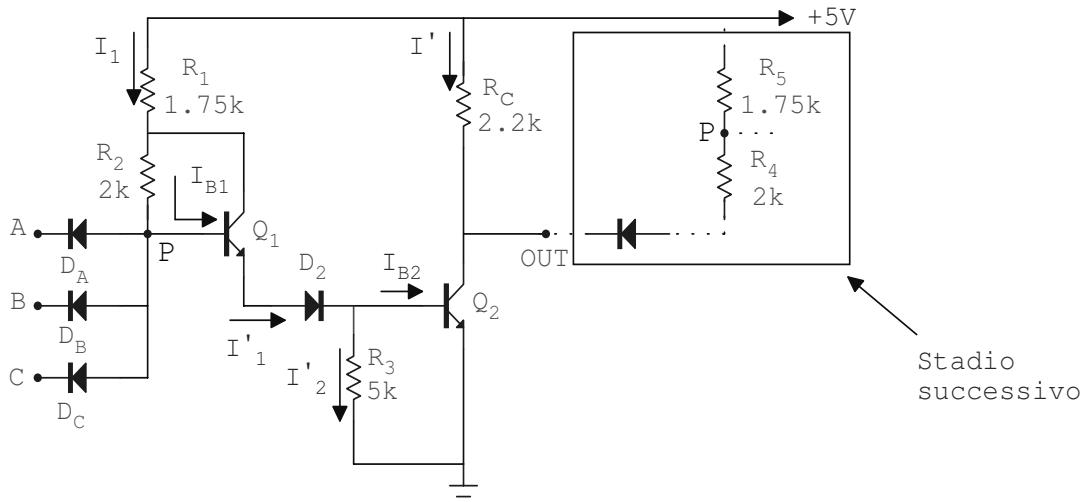


Figura 11.5: Schema del circuito di figura 11.4 in cui il diodo D_1 è stato sostituito con un transistor.

Quindi il fan-out del nostro circuito è all'incirca 13.

Un metodo che può essere adoperato per aumentare la corrente di collettore nel transistor (a parità di $(h_{FE})_{min}$) e quindi aumentare il fan-out, è quello di modificare il circuito in modo tale da aumentare la corrente di base in Q_2 . Ciò può esser ottenuto sostituendo il diodo D_1 con un altro transistor, come mostrato in figura 11.5.

Notiamo che, quando i diodi in ingresso sono interdetti, una corrente fluisce nella base di Q_1 . Questo transistor sarà allora in conduzione (zona attiva), poiché la resistenza R_2 fa sì che la tensione di collettore sia maggiore di quella della base. La giunzione base-collettore è quindi polarizzata inversamente. Ora la corrente di base di Q_2 è fornita dall'emettitore di Q_1 e quindi sarà alta, essendo grandi i valori tipici delle correnti di collettore (emettitore) per un transistor che lavori in zona attiva. Un valore elevato per la corrente di base in Q_2 implica un alto valore della corrente di collettore, anche con un $(h_{FE})_{min}$ non particolarmente elevato, e quindi un grande fan-out.

Calcoliamo ora il fan-out, ammettendo che i transistor adoperati abbiano un $(h_{FE})_{min} = 30$, una tensione di soglia $V_\gamma = 0.5 \text{ V}$, un V_{BE} in zona attiva è $\simeq 0.7 \text{ V}$ ed un V_{BE} in saturazione di circa 0.8 V .

Se almeno uno degli ingressi è basso, il diodo corrispondente conduce e $V_P = 0.9 \text{ V}$. Se inoltre il V_γ del transistor è 0.5 V , Q_1 sarà interdetto. Infatti, perché esso conduca, occorre che conducano anche D_2 e Q_2 e quindi che V_P sia superiore a:

$$V'_P = 0.5 + 0.7 + 0.5 = 1.7 \text{ V}$$

Ne segue che Q_2 è anch'esso interdetto e $V_{out} = +5 \text{ V}$.

Se tutti gli ingressi sono alti, i diodi D_A , D_B , D_C saranno interdetti e Q_1 potrà andare in conduzione (zona attiva). Perché ciò accada basta che V_P si porti ad una tensione pari a:

$$V_P = (V_{BE})_{attiva} + V_{D_2} + (V_{BE_2})_{sat} = 0.7 + 0.7 + 0.8 = 2.2 \text{ V}$$

Con Q_1 in zona attiva e con $V_P=2.2$ V avremo:

$$I_{C_1} = h_{FE} I_{B_1}$$

$$I_1 = I_{B_1} + I_{C_1} = (1 + h_{FE}) I_{B_1}$$

$$\begin{aligned} V_{CC} - V_P &= (5 - 2.2) \text{ V} = V_{R_1} + V_{R_2} = R_1 (1 + h_{FE}) I_{B_1} + R_2 I_{B_1} = \\ &= 1.75 (1 + h_{FE}) I_{B_1} + 2.0 I_{B_1} \end{aligned}$$

e, se $h_{FE} = 30$, da questa otteniamo:

$$(5 - 2.2) \text{ V} = 2.8 \text{ V} = 56.25 I_{B_1}$$

da cui:

$$I_{B_1} = 0.05 \text{ mA}$$

Inoltre avremo:

$$\begin{aligned} I'_1 &= I_{E_1} = (1 + h_{FE}) I_{B_1} = 1.543 \text{ mA} \\ I'_2 &= \frac{0.8}{R_3} = \frac{0.8}{5k} = 0.16 \text{ mA} \end{aligned}$$

Di conseguenza la corrente di base di Q_2 sarà:

$$I_{B_2} = I'_1 - I'_2 = (1.543 - 0.16) \text{ mA} = 1.383 \text{ mA}$$

Ricordiamo che nel precedente circuito, I_{B_2} era 0.44 mA.

La corrente di collettore di Q_2 , in assenza di carichi, sarà:

$$I' = \frac{5 - 0.2}{2.2k} \text{ mA} = 2.182 \text{ mA}$$

Notiamo a questo punto che:

$$I' = 2.182 \text{ mA} < h_{FE} I_{B_2} = 41.49 \text{ mA}$$

cioè Q_2 è sicuramente in saturazione.

Chiediamoci ora quale sia il “carico standard”, cioè la corrente assorbita dallo stadio d’ingresso di un circuito simile, quando esso sia collegato all’uscita del primo, con Q_2 in saturazione.

La corrente che fluisce nelle resistenze R_1 ed R_2 dello stadio posto a valle è, in queste condizioni:

$$I_{R_{12}} = \frac{5 - 0.9}{1.75 + 2.0} = 1.093 \text{ mA}$$

Questo è il carico standard.

La massima corrente di collettore possibile perché Q_2 rimanga in saturazione (sempre con $h_{FE} = 30$) è:

$$I_{C_2} = 30 \times I_{B_2} = 30 \times 1.383 \text{ mA} = 41.49 \text{ mA}$$

Otteniamo quindi per il fan-out:

$$N = \frac{I_{C_2} - I'}{I_{R_{12}}} = \frac{41.49 - 2.182}{1.093} \simeq 35$$

Occorre anche notare che, se all'uscita del nostro circuito NAND collegiamo uno o più ingressi di altri circuiti dello stesso tipo, la potenza dissipata aumenterà.

La potenza *minima* dissipata (anche in assenza di carico) sarà diversa a seconda che sia $V_{out} = 0.2$ V (livello basso) o $V_{out} = 5$ V (livello alto). Se $V_{out} = 0.2$ V, la potenza dissipata nella resistenza R_c e nel transistor Q_2 sarà:

$$P' = V_{cc} \times I' = 5 \times 2.182 = 10.91 \text{ mW}$$

Poiché in tale situazione i diodi D_A , D_B , D_C sono interdetti e Q_1 conduce, la potenza dissipata nella parte di circuito che segue il percorso: $R_1-R_2-Q_1-D_2-R_3$ sarà:

$$P'' = V_{cc} \times I_1 = 5 \times 1.543 \text{ mA} = 7.715 \text{ mW}$$

per cui la potenza totale dissipata è:

$$P(Y=0) = P' + P'' = 18.62 \text{ mW}$$

Se $V_{out} = 5$ V, entrambi i transistor sono interdetti e quindi, ai fini del calcolo della potenza, l'unica corrente da considerare è quella che fluisce nel ramo $R_1 - R_2$, poiché ora uno almeno dei diodi d'ingresso è in conduzione. Tale corrente è: $I_{R_{12}} = 1.093 \text{ mA}$, per cui:

$$P(Y=1) = V_{cc} \times I_{R_{12}} = 5 \times 1.093 = 5.47 \text{ mW}$$

11.5 Circuiti in logica TTL

I circuiti logici del tipo esaminato finora, che utilizzano diodi e transistor, sono relativamente lenti. Per tale motivo a tale tipo di logica (nota come DTL) è preferita quella che utilizza solo transistor, nota come logica TTL.

Esaminiamo le cause della lentezza nella risposta di un circuito DTL, distinguendo la risposta alla transizione livello 0 → livello 1, da quella relativa alla transizione livello 1 → livello 0 (con riferimento all'uscita).

Esaminiamo il circuito d'uscita (vedi figura 11.6), dove la tensione d'uscita è quella sul collettore di Q_2 .

Il condensatore C nel disegno rappresenta l'effetto combinato delle capacità d'ingresso dei circuiti posti a valle e di quelle associate ai collegamenti.

Nel passaggio dell'uscita dal livello 0 al livello 1, il transistor deve andare in interdizione e la tensione di collettore salire a $+V_{cc}$. Ciò avviene con una costante di tempo R_cC , che è il tempo di carica del condensatore C attraverso R_c , il che rende lenta la transizione. Un secondo fattore che contribuisce a rendere lenta tale transizione deriva dal fatto che il transistor deve passare dalla saturazione all'interdizione. Ciò implica che le cariche presenti in base (elettroni e lacune) debbano fluire verso massa. La corrente iniziale con cui il processo ha luogo è $V_{BE}/R_b \approx 0.7 \text{ Volt}/R_b$ che, per un valore tipico di R_b di $5 \text{ k}\Omega$, vale 0.15 mA . Poiché tale corrente è piccola il tempo di svuotamento della base sarà relativamente lungo.

Esaminiamo ora ciò che accade nella transizione opposta, cioè quando l'ingresso della porta diventa alto e quindi l'uscita scende a (0-0.2 V). Tale transizione implica che il transistor entri in saturazione ed il condensatore si scarichi attraverso di esso.

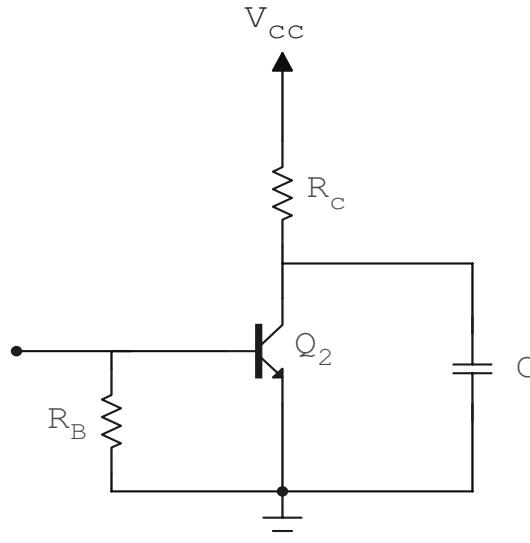


Figura 11.6: Schema relativo all'uscita del circuito in logica DTL di figura 11.4.

Ora, il transistor era inizialmente interdetto e, per andare in saturazione dovrà passare attraverso una successione di stati che comprendono la zona attiva. Poiché la corrente di collettore, per un transistor in zona attiva, assume valori elevati, è chiaro che il tempo di scarica, e quindi il fronte di discesa associato alla transizione, sarà breve.

Un circuito caratterizzato da valori brevi sia del tempo di salita che di quello di discesa, si ottiene sostituendo tutti i diodi con transistor. Esaminiamo il principio di funzionamento di un tale circuito, prendendo come esempio un NAND con un solo ingresso, cioè un NOT.

Vedremo in seguito come, sostituendo il transistor d'ingresso con un particolare tipo di transistor a più emettitori, sia possibile realizzare delle porte NAND a più ingressi.

Esaminiamo, per cominciare, il circuito visto dal lato dell'ingresso (figura 11.7).

Se l'input V_i è alto ($V_i = V_{CC}$) la giunzione base-emettitore di Q_1 sarà polarizzata inversamente. La tensione in P comincerà a salire fino a che $(V_{BC})_1$ e $(V_{BE})_2$ non abbiano raggiunto circa 0.7 V. In tali condizioni vediamo che il transistor Q_1 ha V_{BE} negativo e V_{BC} positivo, cioè è in una situazione in cui le polarizzazioni sono opposte rispetto a quelle che sono caratteristiche di un transistor che lavora in zona attiva diretta. Ora il transistor Q_1 lavora in zona *attiva inversa* cioè con i ruoli di emettitore e collettore scambiati. Un transistor che lavora in modo inverso soddisfa a relazioni tra correnti di emettitore, collettore e base, analoghe a quelle che conosciamo per la zona attiva diretta. In particolare sussistono le seguenti relazioni tra le correnti:

$$I_C = -(\beta_R + 1)I_B$$

(analoga alla $I_E = (\beta_F + 1)I_B$ per un transistor che lavora in zona attiva diretta). Inoltre:

$$I_E = -\beta_R I_B$$

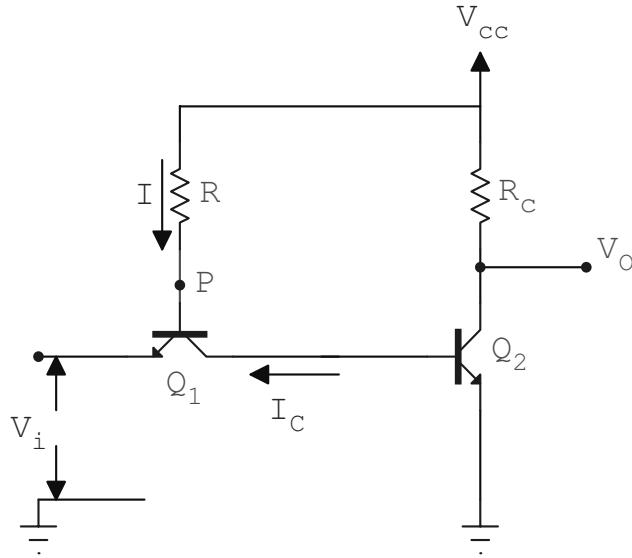


Figura 11.7: Schema relativo ad un circuito NAND in cui siano stati sostituiti tutti i diodi con transistor (logica TTL) .

Notiamo che in genere è $\beta_R \ll \beta_F$. Inoltre i transistor utilizzati in questo tipo di applicazioni hanno valori di β_R ancora più piccoli:

$$\beta_R \simeq 0.02$$

per cui, indicando con I la corrente entrante nella base di Q_1 , avremo:

$$I_C \simeq -I$$

$$I_E \simeq -\beta_R I \text{ (molto piccolo)}$$

Avendo inoltre fatto l'ipotesi che $V_P = (V_{BC})_1 + (V_{BE})_2 \simeq 1.4 V$, si ha:

$$I_C \simeq \frac{1.4 - V_{CC}}{R}$$

$$I_E \simeq \beta_R I_C \simeq 0.02 I$$

In altre parole, avremo valori relativamente grandi per le correnti di base e di collettore in Q_1 , mentre la corrente di emettitore sarà piccola. La corrente di collettore di Q_1 sarà quindi abbastanza elevata da mandare Q_2 in saturazione e l'uscita V_o a circa 0.2 V.

Se invece l'ingresso (emettitore di Q_1) va al livello basso, la giunzione base-emettitore acquista una polarizzazione diretta e la base di Q_1 andrà a $0.2 + 0.7 = 0.9 V$. Il collettore di Q_1 , unito alla base di Q_2 era inizialmente a 0.7 V (nella fase precedente Q_2 era saturo). Ne segue che la giunzione base-collettore di Q_1 subito dopo la transizione dell'ingresso dallo stato alto a quello basso, è polarizzata inversamente. Con la giunzione base-emettitore polarizzata direttamente e quella base-collettore polarizzata inversamente, vediamo che Q_1 opera in zona attiva, con un'elevata corrente di collettore. Tale corrente scarica rapidamente la base di Q_2 , dopo di che tale transistor va in interdizione.

In tale fase, la tensione di base di Q_2 scende, la differenza di potenziale $V_{CB_1} = V_{B_1} - V_{C_1}$ aumenta ed infine Q_1 entra in saturazione. Alla fine del processo la corrente di collettore di Q_1 sarà molto piccola, il che implica una V_{CE} di circa 0.2 V, mentre la base di Q_2 sarà a ≈ 0.4 V, il che mantiene Q_2 interdetto.

Vediamo che con tale struttura del circuito di ingresso si elimina una delle cause che erano all'origine del lungo tempo di salita del segnale in uscita nel circuito DTL.

Esaminiamo ora l'uscita del NOT TTL, per vedere come sia possibile eliminare il problema della lentezza del tempo di salita del segnale in uscita, legato alla costante di tempo $R_c C$.

Ricordiamo che il tempo di scarica della capacità C era rapido, grazie all'effetto del transistor Q_2 che, durante la transizione, operava in zona attiva. Se vogliamo che anche il tempo di carica sia breve, dobbiamo far sì che la carica avvenga attraverso una resistenza di piccolo valore. Ciò suggerisce di adoperare un “emitter-follower”, caratterizzato appunto da una bassa impedenza d'uscita (ricordiamo che l'impedenza d'uscita di un EF è all'incirca uguale ad R_s/h_{FE} , dove R_s è l'impedenza della sorgente che alimenta la base dell'EF).

Schematicamente dovremmo quindi far uso di un circuito del tipo mostrato in figura 11.8.

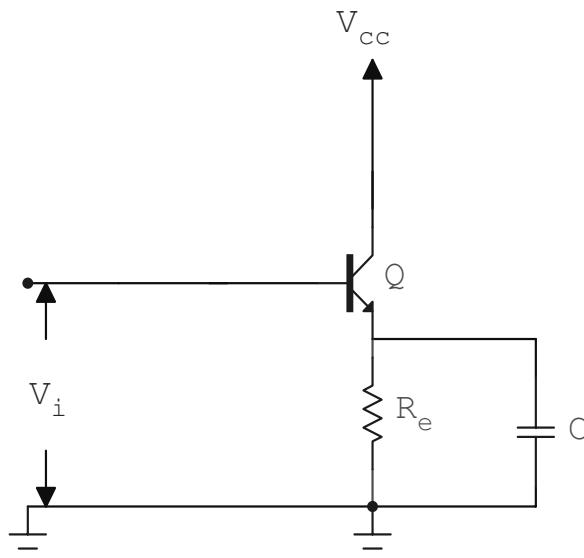


Figura 11.8: Schema di un NOT TTL con un rapido tempo di carica.

Questo circuito ha un rapido tempo di carica (quando Q conduce) ma un lento tempo di scarica (se Q è interdetto la scarica avviene attraverso la resistenza R_e , che è tipicamente di qualche $k\Omega$).

Per ottenere un rapido tempo di carica ed un altrettanto rapido tempo di scarica, si può adoperare una combinazione dello stadio d'uscita del circuito di figura 11.7 e di quello di figura 11.8, come mostrato in figura 11.9.

Dobbiamo supporre di disporre di due segnali *complementari* forniti dallo stadio d'ingresso.

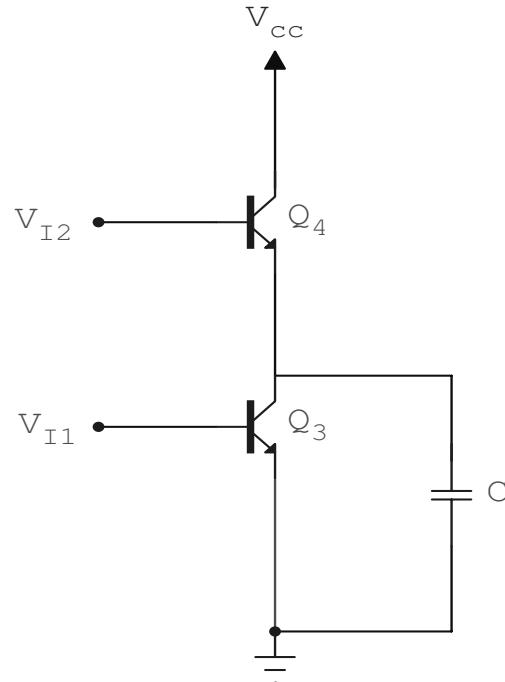


Figura 11.9: Circuito con rapidi tempi di carica e di scarica ottenuto dalla combinazioni degli schemi mostrati nelle figure 11.7 e 11.8.

In altri termini, V_{I1} è alto quando V_{I2} è basso e viceversa. Se V_{I1} è alto Q_3 sarà in saturazione, mentre contemporaneamente, con V_{I2} basso Q_4 sarà interdetto. Ora il condensatore C, supposto inizialmente carico (uscita V_o alta), potrà scaricarsi attraverso la piccola resistenza offerta dal transistor Q_3 saturo (R_{CE}^{sat}).

Se V_{I1} è basso e V_{I2} alto, Q_3 sarà interdetto e Q_4 condurrà. Ora Q_4 si comporta da EF e consente una rapida carica di C attraverso la piccola resistenza d'uscita dell'EF.

Lo stadio d'uscita adoperato è noto come “Totem-pole”, a causa del suo aspetto che ricorda i Totem adoperati dagli indiani d’America.

La bassa impedenza d'uscita dell'EF Q_4 in questo stato logico (uscita alta) fa sì che l'uscita possa erogare una notevole corrente con conseguente elevato fan-out.

Notiamo anche che il transistor Q_4 , nello stato alto, è quello che “tira su” l'uscita verso il livello alto. Per tale motivo ci si riferisce a Q_4 come un “active pull-up”.

Analogamente, nello stato basso, il ruolo di “tener giù” l'uscita è svolto dal transistor Q_3 che, per tale motivo, è indicato come un “active pull-down”.

Il circuito completo è mostrato in figura 11.10.

Abbiamo già esaminato il funzionamento dello stadio di ingresso (a sinistra nella figura). Esaminiamo ora lo stadio intermedio che fornisce le due uscite complementari (quelle che alimentano le basi di Q_3 e Q_4), e lo stadio d'uscita.

Lo stadio intermedio è un “phase-splitter”. L'uscita prelevata sul collettore di Q_2 e quella prelevata sull'emettitore sono sfasate di 180° . Tali uscite forniscono quindi i segnali di tensione V_{I1} e V_{I2} necessari per alimentare Q_3 e Q_4 .

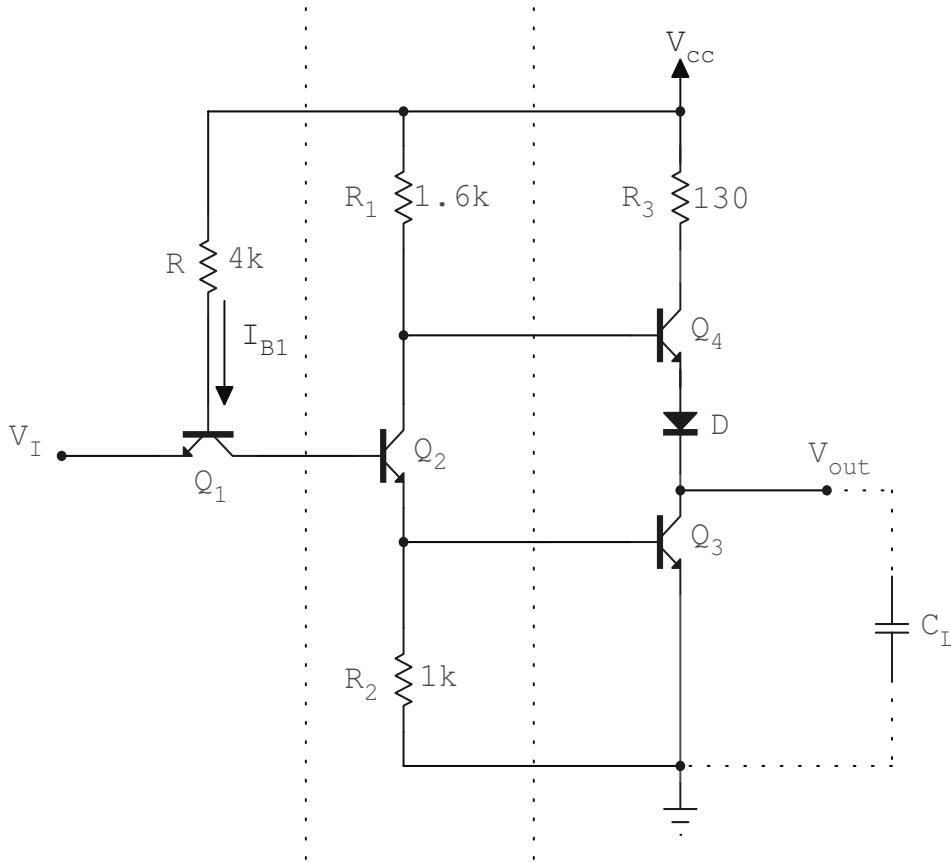


Figura 11.10: Schema completo del circuito NOT TTL. Lo stadio d'ingresso già esaminato è quello di sinistra, lo stadio intermedio al centro fornisce le due uscite complementari.

Se l'ingresso V_I è basso (0.2 V), il transistor Q_1 , come già visto, avrà la base a $(0.2+0.7=0.9$ V) e Q_2 sarà interdetto. Con ciò la tensione sulla base di Q_3 , unita all'emettitore di Q_2 sarà all'incirca 0 V e Q_3 sarà interdetto.

Con Q_2 interdetto, la sua tensione di collettore sarà $\approx V_{cc} = 5$ V. Poiché il collettore di Q_2 è unito alla base di Q_4 , avremo:

$$V_{C2} = V_{B4} = 5 \text{ V}$$

Con tale tensione di base, Q_4 sarà ON (in saturazione o in zona attiva).

Esaminiamo l'effetto del carico posto a valle sullo stato di Q_4 . Se non c'è alcun carico, la corrente I_L nell'emettitore di Q_4 sarà molto piccola (giusto la corrente di perdita) e le due giunzioni: quella base-emettitore di Q_4 e quella del diodo D, saranno al limite della conduzione. Ammettendo che esse valgano entrambe 0.65 V, troveremo:

$$V_{out} = 5 - 0.65 \times 2 = 3.7 \text{ V}$$

Cioè l'uscita è al livello alto.

Se introduciamo un carico, la corrente I_L in Q_4 ed in D aumenterà. Tuttavia, entro un certo range di valori di I_L , Q_4 rimarrà in zona attiva ed avremo:

$$V_{out} = V_{cc} - \frac{I_L}{\beta + 1} \times R_1 - V_{BE4} - v_D \simeq 5 - \frac{I_L}{\beta + 1} \times 1.6 \text{ k}\Omega - 0.8 - 0.7$$

Ulteriori aumenti di I_L potranno mandare Q_4 in saturazione. A questo punto la tensione d'uscita sarà determinata dalla sola resistenza di 130Ω :

$$\begin{aligned} V_{out} &= V_{cc} - 0.13k\Omega \times I_L - V_{CE_4}^{sat} - 0.8 = 5.0 - 0.13k\Omega \times I_L - 1.0 = \\ &= 4. - 0.13k\Omega \times I_L \end{aligned}$$

Esaminiamo ora ciò che accade se l'ingresso V_I è alto. Come già visto, ora la giunzione base-emettitore di Q_1 è polarizzata inversamente; la tensione $V_{B_1} \approx V_{C_1} + 0.7 V = 1.4 V$. La corrente di base di Q_1 è allora:

$$I_{B_1} = \frac{V_{cc} - 1.4}{R} = \frac{5 - 1.4}{4} = 0.9 \text{ mA}$$

La corrente di collettore sarà:

$$I_{C_1} = (\beta_R + 1)I_{B_1} \simeq I_{B_1}$$

mentre I_{E_1} sarà molto piccola.

Tale corrente di collettore di Q_1 (che sta funzionando in modo inverso) fluisce verso la base di Q_2 , mandandolo in saturazione. Verifichiamo in tali condizioni lo stato di Q_4 e Q_3 .

Con Q_2 in saturazione la corrente di emettitore di Q_2 sarà abbastanza grande da mandare Q_3 in saturazione e $V_{out} \rightarrow 0.2 V$. La tensione sulla base di Q_4 , uguale a quella sul collettore di Q_2 , sarà ora:

$$V_{B_4} = V_{C_2} = V_{CE_2}^{sat} + V_{BE_3}^{sat} = 0.2 + 0.8 = 1 V$$

Perché Q_4 conduca occorre che V_{B_4} soddisfi la condizione:

$$V_{B_4} > V_{BE_4}^{min} + v_D^{min} + V_{CE_4}^{sat} = 1.4 + 0.2 = 1.6 V$$

Poiché V_{B_4} è solo 1 V, né Q_4 né il diodo conducono.

Se ora l'ingresso V_I torna al livello basso, Q_2 andrà in interdizione e ciò manderà in interdizione Q_3 .

L'uscita rimarrà per un breve intervallo di tempo a 0.2 V, poiché la capacità parassita C_L deve caricarsi. Nel frattempo però Q_4 va in saturazione (la tensione sulla sua base è salita quando Q_2 è andato in interdizione). Avremo ora:

$$V_{B_4} = V_{BE_4}^{sat} + v_D + V_{out} = 0.8 + 0.7 + 0.2 = 1.7 V$$

La corrente di base di Q_4 sarà:

$$I_{B_4} = \frac{V_{cc} - V_{B_4}}{R_1} = \frac{5.0 - 1.7}{1.6} = 2.06 \text{ mA}$$

e quella di collettore:

$$I_{C_4} = \frac{V_{cc} - V_{CE_4}^{sat} - v_D - V_{out}}{R_3} = \frac{3.9}{0.13} = 30 \text{ mA}$$

e quindi:

$$\frac{I_{C_4}}{I_{B_4}} = \frac{30}{2.06} = 14.6$$

Se sceglieremo un transistor con $h_{FE}^{min} > 15$ vediamo che Q_4 sarà in saturazione.

Fino a che Q_4 rimane saturo, la tensione V_{out} in uscita sale esponenzialmente verso V_{cc} , con una piccola costante di tempo:

$$\tau = C_L (0.13 + R_{C4}^{sat} + R_f)$$

Dove R_{C4}^{sat} è la resistenza tra collettore ed emettitore di Q_4 quando questo è in saturazione ed R_f è la resistenza diretta del diodo.

All'aumentare di V_{out} la corrente in Q_4 diminuisce, Q_4 esce dalla saturazione ed infine V_{out} raggiunge uno stato in cui Q_4 è interdetto.

Il valore finale della tensione d'uscita sarà:

$$V_{out} = V_{cc} - V_{BE4}^{cutin} - v_D^{cutin} = 5 - 0.5 - 0.6 = 3.9 \text{ V}$$

Dove con V_{BE4}^{cutin} e v_D^{cutin} abbiamo indicato i valori di soglia sotto i quali il transistor ed il diodo non conducono.

Il circuito NAND in logica TTL differisce da quello (NOT) ora descritto per il transistor d'ingresso che, nella porta NAND, è costituito da un transistor a più emettitori, come mostrato in figura 11.11.

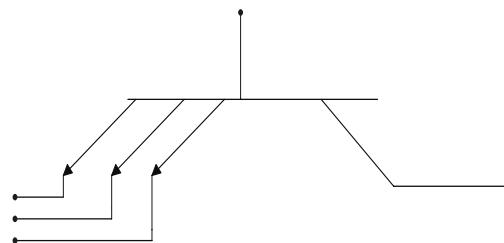


Figura 11.11: Transistor a più emettitori.

Fisicamente tale transistor ha la struttura mostrata in figura 11.12.

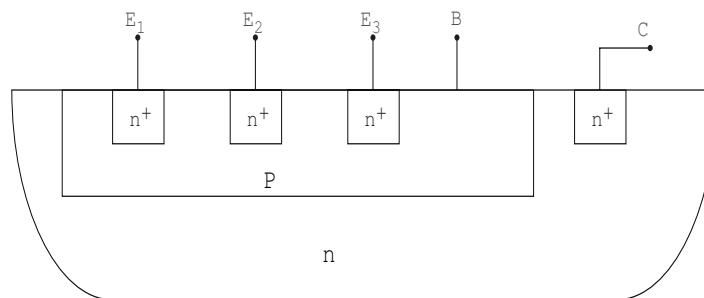


Figura 11.12: Struttura interna di un transistor a più emettitori.

Nel substrato di materiale n è impiantato il collettore (n^+) e, in una struttura p (cui è collegata la base) tre strutture (n^+), corrispondenti ciascuna ad uno dei

tre emettitori indicati nella figura precedente. Il funzionamento di tale dispositivo è identico a quello del singolo transistor.

11.6 Circuiti in logica CMOS

Abbiamo già accennato nel capitolo 9 alla struttura base di un tipico componente CMOS. Questo, come mostrato in figura 11.13, è costituito da un NMOS ed un PMOS, in cui i gates sono uniti insieme a costituire l'elettrodo di input, ed i drain sono anch'essi uniti insieme. Nella struttura di figura 11.13, che costituisce un esempio di invertitore (NOT), quando l'ingresso è basso l'NMOS è interdetto mentre il PMOS conduce. Come si è visto, in tali condizioni l'uscita è alta. Se invece l'ingresso è alto, viene ad essere interdetto il PMOS e conduce l'NMOS; con che l'uscita è bassa.

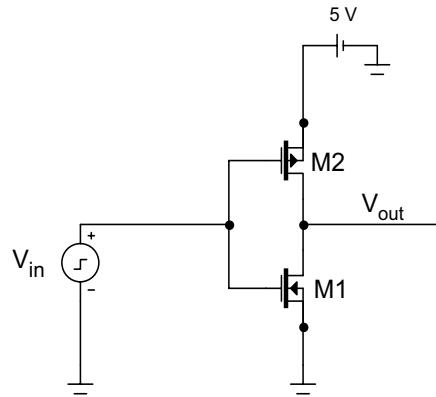


Figura 11.13: Esempio di invertitore in tecnologia CMOS.

Il circuito di figura 11.14 utilizza due NMOS e due PMOS per realizzare una porta NAND a due ingressi.

Il funzionamento di tale porta è facile da comprendere. Se entrambi gli ingressi A e B sono alti, i transistor M3 ed M4 conducono, mentre M1 ed M2 saranno interdetti. Si vede quindi che l'uscita sarà bassa. Se A e B sono entrambi bassi, M4 ed M3 saranno interdetti mentre condurranno M1 ed M2. L'output sarà quindi alto. Se A è alto e B basso, M1 ed M4 saranno interdetti mentre condurranno M2 ed M3. L'output sarà quindi alto. Analogamente, se A è basso e B alto, M2 ed M3 saranno interdetti mentre condurranno M1 ed M4. L'uscita sarà alta. È così verificato il funzionamento come porta NAND. È poi facile trasformare questa in una porta AND facendola seguire dall'invertitore di figura 11.13.

Il risultato di una simulazione del circuito di figura 11.14 è mostrato in figura 11.15. Nella simulazione, effettuata facendo uso della versione demo del programma Microcap, si è applicato all'ingresso A un segnale rettangolare, di altezza 5 V e periodo 20 μ s, mentre l'ingresso B è stato tenuto al livello logico 1 (+5 V).

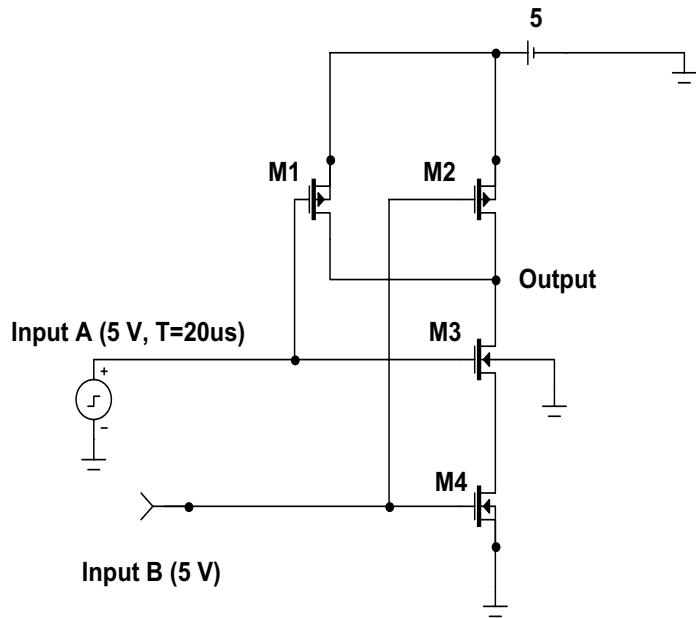


Figura 11.14: Esempio di porta NAND in tecnologia CMOS.

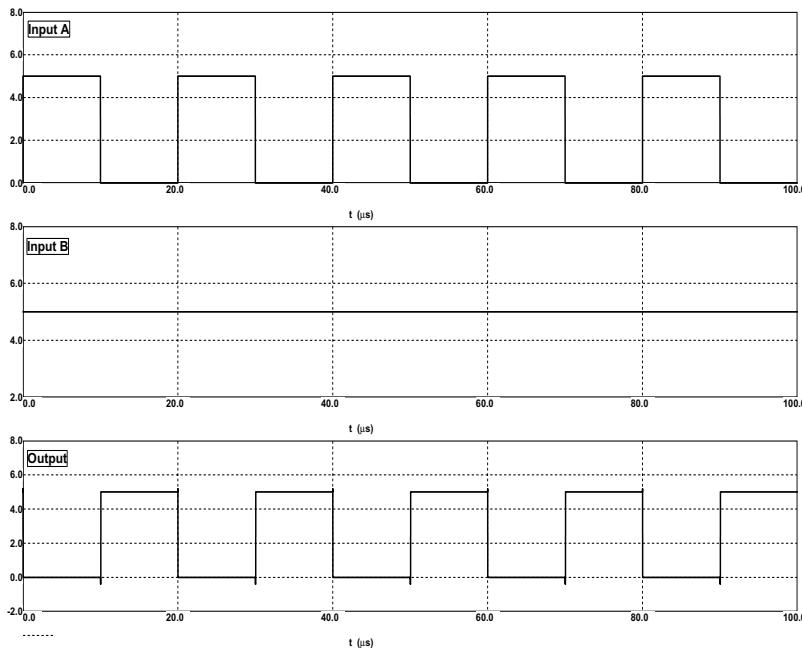


Figura 11.15: Forme d'onda in ingresso ed in uscita per la porta NAND in tecnologia CMOS di figura 11.14. L'ingresso A è un'onda rettangolare di altezza 5 V e periodo 20 μ s mentre l'ingresso B è stato tenuto, nella simulazione, ad un livello fisso di 5 V. La simulazione è stata effettuata facendo uso del programma Microcap

Capitolo 12

Amplificatori operazionali

12.1 Introduzione

Ci occuperemo in questa sezione degli amplificatori operazionali, iniziando con un breve sommario delle principali caratteristiche di un tipico amplificatore operazionale ideale ed esaminandone alcune semplici applicazioni. Passeremo a discutere in un secondo tempo i limiti degli amplificatori operazionali reali, quali le correnti e tensioni di offset, lo slew rate e via dicendo.

Questo tipo di amplificatore si presta ad un gran numero di applicazioni diverse, che vanno dall'amplificazione di segnali di tensione o corrente, alla realizzazione di integratori/derivatori di precisione, a quella di circuiti oscillanti, di filtri analogici, di sistemi di trigger e via dicendo. Vari tipi di operazionali, con diverse caratteristiche e prestazioni (impedenza d'ingresso più o meno elevata, guadagno più o meno grande, banda passante più o meno ampia etc), sono disponibili in commercio. Di questi, quello che è stato per decenni il più noto è il $\mu A741$

12.2 Proprietà degli amplificatori operazionali

Con riferimento allo schema indicato in figura 12.1, un amplificatore operazionale ha due ingressi di segnale, due alimentazioni (nella più gran parte dei casi una positiva ed una negativa, ma a volte una positiva ed una massa) ed un'uscita. In molti casi esistono degli ulteriori terminali, adoperati per il controllo dell'offset.

I due ingressi, noti come ‘ingresso non-invertente’ ed ‘ingresso invertente’, sono tali che ad essi corrispondano, come vedremo tra un attimo, guadagni uguali ed opposti. In altre parole, l'amplificatore operazionale ha ingressi differenziali. Le

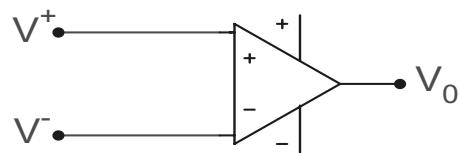


Figura 12.1: Schema di base di un amplificatore operazionale.

principali caratteristiche di un amplificatore operazionale ideale sono le seguenti:

- impedenza d'ingresso infinitamente grande;
- ingressi differenziali;
- guadagno nel modo differenziale infinito;
- larghezza di banda infinita;
- sfasamento nullo tra ingresso ed uscita;
- guadagno nel modo comune nullo;
- impedenza di uscita nulla.

Un amplificatore operazionale reale avrà caratteristiche che si discosteranno più o meno dalle caratteristiche ideali appena descritte. Di tali differenze ci occuperemo nel seguito.

Esaminiamo adesso le caratteristiche di un amplificatore tipico. Un circuito che si incontra frequentemente è quello mostrato in figura 12.1. Notiamo l'ingresso invertente indicato con un segno meno e quello non invertente indicato con un segno più.

Se tra i due terminali d'ingresso applichiamo una differenza di potenziale, la tensione al terminale di uscita sarà, a causa del guadagno infinito dell'operazionale, anch'essa infinita. Da un punto di vista pratico la tensione di uscita non potrà superare quella delle alimentazioni. Se, ad esempio, l'amplificatore è alimentato con tensione positiva di +15 Volt e tensione negativa di -15 Volt, la tensione di uscita sarà all'incirca uguale a +15 Volt se la tensione applicata al terminale non invertente è maggiore di quella applicata al terminale invertente, sarà -15 Volt nel caso contrario. Notiamo che sia il terminale invertente che quello non invertente sono riferiti a massa. Avremo quindi un'impedenza tra terminale invertente e massa, una tra terminale non invertente e massa ed una tra i due terminali invertente e non invertente. Ammetteremo che tutte e tre queste impedenze siano infinite.

12.2.1 Ingresso differenziale

Prima di passare ad esaminare alcuni circuiti tipici che fanno uso di A.O., ricordiamo alcune definizioni relative all'amplificatore differenziale, che ne costituisce lo stadio d'ingresso.

Indichiamo con v_+ e v_- le tensioni applicate rispettivamente all'ingresso non invertente ed a quello invertente, con v_o la tensione d'uscita, con A_+ e con A_- i guadagni dell'A.O. per segnali applicati rispettivamente all'ingresso non invertente ed a quello invertente. Per il principio di sovrapposizione avremo:

$$v_o = A_+v_+ + A_-v_- \quad (12.1)$$

e, ponendo:

$$v_d = v_+ - v_-$$

$$v_c = \frac{1}{2}(v_+ + v_-)$$

cioè

$$v_+ = v_c + \frac{v_d}{2} \quad (12.2)$$

$$v_- = v_c - \frac{v_d}{2} \quad (12.3)$$

questa diventa:

$$v_o = A_+ \left(v_c + \frac{v_d}{2} \right) + A_- \left(v_c - \frac{v_d}{2} \right) = (A_+ + A_-)v_c + \frac{1}{2}(A_+ - A_-)v_d \quad (12.4)$$

che, con le definizioni:

$$A_c = (A_+ + A_-) \quad (12.5)$$

$$A_d = \frac{1}{2}(A_+ - A_-) \quad (12.6)$$

può essere scritta come:

$$v_o = A_c v_c + A_d v_d \quad (12.7)$$

La grandezza A_d è nota come il *guadagno nel modo differenziale*, mentre A_c è il *guadagno nel modo comune*. Un buon A.O. dovrà avere un valore di A_c prossimo a zero ed un valore di A_d prossimo ad ∞ . Normalmente i produttori quotano il valore del cosiddetto *rappporto di reiezione per il modo comune* (Common Mode Rejection Ratio o CMRR), definito da:

$$\rho = |A_d/A_c|$$

che deve essere il più grande possibile.

Dalla (12.7) si ha poi:

$$v_o = A_d v_d \left(1 + \frac{1}{\rho} \frac{v_c}{v_d} \right) \quad (12.8)$$

Ad esempio, se $v_c = 1$ mV, $v_d = 1$ μ V e $\rho = 1000$, avremo:

$$v_o = A_d v_d \left(1 + \frac{1}{\rho} \frac{v_c}{v_d} \right) = 2 A_d v_d$$

anzichè semplicemente $A_d v_d$ come si vorrebbe da un buon A.O.. Se vogliamo che ciò accada, occorre che ρ sia abbastanza più grande di v_c/v_d da rendere trascurabile il secondo termine in parentesi nella (12.8). Nel nostro esempio, ρ dovrà essere maggiore di 10^5 se si vuole che v_o differisca da $A_d v_d$ per meno dell'1%.

12.3 Applicazioni lineari degli amplificatori operazionali

Gli A.O. hanno numerosissime applicazioni. Queste possono essere divise in due grandi categorie. Nella prima di queste l'A.O. viene adoperato in modo che esso esca dalla zona lineare e vada in saturazione. Se infatti si applica una piccola differenza di potenziale tra ingresso invertente ed ingresso non-invertente, l'uscita si porterà tipicamente a $\pm V_{cc}$ dove V_{cc} è la tensione di alimentazione. Nel realizzare tale funzione si fa spesso uso di una reazione positiva tra uscita ed ingresso dell'A.O..

Fanno parte di questa categoria molti circuiti logici, generatori di onde quadre, generatori di rampa, circuiti di trigger (Schmitt) etc..

Nel secondo tipo di applicazioni si fa invece uso di una reazione negativa, realizzando un funzionamento lineare dell'A.O.. Fanno parte di questa categoria i circuiti amplificatori (invertenti e non invertenti), i circuiti di somma e di sottrazione, gli inseguitori di tensione, i convertitori tensione-corrente e corrente-tensione e molti altri.

Inizieremo nella prossima sezione un'analisi di quest'ultima classe di applicazioni.

Esiste in realtà una terza classe di applicazioni, in cui il feedback positivo applicato è quasi esattamente uguale all'inverso dell'amplificazione dell'operazionale e quindi il *guadagno a catena aperta* $A\beta$ è circa uguale ad uno. In tale categoria rientrano i cosiddetti oscillatori sinusoidali che sono trattati in un capitolo a se.

12.3.1 Amplificatori invertenti e non-invertenti

Abbiamo specificato in precedenza tra le caratteristiche di un A.O. ideale:

- impedenza d'ingresso R_i infinita;
- guadagno in tensione A_v infinito;
- impedenza d'uscita R_o nulla.

Esamineremo ora, a titolo di esempio, alcuni amplificatori reazionati che utilizzano un A.O. e ne studieremo il funzionamento.

Cominceremo con l'esaminare la configurazione invertente mostrata in figura 12.2.

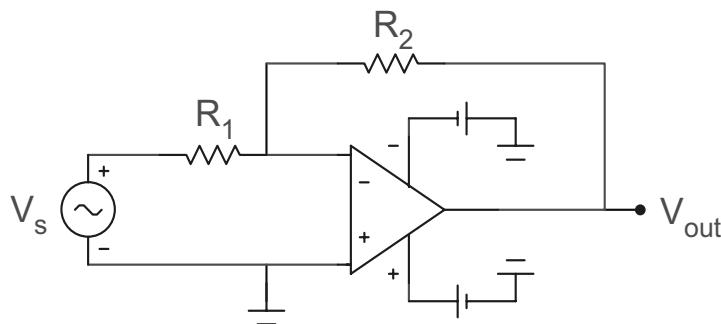


Figura 12.2: Amplificatore invertente realizzato con un amplificatore operazionale ed elementi passivi.

Ammetteremo che R_i , A_v ed R_o (vedi figura 12.3) abbiano valori finiti; faremo poi tendere R_i ed A_v ad infinito ed R_o a zero.

Facendo uso del teorema di Miller, lo schema di figura 12.3 può esser trasformato in quello di figura 12.4, dove $k = v_o/v_i$.

Dall'analisi della maglia d'uscita di tale circuito troviamo:

$$v_o = \frac{-A_v v_i}{Z' + R_o} Z'$$

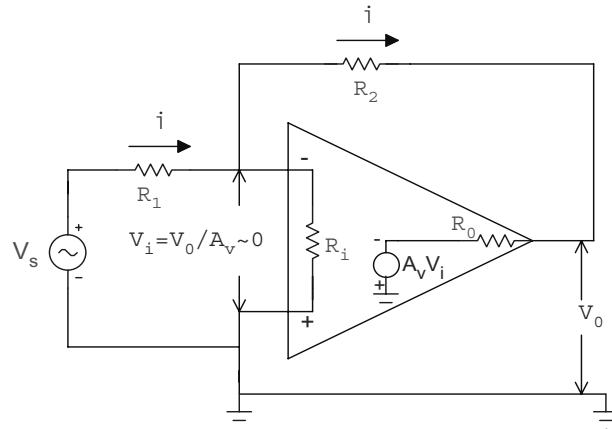


Figura 12.3: Amplificatore invertente: sullo schema sono evidenziati l'impedenza di ingresso (R_i), l'impedenza di uscita (R_o) ed il guadagno in tensione (A_v) dell'amplificatore operazionale.

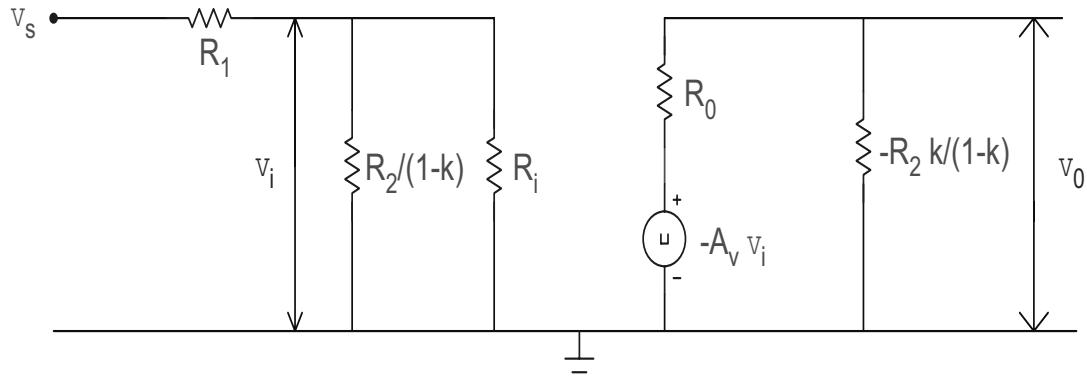


Figura 12.4: Circuito equivalente all'amplificatore di figura 12.3.

dove:

$$Z' = -\frac{R_2 k}{1 - k}$$

Si ottiene di qui una relazione tra v_o e v_i :

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_o - A_v R_2}{R_2 + R_o} \quad (12.9)$$

Dall'analisi della maglia d'ingresso si ottiene invece:

$$v_i = v_s \frac{R_{||}}{R_1 + R_{||}}$$

dove:

$$R_{||} = \frac{R_i R_2}{R_i (1 - k) + R_2}$$

per cui:

$$\frac{R_{\parallel}}{R_1 + R_{\parallel}} = \frac{R_i R_2}{R_i R_2 + R_1 [R_2 + R_i(1 - k)]}$$

Dall'equazione (12.9) si ottiene allora:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{v_o}{v_i} \frac{v_i}{v_s} = \frac{R_i(R_o - A_v R_2)}{R_1(R_i + R_2 + R_o) + R_i(R_2 + R_o) + A_v R_1 R_i}$$

Dividendo ora numeratore e denominatore per R_i , otteniamo poi:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{R_o - A_v R_2}{(R_1/R_i)(R_i + R_2 + R_o) + R_2 + R_o + A_v R_1}$$

che, per R_i che tende ad infinito, diventa:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{R_o - A_v R_2}{R_1 + R_2 + R_o + A_v R_1}$$

e, per A_v che tende ad infinito ed R_0 che tende a zero:

$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (12.10)$$

Vediamo da tale relazione che il guadagno dell'amplificatore reazionato invertente è, nel limite $R_i = \infty$, $R_0 = 0$ ed $|A_v| = \infty$, uguale al rapporto tra la resistenza di reazione R_2 e quella che collega il generatore di segnali all'ingresso invertente.

Notiamo che al medesimo risultato si potrebbe arrivare in modo più semplice, con le seguenti considerazioni:

1. poichè $R_i = \infty$, la corrente che può fluire nell'operazionale è trascurabile, ammetteremo che essa sia nulla;
2. in presenza della reazione negativa causata dalla resistenza R_2 , l'operazionale non satura: cioè il segnale in uscita ha un valore inferiore a quello dell'alimentazione;
3. essendo $A_v = \infty$ e v_o finito, la relazione: $|v_i| = |v_o/A_v|$ ci dice che la differenza di potenziale tra i terminali d'ingresso: v_i deve essere vicina a zero, ammetteremo che essa sia nulla.

In definitiva avremo (vedi figura 12.3):

$$v_- = v_i = \frac{v_o}{A_v} \approx 0$$

e quindi $v_- = 0$ (essendo v_+ collegato a massa). Si dice che il terminale invertente è una massa virtuale, poichè esso si trova ad un potenziale molto prossimo a quello di massa. È tuttavia da tenere ben presente che non esiste alcun collegamento fisico o corto circuito tra terminale invertente e non-invertente.

Vediamo ora come le condizioni esaminate portino facilmente al risultato espresso dall'equazione (12.10). Infatti, per quanto detto, nessuna corrente entra nell'operazionale; ne segue che la corrente che attraversa la resistenza R_1 è uguale a quella che attraversa R_2 . Inoltre si ha $v_- = 0$. Ne segue:

$$i = \frac{v_s}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2}$$

da cui:

$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (12.11)$$

Potrebbe apparire che l'ipotesi aggiuntiva ($R_o = 0$) che è stata necessaria per dimostrare la relazione (12.10), non giochi più alcun ruolo. In realtà ciò non è vero. Se infatti R_o fosse, diciamo, grande rispetto ad R_2 (o confrontabile ad essa), allora la tensione d'uscita v_o sarebbe uguale a quella (v'_o) presente all'uscita del generatore dipendente che schematizza l'uscita dell'A.O., diminuita della caduta attraverso R_o . Con ciò l'equazione ottenuta (12.11) non sarebbe più vera, ma il rapporto v_o/v_s dipenderebbe anche da R_o .

La figura 12.6 mostra i segnali in ingresso ed in uscita da un amplificatore invertente, in cui è stato scelto un rapporto R_2/R_1 pari a 2. Il segnale in ingresso è una sinusoida di ampiezza pari ad 1 V. Si vede come il segnale in uscita sia una sinusoida invertita, di ampiezza doppia.

Impedenza d'ingresso dell'amplificatore invertente

L'impedenza d'ingresso r_i dell'amplificatore appena esaminato può esser calcolata facilmente facendo uso dello schema di figura 12.4. Si vede da tale figura che l'impedenza d'ingresso è:

$$r_i = R_1 + \frac{R_i R_2}{R_i(1-k) + R_2}$$

dove k è dato dalla relazione (12.9). Si ottiene quindi:

$$r_i = R_1 + \frac{R_i(R_o + R_2)}{R_i(1 + A_v) + (R_o + R_2)}$$

Questa può essere riscritta come:

$$r_i = R_1 + \frac{R_i(R_o + R_2)/(1 + A_v)}{R_i + (R_o + R_2)/(1 + A_v)}$$

che, ponendo:

$$r_f = \frac{R_2 + R_o}{1 + A_v}$$

può essere scritta nella forma più concisa:

$$r_i = R_1 + R_i \parallel r_f$$

dove in genere r_f è molto minore di R_i per cui, nel parallelo, quest'ultima può essere trascurata. Essendo inoltre in genere r_f molto piccola, si trova che l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore invertente esaminato è con ottima approssimazione uguale ad R_1 .

Ad esempio, per $R_1 = 100k$, $R_2 = 10k$, $R_o = 100\Omega$ ed $A_v = 10^5$, troviamo: $r_f = 0.1\Omega$ e quindi $r_i = R_1 = 100k$.

Impedenza d'uscita dell'amplificatore invertente

Per calcolare l'impedenza d'uscita r_o dell'amplificatore immaginiamo di cortocircuittare i terminali d'ingresso, ponendo $v_s = 0$, di applicare tra i terminali d'uscita una tensione v_o e di calcolare la corrente i_o immessa dal generatore di tensione v_o .

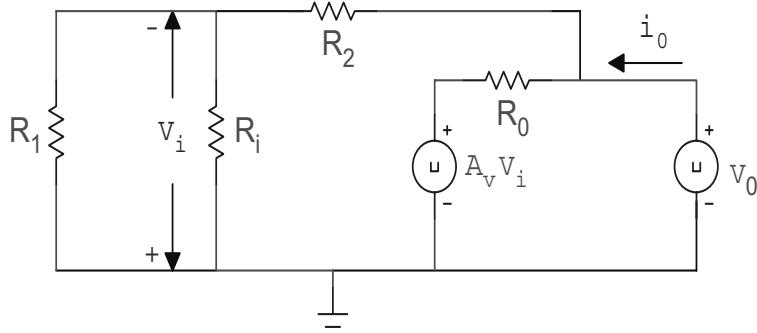


Figura 12.5: Schema del circuito utilizzato per il calcolo dell'impedenza di uscita dell'amplificatore invertente.

Definiremo poi impedenza d'uscita il rapporto v_o/i_o . Lo schema equivalente che adopereremo è quello di figura 12.5. Avremo:

$$i_o = \frac{v_o - A_v v_i}{R_o} + \frac{v_o}{R_1 + R_2}$$

poichè $R_i \gg R_1$. Inoltre è:

$$-v_i = v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Sostituendo quest'equazione nella precedente, si trova:

$$i_o = \frac{v_o + A_v v_o R_1 / (R_1 + R_2)}{R_o} + \frac{v_o}{R_1 + R_2}$$

cioè:

$$v_o \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{A_v R_1}{R_o (R_1 + R_2)} \right) = i_o$$

ed infine:

$$\frac{1}{r_o} = \frac{i_o}{v_o} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_o} + \frac{A_v R_1}{R_o (R_1 + R_2)}$$

per cui per $A_v \rightarrow \infty$ si ha:

$$\frac{1}{r_o} = \frac{1}{R_o} \left(1 + \frac{A_v R_1}{R_1 + R_2} \right) \approx \infty$$

ed r_o è praticamente nullo.

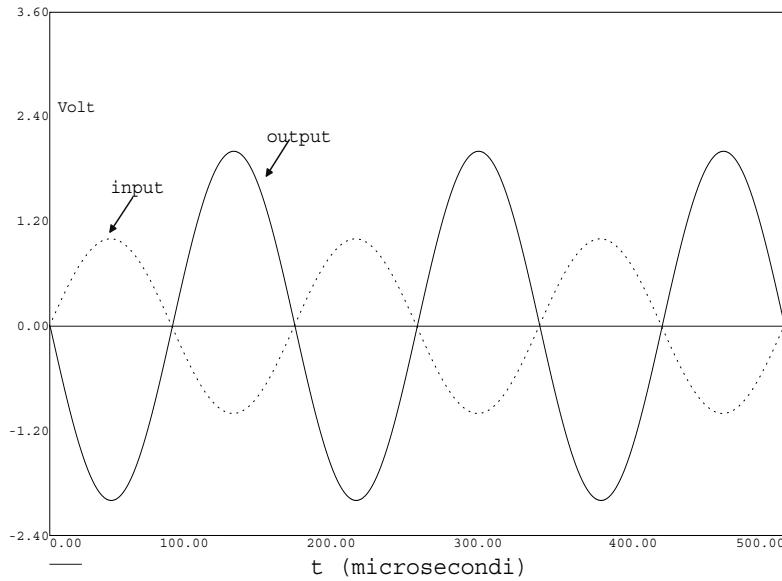


Figura 12.6: Grafico dell'andamento temporale della tensione in ingresso (linea tratteggiata) e della tensione in uscita (linea continua) per un amplificatore invertente con amplificazione in tensione pari a 2.

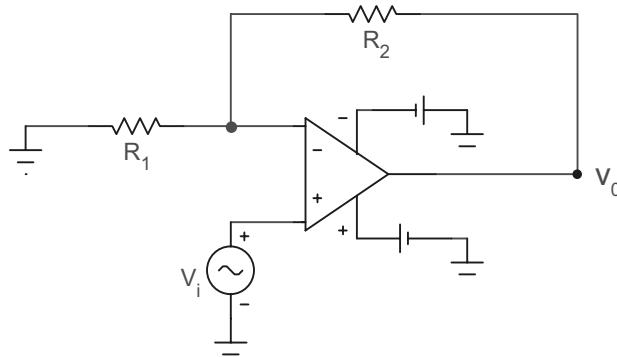


Figura 12.7: Amplificatore non-invertente realizzato con un amplificatore operazionale ed elementi passivi.

12.3.2 Amplificatore non-invertente

Un amplificatore che fornisce un segnale in uscita in fase con il segnale applicato in ingresso è quello mostrato in figura 12.7.

Per calcolare il guadagno in tensione di tale amplificatore ricordiamo che, a causa della reazione negativa avremo, come prima, $v_+ = v_-$, ed inoltre $v_i = v_+$ per cui:

$$v_- = v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

e:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{v_o}{v_-} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Il guadagno, come si vede, è indipendente dalle caratteristiche dell'operazionale, ma dipende solo dai valori delle resistenze R_1 e R_2 . Esso diviene uguale ad 1 se $R_2 = 0$ e $R_1 = \infty$. Si ottiene così la configurazione di figura 12.8 nota come inseguitore di tensione.

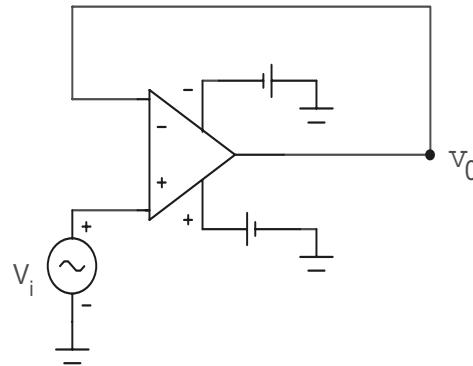


Figura 12.8: Inseguitore di tensione.

Impedenza d'ingresso dell'amplificatore non-invertente

L'impedenza d'ingresso dell'amplificatore nella configurazione esaminata, cioè l'impedenza vista dalla sorgente v_s guardando nel terminale non invertente, è teoricamente infinita. Vediamo di esprimere in termini del guadagno A_v , della resistenza d'ingresso dell'operazionale R_i e dei valori delle resistenze. Chiamando r_i la resistenza dell'amplificatore completo, avremo per la corrente d'ingresso nel terminale non invertente:

$$i_i = \frac{v_i}{R_i} = \frac{v_o}{A_v R_i} \frac{1}{R_i}$$

dove:

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_i$$

per cui:

$$i_i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{v_i}{A_v R_i} \frac{1}{R_i}$$

ed infine:

$$r_i = \frac{v_i}{i_i} = \frac{A_v R_i}{1 + R_2/R_1}$$

Come si vede, tale impedenza è estremamente grande. Per $A_v = 10^5$, $R_i = 1 M\Omega$ ed $R_2/R_1 = 1$ questa vale $50,000 M\Omega$.

Impedenza d'uscita dell'amplificatore non-invertente

Si può facilmente verificare che l'impedenza d'uscita in questa configurazione è identica a quella della configurazione invertente. In effetti lo schema equivalente

adoperato nella sezione 7 (vedi figura 12.5) è applicabile senza modifiche a questa situazione.

12.3.3 Amplificatore della differenza di due segnali

Un amplificatore operazionale può facilmente essere adoperato per amplificare la differenza tra due segnali di tensione. Un possibile schema è quello mostrato in figura 12.9.

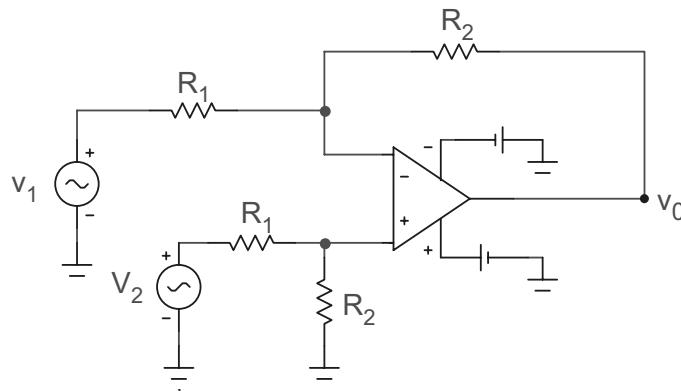


Figura 12.9: Amplificatore differenziale realizzato con un amplificatore operazionale.

Ancora una volta sfruttiamo il fatto che l'ingresso invertente e quello non-invertente sono in corto-circuito virtuale, cioè $v_- = v_+$. D'altronde, dal partitore costituito dalle resistenze poste sull'ingresso non-invertente, otteniamo:

$$v_- = v_+ = v_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Poichè nell'operazionale non entra corrente, le correnti nelle due resistenze superiori sono uguali, per cui:

$$\frac{v_1 - v_+}{R_1} = \frac{v_+ - v_o}{R_2}$$

da queste due equazioni segue poi subito:

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$

Immaginiamo ad esempio che il segnale all'ingresso 1 sia una sinusoida di ampiezza pari ad 1 V e frequenza 6 kHz, e quello all'ingresso 2 sia un segnale sfasato rispetto al primo di π . In tal caso il segnale in uscita sarà quello mostrato in figura 12.10, dove si è utilizzato lo schema di figura 12.9 con $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$.

12.3.4 Amplificatore della somma di due o più segnali

Un A.O. in configurazione invertente può essere adoperato per ottenere la somma (cambiata di segno) di più tensioni applicate agli ingressi, *in modo tale che le sorgenti*

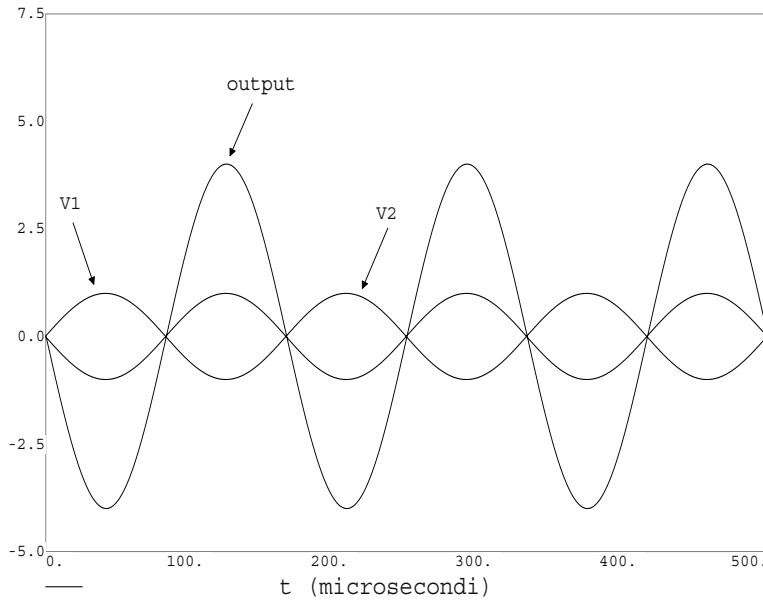


Figura 12.10: Grafico dell'andamento temporale delle tensioni in ingresso ed in uscita all'amplificatore operazionale mostrato in figura 12.9. Il grafico è ottenuto per $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$.

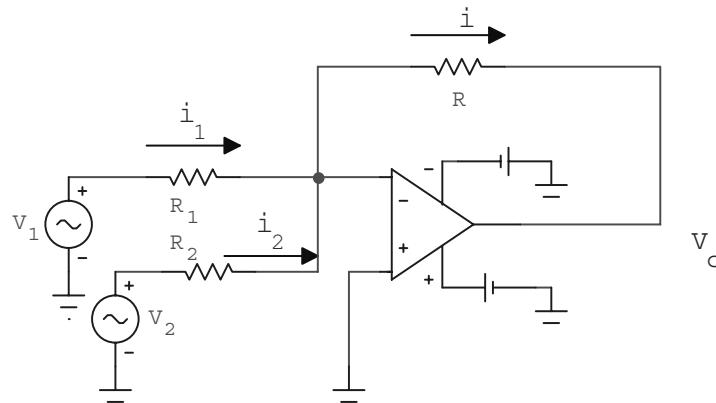


Figura 12.11: Schema del circuito sommatore di due segnali.

risultino peraltro disaccoppiate tra loro. Un circuito che realizza tale funzione è quello mostrato in figura 12.11. La relazione che lega la tensione in uscita alle tensioni v_1 , v_2 in ingresso è facilmente ottenibile in base alla considerazione che la corrente che passa nella resistenza R deve essere uguale alla somma delle correnti nelle resistenze R_1 ed R_2 , unitamente al fatto che la tensione al terminale invertente è nulla ($v_- = v_+ = 0$). Si ha cioè:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = -\frac{v_o}{R}$$

da cui si ottiene poi:

$$v_o = -R \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right)$$

Se poniamo $R = R_1 = R_2$ abbiamo, come detto, la somma cambiata di segno dei segnali applicati in ingresso. Altrimenti avremo una combinazione lineare di questi, con coefficienti dipendenti dai valori delle tre resistenze.

L'estensione al caso di N sorgenti è immediata.

Come accennato, nella configurazione esaminata le sorgenti sono fisicamente disaccoppiate l'una dall'altra, poiché le estremità destre delle resistenze R_1 , R_2 sono collegate a massa (cioè alla massa virtuale del terminale invertente). In altre parole, la sorgente v_1 non interagisce in alcun modo con la sorgente v_2 .

12.3.5 Integratore realizzato tramite un operazionale

Un integratore ideale fornisce una tensione in uscita proporzionale all'integrale della tensione applicata in ingresso:

$$v_{out} = K \int v_{in} dt \quad (12.12)$$

In termini della trasformata di Laplace, dovremo avere:

$$\tilde{v}_{out} = \frac{K}{s} \tilde{v}_{in} \quad (12.13)$$

Notiamo che il circuito passa-basso di figura 12.12 ha un funzione di trasferimento data da:

$$\frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (12.14)$$

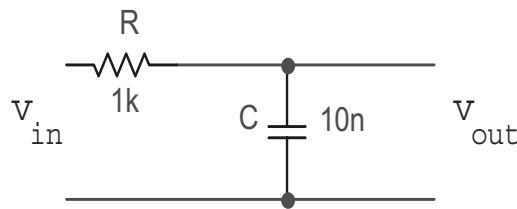


Figura 12.12: Circuito integratore realizzato con elementi passivi.

che diviene quella di un integratore ideale espresso dall'equazione (12.13) per $\tau \rightarrow \infty$. Notiamo che in tale limite la funzione di trasferimento tende a zero, a causa del termine moltiplicativo $1/\tau$.

La configurazione mostrata in figura 12.13 realizza con ottima approssimazione un integratore ideale. Ciò può esser visto semplicemente adottando il principio della massa virtuale.

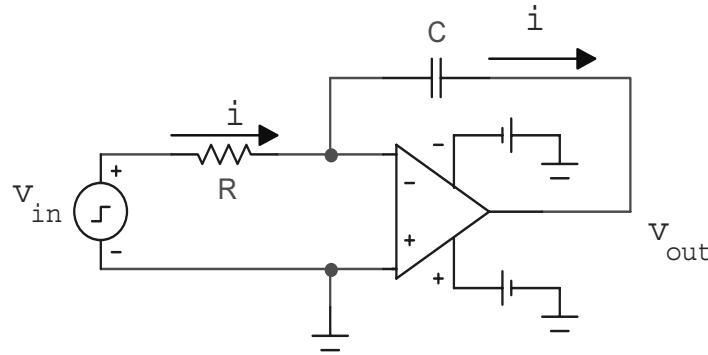


Figura 12.13: Circuito integratore realizzato con un amplificatore operazionale ed elementi passivi.

Infatti, per tale principio, la corrente che scorre nella resistenza R , uguale a quella che carica il condensatore C , è data da:

$$i = \frac{v_{in}}{R} = \frac{dQ}{dt} = -C \frac{dv_{out}}{dt}$$

da cui:

$$v_{in} = -RC \frac{dv_{out}}{dt}$$

e:

$$v_{out} = -\frac{1}{RC} \int v_{in} dt$$

Si può arrivare al medesimo risultato, senza far uso in modo esplicito del principio della massa virtuale, ma adoperando il teorema di Miller. Sostituendo infatti all'impedenza capacitiva Z_c presente tra ingresso invertente ed uscita, una impedenza pari a $Z_c/(1 + A_v)$, posta tra ingresso invertente e massa, ed una pari a $A_v Z_c/(1 + A_v)$, posta tra uscita e massa. Si ottiene in tal modo il circuito equivalente mostrato in figura 12.14, dove è $v_{out} = -A_v v_1$, con v_1 la differenza di potenziale tra ingresso invertente e massa. Dalla definizione di trasformata dell'impedenza capacitiva segue che le capacità C' e C'' indicate in figura valgono:

$$C' = C(1 + A_v) ; \quad C'' = \frac{C(1 + A_v)}{A_v}$$

La funzione di trasferimento che così si ottiene è:

$$G(s) = \frac{-A_v/\tau'}{s + 1/\tau'} \quad (12.15)$$

con:

$$\tau' = RC(1 + A_v)$$

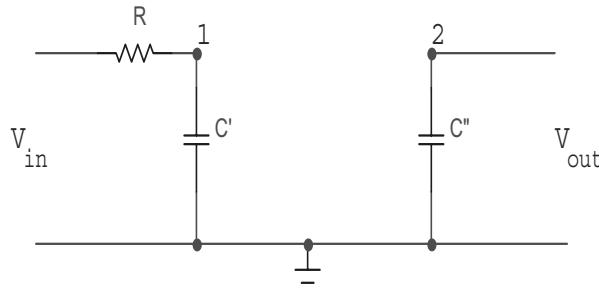


Figura 12.14: Circuito equivalente al circuito integratore di figura 12.13.

Poichè ora τ' contiene il grosso termine A_v , avremo che il termine $1/\tau'$ a denominatore della (12.15) sarà trascurabile e $G(s)$ diventa con ottima approssimazione la funzione di trasferimento di un integratore ideale:

$$G(s) = -\frac{A_v}{s\tau'} = -\frac{A_v}{RC(1+A_v)s} \approx -\frac{1}{RC}\frac{1}{s} \quad (12.16)$$

Il motivo per cui il circuito esaminato si comporta come un ottimo integratore può anche esser compreso intuitivamente, partendo dall'analisi del non-perfetto integratore costituito da un normale R-C passa-basso (vedi figura (12.12)). Ammettiamo che in tale circuito sia applicato in ingresso un segnale di tensione che sia, in un certo (breve) intervallo di tempo, costante. L'uscita sarà l'integrale dell'ingresso se essa è una rampa crescente linearmente nell'intervallo di tempo specificato. Ciò richiederebbe però che il condensatore fosse caricato con una corrente costante nel tempo. Infatti solo in tal caso si avrebbe:

$$V_{out}(t) \propto \frac{1}{C} \int_0^t i dt' \propto i t$$

Ora, la corrente che carica il condensatore è quella che attraversa la resistenza R ed essa è pari alla differenza di potenziale ai capi della resistenza divisa per la resistenza stessa. A sua volta, la differenza di potenziale ai capi della resistenza NON è costante, poichè essa è la differenza tra la tensione (costante) applicata in ingresso e la tensione presente sul condensatore, che sta via via aumentando. Se si vuole che la corrente che carica il condensatore sia costante occorre che la tensione all'altro estremo della resistenza R sia tenuta costante. A questo ruolo provvede l'operazionale, poichè l'ingresso invertente di questo (cioè quello cui è collegato l'estremo della resistenza) è tenuto ad un potenziale vicino a zero dalla reazione negativa causata dal collegamento capacitivo tra l'uscita e l'ingresso invertente. Notiamo la strana configurazione in cui si trova il condensatore, che è caricato da una corrente che viene da un punto che è praticamente a massa !

Il circuito esaminato non è realistico, poichè, una volta che la capacità C sia caricata, essa non ha modo di scaricarsi. Se quindi il segnale inviato in ingresso è un'onda rettangolare, il primo impulso sarà integrato e darà in uscita una rampa, ma subito dopo la tensione in uscita rimarrà al livello alto anche quando l'ingresso

sia tornato a zero. Il successivo impulso troverà il condensatore ancora carico e l'integrazione fornirà un'uscita che continuerà a salire, fino a che l'operazionale non sia andato in saturazione.

Per ovviare a questo problema si pone, in parallelo al condensatore, una resistenza, di valore adeguatamente elevato, attraverso la quale il condensatore possa scaricarsi tra un impulso ed il successivo. Il circuito così ottenuto è mostrato in figura 12.15(a). Il calcolo della risposta di questo circuito può essere effettuato facilmente tenendo conto del fatto che l'ingresso invertente è una massa virtuale e ricordando che le correnti nei rami Z_1 e Z_2 della figura 12.15(b) sono uguali. Si ottiene quindi per la trasformata del guadagno in figura 12.15(b):

$$G(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

dove:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R \\ Z_2(s) &= \frac{R_1}{1 + R_1 C s} = \frac{R_1 / \tau}{s + 1/\tau} \end{aligned}$$

con

$$\tau = R_1 C$$

Si ha quindi:

$$G(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{R_1}{R} \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

Se il segnale applicato in ingresso è un gradino di tensione:

$$\tilde{v}_{in}(s) = \frac{1}{s}$$

avremo:

$$\tilde{v}_{out}(s) = -\frac{1}{s} \frac{R_1}{R \tau} \frac{1}{s + 1/\tau} = -K \frac{1}{s(s + 1/\tau)}$$

dove si è posto:

$$K = \frac{R_1}{\tau R} = \frac{\rho}{\tau}$$

con $\rho = R_1/R$. La frazione che moltiplica K può essere espressa come:

$$\frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + 1/\tau}$$

per cui:

$$\tilde{v}_{out}(s) = -\rho \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right) = -\frac{R_1}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right)$$

la cui antitrasformata è:

$$v_{out}(t) = -\frac{R_1}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

con: $\tau = R_1 C$. Sviluppiamo l'esponenziale in parentesi in serie di Taylor, ottenendo:

$$v_{out}(t) = -\frac{R_1}{R} \left(1 - 1 + \frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} \dots \right) = -\frac{R_1}{R} \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} + \dots \right) \quad (12.17)$$

Se $t \ll \tau$ il termine quadratico e quelli di ordine superiore in parentesi diventano trascurabili rispetto a quello lineare, ed otteniamo un integratore ideale:

$$v_{out}(t) = -\frac{R_1}{\tau R} t$$

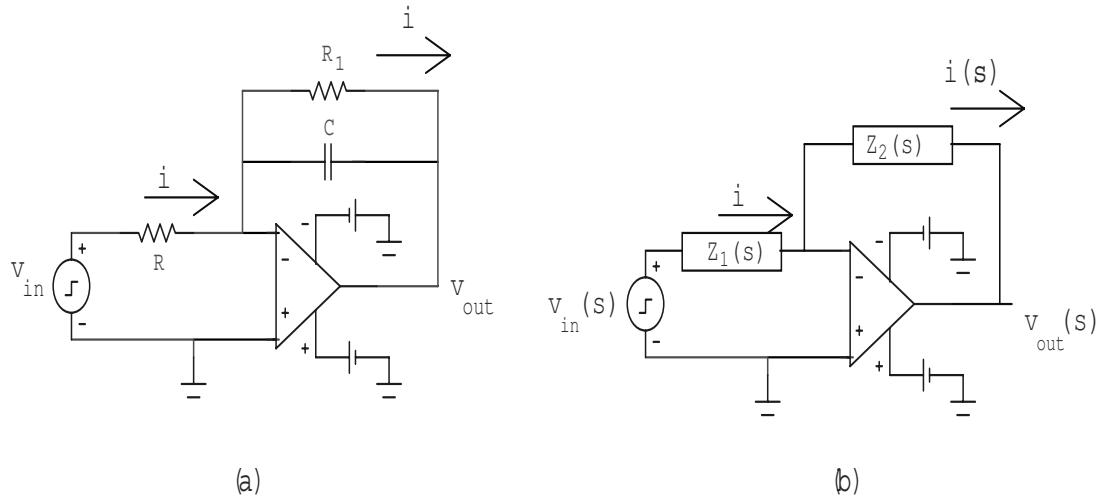


Figura 12.15: (a) Circuito integratore realizzato inserendo una resistenza di feedback per evitare la saturazione; (b) lo stesso circuito integratore in cui sono indicati i simboli per le impedenze Z_1 e Z_2 utilizzati per i calcoli nel testo.

Notiamo che il circuito di figura 12.13 si comportava da integratore per segnali di qualsivoglia frequenza, come segue dalla 12.16. Possiamo vedere che l'introduzione della resistenza R_1 in parallelo al condensatore C , introduce un taglio inferiore sulla frequenza. In altre parole, il circuito diviene un passa-basso con una frequenza di taglio $\nu_0 = 1/2\pi R_1 C$. Esso si comporterà da integratore solo per frequenze $\nu \gg \nu_0$.

Possiamo vedere ciò in due modi diversi. Un primo modo fà uso dell'espressione 12.17. Infatti, dire che possiamo trascurare il termine $t^2/2\tau^2$, tradotto nel dominio delle frequenze, con la corrispondenza:

$$t \rightarrow \frac{1}{\nu}$$

$$\tau \rightarrow \frac{1}{\nu_0}$$

equivale ad ammettere che sia:

$$\frac{1}{\nu^2} \ll \frac{2}{\nu_0^2}$$

ovvero:

$$\nu \gg \frac{\nu_0}{\sqrt{2}}$$

con:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

Notiamo che il caso in cui R_1 è assente (figura 12.13) corrisponde a porre $R_1 = \infty$ e quindi $\nu_0 = 0$. Il circuito si comporta allora da integratore a tutte le frequenze.

Un modo alternativo di arrivare al medesimo risultato è quello di analizzare il circuito di figura 12.15 facendo uso del metodo simbolico. Il guadagno, per una frequenza angolare ω è ora:

$$G(\omega) = -\frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega)}$$

con:

$$\begin{aligned} Z_1(\omega) &= R \\ Z_2(\omega) &= \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C} = \frac{R_1(1 - j\omega R_1 C)}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$G(\omega) = -\frac{R_1}{R} \frac{1 - j\omega R_1 C}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} \quad (12.18)$$

Il circuito si comporta da integratore se $G(\omega)$ è puramente immaginario, con che avremo che un segnale di tipo $\cos(\omega t)$ applicato in ingresso darà luogo ad un segnale di tipo $\sin(\omega t)$ in uscita. Nel nostro caso ciò richiede che sia:

$$\omega R_1 C \gg 1$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \omega &\gg \frac{1}{R_1 C} \\ \nu &\gg \frac{1}{2\pi R_1 C} = \nu_0 \end{aligned}$$

Notiamo che ora la 12.18 diviene:

$$G(\omega) = \frac{R_1}{R} \frac{j}{\omega R_1 C} = j \frac{R_1}{R} \frac{1}{\omega \tau}$$

Abbiamo così un integratore caratterizzato da un fattore moltiplicativo:

$$K = \frac{R_1}{R} \frac{1}{\omega \tau}$$

che dipende dal rapporto delle resistenze R_1 ed R e decresce inoltre con la frequenza, ad un rate di 6 dB/ottava.

12.3.6 Derivatore realizzato tramite un operazionale

Il circuito passa-alto mostrato in figura 12.16 si comporta approssimativamente da derivatore.

Possiamo verificarlo facilmente. La corrente che carica il condensatore C è:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

dove v è la differenza di potenziale ai capi del condensatore, data da: $v = v_i - v_o$. Si ha quindi:

$$i = C \frac{d}{dt}(v_i - v_o) = \frac{v_o}{R} \quad (12.19)$$

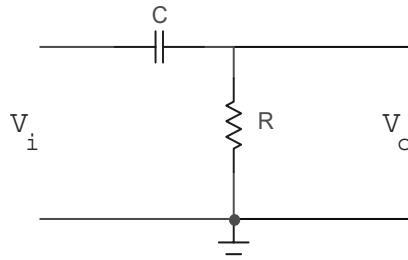


Figura 12.16: Circuito derivatore realizzato con elementi passivi.

come è immediato verificare.

Da questa si ottiene poi:

$$v_o = RC \frac{dv_i}{dt} - RC \frac{dv_o}{dt}$$

se ora il secondo dei due termini a secondo membro fosse trascurabile rispetto al primo, avremmo un derivatore ideale:

$$v_o = RC \frac{dv_i}{dt} \quad (12.20)$$

Tuttavia, in un normale circuito passa-alto, il termine dv_o/dt non è necessariamente trascurabile, e quindi esso non sarà un derivatore ideale.

Possiamo vedere ciò facendo uso delle trasformate di Laplace. Un derivatore ideale deve dare un segnale in uscita proporzionale alla derivata di quello in ingresso:

$$v_o = K \frac{dv_i}{dt}$$

Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i membri:

$$\tilde{v}_o = K s \tilde{v}_i \quad (12.21)$$

Per il circuito passa-alto di figura 12.16, otteniamo:

$$\tilde{v}_o = \tilde{v}_i \frac{R}{R + 1/sC} = \tilde{v}_i \frac{s}{s + 1/\tau}$$

con $\tau = RC$. Perchè questa acquisti la forma della (12.21) occorre che sia $1/\tau$ sia molto maggiore di s. Ciò richiede che sia τ molto piccolo. Un modo per realizzare tale scopo è quello di usare un operazionale, come mostrato nella figura 12.17.

La risposta di questo circuito, che è caratterizzato, analogamente all'integratore, da una reazione negativa dovuta alla presenza di una resistenza tra uscita ed ingresso invertente, è calcolabile in modo facile, ricordando la condizione $v_- = v_+ = 0$ ed il fatto che la corrente che attraversa la capacità C deve uguagliare quella che attraversa la resistenza R:

$$i = C \frac{dv_i}{dt} = -\frac{v_o}{R}$$

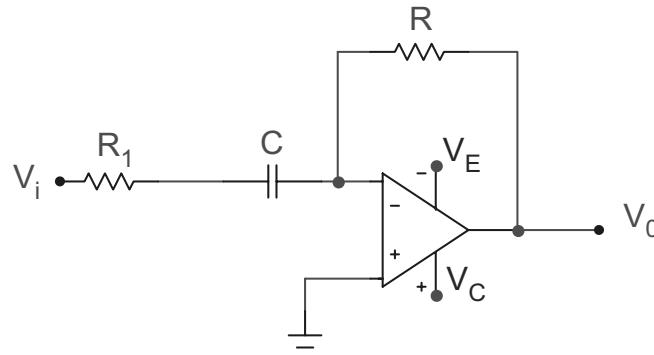


Figura 12.17: Derivatore realizzato con un amplificatore operazionale ed elementi passivi.

da cui si ottiene:

$$v_o = -RC \frac{dv_i}{dt}$$

Cioè abbiamo un derivatore ideale (o quasi).

Per comprendere il motivo per cui adesso il circuito si comporta da derivatore, possiamo far uso del teorema di Miller, ottenendo il circuito equivalente mostrato in figura 12.18, dove è $R' = R/(1 + A_v)$ ed $R'' = RA_v/(1 + A_v)$.

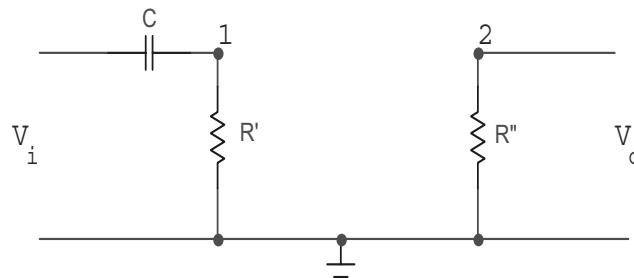


Figura 12.18: Circuito equivalente al circuito integratore di figura 12.17.

Dal circuito equivalente vediamo che ora la maglia d'ingresso, del tutto simile a quella di figura 12.17, è caratterizzata da una costante di tempo $R'C$, con $R' = R/(1 + A_v)$, cioè una costante di tempo molto piccola, che è giusto quella che occorre per ottenere un derivatore ideale.

Possiamo comprendere intuitivamente ciò che ora accade, riandando all'equazione (12.19). Dall'analisi del nuovo circuito vediamo che il termine nell'espressione della corrente, che prima era:

$$C \frac{d}{dt} (v_i - v_o)$$

ora è semplicemente:

$$C \frac{dv_i}{dt}$$

poichè l'operazionale mantiene fissa a zero la tensione sull'armatura destra del condensatore. Di conseguenza questo viene ora caricato da una differenza di potenziale che è giusto v_i .

Il circuito di figura 12.17 si comporta da derivatore a tutte le frequenze. Se il segnale applicato è del tipo:

$$v_i = v \sin \omega t$$

l'uscita sarà:

$$v_0 = -RCv\omega \cos \omega t$$

L'ampiezza del segnale in uscita cresce quindi linearmente all'aumentare della frequenza angolare ω . Potrà quindi accadere che ad alte frequenze l'operazionale "satuirà". Ciò è in ultima analisi legato al fatto che il guadagno del generico amplificatore invertente, come quello di figura 12.15(b), è dato da:

$$G(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

dove, per un segnale sinusoidale applicato in ingresso dovremo porre: $s = j\omega$.

Nel caso specifico del circuito di figura 12.17 avremo:

$$Z_1(\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_2(\omega) = R$$

e quindi:

$$|G(\omega)| = |\omega RC|$$

che diverge per grandi valori di ω .

Per ovviare a questo problema si può porre una resistenza in serie al condensatore, come mostrato in figura 12.19.

Il guadagno diviene ora:

$$G(\omega) = -\frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega)} = \frac{-R}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{j\omega RC}{1 + j\omega R_1 C}$$

da cui:

$$|G(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}}$$

che, per $\omega \rightarrow \infty$ tende a:

$$|G(\omega)| \rightarrow \frac{R}{R_1}$$

cioè ad un valore finito.

Al medesimo risultato si potrebbe arrivare, lavorando nel dominio temporale anzichè in quello delle frequenze, trasformando il circuito di figura con l'uso del teorema di Miller ed immaginando di applicare in ingresso un segnale linearmente crescente nel tempo: $v_i = \alpha t$, la cui trasformata di Laplace è:

$$\tilde{v}_i = \frac{\alpha}{s^2}$$

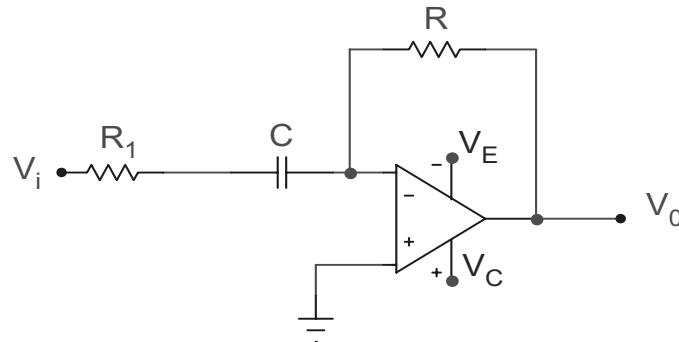


Figura 12.19: Integratore con amplificatore operazionale dove si è utilizzato la resistenza R_1 per limitare il guadagno ad alta tensione.

12.3.7 Amplificatore di carica

I segnali generati da un gran numero di dispositivi elettronici (cellule fotoelettriche, rivelatori di particelle nucleari/subnucleari a semiconduttore, fotomoltiplicatori, diodi etc.) consistono in impulsi di corrente di breve durata. Se indichiamo con i la corrente media e con dt la sua durata, l'impulso di corrente accumula una piccola carica $dQ = i dt$ sulla capacità d'ingresso del circuito adoperato per amplificarlo (ed eventualmente trasformarlo in uno di tensione). La capacità in questione può consistere della capacità d'ingresso di uno stadio a transistor e/o di eventuali altre capacità inserite nel circuito amplificatore nonché delle capacità associate ai cavetti di collegamento.

È opportuno amplificare il segnale di carica dQ in modo tale che il segnale di tensione (o corrente) in uscita non risulti dipendente da tale capacità, che potrebbe variare in diverse applicazioni del dispositivo.

Un sistema in grado di fornire un segnale di tensione in uscita, indipendente dalla capacità effettiva presente in ingresso, è quello basato sullo schema mostrato in figura 12.20(a).

C_{in} è la capacità effettiva in ingresso, su cui viene accumulata la carica $\int dQ = \int i dt = Q$ in un piccolo intervallo di tempo Δt . Per ottenere la relazione tra la carica Q in ingresso e la tensione v_o in uscita, facciamo uso del teorema di Miller, ottenendo lo schema di figura 12.20(b).

La capacità d'ingresso in tale schema è:

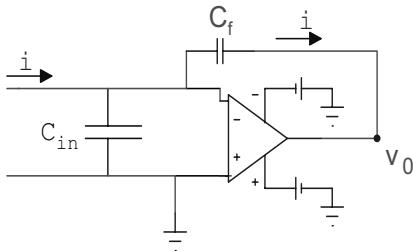
$$C' = C_{in} + C_f(1 + A) \approx C_f(1 + A)$$

dove A è il guadagno dell'operazionale. Si ha quindi:

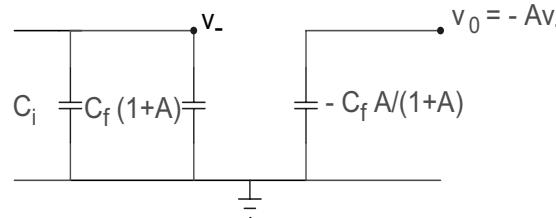
$$v_- = \frac{Q}{C_f(1 + A)}$$

per cui:

$$v_o = -A v_- = -\frac{AQ}{C_f(1 + A)} \approx -\frac{Q}{C_f}$$



(a)



(b)

Figura 12.20: (a) Amplificatore di carica e (b) circuito equivalente all'amplificatore di carica mostrato in (a).

In un normale operazionale senza capacità di feedback avremmo avuto:

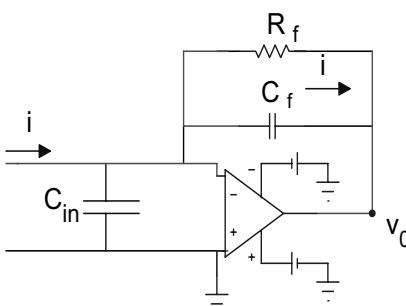
$$v_{in} = \frac{Q}{C_{in}}$$

e quindi:

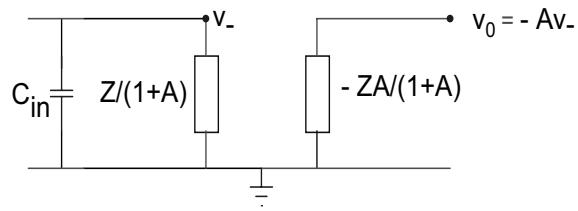
$$v_{out} = -A \frac{Q}{C_{in}}$$

Vediamo che il guadagno sarebbe quindi stato maggiore, di un fattore $\approx A$. Paghiamo quindi il prezzo di una notevole diminuzione del guadagno, ma otteniamo il vantaggio di una indipendenza della risposta dalla capacità C_{in} .

Perchè il condensatore possa scaricarsi dopo l'arrivo di un impulso di corrente, in attesa del successivo, è opportuno (come nel caso dell'integratore) porre in parallelo a C_f una resistenza R_f . Il circuito diventa allora quello di figura 12.21(a).



(a)



(b)

Figura 12.21: Amplificatore di carica con resistenza di feedback R_f (a) e circuito equivalente (b).

Utilizzando nuovamente il teorema di Miller, otteniamo il circuito equivalente mostrato in figura 12.21(b) dove:

$$Z = \frac{R_f}{1 + s\tau_f}$$

e:

$$\tau_f = R_f C_f$$

Trascurando C_{in} ed ammettendo che il segnale in ingresso sia schematizzabile con un gradino di corrente:

$$\tilde{i} = \frac{i_0}{s}$$

avremo:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_o &= -A\tilde{v}^- = -A \frac{Z}{1+A} \frac{i_0}{s} = -\frac{Ai_o R_f}{(1+A)s(1+s\tau_f)} \cong \\ &\cong -\frac{i_0 R_f}{s(1+s\tau_f)} = -\frac{i_0 R_f}{\tau} \frac{1}{s(s+1/\tau_f)} \end{aligned}$$

che è uguale a:

$$\tilde{v}_o = -i_0 R_f \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau_f} \right)$$

Da questa si ottiene poi:

$$v_0 = -i_0 R_f (1 - e^{-t/\tau_f})$$

con $\tau_f = R_f C_f$

12.3.8 Tensione di riferimento

Si supponga di aver bisogno di un generatore che eroghi corrente, ad una tensione costante, rigorosamente determinata. Se si adopera una batteria di precisione, che fornisce una tensione fissa, una volta che questa sia collegata ad un carico, potrà non avere più la medesima tensione. Il circuito di figura 12.22, che adopera un operazionale, risolve il problema.

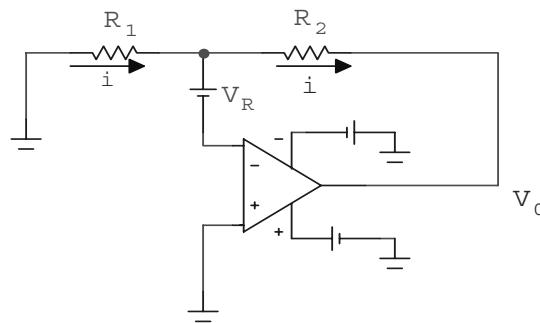


Figura 12.22: Generatore di tensione di riferimento.

Se V_R è la tensione di riferimento fornita dalla batteria, il principio della massa virtuale ed il fatto che l'operazionale non assorbe corrente, ci danno:

$$\frac{V_R - v_o}{R_2} = -\frac{v_o}{R_1 + R_2}$$

da cui segue:

$$v_o = V_R \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Notiamo che in questo circuito la batteria non eroga alcuna corrente, che è invece fornita dall'operazionale.

Un circuito equivalente è quello di figura 12.23, per il quale valgono le medesime relazioni.

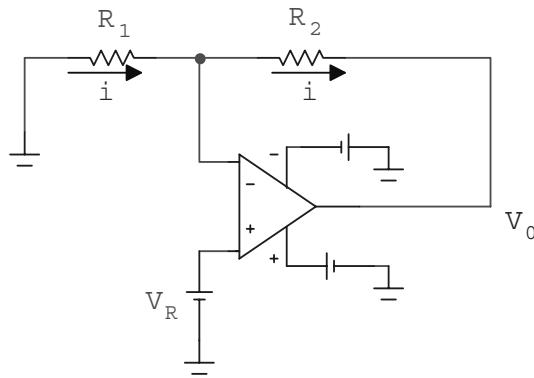


Figura 12.23: Configurazione alternativa per una generatore di tensione utilizzabile anche come convertitore tensione-corrente.

12.3.9 Convertitori corrente-tensione e tensione-corrente

Un circuito che fornisce un segnale in tensione a partire da uno in corrente è quello di figura 12.24.

Il funzionamento di questo circuito si può facilmente comprendere facendo uso del principio della massa virtuale. Infatti, essendo il terminale invertente effettivamente a massa, nessuna corrente fluisce nella resistenza R . Tutta la corrente erogata dal generatore fluisce in R_1 . Si ha quindi:

$$v_o = -R_1 I$$

Esaminiamo ora alcuni convertitori tensione-corrente. Il primo esempio è quello già esaminato nella sezione precedente e mostrato nella figura 12.23.

Vediamo che la corrente I in R_2 è uguale a quella in R_1 che vale:

$$I = -\frac{v_{in}}{R_1}$$

Questa corrente non dipende dal carico R_2 , ma solo da v_{in} e da R_1 .

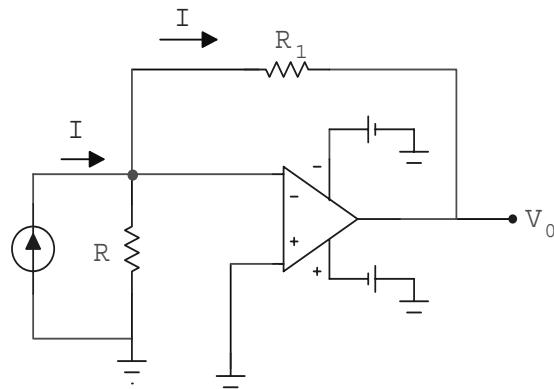


Figura 12.24: Convertitore corrente-tensione

Il circuito appena esaminato ha l'inconveniente che il carico R_2 non ha alcuna delle estremità direttamente collegata a massa, il che è insoddisfacente in molte applicazioni. Un convertitore tensione-corrente in cui uno dei terminali del carico è a massa è quello di figura 12.25.

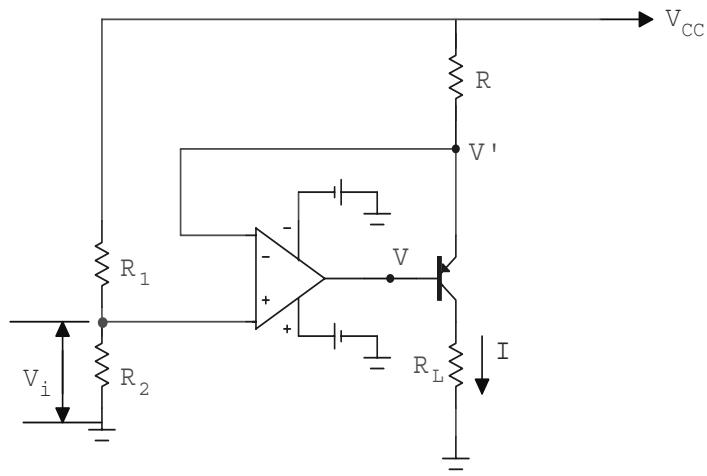


Figura 12.25: Convertitore tensione-corrente con carico a massa.

Notiamo che la tensione al terminale non invertente, determinata da V_{cc} e dal partitore $R_1 - R_2$, vale:

$$V_+ = V_{cc} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

e questa è, per il principio del corto-circuito virtuale all'ingresso dell'operazionale, uguale a V_- e quindi alla tensione dell'emettitore del transistor (di tipo pnp). Il motivo per cui possiamo anche in questo caso utilizzare il principio del corto-circuito

virtuale, deriva dal fatto che l'uscita dell'operazionale è separata dall'ingresso invertente solo dal V_{BE} del transistor. Abbiamo quindi anche in questo caso una reazione negativa. Che poi il transistor sia in conduzione può esser facilmente compreso. Se infatti immaginiamo di partire da una situazione in cui esso sia interdetto, avremo che la tensione V' (uguale a V_-) sarà uguale a V_{cc} mentre la tensione del terminale non invertente è sicuramente minore di V_{cc} . La tensione V all'uscita dell'A.O. tenderà quindi ad andare a valori molto bassi, il che polarizzerà direttamente la giunzione (B-E) del transistor. Una volta che ciò sia avvenuto, questo comincerà a condurre ed innescherà la reazione negativa tra l'uscita dell'operazionale, a tensione $V = V' - V_{BE}$ e l'ingresso invertente. In definitiva vediamo che in condizioni di funzionamento normale è:

$$V' = V_- = V_+ = V_{cc} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

e quindi la corrente in R_L , uguale alla corrente nel transistor, cioè alla corrente nella resistenza R , sarà:

$$I = \frac{V_{cc} - V'}{R}$$

Questa corrente non dipende dal carico R_L .

Un'alternativa, che fa uso di un transistor di tipo npn, è quella di figura 12.26.

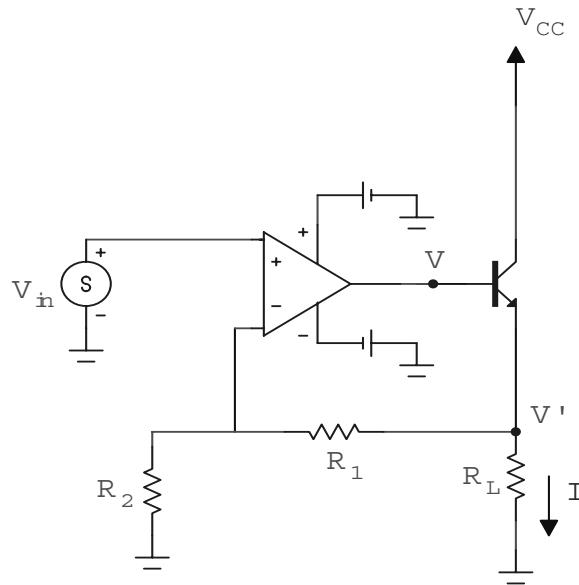


Figura 12.26: Ulteriore esempio di convertitore tensione-corrente con carico a massa.

Anche ora vediamo che se $v_{in} > V_-$, la tensione V all'uscita dell'operazionale tenderà a salire, ma ciò manderà in conduzione il transistor, con $V_{BE} \approx 0.6V$, quindi salirà anche la tensione V' . Avremo ancora una volta una reazione negativa, con:

$$v_{in} = V_- = V' \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

e quindi la corrente I nel carico R_L :

$$I = V'/R_L = v_{in} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_L}$$

Un esempio di convertitore tensione-corrente che non fa uso di transistor è infine quello di figura 12.27.

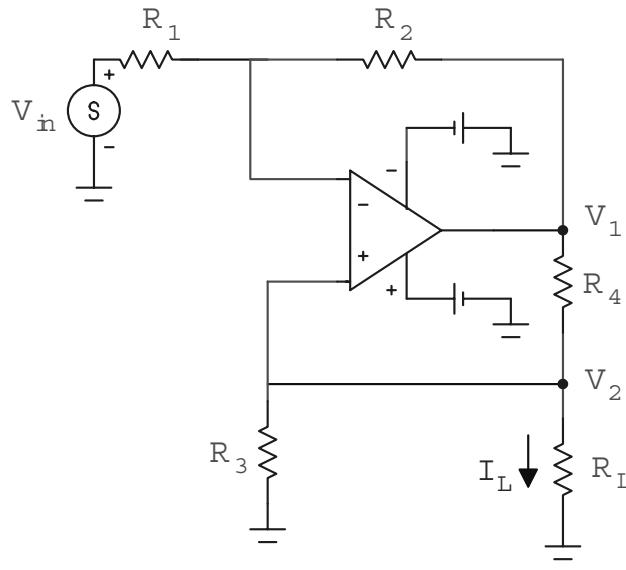


Figura 12.27: Convertitore tensione-corrente senza l'uso di transistor

La reazione negativa fa sì che sia $V_- = V_+$. Inoltre le correnti in R_1 ed R_2 sono uguali, per cui si ha:

$$\frac{v_{in} - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_1}{R_2}$$

da cui si ottiene:

$$V_1 = V_- \frac{R_1 + R_2}{R_1} - v_{in} \frac{R_2}{R_1} \quad (12.22)$$

D'altronde, la corrente nel carico è:

$$I_L = \frac{V_+}{R_L} = \frac{V_-}{R_L}$$

e la corrente in R_4

$$I_4 = \frac{V_1 - V_-}{R_4} = \frac{V_-}{R_{\parallel}}$$

dove R_{\parallel} è il parallelo di R_3 ed R_L , per cui:

$$I_4 = \frac{V_-(R_3 + R_L)}{R_3 R_L} = \left(\frac{V_-}{R_L} \right) \frac{R_3 + R_L}{R_3} = \frac{I_L(R_3 + R_L)}{R_3}$$

Dalle ultime due equazioni si ottiene una relazione tra I_L e V_1 :

$$V_1 \frac{R_3}{R_4} = V_- \frac{R_3}{R_4} + I_L(R_3 + R_L)$$

Facendo ora uso della (12.22) otteniamo:

$$V_- \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_3}{R_4} - v_{in} \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} = V_- \frac{R_3}{R_4} + I_L(R_3 + R_L)$$

Scegliamo ora i valori delle resistenze in modo che sia:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \quad (12.23)$$

l'ultima relazione diviene quindi:

$$V_- - v_{in} = I_L(R_3 + R_L)$$

dove $V_- = R_L I_L$. Si ottiene infine:

$$I_L = -\frac{v_{in}}{R_3}$$

Quindi la corrente nel carico dipende solo da v_{in} e dalla resistenza R_3 . L'interesse di questo circuito, noto nella letteratura come “Howland current source” è solo teorico, poichè esso richiederebbe un perfetto bilanciamento delle resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 , espresso dall'equazione (12.23). Nella pratica si fa uso dei circuiti con il transistor all'uscita dell'operazionale, che abbiamo già discusso.

12.4 Applicazioni non-lineari degli amplificatori operazionali

Se in un amplificatore operazionale uno degli ingressi (ad esempio quello invertente) è collegato a massa ed un segnale è applicato all'altro, l'uscita si porterà a valori prossimi a $+V_{cc}$ se il segnale applicato è positivo, a $-V_{cc}$ se esso è negativo.

Un amplificatore operazionale può cioè funzionare da *comparatore*, effettuando un confronto tra il segnale applicato all'ingresso invertente e quello applicato a quello non invertente (la massa nel nostro esempio). Si dice anche che un A.O. così adoperato funziona come un convertitore analogico-digitale ad 1 bit. Il bit, cioè l'uscita, è 1 se l'uscita è $+V_{cc}$ e 0 se l'uscita è $-V_{cc}$. In un tipico A.O., la transizione tra i due livelli dell'uscita non è netta, ma avviene con continuità mentre l'ingresso differenziale passa per lo zero, come mostrato in figura 12.28. Valori tipici del range di v_i in cui avviene la transizione sono alcuni mV. Esistono degli A.O. progettati appositamente per essere adoperati come comparatori. Questi sono in genere molto veloci ed il range di valori della differenza di potenziale v_i in cui avviene la transizione è molto piccolo (μ V invece di mV).

Ci occuperemo in questa sezione e nelle seguenti di quelle applicazioni in cui l'A.O. funziona appunto come comparatore, con l'eventuale presenza di una reazione positiva tra uscita ed ingresso. Dispositivi di questo tipo sono utilizzati come comparatori con isteresi (trigger di Schmitt) o come multivibratori (per generare onde quadre, triangolari, etc.).

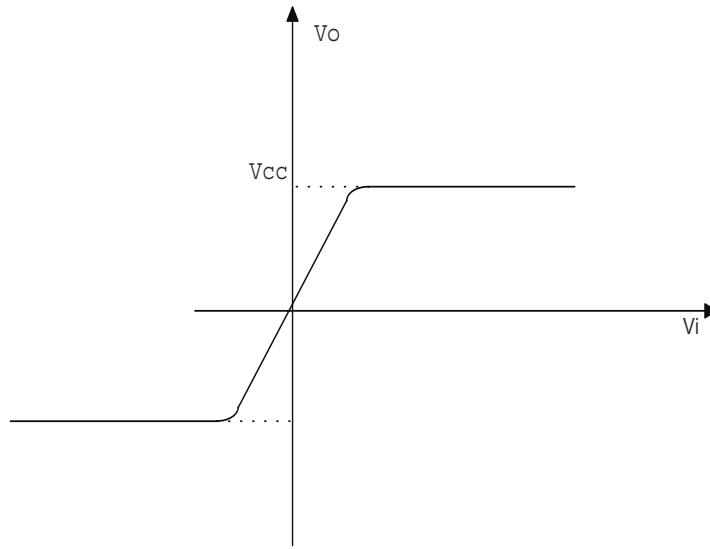


Figura 12.28: Grafico della tensione di uscita rivelata in amplificatore operazionale in funzione della tensione differenziale applicata tra i due ingressi (funzione di trasferimento dell'amplificatore operazionale).

12.4.1 Comparatore con isteresi

Il circuito di figura 12.29, costituisce un comparatore con isteresi o trigger di Schmitt.

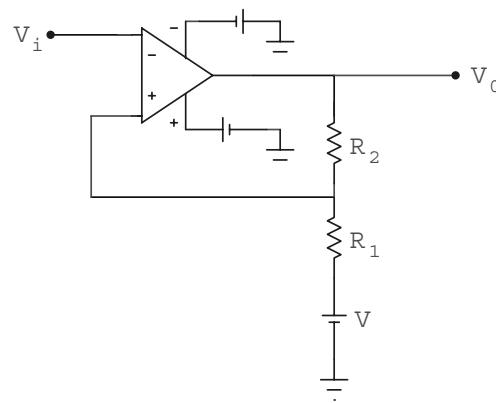


Figura 12.29: Comparatore con isteresi (trigger di Schmitt).

Indichiamo con V_{OH} il livello alto dell'uscita (quello che si ha per $V_+ > V_-$) e con V_{OL} il livello basso (questi valori saranno vicino a $+V_{cc}$ e $-V_{cc}$ rispettivamente). Ammettendo che l'uscita sia alta avremo, per il principio di sovrapposizione:

$$V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{OH} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \equiv V_{RH}$$

Questo sarà lo stato del circuito se $v_i < V_{RH}$. Se ora v_i comincia a salire, l'uscita del circuito si porterà al suo livello inferiore V_{OL} quando v_i supererà V_{RH} . Se v_i continua a salire, v_o manterrà il valore raggiunto V_{OL} . In questa nuova situazione V_+ varrà:

$$V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{OL} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \equiv V_{RL}$$

Se ora v_i ricomincia a scendere, l'uscita del circuito si porterà al suo livello superiore solo quando sia: $v_i < V_{RL}$. Vediamo quindi che la transizione $V_{OH} \rightarrow V_{OL}$ avviene ad un valore della tensione di riferimento più elevata che non quella corrispondente alla transizione opposta. Ciò è mostrato in figura 12.30. Vediamo che, partendo da una situazione in cui v_i è minore di V_{RL} e quindi l'uscita è alta ($v_o = V_{OH}$), aumentando v_i , l'uscita rimane alta, fino a che l'ingresso non abbia superato V_{RH} . A questo punto l'uscita è bassa ($v_o = V_{OL}$) e rimane bassa all'aumentare di v_i . Se torniamo indietro, facendo diminuire v_i , l'uscita rimane bassa fino a che v_i non abbia raggiunto il valore V_{RL} . Il punto rappresentativo dello stato del sistema nel piano $v_i - v_o$ descrive il perimetro del rettangolo mostrato in figura, nel verso indicato dalle frecce. Il rettangolo in questione rappresenta il *ciclo d'isteresi* del circuito.

Se quindi all'ingresso del circuito viene applicato un segnale variabile nel tempo, l'uscita si porterà ad un valore *basso* se l'ingresso *superà* la soglia *alta* V_{RH} , mentre la transizione opposta potrà aver luogo solo se il segnale applicato scende *al di sotto* della soglia *bassa* V_{RL} . Un esempio è quello mostrato in figura 12.31.

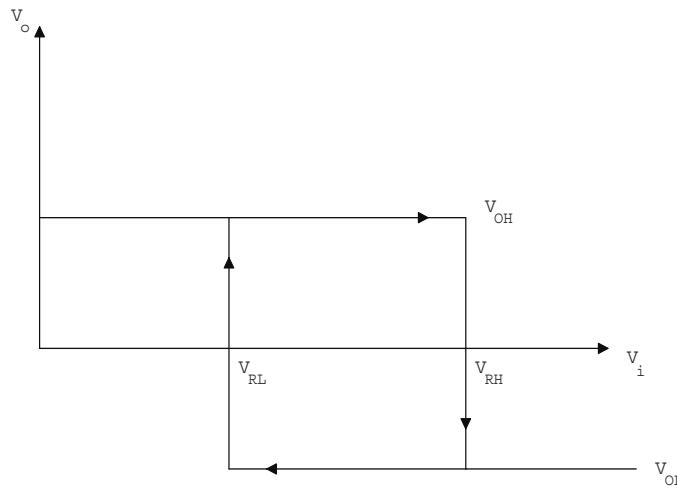


Figura 12.30: Ciclo d'isteresi per il trigger di Schmitt. Nel grafico è mostrato il valore assunto dalla tensione in uscita al variare della tensione V_i applicata all'ingresso invertente del circuito di figura 12.29.

In questo esempio, i valori delle resistenze sono $R_1 = 10k$ ed $R_2 = 5k$ mentre $V=0$ e l'operazionale è alimentato a $\pm 15V$. La tensione in ingresso è una sinusoida di frequenza 60 Hz ed ampiezza $\pm 10 V$. Con tale scelta dei parametri e tenendo conto del fatto che l'operazionale adoperato satura a $\pm 12 V$, si ha:

$$V_{RH} = 8 V \quad V_{RL} = -8 V$$

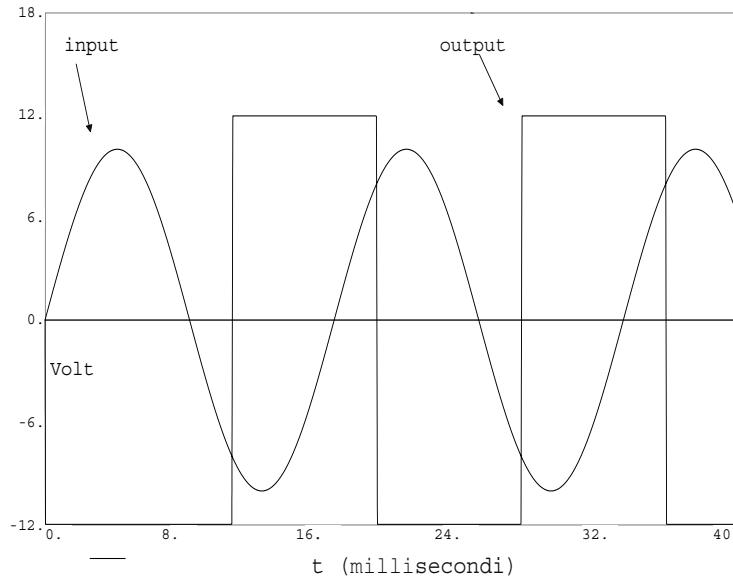


Figura 12.31: Risposta del trigger di Schmitt ad un'onda sinusoidale di frequenza 60 Hz ed ampiezza $\pm 10\text{ V}$. L'operazionale è alimentato a $\pm 15\text{ V}$.

L'uscita è un'onda rettangolare di periodo uguale a quello della sinusoide.

L'isteresi è definita dalla differenza $V_{RH} - V_{RL}$. Essa vale quindi:

$$V_{RH} - V_{RL} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(V_{OH} - V_{OL})$$

Il circuito può esser modificato in modo tale che i due livelli della tensione d'uscita siano diversi dalle tensioni d'alimentazione. È sufficiente aggiungere al nodo d'uscita due diodi Zener contrapposti aventi tensioni Zener tali che sia $|V_Z + V_D| < |V_{OH}|$ e $|V_Z + V_D| < |V_{OL}|$, come mostrato in figura 12.32.

I livelli di tensione in uscita sono ora:

$$V_{OL} = -(V_Z + V_D)$$

$$V_{OH} = +(V_Z + V_D)$$

12.4.2 Multivibrator astabile (generatore di onde rettangolari)

Il dispositivo mostrato in figura 12.33 può essere adoperato per generare onde rettangolari. Esso è essenzialmente un trigger di Schmitt comandato da un integratore.

Le tensioni di riferimento del comparatore sono:

$$V_{RH} = V_{OH} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (> 0)$$

$$V_{RL} = V_{OL} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (< 0)$$

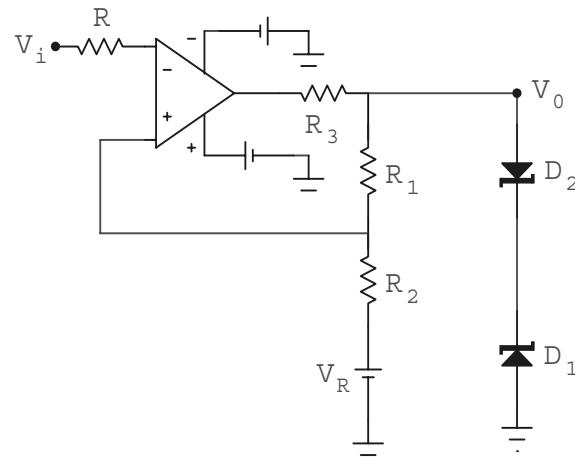


Figura 12.32: Modifica del circuito del trigger di Schmitt in cui la tensione in uscita è definita utilizzando due diodi Zener.

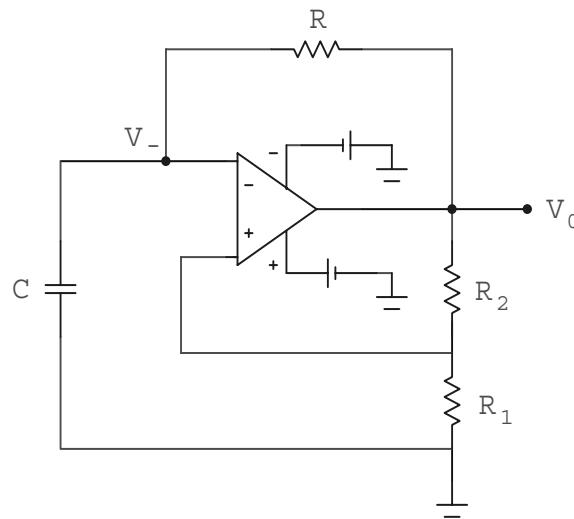


Figura 12.33: Generatore di onde rettangolari che fa uso di un trigger di Schmitt comandato da un integratore.

L'uscita sarà alta fintanto che V_- non abbia raggiunto il valore V_{RH} . In tale istante (con $V_- = V_{RH} > 0$) l'uscita passa al valore basso V_{OL} (negativo). Ora il condensatore comincerà a caricarsi, con costante di tempo $\tau = RC$ verso il valore asintotico V_{OL} . Se prendiamo come istante zero quello in cui l'uscita è passata al valore basso V_{OL} , l'andamento di $V_C = V_-$ sarà:

$$V_- = (V_{RH} - V_{OL}) e^{-t/\tau} + V_{OL}$$

Un'ulteriore commutazione dell'uscita verso il valore alto avrà luogo quando $V_- =$

V_{RL} , cioè, usando l'ultima equazione scritta, quando:

$$V_{RL} - V_{OL} = (V_{RH} - V_{OL})e^{-t/\tau}$$

cioè:

$$\frac{V_{RL} - V_{OL}}{V_{RH} - V_{OL}} = e^{-t/\tau}$$

da cui si ottiene poi:

$$T_1 \equiv t = \tau \ln \frac{V_{RH} - V_{OL}}{V_{RL} - V_{OL}}$$

In tale istante avremo $V_- = V_{RL}$ e $v_o = V_{OH}$. Ora il condensatore comincerà nuovamente a caricarsi verso il valore asintotico V_{OH} , con costante di tempo τ . Avremo ora:

$$V_- = V_{OH} + (V_{RL} - V_{OH})e^{-t/\tau}$$

La commutazione dell'uscita verso il valore basso V_{OL} avverrà per $V_- = V_{RH}$. Il nuovo intervallo di tempo T_2 sarà ora ottenibile dall'equazione:

$$V_{RH} = V_{OH} + (V_{RL} - V_{OH})e^{-T_2/\tau}$$

Si ottiene:

$$T_2 = \tau \ln \frac{V_{RL} - V_{OH}}{V_{RH} - V_{OH}}$$

Se vogliamo che il segnale in uscita sia un'onda quadra, cioè che sia $T_1 = T_2$, deve essere:

$$\frac{V_{RH} - V_{OL}}{V_{RL} - V_{OL}} = \frac{V_{RL} - V_{OH}}{V_{RH} - V_{OH}}$$

che è soddisfatta solo se è:

$$V_{OL} = -V_{OH}$$

con che è anche:

$$V_{RL} = -V_{RH}$$

Il periodo dell'onda quadra varrà ora:

$$T = T_1 + T_2 = 2\tau \ln \frac{V_{RL} - V_{OH}}{V_{RH} - V_{OH}} = 2\tau \ln \frac{V_{RH} + V_{OH}}{V_{OH} - V_{RH}}$$

dove è:

$$V_{RH} = V_{OH} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

per cui si ha infine:

$$T = 2\tau \ln \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2} \right)$$

La figura 12.34 mostra l'andamento temporale del segnale all'uscita dell'A.O. e di quello all'ingresso invertente, per un tipico circuito di questo tipo.

Il generatore di onde quadre appena discusso ha un'ampiezza che dipende dalla tensione d'alimentazione dell'operazionale. Se si vuole un'ampiezza di tensione in uscita fissata ad un valore diverso (minore), è sufficiente porre in uscita due diodi Zener contrapposti, come indicato in figura 12.35.

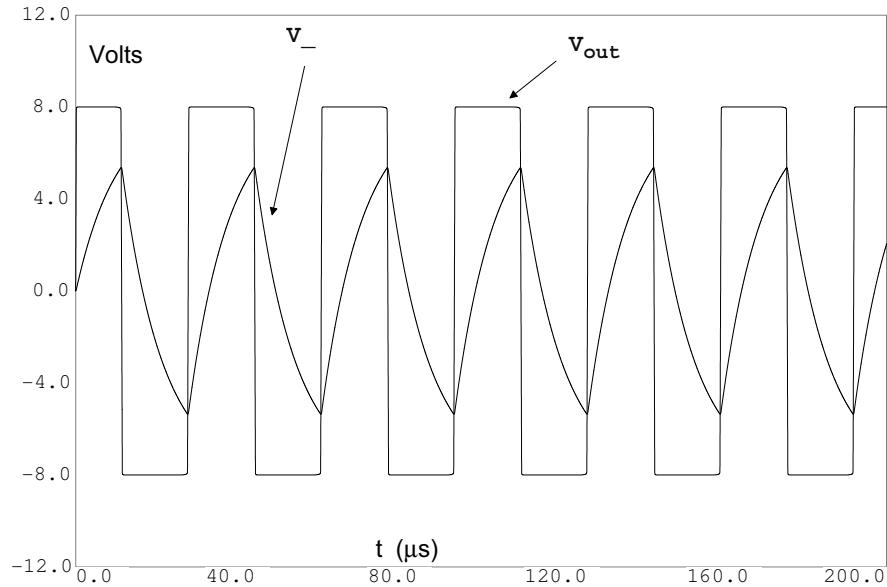


Figura 12.34: Andamento temporale delle tensioni all'uscita (V_{out}) ed all'ingresso invertente dell'operazionale (V_-) del circuito mostrato in figura 12.33.

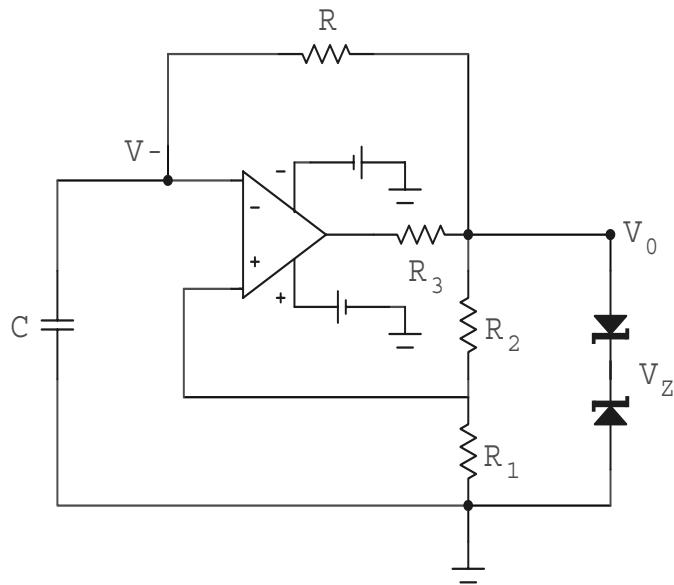


Figura 12.35: Generatore di onde quadre in cui si utilizzano due diodi Zener contrapposti per rendere l'ampiezza dell'onda quadra indipendente dalla tensione di alimentazione dell'amplificatore operazionale.

Si può vedere che in tal caso il periodo vale:

$$T = 2\tau \ln \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2} \right)$$

come nel caso precedente. Il periodo è cioè indipendente dall'ampiezza.

Se poi si vuol modificare il circuito in modo che sia $T_1 \neq T_2$, è sufficiente fare in modo che la costante di tempo relativa alla *salita* del segnale sia diversa da quella relativa alla *discesa*. Ciò può esser ottenuto sostituendo la resistenza R con il circuito mostrato in figura 12.36.

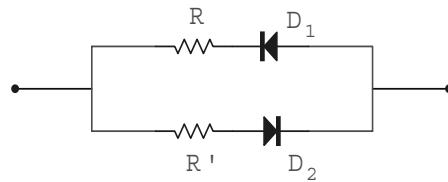


Figura 12.36: Circuito di feedback da collegare al circuito di figura 12.33 in sostituzione alla resistenza R per generare onde rettangolari.

Si vede che quando l'uscita è negativa, D_1 è interdetto e D_2 conduce. La relativa costante di tempo ora è $R'C$ ed il relativo semiperiodo è:

$$T_1 = R'C \ln \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2} \right)$$

Quando l'uscita è positiva, D_1 conduce mentre D_2 è interdetto. La costante di tempo ora è RC ed il relativo periodo è:

$$T_2 = RC \ln \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2} \right)$$

12.4.3 Multivibratore monostabile

Il multivibratore astabile discusso in precedenza può esser trasformato in uno monostabile se si impedisce al condensatore di caricarsi al valore V_{RH} . Ciò può essere ottenuto semplicemente ponendo un diodo in parallelo al condensatore, come mostrato in figura 12.37.

Ora la tensione V_c ai capi del condensatore è bloccata al valore V_γ della tensione del diodo in conduzione. Di conseguenza non può più avversi la commutazione della tensione in uscita dal livello superiore V_{OH} a quello inferiore V_{OL} . Lo stato stabile del sistema è quindi quello in cui $V_+ > V_-$ e quindi $V_O = V_{OH} > 0$. La commutazione allo stato V_{OL} può avversi solo se si applica all'ingresso non invertente un segnale negativo di ampiezza maggiore di $V_{RH} - V_\gamma$. Ponendo t=0 nell'istante in cui avviene la commutazione, a partire da tale istante il condensatore, carico alla tensione V_γ , dovrà scaricarsi con costante di tempo $\tau = RC$ al valore asintotico V_{OL} . Cioè:

$$V_- = V_c = V_{OL} + (V_\gamma - V_{OL}) e^{-t/\tau}$$

La commutazione $V_{OL} \rightarrow V_{OH}$ avviene quando $V_- = V_{RL}$, cioè:

$$\frac{V_{RL} - V_{OL}}{V_\gamma - V_{OL}} = e^{-T/\tau}$$

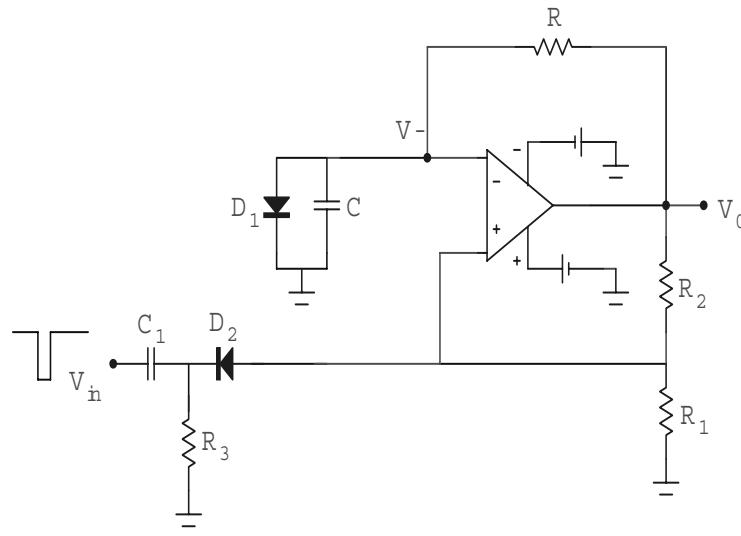


Figura 12.37: Multivibratore monostabile.

da cui si può ricavare la durata T dell'impulso (negativo) di tensione all'uscita dell'operazionale:

$$T = \tau \frac{V_\gamma - V_{OL}}{V_{RL} - V_{OL}}$$

dove:

$$V_{RL} = V_{OL} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

da cui si ottiene infine per T :

$$T \approx \tau \ln \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$$

La durata dell'impulso generato dipende quindi solo dalle resistenze e dalla costante di tempo τ . Per effetto della commutazione la capacità C tenderà ora a caricarsi con legge esponenziale verso la tensione V_{OH} . Quando però V_c raggiunge il valore V_γ , il diodo D_1 entra in conduzione ed il sistema rimane nello stato stabile raggiunto, fino all'arrivo di un nuovo impulso negativo. Ovviamente, la forma dell'impulso V_{in} è irrilevante, purchè la sua ampiezza sia sufficiente a dar origine alla transizione. Anche in questo caso l'escursione del segnale in uscita può esser limitata, inserendo due diodi Zener contrapposti, come già visto nel caso dell'astabile.

12.4.4 Generatore di onde triangolari

Se si esamina il generatore di onde quadre visto in precedenza, si nota (vedi fig 12.34) che la tensione al terminale invertente aumenta e poi diminuisce con legge esponenziale, con una costante di tempo $\tau = RC$. Ciò è legato al fatto che la corrente che carica il condensatore non è costante, essendo limitata dal simultaneo aumento

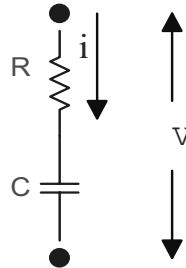


Figura 12.38: Serie di resistenza e condensatore, i simboli indicati sono utilizzati per i calcoli simbolici descritti nel testo.

della differenza di potenziale tra i terminali del condensatore e conseguente caduta di potenziale ai capi della resistenza R.

Con riferimento alla figura 12.38, abbiamo:

$$Ri = V_R$$

dove con V_R abbiamo indicato la differenza di potenziale ai capi di R.

Segue:

$$i = \frac{V_R}{R} = \frac{(V - V_C)}{R}$$

Inoltre è:

$$V_C = \frac{\int i dt}{C}$$

ne segue che, con $V_R = V - V_C$, i diminuisce all'aumentare di V_C . Se volessimo un V_C che aumenta *linearmente* con il tempo, dovremmo alimentare C con una corrente costante¹:

$$V_C = \frac{i}{C} dt$$

Questa situazione può essere approssimata ragionevolmente bene da un integratore RC realizzato con un operazionale, il quale fornisce al condensatore una corrente approssimativamente costante. Il circuito è quello di figura 12.39.

Ammettiamo che la tensione v_o all'uscita del comparatore sia al suo limite inferiore: $-v_o = -(V_Z + V_\gamma)$. Ora sull'ingresso invertente dell'integratore abbiamo un segnale negativo. L'uscita $V(t)$ sarà una rampa crescente e la tensione al terminale non invertente del comparatore sarà:

$$V_1 = -v_o \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Quando V_1 raggiunge la tensione di riferimento V_R , il comparatore cambia stato: $v_o = +(V_Z + V_\gamma)$ e $V(t)$ comincia a decrescere linearmente (vedi figura 12.40).

¹Notiamo che ciò implica che V non possa più esser costante, poichè avremmo: $V = V_C + V_R = (R + \frac{t}{C})i$ con i costante. Ciò implicherebbe una differenza di potenziale crescente linearmente nel tempo.

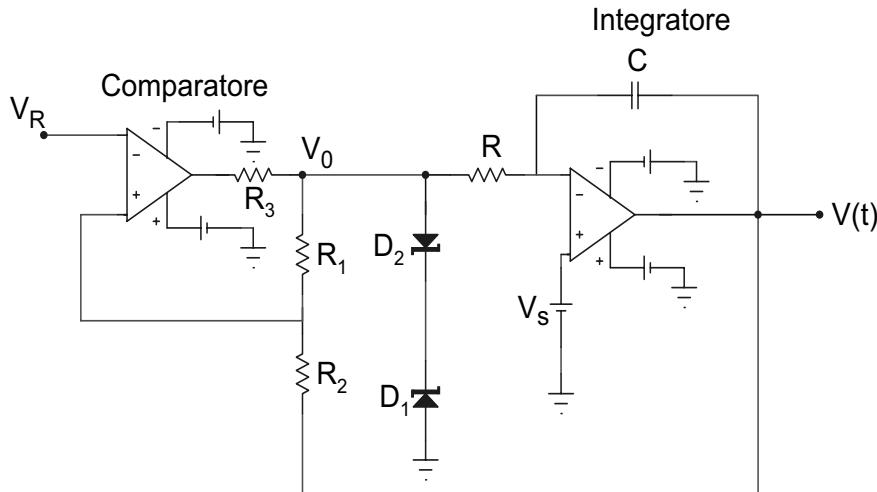


Figura 12.39: Generatore di un segnale triangolare (dente di sega), l'uscita del circuito è indicata con $V(t)$.

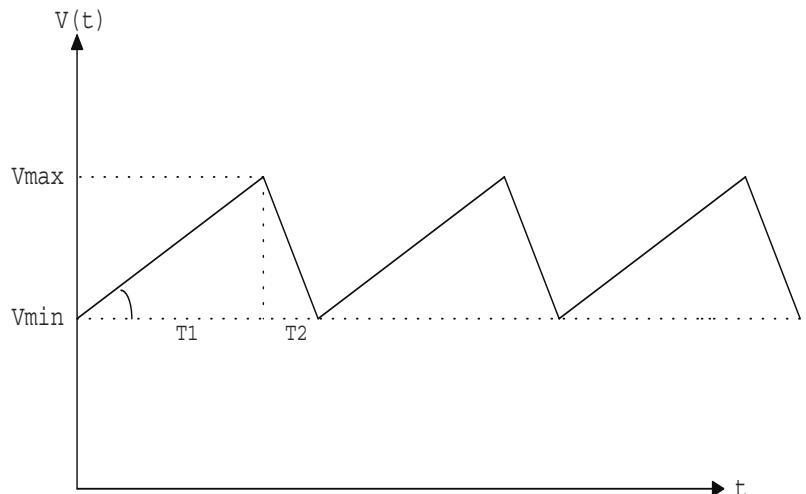


Figura 12.40: Andamento temporale della tensione all'uscita del circuito di figura 12.39.

Il massimo della funzione d'onda triangolare si ha quando $V_1 = V_R$, cioè:

$$V_R = -v_o \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_{max} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

da cui:

$$V_{max} = V_R \frac{R_1 + R_2}{R_1} + v_o \frac{R_2}{R_1}$$

Analogamente:

$$V_{min} = V_R \frac{R_1 + R_2}{R_1} - v_o \frac{R_2}{R_1}$$

Ed infine:

$$V_{max} - V_{min} = 2v_o \frac{R_2}{R_1}$$

e:

$$\bar{V} = V_{medio} = V_R \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

Per $V_R = 0$ la funzione è simmetrica in ampiezza: $V_{max} = -V_{min}$. Quindi il valore medio è controllabile variando V_R e l'ampiezza variando il rapporto R_2/R_1 .

Calcoliamo ora i periodi T_1 e T_2 indicati in figura 12.40 ammettendo che sia $V_s = 0$. Possiamo calcolare T_1 dalla relazione:

$$T_1 = (V_{max} - V_{min})/\tan\alpha$$

dove $\tan\alpha = dV/dt$ è il rate di salita del segnale in uscita, indicheremo anche con β il rate di discesa del segnale. Questo è $dV/dt = I/C = v_o/RC$. Quindi:

$$T_1 = \frac{V_{max} - V_{min}}{v_o/RC} = \frac{2v_o R_2 / R_1}{v_o/RC} = 2 \frac{R_2}{R_1} RC$$

Notiamo che poichè il rate di discesa del segnale è uguale a quello di salita (nel caso considerato in cui $V_s = 0$) avremo $T_1 = T_2$. Ne segue:

$$T = T_1 + T_2 = 4 \frac{R_2}{R_1} RC$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{4RC}$$

Notiamo che la frequenza del segnale in uscita è indipendente da v_o .

Se si desiderano tempi di salita e discesa diversi si può sostituire la resistenza R di figura 12.39 con la rete di figura 12.36. Un metodo alternativo consiste nell'applicare un valore di $V_s \neq 0$ al terminale non invertente del secondo operazionale del circuito di figura 12.39. In questo caso il rate di variazione della salita del segnale diventa pari a $(v_o + V_s)/RC$ mentre quello della discesa è $(v_o - V_s)/RC$. Quindi si ha:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{v_o - V_s}{v_o + V_s} \quad (12.24)$$

Si noti che un valore di $V_s \neq 0$ non modifica l'ampiezza del segnale dell'onda triangolare.

12.4.5 Limitatori e rettificatori

Un A.O. può esser utilizzato, per realizzare un limitatore. Un esempio è quello mostrato in figura 12.41.

Se il diodo è interdetto il circuito si comporta come un normale amplificatore invertente e la tensione in uscita sarà data da:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i$$

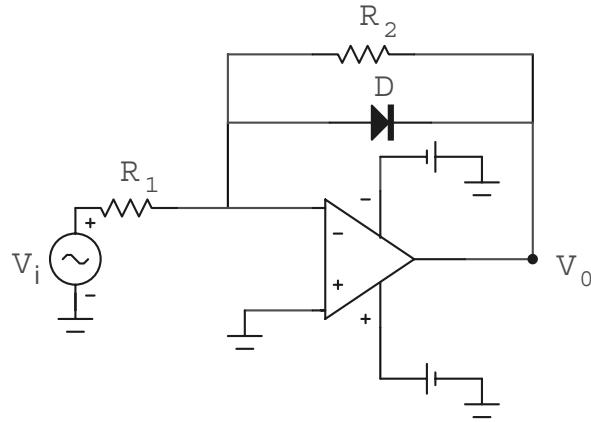


Figura 12.41: Limitatore di tensione.

Il diodo comincerà a condurre se la differenza di potenziale ai suoi capi supera V_γ . Ciò accade quando la tensione in ingresso v_i soddisfa la condizione:

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2} = \frac{V_\gamma}{R_2}$$

Cioè:

$$v_i = \frac{R_1}{R_2} V_\gamma$$

In altri termini, il diodo potrà condurre se:

$$v_i \geq \frac{R_1}{R_2} V_\gamma$$

In tali condizioni la tensione in uscita sarà uguale a quella presente sul terminale invertente (0 V) diminuita del V_γ del diodo:

$$v_o = -V_\gamma$$

In definitiva avremo in uscita un segnale di tensione pari a $-V_\gamma$ se $v_i \geq (R_1/R_2)V_\gamma$ ed uguale a $-v_i R_2/R_1$ se tale condizione non è soddisfatta.

In figura 12.42 si può vedere il segnale in uscita da un tale circuito (con $R_1 = R_2$) nel caso in cui il segnale in ingresso sia una sinusoida.

Se si vuol limitare ad un livello diverso dal V_γ del diodo, si può sostituire questo con la serie di un diodo ed uno Zener, come mostrato in figura 12.43

Ora la corrente nel ramo contenente i diodi può circolare solo nel verso del diodo D, se la differenza di potenziale ai capi del ramo in questione supera il valore $V_Z + V_\gamma$, cioè quando la tensione in uscita v_o è pari a $-(V_Z + V_\gamma)$. Ciò accade quando è:

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{V_Z + V_\gamma}{R_2}$$

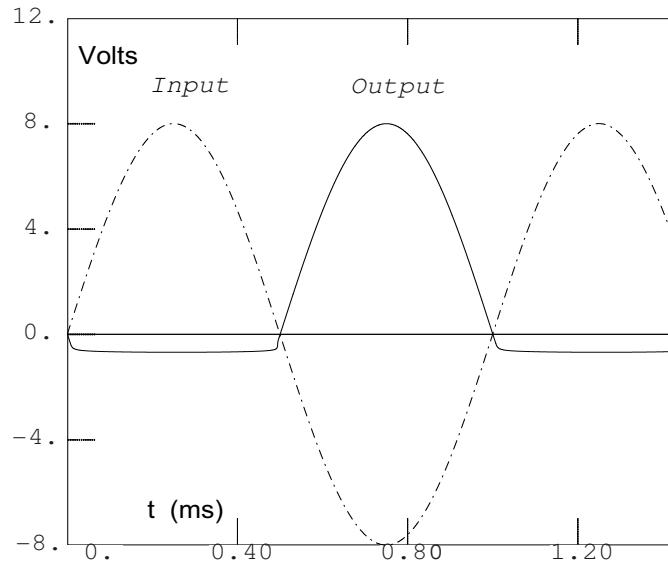


Figura 12.42: Andamento della tensione all'uscita (linea tratteggiata) del circuito di figura 12.41, con $R_1 = R_2$, per una tensione applicata all'ingresso sinusoidale (linea tratteggiata).

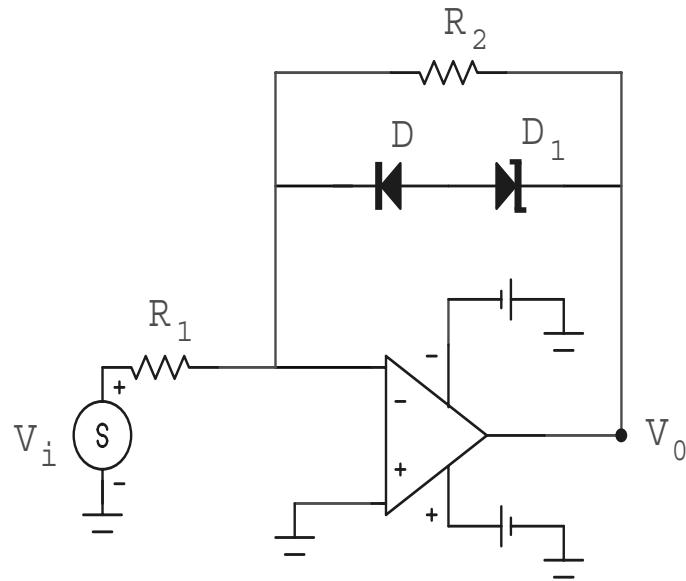


Figura 12.43: Ulteriore esempio di limitatore di tensione con soglia in tensione pari a $-(V_Z + V_\gamma)$.

Se quindi v_i è negativo e maggiore in modulo del valore:

$$\frac{(V_Z + V_\gamma)R_1}{R_2}$$

l'uscita è bloccata a $-(V_Z + V_\gamma)$. Se v_i è invece maggiore di

$$-\frac{(V_Z + V_\gamma)R_1}{R_2} \quad (12.25)$$

il ramo contenente i diodi sarà interdetto ed il circuito si comporterà come un normale amplificatore invertente, con uscita data da:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1}v_i$$

La funzione di trasferimento di tale circuito è mostrata in figura 12.44, dove abbiamo indicato con V_g il V_γ del diodo e con V_{min} la tensione di soglia data dall'equazione (12.25).

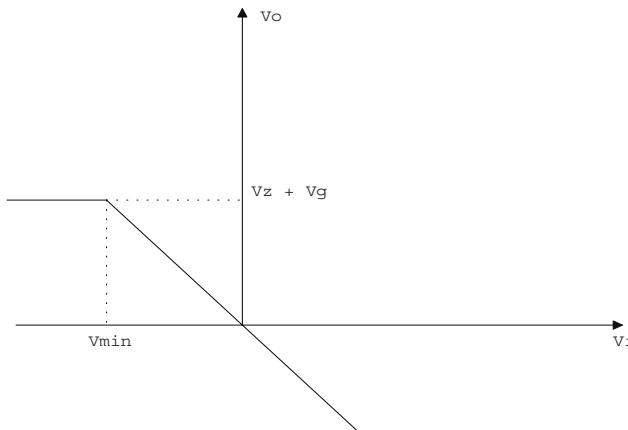


Figura 12.44: Funzione di trasferimento del circuito di figura 12.43.

Un limitatore a due livelli diversi è ottenibile sostituendo nell'ultimo circuito al diodo D un secondo Zener, con polarità opposta a quella del primo. Il relativo circuito, il cui funzionamento è analogo ai precedenti, è mostrato in figura 12.45

12.4.6 Rivelatori di picco

In molte applicazioni è necessario conoscere e memorizzare il valore di picco che un segnale di tensione ha raggiunto in un certo intervallo di tempo. Ciò può esser ottenuto facendo sì che il segnale di tensione in questione carichi una capacità *durante l'intervallo di tempo in cui il segnale di tensione continua a salire* e sia invece disconnesso dalla medesima capacità negli intervalli di tempo successivi, quando il segnale di tensione diminuisce.

Un circuito che potrebbe realizzare tale funzione (per segnali d'ingresso positivi) è quello di figura 12.46, costituito da un diodo ed una capacità.

Se il diodo è ideale, esso è polarizzato direttamente quando la differenza tra la tensione in ingresso v_i e quella ai capi del condensatore v_o rimane superiore al V_γ del diodo. Se v_o ha raggiunto un certo valore V_{max} ed ora v_i comincia a diminuire, il diodo viene ad esser polarizzato inversamente e la tensione d'uscita rimane bloccata

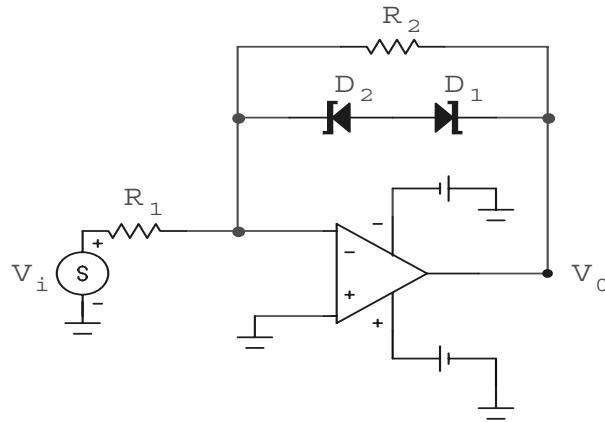


Figura 12.45: Limitatore di tensione con due livelli di soglia.

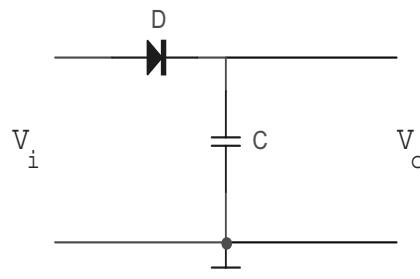


Figura 12.46: Rivelatore di picco realizzato con elementi passivi.

al valore V_{max} . Uno degli inconvenienti di questo circuito è costituito dal fatto che la tensione in uscita non è uguale a quello in ingresso, ma differisce da essa del V_γ del diodo, che oltretutto dipende dalla temperatura. Un circuito che ovvia a tale inconveniente è quello di figura 12.47.

Questo è simile ad un limitatore per segnali positivi (senza la resistenza posta in parallelo al diodo) e con un condensatore posto tra l'uscita dell'A.O. e massa.

Esaminiamo il funzionamento di tale circuito. Se $v_i > V_- = v_o = V_c$, il segnale presente al terminale non invertente è maggiore di quello presente al terminale invertente. In tali condizioni V' tende a salire ed a portarsi eventualmente abbastanza al di sopra di V_c da mandare il diodo in conduzione. Ora il circuito si comporterà da inseguitore di tensione ed il condensatore si porterà allo stesso potenziale v_i dell'ingresso.

Quando v_i scende al di sotto della tensione presente in uscita V_c , l'uscita dell'A.O. diventa negativa ed il diodo è interdetto. Vediamo così che il condensatore si carica fino a che la sua tensione non raggiunge il massimo tra tutti i valori del segnale applicato in ingresso. Per *resetare* il circuito si dovrà far uso di un interruttore, ed

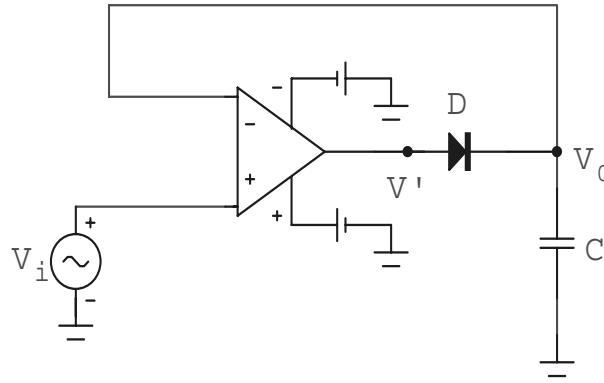


Figura 12.47: Rivelatore di picco realizzato con un amplificatore operazionale ed elementi passivi.

a tale scopo si può adoperare un interruttore a JFET o MOSFET posto ai capi del condensatore, come mostrato in figura 12.48.

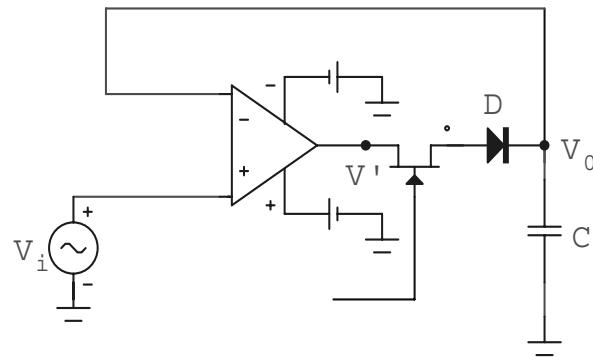


Figura 12.48: Rivelatore di picco *resettabile* attraverso l'interruttore JFET o MOSFET.

La configurazione del rivelatore di picco appena discussa presenta alcuni inconvenienti. In primo luogo, se il segnale in ingresso è minore di quello ai capi del condensatore, l'operazionale satura al suo valore negativo. Inoltre, l'uscita del circuito dovrà essere accoppiata ad un eventuale carico (ad esempio, il sistema che dovrà essere utilizzato per leggere il segnale in tensione presente ai capi del condensatore). L'impedenza finita di tale carico farà sì che il condensatore si scarichi. Entrambi gli inconvenienti possono essere risolti facendo uso del circuito mostrato in figura 12.49.

L'operazionale presente in uscita è un inseguitore di tensione. Ora il condensatore vede l'elevata impedenza d'ingresso dell'inseguitore (che alimenterà l'eventuale

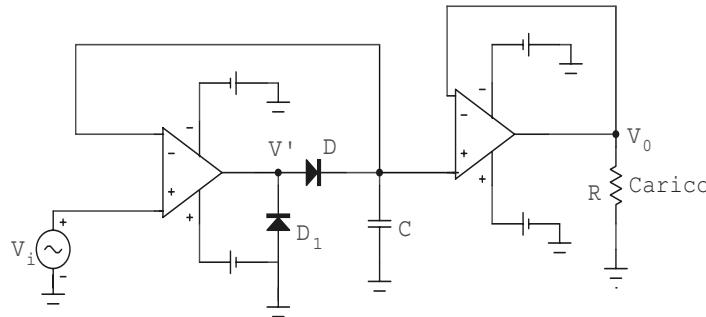


Figura 12.49: Ulteriore esempio di rivelatore di picco, questo circuito permette di non saturare il primo A.O. e di avere una grossa impedenza in serie al condensatore.

carico). La costante di tempo di scarica del condensatore diventa ora molto grande ed il secondo dei problemi menzionati è in tal modo risolto.

Il diodo D_1 inserito tra l'uscita dell'operazionale e massa a sua volta impedisce che la tensione d'uscita dell'A.O. possa assumere valori negativi inferiori a $-V_\gamma$ e ciò risolve il primo dei problemi menzionati.

12.5 Limiti degli amplificatori operazionali

Abbiamo finora ammesso che l'A.O. abbia le caratteristiche ideali descritte all'inizio del capitolo. In realtà un A.O. reale ha caratteristiche che differiscono da quelle ideali. Vogliamo ora esaminare alcuni di questi *limiti* e valutarne le conseguenze.

Più in particolare, occorre tener conto dei seguenti effetti:

- amplificazione non infinita;
- banda passante finita;
- correnti d'ingresso e differenza tra le correnti d'ingresso;
- impedenza d'ingresso finita;
- tensione di offset in ingresso;
- slew rate;
- impedenza d'uscita non nulla.

Cominciamo ad esaminare le conseguenze dell'amplificazione finita dell'A.O., con riferimento all'amplificatore invertente di figura 12.50.

Se A non è infinito, non possiamo più far uso del principio della massa virtuale. Calcoliamo l'uscita continuando a considerare infinita l'impedenza d'ingresso, e

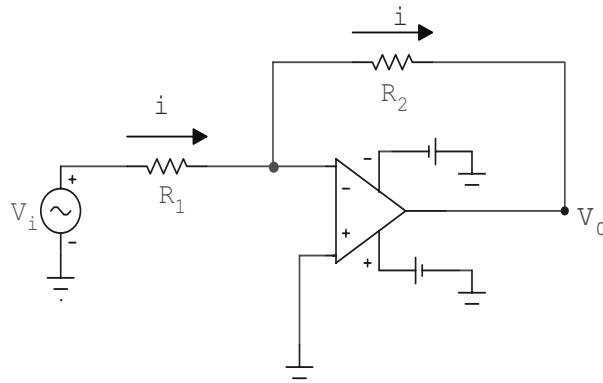


Figura 12.50: Amplificatore invertente.

quindi nulla la corrente che entra nel terminale invertente. L'intera corrente fluisce cioè nel ramo $R_1 - R_2$. Avremo quindi:

$$i = \frac{v_i - V_-}{R_1} = \frac{V_- - v_o}{R_2}$$

da cui:

$$\frac{v_i}{R_1} = V_- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{v_o}{R_2}$$

con:

$$V_- = -\frac{v_o}{A}$$

per cui si ottiene:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{1}{1 + (R_1 + R_2)/AR_1} \right] v_i$$

Ora teniamo conto del fatto che, se v_o è la tensione in uscita, la frazione di questa che il partitore $R_1 - R_2$ riporta in ingresso è:

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

a β si dà il nome di fattore o coefficiente di reazione. L'ultima relazione si può allora scrivere:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{1 + 1/\beta A} \right) v_i$$

Il guadagno con reazione nel caso concreto di un valore finito di A è quindi:

$$A_{vf} = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{1 + 1/\beta A} \right)$$

che, nel caso di un A infinitamente grande ci avrebbe dato il guadagno *ideale*:

$$A_v = -\frac{R_2}{R_1}$$

Il rapporto tra guadagno reale e guadagno ideale è:

$$\frac{A_{vf}}{A_v} = \frac{1}{1 + 1/\beta A} \quad (12.26)$$

Per un dato valore di A , il guadagno reale differirà tanto più dal guadagno ideale quanto maggiore è il guadagno ideale richiesto, determinato dalla scelta dei componenti R_1 ed R_2 . Ad esempio, se $A=100,000$ e chiediamo un guadagno (ideale), cioè un rapporto R_2/R_1 pari a 1000, avremo per il coefficiente di reazione:

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + R_2/R_1} = 0.001$$

per cui: $1/(\beta A) = 0.01$ ed il rapporto dato dall'equazione (12.26) sarà uguale a $1/1.01=0.99$. Se avessimo chiesto un guadagno 10 volte maggiore, cioè un valore del rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ pari a 10,000, β sarebbe stato 10 volte più piccolo, cioè 0.0001, βA sarebbe stato pari a 10, ed il rapporto tra guadagno reale ed ideale sarebbe stato pari a $1/1.1=0.91$.

Vediamo in definitiva che l'effetto del guadagno finito dell'A.O. è tanto maggiore quanto più forte si fa la richiesta sul guadagno dell'amplificatore invertente. Notiamo per inciso che la richiesta di un guadagno elevato si traduce in un piccolo fattore di reazione β .

Una situazione analoga si riscontra nel caso dell'amplificatore in configurazione non-invertente. È facile verificare, in modo analogo a quello seguito in precedenza, che il guadagno in questione, nel caso di un'amplificazione A finita, è dato da:

$$A_{vf} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{1 + 1/A\beta}$$

mentre quello ideale sarebbe stato:

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Il rapporto tra guadagno reale ed ideale è allora:

$$\frac{A_{vf}}{A_v} = \frac{1}{1 + 1/A\beta}$$

Quindi anche in questo caso l'amplificazione differirà da quella ideale se β è molto minore di 1, cioè se si vuole un guadagno ideale molto grande. Il prodotto $A\beta$ v'è sotto il nome di *guadagno della catena* o *loop gain*. Questo termine deriva dal fatto che, se un segnale v_i è applicato all'ingresso di un amplificatore di guadagno A , il segnale presente in uscita è Av_i e la catena di reazione *riporta in ingresso* una frazione β di questo, per cui βA rappresenta appunto il guadagno complessivo della catena costituita dall'amplificatore più la rete di reazione. Il guadagno dell'amplificatore reazionato sarà grande se il "loop gain" è piccolo. Al guadagno A_{vf} si da poi il nome di *guadagno a catena chiusa*. Il guadagno A di un amplificatore indicato dai costruttori è di regola quello misurato a frequenza molto bassa o in DC. C'è poi

da tener conto della banda passante non infinita dell'A.O. Il guadagno A diminuisce molto al crescere della frequenza. In molti amplificatori, l'andamento di A in funzione della frequenza può essere schematizzato come:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s\tau_p}$$

dove $s = j\omega$ ed $1/\tau_p$ rappresenta la frequenza alla quale il guadagno si riduce di un fattore 2 rispetto a quello a basse frequenze. Questa può variare tra 1Mhz e 10 Mhz in un tipico amplificatore. L'andamento del modulo di $A(\omega)$ in funzione di ω in un diagramma di Bode è caratterizzato da una pendenza negativa di 6 dB/ottava. Sostituendo questa espressione nella (12.26) troviamo:

$$A_{vf}(s) = \frac{A_v(\text{ideale})}{1 + \frac{1+s\tau_p}{A_0\beta}} \quad (12.27)$$

che a basse frequenze, dove il termine $s\tau_p \ll 1$ diventa:

$$A_{vf}(DC) = \frac{A_v(\text{ideale})}{1 + \frac{1}{A_0\beta}} \quad (12.28)$$

Dividendo la (12.27) per la (12.28) si ha poi:

$$\frac{A_{vf}(s)}{A_{vf}(DC)} = \frac{1}{1 + \frac{s\tau_p}{1+\beta A_0}}$$

In molte applicazioni è $A_0\beta \gg 1$ per cui:

$$A_{vf}(s) = \frac{A_{vf}(DC)}{1 + \frac{s\tau_p}{\beta A_0}}$$

che, ponendo ω_T uguale al prodotto del guadagno a bassa frequenza A_0 per la larghezza di banda $1/\tau_p$ dell'A.O.:

$$\omega_T = \frac{A_0}{\tau_p}$$

può essere riscritta come:

$$A_{vf}(s) = \frac{A_{vf}(DC)}{1 + \frac{s}{\beta\omega_T}}$$

Si vede da quest'ultima espressione che la larghezza di banda ai 3 dB (cioè la frequenza in corrispondenza alla quale il modulo dell'ampiezza si è ridotto di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore DC) è:

$$\omega_c = \beta\omega_T$$

Poichè $1/\beta$ è all'incirca uguale al guadagno (ideale) A_{vf} dell'amplificatore con reazione nell'ipotesi di amplificatore ideale, vediamo da quest'ultima relazione che:

$$A_{vf} \omega_c = \omega_T$$

cioè che il prodotto del guadagno per la larghezza di banda è costante.

Esaminiamo ora il problema delle correnti di bias, dell'offset di tali correnti e dell'offset della tensione d'ingresso. La corrente detta *Input bias current*, che verrà indicata in seguito con I_i , è la corrente di polarizzazione. Essa è definita come la media aritmetica delle correnti entranti nei terminali non-invertente (I_{B2}) ed invertente (I_{B1}):

$$I_i = \frac{I_{B1} + I_{B2}}{2}$$

Ad esempio, tale corrente nel caso dell'integrato $\mu A741$ vale tipicamente 80 nA; nel caso di A.O. con ingresso a FET essa ha valori dell'ordine di qualche pA.

La *Input offset current* (I_{io}) è definita come la differenza delle correnti entranti nei due terminali:

$$I_{io} = I_{B1} - I_{B2}$$

Tale parametro vale circa 20 nA nel caso del $\mu A741$. L'*Input offset voltage* (v_{os}) indica la differenza di potenziale da applicare tra i terminali d'ingresso per azzerare l'uscita. Infatti, a causa delle asimmetrie interne all'integrato l'uscita potrà andare ad un valore non nullo con una identica tensione applicata ai due terminali d'ingresso. Per il $\mu A741$ un valore tipico è 2 mV. Esistono A.O. con valori della v_{os} di pochi μV . Per A.O. con ingresso a FET la v_{os} tipica è di 5 mV.

Esaminiamo ora l'effetto che sull'amplificatore invertente hanno le correnti d'ingresso e la tensione di offset. Questi possono essere schematizzati come mostrato in figura 12.51.

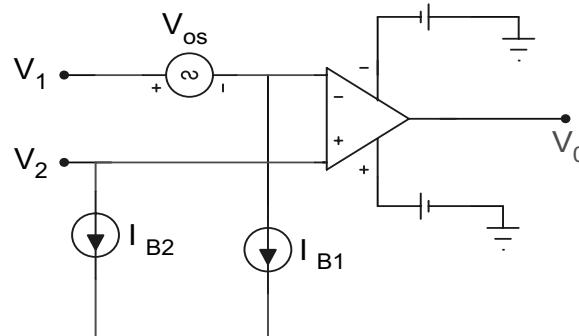


Figura 12.51: Schematizzazione delle correnti di ingresso nei terminali invertente e non-invertente (I_{B1}, I_{B2}) e della tensione di offset (v_{os}) in un amplificatore operazionale.

Nel caso di un amplificatore invertente possiamo calcolare l'effetto di questi parametri sull'uscita facendo uso del principio di sovrapposizione. Riferiamoci alla schematizzazione di figura 12.52, avremo:

1. senza correnti o tensioni di offset e $V_i \neq 0$: $V_o = -\frac{R_2}{R_1}V_i$
2. con $V_{os} \neq 0$ e $I_{B1} = I_{B2} = V_i = 0$: $V_o = (1 + \frac{R_2}{R_1})V_{os}$

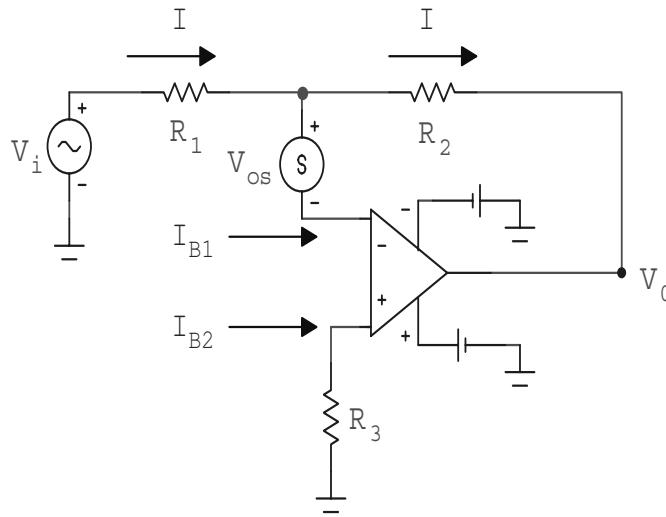


Figura 12.52: Schema dell'amplificatore invertente per un amplificatore operazionale non-ideale, sono indicate le correnti di ingresso e la tensione di offset.

3. con $I_{B1} \neq 0$ e $V_{os} = I_{B2} = V_i = 0$: $V_o = R_2 I_{B1}$
4. con $I_{B2} \neq 0$ e $V_{os} = I_{B1} = V_i = 0$: $V_o = -R_3 I_{B2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

Se tutti questi contributi sono presenti:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{os} + R_2 I_{B1} - R_3 I_{B2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Se sceglieremo R_3 uguale al parallelo di R_1 ed R_2 , avremo per i due termini dovuti alle correnti di offset:

$$R_2 I_{B1} - R_3 I_{B2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = R_2 (I_{B1} - I_{B2})$$

Poichè la differenza tra le due correnti è molto minore di ciascuna singola corrente, si vede che la scelta fatta riduce in modo sostanziale l'effetto delle correnti d'ingresso. Si vede da ciò che una buona regola pratica da seguire è quella di far sì che entrambi i terminali *vedano* la medesima resistenza. L'errore dovuto a v_{os} può esser compensato in alcuni A.O. da un apposito circuito di compensazione; in altri casi occorre applicare una differenza di potenziale tra gli ingressi, tale da annullare l'effetto.

Se un ingresso dell'A.O. è accoppiato allo stadio precedente in modo capacitivo, come nel caso dell'amplificatore non invertente di figura 12.53, una resistenza addizionale dovrà essere inserita tra tale ingresso e massa, per consentire un cammino alla corrente di polarizzazione.

L'ultimo dei limiti degli amplificatori operazionali di cui ci occuperemo è quello dello *slew-rate*. Questo termine si riferisce al fatto che un A.O. può far variare la tensione in uscita con una rapidità limitata.

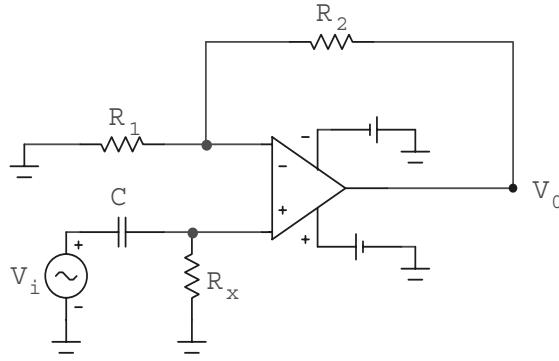


Figura 12.53: Amplificatore non-invertente in cui la tensione di ingresso è accoppiata in modo capacitivo.

Se applichiamo all'ingresso non invertente di un A.O. il cui ingresso invertente sia collegato a massa, un gradino positivo di tensione, l'uscita non seguirà istantaneamente l'ingresso, ma salirà con una pendenza non-infinita. Ci si riferisce a tale pendenza quando si parla di slew-rate. Tale parametro è comunemente espresso da:

$$SR = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

dove ΔV è la variazione della tensione in uscita, quando in ingresso è applicata una tensione a gradino, nell'intervallo di tempo Δt .

Valori tipici dello SR vanno da circa $0.01 \text{ V}/\mu\text{s}$ a qualche migliaio di $\text{V}/\mu\text{s}$. Va notato che lo SR per transizioni positive può differire da quello relativo a transizioni negative.

Il fatto che il segnale in uscita non seguia istantaneamente la variazione di quello in ingresso fa sì che, in presenza di feedback negativo, l'ingresso invertente non segua quello non-invertente ma nasca una d.d.p. finita tra i due. Tale differenza di potenziale altera in modo significativo il funzionamento del circuito.

Lo SR ha origine nella struttura interna degli A.O. e più in particolare nelle capacità adoperate per ottenere una buona risposta in frequenza. In molti schemi di A.O. l'escursione totale del segnale di tensione in uscita si presenta ai capi della capacità di compensazione, che ha un valore tipico di 30 pF . Poiché in genere la corrente I che carica tale capacità è dell'ordine di $30 \text{ }\mu\text{A}$, avremo:

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

da cui si ottiene come ordine di grandezza dello SR in questo tipo di A.O.:

$$SR = \frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} = 1 \frac{\text{V}}{\mu\text{s}}$$

Capitolo 13

Il timer 555

13.1 Introduzione

Abbiamo già incontrato circuiti che generano delle forme d'onda rettangolari periodiche, quali ad esempio gli oscillatori basati su amplificatori operazionali, i circuiti bistabili e monostabili, il trigger di Schmitt, etc.. L'integrato che ora esamineremo è in grado di funzionare indifferentemente come oscillatore, come trigger di Schmitt o come circuito bistabile. Esso è noto con il nome di circuito di temporizzazione (timer) 555. Esamineremo in questa sezione alcuni esempi di applicazione di tale circuito. La struttura base del 555 è quella mostrata in figura 13.1.

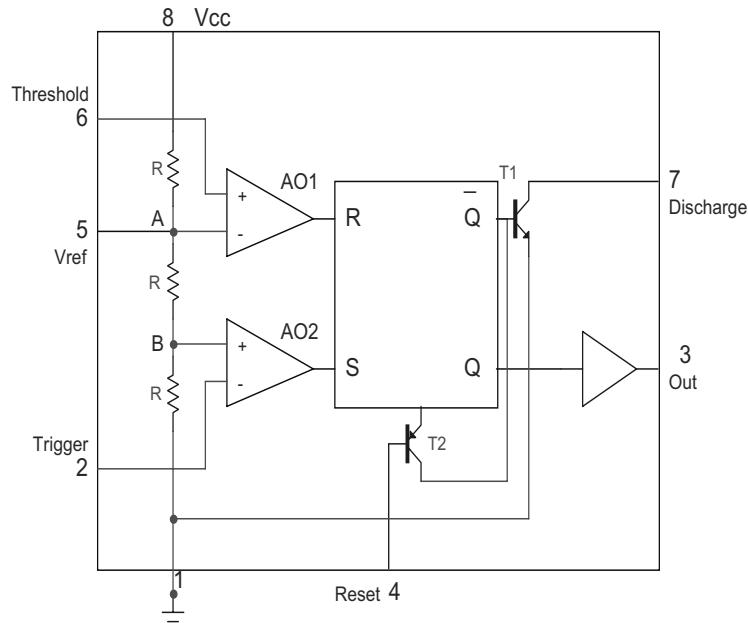


Figura 13.1: Schema della struttura di base del circuito timer 555.

L'integrato contiene due comparatori, un flip-flop di tipo RS, due transistor, un buffer (inseguitore di tensione) e tre resistenze.

Le tre resistenze uguali, indicate in figura 13.1 con R, costituiscono un partitore il quale consente di avere nei punti A e B rispettivamente le tensioni $2/3V_{cc}$ ed $1/3V_{cc}$. Tali tensioni vengono usate come riferimento da due comparatori. L'uscita di AO_1 è positiva se al piedino 6 (noto come ingresso di *threshold*) è applicata una tensione maggiore di $2/3V_{cc}$, negativa nel caso opposto. L'uscita di AO_2 risulta positiva se al piedino 2 (noto come ingresso di *trigger*) è applicata un tensione minore di $1/3V_{cc}$, negativa nel caso opposto. Le uscite di AO_1 e AO_2 vanno a pilotare rispettivamente i piedini di Reset e di Set di un flip-flop di tipo RS. Per questo flip-flop, segnali di tensione negativi agli ingressi valgono come un segnale logico 0. L'uscita Q del FF è collegata al piedino 3 tramite un buffer che serve a rendere l'uscita indipendente dal carico esterno. Il transistor T1, la cui base è unita all'uscita \bar{Q} del RS, si comporta da invertitore: se \bar{Q} è alto, esso è in saturazione e l'uscita 7 è bassa. Viceversa, se \bar{Q} è basso T1 è interdetto. Il transistor T2 può essere adoperato per resettare il flip-flop. Se non si vuole adoperarlo, il piedino 4 va collegato alla tensione alta (transistor pnp interdetto).

La tabella 13.1 riassume la corrispondenza tra segnali applicati agli ingressi *threshold* e *trigger* del 555 e le uscite. Nella tabella vien detto *alto* (H) l'ingresso di threshold se questo supera il suo valore di riferimento, cioè $2/3 V_{cc}$; vien detto *alto* l'ingresso di trigger se questo supera il suo valore di riferimento, $1/3 V_{cc}$.

Stato	Reset	Thres	Trig	R	S	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}	out_{n+1}	$discharge_{n+1}$
a	H	L	L	L	H	H	L	H	aperto
b	H	L	H	L	L	Q_n	\bar{Q}_n	out_n	$disch_n$
c	H	H	L	H	H	-	-	-	-
d	H	H	H	H	L	L	H	L	massa

Tabella 13.1: Tabella delle verità del timer 555, i simboli utilizzati sono quelli mostrati in figura 13.1.

Esamineremo ora il modo in cui tale circuito può essere adoperato per realizzare vari circuiti.

13.1.1 Multivibratore astabile

Uno schema in cui si utilizza il 555 come generatore di segnali rettangolari (astabile) è mostrato in figura 13.2. In questo circuito il ruolo fondamentale è svolto dalle resistenze R_1 ed R_2 nonché dal condensatore C_1 .

Quest'ultimo è periodicamente caricato tramite le resistenze R_1 ed R_2 e scaricato attraverso la resistenza R_2 . Il condensatore C_2 serve ad eliminare fluttuazioni di tensione nel punto del partitore (vedi figura 13.1) che è a $2/3V_{cc}$ ($V_{ref} =$ piedino 5).

Esaminiamo in dettaglio ciò che accade. Ammettiamo che il condensatore C_1 sia inizialmente scarico (potenziale del punto P uguale a zero). L'uscita del comparatore AO_2 è quindi inizialmente uguale ad 1 (livello alto) mentre quella del comparatore AO_1 è inizialmente uguale a 0 (livello basso). Quindi all'inizio abbiamo $Q = 1$, $\bar{Q} = 0$ e T_1 interdetto (riga (a) della tabella 13.1). L'uscita V_{out} del 555 sarà alta.

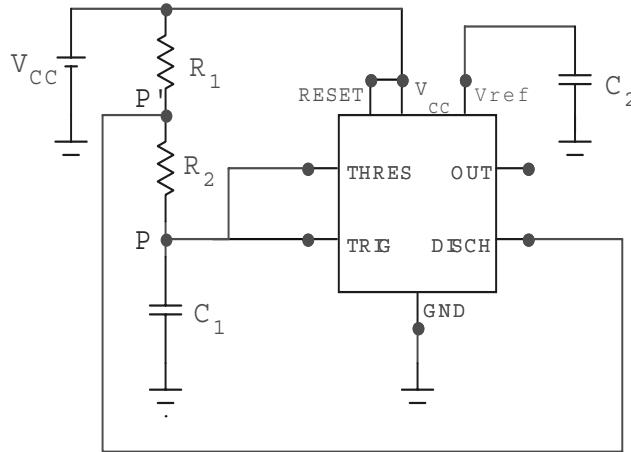


Figura 13.2: Multivibratore astabile (generatore di onde rettangolari) realizzato con un timer 555 ed elementi passivi.

Ora il condensatore C comincia a caricarsi verso la tensione V_{cc} attraverso R_1+R_2 , con costante di tempo :

$$\tau_1 = C_1(R_1 + R_2)$$

Quando la tensione del punto P raggiunge il valore $1/3V_{cc}$, l'uscita del comparatore AO_2 va a 0 ($S=0$) mentre R rimane uguale a zero (riga (b) della tabella 13.1). Quindi lo stato del flip-flop non cambia. Quando la tensione del punto P raggiunge il valore $2/3V_{cc}$, S rimane 0 mentre ora R va ad 1 (riga (d) della tabella 13.1). Ora il flip-flop cambia stato: Q (e quindi l'uscita V_{out}) diventa basso e \bar{Q} alto. Con \bar{Q} alto, il transistor T_1 va in saturazione e $V_{CE} = 0$. Poiché l'emettitore è collegato a massa, avremo che il punto P', che è collegato al collettore, sarà ad una tensione praticamente nulla. Il condensatore C_1 comincerà ora a scaricarsi dal valore di tensione che aveva raggiunto ($2/3V_{cc}$) verso lo zero, con costante di tempo:

$$\tau_2 = C_1 R_2$$

Quando la tensione nel punto P raggiungerà il valore ($1/3V_{cc}$), il comparatore AO_2 , collegato all'ingresso di Set va ad 1 mentre l'ingresso di Reset rimane uguale a zero (riga (a) della tabella 13.1). Con ciò l'uscita \bar{Q} del flip-flop va a 0, il transistor T_1 si interdice ed il ciclo ricomincia. È facile verificare che la durata (T_1) della fase in cui l'uscita è alta è pari a: $\tau_1 \ln 2$, mentre quella (T_2) della fase in cui l'uscita è bassa è pari a: $\tau_2 \ln 2$. Il periodo è quindi: $T = (\tau_1 + \tau_2) \ln 2$, mentre il *duty cycle*, definito come:

$$D.C. = \frac{T_1}{T_1 + T_2}$$

è uguale a:

$$\frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}$$

L'andamento delle tensioni V_P e V_{out} è quello mostrato in figura 13.3. Vediamo che l'andamento della tensione V_P è quella tipica della carica e scarica di un condensatore, mentre V_{out} è un'onda rettangolare.

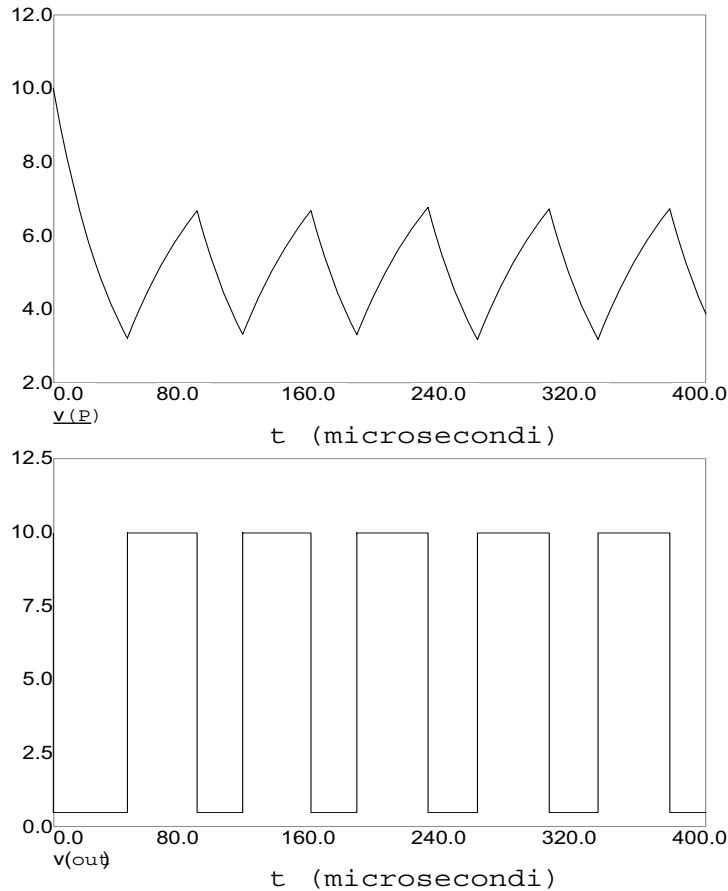


Figura 13.3: Andamento temporale della tensione ai capi del condensatore V_P (grafico in alto) e all'uscita V_{out} (grafico in basso) del multivibratore astabile di figura 13.2.

Con una semplice modifica, quale quella mostrata in figura 13.4, si può ottenere un multivibratore astabile con duty-cycle variabile. Nell'esempio, la serie delle resistenze $R_1 - R_2$ di figura 13.2 è sostituita dalla serie $R_4 - R_1$, dove R_1 è il ramo sinistro del potenziometro R_P , durante la fase di carica del condensatore C_1 , mentre è sostituita dalla serie $R_3 - R_2$ durante la fase di scarica. La carica del condensatore C_1 è caratterizzata quindi da una costante di tempo:

$$\tau_1 = (R_4 + R_1)C_1$$

La scarica avviene invece con una costante di tempo:

$$\tau_2 = (R_3 + R_2)C_1$$

Ruotando il potenziometro R_P si può quindi modificare il duty-cycle del segnale in uscita. Si può verificare che, con i valori delle resistenze e delle capacità indicati in figura, la frequenza di oscillazione è di 100 Hz ed il duty-cycle può esser fatto variare tra lo 0.1% ed il 99.9%.

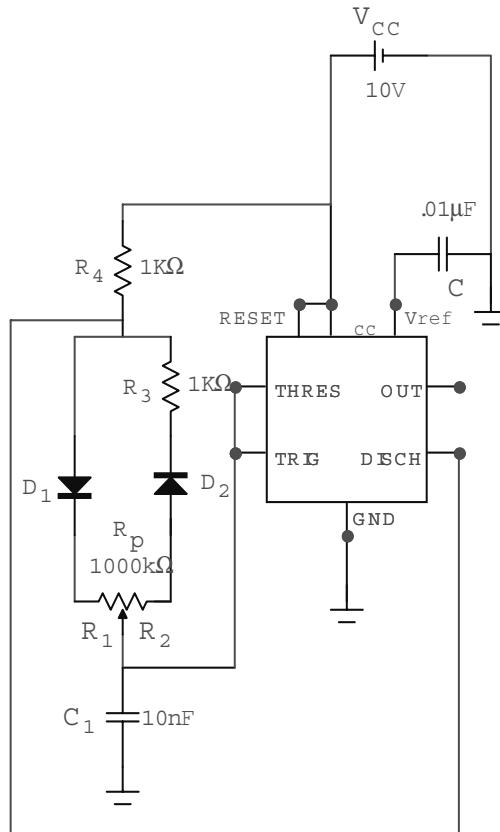


Figura 13.4: Multivibratore astabile con duty-cycle regolabile tramite il potenziometro $R_1 - R_2$.

13.2 Multivibratore monostabile

Un circuito monostabile (*one-shot*) può esser ottenuto utilizzando il 555 nella configurazione di figura 13.5.

Ammettiamo infatti che, in condizioni di riposo, sia $V_{in} > 1/3V_{cc}$. L'uscita del comparatore inferiore nel 555 sarà allora bassa ed $S=0$. Se ammettiamo inoltre che C sia scarico, avremo $V_P = 0$ e l'uscita del comparatore superiore sarà bassa ($R=0$) (riga (b) della tabella 13.1). Con ciò, lo stato del FF non cambia. Se quindi inizialmente è $Q = 0$, $\bar{Q} = 1$, tale stato rimarrà inalterato e l'uscita (OUT) del 555 sarà basso. Se il condensatore C fosse stato carico, con $V_P > 2/3V_{cc}$, l'uscita del comparatore superiore sarebbe stata alta ($R=1$) e quindi avremmo avuto $\bar{Q} = 1$. Con ciò, il transistor d'uscita del 555 sarebbe andato in saturazione, il che avrebbe riportato V_P a zero. Vediamo così che lo stato $Q = 0$, $\bar{Q} = 1$ è uno stato stabile del sistema.

Se ora inviamo in ingresso un impulso di tensione *inferiore ad $1/3V_{cc}$* l'uscita del comparatore inferiore diverrà alta ed il FF verrà ad essere *settato* ($Q = 1$, $\bar{Q} = 0$), corrispondenti alla riga (a) della tabella 13.1). L'uscita del 555 diverrà alta. Ora il transistor d'uscita del 555 sarà interdetto ed il condensatore comincerà a caricarsi

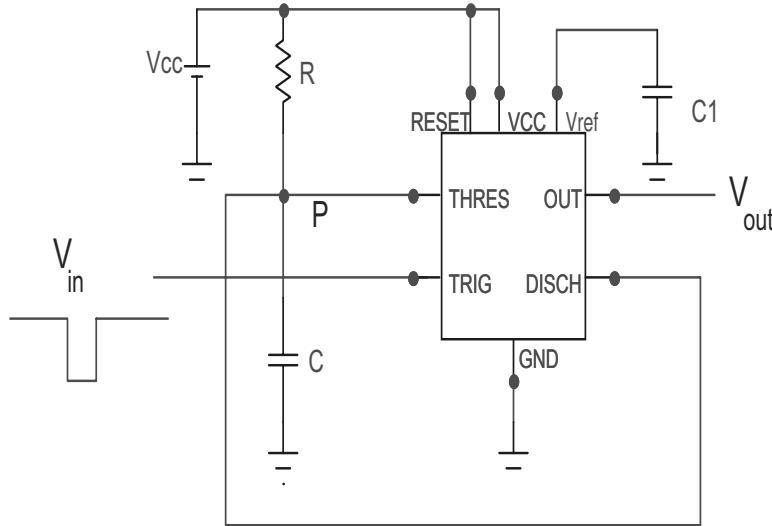


Figura 13.5: Multivibratore monostabile (generatore di impulsi) realizzato con un timer 555 ed elementi passivi.

con costante di tempo $\tau = RC$. Avremo cioè:

$$V_P = V_{cc} (1 - e^{-t/\tau})$$

Se ora V_{in} risale fino a superare $1/3V_{cc}$ l'uscita del comparatore inferiore passerà al livello basso ($S=0$) ma, poichè R è ancora uguale a 0, lo stato del FF non cambia. Quando però la tensione V_P raggiunge il valore $2/3V_{cc}$, l'uscita del comparatore superiore passa al livello alto ($R=1$), il FF commuta ed avremo $Q = 0$, $\bar{Q} = 1$ (riga d della tabella 13.1). Il condensatore si scarica rapidamente attraverso il transistor d'uscita del 555, ora in saturazione.

Vediamo che l'uscita del 555 rimane alta per il tempo necessario affinchè la tensione sul condensatore passi dal valore iniziale ($V_P = 0$) al valore $2/3V_{cc}$. La durata T dell'impulso in uscita è cioè data da:

$$V_{cc} (1 - e^{-T/\tau}) = \frac{2}{3}V_{cc}$$

cioè:

$$T = \ln 3 \cdot \tau = \ln 3 \cdot RC$$

Perchè il circuito funzioni correttamente occorre che l'impulso di trigger sia più corto di T .

Forme d'onda tipiche per questo circuito sono mostrate in figura 13.6. Qui il grafico superiore è la forma d'onda applicata in ingresso, quello intermedio l'uscita e quello inferiore l'andamento della tensione $V_P = V_c$.

Un'applicazione tipica di questo circuito è come *pulse stretcher*; esso è cioè adoperato per produrre degli impulsi di durata predeterminata, a partire da impulsi di trigger di breve durata.

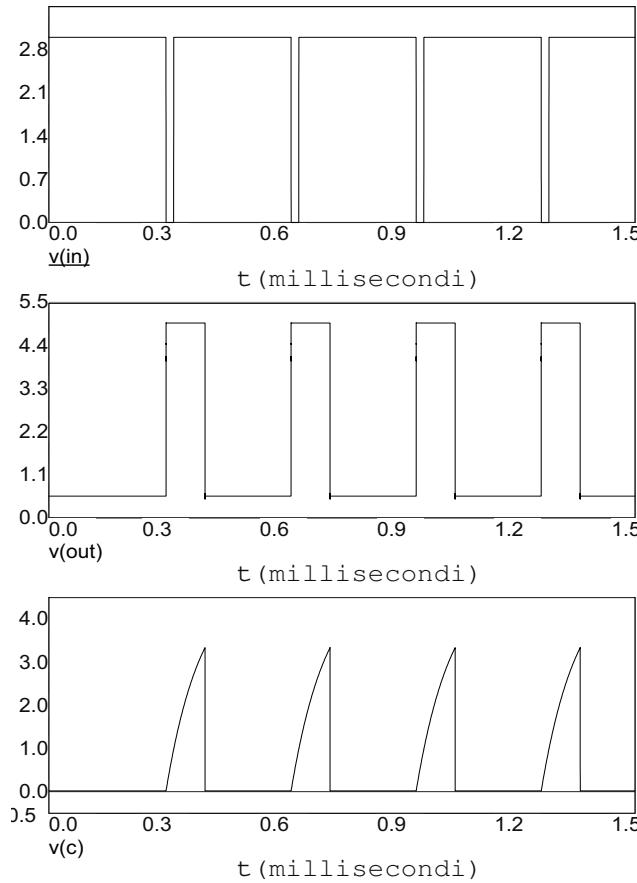


Figura 13.6: Andamento temporale della tensione in ingresso (grafico superiore), in uscita (grafico intermedio) ed ai capi del condensatore (grafico inferiore) del circuito multivibratore monostabile di figura 13.5.

13.3 Trigger di Schmitt

Un’ulteriore applicazione del 555 è come circuito di trigger, con soglia relativa alla transizione dell’uscita dal livello basso a quello alto superiore alla soglia relativa alla transizione opposta. Esso è cioè un *Trigger di Schmitt*, di cui abbiamo già incontrato un esempio nella sezione relativa agli amplificatori operazionali. Il funzionamento del circuito è estremamente semplice. Se i piedini 2 e 6 del 555 (cioè gli ingressi di threshold e di trigger) sono uniti insieme ed adoperati come ingresso V_{in} , si vede che se V_{in} supera i $2/3V_{cc}$ si ha $S = 0$, $R = 1$, con che Q diviene basso. Se ora V_{in} scende sotto $2/3V_{cc}$, lo stato del FF non cambia, poiché ora sia R che S sono 0. La transizione allo stato complementare (cioè Q alto) si ha soltanto quando V_{in} scende sotto il valore $1/3V_{cc}$. Questo è il comportamento appunto di un trigger di Schmitt. Se si desidera che i due livelli di confronto non siano $2/3V_{cc}$ ed $1/3V_{cc}$, è sufficiente interporre tra la sorgente del segnale e l’ingresso del 555 un partitore o un amplificatore. La figura 13.7 mostra il segnale all’uscita di un tale circuito, quando il segnale applicato in ingresso sia una sinusoide. Nell’esempio di figura il segnale in uscita è stato invertito (nel circuito di trigger che abbiamo descritto, il segnale all’uscita del 555 va basso quando l’ingresso supera la soglia alta, e viceversa).

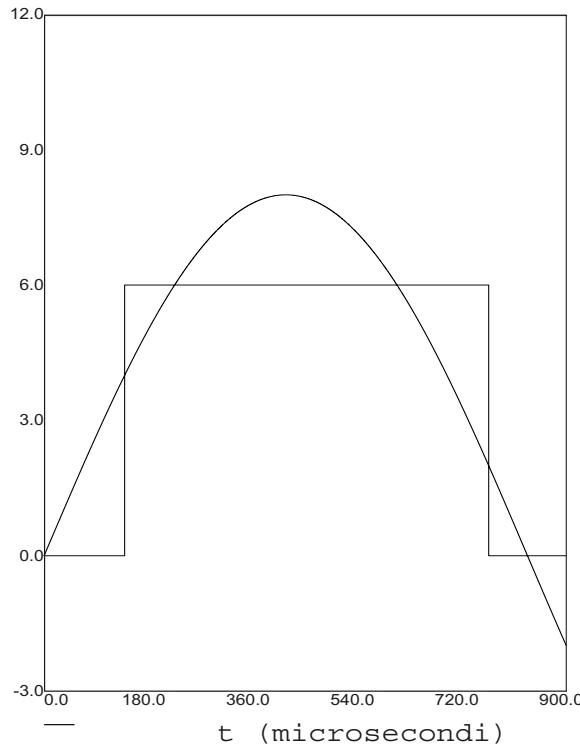


Figura 13.7: Andamento temporale del segnale in uscita da un circuito trigger di Schmitt sovrapposto al segnale sinusoidale inviato in ingresso.

13.4 Convertitore tensione-frequenza

Nelle applicazioni del 555 che abbiamo discusso il piedino 5 (V_{ref}) dell'integrato non veniva utilizzato. Esso era collegato a massa attraverso una capacità, che serviva a mantenere costante la tensione nel punto A (ingresso V_{ref} ; vedasi la figura 13.1). Se nel circuito astabile di figura 13.2, tale ingresso viene collegato ad una sorgente di tensione variabile, le tensioni di riferimento dei due comparatori presenti nel 555 non saranno più uguali a $2/3V_{cc}$ ed $1/3V_{cc}$ ma rispettivamente uguali a V_{ref} e $1/2V_{ref}$. Di conseguenza, durante il processo di carica e scarica del condensatore C_1 nel circuito di figura 13.2, la commutazione avverrà a tempi diversi, legati al valore che nel dato istante ha V_{ref} .

Un esempio di tale circuito è mostrato in figura 13.8 dove $V_{ref} = V_{sin}$. Tale circuito può essere adoperato come convertitore tensione-frequenza. Se il segnale applicato è ad esempio (come in figura) sinusoidale, il segnale in uscita sarà un segnale la cui frequenza varia in modo sinusoidale. Si noti che in tale circuito varia anche la durata del segnale in uscita. Se si vuole che il segnale in uscita abbia frequenza variabile in modo sinusoidale ma durata fissa, sarà sufficiente far seguire il circuito da un monostabile.

In figura 13.9 mostriamo il segnale sinusoidale applicato all'ingresso V_{sin} di un tale circuito, insieme al segnale presente in uscita e, nel grafico inferiore, a quello presente all'uscita del monostabile che segue il convertitore tensione-frequenza.

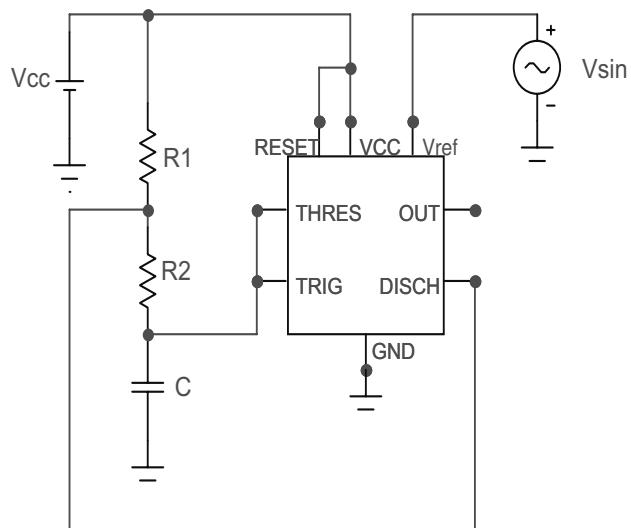


Figura 13.8: Convertitore tensione frequenza, il segnale di riferimento è indicato con V_{sin} .

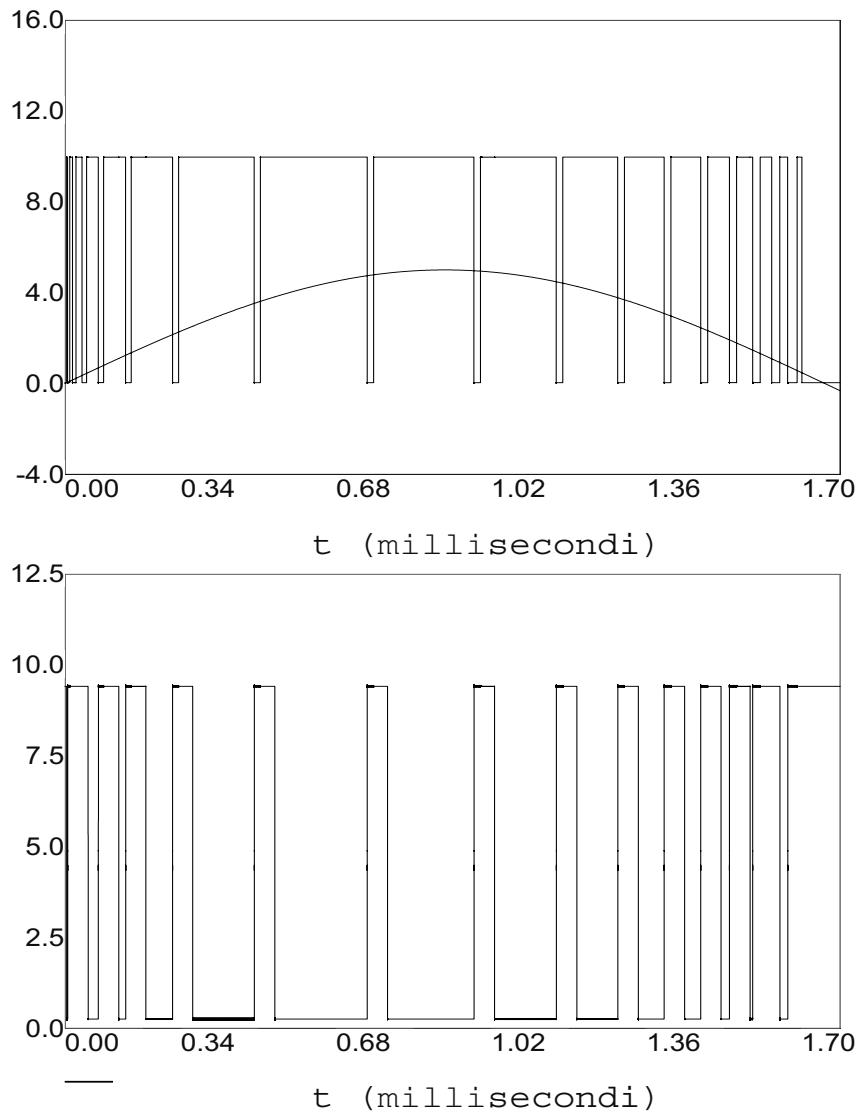


Figura 13.9: Grafico superiore: andamento temporale del segnale sinusoidale applicato come V_{ref} sovrapposto al segnale presente in uscita nel circuito di figura 13.8; grafico inferiore: andamento temporale del segnale in uscita al circuito monostabile che segue il convertitore tensione-frequenza.

Capitolo 14

Filtri attivi

14.1 Introduzione

Un filtro è un dispositivo che trasmette inalterati segnali aventi frequenze entro un determinato campo (filtri *passa-banda*) o al di sopra di un valore determinato (filtri *passa-alto*) o ancora al di sotto di un valore prefissato (filtri *passa-basso*). Si possono anche avere filtri che lasciano passare solo segnali aventi frequenze poste al di fuori di un campo prefissato (filtri *elimina-banda*).

Un filtro può esser realizzato a partire da soli componenti passivi (resistenze, capacità o induttanze). In tal caso si parla di *filtri passivi*. È ormai comune uso adoperare, insieme ad elementi passivi, anche elementi attivi, quali transistor o amplificatori operazionali. Tale scelta offre una maggiore flessibilità nella realizzazione di filtri con particolari caratteristiche. Questi sono noti come *filtri attivi*.

A causa della limitata risposta in frequenza degli operazionali, i filtri attivi sono adoperati tipicamente a basse frequenze (soprattutto a frequenze audio) fino ad un massimo di qualche centinaio di kHz. È possibile, facendo uso di amplificatori operazionali veloci, realizzare filtri attivi che operano fino a diversi MHz, ma ragioni di costo ne limitano l'uso. Per frequenze elevate si fa quindi uso di filtri passivi. In questo capitolo esamineremo le caratteristiche dei principali tipi di filtri attivi, quali ad esempio quelli di Butterworth e di Bessel. Per un'analisi più approfondita dell'argomento si suggerisce di consultare le referenze citate.

Faremo ampio uso della tecnica delle trasformate di Laplace, e dei concetti connessi con la rappresentazione grafica della risposta dei circuiti (diagrammi di Bode e di Nyquist).

Si sta diffondendo in aggiunta, in questi ultimi anni, l'uso di quelli che sono noti come *filtri digitali*. Una trattazione dettagliata di tale tipo di filtri ci porterebbe ben oltre gli scopi di questo corso.

14.1.1 Caratteristiche di risposta dei filtri

I quattro tipi di filtro cui abbiamo accennato nella sezione precedente dovrebbero idealmente avere delle funzioni di trasferimento caratterizzate da un andamento piatto all'interno della banda passante e da una transizione infinitamente ripida verso la banda bloccata. Tale andamento ideale è schematizzato nella figura 14.1 dove sono mostrati i diagrammi di Bode per il modulo della funzione di trasferimento

$G(\omega)$ relativi ai quattro tipi di filtri.

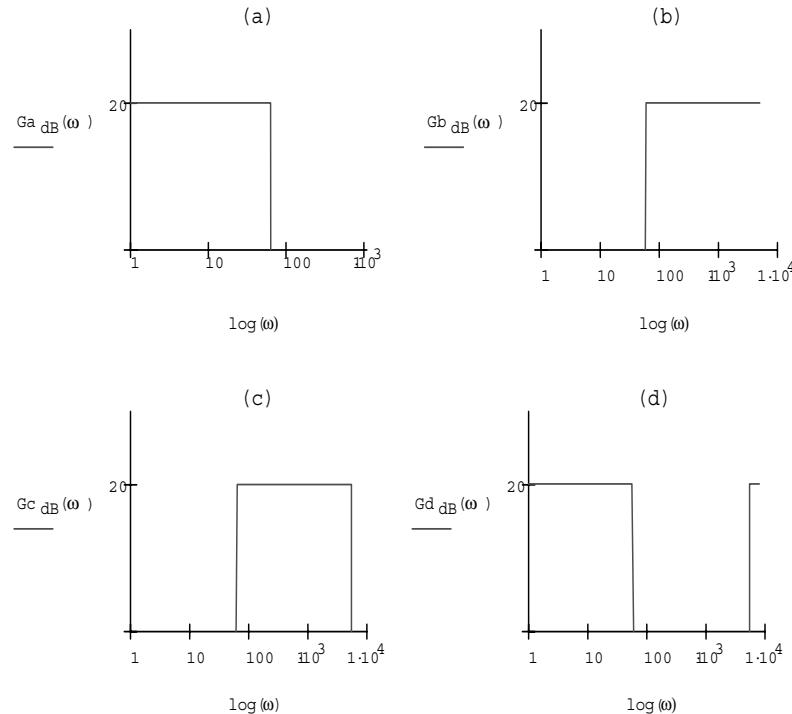


Figura 14.1: Andamento ideale della funzione di trasferimento relativa ai quattro tipi di filtro descritti. Figura (a): passa-basso, figura (b): passa alto, figura (c): passa-banda, figura (d): elimina-banda.

La figura (a) si riferisce al caso di un filtro passa-basso, la (b) a quello di un filtro passa-alto, la (c) ad un filtro passa-banda e la (d) ad uno elimina-banda.

In realtà nessun filtro reale ha funzioni di trasferimento come quelle mostrate in figura. I fronti di salita e di discesa hanno nella pratica pendenze che vanno da 6 dB/ottava a qualche decina di dB/ottava. Inoltre l'andamento all'interno della banda passante non è mai piatto, ma esibisce in genere delle oscillazioni (“ripple”) più o meno ampie. Un esempio di curva di risposta reale è quello mostrato in figura 14.2 (relativo al caso di un filtro passa-banda).

La banda passante (BW) è definita come l'intervallo di frequenze compreso tra i punti in cui il modulo del guadagno è diminuito di 3 dB rispetto al valor medio a centro banda. L'ampiezza del canale di ripple, mostrato in figura, è espresso in dB e varia tra qualche frazione di dB e 1.5-2.0 dB. La pendenza dei fronti di salita e di discesa, come già detto varia tra 6 dB/ottava e qualche decina di dB/ottava.

Il modulo della funzione di trasferimento $G(f)$ (o equivalentemente $G(\omega)$) non è l'unica caratteristica importante di un filtro. È altrettanto importante che lo sfasamento introdotto dal filtro aumenti linearmente all'aumentare della frequenza. Solo in tal modo, infatti, le componenti di diversa frequenza presenti nel segnale subiranno tutte il medesimo ritardo temporale e nessuno sfasamento relativo.

Consideriamo infatti due componenti di frequenze angolari (ω_1, ω_2), fasi (ϕ_1, ϕ_2) ed ampiezze (A_1, A_2):

$$a_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

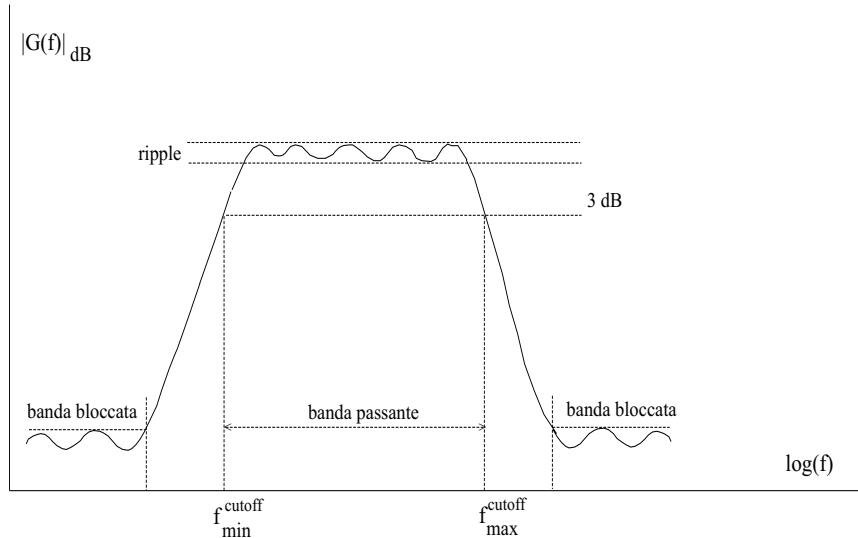


Figura 14.2: Esempio della funzione di trasferimento relativa ad un filtro reale di tipo passabanda. Si notino le oscillazioni “ripple” nella curva.

$$a_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Ammettiamo che all'interno della banda passante sia $|G(\omega)|$ costante e sia lo sfasamento introdotto dalla $G(\omega)$ dato da:

$$\phi = k\omega$$

con k una costante. Le due componenti all'uscita del filtro saranno:

$$a'_1(t) = |G| A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1 + k\omega_1)$$

$$a'_2(t) = |G| A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2 + k\omega_2)$$

ovvero:

$$a'_1(t) = |G| A_1 \cos[\omega_1(t+k) + \phi_1]$$

$$a'_2(t) = |G| A_2 \cos[\omega_2(t+k) + \phi_2]$$

Vediamo che le due componenti hanno in uscita la stessa frequenza che esse avevano in ingresso e la stessa differenza di fase: $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. Esse sono entrambe “ritardate” temporalmente di una medesima quantità k^1 . Il segnale risultante dalla sovrapposizione di un gran numero di componenti di questo tipo non risulterà quindi deformato. Esiste un ulteriore tipo di filtro, noto come “passa tutto” (all-pass filter), che ha una risposta $|G(\omega)|$ indipendente dalla frequenza, ma uno sfasamento che è funzione di questa. Tali filtri vengono adoperati per compensare sfasamenti dipendenti dalla frequenza, introdotti da linee di trasmissione quali le linee telefoniche. I filtri passa-tutto sono anche noti come “correttori di fase” o “equalizzatori di ritardo”.

¹anticipate se k è negativo.

Come vedremo, è possibile realizzare filtri che hanno una banda passante sufficientemente piatta, ma non una buona relazione di fase, o anche filtri con una relazione di fase lineare, ma con un certo ammontare di ripple nella banda passante.

Per un'illustrazione esauriente dei vantaggi e dei limiti dei diversi tipi di filtri attivi, si suggerisce una lettura del capitolo 5 del libro di Horowitz- Hill [10].

14.2 Generalità sui filtri

Un generico filtro è caratterizzato da una funzione di trasferimento esprimibile come rapporto tra due polinomi nella variabile complessa s :

$$G(s) = \frac{a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \cdots + a_0}{s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \cdots + b_0}$$

dove i coefficienti dei polinomi sono reali ed inoltre è $M \leq N$.

N è noto come *l'ordine* del filtro.

Se indichiamo con z_1, z_2, \dots, z_M le radici del polinomio a numeratore e con p_1, p_2, \dots, p_N quelle del polinomio a denominatore, e ricordiamo che tali radici sono o reali o, se complesse, presenti con le complesse coniugate, la funzione di trasferimento potrà esser messa nella forma:

$$G(s) = \frac{a_M (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)}$$

i valori z_1, z_2, \dots, z_M sono gli *zeri* della funzione di trasferimento, p_1, p_2, \dots, p_N i *poli*. Nel piano complesso $s = \sigma + j\omega$, gli zeri possono esser dovunque, i poli possono esser presenti solo nel semipiano sinistro ($\sigma \leq 0$). Se tale condizione non fosse soddisfatta, il sistema non sarebbe stabile.

Gli zeri debbono corrispondere a frequenze poste nella zona di "banda bloccata".

Se vogliamo ottenere la risposta in frequenza del filtro, dobbiamo sostituire alla variabile s il valore $j\omega$.

In molti casi possiamo, da un semplice esame della funzione di trasferimento, capire se il filtro sia un passa-basso, passa-alto, etc. Ad esempio, la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{as}{s^2 + 5s + 3}$$

con la sostituzione $s = j\omega$, ha modulo e fase dati rispettivamente da:

$$|G(\omega)| = \frac{a\omega}{\sqrt{(3 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}}$$

$$\tan \phi(\omega) = \frac{3 - \omega^2}{5\omega}$$

Vediamo che il modulo di $G(\omega)$ per $\omega \rightarrow \infty$ tende a zero come $1/\omega$. Si esprime ciò dicendo che la $G(\omega)$ ha uno zero semplice all'infinito. Inoltre, per $\omega \rightarrow 0$ essa tende a zero. Cioè la $G(\omega)$ ha uno zero semplice nell'origine. Si tratta in definitiva di un filtro che taglia ad alta ed a bassa frequenza, cioè di un filtro passa-banda.

Nell'esempio appena fatto, il fatto che $|G(\omega)|$ decresca al crescere di ω come $1/\omega$ implica che, nel diagramma di Bode l'andamento sia di -20 dB per decade (o -6 dB per ottava).

Nel caso generale di un filtro passa-basso, se la decrescita di $|G(\omega)|$ và come $1/\omega^n$, essa sarà caratterizzata nel diagramma di Bode da una pendenza di $-n \cdot 20 \text{ dB/decade}$. In tal caso il sistema ha n zeri all'infinito. In generale il numero degli zeri all'infinito, come si può facilmente vedere, è dato da N-M. Infatti, per $s \rightarrow \infty$ la $G(s)$ tende ad a_M/s^{N-M} .

Può accadere che non vi siano valori finiti della frequenza, in corrispondenza ai quali l'attenuazione sia infinita. Ciò accade se nella $G(s)$ tutti gli zeri sono all'infinito, come nel caso di:

$$G(s) = \frac{a_M}{s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \dots + b_0}$$

Si parla allora di un filtro *con solo poli* (“all-pole filter”).

14.2.1 Esempi di filtri del primo e del secondo ordine

Conosciamo i più semplici dei filtri passivi: il circuito RC passa-basso e quello passa-alto, mostrati in figura 14.3, le cui funzioni di trasferimento, nello spazio delle frequenze, sono date da:

$$|G_{LP}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

$$\Phi_{LP}(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$|G_{HP}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$$\Phi_{HP}(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

con: $\omega_0 = 1/RC$

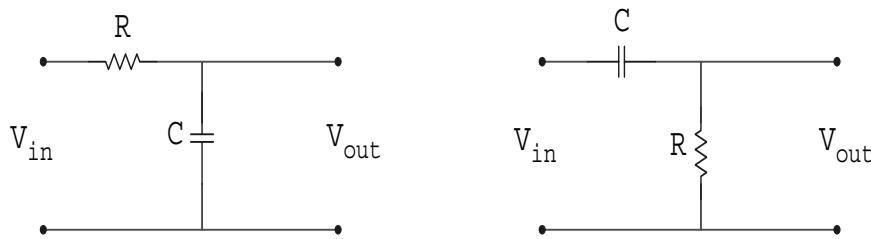


Figura 14.3: Esempi di filtri del primo ordine. Il circuito RC di sinistra è di tipo passa-basso, mentre quello di destra è di tipo passa-alto.

Il filtro passa-basso è caratterizzato da una frequenza di taglio superiore (frequenza alla quale il guadagno si riduce di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore che esso ha a basse frequenze) pari a $f_0 = \omega_0/2\pi$. La curva asintotica che descrive $|G(\omega)|$ a frequenze angolari $\omega \gg \omega_0$ ha inoltre, come è facile verificare, una pendenza (negativa) di 6 dB/ottava (20 dB/decade).

Analogamente il filtro passa-alto è caratterizzato da una frequenza di taglio inferiore $f_0 = \omega_0/2\pi$. La curva che descrive l'andamento di $|G(\omega)|$ a frequenze angolari $\omega \ll \omega_0$ ha una pendenza (positiva) di 6 dB/ottava (20 dB/decade). Un filtro passa-banda può essere ottenuto mettendo in serie un filtro passa-basso ed uno passa-alto, come mostrato in figura 14.4.

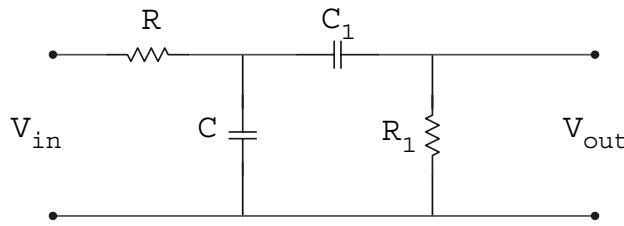


Figura 14.4: Esempio di filtro passa-banda ottenuto mettendo in cascata un filtro passa-basso ed un filtro passa-alto del primo ordine.

Nel progettare un tale filtro occorrerà naturalmente far sì che la frequenza di taglio f_{max} della sezione passa-basso sia maggiore della frequenza di taglio f_{min} della sezione passa-alto.

Quelli ora descritti sono tutti filtri *del primo ordine*: la funzione di trasferimento del filtro passa-basso, scritta in termini della variabile complessa s:

$$G(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

ha un polo semplice (reale) in $s = -\omega_0$.

Analogamente, la funzione di trasferimento del filtro passa-alto, scritta in termini della variabile complessa s è:

$$G(s) = \frac{s}{s + \omega_0}$$

ed ha uno zero nell'origine ed un polo semplice in $s = -\omega_0$.

La pendenza di ± 20 dB/decade nei rispettivi diagrammi di Bode per il modulo è in entrambi i casi legata appunto alla presenza di un solo polo. Se si vuole una transizione più netta tra la banda passante e la banda bloccata, occorre ricorrere a filtri di ordine più elevato.

La forma generale della funzione di trasferimento per un filtro del primo ordine:

$$G(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + \omega_0}$$

è caratterizzata da un polo in $s = -\omega_0$, uno zero in $s = -a_0/a_1$ ed un guadagno ad alte frequenze che tende ad a_1 . Vediamo che il denominatore determina la regione di frequenze di interesse, mentre il numeratore determina il tipo di filtro (passa-basso, passa alto, etc.). È infatti immediato vedere che se è $a_1 = 0$, si ha un filtro passa-basso, se $a_0 = 0$ si ha un filtro passa-alto, se sia a_1 che a_0 sono diversi da zero, si ha un filtro passa-banda. Nel piano complesso, questi tre diversi tipi di filtri sono caratterizzati dalle configurazioni poli-zeri, mostrate in figura 14.5.

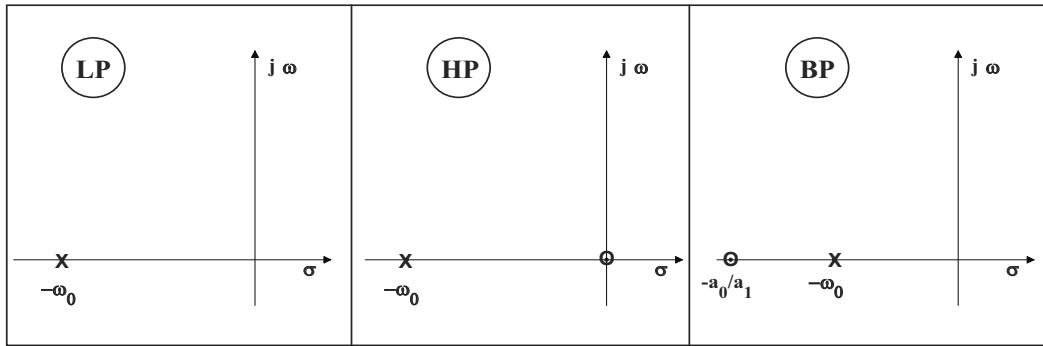


Figura 14.5: Diagrammi poli-zeri per i tre semplici filtri del primo ordine discussi: a sinistra, passa-basso; al centro, passa-alto; a destra, passa-banda.

Notiamo che un filtro (passivo) passa-basso con buone caratteristiche (taglio in frequenza abbastanza netto) può essere ottenuto utilizzando un circuito LRC come quello di figura 14.6(a).

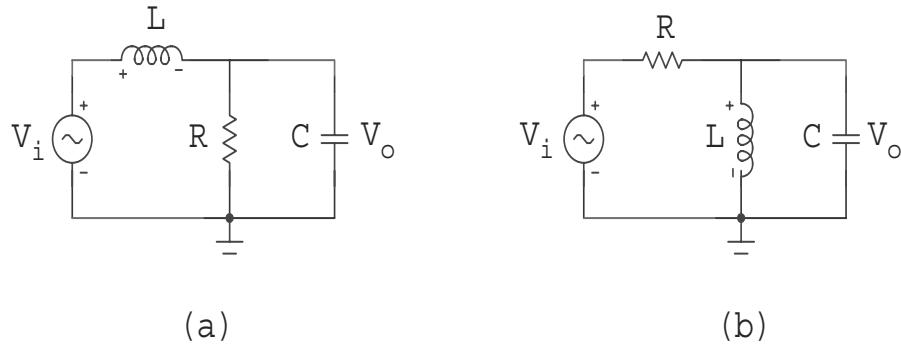


Figura 14.6: Esempi di filtri passivi di tipo RLC. (a): filtro passa-basso, (b): filtro passa-banda.

La funzione di trasferimento di questo circuito è:

$$G(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC} \quad (14.1)$$

Confrontando questa con l'equazione tipica di una funzione di trasferimento con due poli (vedi capitolo 3):

$$G(s) = \frac{A_0 \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2} \quad (14.2)$$

troviamo la corrispondenza:

$$\omega_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_0 \rightarrow \omega_0 RC \rightarrow R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Potrà avversi un picco nella risposta se $Q_0 > 1/\sqrt{2}$, cioè:

$$R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$$

Come visto a pagina (65), il picco diventa tanto più accentuato quanto più elevato è il valore di Q_0 . L'andamento tipico della curva di risposta (plot di Bode per il modulo) è mostrato in figura 14.7 per il caso $Q_0 = 1$.

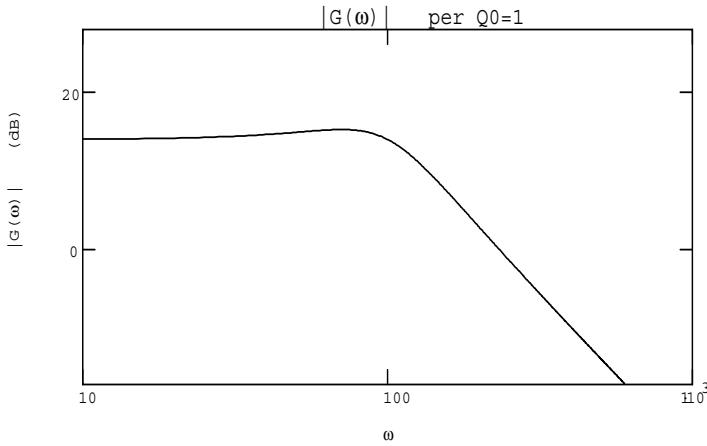


Figura 14.7: Diagramma di Bode del modulo della risposta del filtro RLC descritto nel testo, nel caso $Q_0 = 1$.

Il massimo si ha per:

$$\omega_{max}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2} \right)$$

cioè:

$$\omega_{max}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{2C^2R^2}$$

In modo analogo, dall'analisi del circuito RCL di figura 14.6(b), ricaviamo la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s/RC}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC} \quad (14.3)$$

che realizza un filtro passa-banda di ordine 2.

I filtri attivi eliminano alcuni inconvenienti presenti nei filtri passivi:

- a) l'uso di induttanze, che sono ingombranti, ed inoltre risentono dei disturbi elettromagnetici inevitabilmente presenti;
- b) l'attenuazione legata all'impedenza del filtro passivo;
- c) la dipendenza della risposta dalle impedenze d'ingresso e d'uscita degli amplificatori cui il filtro è accoppiato. L'elevata impedenza d'ingresso e la bassa impedenza d'uscita di un operazionale rende agevole l'accoppiamento di più filtri diversi. Ciò è importante poiché consente di realizzare filtri di ordine più elevato (cioè con un maggior numero di poli nella funzione di trasferimento) ponendo in cascata più filtri di ordine inferiore.

14.3 Funzione biquadratica di trasferimento

Come abbiamo visto, la funzione di trasferimento di un filtro passa-basso LRC ha la forma (equazione (14.2)):

$$G(s) = \frac{A_0 \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2}$$

del rapporto tra un termine costante ed un polinomio di secondo grado in s . Si può facilmente verificare che la funzione di trasferimento di un generico filtro del secondo ordine (passa-alto, passa-basso, passa-banda, elimina-banda) può essere espressa come il rapporto tra due polinomi di secondo grado in s :

$$G(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (14.4)$$

Se infatti i termini a_2 ed a_1 sono nulli, possiamo facilmente vedere che siamo in presenza di un filtro passa-basso: al tendere di $|s| = \omega$ ad ∞ la $|G(\omega)|$ tende a 0.

Se a_2 ed a_0 sono nulli ed a_1 è diverso da 0, la $|G(\omega)|$ tenderà a 0 sia per $\omega \rightarrow \infty$ che per $\omega \rightarrow 0$. Abbiamo cioè un filtro passa-banda.

Se a_2 è l'unico coefficiente diverso da 0, vediamo che $|G(\omega)| \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow 0$. Abbiamo cioè un filtro passa-alto.

Se infine a_1 è l'unico coefficiente nullo, vediamo che la $|G(\omega)|$ tende a valori finiti per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$. Abbiamo così un filtro elimina-banda.

La funzione biquadratica (14.4) è più convenientemente scritta nella forma (analogia alla (14.2) relativa al filtro passa-basso):

$$G(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 (\omega_0/Q_0) s + k_0 \omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q_0) s + \omega_0^2} \quad (14.5)$$

Nel caso dei quattro tipi di filtro descritti in precedenza, questa acquista la forma indicata nella corrispondente riga della tabella 14.1.

La larghezza di banda (BW) è definita, per un filtro passa-banda, come l'ampiezza del campo di frequenze che si estende fino a quei valori in corrispondenza a cui il guadagno si riduce di 3 dB rispetto al valore che esso ha a centro banda. Si può facilmente vedere che nel caso del filtro passa banda la BW è data da:

$$BW = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (14.6)$$

Per dimostrarlo, partiamo dall'espressione della $|G(\omega)|$ per il filtro passa-banda:

$$|G(\omega)| = \frac{(\omega_0/Q_0)\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^2 / Q_0^2}} \quad (14.7)$$

che per $\omega = \omega_0$ vale 1.

Indichiamo con ω' ed ω'' i due valori rispettivamente minore e maggiore di ω_0 , nei quali sia: $|G(\omega')| = |G(\omega'')| = 1/\sqrt{2}$.

Per un generico valore di ω , la condizione che sia $|G(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ porta a:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q_0^2}$$

tipo di filtro	k_2	k_1	k_0	$G(s)$
passa-basso	0	0	1	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2}$
passa-alto	1	0	0	$\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2}$
passa-banda	0	1	0	$\frac{\frac{\omega_0}{Q_0} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2}$
elimina-banda	1	0	1	$\frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2}$

Tabella 14.1: Funzioni di trasferimento per alcuni tipi di filtri del secondo ordine

cioè:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \frac{\omega \omega_0}{Q_0}$$

dove andrà scelto il segno (+) se $\omega < \omega_0$ (cioè nel caso di ω'); andrà invece scelto il segno (-) nel caso di ω'' .

Nel primo caso l'equazione diventa:

$$\omega'^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} \omega' - \omega_0^2 = 0$$

la cui soluzione (positiva) è:

$$\omega' = \frac{\omega_0}{2Q_0} \left[\sqrt{1 + 4Q_0^2} - 1 \right] \quad (14.8)$$

Nel secondo caso avremo invece l'equazione:

$$\omega''^2 - \frac{\omega_0}{Q_0} \omega'' - \omega_0^2 = 0$$

la cui soluzione (positiva) è:

$$\omega'' = \frac{\omega_0}{2Q_0} \left[\sqrt{1 + 4Q_0^2} + 1 \right] \quad (14.9)$$

Vediamo che la larghezza di banda, espressa in termini della frequenza angolare, è:

$$BW = \omega'' - \omega' = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

Ovviamente la larghezza di banda in termini della frequenza sarà:

$$BW = \frac{\omega_0}{2\pi Q_0}$$

Vediamo che la larghezza della banda passante non ha ugual valore nella zona a sinistra ed a destra di ω_0 . Abbiamo infatti:

$$\omega_0 - \omega' = \frac{\omega_0}{2Q_0} \left[1 + \left(2Q_0 - \sqrt{1 + 4Q_0^2} \right) \right]$$

mentre:

$$\omega'' - \omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q_0} \left[1 - \left(2Q_0 - \sqrt{1 + 4Q_0^2} \right) \right]$$

Ad esempio, per $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$ e $Q_0 = 10$ avremo:

$$\omega_0 - \omega' = \frac{1000}{20} \left(1 - \sqrt{401} + 20 \right) = 48.75 \text{ rad/s}$$

$$\omega'' - \omega_0 = \frac{1000}{20} \left[1 + \sqrt{401} - 20 \right] = 51.25 \text{ rad/s}$$

Ovviamente, la differenza tra $\omega_0 - \omega'$ e $\omega'' - \omega_0$ diviene tanto minore quanto maggiore è il valore di Q_0 .

Analogamente, per un filtro elimina-banda, la banda-bloccata è quella compresa tra i valori ω' ed ω'' in corrispondenza ai quali il modulo della funzione di trasferimento è ridotto di 3 dB rispetto al valore che esso ha a frequenze molto basse o molto alte. Si può facilmente vedere che, per questo tipo di filtro l'ampiezza della banda-bloccata è data dalla stessa espressione che fornisce la banda passante nel caso appena esaminato.

$$\omega'' - \omega' = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

Partiamo infatti dall'espressione della $G(\omega)$ per tale filtro:

$$G(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q_0}}$$

il cui modulo è:

$$|G(\omega)| = \frac{|\omega^2 - \omega_0^2|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q_0^2}}}$$

È facile vedere che questo vale 1 sia per $\omega \rightarrow 0$ che per $\omega \rightarrow \infty$. Per determinare la larghezza di banda dobbiamo quindi individuare i valori ω' ed ω'' (con $\omega' < \omega_0 < \omega''$) in corrispondenza ai quali tale modulo vale $1/\sqrt{2}$.

Da tale condizione segue:

$$Q_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \omega^2 \omega_0^2$$

cioè:

$$Q_0 (\omega_0^2 - \omega^2) = \pm \omega \omega_0$$

dove va scelto il segno (+) se $\omega_0 > \omega$, quello (-) se $\omega_0 < \omega$.

Nel primo caso ($\omega = \omega'$) scriveremo quindi:

$$\omega_0^2 - \omega'^2 = \omega' \omega_0 / Q_0$$

nel secondo ($\omega = \omega''$):

$$\omega_0^2 - \omega''^2 = -\omega'' \omega_0 / Q_0$$

Sottraendo membro a membro queste due equazioni, si ottiene:

$$\omega_0^2 - \omega'^2 - \omega_0^2 + \omega''^2 := (\omega' + \omega'') \omega_0 / Q_0$$

da cui:

$$\omega'' - \omega' = \omega_0 / Q_0$$

Si vede inoltre con facilità, facendo uso delle equazioni scritte, che le espressioni di ω' ed ω'' sono le stesse (formule (14.8) e (14.9)) già ottenute per il filtro passa-banda.

14.4 Corrispondenze tra tipi diversi di filtri

Sappiamo che un filtro RC passa-basso del primo ordine può esser trasformato nell'analogico passa-alto scambiando la resistenza con la capacità. Ciò può esser facilmente formalizzato come segue. La funzione di trasferimento del filtro passa-basso è:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_0} \quad (14.10)$$

con $\omega_0 = RC$. Il circuito che si ottiene da questo scambiando R con C ha come funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s/\omega_0}{1 + s/\omega_0} \quad (14.11)$$

che è quella di un filtro passa-alto.

Vediamo che è possibile trasformare la (14.10) nella (14.11) con la corrispondenza:

$$\frac{s}{\omega_0} \rightarrow \frac{\omega_0}{s} \quad (14.12)$$

È possibile verificare che ciò è vero anche per filtri di ordine più elevato. Ad esempio, il filtro passa-basso la cui funzione di trasferimento è mostrata nella prima riga della tabella data in sezione 14.3 diventa, in seguito all'applicazione della corrispondenza (14.12), il filtro passa-alto la cui funzione di trasferimento è data dalla seconda riga della medesima tabella.

Analoghe corrispondenze possono essere adoperate per trasformare un filtro passa-basso in uno passa-banda o elimina-banda.

Per ulteriori dettagli si suggerisce di consultare la referenza [11].

14.5 Il “ripple” nei filtri

Se in un filtro del secondo ordine è $Q_0 > 1/\sqrt{2}$, la curva di risposta (diagramma di Bode per il modulo) comincia a svilupparsi un massimo di cui abbiamo calcolato al capitolo 3 la posizione ω_{max} ed il valore:

$$G(\omega_{max}) = \frac{A_0 Q_0}{\sqrt{1 - 1/(4Q_0^2)}}$$

Si definisce “ripple” la deformazione della curva di risposta in prossimità di ω_{max} e si definisce “lunghezza del ripple” la quantità:

$$\epsilon = |G_{max}/A_0| = \frac{Q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}$$

Si definisce poi “lunghezza del canale di ripple” la pulsazione ω_c oltre la quale risulta $|G| < |A_0|$. Per la definizione delle variabili ϵ ed ω_c si veda la figura 14.8. Dall’equazione (3.18), nel capitolo 3, notiamo che ponendo:

$$|G|^2 = A_0^2$$

si trova:

$$\omega_c^2 = \omega_0^2 \left(2 - \frac{1}{Q_0^2} \right)$$

cioè:

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = \sqrt{2 - \frac{1}{Q_0^2}}$$

Vediamo da quest’equazione che la lunghezza del canale di ripple dipende da Q_0 . Inoltre:

$$\omega_{max}^2 = \frac{\omega_c^2}{2}$$

indipendentemente dal valore di Q_0 (purché sia $Q_0 > 1/\sqrt{2}$).

Per $Q_0 = 0.86$ troviamo $\omega_c = 0.80\omega_0$ ed $\epsilon = 1.06$

Per $Q_0 = 0.96$ troviamo $\omega_c = 0.95\omega_0$ ed $\epsilon = 1.12$

Un quadripolo avente $Q_0 > 1/\sqrt{2}$ viene detto di Chebyshev se il ripple ϵ è compreso tra 0.5dB e 3dB (cioè tra 1.06 e 1.41).

14.6 Conversione di impedenze tramite operazionali

Abbiamo visto come sia possibile realizzare filtri di ordine 2, facendo uso di elementi passivi R,L,C. In pratica è poco conveniente far uso di induttanze, a causa del loro ingombro e sensibilità al rumore. Si può invece “simulare” l’induttanza facendo uso di amplificatori operazionali ed elementi resistivi e capacitivi. Cominceremo col far vedere che un operazionale può modificare la natura dell’impedenza vista dalla sorgente del segnale. Consideriamo ad esempio il circuito di figura 14.9:

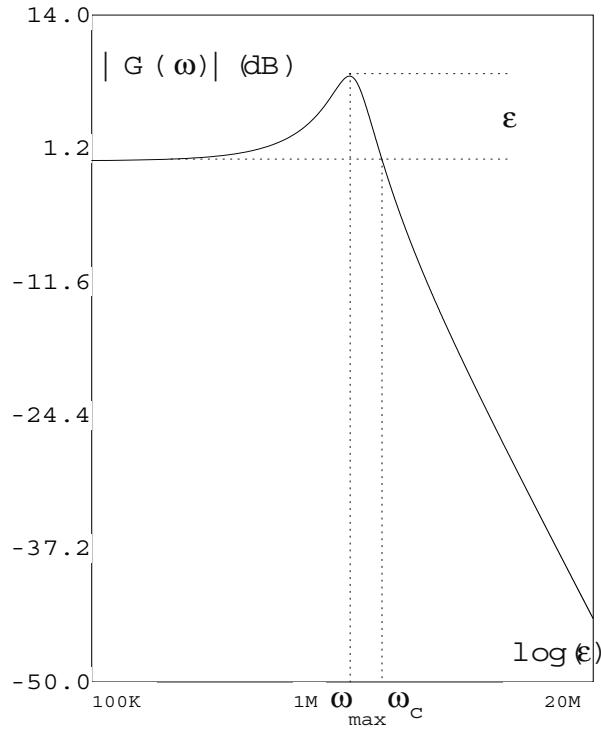


Figura 14.8: Esempio di possibile funzione di trasferimento per un filtro passa-basso del secondo ordine. La definizione delle quantità ω_c e ϵ descritte nel testo è facilmente deducibile dal grafico.

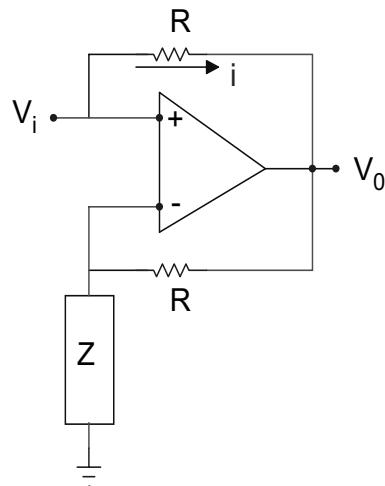


Figura 14.9: Il circuito, basato su operazionale, è utilizzato per invertire il segno di una impedenza. La sorgente, applicata all'ingresso invertente, vede infatti una impedenza pari a $-Z$. È noto come NIC: Negative Impedance Converter.

La corrente i vale:

$$i = \frac{v_+ - v_o}{R} \quad (14.13)$$

con:

$$v_+ = v_- = v_o \frac{Z}{R+Z} \quad (14.14)$$

da cui:

$$v_o = v_- \frac{R+Z}{Z} = v_i \frac{R+Z}{Z}$$

e:

$$v_i = v_o \frac{Z}{R+Z} \quad (14.15)$$

Dalle (14.13) e (14.14) si ha poi:

$$i = \frac{v_o}{R} \left(\frac{Z}{Z+R} - 1 \right) = -\frac{v_o}{Z+R} \quad (14.16)$$

L'impedenza vista all'ingresso dell'operazionale è allora ottenibile dalle (14.15) e (14.16):

$$Z_i = \frac{v_i}{i} = -Z$$

Vediamo cioè che l'operazionale "trasforma" l'impedenza Z nel suo opposto $-Z$. Se Z è un'impedenza capacitiva: $Z = 1/j\omega C$, l'impedenza trasformata sarà $1/j\omega(-C)$, cioè è come se la capacità fosse diventata negativa. Un circuito come quello analizzato è designato con il simbolo "NIC" (Negative Impedance Converter).

Vediamo ora come, facendo uso di questo, possiamo realizzare un circuito che converte un'impedenza Z nel suo reciproco $1/Z$. Questo è noto come "gyrator". Esaminiamo l'esempio di figura 14.10:

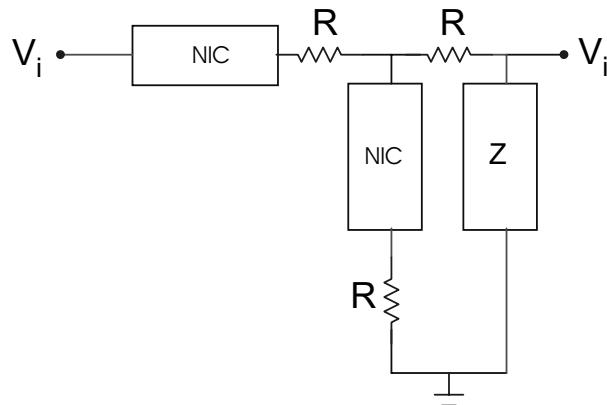


Figura 14.10: Circuito giratore, ottenuto connettendo come in figura due circuiti NIC e tre resistenze. Esso è in grado di trasformare un'impedenza Z nel suo reciproco $1/Z$, quindi un condensatore in una induttanza e viceversa.

Poiché ciascun NIC cambia di segno l'impedenza che lo segue, possiamo ridisegnare il circuito come mostrato in figura 14.11.

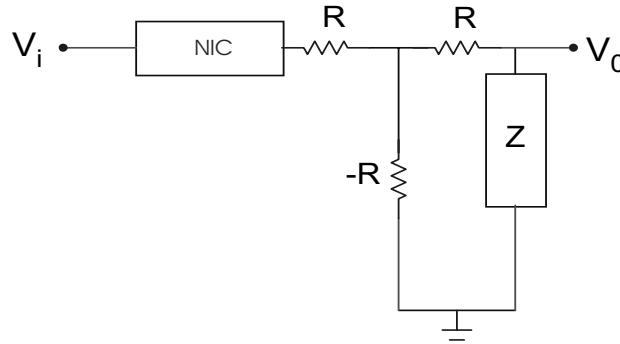


Figura 14.11: Circuito giratore, dopo aver ridotto uno dei circuiti NIC.

L'impedenza vista all'uscita del primo NIC è ora:

$$Z' = R + \frac{-(R+Z)R}{R+Z-R} = R - \frac{R^2 + ZR}{Z} = -\frac{R^2}{Z}$$

Poiché il primo NIC cambia ulteriormente il segno di tale impedenza, avremo:

$$Z_{in} = \frac{R^2}{Z}$$

e se Z è una capacità, avremo:

$$Z_{in} = \frac{R^2}{1/j\omega C} = jR^2\omega C = j\omega L$$

con:

$$L = R^2C$$

Che dimostra quanto asserito. Facendo quindi uso di resistenze, capacità ed operazionali possiamo realizzare l'equivalente di filtri RLC. Come già accennato, il limite all'utilizzo di tali circuiti è posto dallo slew-rate degli operazionali, che consiglia, a frequenze elevate, l'uso di circuiti passivi. Un circuito di largo uso, che consente di sostituire un'induttanza con operazionali, è quello dovuto ad A. Antoniou [6], mostrato in figura 14.12.

Si può infatti dimostrare che il rapporto tra la tensione applicata v_1 e la corrente i_1 è data da:

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = sC_4R_1R_3R_4/R_2$$

che è l'impedenza di un'induttanza L , con:

$$L = C_4R_1R_3R_4/R_2$$

Per dimostrarlo basta tener presente che, a causa del feedback negativo, la differenza di potenziale ai capi di ciascun operazionale è nulla. Con riferimento alla figura 14.13 segue che:

$$v_1 = v_a = v_e$$

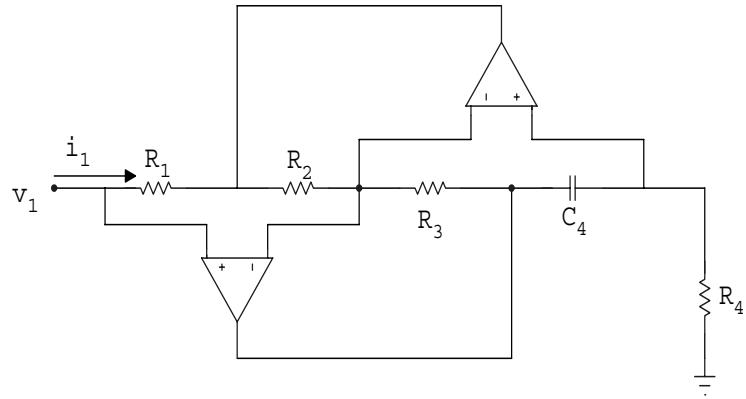


Figura 14.12: Elegante implementazione del circuito giratore dovuta a A. Antoniou. L'induttanza vista in ingresso a R_1 è di tipo induttivo.

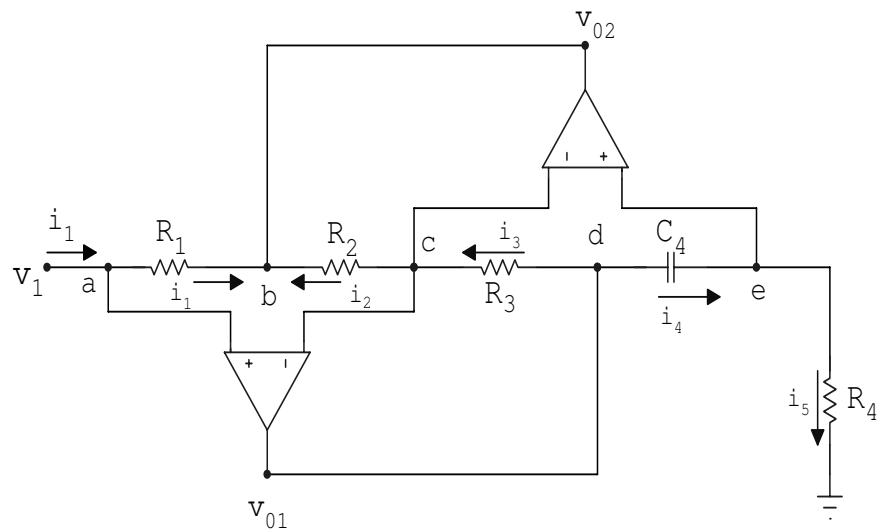


Figura 14.13: Circuito del giratore di Antoniou, con raffigurati i vettori corrente.

La corrente in R_4 :

$$i_5 = \frac{v_1}{R_4}$$

è uguale a quella in C_4 :

$$i_4 = i_5 = \frac{v_1}{R_4}$$

La tensione nel punto d:

$$v_d = v_1 + \frac{i_4}{sC_4} = v_1 + \frac{v_1}{sC_4 R_4} = v_{01}$$

Essendo poi $v_c = v_1$, la corrente in R_3 sarà:

$$i_3 = \frac{v_d - v_c}{R_3} = \frac{\left(v_1 + \frac{v_1}{sC_4R_4} - v_1\right)}{R_3} = \frac{v_1}{sC_4R_3R_4}$$

La corrente in R_2 inoltre uguaglia quella in R_3 . Ne segue:

$$v_{02} = v_b = v_c - R_2 i_3 = v_1 - \frac{R_2 v_1}{sC_4 R_3 R_4}$$

La corrente in R_1 è allora:

$$i_1 = \frac{v_1 - v_b}{R_1} = \frac{R_2}{sC_4 R_1 R_3 R_4} v_1$$

L'impedenza d'ingresso sarà quindi:

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = s \frac{C_4 R_1 R_3 R_4}{R_2}$$

che è quanto asserito.

Si può poi vedere facilmente che questo circuito si comporta da induttanza anche se lo si "guarda" dal lato di R_4 , cioè se si collega a massa l'estremo sinistro e si applica la sorgente di segnale all'estremità inferiore di R_4 .

Un esempio di un filtro passa-basso di ordine 2, in cui l'induttanza è sostituita da un "giratore" di Antoniou, è quello mostrato in figura 14.14.

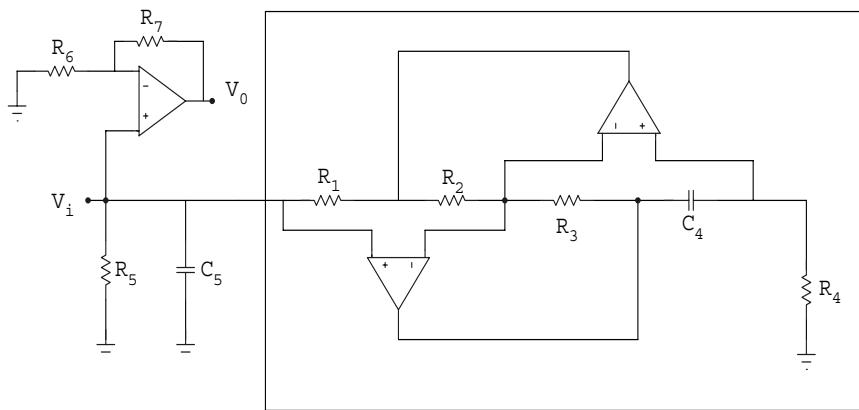


Figura 14.14: Filtro passa-basso di ordine 2 ottenuto sostituendo l'induttanza con un giratore di Antoniou. L'utilizzo delle induttanze è sconsigliato nella pratica, a causa del costo e dell'ingombro elevato. L'utilizzo di questo circuito permette di ottenere la stessa risposta di un filtro RLC utilizzando solamente componenti di tipo R e C oltre ad i componenti attivi.

Qui l'induttanza è sostituita dalla parte di circuito delineata dal rettangolo. L'amplificatore non invertente posto in alto a sinistra, è necessario per prelevare il segnale in uscita senza alterare il funzionamento del circuito. Tale amplificatore ha un guadagno in tensione dato da: $1 + R_7/R_6$.

In modo analogo è possibile realizzare filtri passa-banda, passa alto, notch etc.

14.7 Filtri di Butterworth

Nelle sezioni precedenti abbiamo incontrato filtri caratterizzati da funzioni di trasferimento con un singolo polo (filtri del primo ordine) e con un polo doppio (filtri del secondo ordine). In generale, il numero dei poli nella funzione di trasferimento determina la rapidità dei fronti di discesa (o di salita, nel caso dei filtri passa-alto o passa-banda) del filtro.

Una classe importante di filtri è quella di Butterworth. Questi sono caratterizzati da funzioni di trasferimento il cui modulo quadro, per un filtro passa-basso di ordine n , è dato da:

$$|G_n(\omega)|^2 = \frac{1}{[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}]}$$

cioè:

$$|G_n(\omega)| = \frac{1}{[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}]^{1/2}}$$

Andamenti tipici sono mostrati in figura 14.15, per valori dell'ordine n variabile tra 1 e 10. Notiamo che tutte le curve hanno la medesima attenuazione di 3 dB per $\omega = \omega_0$. Quando si riporta il guadagno in funzione di ω/ω_0 si dice che si studia il suo andamento in funzione della frequenza normalizzata.

Queste curve hanno le seguenti caratteristiche:

- $|G_n(0)|=1$ per tutti gli n ;
- $|G_n(\omega_0)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ per tutti gli n (cioè il guadagno diminuisce di 3 dB per $\omega = \omega_0$);
- per $\omega \gg \omega_0$ il guadagno scende con una pendenza di $6n$ dB/ottava, per un filtro di ordine n ;
- le prime $(n-1)$ derivate del modulo della funzione di trasferimento $G(\omega)$ sono nulle; ciò implica che la risposta nella banda passante è massimamente piatta, cioè ha un massimo per $\omega = 0$ e rimane all'incirca costante fino ad $\omega = \omega_0$.

Si può facilmente verificare che un filtro è di Butterworth se i poli sono ottenibili dividendo una circonferenza situata nel piano complesso, con centro nell'origine, in un numero $2n$ (quindi pari) di punti distribuiti uniformemente.

Ovviamente essi dovranno essere disposti in modo simmetrico rispetto all'asse reale ed inoltre solo quelli situati nel semipiano sinistro potranno rappresentare poli della funzione $G(s)$. Ad esempio, per $n=1$ e per $n=2$ abbiamo le situazioni mostrate nelle figure 14.16 ed 14.17.

Nel caso $n=2$ le radici s_1 ed s_2 (i poli della funzione $G(s)$) saranno:

$$s_1 = \alpha(j - 1)$$

$$s_2 = -\alpha(j + 1)$$

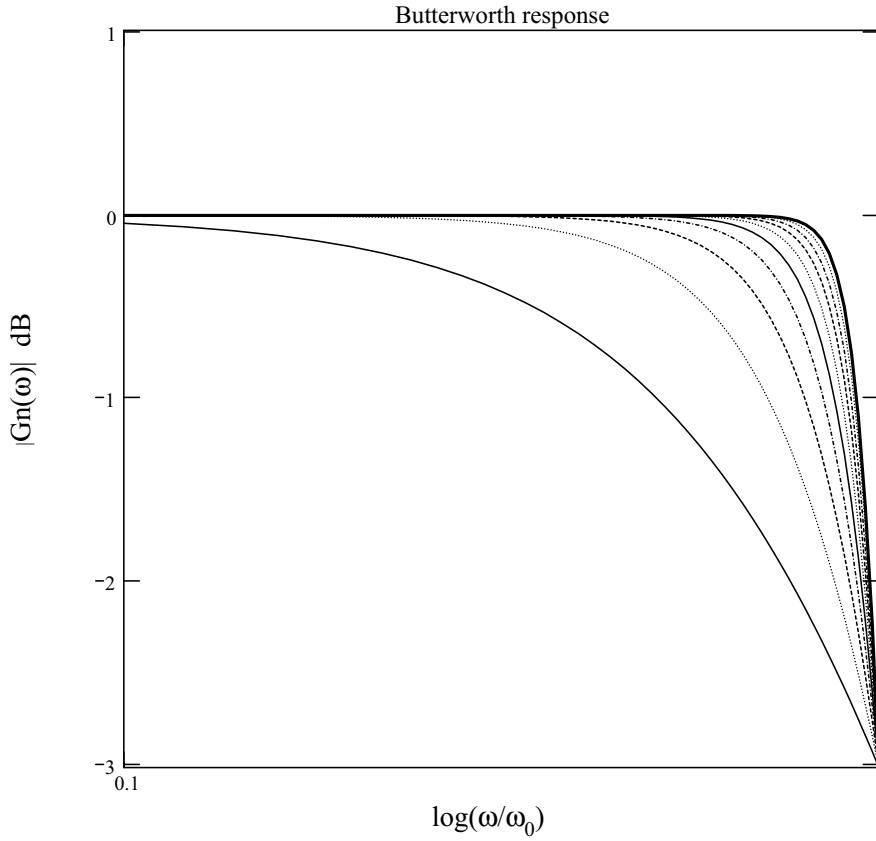


Figura 14.15: Funzione di trasferimento normalizzata per filtri di Butterworth, per valori dell'ordine n compreso tra 1 e 10. La curva inferiore è quella relativa ad $n=1$, la superiore ad $n=10$. Le curve intermedie sono ottenute per valori di n compresi tra 2 e 9.

Il denominatore della $G(s)$ sarà:

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 2\alpha s + 2\alpha^2$$

Per cui:

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + 2\alpha^2} = \frac{(1/2\alpha^2)}{s/2\alpha^2 + s/\alpha + 1} = \frac{(1/2\alpha^2)}{(s^2/2\alpha^2) + \sqrt{2}s/\sqrt{2}\alpha + 1}$$

La grandezza ω_0 , distanza delle radici dall'origine, è data da:

$$\omega_0^2 = 2\alpha^2$$

Cioè:

$$\omega_0 = \sqrt{2}\alpha$$

$$\alpha = \omega_0/\sqrt{2}$$

Introduciamo ora la variabile s' , ottenuta da s normalizzandola ad ω_0 :

$$s' = s/\omega_0 = s/\sqrt{2}\alpha$$

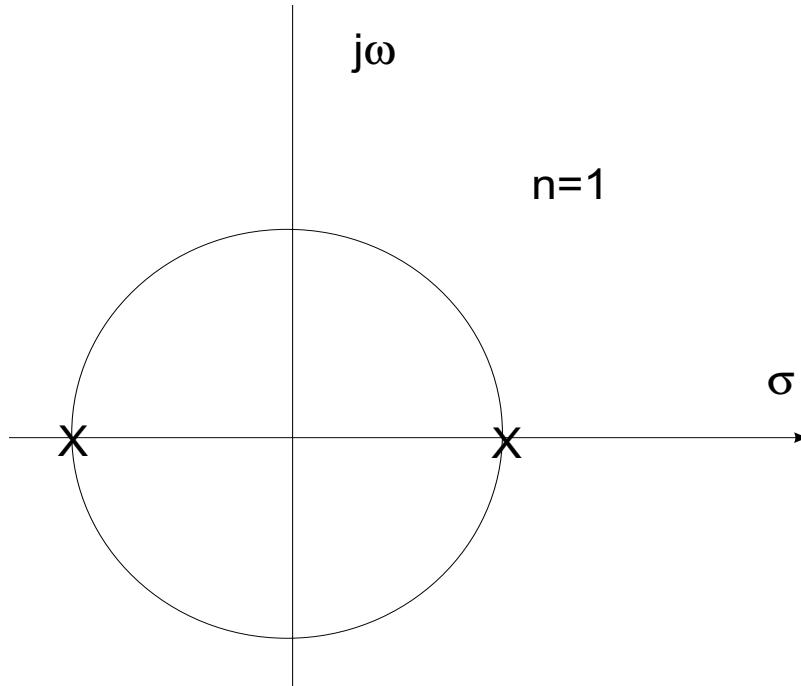


Figura 14.16: Rappresentazione dei poli di un filtro di Butterworth del primo ordine. Solamente il polo di sinistra può rappresentare un polo della funzione di trasferimento $G(s)$, il polinomio di Butterworth sarà quindi del tipo $s + 1$.

Con ciò l'ultima espressione scritta diventa:

$$G_2(s') = \frac{1/\omega_0^2}{s'^2 + \sqrt{2}s' + 1}$$

Il denominatore di quest'espressione è il polinomio di Butterworth di ordine $n=2$ ($B_2(s')$).

grado del polinomio(n)	$B_n(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.414s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$

Come già visto, nel caso generale il modulo del polinomio di ordine n vale:

$$|B_n(s)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}$$

Si definisce “fattore di smorzamento” la metà del coefficiente di s in ciascuno dei fattori quadratici che compaiono in tali espressioni. Ad esempio, per $n=2$ il fattore

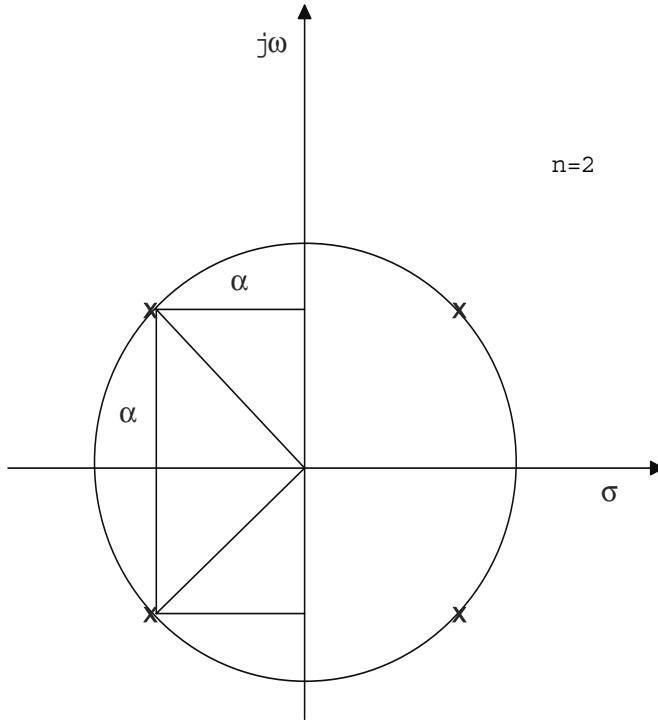


Figura 14.17: Rappresentazione dei poli di un filtro di Butterworth del secondo ordine. Solamente i due poli di sinistra possono rappresentare un polo della funzione di trasferimento $G(s)$, sono inoltre complessi coniugati, quindi il polinomio di Butterworth corrispondente (normalizzato) è di tipo $s^2 + 1.414s + 1$.

di smorzamento vale $1.414/2 = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2} = 0.707$. Per $n=3$ il fattore di smorzamento è 0.5; per $n=4$ si hanno due fattori di smorzamento:

$$k_1 = \frac{0.765}{2} = 0.383$$

$$k_2 = \frac{1.848}{2} = 0.924$$

Ricordando che si è posta la corrispondenza $s \leftrightarrow s/\omega_0$, le funzioni di trasferimento per $n=1$ e per $n=2$ possono essere scritte nella forma:

$$P_1(s) = \frac{1}{s/\omega_0 + 1}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{(s/\omega_0)^2 + 2k(s/\omega) + 1}$$

con $k = 1/\sqrt{2}$.

Un semplice circuito RC, posto sull'ingresso non invertente di un operazionale adoperato in configurazione non invertente, come mostrato in figura 14.18, realizza un filtro di Butterworth di ordine 1.

Infatti abbiamo:

$$v_- = v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

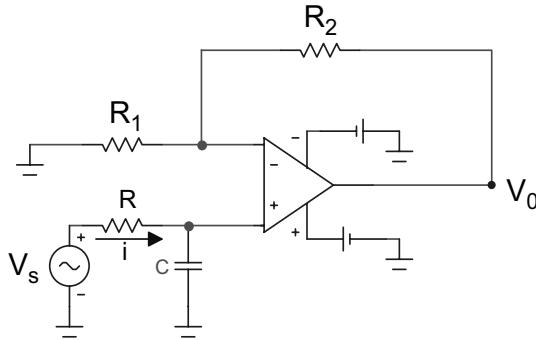


Figura 14.18: Semplice circuito che realizza un filtro di Butterworth del primo ordine. Si ottiene ponendo un circuito RC all'ingresso di un amplificatore operazionale montato in configurazione non invertente.

$$i = \frac{v_s}{R + 1/sC}$$

$$v_+ = Z_c i = \frac{1}{sC} \frac{v_s}{R + 1/sC}$$

e, poiché è $v_+ = v_-$, otteniamo:

$$v_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{v_s}{1 + sRC}$$

da cui:

$$G(s) = \frac{v_o}{v_s} = A_{v_o} \frac{1}{1 + sRC} = \frac{A_{v_o}}{1 + s/\omega_0}$$

dove:

$$A_{v_o} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

è l'amplificazione a bassa frequenza e:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Abbiamo quindi un filtro di Butterworth di ordine 1, con una frequenza di taglio (superiore) pari a $\omega_0 = 1/RC$. Si può facilmente vedere che da tale filtro passa-basso si può ottenere un filtro passa-alto invertendo i ruoli di R e C.

Poiché si può ottenere un filtro passa-alto a partire da uno passa-basso scambiando C ed R, è chiaro che sarà possibile ottenere un filtro passa-banda a partire da due filtri di Butterworth. Il primo di questi potrebbe essere un filtro passa-alto del secondo ordine, con una frequenza di taglio f_{min} ; il secondo un filtro passa-basso del medesimo ordine, con una frequenza di taglio $f_{max} > f_{min}$.

14.8 Filtro di Butterworth del secondo ordine

Un filtro di Butterworth del secondo ordine può esser realizzato facendo uso dello schema mostrato in figura 14.19. Questo è noto come “schema di Sallen e Key”.

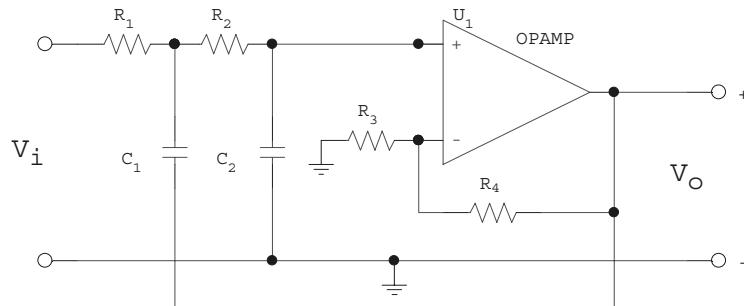


Figura 14.19: Configurazione circuitale nota come configurazione di Sallen-Key. Questo tipo di circuito può essere utilizzato, con una opportuna scelta del valore dei componenti passivi, per realizzare filtri passa-basso di Butterworth del secondo ordine.

Un'amplificatore operazionale è montato in una configurazione non-invertente. Il segnale presente in uscita è riportato tra le resistenze R_1 ed R_2 tramite il condensatore C_1 .

Per studiare la risposta di questo circuito, facciamo uso del circuito equivalente mostrato in figura 14.20, dove è $V_x = V_0/A$, con $A = 1 + R_4/R_3$.

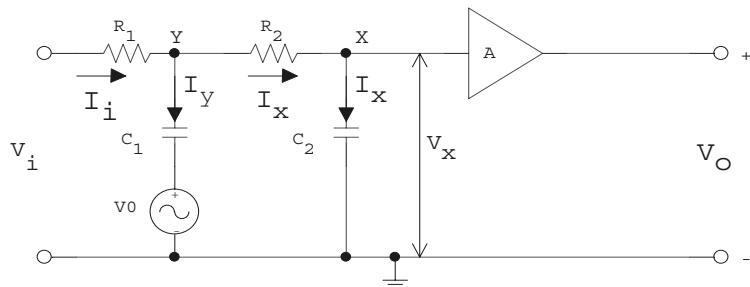


Figura 14.20: Circuito equivalente della configurazione di Sallen-key, in cui l'amplificatore non invertente viene sostituito da un amplificatore e da un generatore di tensione V_0 con uscita pari a quella dell'amplificatore. Tale circuito equivalente è utilizzato per calcolare il valore dei componenti passivi.

Si possono facilmente verificare le seguenti relazioni:

$$I_x = sC_2V_x = sC_2 \frac{V_0}{A}$$

$$V_y = V_x + R_2I_x = \frac{V_0}{A} (1 + sC_2R_2)$$

$$I_y = \frac{V_y - V_0}{1/sC_1} = sC_1V_0 \left[\frac{1 + sC_2R_2}{A} - 1 \right] = sC_1 \frac{V_0}{A} [1 - A + sC_2R_2]$$

Da cui segue:

$$\begin{aligned} I_i &= I_x + I_y = s \frac{V_0}{A} (C_2 + C_1 - C_1 A + s C_1 C_2 R_2) = \\ &= \frac{V_0}{A} [s C_2 + s C_1 (1 - A) + s^2 C_1 C_2 R_2] \end{aligned}$$

La tensione d'ingresso V_i sarà allora:

$$\begin{aligned} V_i &= R_1 I_i + V_y = \frac{V_0}{A} [s R_1 C_2 + s R_1 C_1 (1 - A) + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + 1 + s C_2 R_2] \\ &= \frac{V_0}{A} [1 + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s (C_2 (R_1 + R_2) + R_1 C_1 (1 - A))] \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento è quindi:

$$G(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{A}{1 + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s [C_2 (R_1 + R_2) + R_1 C_1 (1 - A)]} \quad (14.17)$$

Confrontando questa con l'equazione (14.2) vediamo che:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q_0} &\rightarrow \frac{C_2 (R_1 + R_2) + R_1 C_1 (1 - A)}{R_1 R_2 C_1 C_2} \\ \omega_0^2 &\rightarrow \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{aligned}$$

Da queste equazioni segue:

$$Q_0 = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{C_2 (R_1 + R_2) + R_1 C_1 (1 - A)}$$

Se poniamo $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$ otteniamo:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{RC}{2RC + RC(1 - A)} = \frac{1}{3 - A} \\ \omega_0 &= 1/RC \end{aligned} \quad (14.18)$$

Si può quindi scegliere il valore desiderato di Q_0 con un'opportuna scelta del valore di A . La $G(s)$ può esser espressa in termini delle variabili R , C ed A , come:

$$G(s) = \frac{A}{(RC)^2 s^2 + RC(3 - A)s + 1} \quad (14.19)$$

Il guadagno a basse frequenze è ovviamente A .

È interessante confrontare la risposta ottenuta con quella relativa al filtro LCR. Le due sono uguali se è:

$$LC = (R_0 C_0)^2$$

$$RC = (R_0 C_0)(3 - A)$$

dove abbiamo indicato con le sottoscritte "0" i componenti relativi al circuito di figura 14.19, e senza sottoscritte quelli relativi al circuito LCR.

Tali equazioni sono soddisfatte se è:

$$C_0 = C$$

$$C_0 R_0^2 = L$$

$$R_0(3 - A) = R$$

Una scelta suggerita per il valore di Q_0 è quella che rende il più possibile ripida la caduta al di sopra della frequenza di taglio superiore, senza determinare un picco. Ciò si ottiene, come visto nel capitolo sulla rappresentazione grafica delle funzioni di trasferimento, per:

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che nel nostro caso, come si vede facendo uso dell'equazione (14.18), richiede:

$$A = 3 - \sqrt{2} \approx 1.6$$

Un filtro che soddisfi tale condizione è un filtro di Butterworth (del secondo ordine).

Un esempio concreto di filtro di Butterworth si ottiene dal circuito di figura 14.19, con la seguente scelta dei valori dei componenti:

$$R_1 = R_2 = 15k\Omega$$

$$C_1 = C_2 = 10nF$$

$$R_3 = 47k\Omega$$

$$R_4 = 27k\Omega$$

14.9 Filtri di Bessel e di Chebyshev: confronto tra diversi tipi di filtro

Come accennato in precedenza, i parametri di un filtro che maggiormente interessano sono:

- (a) la “piattezza” della risposta all’interno della banda passante, e quindi l’assenza di ripple;
- (b) la rapidità della transizione tra banda passante e banda bloccata, normalmente espressa in dB/ottava;
- (c) la “nettezza” del ginocchio tra la banda passante e l’inizio del fronte di transizione;
- (d) la linearità della risposta in fase, essenziale per non avere distorsioni.

Il progetto di un filtro è sempre un compromesso tra queste esigenze, normalmente in conflitto tra loro. Il punto (b) è essenzialmente determinato dal numero di poli della funzione di trasferimento.

I tipi di filtro comunemente adoperati sono, oltre a quello di Butterworth, quelli noti come filtri di Bessel e di Chebyshev.

Ciascuno di questi è progettato per ottimizzare un parametro differente tra quelli elencati sopra. Il grado di ottimizzazione è poi determinato dal numero di poli e di zeri della funzione di trasferimento, legati a loro volta alla complessità del circuito. Un determinato tipo di filtro, caratterizzato da una certa funzione di trasferimento e quindi da una certa risposta in frequenza, può esser realizzato fisicamente in molti modi diversi. Ad esempio, un filtro di Bessel del sesto ordine può esser realizzato in un gran numero di modi differenti, che portano però a risposte uguali.

Il circuito base di Sallen-Key, adoperato per illustrare il filtro di Butterworth del secondo ordine, è alla base di filtri di vario tipo. Il circuito base per un filtro di ordine 2 è mostrato in figura 14.19. Se poniamo:

$$R = R_1 = R_2$$

$$R_f = R_4$$

$$R' = R_3$$

$$C = C_1 = C_2$$

I valori dei componenti per un filtro passa-basso possono essere calcolati attraverso le relazioni:

$$R = \frac{k_1}{Cf_0}$$

$$R_f = R_1 k_2$$

dove f_0 è la frequenza di taglio e dove i valori di C e di R_1 possono essere scelti liberamente (ed esempio $R_1=10k$, $C = 0.01\mu F$) mentre le costanti k_1 e k_2 valgono:

$$k_1 = 0.1251 ; k_2 = 0.268 \text{ per un filtro di Bessel}$$

$$k_1 = 0.1592 ; k_2 = 0.586 \text{ per un filtro di Butterworth}$$

$$k_1 = 0.1293 ; k_2 = 0.842 \text{ per un filtro di Chebyshev}$$

Filtri di ordine più elevato possono essere ottenuti mettendo in serie più filtri di ordine 2, con valori dei componenti passivi ottenibili da relazioni analoghe.

Il filtro di Butterworth, su cui abbiamo concentrato la nostra attenzione, è quello che ha la massima “piattezza” di risposta all’interno della banda passante, ma un “ginocchio” meno netto di quello di altri tipi di filtro ed una linearità di fase non brillante. Gli altri tipi di filtro (vedasi per una discussione esauriente il libro di Horowitz) hanno delle caratteristiche che ottimizzano l’uno o l’altro dei parametri menzionati, a spese della piattezza di risposta nella banda. Ad esempio, il filtro di Bessel ha un’ottima linearità di fase, ma un “ginocchio” meno netto di quello del filtro di Butterworth. Il filtro di Chebyshev ha un ginocchio ben netto, ma un discreto ammontare di ripple nella banda passante ed una linearità di fase peggiore di quella del filtro di Butterworth.

14.10 Filtri biquadratici ad amplificatore singolo

Esiste una classe di filtri basati sull'uso di un singolo amplificatore operazionale dove, nel circuito di reazione, è inserita un'opportuna rete RC.

Anche se tali filtri sono limitati nelle prestazioni dalla banda passante e dallo slew-rate dell'operazionale, essi sono molto diffusi, a causa della loro semplicità consumo e costo. Sono noti in letteratura come SAB's (Single Amplifier Biquads).

Per comprendere il funzionamento di tali filtri, esaminiamo il circuito di figura 14.21, in cui una rete passiva RC è inserita nel circuito di feedback di un amplificatore avente guadagno A (teoricamente infinito).

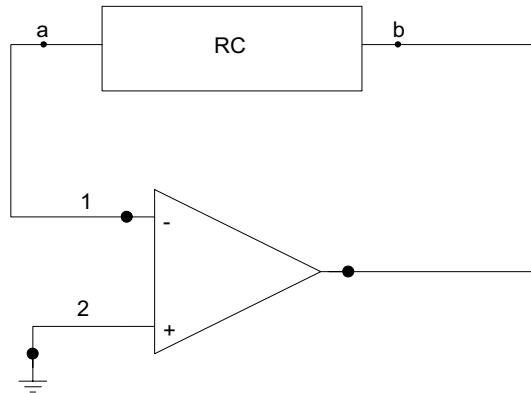


Figura 14.21: Configurazione circuitale relativa al filtro biquadratico. Viene ottenuta inserendo una opportuna rete RC nel circuito di reazione di un amplificatore operazionale.

Sia $t(s)$ la funzione di trasferimento della rete RC:

$$t(s) = \frac{v_a}{v_b}$$

Questa può, al solito, essere espressa come un rapporto tra polinomi:

$$t(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Le radici del polinomio a numeratore, cioè gli zeri di $t(s)$, possono esser situati in un qualsivoglia punto del piano complesso s , mentre le radici di $D(s)$, cioè i poli di $t(s)$ debbono, per un circuito passivo RC, esser situati sull'asse reale negativo ($\sigma < 0$).

Vediamo ora come, con l'introduzione della rete RC nel circuito di feedback dell'amplificatore, i ruoli dei poli e degli zeri vengano ad essere scambiati, ciò che potrà dar luogo, come desiderato, a poli complessi coniugati che, con un'opportuna scelta della rete, potranno esser situati nel semipiano sinistro.

Infatti, indicando con A il guadagno dell'amplificatore, il guadagno a catena aperta del sistema amplificatore-rete passiva è:

$$G(s) = At(s) = A \frac{N(s)}{D(s)}$$

Essendo l'amplificatore invertente, il guadagno a catena chiusa è dato da:

$$\frac{A}{1 + At(s)}$$

I poli di questa funzione sono gli zeri del denominatore. Se ora richiediamo che la $t(s)$ sia realizzata in modo tale che per determinati valori s_p di s sia $1 + At(s) = 0$, cioè:

$$t(s_p) = -\frac{1}{A}$$

troviamo, con $A \rightarrow \infty$:

$$t(s_p) = \frac{N(s_p)}{D(s_p)} = 0$$

Vediamo cioè che i poli dell'amplificatore con feedback sono gli zeri della funzione di trasferimento della rete RC.

Se vogliamo che il filtro abbia coppie di poli complessi coniugati dobbiamo quindi partire da una rete RC che abbia coppie di zeri complessi coniugati. Un esempio di rete RC con tale proprietà è la rete a T di figura 14.22(a), o anche quella complementare, mostrata nella parte (b) della medesima figura.

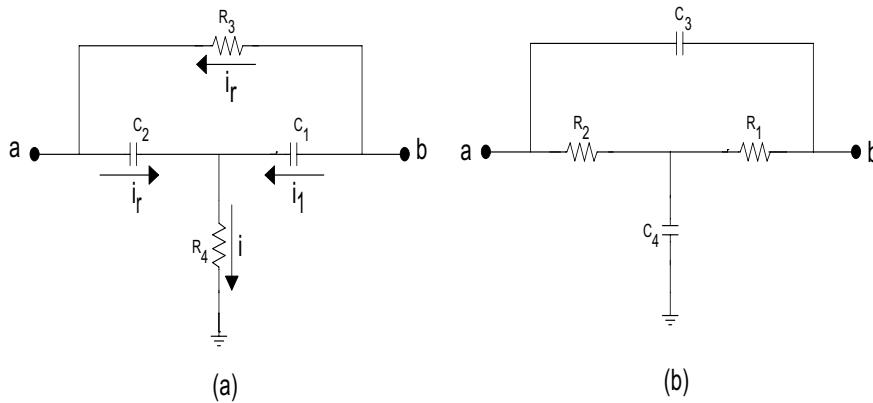


Figura 14.22: Reti RC poste nel circuito di feedback di amplificatori invertenti hanno la caratteristica che i poli relativi alla rete diventano gli zeri della funzione di guadagno dell'amplificatore stesso. È quindi necessario scegliere reti RC che abbiano coppie di zeri complessi coniugati, quali la rete a T in (a) o quella complementare mostrata in (b).

Esaminiamo la funzione di trasferimento della rete (a).

Immaginiamo che il nodo a sia aperto e che nel nodo b sia applicato un segnale di tensione v_b . In tali condizioni, la corrente i_r in R_3 è uguale in modulo a quella che attraversa C_2 . Avremo allora:

$$i = i_1 + i_r$$

e, indicando con x il nodo comune alla resistenza R_4 ed ai condensatori C_1 e C_2 :

$$v_x = v_b - \frac{i_1}{sC_1} = v_a - \frac{i_r}{sC_2} = R_4 i$$

Da questa otteniamo le equazioni:

$$v_b - \frac{i_1}{sC_1} = R_4(i_1 + i_r) \quad (14.20)$$

$$v_a - \frac{i_r}{sC_2} = R_4(i_1 + i_r) \quad (14.21)$$

È inoltre:

$$v_a = v_b - R_3 i_r \quad (14.22)$$

da cui:

$$i_r = \frac{v_b - v_a}{R_3} \quad (14.23)$$

Sostituendo questa nelle (14.20) e (14.21), si ottiene:

$$v_b - i_1 \left(R_4 + \frac{1}{sC_1} \right) = R_4 \frac{v_b - v_a}{R_3} \quad (14.24)$$

$$v_a - R_4 i_1 = \left(R_4 + \frac{1}{sC_2} \right) \frac{v_b - v_a}{R_3} \quad (14.25)$$

Ricaviamo ora i_1 dalla (14.25) e sostituiamo nella (14.24):

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_a}{R_4} - \left(1 + \frac{1}{sC_2 R_4} \right) \frac{v_b - v_a}{R_3} \\ v_b - \left(R_4 + \frac{1}{sC_1} \right) \frac{v_a}{R_4} + \left(R_4 + \frac{1}{sC_1} \right) \left(1 + \frac{1}{sC_2 R_4} \right) \frac{v_b - v_a}{R_3} &= \frac{R_4}{R_3} (v_b - v_a) \end{aligned}$$

Da quest'ultima equazione si ottiene poi, con facili passaggi, la relazione cercata tra v_b e v_a :

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{s^2 C_1 C_2 R_3 R_4 + s(C_1 R_4 + C_2 R_4) + 1}{s^2 C_1 C_2 R_3 R_4 + s[C_2 R_3 + (C_1 + C_2) R_4] + 1}$$

Dividendo infine numeratore e denominatore per $C_1 C_2 R_3 R_4$, otteniamo:

$$t(s) = \frac{v_a}{v_b} = \frac{s^2 + s \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4}}{s^2 + s \left[\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 R_4} \right] + \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4}}$$

I poli del filtro attivo avente la rete RC di figura 14.22(a) nel circuito di feedback corrispondono agli zeri del numeratore in tale espressione. Confrontando tale numeratore con la forma tipica di un filtro di ordine 2:

$$s^2 + s \frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2$$

otteniamo la corrispondenza²:

²È opportuno richiamare l'attenzione sul fatto che la rete *passiva* di figura 14.22(a) ha il medesimo valore di $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_3 R_4}}$ caratteristico del filtro attivo, ma un diverso valore di Q_0 . Infatti Q_0 è determinato dal coefficiente che moltiplica il termine lineare in s nel *denominatore* della $t(s)$, attraverso la relazione: $\frac{\omega_0}{Q_0} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 R_4}$.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4}$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{R_3 C_1 C_2}{R_4}} \frac{1}{C_1 + C_2}$$

I valori delle capacità e delle resistenze possono quindi essere scelti, facendo uso di tali relazioni, in modo da realizzare il tipo di filtro desiderato.

È spesso conveniente, per comodità, scegliere due condensatori di uguale capacità:

$$C_1 = C_2 = C$$

Con ciò le espressioni precedenti divengono:

$$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_3 R_4}}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_3}{R_4}}$$

Vediamo da tali espressioni che la frequenza angolare ω_0 è determinata, oltre che da C , dal prodotto delle due resistenze, mentre il valore di Q_0 , indipendente dalla capacità C , è determinato dal loro rapporto.

La quantità ω_0/Q_0 , legata alla larghezza di banda, è poi data da:

$$\frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{2}{CR_3}$$

14.10.1 Implementazione dei diversi tipi di filtri “biquad”

Nella precedente sezione abbiamo discusso in termini del tutto generali, il problema della realizzazione di un sistema di ordine 2 che abbia due poli complessi coniugati, adatti alla costruzione di filtri attivi. Dobbiamo ora discutere il modo in cui il circuito dovrà concretamente esser costruito, allo scopo di ottenere, a seconda dei casi, filtri passa-basso, passa-banda etc.

A seconda del tipo di filtro che vogliamo realizzare, dovremo immettere il segnale d'ingresso in un diverso punto del circuito. Nel farlo teniamo presente che il generatore del segnale da filtrare sarà con molta probabilità un generatore di tensione, la cui impedenza d'uscita, nel caso di un generatore ideale, è nulla. Ciò è importante, poiché questo vuol dire che l'inserimento del generatore in corrispondenza ad uno dei punti di massa non altera i poli e gli zeri del sistema rispetto a quelli calcolati in precedenza. In figura 14.23 il punto a della rete passiva di figura 14.22 è collegato all'ingresso invertente dell'operazionale (impedenza infinita) mentre il punto b è collegato all'uscita (impedenza quasi nulla). Con ciò i poli e gli zeri della rete passiva non vengono alterati. Possiamo quindi, con tale struttura, ottenere un filtro attivo.

La funzione di trasferimento di tale filtro è il reciproco di quella del filtro passivo analizzato. Essa è data da:

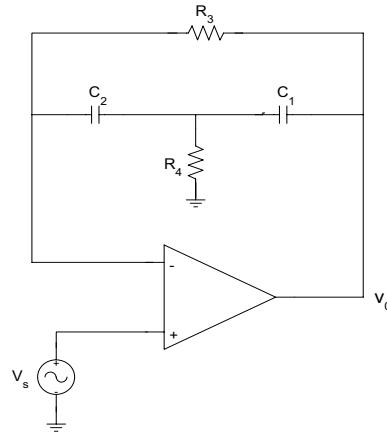


Figura 14.23: Filtri di tipo diverso dal passa-basso possono essere ottenuti dalle configurazioni circuitali mostrate in precedenza iniettando il segnale in punti diversi del circuito. In figura il segnale viene iniettato sull'ingresso non invertente dell'amplificatore operazionale, ottenendo un filtro passa-banda.

$$G(s) = \frac{s^2 + s \left[\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 R_4} \right] + \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4}}{s^2 + s \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4}}$$

Confrontando il denominatore di questa espressione con la funzione quadratica caratteristica di un filtro di ordine 2:

$$s^2 + s \frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2$$

si ha, come sopra:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4} \\ Q_0 &= \left[\frac{\sqrt{C_1 C_2 R_3 R_4}}{R_3} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

e, ponendo $C \equiv C_1 = C_2$:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C^2 R_3 R_4}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_3}{R_4}}$$

Con i valori di C , R_3 ed R_4 mostrati in figura 14.24, si trova:

$$\omega_0^2 = 5.508 \cdot 10^7$$

$$Q_0 = 8.2$$

$$\frac{\omega_0}{Q_0} \cong 905$$

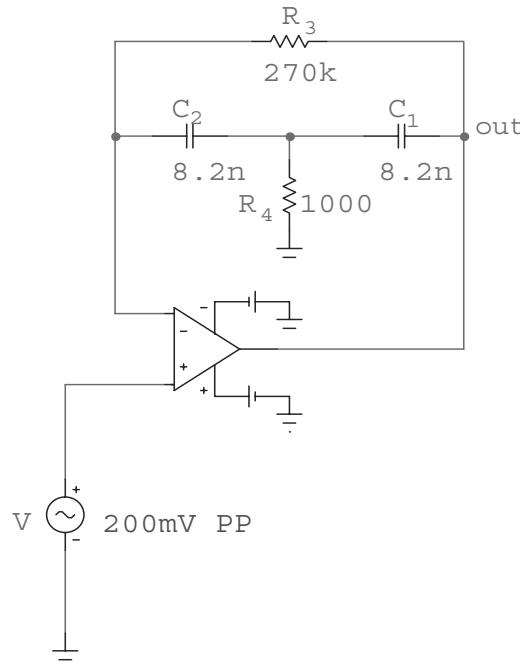


Figura 14.24: Esempio di filtro passa-banda biquadratico con definito il valore dei componenti. Si ottiene un filtro con picco a 1181 Hz e larghezza di banda di 144 Hz.

Cioè:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1181 \text{ Hz}$$

La funzione di trasferimento acquisterà la forma:

$$G(s) = \frac{s^2 + 1.228 \cdot 10^5 s + 5.508 \cdot 10^7}{s^2 + 905 s + 5.508 \cdot 10^7}$$

Vediamo che si tratta di un filtro passa-banda (con la risposta che tende ad 1 per $s \rightarrow 0$ e per $s \rightarrow \infty$, e con un picco attorno a 1181 Hz). La larghezza di banda è: $\Delta f = \omega_0/(2\pi Q_0) = 144 \text{ Hz}$.

Il risultato della simulazione di tale filtro, facendo uso di microcap è mostrato in figura 14.25. Da un'analisi dei grafici si vede che la fase passa da circa $+80^\circ$ a -80° quando si attraversa il valore f_0 , in corrispondenza al quale si ha un picco nel modulo della risposta.

Un collegamento alternativo, che realizza ancora una volta un filtro passa-banda, è quello mostrato in figura 14.26.

Calcoliamo, facendo uso dei simboli per tensioni e correnti indicati nella figura, la funzione di trasferimento di tale circuito.

Ricordando che è $v_- = v_+ = 0$ abbiamo:

$$v_x = v_i - ri_i = Ri_R \quad (14.26)$$

dove:

$$i_R = i_i - i_0$$

Per cui:

$$v_x = Ri_i - Ri_0$$

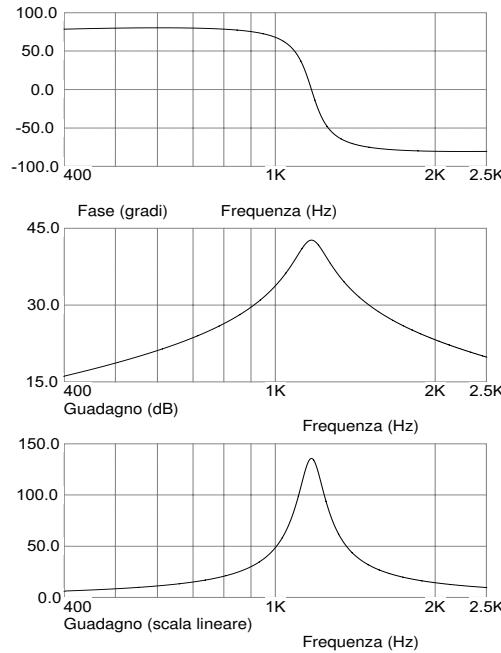


Figura 14.25: Risultato della simulazione del filtro reale biquadratico descritto nel testo. Grafico in alto: sfasamento dell'uscita rispetto all'ingresso, grafico centrale: guadagno espresso in Decibel, grafico in basso: guadagno espresso in scala lineare, il tutto in funzione della frequenza.

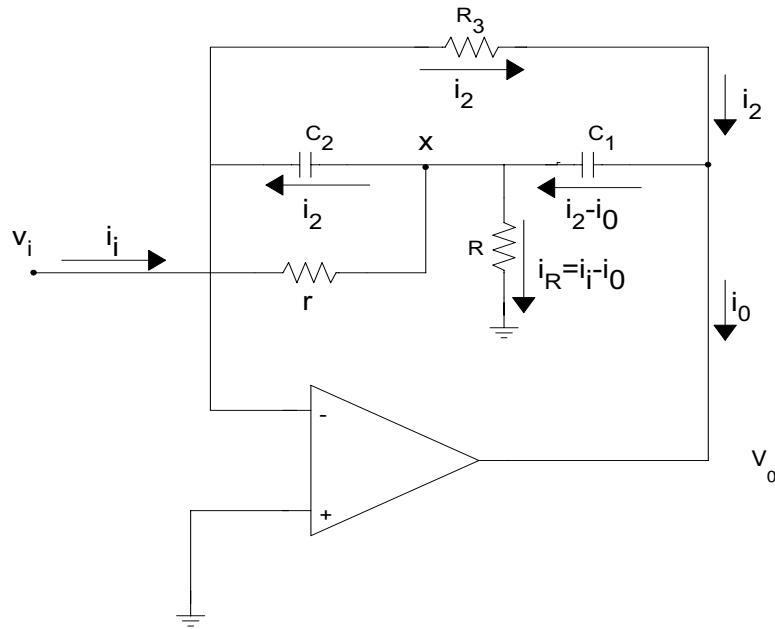


Figura 14.26: Esempio di configurazione alternativa, in cui il segnale viene iniettato tramite una resistenza nel punto di congiunzione dei due condensatori in parallelo.

da cui:

$$i_0 = i_i - \frac{v_i}{R} + r \frac{i_i}{R} = i_i \left(1 + \frac{r}{R}\right) - \frac{v_i}{R} \quad (14.27)$$

È poi anche:

$$v_x = \frac{i_2}{sC_2} = -\frac{i_2 - i_0}{sC_1} + v_0 \quad (14.28)$$

nonché:

$$v_0 = -R_3 i_2 \quad (14.29)$$

$$i_2 = -\frac{v_0}{R_3} \quad (14.30)$$

Dalle equazioni (14.26) e (14.28) si ottiene:

$$\frac{i_2}{sC_2} = v_i - ri_i \quad (14.31)$$

Sostituendo in questa ad i_2 l'espressione ottenuta dalla (14.30), otteniamo poi:

$$-\frac{v_0}{sC_2 R_3} = v_i - ri_i \quad (14.32)$$

Dalle (14.28) e (14.26) si ha poi:

$$v_0 + \frac{i_0}{sC_1} - \frac{i_2}{sC_1} = Ri_i - Ri_0$$

cioè:

$$v_0 + \frac{i_0}{sC_1} + \frac{v_0}{sC_1 R_3} = Ri_i - Ri_0$$

da cui:

$$v_0 \left(1 + \frac{1}{sC_1 R_3} \right) = Ri_i - i_0 \left(R + \frac{1}{sC_1} \right) \quad (14.33)$$

Sostituendo in questa, ad i_0 l'espressione (14.27), si ottiene:

$$v_0 \left(1 + \frac{1}{sC_1 R_3} \right) = Ri_i - \left(R + \frac{1}{sC_1} \right) i_i \left(1 + \frac{r}{R} \right) + \left(R + \frac{1}{sC_1} \right) \frac{v_i}{R}$$

dove, come segue dalla (14.32):

$$i_i = \frac{v_i}{r} + \frac{v_0}{sC_2 R_3 r}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} v_0 \frac{1 + sC_1 R_3}{sC_1 R_3} &= \frac{R}{r} v_i + \frac{R v_0}{sC_2 R_3 r} - \\ &- \frac{sRC_1 + 1}{sC_1} \left(1 + \frac{r}{R} \right) \frac{v_i}{r} - \frac{sRC_1 + 1}{sC_1} \left(1 + \frac{r}{R} \right) \frac{v_0}{sC_2 R_3 r} + \\ &+ \frac{sRC_1 + 1}{sC_1} \frac{v_i}{R} \end{aligned}$$

Questa equazione fornisce la relazione cercata tra v_i e v_0 . Si trova:

$$G(s) = \frac{v_0}{v_i} = -\frac{s/rC_1}{s^2 + 2s \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \frac{1}{R_3} + \frac{r+R}{C_1 C_2 r R R_3}}$$

Se le resistenze r ed R sono ottenute dalla divisione di un'unica resistenza R_4 in due elementi in parallelo:

$$R = \frac{R_4}{1 - \alpha}$$

$$r = \frac{R_4}{\alpha}$$

si ottiene:

$$G(s) = -\frac{s\alpha/C_1 R_4}{s^4 + 2s \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4}}$$

14.11 Filtri attivi a retroazione multipla

I filtri che abbiamo fin qui esaminato fanno uso di una rete RC o CR all'ingresso non invertente di un amplificatore e di una ulteriore rete CR o RC all'ingresso invertente. In quest'ultima uno degli elementi passivi è collegato all'uscita dell'amplificatore, fornendo in tal modo un feedback.

I filtri a retroazione multipla utilizzano due feedback separati ed un amplificatore invertente. Un esempio di filtro passa-basso a retroazione multipla è mostrato in figura 14.27.

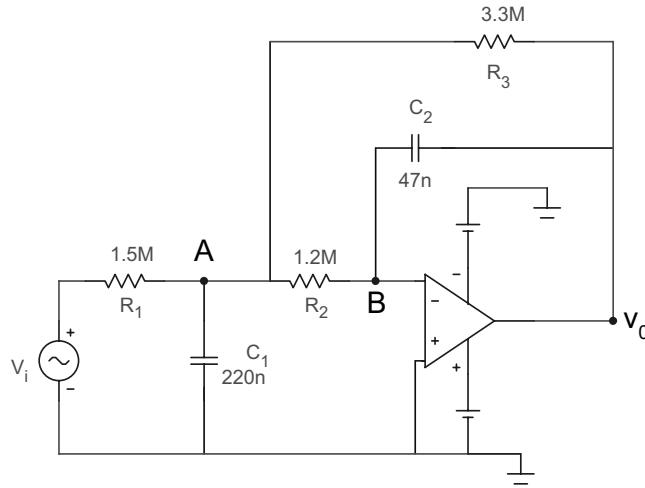


Figura 14.27: Esempio di configurazione circuitale relativa ad un filtro a retroazione multipla. Si notino gli elementi R_3 e C_2 che determinano la retroazione.

Per ottenere la funzione di trasduzione di questo circuito, applichiamo il teorema di Kirchoff al nodo indicato con A.

$$\frac{v_i - v_A}{R_1} + \frac{v_o - v_A}{R_3} - \frac{v_A}{Z_{C_1}} - \frac{v_A}{R_2} = 0$$

Dove si è fatto uso della condizione $v_+ = v_- = 0$. Da questa si ottiene:

$$v_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 \right) = \frac{v_i}{R_1} + \frac{v_o}{R_3}$$

Applicando la medesima equazione di Kirchoff al nodo B (ingresso invertente dell'A.O.), troviamo:

$$v_A = -sC_2R_2v_o$$

Da queste equazioni si trova poi:

$$\begin{aligned} \frac{v_o}{R_3} &= -\frac{v_i}{R_1} - sC_2R_2v_o \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 \right) \\ A_v &= \frac{v_o}{v_i} = -\frac{1}{R_1} \frac{\frac{1}{R_3} + sC_2R_2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}) + s^2C_1C_2R_2}{[C_1C_2R_1R_2] \left[s^2 + s\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{C_1C_2R_2R_3} \right]} \\ A_v &= \frac{-1}{[C_1C_2R_1R_2] \left[s^2 + s\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{C_1C_2R_2R_3} \right]} \end{aligned}$$

Dal confronto di questa con la funzione caratteristica del filtro passa-basso:

$$G(s) = \frac{A_0\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2}$$

si trova:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_2R_3}} \\ \frac{\omega_0}{Q_0} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{aligned}$$

Da queste si ottiene poi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_0} &= \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left[\sqrt{\frac{R_2}{R_3}} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2R_3}{R_1}} \right] \\ A_0 &= -\frac{R_3}{R_1} \end{aligned}$$

Vediamo che il guadagno alle basse frequenze è quello di un amplificatore invertente realizzato con le sole resistenze R_1 ed R_3 . La pulsazione di taglio ω_0 non dipende invece dalla resistenza R_1 .

La figura 14.28 mostra l'andamento del guadagno di un tale circuito in funzione della frequenza, con la seguente scelta del valore dei componenti: $R_1 = 1.5M\Omega$, $R_2 = 1.2M\Omega$, $R_3 = 3.3M\Omega$, $C_1 = 47nF$ e per valori di C_2 variabili tra 22 nF (curva 1) e 220 nF (curva 11). A tale scelta di valori corrispondono valori di ω_0 e Q_0 che variano tra gli estremi dati da:

- per $C_1 = 22\text{ nF} \rightarrow \omega_0 \approx 16\text{ Hz}, Q_0 \approx 0.19$
- per $C_1 = 220\text{ nF} \rightarrow \omega_0 \approx 5\text{ Hz}, Q_0 \approx 0.61$

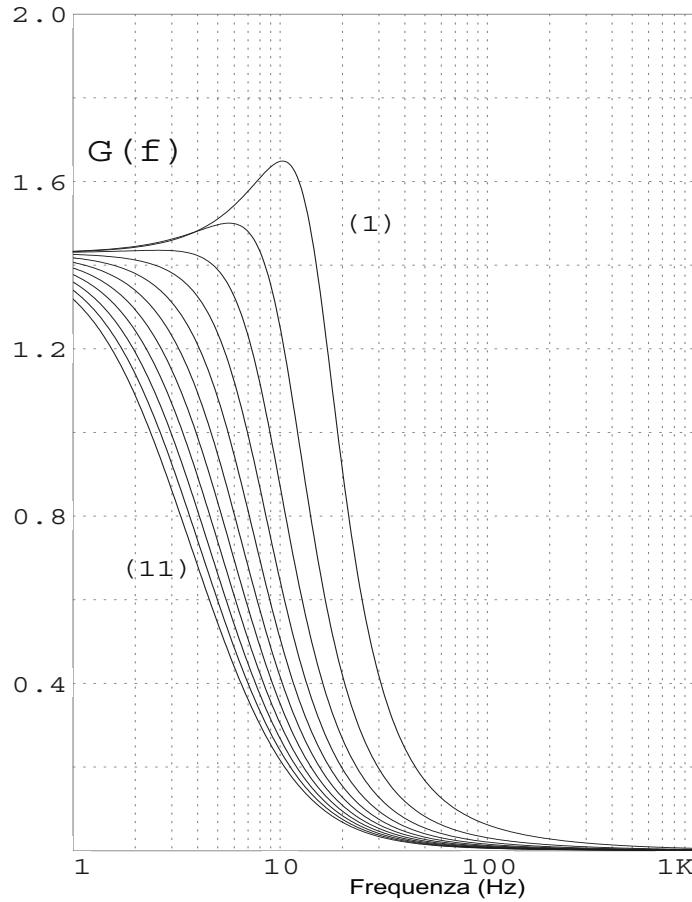


Figura 14.28: Andamento del guadagno del filtro passa-basso a retroazione multipla descritto nel testo. Le curve sono ottenute variando linearmente il valore di C_1 da 22 nF (curva 1) a 220 nF (curva 11).

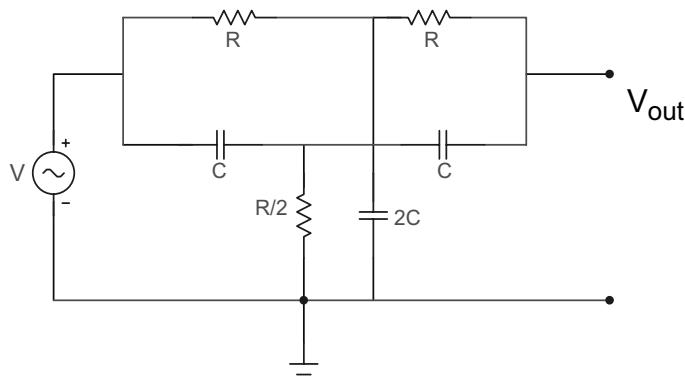


Figura 14.29: Configurazione circuitale relativa al filtro notch, ossia un tipo di filtro eliminabanda molto stretto. Questa particolare configurazione, puramente passiva, si basa sul circuito RC a doppia T.

14.12 Filtri notch

Spesso è necessario realizzare dei filtri che eliminino segnali compresi in un intervallo di frequenze molto stretto. Questi sono noti come filtri “notch”.

L’idea su cui il più noto dei filtri di questo tipo è basata, è quella del circuito RC a doppia T, mostrato in figura 14.29.

Si può vedere che questo circuito taglia le frequenze corrispondenti alla risonanza:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

In corrispondenza a tale frequenza il ramo superiore A-X-B e quello inferiore A-Y-B introducono sfasamenti uguali ed opposti. Ne segue che in B il segnale risultante si annulla. Ciò è mostrato in figura 14.30. I diagrammi di Bode per il modulo (grafico superiore) e la fase (grafico inferiore) della funzione di trasferimento di tale circuito confermano quanto asserito. Come si vede, il diagramma di Bode per il modulo ha una brusca caduta (intaglio o “notch”) alla frequenza di risonanza. In corrispondenza a tale frequenza la fase subisce un’improvvisa variazione di $+\pi$.

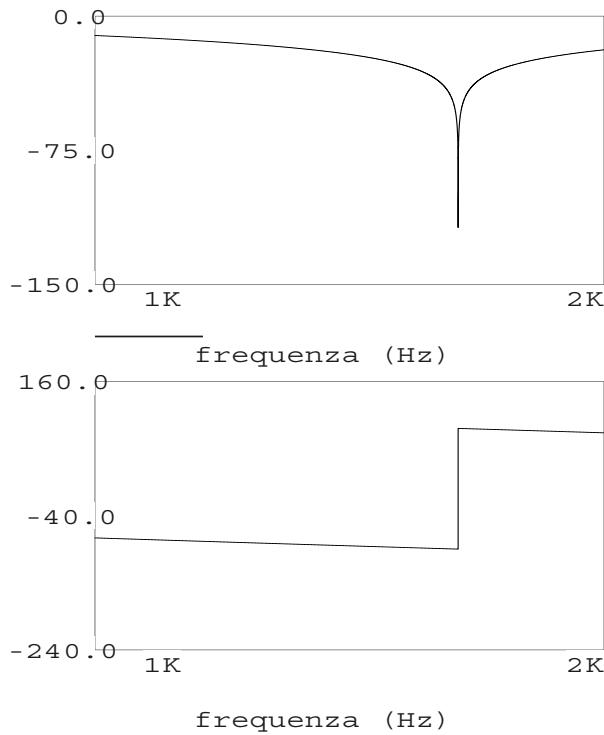


Figura 14.30: Diagrammi di Bode relativi al filtro notch passivo descritto nel testo. Grafico in alto: guadagno; grafico in basso: sfasamento in funzione della frequenza.

Il circuito mostrato nella figura 14.31 è una implementazione di tale filtro con l’ausilio di un amplificatore operazionale.

La funzione di trasferimento di questo circuito è:

$$G(s) = \frac{A_v(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2}$$

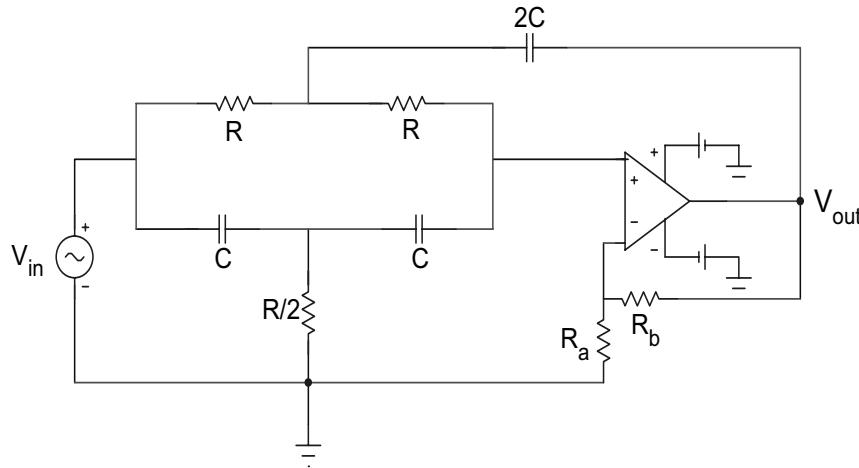


Figura 14.31: Implementazione del filtro notch con l'ausilio di un amplificatore operazionale.

con:

$$A_v = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2(2 - A_v)}$$

Il Q_0 del sistema è determinato dal guadagno A_v dell'amplificatore. Notiamo che A_v deve essere minore di 2 se si vuole un circuito stabile.

La figura 14.32 mostra un esempio di plot di Bode (modulo e fase) per tale circuito.

In tale esempio i valori dei componenti sono tali che $RC = 1000$, $A_v = 0.5$, e quindi: $f_0 = 159$ Hz e $Q_0 = 0.333$.

Filtri notch sono disponibili in commercio nella forma di moduli pronti all'uso, con frequenze che vanno da 1 Hz a 50 kHz, con "profondità" del notch di circa 60 dB.

Un filtro notch, regolabile su di un intervallo di frequenze più ampio di quello del filtro a T, è quello ([14]) mostrato in figura 14.33.

Per questo circuito la frequenza di risonanza è:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi C \sqrt{3R_1 R_2}}$$

con:

$$R_1 = R_{1A} + R_{1B}$$

ed:

$$R_6 = 6(R_1 + R_2)$$

Una tipica funzione di trasferimento di questo circuito è mostrata in figura 14.34.

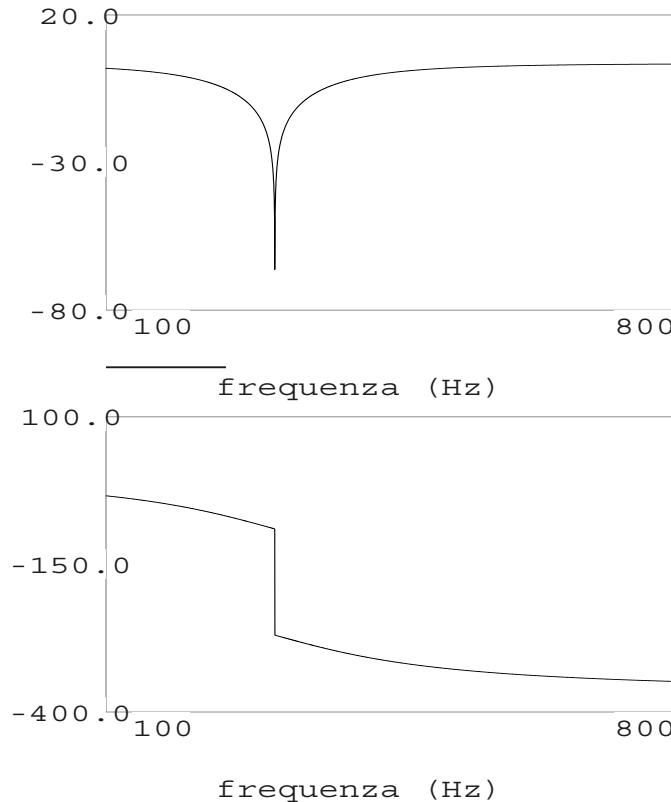


Figura 14.32: Diagrammi di Bode relativi al filtro notch basato su amplificatore operazionale descritto nel testo. Grafico in alto: guadagno, grafico in basso: sfasamento in funzione della frequenza.

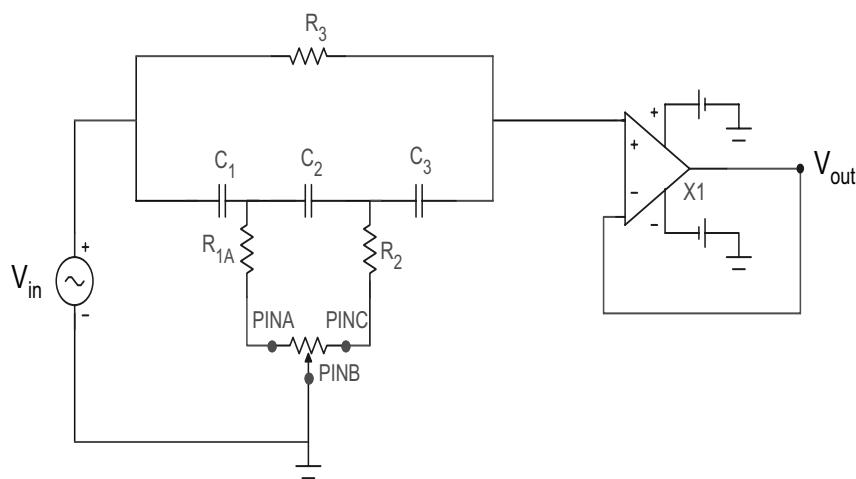


Figura 14.33: Esempio di configurazione circuitale che implementa un filtro Notch facente ricorso ad una rete RC e ad un follower basato su operazionale. Si noti che questo genere di circuito può essere utilizzato in scale di frequenze molto più elevate del circuito Notch a doppio T.

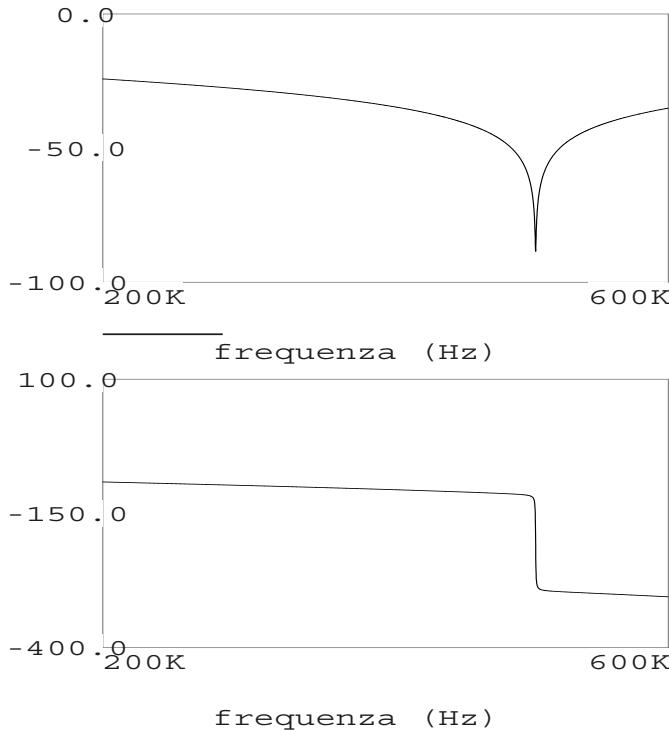


Figura 14.34: Diagrammi di Bode relativi al filtro notch descritto nel testo. Grafico in alto: guadagno, grafico in basso: sfasamento in funzione della frequenza.

14.13 Filtri a condensatori commutati

Negli ultimi anni hanno avuto larga diffusione filtri in cui le resistenze sono sostituite da condensatori che vengono, con l'applicazione di opportuni impulsi, rapidamente caricati e scaricati. Questi sono noti come *Switched-Capacitor Filters* (Filtri a condensatori commutati). Esistono vari motivi per tale scelta. Un primo motivo, di ordine pratico, è nel fatto che nella realizzazione di un filtro sotto forma di circuito integrato è opportuno limitare l'uso di resistenze che, oltre ad essere poco precise, occupano sul chip uno spazio notevole. È facile invece, come vedremo tra poco, simulare una resistenza mediante un condensatore commutato.

Un secondo motivo di tale scelta è nel fatto che un filtro a condensatori commutati può, modificando semplicemente la frequenza degli impulsi di clock che caricano e scaricano il condensatore, fornire la frequenza di taglio ω_0 desiderata, senza alcuna modifica degli elementi passivi presenti.

Per capire come un condensatore commutato possa simulare una resistenza, si consideri il circuito di figura 14.35

Gli interruttori S_1 ed S_2 (implementati con transistor FET sul chip) sono complementari: quando S_1 è chiuso, S_2 è aperto e viceversa. Con S_1 chiuso la tensione (variabile) presente all'ingresso V_i carica il condensatore C . La carica del condensatore è:

$$q = V_i C$$

tale carica si accumula nel tempo $T/2$ durante il quale S_1 è chiuso. Nel successivo

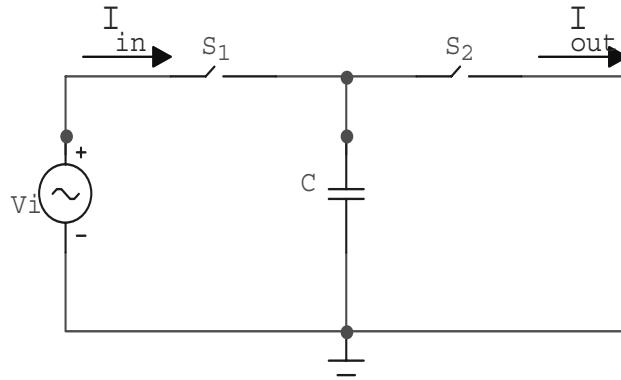


Figura 14.35: Configurazione circuitale a condensatori commutati. Gli interruttori sono supposti essere complementari: quando uno è aperto l'altro è chiuso e viceversa ed il loro comando avviene tramite un segnale esterno di frequenza nota f_{ck} .

intervallo $T/2$, S_1 è aperto, S_2 chiuso ed il condensatore si scarica. La corrente media nel tempo T sarà quindi:

$$\bar{I} = \bar{I}_{out} = \bar{I}_{in} = \frac{q}{T} = \frac{V_i C}{T} = V_i C f_{ck}$$

con: $f_{ck} = 1/T$.

La resistenza equivalente vista dalla sorgente V_{in} è allora:

$$R = \frac{V_i}{\bar{I}} = \frac{1}{C f_{ck}}$$

Vediamo quindi che R è una funzione di C e di f_{ck} . Fissato C , la resistenza può esser modificata semplicemente modificando la frequenza f_{ck} .

Notiamo che le variazioni di V_{in} debbono avvenire in tempi molto più lunghi di T . Nella pratica, se f_{max} è la massima frequenza contenuta in V_{in} , si sceglie valori di f_{ck} compresi tra 50 e 100 volte f_{max} .

Un esempio dell'uso di un condensatore commutato per realizzare un integratore è mostrato nella figura 14.36.

L'invertitore D_1 ha lo scopo di chiudere S_2 quando il segnale di clock apre S_1 . La resistenza associata al condensatore commutato C_1 è, come visto:

$$R = \frac{1}{C_1 f}$$

dove f è la frequenza del clock.

Il segnale in uscita sarà quindi:

$$V_{out} = -\frac{1}{RC_2} \int V_{in} dt = -f \frac{C_1}{C_2} \int V_{in} dt$$

Vediamo che la costante che moltiplica l'integrale di V_{in} dipende dalla frequenza e dal rapporto delle capacità. Ciò è un importante vantaggio rispetto all'utilizzo di un

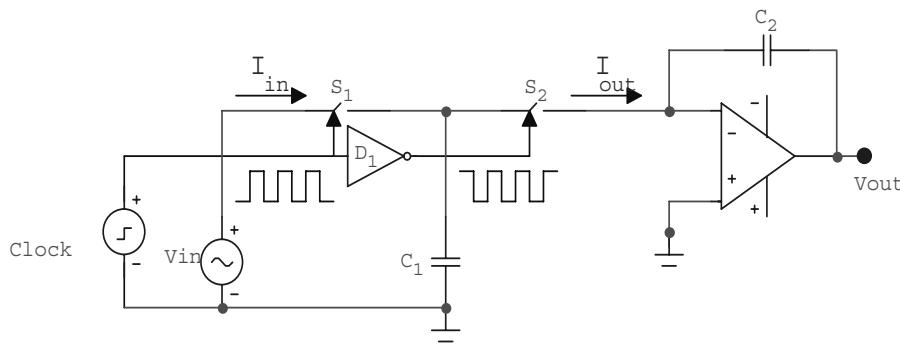


Figura 14.36: Esempio di circuito integratore ottenuto utilizzando una configurazione a condensatore commutato. L'invertitore D_1 ha lo scopo di chiudere S_2 quando S_1 è aperto. Questo circuito presenta il vantaggio che la costante di integrazione è proporzionale alla frequenza del clock di commutazione, e quindi risulta molto semplice adattare il circuito alle varie esigenze senza dover cambiare i valori dei componenti passivi.

integratore che utilizza una resistenza ed una capacità poiché, mentre non è facile realizzare in un integrato un condensatore (o una resistenza) preciso e stabile, è molto più agevole realizzare due capacità il cui rapporto lo sia. Il risultato di ciò è che sono disponibili in commercio filtri a condensatori commutati il cui costo è molto inferiore a quello di filtri convenzionali.

Un secondo vantaggio dei filtri di questo tipo è, come accennato, nel fatto che essi consentono di regolare la frequenza di taglio (quella superiore in filtri passa-basso, quella inferiore in filtri passa-alto etc), con la semplice modifica della frequenza f del segnale di clock. Infatti, come visto, tale modifica equivale a cambiare la resistenza equivalente R e quindi la costante che moltiplica l'integrale di V_{in} .

Filtri a condensatori commutati sono disponibili in commercio sia in versioni dedicate, in cui la configurazione (passa-basso, passa-alto, passa-banda etc.) è fissata, che in versioni “universali”, che possono essere adattate a realizzare il filtro che si desidera aggiungendo esternamente i componenti opportuni.

Un problema che è presente nei filtri a condensatori commutati è l'influenza del segnale di clock su quello in uscita. Ammettiamo ad esempio di voler realizzare un filtro passa-basso, con una frequenza di taglio superiore di 1 kHz e di utilizzare un filtro a condensatori commutati con una frequenza di clock di 100 kHz. Se il segnale che si vuol filtrare ha componenti di Fourier nella zona 99-101 kHz, osserveremo all'uscita del filtro un segnale spurio, non attenuato, con frequenze inferiori ad 1 kHz. A tale fenomeno si da il nome di *aliasing*.

Capitolo 15

Il feedback negli amplificatori

Il concetto di reazione (o *feedback*) trova applicazione non solo in elettronica, ma anche nella modellizzazione di sistemi meccanici e biologici. Per reazione o si intende genericamente un meccanismo in cui la risposta del sistema ad uno stimolo esterno viene riutilizzata per modificare o correggere il comportamento del sistema stesso. Il concetto di feedback trova perciò applicazione in molte discipline: in biologia, dal momento che tutti gli esseri viventi adottano meccanismi di questo tipo per controllare il proprio movimento, o nella meccanica (si pensi ad esempio ai sistemi di frenamento ABS).

Il feedback in elettronica è stato usato per la prima volta nel 1928 da Harold Black, un ingegnere della Western Electric Company, per la realizzazione di amplificatori a guadagno stabile nei ripetitori telefonici. Da allora questa tecnica ha conosciuto uno sviluppo così vasto che oggi è quasi impossibile progettare un circuito elettronico che sia privo di qualche forma di feedback.

Il feedback può essere *negativo* (degenerativo) o *positivo* (rigenerativo). Il feedback negativo (cui faremo più frequente riferimento nel corso di questo capitolo) viene normalmente impiegato nel disegno di amplificatori per ottenere una o più delle seguenti proprietà:

- stabilizzazione del guadagno rispetto a variazioni nel valore dei componenti circuitali (cause da esempio da variazioni di temperatura);
- miglioramento della linearità;
- riduzione dei disturbi;
- ottimizzazione delle impedanze di ingresso e di uscita;
- estensione della banda passante.

Tutte le proprietà elencate sono ottenute a scapito di una riduzione del guadagno. Si mostrerà nel seguito che il fattore di riduzione del guadagno è pari al fattore di desensibilizzazione del medesimo, all'aumento dell'impedenza di ingresso di un amplificatore di tensione, all'estensione della banda passante, etc.

Numerosi esempi di feedback negativo sono già stati esaminati nel corso dei capitoli precedenti. Tutti i circuiti lineari con amplificatori operazionali utilizzano un feedback negativo. Un'altra applicazione consiste nell'uso di una resistenza R_E

sul ramo dell'emettitore di un amplificatore a transistor per stabilizzarne il punto di lavoro, aumentarne l'impedenza di ingresso ed estenderne la banda passante.

Sotto particolari condizioni (condizione di Barkhausen) il feedback negativo può diventare positivo ed avere un'ampiezza tale da indurre oscillazioni; ma questo sarà argomento del prossimo capitolo. In questo limiteremo la nostra attenzione alle condizioni di stabilità degli amplificatori con feedback negativo.

15.1 Struttura generale del feedback

La struttura di un amplificatore con feedback può essere schematizzata come in figura 15.1, dove ognuna delle grandezze indicate con x può rappresentare una tensione o una corrente. La sua uscita x_o è dunque legata al suo ingresso x_i dalla relazione

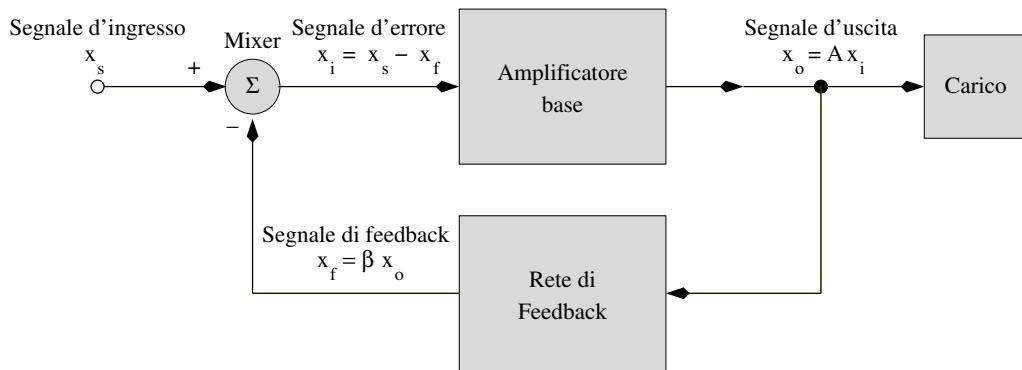


Figura 15.1: Rappresentazione schematica di amplificatore con feedback a singolo loop.

$$x_o = Ax_i , \quad (15.1)$$

dove A è il guadagno dell'amplificatore a circuito aperto (*open-loop gain*, che è in generale una funzione complessa della frequenza). . L'uscita viene inviata simultaneamente al carico esterno e alla rete di feedback che restituisce un segnale x_f all'ingresso dell'amplificatore. Detta quantità è legata all'uscita x_o dal *fattore di feedback* β ,

$$x_f = \beta x_o , \quad (15.2)$$

Il segnale x_f viene quindi sottratto al segnale della sorgente x_s , che costituisce l'ingresso dell'amplificatore completo, per produrre il segnale x_i , che fornisce invece l'ingresso dell'amplificatore di base; quindi

$$x_i = x_s - x_f . \quad (15.3)$$

Vale la pena di osservare che è proprio il segno meno nell'ultima equazione a rendere il feedback negativo, poiché ha l'effetto di ridurre l'ampiezza del segnale fornito all'ingresso dell'amplificatore base, e che la riduzione è tanto più significativa quanto maggiore è l'ampiezza del segnale di uscita¹.

¹Le considerazioni fin qui esposte valgono nell'ipotesi che il segnale di input venga trasmesso all'uscita solo attraverso l'amplificatore A e non attraverso la rete di feedback e che, al contrario,

Il guadagno complessivo A_f dell'amplificatore può essere ottenuto combinando le precedenti espressioni; risulta allora

$$A_f = \frac{x_o}{x_s} = \frac{A}{1 + \beta A} \quad (15.4)$$

Perché il feedback sia negativo, occorre che, nel caso in cui il termine βA sia reale, esso sia anche positivo, ovvero che il segnale di feedback x_f abbia lo stesso segno del segnale di sorgente x_s , da cui si ottiene una riduzione del segnale x_i . Più in generale, il feedback è negativo se il modulo del guadagno complessivo $|A_f|$ è minore del guadagno a circuito aperto $|A|$, ciò che, come risulta dalla (15.4), si verifica se il fattore $1 + \beta A$ eccede in modulo l'unità.

Nel caso in cui $|\beta A| \gg 1$, dall'equazione (15.4) segue che $A_f \simeq 1/\beta$, cioè il guadagno è determinato completamente dalla rete di feedback. Siccome questa consiste solitamente di componenti passivi, che possono essere scelti con grande accuratezza, si può ottenere un guadagno accurato, stabile, facilmente predicibile e pressoché indipendente dal guadagno dell'amplificatore base (che al contrario dipende da molti parametri ed è affetto da incertezze ben maggiori). Un esempio di questa proprietà del feedback è già stata evidenziata nel capitolo 12 a proposito dei circuiti con amplificatori operazionali, dove il guadagno è determinato esclusivamente dagli elementi della rete di feedback.

Le equazioni dalla (15.1) alla (15.3) possono essere ulteriormente combinate per ottenere la seguente espressione per il segnale di feedback

$$x_f = \frac{\beta A}{1 + \beta A} x_s \quad (15.5)$$

Da qui, come nel caso precedente, nel limite $\beta A \gg 1$, risulta $x_f \simeq x_s$, ovvero il segnale fornito dal feedback è una replica del segnale della sorgente. In termini equivalenti, il segnale x_i all'ingresso dell'amplificatore, solitamente noto come *segnale di errore*, ha ampiezza pressoché nulla. Anche questo risultato riproduce una caratteristica – il principio del “corto virtuale” tra i terminali di ingresso di un amplificatore operazionale con feedback negativo – già emersa nel capitolo 12.

15.2 Altre proprietà del feedback negativo

Analizziamo in maggior dettaglio le proprietà salienti del feedback negativo, già elencate nell'introduzione.

15.2.1 Stabilizzazione del guadagno

Abbiamo già visto che, nel limite $\beta A \gg 1$, il guadagno tende ad essere asintoticamente indipendente dal guadagno A dell'amplificatore. Questo risultato può essere ottenuto analiticamente come segue.

il segnale di feedback venga trasmesso all'ingresso solo da quest'ultima e non dall'amplificatore. È inoltre implicita l'ipotesi che il fattore di feedback β sia indipendente dalle impedenze della sorgente e del carico.

Assumiamo che l'amplificazione a circuito aperto subisca una variazione δA ; differenziando la (15.4), si ottiene

$$\delta A_f = \frac{\delta A}{(1 + \beta A)^2} \quad (15.6)$$

da cui, dividendo per la (15.4), risulta

$$\frac{\delta A_f}{A_f} = \frac{1}{1 + \beta A} \frac{\delta A}{A} \quad (15.7)$$

Nel caso di feedback negativo (in cui, come già detto, $1 + \beta A > 1$), la variazione relativa di A_f è quindi minore della variazione relativa di A di un fattore pari a $1 + \beta A$ (che per questo motivo è noto come anche come *fattore di desensibilizzazione del guadagno*).

Un esempio già noto

Un amplificatore operazionale in configurazione non-invertente (vedi figura 12.7) fornisce un'implementazione diretta di feedback negativo, ove si identifichi il partitore costituito dalle resistenze R_1 ed R_2 come ramo di feedback.

La tensione all'ingresso invertente è, se si assume impedenza di ingresso infinita, $V_- = R_1/(R_1 + R_2)V_o$, per cui il fattore di feedback risulta pari a $\beta = R_1/(R_1 + R_2)$. Per fissare le idee, assumiamo $A = 10^4$ e $R_2/R_1 = 9$, cosicché $\beta = 0.1$. Allora $\beta A \gg 1$ e la (15.4) si riduce a

$$A_f \simeq \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 10 \quad (15.8)$$

che, coincide con la l'espressione ottenuta nel capitolo 12, l'uguaglianza essendo verificata a meno di una parte in 10^4 . È facile vedere che anche l'ipotesi del "corto virtuale" è verificata a meno di una parte in 10^3 , essendo $V_+ - V_- \simeq 1/\beta A$.

Per quanto concerne invece la stabilità del guadagno, con i parametri in gioco si può verificare che anche una variazione del 50% dell'amplificazione dell'operazionale avrebbe effetti trascurabili sul guadagno complessivo, dal momento che $\delta A_f/A_f \simeq \delta A/A \cdot 1/\beta A = 0.05\%$.

15.2.2 Risposta in frequenza di un amplificatore

Si consideri un amplificatore la cui risposta sia caratterizzata da una funzione di trasferimento con un singolo polo, della forma

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s/\omega_H} \quad (15.9)$$

dove A_0 indica il guadagno a centro-banda ed ω_H la pulsazione di taglio superiore. Applicando un feedback negativo, con un fattore β indipendente dalla frequenza, si ottiene un guadagno

$$A_f(s) = \frac{A(s)}{1 + \beta A(s)} = \frac{A_0/(1 + \beta A_0)}{1 + s/[\omega_H(1 + \beta A_0)]} = \frac{A_{0f}}{1 + s/\omega_{Hf}} \quad (15.10)$$

con $A_{0f} = A_0/(1 + \beta A_0)$ e $\omega_{Hf} = \omega_H(1 + \beta A_0)$. Confrontando le ultime due espressioni osserviamo che il guadagno a centro-banda si è ridotto del solito fattore $1 + \beta A_0$ e che la pulsazione di taglio è ora maggiore di quella in assenza di feedback dello stesso fattore². La banda passante si è pertanto allargata dello stesso fattore, cosicché il prodotto dell'amplificazione a centro-banda e della larghezza della banda rimane costante; infatti

$$A_0\omega_H = A_{0f}\omega_{Hf} \quad (15.11)$$

L'effetto del feedback negativo sulla banda passante risulta evidente dalla figura 15.2, dove sono rappresentati i diagrammi di Bode per l'ampiezza dell'amplificazione in assenza e con la reazione per un amplificatore a singolo polo. A bassa frequenza ($\omega \ll \omega_H$) la loro risposta è costante e scala secondo la (15.10). Nel limite di alta frequenza ($\omega \gg \omega_H$) invece entrambi i diagrammi seguono lo stesso andamento asintotico con una pendenza di 6 dB/ottava.

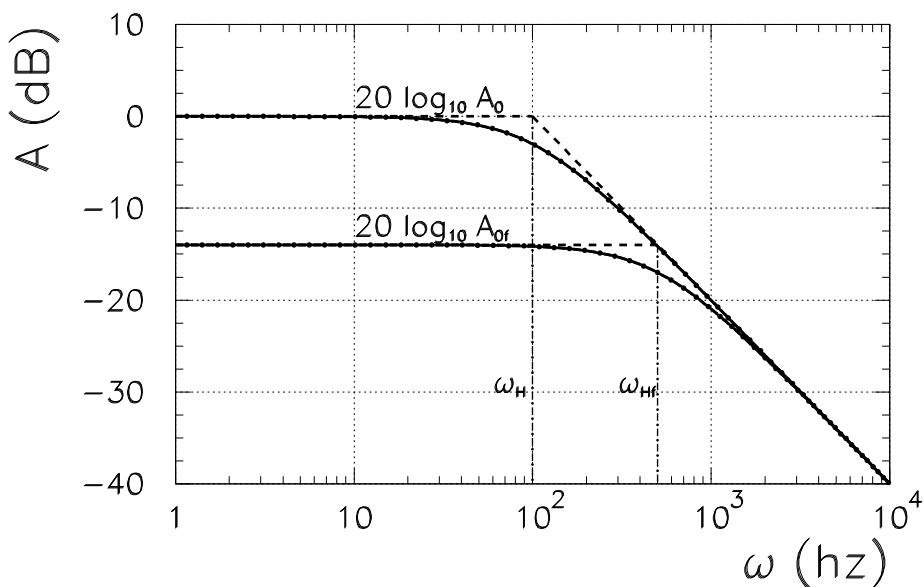


Figura 15.2: Diagramma di Bode (linea continua) per la funzione di risposta di un amplificatore in assenza ed in presenza di feedback negativo con fattore di feedback $|1 + \beta A_0| = 5$ (-14 dB). Per confronto sono riportati gli andamenti asintotici a bassa ed alta frequenza (linea tratteggiata).

In conclusione, l'allargamento della banda passante mediante l'uso di una reazione negativa può avvenire a costo di una riduzione del guadagno del medesimo fattore. Per questo motivo si è soliti esprimere la bontà di un amplificatore fornendo il prodotto del guadagno per la banda passante (*gain-bandwidth product*).

²Analoghe considerazioni possono essere svolte nel caso di un amplificatore la cui risposta abbia uno zero del primo ordine e dunque un taglio a bassa frequenza. Si può verificare facilmente che in tal caso la frequenza si riduce dello stesso fattore, estendendo la banda passante in misura analoga.

15.3 Le topologie di feedback negli amplificatori

In base alla quantità da amplificare (tensione o corrente) e sulla forma di uscita desiderata, gli amplificatori possono essere suddivisi in quattro categorie. Nessuna di queste ha le caratteristiche degli amplificatori ideali. Tuttavia, come si mostrerà nel prossimo paragrafo, l'introduzione di appropriate topologie di feedback a ciascuno di questi amplificatori può modificarne significativamente la risposta, così da renderne il comportamento più aderente a quello di un amplificatore ideale.

Prima di ciò, ecco una breve rassegna dei quattro tipi fondamentali di amplificatore adoperati nei circuiti elettronici. Le loro caratteristiche sono riassunte nella tabella 15.1.

Parametro	Tipo di amplificatore			
	Tensione	Corrente	Transconduttanza	Transresistenza
R_i	∞	0	∞	0
R_o	0	∞	∞	0
Risposta	$V_o = A_v V_s$	$I_o = A_i I_s$	$I_L = G_M V_s$	$V_o = R_M I_s$

Tabella 15.1: Caratteristiche ideali dei quattro tipi di amplificatore.

15.3.1 Classificazione degli amplificatori

Amplificatori di tensione

Un amplificatore di tensione amplifica una tensione V_i applicata in ingresso e restituisce in uscita una tensione V_o . Esso può essere rappresentato in termini di un circuito Thévenin-equivalente come in figura 15.3. Se l'impedenza di ingresso è mol-

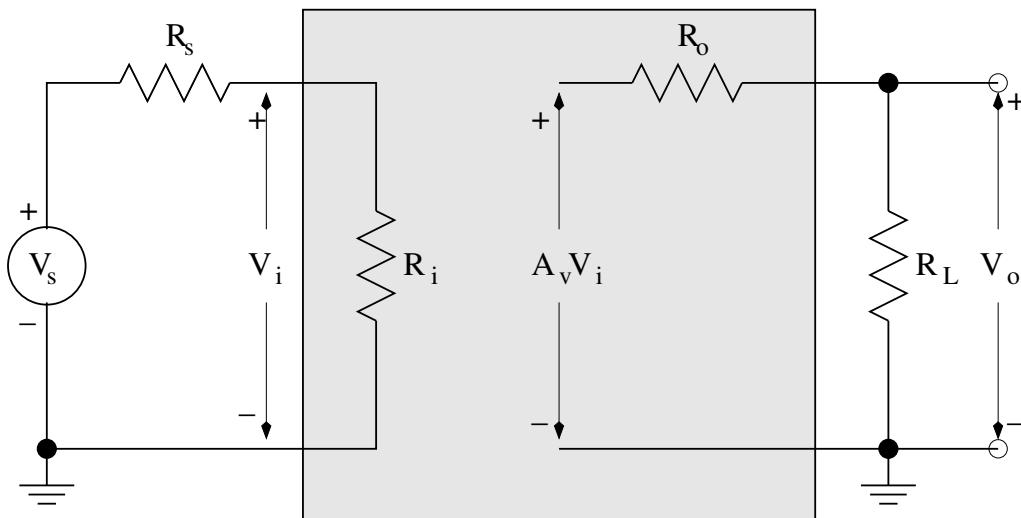


Figura 15.3: Circuito Thévenin-equivalente di un amplificatore di tensione.

to maggiore di quella di uscita della sorgente, allora $V_i \simeq V_s$. Inoltre, l'impedenza di

uscita è trascurabile rispetto all'impedenza del carico, allora $V_o \simeq A_v V_i \simeq A_v V_s$. In tal caso l'amplificatore fornisce un segnale di tensione proporzionale alla tensione in ingresso, ed il fattore di amplificazione risulta essere indipendente dalle impedenze della sorgente e del carico. Un amplificatore ideale di tensione deve avere pertanto impedenza di ingresso $R_i = \infty$ ed impedenza di uscita $R_o = 0$. Il simbolo A_v rappresenta quindi il fattore di amplificazione a circuito aperto.

Una rete di feedback applicata ad un amplificatore di tensione deve campionare la tensione di uscita V_o e generare una tensione di feedback $V_f = \beta V_o$. Perché questa sia sottratta alla tensione del generatore V_s (così da implementare la (15.3), i due poli della rete di feedback devono essere connessi in *serie* al generatore con il polo positivo connesso al terminale negativo dell'amplificatore base e con quello negativo al terminale negativo del generatore, come mostrato in figura 15.5a. Per questo motivo questa configurazione di feedback è nota come *tensione-serie*³.

Anche se un'analisi più dettagliata del guadagno e delle impedenze verrà condotta nelle prossime sezioni, si può anticipare sin d'ora che questa configurazione ha l'effetto di aumentare l'impedenza di ingresso dell'amplificatore (come risultato della connessione in serie della rete di feedback all'ingresso) e di ridurne l'impedenza di uscita (conseguente alla connessione in parallelo all'uscita). Questo, come si evince dalla tabella 15.1, approssima il comportamento di un amplificatore di tensione a quello di un amplificatore ideale.

Amplificatori di corrente

Un amplificatore di corrente ideale fornisce in uscita un segnale di corrente I_o proporzionale alla corrente che fluisce sul ramo di ingresso I_i . Come si vede dall'analisi del circuito Norton-equivalente mostrato in figura 15.4, l'amplificatore ideale deve avere impedenza di ingresso $R_i = 0$ ed impedenza di uscita $R_o = \infty$, affinché tutta la corrente del generatore fluisca sul ramo di ingresso ($I_i = I_s$) e tutta la corrente di uscita fluisca sul carico ($I_L = I_o = A_i I_s$).

La topologia di feedback più appropriata per un amplificatore di corrente è quella mostrata in figura 15.5b. L'uscita di corrente I_o dell'amplificatore fluisce nella serie del carico e del ramo di feedback, mentre la corrente del generatore I_s viene ripartita in "shunt" tra l'ingresso ed il ramo di feedback (attraverso cui passa la corrente $I_f = \beta I_o$). Sulla base di considerazioni analoghe a quelle del paragrafo precedente, è facile vedere che questa configurazione di feedback (detta *corrente-parallelo*) riduce l'impedenza di ingresso ed aumenta l'impedenza di uscita del generatore, ciò che è desiderabile per un amplificatore di corrente (vedi tabella 15.1).

Amplificatori a transconduttanza

Un amplificatore a transconduttanza ideale fornisce un segnale di corrente proporzionale ad una segnale di tensione in ingresso, indipendentemente dalle dimensioni delle impedenze del generatore e del carico. Come nei casi precedenti, esso è rappresentato da un circuito Thévenin-equivalente in ingresso (analogo all'ingresso

³Le diverse configurazioni di feedback sono solitamente identificate da un nome composto dalla grandezza prodotta in uscita (tensione o corrente) e dal tipo di connessione (serie o parallelo) realizzata dal mixer.

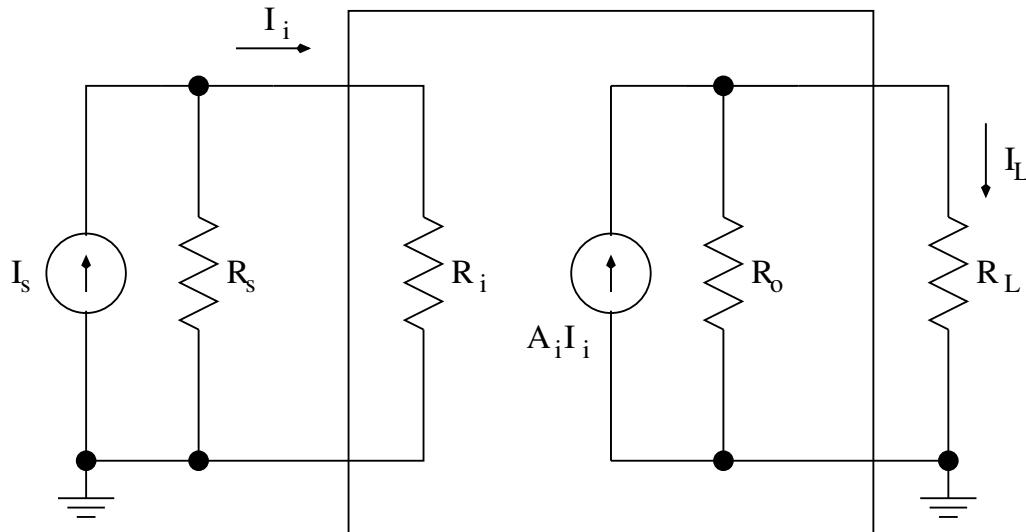


Figura 15.4: Circuito Norton-equivalente di un amplificatore di corrente.

dell'amplificatore di tensione) e da un circuito Norton-equivalente in uscita (analogo all'uscita dell'amplificatore di corrente). In pratica, questo tipo di amplificatore deve avere impedenza di ingresso molto maggiore della resistenza di uscita del generatore di tensione ($R_i = \infty$ nel caso ideale) ed impedenza di uscita molto maggiore della resistenza del carico ($R_o = \infty$ nel caso ideale).

La topologia adottata per questo tipo di amplificatore è denominata *corrente-serie* ed è schematizzata in figura 15.5c. Essa consente di campionare l'uscita di corrente I_o e di collegare la tensione di feedback $V_f = \beta I_o$ in serie al generatore ed è tale da aumentare sia l'impedenza di ingresso che quella di uscita rispetto all'alimentatore base.

Amplificatori a transresistenza

Un amplificatore a transresistenza trasforma un segnale di corrente in ingresso in un segnale di tensione in uscita. Pertanto, esso può essere rappresentato da un circuito Norton-equivalente in ingresso (analogo all'ingresso dell'amplificatore di corrente) e da un circuito Thévenin-equivalente in uscita (analogo all'uscita dell'amplificatore di tensione). Sulla base di considerazioni analoghe a quelle svolte nei paragrafi precedenti, l'uscita di tensione è proporzionale alla corrente del generatore ed il fattore di amplificazione è indipendente dalle impedenze del generatore e del carico se l'amplificatore ha impedenze di ingresso e di uscita trascurabili in confronto a queste ultime (per un amplificatore ideale si deve avere cioè $R_i = R_o = 0$). Un amplificatore a transresistenza viene reazionato in configurazione *tensione-parallelo*, come mostrato schematicamente in figura 15.5d. L'uscita V_o viene campionata in shunt dal ramo di feedback, attraverso il quale fluisce una corrente $I_f = \beta V_o$ derivata dal partitore di corrente all'ingresso dell'amplificatore, cosicché, con i versi delle correnti fissati nella figura, risulta $I_i = I_s - I_f$. Le connessioni in parallelo sia all'ingresso che all'uscita dell'amplificatore base hanno l'effetto di diminuirne le impedenze complessive.

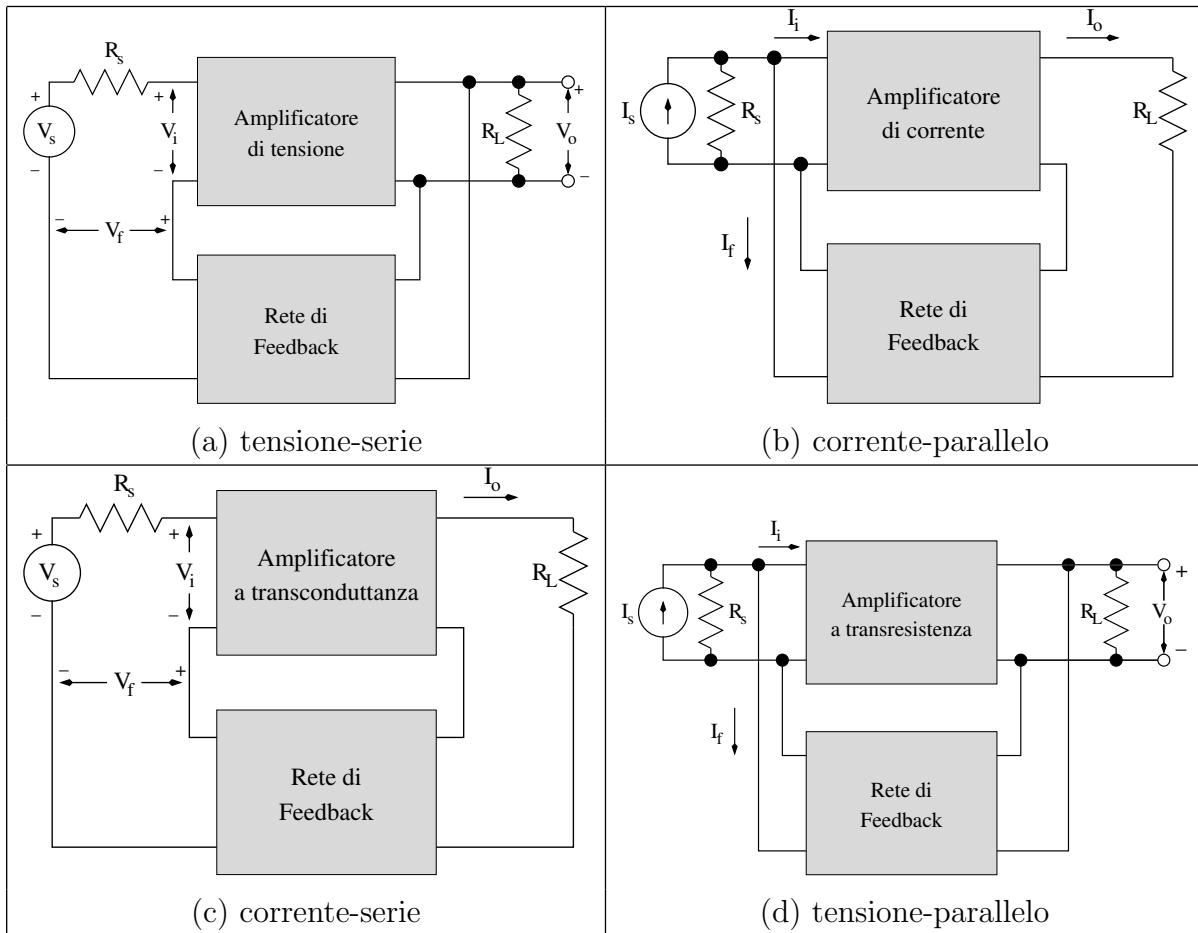


Figura 15.5: Schema delle topologie di feedback per i quattro tipi di amplificatori. Ciascuno di essi è identificato dalla grandezza in uscita (tensione o corrente) e dal tipo di connessione (serie o parallelo) del feedback al generatore.

15.4 Effetto del feedback sulle impedenze di un amplificatore

15.4.1 Impedenze d'ingresso

Esaminiamo quantitativamente l'effetto di ciascuna topologia di feedback sulle impedenze d'ingresso. Questa determinazione dipende, come è lecito attendersi, solo dal tipo di confronto effettuato all'ingresso, indipendentemente dal fatto che il feedback sia ottenuto dal campionamento di una tensione o una corrente in uscita.

Feedback tensione-serie

La topologia di figura 15.5a viene implementata dal circuito mostrato in figura 15.6, dove il blocco dell'amplificatore è stato sostituito dal suo Thévenin equivalente. In questo circuito R_s è considerato parte dell'amplificatore e sia A_v il suo guadagno a circuito aperto che include R_s . L'impedenza di ingresso è definita in tal caso dal rapporto $R_{if} = V_s/I_i$ tra la tensione del generatore e la corrente che fluisce nel ramo

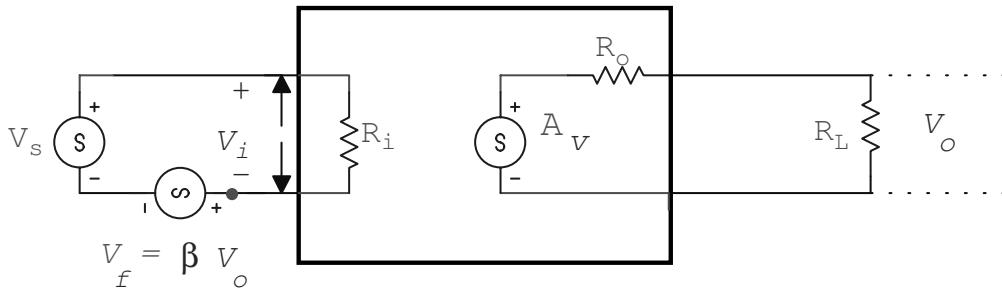


Figura 15.6: Schema di circuito di feedback tensione-serie per il calcolo delle impedenze di ingresso/uscita.

di ingresso del circuito. Applicando la legge di Kirchhoff alla maglia di ingresso si ottiene allora

$$V_s = V_i + V_f = R_i I_i + \beta V_o \quad (15.12)$$

Dalla maglia d'uscita otteniamo

$$V_o = A_v V_i \frac{R_L}{R_o + R_L} = A_V V_i \quad (15.13)$$

dove \$A_v\$ rappresenta il guadagno in tensione a circuito aperto ed abbiamo introdotto il guadagno (in assenza di feedback) \$A_V = A_v R_L / (R_o + R_L)\$ che tiene conto della resistenza di carico \$R_L\$ (dunque \$A_V \rightarrow A_v\$ per \$R_L \rightarrow \infty\$). Combinando la (15.12) con la (15.13) si ottiene infine

$$R_{if} = \frac{V_s}{I_i} = R_i (1 + \beta A_V) \quad (15.14)$$

che risulta aumentata rispetto all'impedenza d'ingresso dell'amplificatore base di un fattore \$1 + \beta A_V\$, che tende ad infinito per \$\beta A_V \gg 1\$.

Feedback corrente-serie

Esaminiamo ora il caso del feedback corrente-serie, il cui schema è mostrato in figura 15.7 ed è ottenuto dalla figura 15.5c per sostituzione dell'amplificatore con il suo circuito equivalente.

Sia \$G_m = I/V_i\$ la transconduttanza a circuito chiuso (che già include gli effetti legati alla resistenza d'uscita del generatore di tensione). Dalla legge di Kirchhoff applicata alla maglia d'uscita troviamo che

$$I_o = G_m V_i \frac{R_o}{R_o + R_L} = G_M V_i = G_M R_i I_i \quad (15.15)$$

avendo posto \$G_M = G_m R_o / (R_o + R_L)\$ per la transconduttanza dell'amplificatore che tiene conto del carico \$R_L\$. Combinando l'ultima espressione ottenuta con la (15.12) si ha

$$V_s = V_i + V_f = R_i I_i + \beta I_o = R_i I_i + \beta G_M R_i I_i = R_i I_i (1 + \beta G_M) \quad (15.16)$$

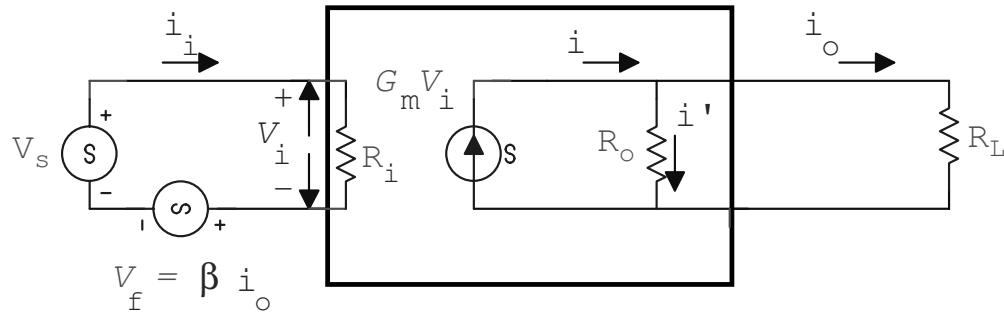


Figura 15.7: Circuito equivalente ad un feedback corrente-serie per un amplificatore a transconduttanza.

da cui

$$R_{if} = \frac{V_s}{I_s} = R_i (1 + \beta G_M) \quad (15.17)$$

Anche in questo caso quindi l'impedenza d'ingresso aumenta per effetto del feedback, l'incremento essendo legato al fattore \$(1 + \beta G_M)\$.

Feedback corrente-parallelo

Il circuito di figura 15.8 implementa la configurazione di feedback corrente-parallelo, ottenuta sostituendo all'amplificatore di corrente di figura 15.5 il suo circuito Norton-equivalente. In maniera analoga ai casi precedenti, non compare l'impedenza di uscita del generatore \$R_s\$, essendo questa già inclusa nel computo del guadagno \$A_i\$ dell'amplificatore a circuito chiuso.

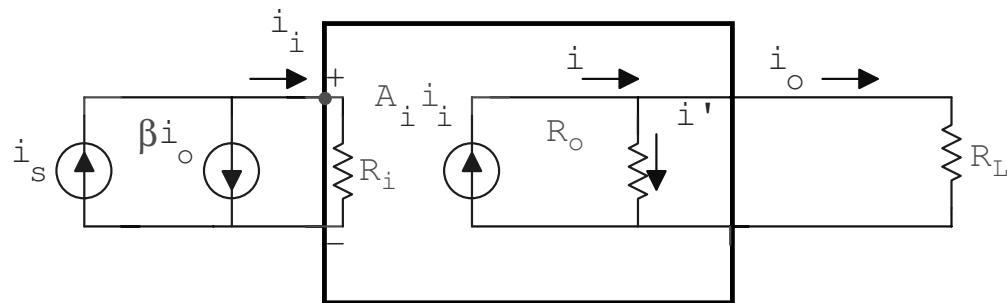


Figura 15.8: Configurazione di feedback corrente-parallelo per un amplificatore di corrente.

In questo caso, l'impedenza di ingresso è definita come \$R_{if} = V_i / I_s\$. Dalla maglia d'ingresso abbiamo

$$I_s = I_i + I_f = I_i + \beta I_o \quad (15.18)$$

e dalla maglia d'uscita:

$$I_o = A_i I_i \frac{R_o}{R_o + R_L} \equiv A_I I_i \quad (15.19)$$

dove \$A_I = A_i R_o (R_o + R_L)\$ è il guadagno in corrente dell'amplificatore che tiene conto del carico \$R_L\$ (che tende perciò ad \$A_i\$ allorché \$R_L \rightarrow 0\$). Combinando queste due

ultime espressioni si ottiene

$$I_s = I_i + \beta A_I I_i = I_i (1 + \beta A_I) \quad (15.20)$$

da cui, tenendo conto che $V_i = R_i I_i$, segue infine

$$R_{if} = \frac{V_i}{(1 + \beta A_I) I_i} = \frac{R_i}{1 + \beta A_I} \quad (15.21)$$

In questo caso l'impedenza d'ingresso è minore di quella in assenza di feedback del medesimo fattore $(1 + \beta A)$ che era presente, a fattore moltiplicativo, nei due casi iniziali.

Feedback tensione-parallelo

Procedendo in maniera analoga ai casi precedenti, si può schematizzare un circuito di feedback tensione-parallelo come in figura 15.9. Come sopra, si suppone che l'impedenza del generatore sia già inclusa nel calcolo del guadagno R_m dell'amplificatore a transresistenza a circuito chiuso e viene pertanto omessa. L'impedenza d'ingresso

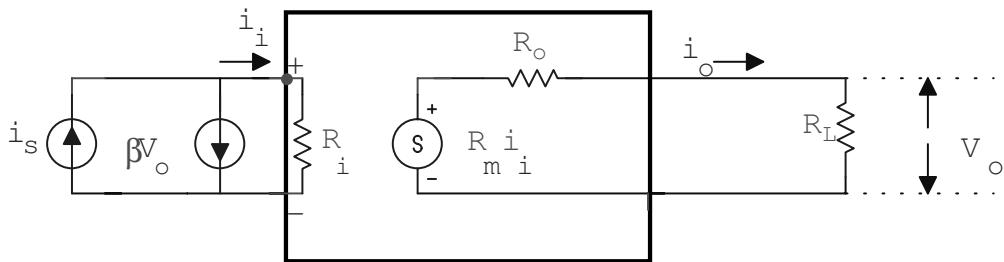


Figura 15.9: Feedback tensione-parallelo per un alimentatore a transresistenza.

è:

$$R_{if} = \frac{V_i}{I_s} = \frac{R_i I_i}{I_s} \quad (15.22)$$

Le equazioni di maglia risultano essere in questo caso

$$I_s = I_i + \beta V_o \quad (15.23)$$

per quella di ingresso e

$$V_o = R_m I_i \frac{R_L}{R_o + R_L} = R_M I_i \quad (15.24)$$

per quella di uscita, dove $R_M = R_m R_L / (R_o + R_L)$ è il guadagno dell'amplificatore in assenza di feedback ma in presenza del carico esterno. Si ha allora

$$I_s = I_i (1 + \beta R_M) \quad (15.25)$$

da cui discende

$$R_{if} = \frac{R_i I_i}{I_s} = \frac{R_i}{1 + \beta R_M} \quad (15.26)$$

Come nel caso precedente, l'impedenza d'ingresso diminuisce dell'identico fattore $1 + \beta A$, $A = R_M$ essendo il guadagno dell'amplificatore in assenza di reazione.

15.4.2 Considerazioni generali

Poiché gli ultimi due casi esaminati avevano come caratteristica comune la reazione in parallelo (cioè di corrente) nella maglia d'ingresso, vediamo che è tale caratteristica a determinare la diminuzione dell'impedenza d'ingresso.

Abbiamo visto quindi che, se il segnale di feedback viene riportato in ingresso sotto forma di un segnale di tensione (cioè in serie) l'impedenza d'ingresso aumenta, mentre essa diminuisce se il feedback è parallelo (corrente). Ciò indipendentemente dal tipo di campionamento in uscita (tensione o corrente). Ciò può esser facilmente compreso se si pensa che, nel caso in cui il feedback (negativo) sia di tensione, questo farà sì che la tensione ai capi di R_i sia minore della tensione del generatore, che ha un valore costante V_s . Di conseguenza è minore la corrente che fluisce in R_i e, poiché tale corrente è erogata in ultima analisi dal generatore, il rapporto tra tensione e corrente erogata, cioè la resistenza d'ingresso, sarà maggiore.

Se invece si realizza un feedback (negativo) di corrente, avremo una minor corrente in R_i , il che implica una minore differenza di potenziale ai capi di R_i . Poiché ora ciò avviene ad I_s costante, la resistenza d'ingresso V_i/I_s è minore di quella che si avrebbe in assenza di feedback.

15.4.3 Impedenze d'uscita

Ciò che determina l'impedenza di uscita per un amplificatore reazionato è il tipo di campionamento in uscita, indipendentemente dal confronto effettuato in ingresso. Ricordiamo che l'impedenza di uscita è definita dal rapporto tra la tensione a circuito aperto applicata ai terminali di uscita e la corrente che fluisce nel ramo di uscita con i terminali in corto. Nel caso di un campionamento di tensione, l'effetto del feedback è, come atteso, quello di ridurre la tensione a circuito aperto (rispetto a quella dell'amplificatore non reazionato) della quantità $1 + \beta A$, mentre la corrente a circuito chiuso rimane invariata (infatti a circuito chiuso si annulla la tensione in uscita ed il feedback è nullo). Ne risulta pertanto una diminuzione dell'impedenza di uscita dello stesso fattore. Analogamente, nel caso di campionamento di corrente, il feedback ha l'effetto di ridurre la corrente a circuito chiuso mentre non ha alcun effetto sulla tensione in uscita (a circuito aperto infatti si annullano tanto la corrente di uscita che quella di feedback). Di conseguenza la resistenza d'uscita aumenta del medesimo fattore $1 + \beta A$ di cui diminuisce la corrente.

Feedback con campionamento di tensione

Consideriamo il feedback tensione-serie di figura 15.6. Per calcolare la resistenza d'uscita R_{of} poniamo $V_s = 0$, eliminiamo R_L ed applichiamo tra i terminali d'uscita una differenza di potenziale V_o . Abbiamo allora

$$I_o = \frac{V_o - A_v V_i}{R_o} = \frac{V_o + A_v \beta V_o}{R_o} \quad (15.27)$$

poiché, avendo posto $V_s = 0$ si ha $V_i = -V_f = -\beta V_o$. Ne segue che

$$R_{of} = \frac{V_o}{I_o} = \frac{R_o}{1 + \beta A_v} \quad (15.28)$$

In presenza di un carico R_L finito, l'espressione dell'impedenza d'uscita si modifica come segue:

$$R'_{of} = R_{of} \parallel R_L = \frac{R_o R_L}{(R_o + R_L) \left(1 + \beta \frac{R_L}{R_o + R_L} A_v \right)} \quad (15.29)$$

che dalla definizione di A_V e posto $R'_o = R_o \parallel R_L$, si può riscrivere in forma più compatta come

$$R'_{of} = \frac{R'_o}{1 + \beta A_V} \quad (15.30)$$

Sulla base delle stesse argomentazioni, si può mostrare che per un feedback tensione-parallelo l'impedenza di uscita assume la forma

$$R_{of} = \frac{R_o}{1 + \beta R_m} \quad (15.31)$$

valida per $R_L \rightarrow \infty$ e

$$R'_{of} = \frac{R'_o}{1 + \beta R_M} \quad (15.32)$$

in presenza di carico.

Feedback con campionamento di corrente

Consideriamo infine il caso di un feedback corrente-serie, come quello di figura 15.7. Per calcolare l'impedenza d'uscita, immaginiamo di cortocircuitare V_s , di applicare tra i terminali d'uscita una differenza di potenziale V_o e calcoliamo la corrente I_o . Dall'analisi della maglia d'uscita otteniamo, per la corrente in R_o ,

$$I' = G_m V_i - I_o \quad (15.33)$$

da cui:

$$V_o = R_o I' = G_m V_i R_o - R_o I_o \quad (15.34)$$

mentre per la maglia d'ingresso, essendo $V_s = 0$, vale $V_i = -\beta I_o$. Si ottiene quindi

$$V_o = -G_m R_o \beta I_o - R_o I_o = -R_o I_o (1 + G_m \beta) \quad (15.35)$$

per cui l'impedenza di uscita vale

$$R_{of} = -\frac{V_o}{I_o} = R_o (1 + \beta G_m) \quad (15.36)$$

Quindi, come previsto, l'impedenza d'uscita con feedback risulta aumentata del fattore $1 + \beta G_m$. In presenza di carico, la (15.36) deve essere modificata sostituendo G_m al guadagno in assenza di carico e R'_o a R_o .

Tipo di feedback	R_{if}	R_{of}	R'_{of}
tensione-serie	$R_i(1 + \beta A_V)$	$R_o/(1 + \beta A_v)$	$R'_o/(1 + \beta A_V)$
corrente-serie	$R_i(1 + \beta G_M)$	$R_o(1 + \beta G_m)$	$R'_o/(1 + \beta G_M)$
tensione-parallelo	$R_i/(1 + \beta R_M)$	$R_o/(1 + \beta R_m)$	$R'_o/(1 + \beta R_M)$
corrente-parallelo	$R_i/(1 + \beta A_I)$	$R_o(1 + \beta A_i)$	$R'_o/(1 + \beta A_I)$

Tabella 15.2: Sommario delle impedenze di ingresso/uscita nei casi esaminati di amplificatori con reazione.

15.5 Analisi dei circuiti con feedback

15.5.1 Individuazione del tipo di reazione

Per determinare il tipo di reazione più appropriato ad un amplificatore occorre individuare il tipo di segnale (tensione o corrente) prelevato all'uscita dell'amplificatore ed il modo (seriale o parallelo) in cui esso viene confrontato con il segnale in ingresso. A questo scopo, può essere utile seguire i seguenti criteri generali.

Per identificare il tipo di campionamento, si consideri che, in presenza di un carico esterno:

- segnaleti di tensione: si annulla se i terminali di uscita sono cortocircuitati ($R_L = 0$) mentre rimane invariato se sono aperti ($R_L \rightarrow \infty$);
- segnaleti di corrente: si annulla se i terminali di uscita sono aperti mentre rimane invariato se sono cortocircuitati.

Per quel che concerne invece il modo (serie o parallelo) in cui il segnale di feedback viene confrontato al segnale in ingresso, si può facilmente intuire che avremo un confronto di tipo “serie” se essa viene effettuata in una maglia; avremo invece una somma di tipo “parallelo” se essa viene effettuata in un nodo. Per chiarire meglio questi concetti analizziamo alcuni esempi.

Amplificatore J-FET “common-source”

Si consideri il circuito di figura 15.10a, che rappresenta un amplificatore a J-FET a canale n nella configurazione common-source. Se V_{gs} aumenta, aumenta anche la corrente nel canale e nelle resistenze R_d ed R_s . Il potenziale del drain diminuisce mentre aumenta quello del source, il che comporta una diminuzione di V_{gs} . Abbiamo quindi un feedback negativo. Vediamo che il campionamento è di corrente; infatti il feedback si annulla se R_d diviene infinitamente grande (con che si annulla la corrente). Esso invece continua ad esser presente se R_d viene cortocircuitata.

Il segnale di feedback è riportato in ingresso sotto forma di una differenza di potenziale ai capi di R_s , che viene connessa in serie alla tensione del generatore nella maglia d'ingresso (e con segno tale da essere sottratta a V_s). Si tratta dunque di un feedback seriale. In definitiva il circuito disegnato è un esempio di feedback corrente-serie.

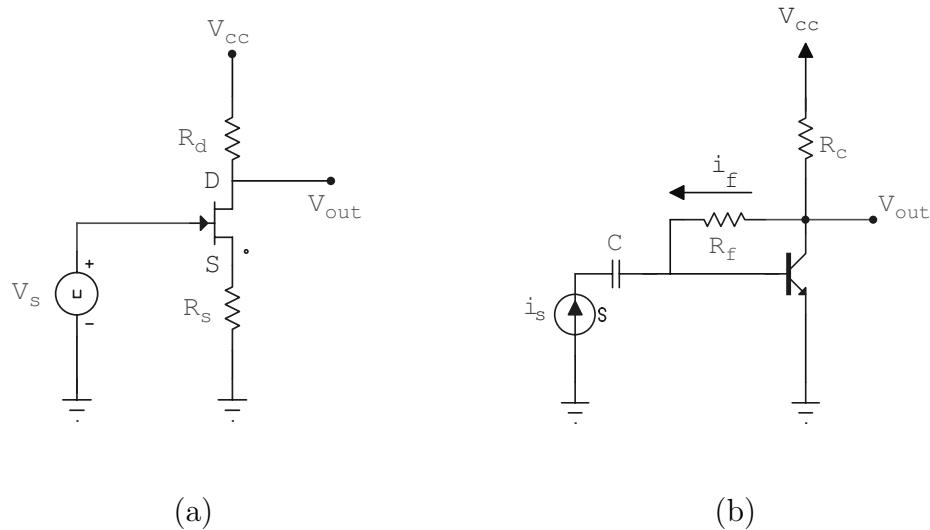


Figura 15.10: Esempio di amplificatori con feedback: (a) J-FET in configurazione common-source (feedback corrente-serie) e (b) transistor bi-polare in configurazione common-emitter (feedback tensione-parallelo).

Transistor bi-polare in common-emitter

Consideriamo invece il circuito di figura 15.10b, in cui un transistor bi-polare npn in configurazione common-emitter viene reazionato dalla resistenza R_f . Cortocircuitando i terminali di uscita si annullerebbe la tensione di collettore V_c (e, conseguentemente, la corrente I_f nel ramo di feedback). Si tratta quindi un campionamento di tensione. Inoltre il segnale di feedback è di corrente, essendo questo derivato dal nodo di ingresso dell'amplificatore (ovvero la base del transistor).

Esaminiamo come ulteriore esempio quello di figura 15.11, in cui un amplificatore con transistor in configurazione common-emitter viene reazionato attraverso lo stesso circuito mostrato in figura 15.10b. Anche in questo caso la rete di feedback ritorna un segnale di corrente che viene derivato dal nodo alla base del transistor (per cui $I_b = I_s - I_f$). La corrente di feedback, essendo prelevata dal source del J-FET, si annullerebbe se la resistenza di carico (R_d nel nostro caso) divenisse infinitamente grande (con che si annullerebbe la corrente in T_2). In conclusione la reazione esaminata è di tipo corrente-parallelo (current-shunt).

Feedback con amplificatori operazionali

I circuiti di figura 15.12 mostrano infine un esempio di ciascuno dei quattro tipi di feedback, nel caso di un amplificatore operazionale. È facile verificare, facendo uso dei criteri esposti, che il tipo di feedback presente in ciascun caso è quello indicato nella figura.

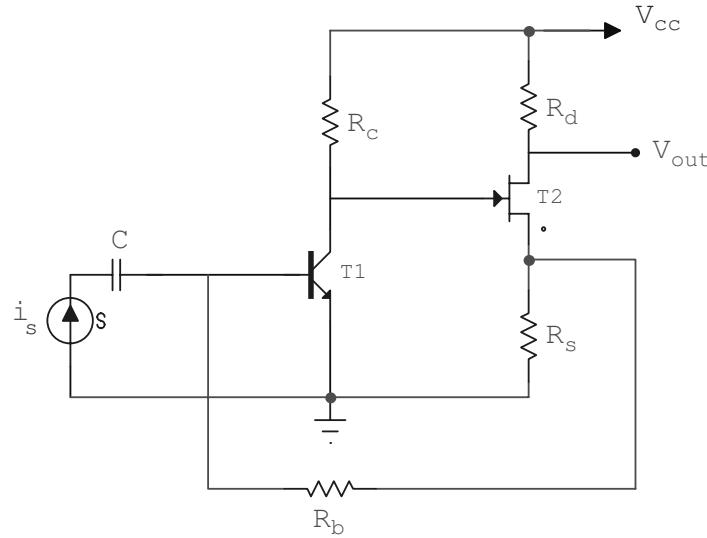


Figura 15.11: Esempio di circuito a due stadi di amplificazione con feedback di tipo corrente-parallelo.

15.5.2 Analisi quantitativa del guadagno

Feedback tensione-parallelo

Esaminiamo ora in dettaglio un esempio di circuito con feedback. Consideriamo il caso di un amplificatore invertente, come quello mostrato in figura 15.13a. in cui un segnale di tensione è prelevato in uscita e riportato sull'ingresso tramite una resistenza di feedback R_f . La polarità del segnale di feedback è tale che la corrente ad esso associata sia sottratta alla corrente erogata dal generatore. Si tratta chiaramente di un feedback “tensione-parallelo”.

Per semplificare l'analisi di tale circuito, è opportuno sostituirlo con il circuito equivalente di figura 15.13b. Qui abbiamo indicato con V_d la differenza di potenziale ai capi della resistenza d'ingresso R_i dell'operazionale. Il circuito di feedback potrebbe in realtà esser più complicato di quello rappresentato da una singola resistenza. Per descrivere tali situazioni potremo sostituire nel circuito equivalente il generatore V_L con kV_L , dove k è una costante.

Scriviamo ora le equazioni per il circuito disegnato. Dalla maglia di sinistra si ottiene

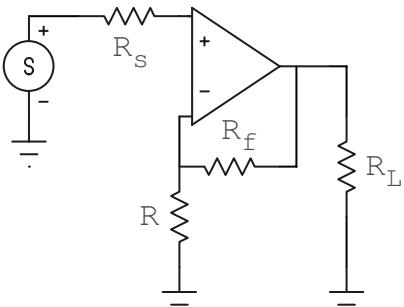
$$I_1 = \frac{V_i + V_d}{R_s} \quad (15.37)$$

$$I_2 = -\frac{V_d + V_L}{R_f} \quad (15.38)$$

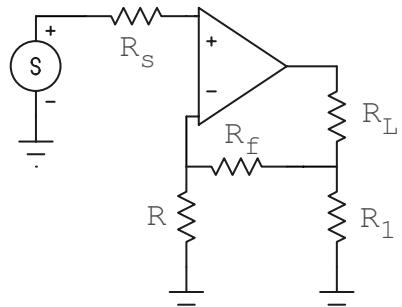
$$I_d = I_1 - I_2 = \frac{V_i + V_d}{R_s} + \frac{V_L + V_d}{R_f} = -\frac{V_d}{R_i} \quad (15.39)$$

Dalla maglia di destra risulta

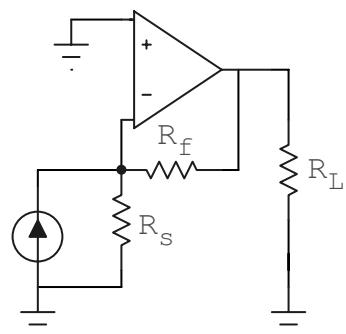
$$I = \frac{A_d V_d + V_d}{R_o + R_f} \quad (15.40)$$



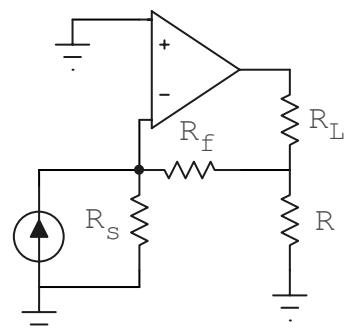
tensione-serie



corrente-serie



tensione-parallelo



corrente-parallelo

Figura 15.12: Possibili configurazioni di feedback negativo realizzate con un amplificatore operazionale.

$$\begin{aligned} V_L &= A_d V_d - R_o I = A_d V_d - \frac{R_o}{R_o + R_f} A_d V_d - \frac{R_o}{R_o + R_f} V_d = \\ &= V_d \left(A_d - A_d \frac{R_o}{R_o + R_f} - \frac{R_o}{R_o + R_f} \right) \end{aligned} \quad (15.41)$$

Se $R_o \ll R_f$, il secondo ed il terzo termine in parentesi sono trascurabili rispetto al primo e si ha

$$V_L \simeq A_d V_d \quad (15.42)$$

Dalla (15.39) si ha invece

$$V_d \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i} \right) = -\frac{V_i}{R_s} - \frac{V_L}{R_f} \quad (15.43)$$

Trascurando il termine $1/R_i$ rispetto agli altri due termini in parentesi e facendo uso della (15.42), l'ultima equazione scritta diventa

$$\frac{V_L}{A_d} \frac{R_f + R_s}{R_f R_s} + \frac{V_L}{R_f} = -\frac{V_i}{R_s} \quad (15.44)$$

da cui si ottiene

$$V_L = -\frac{(A_d V_i / R_s) R_{fs}}{1 + (A_d / R_f) R_{fs}} \quad (15.45)$$

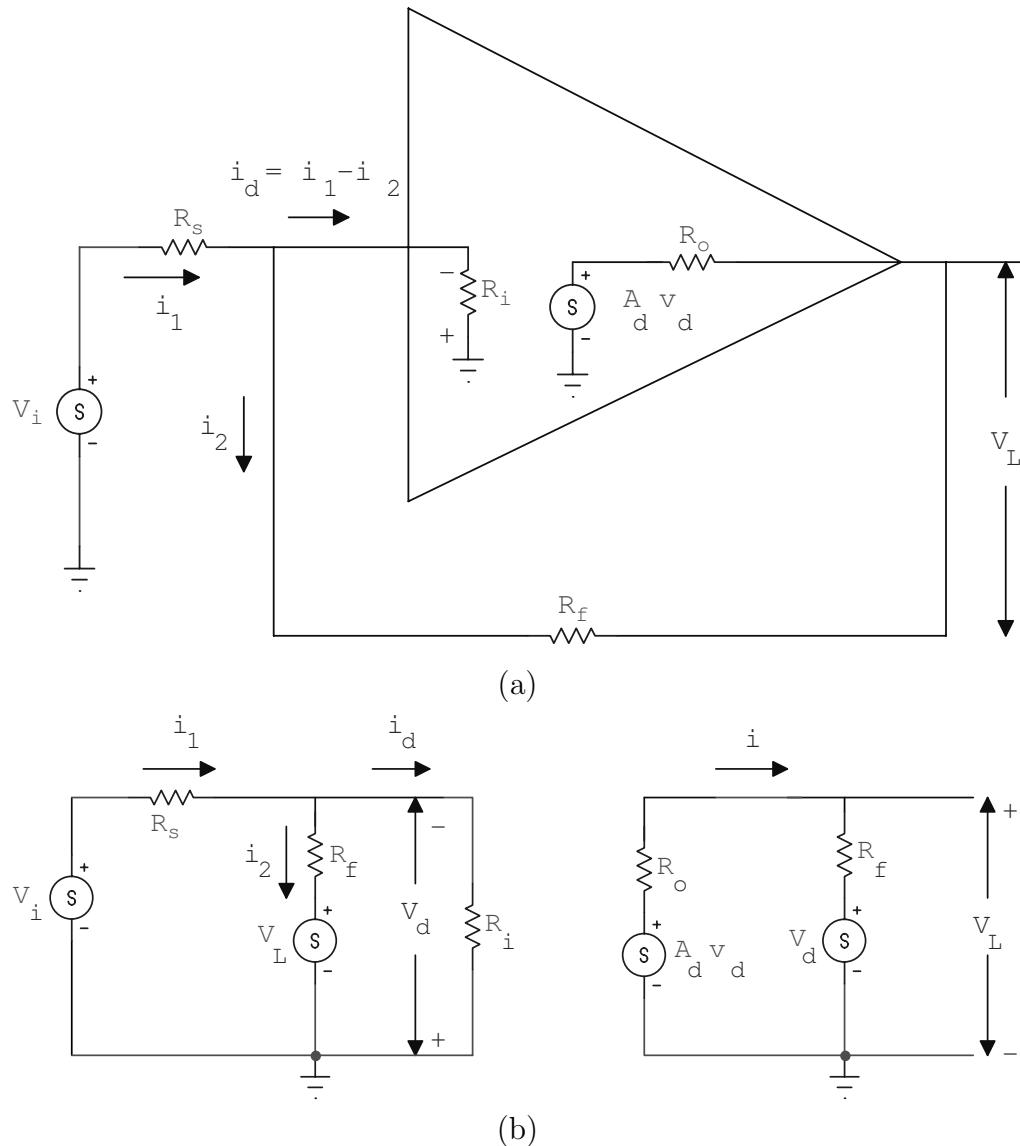


Figura 15.13: (a) Amplificatore invertente realizzato in configurazione tensione-parallelo e (b) suo circuito equivalente.

avendo posto $R_{fs} \equiv R_f \| R_s = R_f R_s / (R_f + R_s)$. Nel caso in cui il termine

$$\frac{R_{fs}}{R_f} A_d \quad (15.46)$$

che compare a denominatore della (15.45) sia molto maggiore di 1, la (15.45) si semplifica come segue

$$V_L = -V_i \frac{R_f}{R_s} \quad (15.47)$$

ovvero la tensione d'uscita non dipende più dal parametro A_d .

Il termine (15.46) costituisce il cosiddetto “guadagno di maglia” (loop gain). Si può facilmente verificare che esso coincide (a parte il segno) con il guadagno della catena quando si supponga nulla l'eccitazione esterna V_i . Infatti, in tal caso il

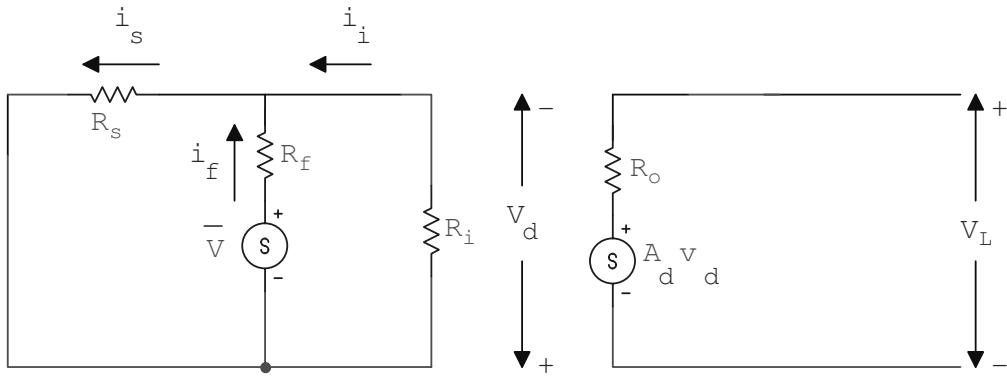


Figura 15.14: Circuito equivalente all'amplificatore invertente, con $V_i = 0$ e $V_L = A_d V_d$.

circuito diventa quello della figura 15.14, in cui l'eccitazione è costituita da \bar{V} , mentre l'uscita è, come prima, V_L . Nel ramo destro abbiamo fatto uso dell'approssimazione (15.42). Il guadagno di maglia (loop gain) sarà ora calcolabile facendo uso delle seguenti equazioni:

$$I_s = I_f + I_i \quad (15.48)$$

con:

$$I_f = \frac{\bar{V} + V_d}{R_f} \quad (15.49)$$

$$I_i = \frac{V_d}{R_i} \quad (15.50)$$

$$I_s = -\frac{V_d}{R_s} \quad (15.51)$$

da cui

$$\frac{\bar{V} + V_d}{R_f} + \frac{V_d}{R_i} = -\frac{V_d}{R_s} \quad (15.52)$$

e infine

$$V_d \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s} \right) = -\frac{\bar{V}}{R_f} \quad (15.53)$$

Trascurando $1/R_i$ rispetto agli altri termini in parentesi e facendo uso della (15.42) questa diviene

$$\frac{V_L}{A_d} \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_s} \right) = -\frac{\bar{V}}{R_f} \quad (15.54)$$

ed il guadagno di maglia sarà:

$$\frac{V_L}{\bar{V}} = -A_d \frac{R_{fs}}{R_f} \equiv -A_d \beta \quad (15.55)$$

essendo $\beta = R_{fs}/R_f$ il fattore di feedback.

Il termine $-A_d R_{fs}/R_s$ che compare a numeratore della (15.45) costituisce il guadagno in assenza di feedback. Questo è calcolabile a partire dal circuito equivalente di figura 15.15. L'assenza del feedback consiste qui nell'assenza della sorgente

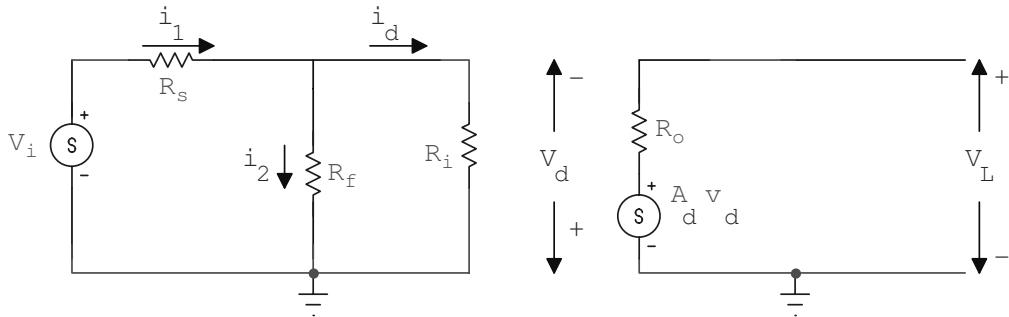


Figura 15.15: Circuito equivalente all'amplificatore invertente, in assenza della sorgente V_L nel ramo sinistro e della sorgente V_d nel ramo destro.

dipendente V_L nel ramo sinistro e nella simultanea assenza della sorgente V_d in serie con R_f nel ramo destro di figura 15.13b. Il guadagno di questo circuito è ora ottenibile dalle equazioni:

$$V_d = -\frac{V_i}{R_s + R_{if}} R_{if} \simeq -V_i \frac{R_f}{R_s + R_f} = -V_i \frac{R_{fs}}{R_s} \quad (15.56)$$

dove si è assunto $R_i \gg R_f$. Inoltre è

$$V_L = A_d V_d = -A_d \frac{R_{fs}}{R_s} V_i \quad (15.57)$$

per cui il guadagno a catena aperta è

$$A_o \equiv \frac{V_L}{V_i} = -A_d \frac{R_{fs}}{R_s} \quad (15.58)$$

Facendo ora uso delle equazioni (15.45), (15.55) e (15.58), il guadagno complessivo può esser messo nella forma

$$A_V = \frac{V_L}{V_i} = -\frac{A_d R_{fs}/R_s}{1 + A_d R_{fs}/R_f} = \frac{A_o}{1 + A_d \beta} \quad (15.59)$$

Se $-A_d \beta$ diviene grande rispetto ad 1, il guadagno A_V dell'amplificatore con feedback tende a:

$$A_V \rightarrow -\frac{R_f}{R_s} \quad (15.60)$$

cioè diviene indipendente dal guadagno intrinseco A_d dell'amplificatore. Questo conferma che al crescere del guadagno di maglia, il guadagno con feedback diventa sempre meno sensibile a variazioni di temperatura o a variazioni dei parametri dei componenti che costituiscono l'amplificatore.

Feedback tensione-serie

Analizziamo ora in dettaglio il caso, già discusso in precedenza, di un amplificatore operazionale in configurazione non-invertente. Si consideri lo schema di figura 15.16a ed il suo equivalente di figura 15.16b, in cui $V'_L = V_L$ e V_d indica la differenza di

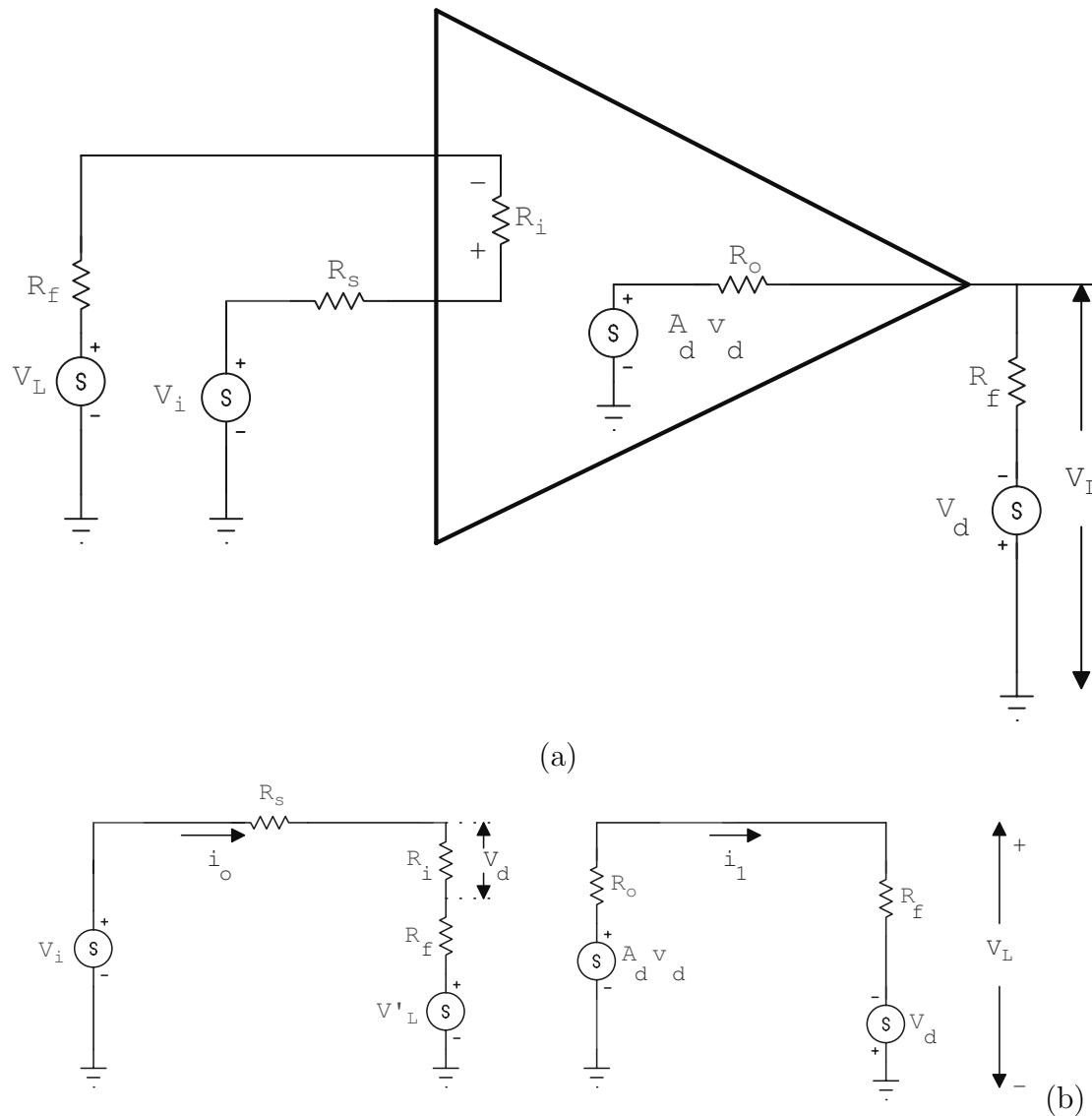


Figura 15.16: (a) Amplificatore non-invertente realizzato in configurazione tensione-serie e (b) suo circuito equivalente.

potenziale ai capi di R_i . Cominciamo col calcolare il guadagno a catena aperta (cioè in assenza di feedback), definito da:

$$A_o = \left(\frac{V_L}{V_i} \right)_{V'_L=0} \quad (15.61)$$

Possiamo scrivere:

$$\left(\frac{V_L}{V_i} \right)_{V'_L=0} = \left(\frac{V_L}{V_d} \right)_{V'_L=0} \left(\frac{V_d}{V_i} \right) \quad (15.62)$$

dove il primo termine a secondo membro può esser ottenuto facendo uso della maglia di sinistra ed il secondo di quella di destra. Da quest'ultima otteniamo:

$$V_L = R_f I_1 - V_d \quad (15.63)$$

con:

$$I_1 = \frac{A_d V_d + V_d}{R_o + R_f} = \frac{V_d}{R_o + R_f} (1 + A_d) \quad (15.64)$$

da cui:

$$V_L = \frac{V_d}{R_o + R_f} (R_f A_d - R_o) \quad (15.65)$$

$$\left(\frac{V_L}{V_d} \right)_{V'_L=0} = \frac{R_f A_d - R_o}{R_o + R_f} \quad (15.66)$$

Dalla maglia di sinistra otteniamo poi:

$$\left(\frac{V_d}{V_i} \right)_{V'_L=0} = \frac{R_i}{R_s + R_i + R_f} \quad (15.67)$$

e quindi:

$$\left(\frac{V_L}{V_i} \right)_{V'_L=0} = \frac{R_f A_d - R_o}{R_o + R_f} \frac{R_i}{R_s + R_i + R_f} \quad (15.68)$$

Se ora facciamo l'approssimazione:

$$R_o \ll R_f \quad (15.69)$$

$$R_f + R_s \ll R_i \quad (15.70)$$

si ottiene:

$$A_o = \left(\frac{V_o}{V_i} \right)_{V'_L=0} \approx A_d \quad (15.71)$$

che costituisce il guadagno in assenza di feedback. Il guadagno di maglia $A_d\beta$ può esser ottenuto dal circuito equivalente di figura 15.17: Con riferimento ai componenti

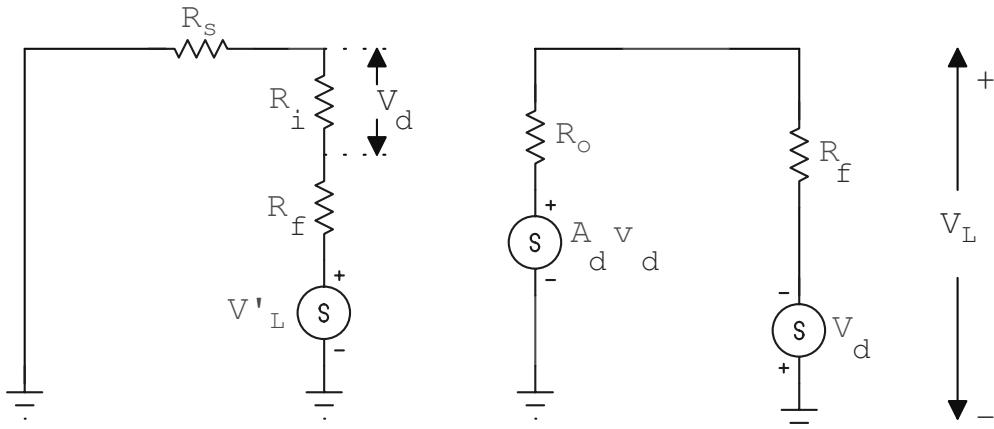


Figura 15.17: Circuito equivalente all'amplificatore non-invertente, con $V_i = 0$.

indicati in figura, otteniamo per il prodotto $A_d\beta$, definito al solito come:

$$A_d\beta \equiv \left(\frac{V_L}{V'_L} \right)_{V_i=0} = \frac{V_L}{V_d} \frac{V_d}{V'_L} = \frac{R_f A_d - R_o}{R_o + R_f} \left(\frac{-R_i}{R_s + R_i + R_f} \right) \quad (15.72)$$

che, nella medesima approssimazione già adottata in precedenza è uguale a $-A_d$. Il guadagno con reazione sarà allora:

$$A_r = \frac{V_L}{V_i} = \frac{A_o}{1 - A_d\beta} = \frac{A_d}{1 + A_d} \quad (15.73)$$

Se nell'esempio fatto avessimo avuto un feedback $V'_L = kV_L$ (anziché $V'_L = V_L$) avremmo trovato:

$$A_r = \frac{A_d}{1 + kA_d} \quad (15.74)$$

che tende ad $1/k$ per A_d molto grande.

15.6 Stabilità negli amplificatori con feedback

In un amplificatore la cui configurazione di feedback sia schematizzabile come in figura 15.1, sia il guadagno a circuito aperto che il fattore di feedback potrebbero essere funzioni della frequenza. È quanto accade, a titolo di esempio, nel caso di un circuito integratore realizzato con un amplificatore operazionale in configurazione invertente. Da un lato l'operazionale ha, a frequenze relativamente basse, una funzione di trasferimento con un polo del primo ordine in corrispondenza della frequenza di taglio superiore (esprimibile secondo la (15.9)); dall'altro il ramo di feedback utilizza un parallelo tra una capacità ed una resistenza ed anch'esso funzione della frequenza. Pertanto anche il guadagno a circuito chiuso è una funzione (complessa) della frequenza esprimibile nella sua forma più generale dalla

$$A_f(s) = \frac{A(s)}{1 + \beta(s)A(s)} \quad (15.75)$$

Per semplicità, limitiamoci a considerare il caso in cui l'amplificatore abbia un guadagno A_0 a basse frequenze, con poli e zeri ad alte frequenze. Assumiamo che anche il fattore di feedback sia costante a basse frequenze. Nello stesso dominio di frequenze anche il prodotto βA diventa una costante esprimibile da una numero reale, che deve essere positivo perché il feedback sia negativo. Resta da studiare la condizione di stabilità a frequenze maggiori.

A frequenze fisiche $s = j\omega$, l'equazione precedente si riscrive

$$A_f(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + \beta(j\omega)A(j\omega)} \quad (15.76)$$

Rappresentiamo ora il loop gain in termini del suo modulo e della sua fase,

$$L(j\omega) \equiv \beta(j\omega)A(j\omega) = |\beta(j\omega)A(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (15.77)$$

Ciò che determina la stabilità dell'amplificatore reazionato è allora la variazione del loop gain con la frequenza. Si consideri infatti la frequenza per cui la fase $\varphi(\omega) = \pi$. A questa frequenza (che indicheremo con ω_π), L è un numero reale negativo, per cui il feedback diventerà positivo. Se il modulo di $L(j\omega_\pi)$ è minore di 1, l'amplificatore rimane stabile. Se invece il modulo di $L(j\omega_\pi)$ è uguale ad 1, allora, come segue dalla (15.76), $A_f(j\omega)$ diverge. Questo implica che l'amplificatore può avere

un'uscita diversa da zero anche in assenza di ingresso, ciò che si realizza in presenza di oscillazioni. Quella appena descritta è nota come condizione di Barkhausen. Per cercare di capire come il sistema sia in grado di sostenere un'oscillazione, si consideri il circuito di figura 15.1 con $x_s = 0$. Qualsiasi perturbazione può indurre un segnale di rumore x_i all'ingresso dell'amplificatore, con un ampio spettro di frequenza. Per le componenti a bassa frequenza, dove βA è costante e positivo, il guadagno dell'amplificatore è minore di 1; l'ampiezza di queste oscillazioni viene attenuata ad ogni loop successivo fino a smorzarsi. Per la componente a frequenza ω_π si ha invece che

$$x_f = \beta(j\omega)A(j\omega)x_i = -x_i \quad (15.78)$$

Il segnale di errore rimane allora costante; infatti, al feedback successivo, si ha $x'_i = x_s - x_f = -x_f = x_i$. Questo implica che all'ingresso e all'uscita dell'amplificatore c'è un segnale sinusoidale di frequenza ω_π tale da soddisfare la condizione di Barkhausen. Lo studio delle condizioni di oscillazione verrà approfondito nel prossimo capitolo.

La verifica della stabilità di un amplificatore con feedback può seguire un approccio formale mediante l'uso del plot di Nyquist, un esempio del quale è mostrato in figura 15.18, che rappresenta nel piano complesso la variazione del loop gain in funzione della frequenza. Poiché il modulo di L è una funzione pari della frequenza, mentre la fase è una funzione dispari, il plot di Nyquist è simmetrico rispetto all'asse reale.

A basse frequenze ($\omega \rightarrow 0$), L è reale e positivo. Per frequenze crescenti, il modulo di L diminuisce e tende a 0 per $\omega \rightarrow \infty$, mentre la sua fase aumenta. Il plot di Nyquist interseca l'asse reale negativo alla frequenza ω_π . Se il punto di intersezione giace a destra del punto di coordinate $(-1, 0)$, l'amplificatore rimane stabile anche in presenza di feedback positivo; d'altra parte, se $L(j\omega_\pi) < -1$, allora l'amplificatore è instabile. In maniera equivalente, si può affermare che l'amplificatore diventa instabile se il plot di Nyquist circonda il punto $(-1, 0)$.

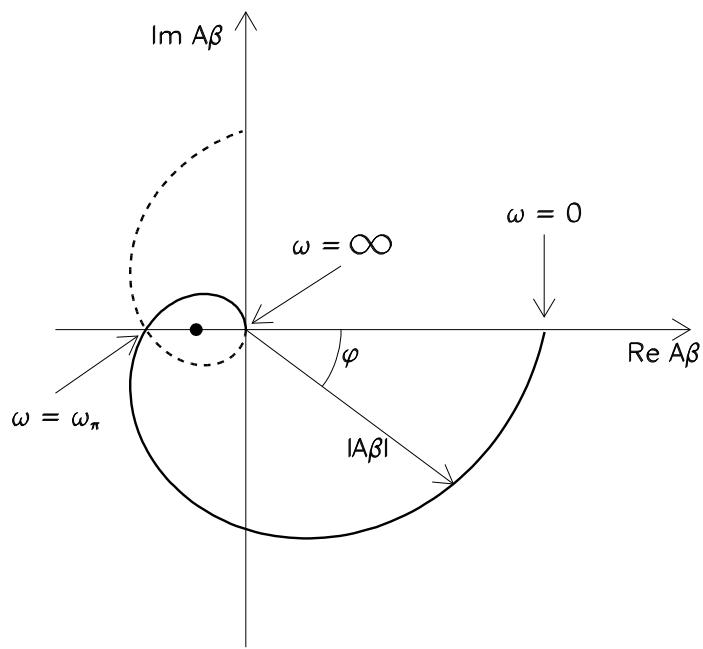


Figura 15.18: Plot di Nyquist per un amplificatore reazionato instabile. Il punto segnato sul grafico alla coordinata $(-1,0)$ rappresenta il polo del primo ordine della funzione di trasferimento dell'amplificatore reazionato (condizione di Barkhausen). La linea è continua (rispettivamente tratteggiata) per $\omega > 0$ (< 0).

Capitolo 16

Oscillatori sinusoidali

16.1 Introduzione

Consideriamo un amplificatore a banda larga (vedi figura 16.1), seguito da un circuito (attivo o passivo) che fornisce in uscita una frazione (β) del segnale presente al suo ingresso.

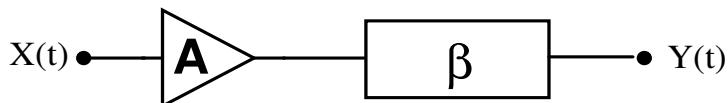


Figura 16.1: Amplificatore a banda larga seguito da un circuito (attivo o passivo) che fornisce in uscita una frazione del segnale presente al suo ingresso.

Avremo all'uscita: $Y(t) = A\beta X(t)$. Se il segnale presente all'ingresso è sinusoidale, l'uscita $Y(t)$ sarà anch'essa sinusoidale. L'effetto della funzione di trasduzione $A\beta$ è quello di modificare fase ed ampiezza del segnale presente in ingresso.

Se $A\beta$ è tale da non modificare, ad una certa frequenza f_0 , né l'ampiezza né la fase del segnale presente in ingresso, cioè se per $f = f_0$ è $A\beta = 1$ (reale), allora potremo pensare di utilizzare $Y(t)$ al posto dell'ingresso $X(t)$ ed aspettarci che il sistema mantenga delle oscillazioni (eventualmente smorzate) di frequenza f_0 .

Ciò è quanto in realtà avviene. Il circuito descritto dalla funzione di trasferimento β è il circuito di feedback (o di reazione). La condizione $A\beta = 1$ è nota come “condizione di Barkhausen”. Essa deve essere verificata ad una sola frequenza.

Il circuito di feedback nel caso generale può esser disegnato come in figura 16.2.

Avremo:

$$e(t) = X(t) + \beta X'(t)$$

$$X'(t) = Ae(t) = AX(t) + A\beta X'(t)$$

da cui:

$$X'(t)(1 - A\beta) = AX(t)$$

$$X'(t) = \frac{A}{1 - A\beta} X(t) \quad (16.1)$$

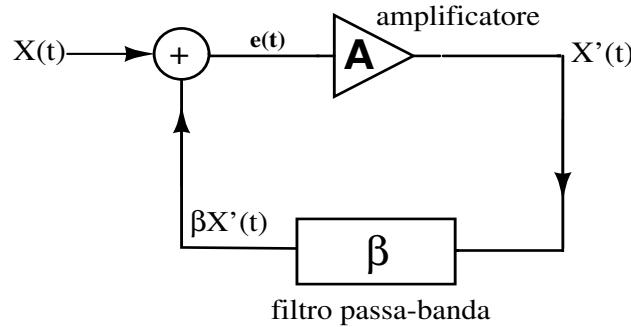


Figura 16.2: Circuito di feedback nel caso generale.

Se definiamo un “guadagno con feedback”, A_f , come:

$$A_f = \frac{X'(t)}{X(t)} \quad (16.2)$$

vediamo che:

$$A_f = \frac{A}{1 - A\beta} \quad (16.3)$$

che va ad infinito per $A\beta = 1$ (reale). Ciò implica che, con $X(t) = 0$, il sistema avrà un valore finito del segnale in uscita $X'(t)$.

La condizione di Barkhausen dovrà essere soddisfatta ad una sola frequenza f_0 (frequenza di oscillazione) che è quella che annulla la parte immaginaria di $A\beta$. La condizione che $A\beta = 1$ per $f = f_0$ (che cioè sia uguale ad 1 la parte reale), viene poi adoperata per determinare gli altri parametri dell'amplificatore e della rete di reazione.

Esaminiamo più in dettaglio il circuito con feedback, che è ridisegnato in figura 16.3.

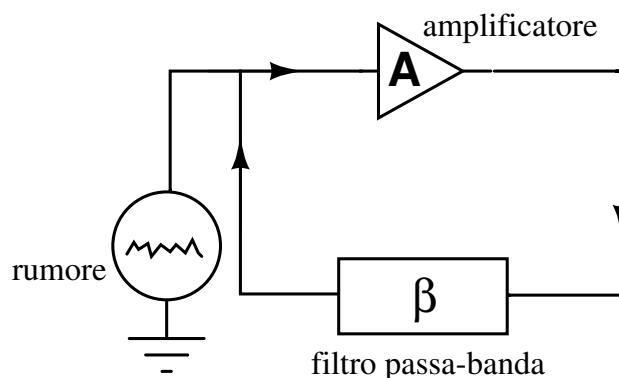


Figura 16.3: Il medesimo circuito con feedback di figura 16.2, dove è stata evidenziata la sorgente di rumore (in realtà interna ai componenti) che innesca le oscillazioni

Qui abbiamo indicato esplicitamente un componente finora ignorato, il *rumore*. Rumore è presente in tutti i componenti del circuito, ed esso si estende sull'intero spettro di frequenze. Per evidenziarne la presenza lo attribuiamo ad una sorgente fittizia, esterna al circuito. Questa è una schematizzazione che, come si vedrà nel capitolo dedicato al rumore, è spesso adottata.

L'amplificatore, a larga banda, amplifica tutte le componenti di Fourier presenti nel rumore in ingresso, mentre il filtro, a banda molto stretta, consente la trasmissione, nella rete di feedback, di una componente soltanto. Vediamo così che solo questa può, dopo un gran numero di passaggi attraverso la catena amplificatore-filtro, acquistare un'ampiezza apprezzabile. Notiamo che è solo grazie alla presenza del rumore che il circuito può oscillare!

Ci si può chiedere se il segnale alla frequenza del filtro, f_0 , non finirà con l'esser amplificato così tanto da saturare l'amplificatore. Ciò non avviene grazie al carattere non lineare di un qualsiasi amplificatore. Ciò significa che se il segnale all'ingresso ha ampiezza doppia, l'output non sarà necessariamente raddoppiato, ma potrà eventualmente aumentare solo di una piccola percentuale.

Esamineremo nell'appendice A l'effetto, sui circuiti oscillanti, della caratteristica non lineare del transistor bipolare a giunzione.

16.2 Realizzazione di un oscillatore sinusoidale

Per realizzare un oscillatore sinusoidale dobbiamo costruire un circuito con retroazione positiva che, ad una ben determinata frequenza, soddisfi le due condizioni seguenti:

- lo sfasamento complessivo lungo l'intera maglia deve essere uguale a zero o 2π ;
- il guadagno in tensione lungo l'intera maglia deve valere 1.

Queste due condizioni possono poi esser ottenute in due modi diversi:

- a) facendo uso di un amplificatore a larga banda ed una rete passiva di reazione che abbia una buona selettività, che cioè realizzi la condizione di Barkhausen alla frequenza desiderata f_0 ;
- b) adoperando un elemento (amplificatore o altro) che, alla frequenza f_0 , introduca uno sfasamento di $\pi/2$ seguito da un secondo elemento che, alla stessa frequenza, introduca uno sfasamento di $-\pi/2$, rispettando la condizione che il modulo di $A\beta$ sia uguale ad 1.

Ci occuperemo, per cominciare, degli oscillatori sinusoidali del primo tipo. Questi possono a loro volta essere suddivisi in due classi:

- quelli in cui la rete passiva introduce uno sfasamento di π ; in tal caso l'amplificatore dovrà essere invertente;
- quelli in cui la rete passiva non introduce alcuno sfasamento; in tal caso l'amplificatore dovrà essere non-invertente.

Va infine notato che la condizione $|A\beta| = 1$ non sarà mai rigorosamente soddisfatta da un circuito reale. Anche se essa lo fosse “a circuito spento”, la variazione dei parametri fisici della rete con la temperatura potrebbe far sì che la condizione non fosse più soddisfatta a circuito acceso. Se $|A\beta|$ è minore di uno l’oscillazione si estinguerebbe rapidamente. Il guadagno a catena aperta $|A\beta|$ va quindi scelto maggiore di uno per evitare che le oscillazioni si smorzino. Una buona regola è che $|A\beta|$ sia maggiore di uno di circa il 5%. Tuttavia, perché il sistema sia stabile, occorre che se l’ampiezza del segnale generato aumenta, il guadagno diminuisca. In altre parole, la derivata dA/dV_0 deve esser negativa e di valore relativamente grande. Ciò può esser ottenuto in modo automatico, come accennato in precedenza, se si utilizza come elemento attivo un transistor bipolare, intrinsecamente non-lineare. Alternativamente si può inserire nel circuito degli elementi non-lineari, quali dei diodi. L’effetto della non-linearità è quello di *limitare* l’escursione delle oscillazioni e riportare il circuito in zona lineare. Su ciò torneremo più avanti.

Una caratteristica importante di un buon oscillatore è la *stabilità in frequenza*. La frequenza di oscillazione potrebbe variare al variare della temperatura, a seguito dell’invecchiamento dei componenti, etc.. Per una buona stabilità in frequenza è opportuno che lo sfasamento complessivo, cioè la fase ϕ di $A\beta$ sia, in prossimità della frequenza di risonanza f_0 , una funzione rapidamente variabile della frequenza. Se infatti $d\phi/df|_{f_0}$ è grande, una piccola deviazione della frequenza da f_0 darà luogo ad una grande deviazione dello sfasamento dal valore 0 o 2π , necessario per sostenere l’oscillazione.

I circuiti che analizzeremo nella prima parte di questo capitolo fanno uso di reti di reazione costituite da elementi reattivi di tipo resistivo e capacitivo. Oscillatori di questo tipo possono facilmente coprire il range di frequenze fino a diverse decine di kHz. Analizzeremo successivamente circuiti oscillanti con elementi reattivi di tipo capacitivo ed induttivo, che coprono frequenze fino a qualche MHz. Rientrano in questa categoria gli schemi classici “Colpitts” e “Hartley”. Per frequenze ancora più alte (o semplicemente per una migliore stabilità in frequenza) si fa ricorso ad oscillatori a cristallo. Questi saranno discussi nell’ultima parte del capitolo.

16.3 L’oscillatore a sfasamento

In tale tipo di oscillatore viene adoperato un amplificatore invertente, seguito da tre celle RC (o RL) in cascata, tali da fornire uno sfasamento complessivo di 180° . La necessità di adoperare tre celle è dovuta al fatto che lo sfasamento introdotto da ciascuna cella è sicuramente inferiore a 90° .

Il circuito appare come in figura 16.4.

Se ammettiamo che l’impedenza d’ingresso dell’amplificatore sia infinitamente grande e quella d’uscita nulla, il circuito equivalente sarà quello di figura 16.5, dove compare il generatore dipendente $A_v v_1$.

Per questo circuito, con le notazioni indicate in figura, abbiamo le seguenti equazioni:

$$i'' = \frac{v_1}{Z_2}$$

$$v'' = (Z_1 + Z_2)i'' = (Z_1 + Z_2)\frac{v_1}{Z_2}$$

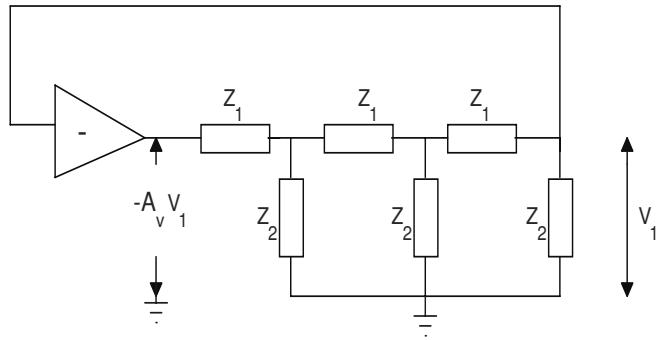


Figura 16.4: Oscillatore a sfasamento costituito da un amplificatore invertente seguito da tre celle RC o RL in cascata.

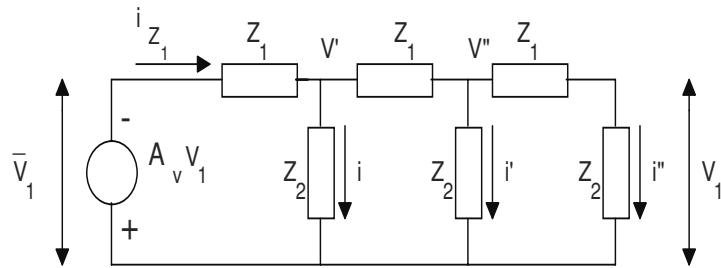


Figura 16.5: Circuito equivalente all'oscillatore a sfasamento di figura 16.4.

$$i' = \frac{v''}{Z_2} = (Z_1 + Z_2) \frac{v_1}{Z_2^2}$$

$$v' = v'' + Z_1(i' + i'') = (Z_1 + Z_2) \frac{v_1}{Z_2} + \left[\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2^2} + \frac{1}{Z_2} \right] Z_1 v_1$$

da cui:

$$v' = v_1 \left[3 \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 + 1 \right]$$

$$i = \frac{v'}{Z_2} = \frac{v_1}{Z_2} \left[\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 + 3 \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) + 1 \right]$$

$$i_{Z_1} = i + i' + i'' = \frac{v_1}{Z_2} \left[\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 + 3 \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) + 1 \right] + \frac{v_1}{Z_1} \left[\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 \right] + \frac{v_1}{Z_2}$$

Con riferimento alla figura 16.5, il feedback β è nel nostro caso: $\beta = \frac{v_1}{\bar{v}_1}$. Calcoliamo \bar{v}_1 :

$$\bar{v}_1 = v' + Z_1 i_{Z_1} = v_1 \left[\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^3 + 5 \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 + 6 \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) + 1 \right]$$

da cui:

$$\beta = \frac{1}{(\frac{Z_1}{Z_2})^3 + 5(\frac{Z_1}{Z_2})^2 + 6(\frac{Z_1}{Z_2}) + 1}$$

e quindi:

$$A\beta = -\frac{A_v}{(\frac{Z_1}{Z_2})^3 + 5(\frac{Z_1}{Z_2})^2 + 6(\frac{Z_1}{Z_2}) + 1}$$

La condizione: $A\beta = 1$ (*reale*) implica:

$$-A_v = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^3 + 5\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 + 6\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) + 1$$

e che entrambi i membri di tale equazione siano reali (essendo A_v reale). Poiché d'altronde Z_1 e Z_2 sono uno reale e l'altro immaginario, ne segue che solo le potenze dispari di Z_1/Z_2 possono contribuire alla parte immaginaria dell'espressione. La condizione di risonanza è allora:

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^3 + 6\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = 0$$

che implica:

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 = -6$$

Da questa si ottiene per A_v :

$$-A_v = 5\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 + 1 = -30 + 1 = -29$$

$$A_v = 29$$

cioè l'amplificatore invertente deve avere un guadagno pari a 29, indipendentemente dal tipo di elemento reattivo considerato.

L'equazione:

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 = -6$$

ci da inoltre il valore della frequenza di oscillazione. Se ad esempio è:

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_2 = R$$

si ha:

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 = -\frac{1}{(\omega RC)^2} = -6$$

da cui:

$$\omega^2 = \frac{1}{6(RC)^2}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{6}RC}$$

Se invece è:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R \\ Z_2 &= \frac{1}{j\omega C} \end{aligned}$$

si ha:

$$\omega = \frac{\sqrt{6}}{RC}$$

Notiamo che oscillatori di questo tipo sono convenienti finché sono trascurabili gli effetti reattivi dell'elemento attivo. Essi vengono pertanto adoperati fino a qualche centinaio di kHz.

Un esempio di oscillatore a sfasamento che utilizza un amplificatore operazionale è quello di figura 16.6.

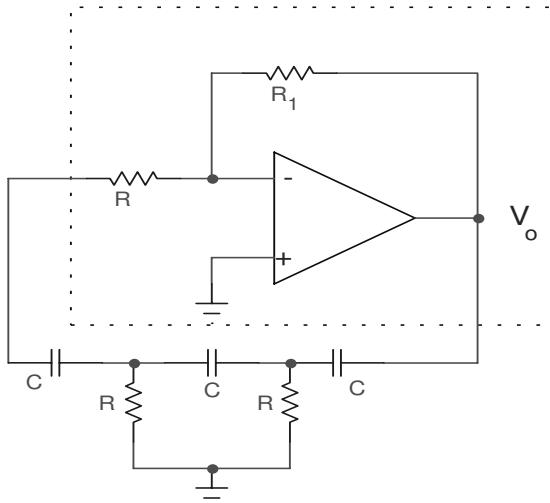


Figura 16.6: Oscillatore a sfasamento che utilizza un amplificatore operazionale.

Notiamo che l'amplificatore, costituito dall'operazionale con la resistenza di feedback R_1 e la resistenza d'ingresso R , ha l'uscita collegata alla rete CR-CR-CR (la terza resistenza R è quella sull'ingresso invertente dell'operazionale, che è una massa virtuale).

Il guadagno dell'amplificatore indicato dal rettangolo tratteggiato è: $A_v = -R_1/R$. La condizione $|A_v| = 29$ richiede che sia $R_1 = 29R$. In realtà, come già detto, è bene che tale condizione sia soddisfatta con un qualche margine (e.g. se $R=1k$ dovrà essere $R_1 \simeq 31k$).

Un oscillatore a sfasamento analogo a questo è indicato nella figura 16.7.

Analizziamo il funzionamento di questo circuito. La condizione di Barkhausen è evidentemente: $v_1 = v_2$ (a catena aperta).

Procedendo in modo analogo a quello seguito nell'analizzare il caso generale discusso in precedenza e facendo uso della variabile complessa s , avremo:

$$v_2 = -R_2 i'$$

$$v' = \frac{i'}{sC} = -\frac{v_2}{sR_2 C}$$

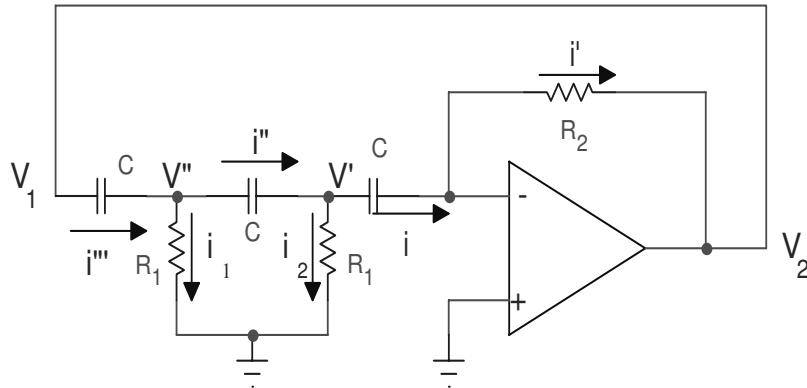


Figura 16.7: Oscillatore a sfasamento che utilizza un amplificatore operazionale.

$$\begin{aligned}
 i_2 &= \frac{v'}{R_1} = -\frac{v_2}{sR_1R_2C} \\
 i'' &= i_2 + i' = -\frac{v_2}{R_2} \left(1 + \frac{1}{sR_1C} \right) \\
 v'' &= v' + \frac{i''}{sC} = -\frac{v_2}{sR_2C} \left(2 + \frac{1}{sR_1C} \right) \\
 i_1 &= \frac{v''}{R_1} = -\frac{v_2}{sR_1R_2C} \left(2 + \frac{1}{sR_1C} \right) \\
 i''' &= i'' + i_1 = -\frac{v_2}{R_2} \left(1 + \frac{3}{sR_1C} + \frac{1}{(sR_1C)^2} \right) \\
 v_1 &= v'' + \frac{i'''}{sC} = -\frac{v_2}{sR_2C} \left(3 + \frac{4}{sR_1C} + \frac{1}{(sR_1C)^2} \right)
 \end{aligned}$$

imponendo la condizione che questo sia uguale a v_2 , otteniamo:

$$R_2 = -\frac{1}{sC} \left(3 + \frac{4}{sR_1C} + \frac{1}{(sR_1C)^2} \right)$$

Poniamo ora: $s = j\omega$. La parte immaginaria dell'espressione scritta per R_2 è:

$$-\frac{3}{\omega C} + \frac{1}{R_1^2 C^3 \omega^3}$$

che si annulla per:

$$\omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}R_1C}$$

Per tale valore di ω , R_2 vale:

$$R_2 = \frac{4}{\omega^2 R_1 C^2} = 12R_1$$

In pratica si sceglierà un valore di R_2 leggermente più alto di questo, diciamo del 5%, se si vuole evitare un rapido smorzamento delle oscillazioni. L'ampiezza di queste sarà limitata dal fatto che, per effetto del feedback, il dispositivo attivo uscirà rapidamente dalla zona lineare.

16.4 Oscillatore a sfasamento a transistor bipolare

Sappiamo che in un amplificatore a transistor ad emettitore comune l'uscita è sfasata di 180° rispetto all'ingresso. Se quindi inseriamo una rete passiva di feedback che introduca un ulteriore sfasamento di 180° e dimensioniamo opportunamente l'attenuazione introdotta dalla rete, possiamo realizzare un oscillatore sinusoidale.

Come negli esempi precedenti, la rete passiva potrà essere ottenuta tramite tre elementi CR-CR-CR, come mostrato in figura 16.8.

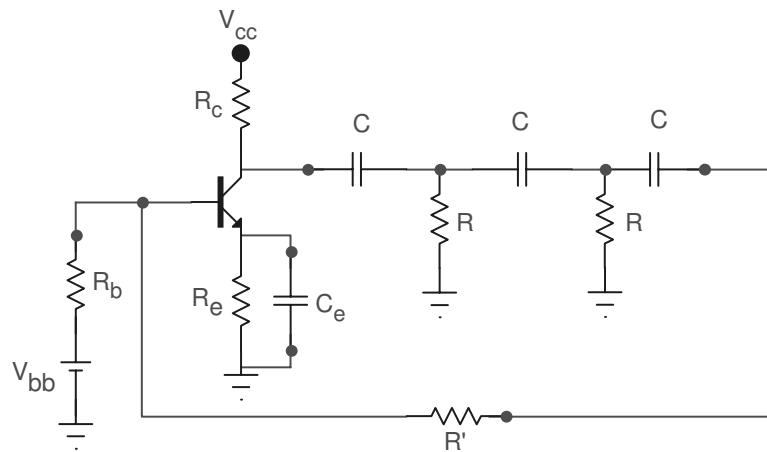


Figura 16.8: Amplificatore a transistor ad emettitore comune con una rete passiva di feedback costituita da tre elementi CR.

Notiamo che la resistenza associata al terzo gruppo CR è costituita dalla resistenza R' in serie con il parallelo di R_b ed h_{ie} . Ammetteremo che sia $R_b \gg h_{ie}$. Per esaminare il comportamento di questo circuito, sostituiamolo al transistor il suo modello a parametri h , ottenendo in tal modo il circuito equivalente mostrato in figura 16.9 (dove abbiamo trascurato h_{re} ed h_{oe}) e dove $R \simeq R' + h_{ie}$.

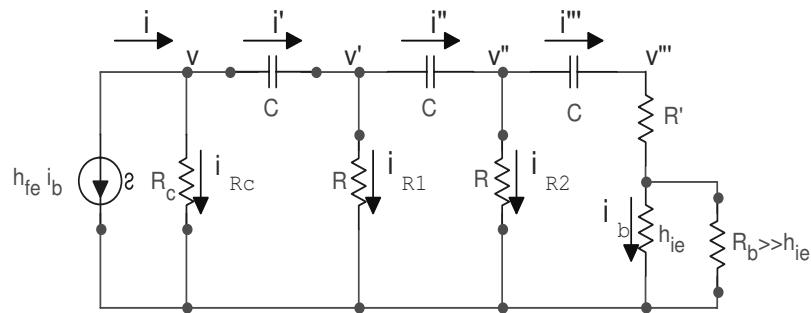


Figura 16.9: Circuito equivalente a quello di figura 16.8 ottenuto col modello a parametri h per il transistor.

Calcoliamo la corrente i a partire da i_b , come fatto negli esempi precedenti.

$$\begin{aligned}
 i''' &= i_b \\
 v''' &= (R' + h_{ie})i_b \approx Ri_b \\
 v'' &= v''' + \frac{i_b}{sC} = i_b \left[R + \frac{1}{sC} \right] \\
 i_{R_2} &= \frac{v''}{R} = i_b \left[1 + \frac{1}{sRC} \right] \\
 i'' &= i''' + i_{R_2} = i_b + i_{R_2} = i_b \left[2 + \frac{1}{sRC} \right] \\
 v' &= v'' + \frac{i''}{sC} = i_b \left[R + \frac{3}{sC} + \frac{R}{(sRC)^2} \right] \\
 i_{R_1} &= \frac{v'}{R} = i_b \left[R + \frac{3}{sRC} + \frac{1}{(sRC)^2} \right] \\
 i' &= i'' + i_{R_1} = i_b \left[3 + \frac{4}{sRC} + \frac{1}{(sRC)^2} \right] \\
 v &= v' + \frac{i'}{sC} = i_b \left[R + \frac{6}{sC} + \frac{5R}{(sRC)^2} + \frac{R}{(sRC)^3} \right] \\
 i_{R_c} &= \frac{v}{R_c} = \frac{i_b R}{R_c} \left[1 + \frac{6}{sRC} + \frac{5}{(sRC)^2} + \frac{1}{(sRC)^3} \right]
 \end{aligned}$$

La corrente nel circuito di collettore è allora:

$$\begin{aligned}
 -h_{fe}i_b &= i = i' + i_{R_c} = \\
 &= i_b \left[3 + \frac{4}{sRC} + \frac{1}{(sRC)^2} + \frac{R}{R_c} + \frac{6}{sR_c C} + \frac{5}{R_c R (sC)^2} + \frac{1}{R_c R^2 (sC)^3} \right] \quad (16.4)
 \end{aligned}$$

L'espressione in parentesi quadra deve, come visto in precedenza, essere reale.

Uguagliando a zero la parte immaginaria (cioè la somma dei termini che contengono potenze dispari di s), otteniamo:

$$\frac{4}{sR} + \frac{6}{(sR_c)} + \frac{1}{s^3 R^2 R_c C^2} = 0$$

cioè, ponendo $s = j\omega$:

$$\frac{4}{R\omega} + \frac{6}{R_c\omega} - \frac{1}{R_c R^2 C^2 \omega^3} = 0$$

da cui si ottiene dopo qualche passaggio:

$$\omega^2 = \frac{1}{(6 + 4\frac{R_c}{R})R^2 C^2}$$

La frequenza di risonanza $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ sarà quindi:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R C \sqrt{6 + 4\frac{R_c}{R}}} \quad (16.5)$$

dalla (16.4), sostituendo il valore ottenuto per ω_0 , si ha:

$$h_{fe} = - \left[3 - \frac{1}{R^2 C^2 \omega_0^2} + \frac{R}{R_c} - \frac{5}{R_c R C^2 \omega_0^2} \right]$$

che, con qualche passaggio si riduce a:

$$h_{fe} = 23 + 29 \frac{R}{R_c} + 4 \frac{R_c}{R}$$

Ponendo $k \equiv \frac{R}{R_c}$, questa diventa:

$$h_{fe} = 23 + 29k + \frac{4}{k}$$

Da questa possiamo ricavare k:

$$k = \frac{R}{R_c} = \frac{h_{fe} - 23}{58} + \sqrt{\left(\frac{23 - h_{fe}}{58}\right)^2 - \frac{4}{29}}$$

Dati h_{fe} ed ω_0 si può ricavare R/R_c da quest'ultima equazione e poi RC dalla (16.5).

Notiamo che, affinché il radicando sia positivo occorre che sia:

$$\left(\frac{h_{fe} - 23}{58}\right)^2 > \frac{4}{29}$$

cioè:

$$h_{fe} > 23 + \sqrt{464} = 44.6$$

Se h_{fe} è minore di tale valore, il circuito non potrà oscillare.

Un esempio concreto di oscillatore a sfasamento a transistor bipolare è quello di figura 16.10.

Notiamo che i due transistor BC107 sono adoperati nella configurazione Darlington, con che l'impedenza d'ingresso è estremamente elevata.

16.5 L'oscillatore sinusoidale in quadratura

La condizione di Barkhausen $A\beta = 1$ (reale) implica che lo sfasamento complessivo dell'amplificatore con reazione positiva debba essere nullo. Ciò può esser ottenuto utilizzando un amplificatore che introduca uno sfasamento di $+90^\circ$ ed una rete di reazione costituita da un secondo amplificatore che introduca uno sfasamento di -90° (metodo b a pagina 431). Si parla allora di *oscillatore in quadratura*.

Un sistema basato su tale schema può esser realizzato facendo uso di un integratore invertente seguito da uno non-invertente. Un integratore non-invertente è quello mostrato in figura 16.11

La condizione $v_- = v_+$ fornisce:

$$\frac{\tilde{v}_1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \frac{1}{sC_1} = \frac{\tilde{v}_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} R_2$$

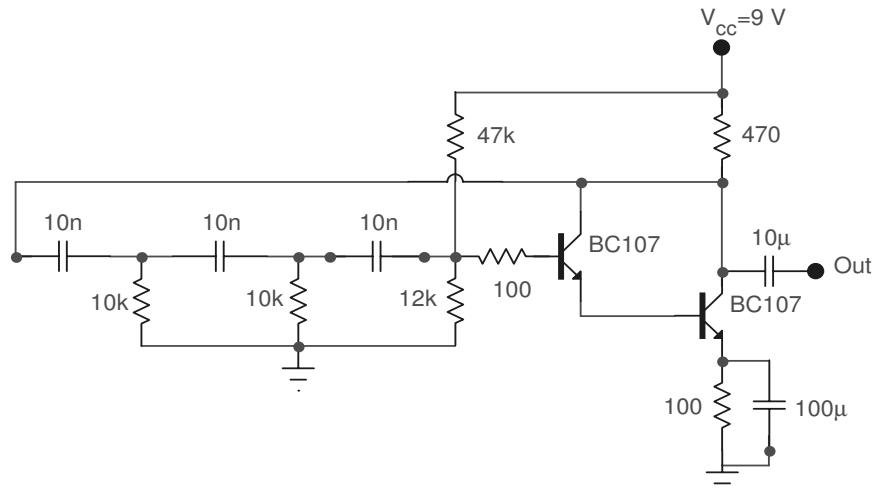


Figura 16.10: Oscillatore a sfasamento a transistor bipolare.

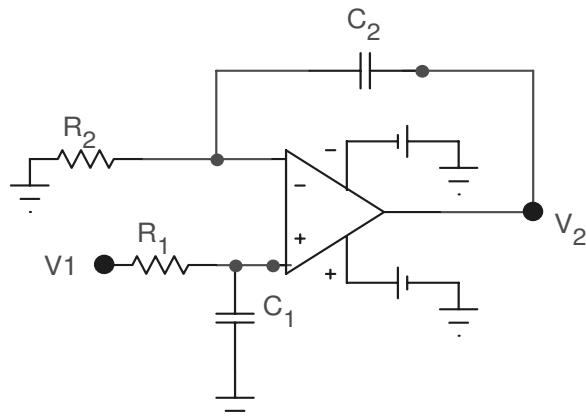


Figura 16.11: Circuito integratore non-invertente.

dove la soprascritta $\tilde{\cdot}$ sta ad indicare la trasformata di Laplace. Da questa segue:

$$\tilde{v}_2 = \frac{\tilde{v}_1(1 + sC_2R_2)}{sC_2R_2(1 + sC_1R_1)}$$

che, per $R_1C_1 = R_2C_2$ ci dà:

$$\tilde{v}_2 = \left(\frac{1}{C_2R_2} \right) \frac{\tilde{v}_1}{s}$$

che è appunto la trasformata della risposta di un integratore non-invertente.

Se ora a tale circuito facciamo seguire un integratore invertente, otteniamo il circuito di figura 16.12 che, come vedremo, si comporta da oscillatore sinusoidale.

L'operazionale A, con le capacità C_1, C_2 e le resistenze R_1, R_2 , costituisce un integratore non invertente. Questo è *alimentato* dall'integratore invertente costituito

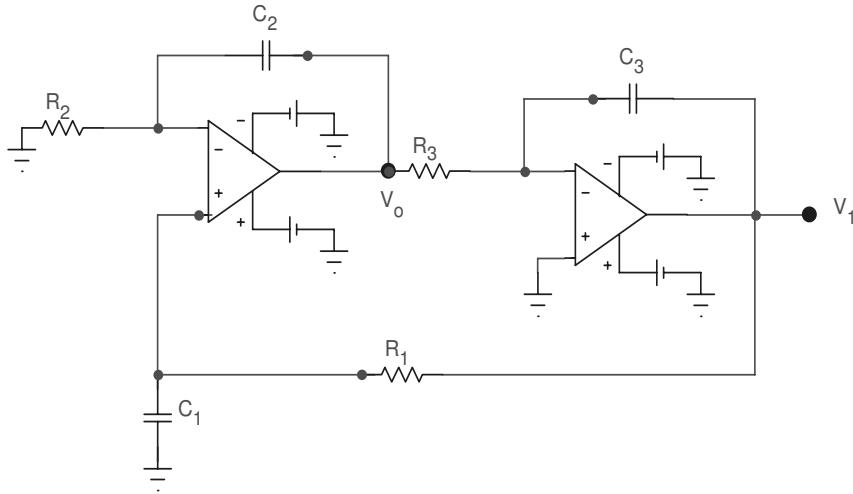


Figura 16.12: Oscillatore sinusoidale ottenuto con un integratore non-invertente seguito da uno invertente.

dall'operazionale B con la capacità C_3 e la resistenza R_3 . Poiché la funzione di trasduzione dell'integratore invertente è data da:

$$\tilde{v}_1 = -\frac{1}{C_3 R_3} \frac{\tilde{v}_0}{s}$$

la funzione di trasduzione della maglia sarà:

$$\tilde{v}_1 = -\frac{1}{s C_3 R_3} \frac{1 + s C_2 R_2}{1 + s C_1 R_1} \frac{1}{s C_2 R_2} \tilde{v}_1$$

Ponendo $C_1 = C_2 = C_3 = R$, $R_1 = R_2 = R_3 = R$ e quindi:

$$C_1 R_1 = C_2 R_2 = C_3 R_3 = CR$$

segue:

$$\frac{1}{\omega^2 C^2 R^2} = 1$$

dove si è fatto uso della sostituzione $s = j\omega$. Si ottiene in tal modo per la frequenza angolare di oscillazione:

$$\omega = \frac{1}{RC}$$

Nella pratica è necessario che $R_2 C_2$ sia maggiore di $R_1 C_1$ se si vuole che le oscillazioni persistano.

16.6 Circuiti limitatori negli oscillatori sinusoidali

In tutti gli esempi visti si è accennato all'opportunità che $|A\beta|$ sia leggermente maggiore di 1, per evitare un rapido smorzamento delle oscillazioni. Ciò potrebbe

però causare una rapida uscita degli amplificatori dalla loro zona lineare, con che le oscillazioni sarebbero fortemente deformate.

Per ovviare a tale inconveniente è opportuno inserire nella rete di reazione un elemento che riporti il sistema in zona lineare.

Ciò può esser ottenuto in vari modi. Un metodo spesso adoperato è quello di sostituire una resistenza (ad esempio, nell'oscillatore a sfasamento di figura 16.6, la resistenza R posta all'ingresso invertente dell'operazionale) con una resistenza che abbia un coefficiente di temperatura positivo (cioè un *sensistore*¹). In tal modo, se il guadagno dell'amplificatore aumenta, aumenterà la corrente in R con un conseguente aumento del valore di questa e diminuzione del guadagno $G = R_1/R$. Si potrebbe alternativamente aggiungere in serie ad R una resistenza di piccolo valore ma avente un coefficiente di temperatura positivo.

Un'alternativa all'uso del sensistore è quella di inserire una coppia di Zener contrapposti, in serie con una resistenza di valore inferiore ad R_1 , in parallelo ad R_1 , come mostrato in figura 16.13.

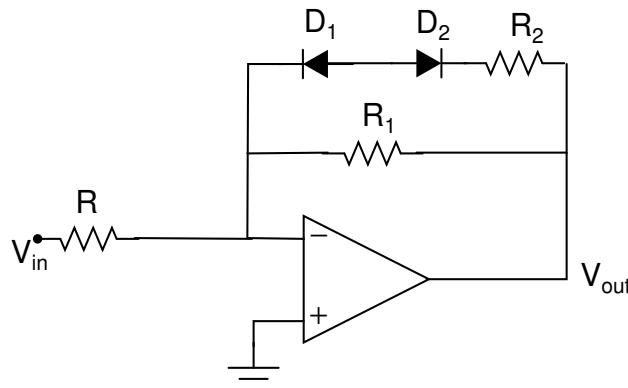


Figura 16.13: Oscillatore sinusoidale con $|A\beta| > 1$ a cui è stata aggiunta una coppia di diodi Zener contrapposti in serie ad una resistenza nella rete di reazione per mantenere il sistema in zona lineare.

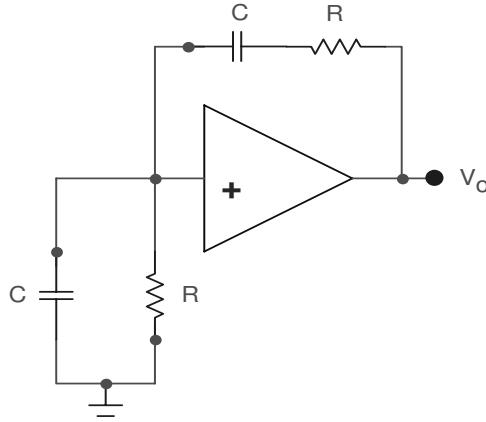
In questo circuito, se v_{out} è inferiore a $v_z + v_\gamma$ i diodi Zener sono interdetti ed il guadagno dell'amplificatore sarà uguale a R_1/R . Se v_{out} aumenta oltre $v_z + v_\gamma$, i diodi conducono e la resistenza di feedback diviene ora $R_2 \parallel R_1$ (inferiore quindi ad R_1) con che il guadagno diminuisce fino a $(R_2 \parallel R_1)/R$.

Un ramo analogo a quello contenente i diodi in figura 16.13 può essere utilizzato, nel circuito di figura 16.11, in serie con la capacità C_2 .

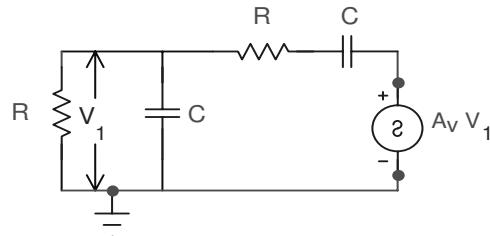
16.7 L'oscillatore a mezzo ponte di Wien

Questo adopera un amplificatore non-invertente, come indicato in figura 16.14.

¹cioè una resistenza il cui valore aumenti all'aumentare della temperatura e quindi alla diminuire della corrente che l'attraversa. Un esempio di sensistore è una lampadina ad incandescenza

**Figura 16.14:** Oscillatore a mezzo ponte di Wien.

Se facciamo l'ipotesi che l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore sia infinita e quella d'uscita sia nulla, possiamo far uso del circuito equivalente di figura 16.15 per verificare il funzionamento

**Figura 16.15:** Circuito equivalente all'oscillatore a mezzo ponte di Wien.

Da tale circuito si ottiene facilmente:

$$v_1 = (A_v v_1) \frac{Z_p}{Z_p + Z_s}$$

dove Z_s è l'impedenza-serie e Z_p quella parallelo di R e C :

$$Z_p = \frac{R/sC}{R + 1/sC}$$

$$Z_s = R + 1/sC$$

Si ottiene in tal modo:

$$A_v = \frac{(sRC)^2 + 3(sRC) + 1}{sRC}$$

La parte immaginaria di tale espressione si annulla per:

$$sRC + \frac{1}{sRC} = 0$$

cioè:

$$(sRC)^2 = -1$$

e quindi, ponendo $s = j\omega$, per:

$$\omega = \frac{1}{RC}$$

Per tale valore di ω si ha $A_v = 3$. Questo dovrà quindi essere il guadagno dell'amplificatore.

16.8 L'oscillatore a ponte di Wien

In tale tipo di oscillatore un ponte bilanciato (vedi figura 16.16) viene adoperato come circuito di feedback.

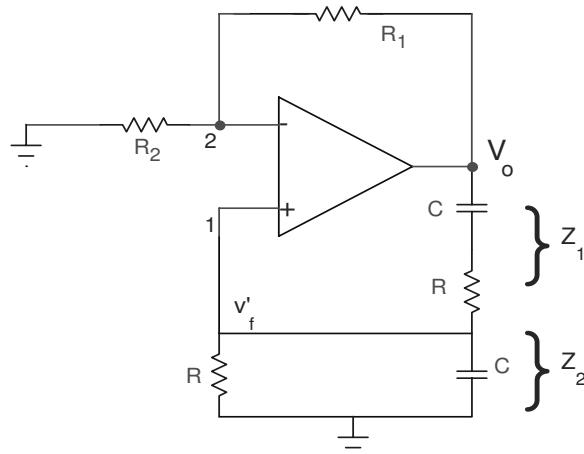


Figura 16.16: Oscillatore a ponte di Wien.

I quattro rami del ponte sono costituiti dalle impedenze R_1, R_2, Z_1, Z_2 . L'input del ponte è l'uscita v_0 dell'operazionale e l'output del ponte tra i nodi 1 e 2 fornisce l'input differenziale all'amplificatore operazionale (vedi figura 16.17). Se il ponte è bilanciato, avremo $v_{1-2} = 0$, con un valore finito di v_0 . Ciò richiede che la tensione nel punto 2, determinata dal partitore $R_1 - R_2$, sia uguale a quella nel punto 1, determinata dal partitore $Z_1 - Z_2$, cioè che sia:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

In definitiva, nel circuito di figura 16.16, se il ponte è bilanciato, la differenza di potenziale tra l'ingresso invertente e quello non invertente dell'operazionale, sarà nulla. Ciò richiede che il feedback negativo introdotto dal ramo $R_1 - R_2$ bilanci quello positivo introdotto dal ramo $Z_1 - Z_2$. Quest'ultimo è dato da:

$$\beta = \frac{v_1}{v_0} = \frac{v'_f}{v_0} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

mentre il primo è:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{A}$$

dove con A abbiamo indicato il guadagno dell'amplificatore non invertente:

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

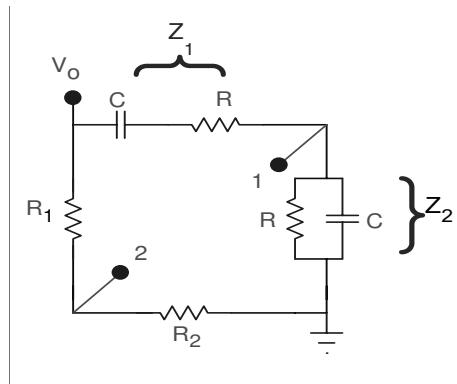


Figura 16.17: Circuito equivalente all'oscillatore a ponte di Wien di figura 16.16.

Il guadagno dell'anello è βA :

$$\beta A = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \quad (16.6)$$

cioè:

$$\beta A = \frac{\alpha}{3\alpha - j(1 - \alpha^2)} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

dove: $\alpha \equiv \omega RC$. La condizione di Barkhausen: $A\beta = 1$ (reale) impone che sia:

$$1 - \alpha^2 = 0$$

cioè $\alpha = \omega RC = 1$. Se tale condizione è soddisfatta, l'ulteriore vincolo:

$$\beta A = 1 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

porta a:

$$1 + \frac{R_1}{R_2} = 3$$

cioè:

$$\frac{R_1}{R_2} = 2$$

È possibile cambiare con continuità la frequenza di risonanza cambiando simultaneamente il valore dei due condensatori C . È possibile poi modificare il range di frequenza (in modo discontinuo) cambiando i valori delle due resistenze (uguali) R .

L'uscita di tale circuito, se montato senza ulteriori precauzioni, potrebbe facilmente saturare al livello alto o a quello basso dell'A.O., o esibire instabilità nelle oscillazioni. È possibile renderlo stabile, come accennato in precedenza, con l'aggiunta di opportuni diodi. Un esempio è quello mostrato in figura 16.18. I due diodi servono a "bypassare" la resistenza R_3 e quindi a ridurre il guadagno (dato nell'esempio da $1 + (R_1 + R_3 + f \cdot X) / (R_2 + (1 - f) \cdot X)$, con f il fattore di regolazione del potenziometro X) non appena l'uscita tende a divenire troppo alta in valore assoluto.

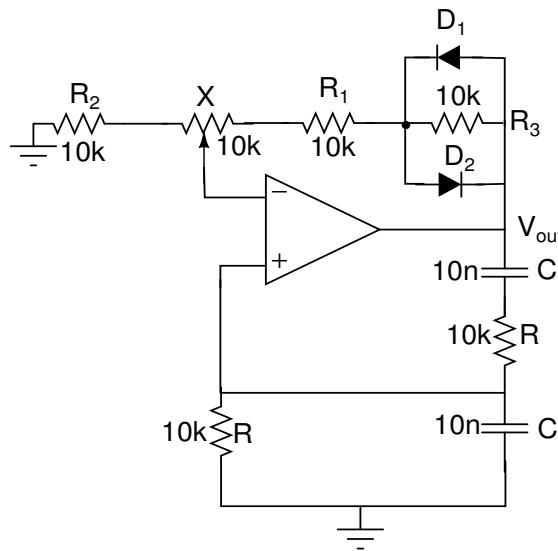


Figura 16.18: Oscillatore a ponte di Wien stabilizzato grazie alla presenza di due diodi in parallelo con una resistenza R_3 .

16.8.1 Poli e zeri di βA per l'oscillatore a ponte di Wien

È interessante analizzare la funzione che descrive il guadagno di maglia βA per l'oscillatore a ponte di Wien. In termini della variabile s , la (16.6), con:

$$Z_1 = \frac{1 + sCR}{sC}$$

$$Z_2 = \frac{R}{1 + sCR}$$

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

diventa:

$$\beta A = A \frac{s\tau}{s^2\tau^2 + 3s\tau + 1} \quad (16.7)$$

dove $\tau = RC$.

Questa descrive un filtro passa banda di ordine 2. Confrontando il denominatore con l'espressione standard già incontrata nel capitolo 14:

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2$$

troviamo la corrispondenza:

$$\omega_0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau}$$

$$Q_0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}$$

Se poi si vuole che anche il numeratore acquisti la forma standard: $s\omega_0/Q_0$, è facile vedere che il guadagno A deve valere 3. Con tale scelta βA acquista la forma standard del filtro passa banda, con frequenza di centro banda pari ad ω_0 ed inoltre essa soddisfa automaticamente la condizione $\beta A = 1$ per $\omega = \omega_0$, come è immediato verificare.

Vediamo cosa accade se $A \neq 3$. Per un generico valore di A^2 e con la corrispondenza tra coefficienti già vista, la (16.7) diventa:

$$\beta A = \frac{As\omega_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2}$$

dove $Q_0 = 1/3$.

Imponiamo la condizione che questa sia uguale ad 1. Troviamo:

$$s^2 + s\omega_0 \left[\frac{1}{Q_0} - A \right] + \omega_0^2 = 0$$

cioè:

$$s^2 + s\omega_0 (3 - A) + \omega_0^2 = 0 \quad (16.8)$$

Studiamo la variazione degli zeri di questa funzione o, equivalentemente, dei poli di:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s\omega_0 (3 - A) + \omega_0^2} \quad (16.9)$$

al variare del guadagno A .

Per $A = 0$ troviamo:

$$s_{1,2} = \frac{\omega_0}{2} [3 \pm \sqrt{5}]$$

cioè:

$$s_1 = -2.62\omega_0; \quad s_2 = -0.38\omega_0$$

Per $A = 1$:

$$s_1 = s_2 = -\omega_0$$

Per $A = 5$:

$$s_1 = s_2 = \omega_0$$

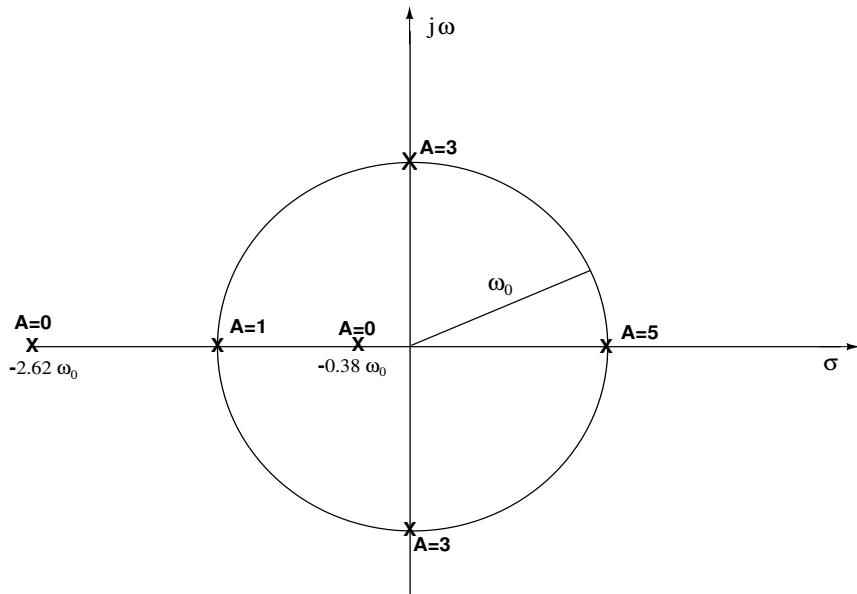


Figura 16.19: Posizioni dei poli della funzione $H(s)$ data dalla (16.9), per diversi valori del guadagno A .

Per $A = 3$ troviamo, come si è già visto, $s_1 = -j\omega_0$, $s_2 = +j\omega_0$. I poli della funzione (16.9) sono mostrati in figura 16.19 per i diversi valori di A esaminati.

Si vede come la posizione dei poli cambi al cambiare del guadagno A . Vediamo anche che la soluzione $A = 3$ è quella che fornisce una coppia di poli immaginari coniugati, cui corrisponde un comportamento oscillante. Per ciascuno degli altri valori di A esaminati, il comportamento è smorzato (è il caso in cui $A = 0$ o $A = 1$) o instabile (per $A = 5$).

Notiamo infine che l'equazione (16.9) è formalmente identica a quella ottenibile per un oscillatore armonico smorzato, quale quello che descrive il moto di una massa m sottoposta ad una forza elastica di richiamo, in presenza di una forza d'attrito proporzionale alla velocità. Se infatti k è la costante elastica e γ la costante che descrive l'attrito, l'equazione del moto sarà:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

La trasformata di Laplace di questa è:

$$ms^2X(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) + \gamma sX(s) - \gamma x(0) + kX(s) = 0$$

dove $X(s)$ è la trasformata della $x(t)$ e $x(0)$, $\dot{x}(0)$ sono la posizione e velocità dell'oggetto al tempo $t = 0$. Se ammettiamo che sia $x(0) = 0$ ed indichiamo con v la velocità per $t = 0$, questa diventa:

$$(ms^2 + \gamma s + k) X(s) = 0$$

²esamineremo anche il caso $A=0$, impossibile con la configurazione adottata per l'amplificatore, in cui il guadagno $A = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ è sicuramente maggiore di 1

da cui:

$$X(s) = \frac{mv}{ms^2 + \gamma s + k}$$

ovvero, a meno di una costante moltiplicativa v :

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{\gamma}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Questa è formalmente identica alla (16.9), con la corrispondenza:

$$\begin{aligned} 3 - A &\Leftrightarrow \gamma \frac{1}{\sqrt{km}} \\ \omega_0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Anche in questo caso il moto è puramente oscillatorio se $\gamma = 0$, che equivale alla condizione da noi trovata: $A = 3$.

16.8.2 Stabilità in frequenza dell'oscillatore a ponte di Wien

Le considerazioni che svolgeremo in questa sezione, anche se relative all'oscillatore a ponte di Wien, sono facilmente applicabili ad altri tipi di oscillatori sinusoidali.

Il problema che principalmente influenza la stabilità in frequenza di un oscillatore sinusoidale è legato alle capacità parassite presenti nei componenti attivi adoperati. Tali capacità sono tipicamente non lineari, il che fa sì che esse cambino al cambiare dei parametri ambientali, nonché con l'invecchiamento dei dispositivi. Come risultato il guadagno dell'elemento attivo, la cui fase si vorrebbe uguale a 0° o 180° può divenire qualsiasi. Poiché l'oscillazione può avversi solo a quella frequenza a cui lo sfasamento introdotto dalla rete di reazione compensa quello dovuto all'elemento attivo, accadrà che la frequenza d'oscillazione cambierà ed acquisterà quel valore a cui i due sfasamenti si compensano. Ne segue che la frequenza d'oscillazione potrà cambiare, ad esempio, con la temperatura.

Il problema può esser risolto facendo ricorso ad un blocco di reazione avente una caratteristica di fase con una forte dipendenza dalla frequenza. In tal modo infatti, se lo sfasamento introdotto dall'elemento attivo cambia ed acquista un valore $-\Delta\phi$, diverso da zero, la rete di reazione renderà possibile l'oscillazione ad una nuova frequenza ω' molto poco diversa da quella iniziale ω . Ciò è possibile poiché alla frequenza ω' , poco diversa da ω corrisponderà (per l'ipotesi fatta di una forte dipendenza dello sfasamento da ω) uno sfasamento $\Delta\phi$ abbastanza grande da poter compensare $-\Delta\phi$. Reti passive con la caratteristica richiesta sono quelle basate su circuiti risonanti RLC , o ancor più su cristalli piezoelettrici.

Considerazioni simili possono essere svolte relativamente all'oscillatore a ponte di Wien. Anche in questo caso potrà avversi una buona stabilità in frequenza se, ad una variazione apprezzabile di sfasamento corrisponde una piccola variazione della frequenza d'oscillazione.

Si definisce un *fattore di stabilità in frequenza* S_f come:

$$S_f = \frac{d\phi}{d(f/f_0)} = f_0 \frac{d\phi}{df} = \omega_0 \frac{d\phi}{d\omega} \quad (16.10)$$

Un oscillatore avrà una buona stabilità se S_f ha un valore elevato (in modulo).

Consideriamo ad esempio l'oscillatore a ponte di Wien di figura 16.16, che possiamo ridisegnare schematicamente come mostrato in figura 16.20, dove sono indicati solo gli ingressi (+) e (-) dell'amplificatore operazionale, nonché l'uscita v_0 del medesimo.

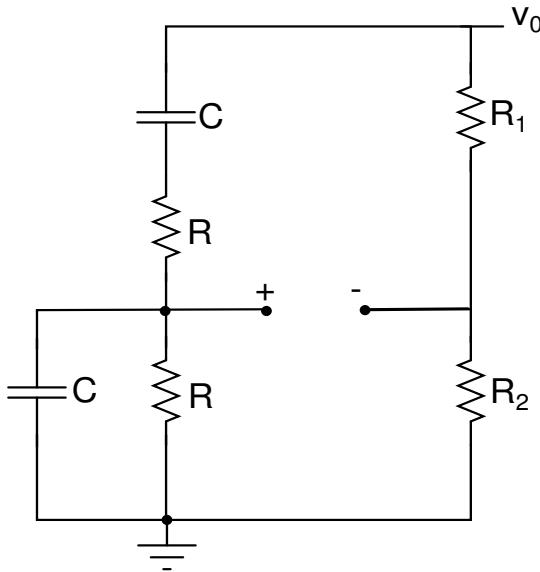


Figura 16.20: Schematizzazione dell'oscillatore a ponte di Wien. Sono indicati solo i componenti passivi presenti nella rete di feedback e gli ingressi (+) e (-) dell'operazionale.

Come si è visto, la reazione negativa β_- associata al partitore $R_1 - R_2$ deve, alla frequenza di risonanza, uguagliare quella positiva β_+ associata alla rete di reazione $C - R - R - C$. Quest'ultima è data da:

$$\beta_+ = \frac{v_+}{v_0} = \frac{sCR}{s^2C^2R^2 + 3sCR + 1} = \frac{1}{sCR + 3 + 1/(sCR)}$$

La frequenza di risonanza è $\omega_0 = 1/RC$, per cui, ponendo $s = j\omega$, l'ultima espressione diventa:

$$\beta_+ = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (16.11)$$

Questa, alla frequenza di risonanza ω_0 , fornisce $\beta_+ = 1/3$. Perchè il ponte sia bilanciato occorre che sia $\beta_+ = \beta_- = 1/3$, cioè:

$$\beta_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3} \quad (16.12)$$

Ammettiamo ora che il ponte non sia esattamente bilanciato, cioè che β_- differisca, anche se poco, da $1/3$. Scriveremo:

$$\beta_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{\delta} \quad (16.13)$$

Ora, la funzione di trasferimento complessiva, tra l'input del ponte (cioè v_0) e l'output differenziale (cioè $v_+ - v_-$) è data da:

$$\beta = \beta_+ - \beta_- = \beta_+ - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\delta} \right) \quad (16.14)$$

Lo sfasamento associato a tale funzione di trasferimento dipende, oltre che da δ , dalla frequenza ω . Per $\omega = \omega_0$ avremo $\beta_+ = \frac{1}{3}$ e quindi $\beta = \frac{1}{\delta}$. Ciò implica che il guadagno dell'amplificatore dovrà essere $A = \delta$, in modo che sia $A\beta = 1$.

Lo sfasamento associato a β è ora facilmente ottenibile dalle equazioni (16.11) e (16.14). Si trova:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_+ - \beta_- &= \frac{1}{3 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\delta} = \frac{1 - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\delta} \right] \left[3 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}{3 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \\ &= - \frac{9 + j(\delta - 3) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{\delta \left[9 + 3j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} \end{aligned}$$

Lo sfasamento è allora:

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{3 - \delta}{9} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] - \tan^{-1} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (16.15)$$

Il fattore di stabilità in frequenza è dato dalla (16.10), cioè da:

$$S_f = \frac{d\phi}{d(\omega/\omega_0)} = \frac{\frac{3-\delta}{9} \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{3-\delta}{9} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} - \frac{\frac{1}{3} \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}{1 + \frac{1}{9} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \quad (16.16)$$

L'andamento di questa funzione di ω/ω_0 è mostrato in figura 16.21 per tre diversi valori dello sbilanciamento del ponte, δ .

Vediamo che la stabilità in frequenza per l'oscillatore a ponte di Wien è tanto maggiore quanto maggiore è lo sbilanciamento δ .

Per $\omega = \omega_0$, la (16.16) fornisce:

$$S_f = \frac{2}{9} (3 - \delta) - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9} \delta$$

che per $\delta = 300$ è uguale a -66.67.

Per questo valore di δ , e con $R_1 = 20k\Omega$, troviamo:

$$1 + \frac{R_1}{R_2} = \frac{3\delta}{\delta - 3} = 3.030$$

da cui:

$$\frac{R_1}{R_2} = 2.030$$

e quindi $R_2 = 9.85 k\Omega$.

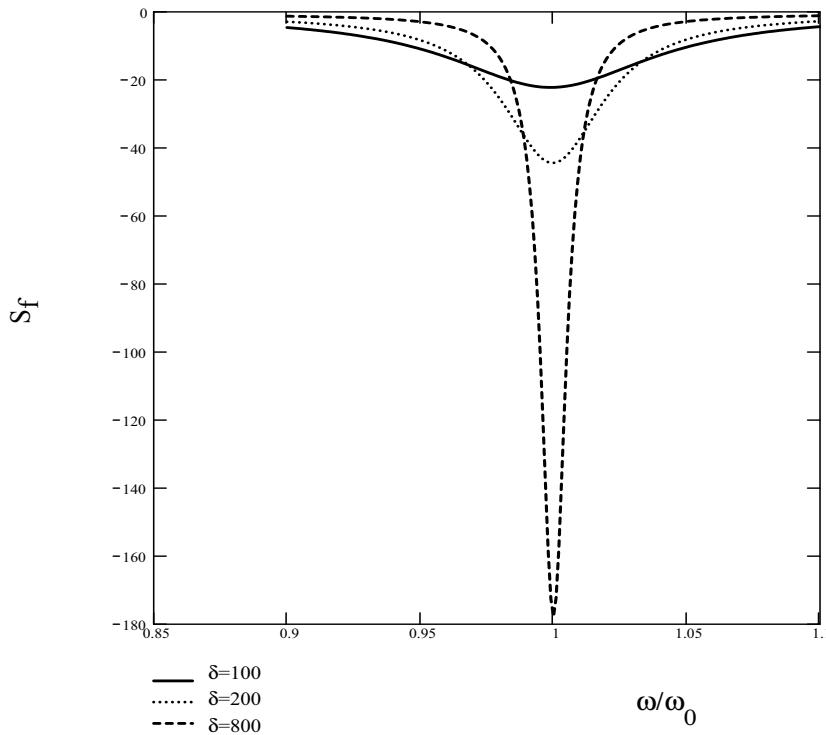


Figura 16.21: Fattore di stabilità per l'oscillatore a ponte di Wien, dato dalla (16.16), in funzione del rapporto ω/ω_0 , calcolato per tre diversi valori dello sbilanciamento δ .

16.9 Oscillatori utilizzanti circuiti LC: considerazioni introduttive

Per realizzare oscillatori in grado di raggiungere frequenze più elevate di quelle ottenibili con i circuiti discussi finora, si ricorre a sistemi che utilizzano elementi reattivi di tipo capacitivo ed induttivo. A causa dei limiti imposti dallo slew-rate degli operazionali, molto spesso questi circuiti adottano, come elementi attivi, dei transistor bipolar o dei FET.

Questo tipo di oscillatori sono basati sul carattere "risonante" di un circuito LC, quale quello mostrato in figura 16.22. Come sappiamo, in un circuito *LC*, si ha una periodica trasformazione dell'energia immagazzinata nell'induttanza, sotto forma di energia magnetica, in energia elettrostatica del condensatore, e viceversa. Tale "oscillazione dell'energia" è analoga a quanto avviene nel caso dell'altalena, in cui energia potenziale viene periodicamente convertita in energia cinetica e viceversa. Sia nel caso del circuito *LC* che nel caso dell'altalena, effetti dissipativi fanno sì che l'oscillazione si smorzi. Nel caso dell'altalena è però sufficiente che una persona dia periodicamente una leggera spinta, perché l'oscillazione continui. Analogamente, nel caso del circuito *LC* è sufficiente, come vedremo, che un dispositivo attivo fornisca, in fase con l'oscillazione, una piccola corrente (o tensione) perché si abbia un'oscillazione persistente.

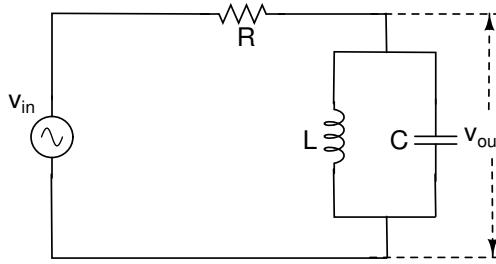


Figura 16.22: Circuito oscillante RLC.

Esaminiamo in dettaglio il circuito di figura. Ammettiamo che v_{in} sia un segnale sinusoidale del tipo:

$$v_{in} = A \sin \omega t$$

e calcoliamo v_{out} .

L'impedenza del parallelo LC è data da:

$$Z = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{(1/sC)(sL)}{(1/sC) + sL} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + 1/LC}$$

Ponendo ora:

$$\omega_0^2 = 1/LC$$

questa potrà esser scritta nella forma³:

$$Z(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (16.17)$$

La forma matematica di tale impedenza può esser confrontata con quella del filtro passa-banda (tabella(14.1)):

$$G(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q_0} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2} \quad (16.18)$$

La (16.17) è ottenibile dalla (16.18) ponendo $Q_0 \rightarrow \infty$, il che implica una larghezza di banda infinitamente piccola. L'impedenza Z diviene infinitamente grande per $\omega = \omega_0$, mentre acquista valori finiti per $\omega \neq \omega_0$.

La relazione tra v_{in} e v_{out} nel circuito di figura è:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{Z}{R + Z} = \frac{s / (s^2 + \omega_0^2)}{\tau (s^2 + \omega_0^2) + s}$$

dove $\tau = RC$. Da questa si ottiene:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{\frac{s}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \omega_0^2} \quad (16.19)$$

³Notiamo che ponendo nella (16.17) $s = j\omega$ è facile vedere che per $\omega \gg \omega_0$ l'impedenza diviene $1/j\omega C$, cioè di tipo capacitivo. Viceversa, per $\omega \ll \omega_0$ essa diviene di tipo induttivo: $j\omega L$

Questa ha ancora la forma della (16.18), con la corrispondenza:

$$\frac{\omega_0}{Q_0} \leftrightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

da cui:

$$Q_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Vediamo da questa che Q_0 , e quindi la larghezza del picco di risonanza (che va come l'inverso di Q_0) è determinato dai valori di R , C ed L . L'espressione ottenuta mostra che, se si vuole un picco molto stretto occorre, a parità dei valori di L e C , scegliere una resistenza di valore elevato⁴.

Esaminiamo un esempio numerico:

$$L = 0.1 \mu H$$

$$C = 10 \mu F$$

$$R = 100 \Omega$$

Troviamo:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0.159 \text{ MHz}$$

$$Q_0 = 100\sqrt{10^2} = 1000$$

Questo valore di Q_0 corrisponde ad una larghezza di banda data da:

$$\omega'' - \omega' = \frac{\omega_0}{Q_0} = 159 \text{ rad/s}$$

o, in termini della frequenza f :

$$\delta = f'' - f' = 25 \text{ Hz}$$

Il risultato ottenuto ci dà un'idea della grande selettività in frequenza che un circuito LC può avere. Nell'esempio fatto, tutte le frequenze presenti all'uscita del generatore, situate al di fuori del range $f_0 \pm \delta$ saranno fortemente soppresse, quelle situate in prossimità di f_0 saranno presenti.

È altrettanto importante esaminare lo sfasamento introdotto dal circuito. Dalla (16.19), ponendo $s = j\omega$, troviamo:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{j\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega/\tau} = \frac{\omega^2/\tau^2 + j(\omega_0^2 - \omega^2)\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

da cui otteniamo lo sfasamento ϕ :

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\tau}{\omega} (\omega_0^2 - \omega^2)$$

⁴Si può dimostrare che il valore di Q_0 è una misura del numero di oscillazioni che il circuito, eccitato da un gradino unitario, effettua in un tempo pari a τ . Per una dimostrazione si veda l'appendice B

Vediamo che lo sfasamento è nullo alla risonanza ($\omega = \omega_0$) mentre esso si discosta sensibilmente da zero appena fuori dalla risonanza. Ad esempio, nel caso numerico esaminato sopra, con $\omega_0 = 10^6 \text{ rad/s}$ e $\tau = 1 \text{ ms}$, se ω differisce da ω_0 per appena 159 rad/s (25 Hz), troviamo:

$$\phi = 17.6^\circ$$

Un'implementazione di un circuito oscillante che fa uso di un circuito LC nella rete di reazione di un amplificatore a transistor è quella mostrata in figura 16.23.

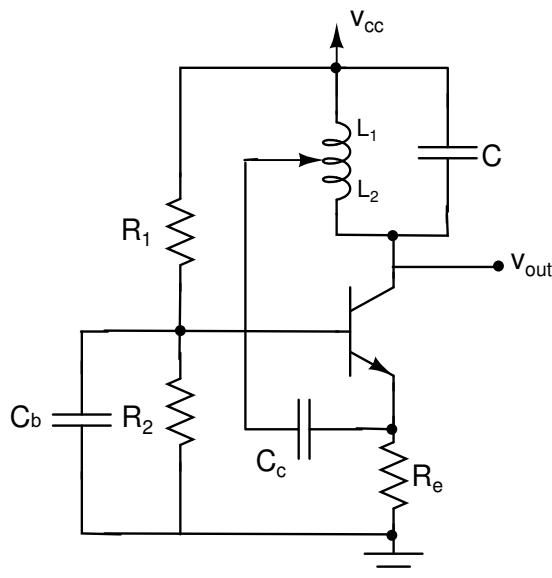


Figura 16.23: Circuito oscillante che adopera un LC nel circuito di collettore di un amplificatore a transistor bipolare, con feedback sull'emettitore.

Alla risonanza il carico effettivamente presente sul collettore, costituito dal parallelo LC , subirà un notevole aumento. Di conseguenza aumenterà il guadagno dell'amplificatore, e quindi il segnale sul collettore del medesimo. A causa del feedback sull'emettitore (feedback positivo) il segnale alla frequenza di risonanza viene amplificato ulteriormente. In un gran numero di cicli, un sia pur piccolo segnale presente (a causa del rumore) nel circuito, viene amplificato in modo apprezzabile. La non linearità dell'amplificatore impedisce che l'effetto mandi in saturazione l'amplificatore stesso. I segnali presenti a frequenze diverse da quella di risonanza non subiscono l'amplificazione.

Notiamo che il feedback è ottenuto prelevando da un punto intermedio dell'induttanza L , una opportuna frazione del segnale presente nel circuito oscillante ed inviandolo all'emettitore attraverso il condensatore d'accoppiamento C_c . La tensione di base viene invece mantenuta costante attraverso il partitore R_1-R_2 ed il condensatore C_b . La configurazione indicata è nota come *oscillatore Hartley*. In realtà questo è un caso particolare di oscillatore Hartley. Riservandoci di tornare più avanti su tale tipo di oscillatore, passeremo ora a svolgere alcune considerazioni di carattere più generale sugli oscillatori basati su circuiti LC .

16.9.1 Struttura generale di un oscillatore a tre punti

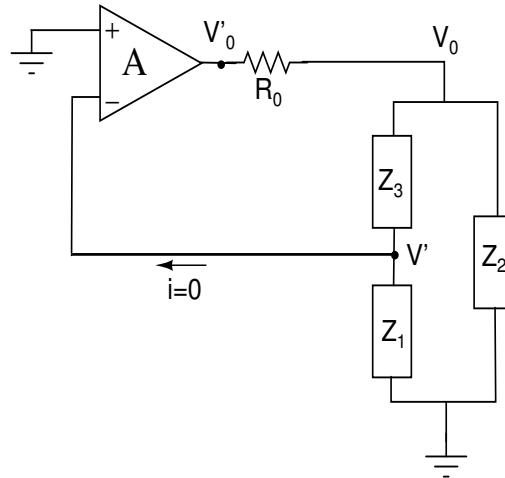


Figura 16.24: Struttura generale di un oscillatore "a tre punti".

Gli oscillatori sinusoidali che utilizzano circuiti *LC* rientrano nella categoria generale degli oscillatori "a tre punti" del tipo mostrato in figura 16.24.

Qui abbiamo un'amplificatore invertente di guadagno A ($A < 0$) ed una catena di feedback costituita da tre elementi passivi, inserita tra l'uscita dell'amplificatore e l'ingresso invertente e con un nodo intermedio della catena collegato a massa. L'amplificatore potrebbe essere in generale un semplice amplificatore a transistor o FET, o anche un operazionale. Faremo per il momento l'ipotesi semplificatrice che l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore sia infinitamente grande, e che infinitamente grande sia anche il carico (non indicato in figura) presente in uscita. Le impedenze Z_1 , Z_2 e Z_3 possono essere, per il momento, generiche.

Se indichiamo con Z_L l'impedenza equivalente all'insieme delle tre, vista tra v_0 e massa, troviamo:

$$Z_L = Z_2 \parallel (Z_1 + Z_3) = \frac{Z_2 (Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

avremo:

$$v_0 = v'_0 \frac{Z_L}{R_0 + Z_L}$$

e quindi:

$$v' = v_0 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} = v'_0 \frac{Z_L}{R_0 + Z_L} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

Da questa, con facili passaggi, si ottiene:

$$v' = v'_0 \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2 + Z_3) R_0 + Z_2 (Z_1 + Z_3)}$$

Il fattore di feedback β è dato da:

$$\beta = \frac{v'}{v'_0} = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2 + Z_3) R_0 + Z_2 (Z_1 + Z_3)} \quad (16.20)$$

Se le impedenze Z_i sono di tipo induttivo o capacitivo, potremo scrivere:

$$Z_i = jX_i \quad (i = 1 \dots 3)$$

dove $X_i = \omega L$, se Z_i è un'induttanza, mentre $X_i = -1/\omega C$ se Z_i è una capacità.

Con ciò la (16.20) diviene:

$$\beta = -\frac{X_1 X_2}{j(X_1 + X_2 + X_3) R_0 - X_2 (X_1 + X_3)} \quad (16.21)$$

Da questa otteniamo poi:

$$A\beta = -A \frac{X_1 X_2}{j(X_1 + X_2 + X_3) R_0 - X_2 (X_1 + X_3)} \quad (16.22)$$

Imponiamo ora che $A\beta$ sia reale; ciò richiede che sia nullo il termine che moltiplica l'unità immaginaria nella (16.22), e quindi:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \quad (16.23)$$

Con ciò la (16.22) diviene:

$$A\beta(\omega_0) = A \frac{X_1}{X_1 + X_3} \quad (16.24)$$

dove abbiamo indicato con ω_0 la frequenza d'oscillazione. Dalle (16.23) e (16.24) otteniamo poi:

$$A\beta(\omega_0) = -A \frac{X_1}{X_2} \quad (16.25)$$

Poichè $A\beta(\omega_0)$ deve esser positivo ed A è negativo, ne segue che X_1 ed X_2 debbono avere il medesimo segno, il che implica che i corrispondenti elementi debbono essere o entrambi di tipo capacitivo o entrambi di tipo induttivo. Segue allora dalla (16.23) che se X_1 ed X_2 sono di tipo capacitivo, X_3 deve essere di tipo induttivo e viceversa.

Se X_1 ed X_2 sono di tipo capacitivo ed X_3 è di tipo induttivo, si ha a che fare con un *oscillatore Colpitts*. Se X_1 ed X_2 sono di tipo induttivo ed X_3 è di tipo capacitivo, si ha a che fare con un *oscillatore Hartley*. Nel primo caso la (16.23) porta a:

$$\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} - \omega L = 0$$

da cui:

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{C_1 + C_2}{L(C_1 C_2)} \quad (16.26)$$

mentre la (16.25) porta a:

$$A\beta(\omega_0) = -A \frac{C_2}{C_1} \quad (16.27)$$

La condizione $A\beta = 1$ porta allora a:

$$-A = \frac{C_1}{C_2} \quad (16.28)$$

Nel caso di un oscillatore Hartley, la (16.23) porta a:

$$\omega L_1 + \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} = 0$$

da cui:

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{C(L_1 + L_2)} \quad (16.29)$$

La condizione $A\beta = 1$, insieme alla (16.25) implica poi:

$$-A = \frac{L_2}{L_1} \quad (16.30)$$

Nella pratica, perchè si abbiano delle oscillazioni persistenti occorre che il guadagno $|A|$ dell'amplificatore sia maggiore dei valori indicati dalle (16.28) e (16.30).

Nelle prossime sezioni esamineremo alcuni esempi concreti di oscillatori dei due tipi ora descritti.

16.9.2 Oscillatori Colpitts

Esaminiamo ora in dettaglio un oscillatore Colpitts che fa uso di un operazionale in configurazione invertente. Faremo ciò tenendo anche conto del carico che l'oscillatore dovrà alimentare. Il circuito è quello mostrato in figura 16.25, dove il carico è costituito dalla resistenza R_L . Una frazione β della tensione v'_0 presente all'uscita dell'operazionale è la tensione v_f applicata all'ingresso dell'amplificatore. Il coefficiente di feedback β (funzione della frequenza ω) è dato dal rapporto v_f/v'_0 . Il procedimento che seguiremo sarà quello di calcolare $\beta(\omega)$ ed impostare poi la condizione che il prodotto $A\beta(\omega)$ sia uguale ad uno.

Per calcolare β possiamo far ricorso al circuito equivalente mostrato in figura 16.26, dove è:

$$v'_0 = -Av_f = -\frac{R_2}{R_1}v_f$$

Il coefficiente di feedback è facilmente ottenibile dallo schema di figura. Indicando infatti con Z' l'impedenza costituita dal parallelo di C_1 ed R_1 e con Z il parallelo di C_2 con la serie ($Z'-L$), è immediato verificare che si ha:

$$v_0 = v'_0 \frac{Z}{Z + R_L} \quad (16.31)$$

come pure:

$$v_f = v_0 \frac{Z'}{Z' + j\omega L} \quad (16.32)$$

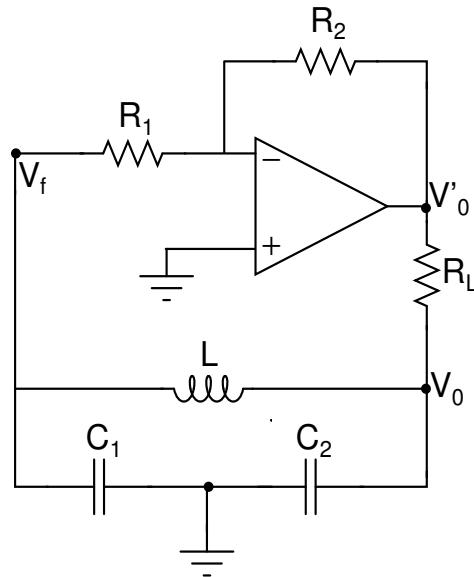


Figura 16.25: Oscillatore sinusoidale Colpitts che fa uso di un amplificatore operazionale in configurazione invertente.

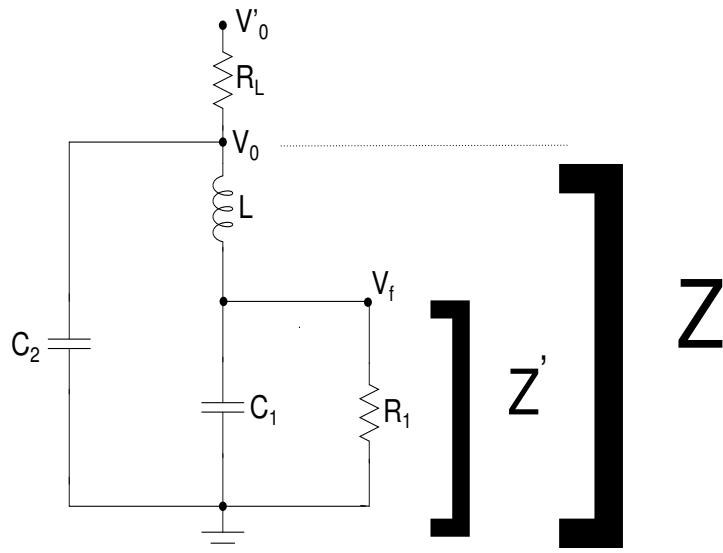


Figura 16.26: Schema equivalente adoperato per calcolare la risposta dell'oscillatore sinusoidale di figura 16.25. Si è tenuto conto del fatto che l'estremità destra della resistenza R_1 nel circuito iniziale è una massa virtuale.

dove:

$$Z' = \frac{R_1}{j\omega R_1 C_1 + 1} \quad (16.33)$$

È poi anche:

$$Z = \frac{(j\omega L + Z') \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L + Z' + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{(R_1 - \omega^2 LC_1 R_1) + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC_2) + j(\omega R_1(C_1 + C_2) - \omega^3 L R_1 C_1 C_2)} \quad (16.34)$$

Dalle (16.31) e (16.32) otteniamo:

$$v_f = v'_0 \frac{Z}{Z + R_L} \frac{Z'}{Z' + j\omega L} \quad (16.35)$$

e quindi:

$$\beta = \frac{v_f}{v'_0} = \frac{ZZ'}{ZZ' + j\omega LZ + j\omega LR_L + Z'R_L} \quad (16.36)$$

La condizione $\beta A = 1$ porta allora a:

$$ZZ'A = ZZ' + j\omega LZ + j\omega LR_L + Z'R_L \quad (16.37)$$

da cui:

$$Z(AZ' - Z' - j\omega L) = R_L(Z' + j\omega L) \quad (16.38)$$

Questa porta poi a:

$$\frac{1}{Z} = \frac{AZ'}{R_L(Z' + j\omega L)} - \frac{1}{R_L} \quad (16.39)$$

Sostituendo in questa l'espressione di Z data dalla (16.33), otteniamo:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \omega^2 LC_2) + j\omega R_1((C_1 + C_2) - \omega^2 LC_1 C_2)}{R_1(1 - \omega^2 LC_1) + j\omega L} = \\ & = \frac{AR_1}{R_L(R_1 + j\omega L(1 + j\omega R_1 C_1))} - \frac{1}{R_L} \end{aligned} \quad (16.40)$$

Da questa, con facili passaggi, si ottiene poi:

$$R_L(1 - \omega^2 LC_2) + R_1[(1 - \omega^2 LC_1) - A] + \\ + j\omega [L + R_1 R_L(C_1 + C_2) - \omega^2 R_1 R_L L C_1 C_2] = 0 \quad (16.41)$$

Imponendo ora la condizione che si annulli il coefficiente dell'unità immaginaria in quest'ultima equazione, otteniamo:

$$\omega^2 = \frac{L + R_1 R_L(C_1 + C_2)}{R_1 R_L L C_1 C_2} \quad (16.42)$$

Per grandi valori di R_L questa può esser approssimata con:

$$\omega^2 = \frac{C_1 + C_2}{L C_1 C_2} \quad (16.43)$$

Imponendo che si annulli la parte reale della (16.41) si trova poi:

$$\begin{aligned} AR_1 &= (R_L + R_1) - \omega^2 L (R_1 C_1 + R_L C_2) = \\ &= (R_L + R_1) - \frac{L + R_1 R_L (C_1 + C_2)}{R_1 R_L C_1 C_2} (R_1 C_1 + R_L C_2) \end{aligned}$$

Da questa si ottiene poi per il guadagno A :

$$A = \frac{R_L + R_1}{R_1} - \frac{R_1 C_1 + R_L C_2}{R_1} \left[\frac{1}{R_1 R_L C_1 C_2} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right] \quad (16.44)$$

Il guadagno A dell'amplificatore, dato da $-R_2/R_1$ deve quindi uguagliare quest'espressione se si vuole che sia soddisfatta la condizione di Barkhausen. In realtà, come già accennato in precedenza, è buona regola che il guadagno abbia un valore superiore a quello richiesto dalla (16.44).

Sostituendo questa espressione di A nella (16.44), otteniamo:

$$\frac{R_2}{R_1} = -\frac{R_L + R_1}{R_1} + \frac{R_1 C_1 + R_L C_2}{R_1} \left[\frac{1}{R_1 R_L C_1 C_2} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right] \quad (16.45)$$

Abbiamo già visto che per grandi valori del carico R_L la frequenza angolare di risonanza, il cui quadrato è dato dalla (16.42), acquista la forma "standard" data dalla (16.43). Possiamo vedere che, in tali condizioni, il vincolo dato dalla (16.45) acquista una forma molto più semplice. Dalla (16.45) infatti si ottiene:

$$R_2 = -(R_L + R_1) + (R_1 C_1 + R_L C_2) \left[\frac{1}{R_1 R_L C_1 C_2} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right]$$

da cui segue:

$$\frac{R_2}{R_L} = -1 - \frac{R_1}{R_L} + \frac{R_1 C_1 + R_L C_2}{R_L} \left[\frac{1}{R_1 R_L C_1 C_2} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right]$$

Da questa, con facili passaggi, si ottiene:

$$\frac{R_2}{R_L} = \frac{1}{R_L^2 C_2} + \frac{1}{C_1 R_1 R_L} + \frac{R_1 C_1}{R_L C_2} + \frac{C_2}{C_1} \quad (16.46)$$

Se nel secondo membro di questa espressione possiamo trascurare i termini contenenti R_L a denominatore, otteniamo:

$$\frac{R_2}{R_L} = \frac{C_2}{C_1} \quad (16.47)$$

Esaminiamo ad esempio il caso in cui sia:

$$C_1 = 0.01 \mu F, \quad C_2 = 0.1 \mu F, \quad L = 100 \mu H, \quad R_1 = 100 k\Omega, \quad R_2 = 1 M\Omega, \quad R_L = 100 k\Omega$$

cui corrisponde una frequenza angolare di oscillazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}} = 1.049 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

Vediamo che per tale scelta dei valori dei componenti il rapporto C_2/C_1 vale 10 ed è uguale al rapporto R_2/R_L .

È anche facile verificare che tali valori dei componenti sono compatibili con la scelta fatta di trascurare alcuni dei termini presenti nella (16.46): in effetti i tre termini trascurati a secondo termine di tale espressione valgono, nell'ordine 0.001, 0.01 e 0.1.

16.9.3 Oscillatori Hartley

Esaminiamo ora in dettaglio un oscillatore Hartley che fa uso di un operazionale in configurazione invertente. Come nel caso dell'analogico oscillatore Colpitts, faremo ciò tenendo anche conto del carico che l'oscillatore dovrà alimentare. Il circuito è quello mostrato in figura 16.27, dove il carico è costituito dalla resistenza R_L . Una frazione β della tensione v'_0 presente all'uscita dell'operazionale è la tensione v_f applicata all'ingresso dell'amplificatore. Il coefficiente di feedback β (funzione della frequenza ω) è dato dal rapporto v_f/v'_0 . Il procedimento che seguiremo sarà quello di calcolare $\beta(\omega)$ ed imporre poi la condizione che il prodotto $A\beta(\omega)$ sia uguale ad uno.

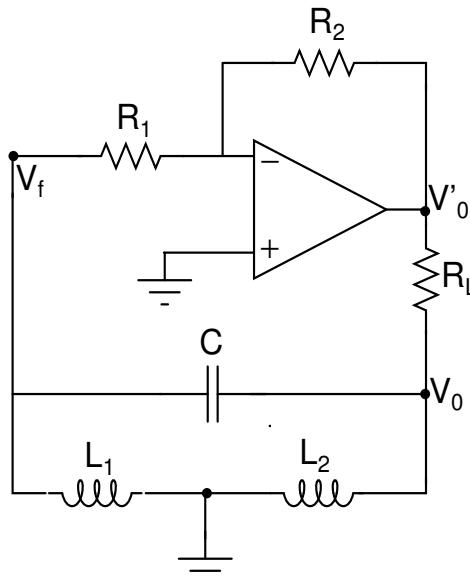


Figura 16.27: Oscillatore sinusoidale Hartley che fa uso di un amplificatore operazionale in configurazione invertente.

Il procedimento che seguiremo è identico a quello seguito nel caso dell'oscillatore Colpitts. Lo schema equivalente adoperato per il calcolo del fattore di feedback è mostrato in figura 16.28. Le impedenze Z' e Z sono date da:

$$Z' = \frac{j\omega L_1 R_1}{R_1 + j\omega L_1} \quad (16.48)$$

$$Z = \frac{j\omega L_2 \left(\frac{1}{j\omega C} + Z' \right)}{Z' + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} \quad (16.49)$$

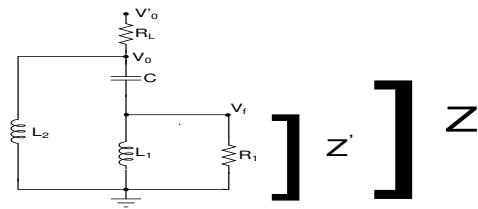


Figura 16.28: Schema equivalente adoperato per calcolare la risposta dell'oscillatore sinusoidale di figura 16.27. Si è tenuto conto del fatto che l'estremità destra della resistenza R_1 nel circuito iniziale è una massa virtuale.

La tensione di feedback v_f è poi data da:

$$v_f = \frac{v_0 Z'}{Z' + \frac{1}{j\omega C}} \quad (16.50)$$

dove:

$$v_0 = \frac{v'_0 Z}{Z + R_L} \quad (16.51)$$

Dalle (16.50) e (16.51) si ottiene poi:

$$v_f = \frac{v'_0 Z Z'}{\left(Z' + \frac{1}{j\omega C}\right)(R_L + Z)} \quad (16.52)$$

da cui si ottiene β :

$$\beta = \frac{v_f}{v'_0} = \frac{Z Z'}{\left(Z' + \frac{1}{j\omega C}\right)(R_L + Z)} \quad (16.53)$$

Imponendo ora la condizione $\beta A = 1$, si ottiene:

$$Z Z' A = R_L Z' + Z Z' + \frac{R_L}{j\omega C} + \frac{Z}{j\omega C}$$

da cui:

$$\frac{1}{Z} = \frac{j\omega C Z' (A - 1) - 1}{R_L (1 + j\omega C Z')}$$

Il calcolo del medesimo rapporto, effettuato a partire dalle (16.48) e (16.49), porta a:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1 + j\omega CZ' - \omega^2 L_2 C}{j\omega L_2 (1 + j\omega CZ')}$$

Uguagliando queste due espressioni di $1/Z$ troviamo:

$$\omega^2 L_2 C [R_L - Z' (A - 1)] - R_L = j\omega (R_L C Z' + L_2)$$

Sostituendo in questa l'espressione di Z' data dalla (16.48) troviamo, dopo semplici passaggi:

$$\begin{aligned} & j\omega^3 [CR_L L_1 L_2 - CR_1 L_1 L_2 (A - 1)] + \\ & \omega^2 [CR_1 R_L L_2 + CR_1 R_L L_1 + L_1 L_2] - \\ & j\omega [L_1 R_L + R_1 L_2] - \\ & R_L R_1 = 0 \end{aligned} \quad (16.54)$$

Imponendo ora che si annulli la parte reale di questa, otteniamo:

$$\omega^2 = \frac{R_L R_1}{CR_1 R_L (L_1 + L_2) + L_1 L_2} = \frac{1}{C(L_1 + L_2) + \frac{L_1 L_2}{R_1 R_L}} \quad (16.55)$$

Per $C(L_1 + L_2) \gg L_1 L_2 / (R_1 R_L)$, otteniamo da questa:

$$\omega^2 = \frac{1}{C(L_1 + L_2)} \quad (16.56)$$

identica alla (16.29) della precedente sezione.

Imponendo che si annulli la parte immaginaria della (16.54), troviamo poi:

$$\omega^2 C L_1 L_2 [R_L - R_1 (A - 1)] = R_L L_1 + R_1 L_2$$

sostituendo in questa l'espressione di ω^2 data dalla (16.56) e facendo uso dell'espressione del guadagno dell'amplificatore: $A = -R_2/R_1$ troviamo poi:

$$\omega^2 C L_1 L_2 (R_L + R_1 + R_2) = \frac{1}{L_1 + L_2} L_1 L_2 (R_L + R_1 + R_2) = R_L L_1 + R_1 L_2$$

da cui segue:

$$R_2 L_1 L_2 = R_L L_1^2 + R_1 L_2^2$$

Se in questa equazione il secondo termine a secondo membro può esser trascurato rispetto al primo, da questa segue poi:

$$\frac{R_2}{R_L} = \frac{L_1}{L_2} \quad (16.57)$$

16.9.4 Oscillatori LC a transistor

Esaminiamo ora alcuni esempi di oscillatori *LC* a transistor, iniziando dall'oscillatore Colpitts di figura 16.29. Esaminiamo alcune caratteristiche di questo circuito. L'effetto del condensatore di emettitore C_e è quello di far sì che l'emettore sia a massa per il segnale. La tensione oscillante nel circuito *LC* è inviata, come segnale di feedback, alla base del transistor attraverso il condensatore d'accoppiamento C_c . La presenza dell'induttanza L_c sul collettore impedisce che la componente variabile venga cortocircuitata a massa attraverso l'alimentatore. Tale induttanza è spesso presente in questo tipo di oscillatori, ed è nota in gergo come "choke".

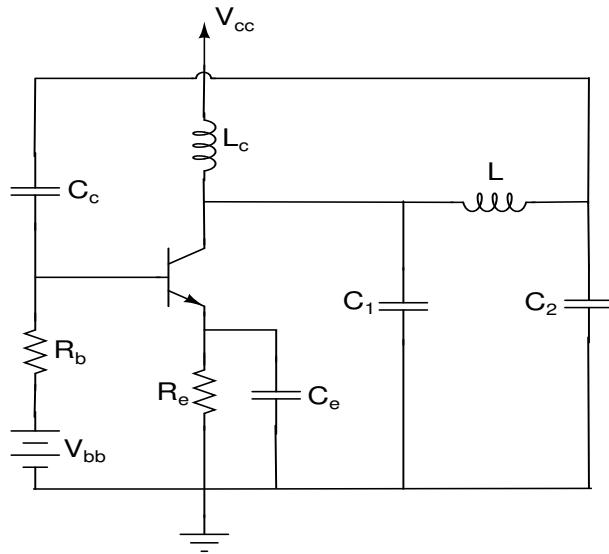


Figura 16.29: Oscillatore Colpitts a transistor. Il circuito di polarizzazione di base è stato schematizzato tramite la resistenza R_b in serie con un alimentatore V_{bb} . L'induttanza L_c è utilizzata per far sì che il segnale oscillante presente sul collettore non venga "cortocircuitato" a massa attraverso l'alimentazione V_{cc} . I condensatori C_c e C_e saranno scelti di valore abbastanza elevato da poter esser considerati dei corto circuiti.

Il circuito equivalente adoperato per calcolare la frequenza d'oscillazione è quello di figura 16.30. Il transistor è descritto attraverso i parametri h_{ie} ed h_{fe} del modello a parametri h . I restanti parametri h_{re} ed h_{oe} sono stati trascurati.

Con riferimento alle correnti indicate nel circuito equivalente, avremo:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_c + i_L \\ i &= i_L + i_2 \end{aligned} \tag{16.58}$$

dove:

$$i_c = h_{fe}i_b$$

da queste si ottiene:

$$i_L = i_1 - h_{fe}i_b \tag{16.59}$$

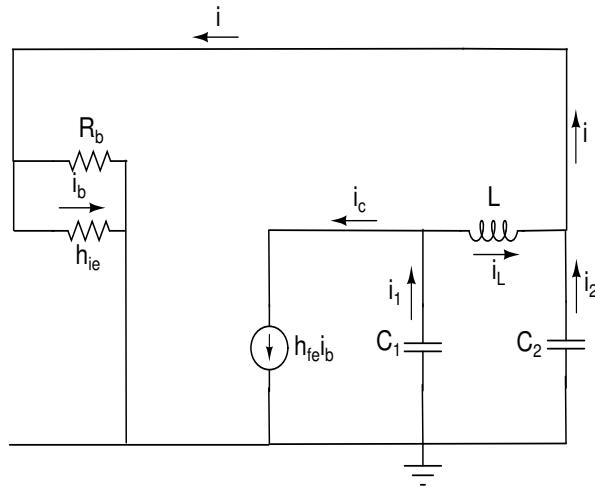


Figura 16.30: Circuito equivalente adoperato per calcolare la frequenza d'oscillazione dell'oscillatore Colpitts a transistor di figura 16.29. La configurazione è quella di un "emettitore comune". Il segnale presente ai capi del condensatore C_2 costituisce il segnale di feedback inviato alla base del transistor.

Indicando inoltre con v_1 la tensione su C_1 e con v_2 quella su C_2 , la (16.59) porta a:

$$i_L = -v_1 s C_1 - h_{fe} i_b \quad (16.60)$$

mentre è anche:

$$i_2 = -v_2 s C_2 \quad (16.61)$$

La corrente i_L è anche esprimibile come:

$$i_L = \frac{v_1 - v_2}{sL} \quad (16.62)$$

da cui:

$$\frac{v_1}{sL} = s L i_L + v_2 \quad (16.63)$$

Dall'ultima equazione, insieme alla (16.60), otteniamo:

$$i_L = -(s L i_L + v_2) s C_1 - h_{fe} i_b \quad (16.64)$$

da cui:

$$i_L (1 + s^2 L C_1) = -(s C_1 v_2 + h_{fe} i_b) = i_2 \frac{C_1}{C_2} - h_{fe} i_b \quad (16.65)$$

dove si è fatto uso della (16.61).

Da questa otteniamo:

$$i_L = \frac{i_2 (C_1 / C_2) - h_{fe} i_b}{1 + s^2 L C_1} \quad (16.66)$$

La (16.58) porta allora a:

$$\begin{aligned} i &= i_L + i_2 = i_2 \left[1 + \frac{C_1/C_2}{1+s^2LC_1} \right] - \frac{h_{fe}i_b}{1+s^2LC_1} = \\ &= -v_2 s C_1 \left[1 + \frac{C_1/C_2}{1+s^2LC_1} \right] - \frac{h_{fe}i_b}{1+s^2LC_1} \end{aligned} \quad (16.67)$$

La tensione v_2 è uguale a quella v_b sulla base. Il rapporto tra i e la corrente che entra in base i_b è dato da:

$$\frac{i}{i_b} = \frac{h_{ie}}{R_b \parallel h_{ie}} = \frac{R_b + h_{ie}}{R_b} \quad (16.68)$$

È anche:

$$v_b = h_{ie}i_b$$

Sostituendo questa nella (16.67), otteniamo:

$$i = -h_{ie}i_b s C_1 \left[1 + \frac{C_1/C_2}{1+s^2LC_1} \right] - \frac{h_{fe}i_b}{1+s^2LC_1} \quad (16.69)$$

da cui:

$$i = -i_b \frac{\left[h_{ie}sC_1 + h_{ie}s^3LC_1^2 + h_{ie}s\frac{C_1^2}{C_2} + h_{fe} \right]}{1+s^2LC_1} \quad (16.70)$$

Il fattore di feedback β può, in questo schema, esser definito in termini di un rapporto tra correnti: la corrente di feedback i e quella d'ingresso i_b . Otteniamo allora:

$$\beta = \frac{i}{i_b} = \frac{-h_{ie}C_1 \left[s^3LC_1 + s \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \right] - h_{fe}}{1+s^2LC_1} \quad (16.71)$$

Il guadagno di maglia può ora essere espresso come il prodotto di β per il "guadagno" associato al nodo d'ingresso, dato dal rapporto tra i_b ed i . Ponendo quindi:

$$A \equiv i_b/i$$

e facendo uso della (16.68), otteniamo:

$$A = \frac{i_b}{i} = \frac{R_b}{R_b + h_{ie}} \quad (16.72)$$

Facciamo ora uso delle (16.71) e (16.72) per ottenere il prodotto βA ed imponiamo che questo valga 1. Otteniamo:

$$(1+s^2LC_1)(R_b + h_{ie}) = -R_b h_{ie} C_1 \left[s^3LC_1 + s \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \right] - R_b h_{fe} \quad (16.73)$$

Ponendo ora $s = j\omega$, questa fornisce:

$$(1 - \omega^2 LC_1) (R_b + h_{ie}) = R_b h_{ie} C_1 \left[j\omega^3 LC_1 - j\omega \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \right] - R_b h_{fe} \quad (16.74)$$

La somma dei termini immaginari in questa equazione fornisce:

$$R_b h_{ie} L C_1^2 \omega^2 = R_b h_{ie} C_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (16.75)$$

da cui si ottiene facilmente:

$$\omega^2 = \frac{C_1 + C_2}{L C_1 C_2} \quad (16.76)$$

La parte reale della (16.74) fornisce poi:

$$(1 - \omega^2 LC_1) (R_b + h_{ie}) = -R_b h_{fe} \quad (16.77)$$

da cui, sostituendo l'espressione fornita dalla (16.76) per ω^2 segue:

$$\frac{C_1}{C_2} (R_b + h_{ie}) = R_b h_{fe} \quad (16.78)$$

Se poi è $R_b \gg h_{ie}$, si ottiene infine:

$$h_{fe} = \frac{C_1}{C_2} \quad (16.79)$$

che è al solito da intendersi come una disegualanza.

Passiamo ora ad esaminare un oscillatore Hartley a transistor, quale quello mostrato in figura 16.31. Il condensatore C_2 sarà normalmente scelto di valore sufficientemente elevato da poter esser considerato un corto circuito alle frequenze d'interesse. La resistenza di polarizzazione di base R_1 può esser considerata un circuito aperto per il segnale. Inoltre, la resistenza di polarizzazione sul collettore R_2 sarà in genere di valore sufficientemente piccolo da poter essere ignorata, con che la configurazione adottata diviene quella di *collettore comune*.

Se ignoriamo tutte le resistenze di polarizzazione, l'alimentazione ed il condensatore C_2 , il circuito si semplifica nel modo mostrato in figura 16.32.

L'induttanza L , nell'ipotesi di uno stretto accoppiamento tra le spire, può esser assimilata ad un autotrasformatore, come mostrato in figura 16.32. In tale autotrasformatore le spire del primario sono quelle (n_1) comprese tra i nodi b e c; quelle del secondario sono tutte le spire dell'induttanza ($n_1 + n_2$). Possiamo allora semplificare ulteriormente il circuito, sostituendo all'autotrasformatore un normale trasformatore, come mostrato in figura 16.33. Il trasformatore ha n_1 spire primarie ed $n_1 + n_2$ spire secondarie.

Facciamo ora uso del modello a parametri h per descrivere il funzionamento del transistor. Nella configurazione adottata, di collettore comune, i parametri rilevanti sono h_{ic} ed h_{fc} (tralasciando gli altri due parametri h_{oc} ed h_{rc}). Il circuito diviene allora quello di figura 16.34.

Adottiamo ora la tecnica discussa nel primo capitolo, di riflettere i componenti connessi al primario del trasformatore nel circuito del secondario. Nel nostro caso,

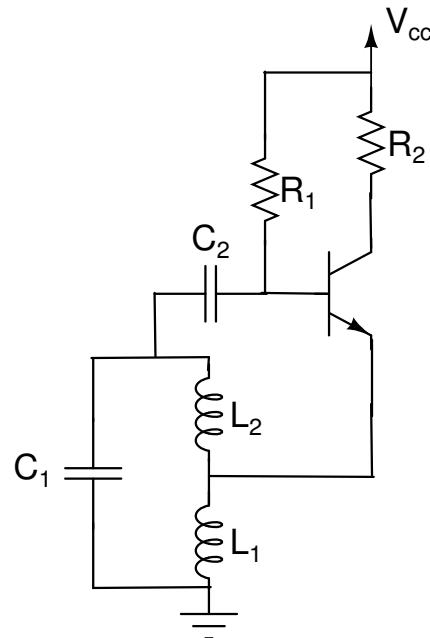


Figura 16.31: Oscillatore Hartley a transistor. La polarizzazione di base è fornita dalla resistenza R_1 . Il condensatore C_2 andrà scelto di valore abbastanza elevato da poter esser considerato un corto circuito.

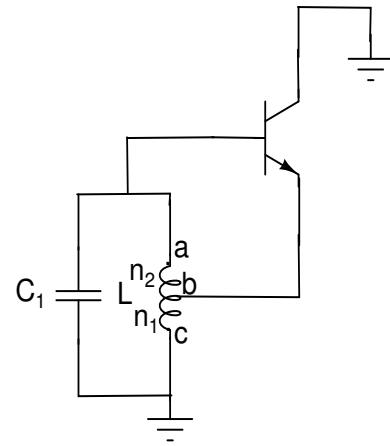


Figura 16.32: Schema semplificato dell'oscillatore Hartley a transistor. Sono state omesse le resistenze di polarizzazione e l'alimentazione.

l'unico componente connesso al primario è il generatore di corrente $h_{fc}i_b$. Il circuito si semplifica allora ulteriormente in quello di figura 16.35, dove il suddetto generatore è stato moltiplicato per il fattore $n_1/(n_1 + n_2)$ ed inserito nel circuito secondario (cioè in parallelo ad $L - C$ ed alla resistenza h_{ic}).

L'ammettenza del parallelo dei tre componenti C , L ed $1/h_{ie}$ è data da:

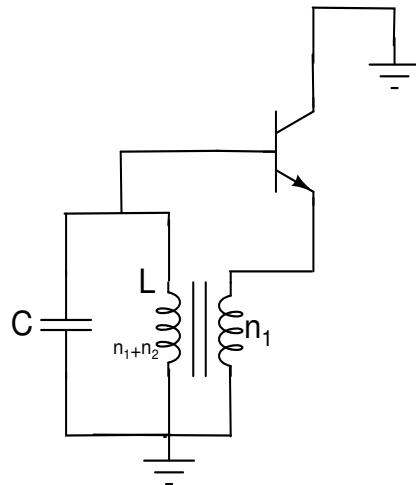


Figura 16.33: Schema semplificato dell'oscillatore Hartley a transistor, ottenuto da quello di figura 16.32 sostituendo l'induttanza L con un trasformatore.

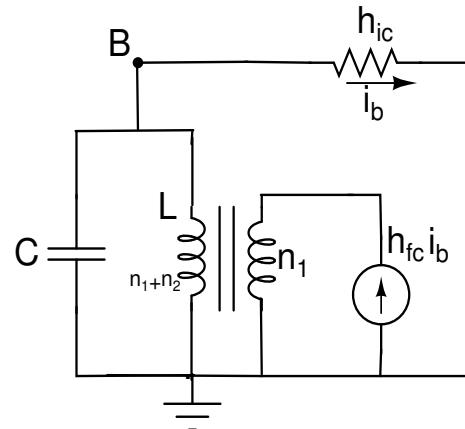


Figura 16.34: Schema equivalente adoperato per il calcolo della frequenza d'oscillazione dell'oscillatore Hartley a transistor, ottenuto da quello di figura 16.33. Si è fatto uso del modello a parametri h del transistor per la configurazione collettore-comune.

$$Y = sC + \frac{1}{h_{ic}} + \frac{1}{sL} = \frac{s^2LC h_{ic} + sL + h_{ic}}{sL h_{ic}} \quad (16.80)$$

Con ciò la differenza di potenziale ai loro capi è:

$$V = \frac{I}{Y} \quad (16.81)$$

dove:

$$I = h_{fc} \frac{n_1}{n_1 + n_2} i_b$$

La corrente in h_{ic} è quindi:

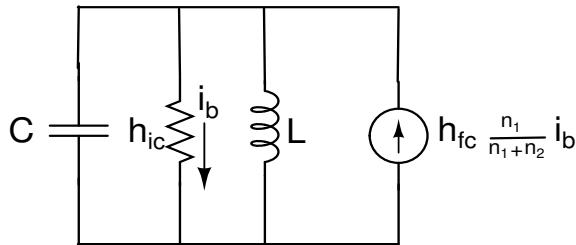


Figura 16.35: Schema semplificato ottenuto da quello di figura 16.34. Si è fatto uso del modello a parametri h del transistor per la configurazione collettore-comune.

$$i_b = \frac{V}{h_{ic}} = \frac{h_{fc}n_1/(n_1+n_2)i_b}{h_{ic}} \frac{1}{Y} = \frac{h_{fc}n_1/(n_1+n_2)sL}{s^2LC h_{ic} + sL + h_{ic}} i_b \quad (16.82)$$

Da questa si ottiene poi (per $i_b \neq 0$):

$$s^2LC h_{ic} + sL \left[1 - h_{fc} \frac{n_1}{n_1 + n_2} \right] + h_{ic} = 0 \quad (16.83)$$

Poniamo ora $s = j\omega$ ed imponiamo che si annulli la parte reale della (16.83), ottenendo:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (16.84)$$

Imponendo invece che si annulli la parte immaginaria otteniamo:

$$h_{fc} = 1 + \frac{n_2}{n_1} \quad (16.85)$$

e, tenendo conto del fatto che è: $h_{fc} = h_{fe} + 1$:

$$h_{fe} = \frac{n_2}{n_1} \quad (16.86)$$

da intendersi, al solito, come una diseguaglianza.

In figura 16.36 è mostrato un oscillatore Hartley del tipo appena descritto. I valori scelti per i componenti sono indicati nella figura e sono tali da fornire una frequenza d'oscillazione di 7.12 kHz. La simulazione effettuata facendo uso della versione DEMO del programma MICROCAP8 porta al risultato mostrato in figura 16.37. Nella figura è riportato l'andamento della tensione ai capi del circuito oscillante LC nei primi 10 ms dall'avvio. Si vede come l'oscillazione parta con ampiezza molto ridotta, per poi crescere fino ad un valore di diversi Volt e quindi stabilizzarsi. In figura 16.38 è invece mostrato in dettaglio l'andamento del segnale quando questo si è stabilizzato. Si vede dalla figura che la frequenza d'oscillazione è in effetti all'incirca uguale a quella attesa.

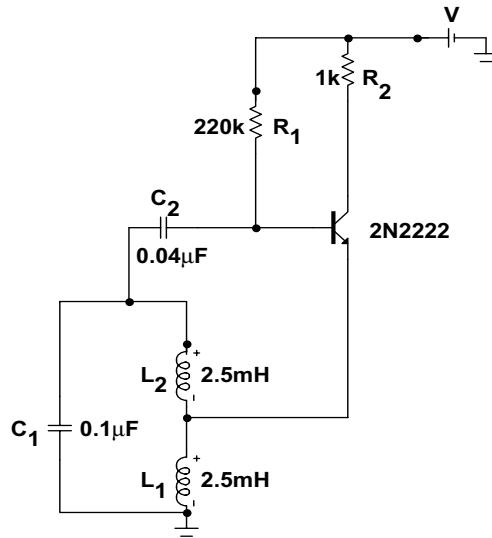


Figura 16.36: Esempio di oscillatore Hartley a transistor. Sono indicati i valori dei componenti adoperati per effettuare la simulazione con MICROCAP

Figura 16.37: Risultato della simulazione del circuito di figura 16.36. La forma d'onda mostrata è quella ai capi del circuito LC , nei primi 10 ms. La simulazione è stata effettuata facendo uso della versione DEMO del programma MICROCAP.

16.10 Oscillatori al quarzo

I circuiti oscillanti realizzati utilizzando componenti induttivi o capacitivi, se da un lato possono raggiungere frequenze relativamente elevate, offrono però una modesta stabilità in frequenza, legata al fatto che perdite ohmiche nell'induttanza fanno sì che il massimo Q raggiungibile non superi alcune centinaia.

Figura 16.38: Risultato della simulazione del circuito di figura 16.36. La forma d'onda mostrata è quella ai capi del circuito LC in regime stazionario (tra 16 e 18 ms). La simulazione è stata effettuata facendo uso della versione DEMO del programma MICROCAP.

Valori di Q decisamente più elevati e di conseguenza stabilità in frequenza non ottenibili con circuiti convenzionali, sono raggiungibili facendo uso di cristalli piezoelettrici, tipicamente di quarzo. Questi consentono di ottenere valori di Q che vanno da alcune decine di migliaia fino a quasi 10^6 , consentendo stabilità in frequenza altrimenti impensabili, e frequenze fino a centinaia di Mhz.

La piezoelettricità è quel fenomeno in virtù del quale se una lamina, opportunamente "tagliata", di cristallo, viene compressa in una certa direzione, si sviluppa al suo interno una separazione di cariche, e nasce di conseguenza un campo elettrico, in una direzione perpendicolare a quella di compressione. L'effetto opposto è altresì presente: se tra due facce opposte di una lamina del cristallo viene applicata una certa differenza di potenziale, nascono all'interno della lamina delle intense forze che possono, a seconda dei casi, cambiarne lo spessore, la larghezza o causare flessioni. Se la differenza di potenziale è alternata essa induce nella lamina delle oscillazioni meccaniche. Essendo le perdite per attriti interni praticamente assenti, se ne ha che le oscillazioni meccaniche che ne risultano hanno un bassissimo coefficiente di smorzamento. Se poi la frequenza della tensione sinusoidale applicata è uguale alla frequenza propria di vibrazione meccanica della lamina, si avrà una risonanza. Tale risonanza sarà caratterizzata da un valore di Q estremamente elevato, a causa del bassissimo livello delle perdite nel cristallo. La stabilità in frequenza, elevatissima, è normalmente espressa in parti per milione (ppm).

Il fenomeno della piezoelettricità e del suo inverso, furono scoperti da Pierre e Jacques Curie nel 1880. Trascorsero però diversi anni prima che se ne vedessero applicazioni pratiche: tra queste ricorderemo la produzione di segnali sonori monocromatici di alta frequenza, attraverso l'utilizzo di lastre di quarzo eccitate da tensioni sinusoidali. Nel 1917 Paul Langevin inventò, con l'utilizzo di tale strumen-

to, il *sonar* per la rivelazioni di sottomarini. Cristalli piezoelettrici furono utilizzati nelle prime radio attorno al 1920 e poi dalla Motorola, per la produzione di ricetrasmettitori in grado di operare in condizioni estreme di temperatura, tra il 1935 ed il 1940.

Pur costituendo il quarzo (SiO_2) circa il 14% del materiale della crosta terrestre, non è frequente trovarlo in forma di cristalli e, anche in tal caso, non sempre sotto forma di cristalli adatti all'utilizzo negli oscillatori. Cristalli che posseggono le caratteristiche volute sono prodotti industrialmente, attraverso processi di crescita a partire da opportuni "semi" in apposite autoclavi. Un tipico cristallo si presenta come mostrato in figura 16.39.

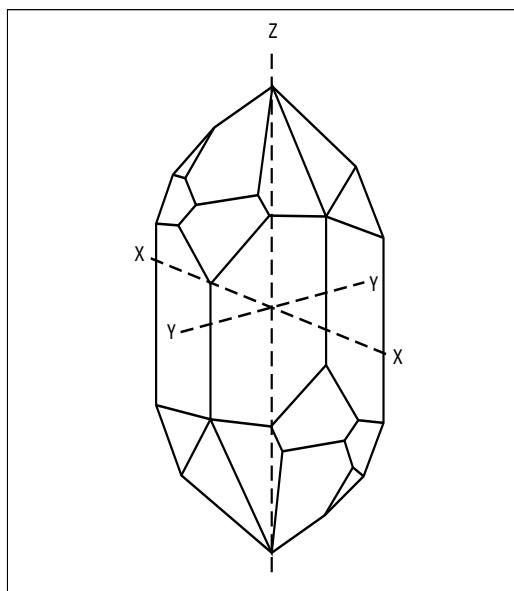


Figura 16.39: Struttura cristallografica di un tipico quarzo.

Per ottenere lamine adatte ad esser adoperate in oscillatori, il cristallo viene tagliato secondo opportune direzioni, riferite agli assi cristallografici, come mostrato in figura 16.40. A seconda della direzione si ottengono cristalli le cui vibrazioni meccaniche possono essere di tipo "flessorio", "longitudinale", "di deformazione superficiale" o "di taglio". Tipici modi di vibrazione sono mostrati nelle figure 16.41 e 16.42.

Ai diversi modi corrispondono poi diversi campi di frequenza. Al modo flessorio corrispondono frequenze comprese tra 0.4 e 100 kHz; al modo longitudinale frequenze comprese tra 40 kHz e 15 MHz; al modo di taglio frequenze comprese tra 100 kHz e 125 MHz.

Il taglio di gran lunga più utilizzato è quello noto come "AT", poichè è quello che offre una minore dipendenza della frequenza di oscillazione dalla temperatura ed il più ampio campo di frequenze. Questo taglio è disponibile, ad esempio, in cristalli prodotti dalla Cal Crystal Lab. a frequenze che vanno da circa 1 MHz a 29 MHz nella frequenza fondamentale e fino a circa 180 MHz nelle "overtone". Esiste un'ampia varietà di produttori di cristalli, come anche di oscillatori basati su cristalli.

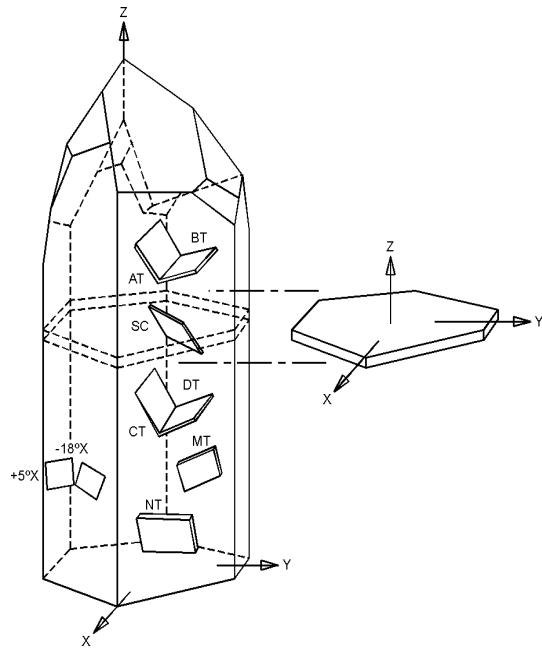


Figura 16.40: Schema dei diversi modi in cui un cristallo di quarzo può esser tagliato per ottenere una lamina adatta a realizzare un oscillatore.

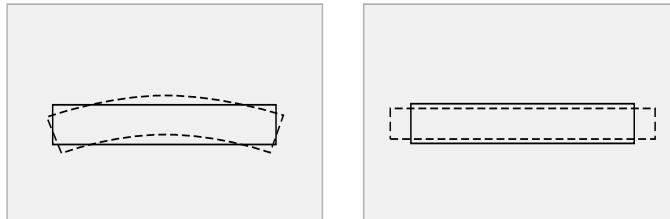


Figura 16.41: Modi di vibrazione flessorio (sinistra) e longitudinale (destra) di una lamina di quarzo.

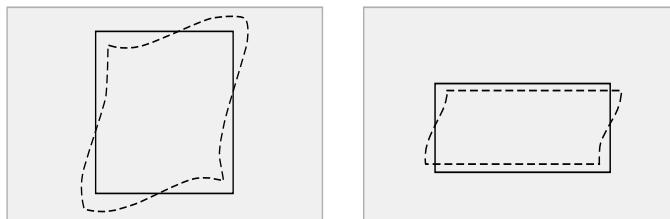


Figura 16.42: Modi di vibrazione di deformazione superficiale (sinistra) e di taglio (destra) di una lamina di quarzo.

La frequenza ν della vibrazione fondamentale è legata allo spessore d della lamina prodotta, dalla relazione:

$$d(\text{mm}) = \frac{1660}{\nu(\text{kHz})}$$

Ad esempio, per ottenere una frequenza di 1 MHz occorre uno spessore di 1.66 mm.

Un cristallo è progettato per operare nel suo modo fondamentale o in uno dei modi "overtone". I modi overtone sono l'analogo delle armoniche, con la differenza che essi non occorrono a multipli interi della frequenza fondamentale, ma a multipli che differiscono, spesso di poco, da interi. Nel caso dei cristalli di quarzo, la particolare struttura molecolare fa sì che gli overtone pari siano assenti. Gli overtone occorrono a frequenze prossime a multipli dispari della frequenza fondamentale.

In elettronica un cristallo si dice "overtone" se ha lo spessore che corrisponde alla frequenza fondamentale, ma ha il massimo della sua attività ad una frequenza overtone. È possibile costruire cristalli overtone modificando l'angolo di taglio, la finitura e curvatura della superficie.

Per esempio un cristallo la cui frequenza fondamentale sia 15 MHz oscillatorà anche a circa 45 MHz sul terzo overtone, a circa 75 MHz sul quinto, a circa 105 MHz sul settimo, etc.. Un esempio è un particolare cristallo che ha la frequenza fondamentale a 15 MHz; questo ha il terzo overtone a 45.020949 MHz, il quinto a 75.041899 MHz, etc..

L'utilizzo di cristalli overtone è utile poiché esso consente di lavorare con lamine non eccessivamente sottili (e quindi fragili) quali sarebbero necessarie se si volesse realizzare un cristallo avente la fondamentale ad una frequenza elevata.

Un tipico quarzo è costituito da una lamina di cristallo piezoelettrico sulle cui due facce sono stati depositati due elettrodi metallici, come mostrato in figura 16.43. Il simbolo adoperato in elettronica per tale quarzo è mostrato in figura 16.44.

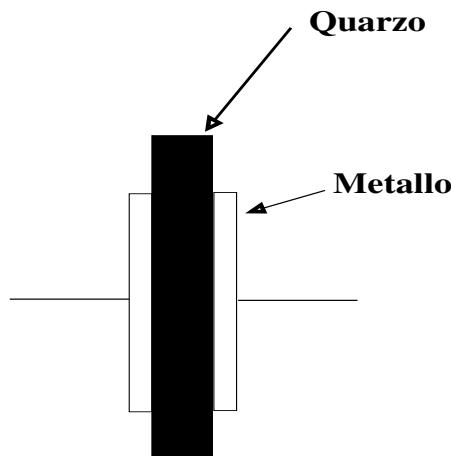


Figura 16.43: Schema che illustra in modo sommario il montaggio di un cristallo di quarzo tra i due contatti metallici. In realtà i montaggi adoperati sono alquanto più complessi.

Una caratteristica di grande importanza è la dipendenza della frequenza di risonanza dalla temperatura. Andamenti tipici delle deviazioni (in ppm) della frequenza da quella misurata a 27 °C sono mostrati in figura 16.45.

Le proprietà elettriche di un quarzo possono esser analizzate facendo uso di un circuito equivalente quale quello mostrato in figura 16.46. Tale circuito equivalente può esser adoperato per definire in maniera esatta il comportamento elettrico del cristallo, ed è adoperato nella progettazione matematica di alcuni tipi di cristalli prima che essi vengano prodotti.



Figura 16.44: Simbolo adoperato in elettronica per un quarzo.

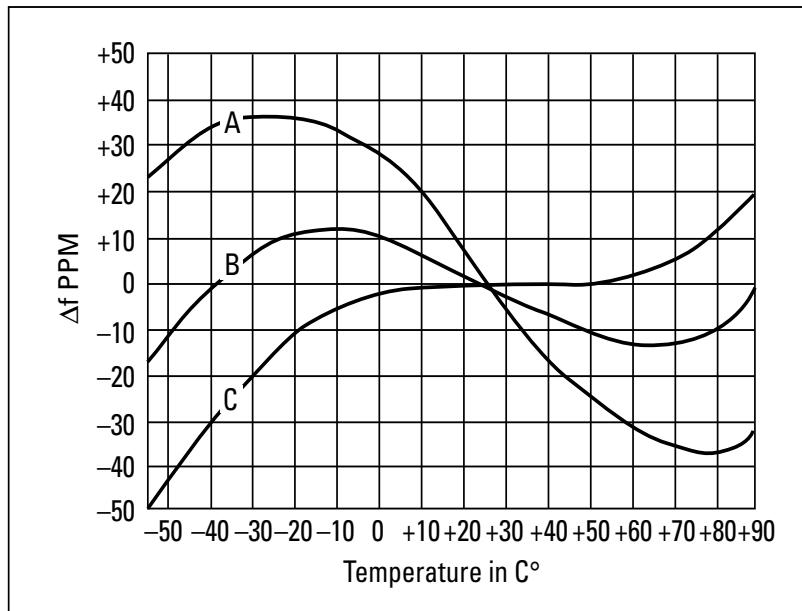


Figura 16.45: Deviazioni (in ppm) della frequenza di risonanza di un cristallo AT da quella misurata a $T = 27^\circ\text{C}$ in funzione della temperatura. Le tre diverse curve si riferiscono a tagli che differiscono da quello standard AT di pochi secondi d'arco.

L'induttanza L corrisponde, in termini fisici, alla massa inerziale del cristallo; la capacità C all'elasticità e la resistenza R alle perdite per attriti interni. La capacità C_0 è quella tra gli elettrodi esterni. Un tipico cristallo potrebbe avere $L = 2 \text{ H}$, $C = 10 \text{ fF}$, $R = 50 \Omega$. Il valore di C_0 è normalmente molto maggiore di C . Un tale cristallo avrebbe una frequenza d'oscillazione $f = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 1.125 \text{ MHz}$ ed un valore di $Q = \omega L/R = 141,400$, cui corrisponde una larghezza del picco di risonanza di appena 8 Hz. Il cristallo HC49U ha $C_0 = 5.5 \text{ pF}$, $C = 20.8 \text{ fF}$, $L = 3.1 \text{ mH}$, $R = 6.1 \Omega$. A questi valori corrisponde una frequenza di risonanza $f = 19.82 \text{ MHz}$ ed un $Q = 65,600$.

Analizziamo in dettaglio il circuito equivalente di figura.

L'impedenza del circuito equivalente è data dal parallelo tra quella Z_s del ramo LCR e quella associata a C_0 . Avremo quindi:

$$Z = Z_s \parallel Z_{C_0} = \frac{Z_s Z_{C_0}}{Z_s + Z_{C_0}} \quad (16.87)$$

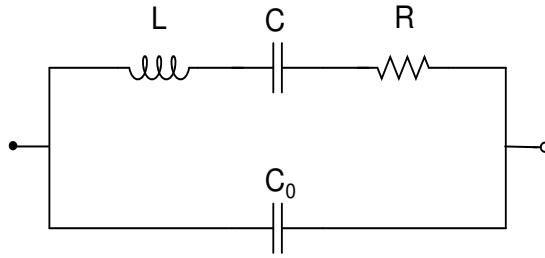


Figura 16.46: Circuito equivalente adoperato comunemente per descrivere le caratteristiche elettriche di un cristallo di quarzo.

dove:

$$Z_s = R + \frac{1}{sC} + sL$$

$$Z_{C_0} = \frac{1}{sC_0}$$

Da queste equazioni si ottiene:

$$Z(s) = \frac{s^2LC + sCR + 1}{(s^2LC + sRC + 1)sC_0 + sC} \quad (16.88)$$

Ponendo in questa $s = j\omega$ troviamo:

$$Z(\omega) = \frac{1 - \omega^2LC + j\omega RC}{C_0[-j\omega^3LC - \omega^2RC + j\omega] + j\omega C} \quad (16.89)$$

Se in questa ammettiamo di poter trascurare R , otteniamo:

$$Z(\omega) = \frac{1 - \omega^2LC}{j\omega C_0[1 - \omega^2LC] + j\omega C} = \frac{1 - \omega^2LC}{j\omega C_0 \left[\frac{C_0+C}{C_0LC} - \omega^2LC \right]} \quad (16.90)$$

Dividendo in questa numeratore e denominatore per LC :

$$Z(\omega) = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{j\omega C_0 \left[\frac{C_0+C}{C_0LC} - \omega^2 \right]} \quad (16.91)$$

Poniamo ora:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{C_0+C}{C_0LC}}$$

dove è immediato verificare che è sempre $\omega_s < \omega_p$ e che la differenza tra le due è sempre estremamente piccola, tenendo conto dei valori tipici dei componenti.

Con ciò la (16.91) diventa:

$$Z(\omega) = \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{j\omega C_0 (\omega_p^2 - \omega^2)} \quad (16.92)$$

La (16.92) ha uno zero per $\omega = \omega_s$, un polo per $\omega = \omega_p$.

È immediato verificare che l'impedenza è di tipo capacitivo per:

$$\frac{\omega_s^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} > 0$$

cioè per $\omega < \omega_s$ e per $\omega > \omega_p$. Invece essa è di tipo induttivo per ω compreso nell'intervallo $\omega_s \div \omega_p$.

L'andamento di Z in funzione di ω è qualitativamente illustrato in figura 16.47.

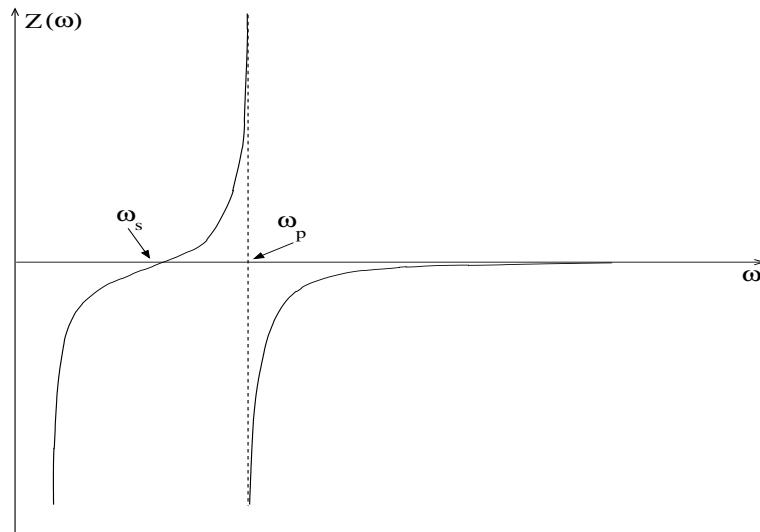


Figura 16.47: Andamento qualitativo dell'impedenza associata al circuito equivalente di figura 16.46 in funzione di ω . Si noti che il grafico è stato fortemente espanso lungo l'asse ω e che in realtà le due frequenze angolari ω_s ed ω_p differiscono pochissimo.

Alle frequenze:

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{C_0+C}{C_0LC}}}$$

si dà rispettivamente il nome di *frequenza di risonanza serie* e *frequenza di risonanza parallelo*.

Vediamo che l'impedenza si annulla per $\omega = \omega_s$ e rimane molto piccola nella zona appena al di sopra di ω_s . In pratica, tenendo conto anche di R , vediamo che per di $\omega = \omega_s$ essa acquista un valore minimo. Ci si riferisce ad un cristallo adoperato in tale zona come un utilizzo nel *modo serie*. Se si lavora invece nella zona compresa tra ω_s e ω_p , in cui l'impedenza è di tipo induttivo, si dice che si utilizza il cristallo nel *modo parallelo*. Il motivo di tali denominazioni è nel fatto che nel primo caso l'impedenza è sostanzialmente determinata dalla "gamba" LCR , nel secondo caso essa è determinata dal parallelo tra tale gamba e quella contenente C_0 .

Nella pratica è conveniente lavorare nel modo parallelo, dove l'induttanza, di tipo induttivo, ha una forte dipendenza da ω ed il cristallo offre quindi un'ottima stabilità in frequenza. Nelle relazioni precedenti abbiamo trascurato l'effetto della resistenza R . È facile verificare che tenendone conto le espressioni di ω_s ed ω_p differiscono poco da quelle date e che il Q del circuito è dato da:

$$Q = \omega_p \frac{L}{R} \approx \omega_s \frac{L}{R} \quad (16.93)$$

Esamineremo nella prossima sezione alcuni esempi di oscillatori al quarzo, operanti nei due modi ora descritti.

16.10.1 Esempi di oscillatori al quarzo

Come accennato, un oscillatore che adoperi il quarzo nel "modo serie", lavora alla frequenza f_s , dove l'impedenza, di tipo resistivo, diventa estremamente piccola. In tali circuiti non sono presenti capacità nella rete di feedback e l'elemento attivo è del tipo non invertente. Circuiti di questo tipo sono spesso adoperati per motivi di semplicità, poiché essi richiedono un minimo numero di componenti. Un esempio di oscillatore in cui il cristallo lavora nel modo serie è quello di figura 16.48, in cui si adopera un amplificatore a FET, con un feedback tra drain e gate applicato tramite un cristallo.

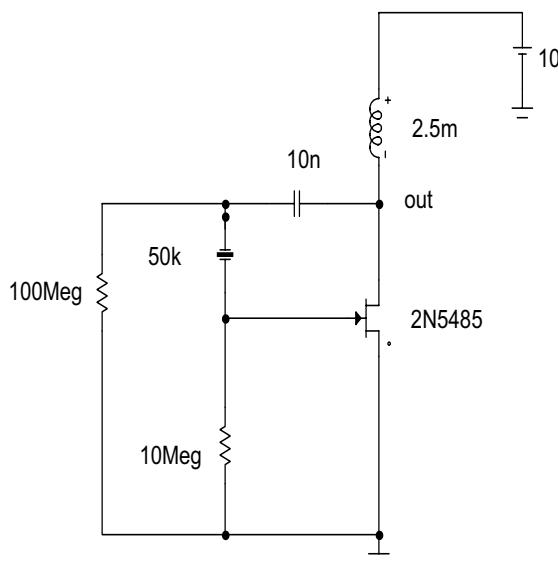


Figura 16.48: Oscillatore a J-fet che utilizza un cristallo nel modo serie.

La frequenza scelta per il cristallo nell'esempio è 50 kHz. Un condensatore di disaccoppiamento è stato aggiunto in serie al quarzo. L'induttanza nel circuito di collettore ha lo scopo di disaccoppiare, alla frequenza del segnale, il collettore medesimo dall'alimentazione.

Nel caso in cui il cristallo venga fatto lavorare nel modo parallelo, si fa uso di condensatori per realizzare un circuito accordato, spesso del tipo Colpitts. In questo

modo di funzionamento l'elemento attivo dovrà essere di tipo invertente. Un esempio è quello mostrato in figura 16.49.

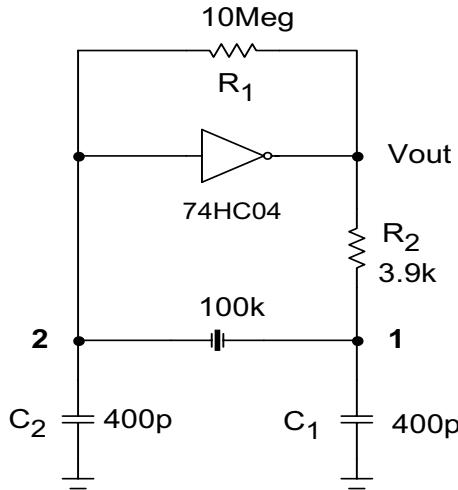


Figura 16.49: Oscillatore a quarzo che utilizza un inverter CMOS.

In questo circuito, noto con il nome di "oscillatore Pierce"⁵, si fa uso di un invertitore CMOS e di una rete di feedback costituita da due capacità C_1 e C_2 che, insieme al quarzo, costituiscono un circuito accordato⁶. Analizziamo in dettaglio questo circuito ed, a tale scopo, ridisegniamo la rete di feedback come mostrato in figura 16.50, dove Z indica l'impedenza associata al quarzo, data dalla (16.92).

Chiamiamo v_{out} la tensione all'uscita dell'invertitore, v_2 quella su C_2 e v_1 quella su C_1 . L'impedenza della rete di feedback, misurata tra quest'ultimo punto e massa è data da:

$$Z_f = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \left(Z + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{\frac{1}{j\omega C_1} + Z + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{j\omega} \times \frac{1 + j\omega C_2 Z}{(C_1 + C_2) + j\omega Z C_1 C_2} \quad (16.94)$$

Questa ha un polo per:

$$j\omega = -\frac{1}{Z} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

⁵Inventato da George W. Pierce, che ottenne il relativo brevetto nel 1923. Pierce si era occupato a lungo di antenne radio, piezoelettricità, magnetostrizione e loro applicazioni. Negli ultimi anni della sua vita si occupò del suono emesso da insetti e pipistrelli e pubblicò nel 1948 un libro dal titolo "the Song of insects".

⁶Le caratteristiche fornite dai costruttori per un cristallo da adoperare nel modo parallelo specificano di regola i valori minimi e massimi della "capacità di carico" C_L , costituita dalla serie dei due condensatori C_1 e C_2 . Più precisamente, si può vedere che al cambiare di C_L lo scostamento della frequenza di risonanza f_L da quella relativa al modo seriale (f_s) cambia come segue:

$$\frac{f_L - f_s}{f_s} = \frac{C}{2(C_L + C_0)} \times 10^6 \text{ (in ppm)}$$

dove C e C_0 sono le capacità che figurano nel circuito equivalente del quarzo. Occorre evitare valori troppo grandi o troppo piccoli di C_L , cioè di C_1 e C_2 . Per ulteriori dettagli si consulti la referenza [12].

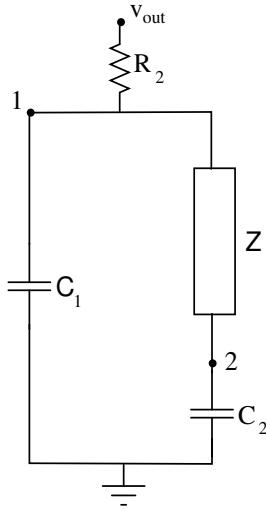


Figura 16.50: Circuito equivalente adoperato per calcolare il coefficiente di feedback del circuito oscillante di figura 16.49.

Sostituendo in questa l'espressione di $Z(\omega)$ data dalla (16.92) otteniamo:

$$j\omega = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \frac{j\omega C_0 (\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega_s^2 - \omega^2} \quad (16.95)$$

da cui:

$$\omega^2 - \omega_p^2 = \frac{C_1 C_2}{C_0 (C_1 + C_2)} (\omega_s^2 - \omega^2)$$

Poniamo ora:

$$\alpha = \frac{C_1 C_2}{C_0 (C_1 + C_2)}$$

Con ciò dalla (16.95) si ottiene:

$$\omega^2 = \omega_p^2 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} (\omega_p^2 - \omega_s^2) \quad (16.96)$$

la quale mostra che la frequenza alla quale l'impedenza Z_f diviene infinitamente grande è compresa tra ω_s ed ω_p , cioè viene a cadere nella zona in cui l'impedenza del quarzo è induttiva. Facciamo ora uso dei valori tipicamente adoperati in questo tipo di circuiti per verificare quanto la frequenza fornita dalla (16.96) differisca da f_s e quanto da f_p .

Ad esempio, la Fairchild fornisce [13], come valori tipici per un quarzo da 200 kHz:

$$L = 27H; \quad R = 2k\Omega; \quad C = 0.024pF; \quad C_0 = 9pF$$

Con questi valori troviamo per le frequenze di risonanza f_s e f_p :

$$f_s = 1.977118 \times 10^5 \text{ Hz}; \quad f_p = 1.97975258 \times 10^5 \text{ Hz}$$

ed una differenza tra le due frequenze di appena 263.44.2 Hz. Se ora facciamo variare il valore (comune) delle due capacità C_1 e C_2 tra 1 pF e 400 pF, la frequenza d'oscillazione del circuito di Pierce cambierà come mostrato in figura 16.51. Nella figura

sono riportate due diverse curve: quella a tratto solido rappresenta la differenza (in Hz) della frequenza ottenuta da f_s ; quella a punti rappresenta l'analoga differenza da f_p . Vediamo che per piccoli valori delle capacità la frequenza è molto vicina a quella parallela f_p ; al crescere del valore delle capacità essa si avvicina sempre più a f_s .

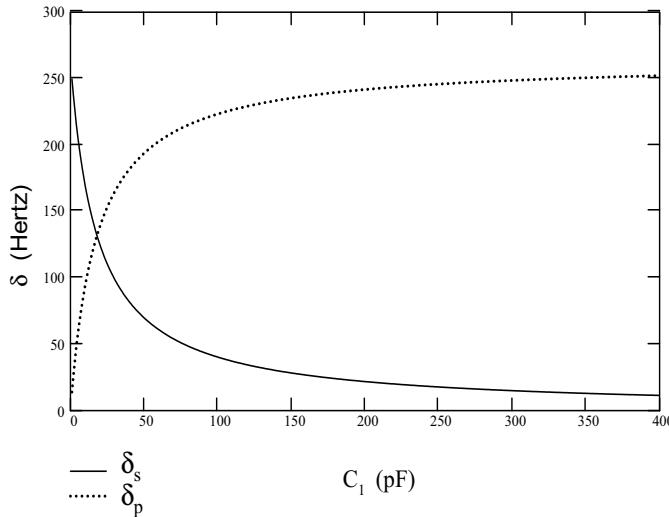


Figura 16.51: Dipendenza dal valore comune delle capacità C_1 e C_2 della deviazione della frequenza di lavoro f dalla frequenza serie f_s (curva a tratto continuo) e dalla frequenza parallelo f_p (curva a punti).

Alla frequenza di risonanza, l'impedenza Z_f diviene molto grande, il che ci dice che la corrente che fluisce nella resistenza R_2 sarà mediamente piccola. La tensione nel punto 1 sarà determinata di fatto dal partitore $R_2 \div C_1$. È consigliabile scegliere i valori dei componenti in modo che, alla frequenza di lavoro l'impedenza capacitiva di C_1 uguagli R_2 . In tal caso avremo $v_2 = v_{out}/2$. Calcoliamo ora il fattore di feedback, cioè il rapporto tra v_2 e v_{out} . Poiché l'impedenza d'ingresso dell'invertitore, come pure la resistenza R_1 sono molto grandi, potremo considerare la serie $Z \div C_2$ come un partitore e scrivere:

$$v_2 = \frac{v_1}{j\omega Z C_2 + 1} = \frac{v_1}{\frac{C_2 \omega_s^2 - \omega^2}{C_0 \omega_p^2 - \omega^2} + 1} = \frac{v_1}{1 - \frac{C_2 \omega^2 - \omega_s^2}{C_0 \omega_p^2 - \omega^2}} = \frac{v_{out}}{2 \left[1 - \frac{C_2 \omega^2 - \omega_s^2}{C_0 \omega_p^2 - \omega^2} \right]}$$

Da questa otteniamo poi, facendo uso della (16.96) e della definizione di α :

$$\beta = \frac{v_2}{v_{out}} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{C_1 + C_2}{C_1} \right)} = -\frac{C_1}{2C_2} < 0$$

che nel nostro esempio vale $-1/2$.

Vediamo così che il feedback è negativo, come deve essere se si vuole che lo sfasamento complessivo lungo l'intera maglia sia nullo, tenendo conto del fatto che l'elemento attivo in questo circuito è invertente. Il guadagno dell'amplificatore a

CMOS è poi abbastanza elevato da far sì che il modulo del guadagno dell'anello sia maggiore di 1.

Si può poi facilmente verificare, facendo uso della (16.96) e dell'espressione di α che è:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \left[1 + \frac{C}{C_0 + C_L} \right] \quad (16.97)$$

dove:

$$C_L = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

La frequenza d'oscillazione è quindi data da:

$$f = f_s \times \sqrt{1 + \frac{C}{C_0 + C_L}} \quad (16.98)$$

La forma d'onda ottenuta all'uscita del circuito in esame facendo uso del programma di simulazione MICROCAP è mostrata in figura 16.52. Si può vedere dal grafico che la frequenza è di circa 100 kHz, molto vicina a quella del quarzo adoperato.

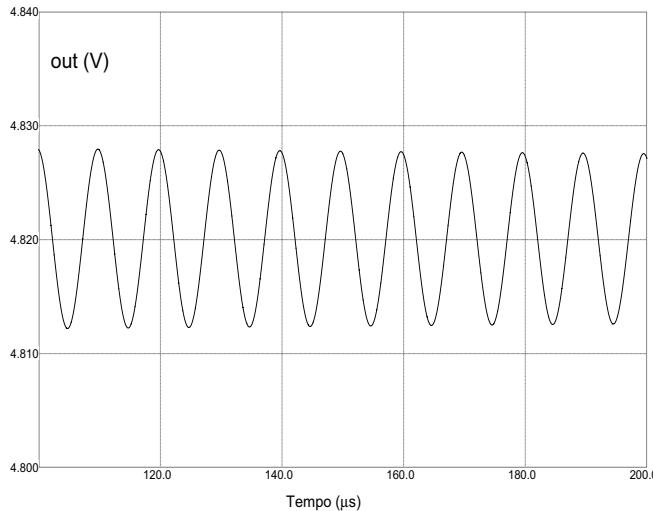


Figura 16.52: Forma d'onda all'uscita dell'oscillatore a CMOS inverter di figura 16.49.

Un ulteriore variante del circuito di Pierce è quella di figura 16.53. Qui l'invertitore a CMOS è sostituito da un transistor bipolare.

16.11 Risuonatori ceramici

Questi sono simili a quelli al quarzo, ma hanno una minore stabilità in frequenza, a cui si contrappone un costo decisamente inferiore. La loro stabilità in frequenza varia tra lo 0.3% ed il 3%.

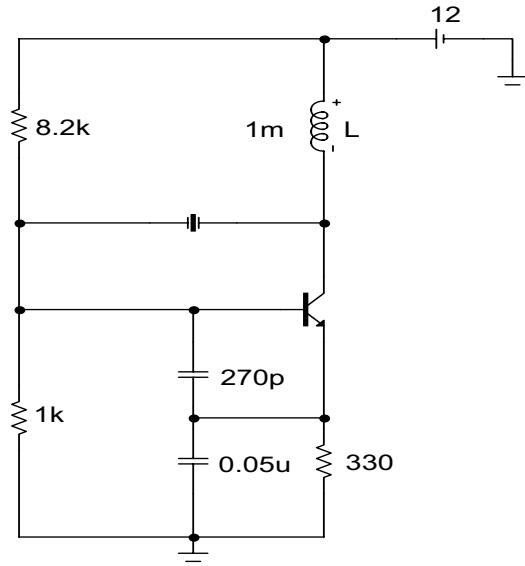


Figura 16.53: Oscillatore al quarzo a transistor bipolare. La configurazione è quella di Pierce.

Si tratta anche in questo caso di dispositivi piezoelettrici che possono esser analizzati facendo uso del medesimo circuito equivalente adoperato nel caso del quarzo. Valori tipici dei parametri dei componenti presenti nel circuito equivalente, ad 8 MHz, sono: $L = 0.092 \text{ mH}$, $C = 4.6 \text{ pF}$, $R = 7 \Omega$, $C_0 = 40 \text{ pF}$.

I circuiti che possono esser realizzati facendo uso dei risonatori ceramici utilizzano schemi molto simili a quelli analizzati nel caso dei quarzi.

16.12 Appendice A: Non-linearietà dei dispositivi attivi adoperati

Abbiamo accennato al fatto che la non-linearietà nella risposta degli elementi attivi contribuisce ad impedire la saturazione. Ciò è vero per tutti gli elementi attivi adoperati nella realizzazione di oscillatori. Nel seguito limiteremo la nostra analisi al caso dei transistor bipolari.

La non-linearietà ha come effetto, oltre quello di controllare l'ampiezza del segnale, anche quello di controllare l'importanza relativa delle varie armoniche presenti nel segnale che alimenta il circuito oscillante, fornendogli l'energia necessaria a mantenere l'oscillazione.

La figura 16.54 mostra la tipica caratteristica esponenziale corrente-tensione associata al diodo base-emettitore del transistor.

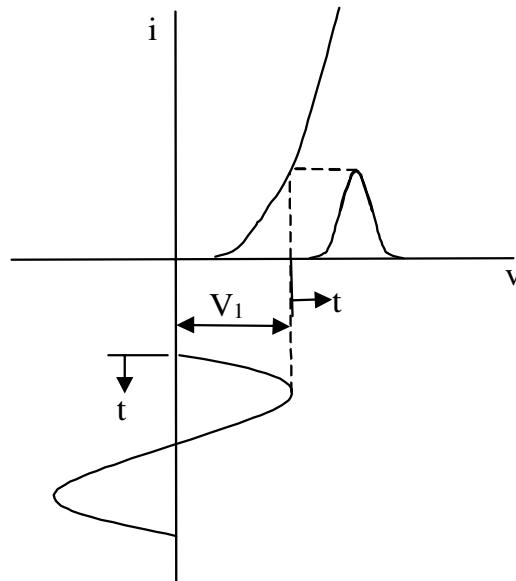


Figura 16.54: Caratteristica corrente-tensione associata alla giunzione base-emettitore di un transistor bipolare. È mostrata anche una forma d'onda sinusoidale v_i di ampiezza v_1 in ingresso ed il corrispondente segnale di corrente prodotto quando v_i supera V_γ .

La forma d'onda di ampiezza v_1 rappresenta il segnale sinusoidale che il circuito oscillante fornisce alla giunzione. Se l'ampiezza del segnale supera la tensione di soglia V_γ del diodo, la corrente risultante consisterà in una serie periodica di impulsi, la cui ampiezza è determinata dalle caratteristiche del dispositivo. Il *contenuto armonico* di questa serie di impulsi si ottiene facendone lo sviluppo in serie di Fourier. Nello sviluppo apparirà, oltre alla frequenza fondamentale ω , una serie di armoniche multiple di essa. Esse sono una conseguenza inevitabile del carattere non lineare del dispositivo. Se infatti questo fosse lineare, ad un segnale sinusoidale in ingresso corrisponderebbe in uscita un segnale anch'esso sinusoidale il cui sviluppo in serie di Fourier conterrebbe la sola frequenza fondamentale.

Notiamo che nel dispositivo non lineare considerato gli impulsi di corrente sono tanto più stretti ed alti quanto maggiore è l'ampiezza v_1 . Ne segue che il contenuto

armonico (cioè il contributo delle armoniche superiori) aumenta all'aumentare di v_1 . Vediamo quantitativamente come ciò avvenga.

La corrente nel diodo polarizzato direttamente è data dalla nota equazione:

$$i = I_s e^{v/V_\gamma} \quad (16.99)$$

dove I_s è la corrente di saturazione e $V_\gamma = kT/q \approx 26mV$. La tensione v che figura nella (16.99) è la somma di un contributo continuo e di un termine sinusoidale:

$$v = V + v_1 \cos(\omega t) \quad (16.100)$$

Sostituendo questa nella (16.99), otteniamo:

$$i = I_s e^{\frac{V}{V_\gamma}} e^{\frac{v_1}{V_\gamma} \cos(\omega t)} \quad (16.101)$$

Porremo I_{DC} uguale al termine non dipendente dal tempo: $I_s e^{V/V_\gamma}$.

Il "livello di conduzione" x è definito come il rapporto tra v_1 e V_γ :

$$x = \frac{v_1}{V_\gamma} \quad (16.102)$$

Così, se è $v_1 = 260 mV$ avremo $x = 10$.

Poichè il termine $\exp[x \cos(\omega t)]$ è periodico, esso può esser sviluppato in serie di Fourier. Il risultato dello sviluppo è:

$$e^{x \cos(\omega t)} = \sum_n a_n(x) \cos(n\omega t) \quad (16.103)$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(\omega t)} d(\omega t) = I_0(x) \quad (16.104)$$

che è la funzione di Bessel modificata di ordine zero, e:

$$a_n(x)|_{n>0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(\omega t)} \cos(n\omega t) d(\omega t) = 2I_n(x) \quad (16.105)$$

dove $I_n(x)$ è il doppio della funzione di Bessel modificata di ordine n .

Sostituendo le (16.103), (16.104) e (16.105) nella (16.102), si ottiene:

$$i = I_s e^{\frac{V}{V_\gamma}} \left[I_0(x) + \sum_n 2I_n(x) \cos(n\omega t) \right] \quad (16.106)$$

che può esser riscritta nella forma:

$$i = I_{DC} \left[1 + \sum_n \frac{2I_n(x)}{I_0(x)} \cos(n\omega t) \right] \quad (16.107)$$

con:

$$I_{DC} = I_s e^{\frac{V}{V_\gamma}}$$

La funzione espressa dalla (16.106) è mostrata, in funzione di x per $n = 1, 2, 3, 4$. Si può vedere che l'importanza relativa delle diverse armoniche dipende da x e che

per valori di x molto piccoli domina nettamente l'armonica fondamentale (di ordine zero). Per grandi valori di x le armoniche da quella di ordine uno in su, tendono ad acquistare tutte il medesimo peso. Se si desidera che l'armonica di ordine zero sia dominante, occorre che il valore di x sia il più piccolo possibile. Ciò tuttavia non è compatibile con l'esigenza che l'oscillazione non si smorzi.

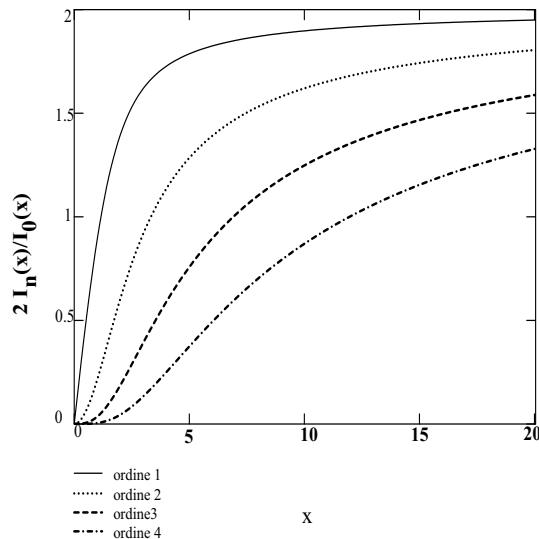


Figura 16.55: Rapporto tra il contributo delle armoniche di ordine 1, 2, 3, 4 e quello dell'armonica fondamentale, in funzione della variabile $x = v_1/v_\gamma$ definita nel testo.

16.13 Appendice B: relazione tra Q_0 ed il numero di oscillazioni in un tempo τ

Riscriviamo la (16.19):

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{\frac{s}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \omega_0^2} \quad (16.108)$$

La risposta ad un gradino unitario (trasformata $1/s$) è:

$$v_{out}(s) = \frac{1}{s} \frac{\frac{s}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \omega_0^2} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \omega_0^2} \quad (16.109)$$

dove abbiamo la corrispondenza:

$$\frac{\omega_0}{Q_0} \leftrightarrow \frac{1}{\tau}$$

I poli di questa funzione sono dati dalle soluzioni dell'equazione:

$$s^2 + \frac{s}{\tau} + \omega_0^2 = 0$$

cioè da:

$$s_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q_0^2} \right) \quad (16.110)$$

Proponendoci di studiare l'andamento delle soluzioni per grandi valori di Q_0 , terremo presente che la radice potrà essere espressa nella forma:

$$\sqrt{1 - 4Q_0^2} = j\sqrt{|1 - 4Q_0^2|} \equiv j\alpha$$

I poli $s_{1,2}$ saranno quindi complessi coniugati e la soluzione della (16.109) può, facendo uso della (2.14), esser scritta come:

$$\frac{1}{\tau} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_1^*} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_1^* - s_1} e^{s_1^* t} \right\} \quad (16.111)$$

dove:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q_0} (1 + j\alpha) \\ s_1^* &= -\frac{\omega_0}{2Q_0} (1 - j\alpha) \end{aligned}$$

per cui:

$$s_1 - s_1^* = -\frac{j\omega_0}{Q_0} \alpha$$

La (16.111) acquista allora la forma:

$$v_{out}(t) = \frac{j}{\alpha} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0} t} \left\{ e^{-j\frac{\omega_0}{2Q_0} \alpha t} - e^{j\frac{\omega_0}{2Q_0} \alpha t} \right\} = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0} t} \left[2 \sin \frac{\omega_0}{2Q_0} \alpha t \right] \quad (16.112)$$

Per grandi valori di Q_0 questa diventa:

$$v_{out}(t) = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0} t} \sin(\omega_0 t) \quad (16.113)$$

Questa descrive un moto oscillatorio smorzato, con tempo di decadimento dato da:

$$T = \frac{2Q_0}{\omega_0}$$

In tale intervallo di tempo la funzione $\sin(\omega_0 t)$ si annulla un numero di volte dato da:

$$n = \frac{2Q_0}{\pi}$$

Vediamo quindi che il numero di oscillazioni entro una costante di tempo è una misura di Q_0 .

Capitolo 17

Convertitori Digitale-Analogico ed Analogico-Digitale

17.1 Introduzione

L'informazione digitale che viene elaborata da un generico processore è in molti casi successivamente convertita in un segnale analogico, quale la corrente che alimenta le bobine di un altoparlante, quella che accende dei LED, la tensione che controlla un condizionatore d'aria etc. Sull'altro versante, se abbiamo la necessità di analizzare l'andamento di un fenomeno, quale ad esempio l'andamento della corrente di collettore in un transistor al variare della corrente di base, la corrente anodica in un fotomoltiplicatore al variare della tensione d'alimentazione, la pressione in un certo volume di gas al variare della temperatura etc., incontriamo la necessità di convertire il relativo segnale *analogico* (di corrente o tensione) in un segnale *digitale*, ovvero in una stringa di bits.

I circuiti che effettuano la conversione di un segnale analogico in uno digitale sono noti appunto come “convertitori Analogico-Digitale” o brevemente “ADC”. Circuiti di questo genere sono disponibili in commercio in un'ampia varietà di tipi diversi.

I circuiti che effettuano la conversione opposta, di un segnale digitale in uno analogico sono noti come “Digital to Analog Converters” (DAC).

Una tipica applicazione degli ADC si incontra in quelli che sono noti come “Waveform Digitisers” (digitizzatori di forme d'onda). Questi forniscono una rappresentazione numerica di segnali dipendenti dal tempo. In tale applicazione, la forma d'onda che caratterizza il segnale viene “campionata” ad intervalli di tempo equispaziati, estremamente ravvicinati (fino a qualche picosecondo) e l'ampiezza del segnale in ciascuno di tali intervalli di tempo viene convertita in un numero binario. In tale categoria rientrano, tra gli altri, gli oscilloscopi digitali, che stanno rapidamente sostituendo quelli analogici. Nella medesima categoria rientrano tutti i sistemi di trasmissione digitale, le fotocamere digitali etc..

Nel seguito ci occuperemo di una rassegna dei principi che sono alla base del funzionamento di entrambi questi tipi di convertitori. Premetteremo una breve discussione dei circuiti che effettuano il “campionamento” del segnale (circuiti di *sample-and-hold*).

17.2 Circuiti di Sample-and-Hold

Per convertire un segnale analogico in uno digitale occorre disporre di un circuito che “campioni” (sample) il segnale analogico all’istante voluto e ne trattienga (hold) il valore, in attesa che il successivo circuito abbia la possibilità di “leggere” e convertire il segnale analogico in una sequenza di bit, cioè in un numero. I circuiti che realizzano tale funzione vanno sotto il nome di circuiti di “sample and hold” (*S&H*). Il più semplice circuito di *S&H* è un condensatore la cui carica è comandata da un interruttore, come mostrato in figura 17.1.

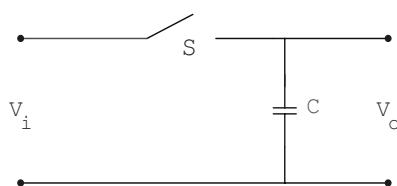


Figura 17.1: Semplice circuito *sample-and-hold* costituito da un condensatore la cui carica è comandata da un interruttore.

La chiusura dell’interruttore ad un dato istante consente al condensatore C di caricarsi alla tensione del segnale da campionare V_i , applicato all’ingresso. La carica del condensatore non sarà ovviamente istantanea, ma dipenderà dalla corrente I che la sorgente V_i è in grado di erogare, oltre che dal valore di C. Una volta carico, il condensatore manterrà il potenziale V_i anche dopo che l’interruttore sia stato aperto. Tuttavia, perdite attraverso il dielettrico causeranno una diminuzione della tensione ai capi del condensatore in tempi relativamente brevi. Se poi il condensatore è collegato, come sempre avviene, ad un carico, tale tempo sarà ulteriormente ridotto. L’interruttore può esser realizzato facendo uso di un transistor ad effetto di campo (FET) o di una porta a diodi. Di norma, sia la sorgente V_i che l’uscita prelevata ai capi del condensatore sono accoppiate tramite operazionali in configurazione “inseguitore di tensione”. Un esempio è quello mostrato in figura 17.2.

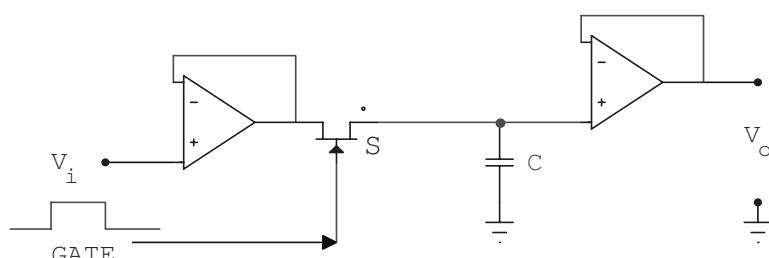


Figura 17.2: Circuito *sample-and-hold* in cui l’interruttore è realizzato tramite un FET e sia l’ingresso che l’uscita sono accoppiati tramite “inseguitori di tensione”.

Nell’esempio l’interruttore è realizzato tramite un FET. Se il segnale di gate è applicato ad un certo istante t_0 , la conseguente chiusura dell’interruttore dà inizio

al processo di carica del condensatore. All'intervallo di tempo che intercorre tra la chiusura dell'interruttore e la carica del condensatore alla tensione $v_i(t_0)$ si dà il nome di "tempo di acquisizione". Al termine del segnale di gate, l'apertura dell'interruttore non è istantanea, ma ha luogo con un certo ritardo, detto "tempo di apertura". Il tempo di apertura è dell'ordine di 50-100 ns se si fa uso di un interruttore a FET, mentre può essere inferiore ad 1 ns se si fa uso di un interruttore realizzato con diodi veloci. La figura 17.3 mostra l'effetto del tempo di apertura e di quello di acquisizione sul segnale letto.

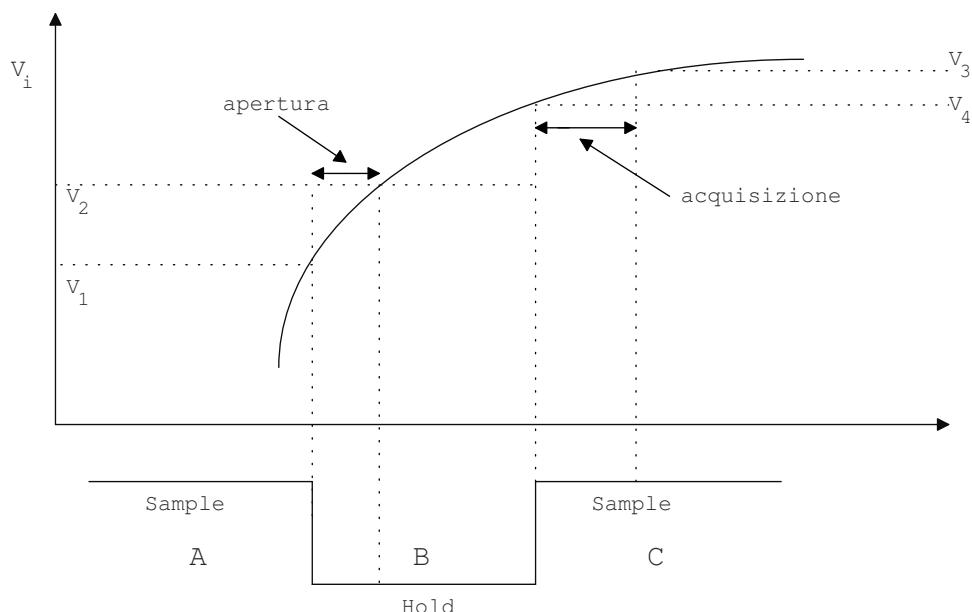


Figura 17.3: Effetto dei tempi di apertura ed acquisizione sulla lettura di un segnale in ingresso.

Esaminiamo, con riferimento alla figura, l'effetto di questi ritardi. Nell'intervallo di tempo A il gate era alto (interruttore chiuso). Il segnale campionato dovrebbe essere quello presente all'istante dell'apertura del gate, cioè all'inizio dell'intervallo di tempo B, che è v_1 . Il ritardo nell'apertura dell'interruttore fa sì che questo sia invece v_2 . A tale ritardo si dà il nome di "tempo di apertura".

Quando chiudiamo l'interruttore, la tensione ai capi del condensatore sale con legge esponenziale e raggiunge il suo valore asintotico quando il segnale in ingresso è passato dal valore v_3 che esso aveva al momento della chiusura dell'interruttore, ad un nuovo valore v_4 . Al ritardo tra l'istante in cui l'interruttore viene chiuso e quello in cui la tensione sul condensatore ha raggiunto il valore del segnale in ingresso si dà il nome di "tempo di acquisizione". È importante che il tempo di apertura, come quello di acquisizione, siano il più piccoli possibile.

Come accennato, un interruttore veloce può esser ottenuto da una porta a diodi. Un semplice esempio è quello di figura 17.4.

Il segnale da campionare è v_i , mentre i segnali $+V$ e $-V$ costituiscono il gate. Se V è posto ad un valore positivo di ampiezza sufficiente, entrambi i diodi D_1 e D_2 saranno in conduzione. In tali condizioni possiamo verificare che $v_o = v_i$. Infatti,

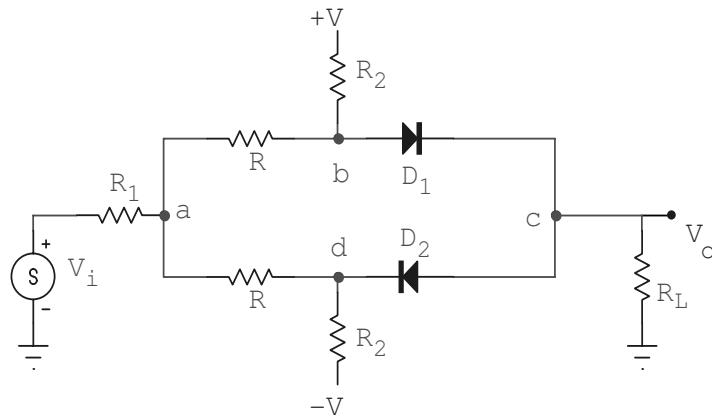


Figura 17.4: Porta a diodi.

essendo in tali condizioni il ramo b-c-d essenzialmente un corto circuito, il circuito equivalente è quello mostrato in figura 17.5, dove si vede che è:

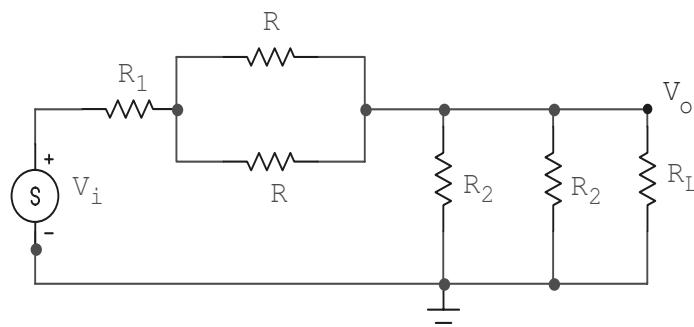


Figura 17.5: Circuito equivalente alla porta a diodi di figura 17.4.

$$v_o = v_i \frac{R_L \parallel (R_2/2)}{R_1 + R/2 + R_L \parallel (R_2/2)} = v_i \frac{2R_L R_2}{2R_L R_2 + (R_2 + 2R_L)(R + 2R_1)}$$

notiamo che per $v_i = 0$ è $v_o = 0$, cioè non è presente alcun offset. Se invece il segnale di controllo V è negativo, entrambi i diodi saranno interdetti. In tali condizioni è facile vedere che $v_o = 0$.

Il tempo di acquisizione è limitato dalla massima corrente che l'operazionale è in grado di erogare. ($I \sim 25 \text{ mA}$). Se C è la capacità, tale tempo sarà all'incirca: $t_A = CV/I$. Questa, con una capacità di 100 nF ed una tensione di 1 V , dà $t_A \approx 4 \mu\text{s}$. Il tempo di acquisizione può esser ridotto diminuendo C o aumentando I . Ora, una diminuzione di C provocherebbe una diminuzione del tempo di scarica del condensatore, legato alle perdite dielettriche dello stesso. Rimane quindi solo l'alternativa di aumentare la corrente I . Ciò può esser ottenuto inserendo all'uscita dell'operazionale un emitter-follower complementare, come mostrato in figura 17.8.

Apriamo a questo punto una breve parentesi per comprendere il funzionamento dell'Emitter-follower complementare indicato in figura.

Gli amplificatori a transistor possono essere classificati come amplificatori di classe A, di classe B, di classe AB e di classe C. Un amplificatore è di classe A se esso lavora attorno ad un punto posto all'incirca al centro delle curve caratteristiche del transistor, e quindi questo opera all'incirca in modo lineare. In tali condizioni un segnale sinusoidale applicato in ingresso darà ancora un segnale sinusoidale in uscita, con buona linearità. Un amplificatore lavora in classe B se il transistor opera attorno ad un punto che è molto vicino ad un estremo delle curve caratteristiche. In queste condizioni, un segnale sinusoidale applicato in ingresso sarà amplificato e presente in uscita solo durante un semiciclo. Per un amplificatore che funziona in classe A, la corrente fluisce nel circuito in ogni istante, anche in assenza di segnale applicato in ingresso, mentre per uno che funziona in classe B la corrente fluisce solo durante una semionda. Un amplificatore è di classe AB se lavora in una zona intermedia tra la classe A e quella B. È infine di classe C se il punto di lavoro è scelto in modo tale che la corrente (o tensione) in uscita sia nulla per più di una semionda. Il vantaggio di un amplificatore che lavori in classe B, rispetto ad uno che operi in classe A, è che in assenza di segnale non c'è dissipazione di potenza. Per questo motivo gli amplificatori di classe B sono adoperati in tutte quelle circostanze in cui si deve fare attenzione a dissipare poca potenza (impianti posti su satelliti, radioline a batteria etc.). Lo svantaggio è una maggiore distorsione armonica. Un tipico amplificatore (di corrente) che opera in classe B è un emitter follower:

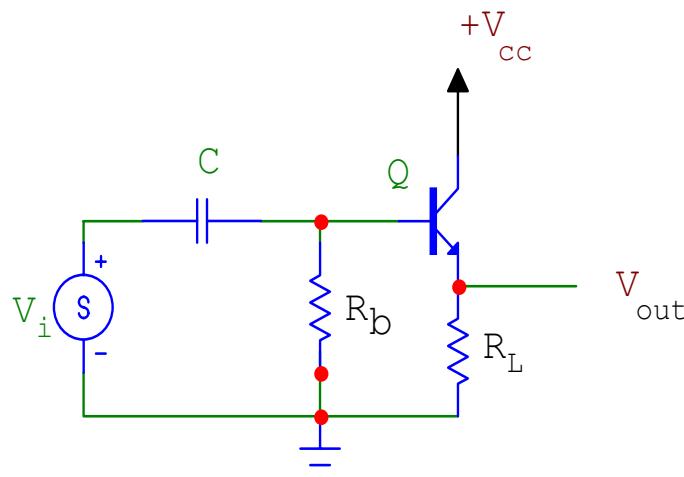


Figura 17.6: Emitter follower: amplificatore di corrente di classe B.

Per avere amplificazione durante entrambe le semionde, si ricorre ad un dispositivo costituito da due emitter-follower in serie, uno dei quali utilizza un transistor NPN e l'altro PNP. Questo prende il nome di amplificatore di classe B push-pull (o emitter follower complementare) come schematicamente indicato in figura 17.7.

Si vede facilmente che quando v_i è positivo, Q_1 conduce e Q_2 è interdetto. La corrente è i_1 e viene da Q_1 . Durante l'altro semiciclo, Q_1 è interdetto e Q_2 in conduzione. La corrente in R_L sarà ora $-i_2$, dove i_2 è la corrente in Q_2 .

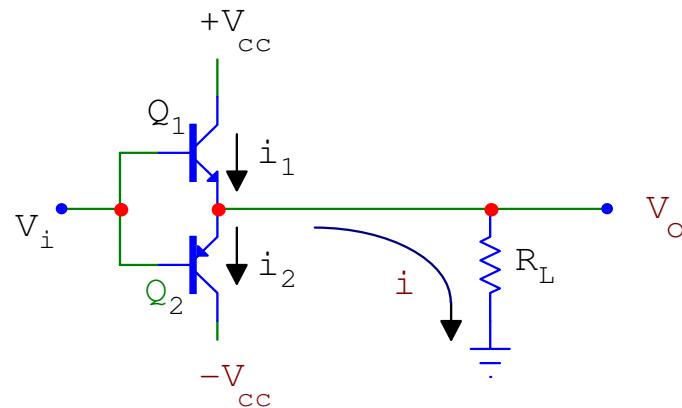


Figura 17.7: Emitter follower complementare: amplificatore di classe B push-pull.

Vediamo ora come un amplificatore di questo tipo possa essere utilizzato come generatore di corrente in un sistema di sample-and-hold ad operazionali (vedi figura 17.8):

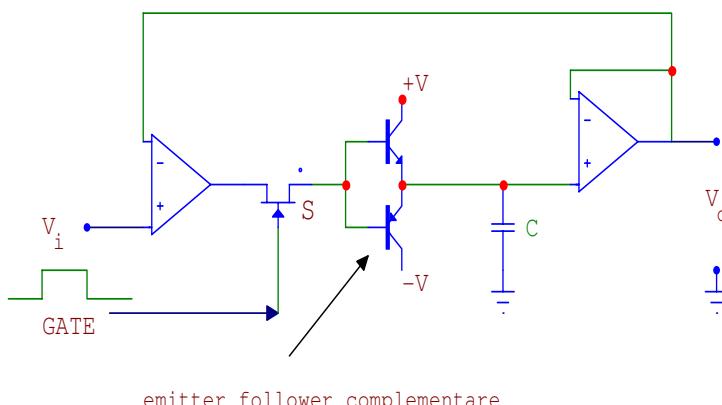


Figura 17.8: Sistema di sample-and-hold costituito da operazionali e da un emitter follower complementare.

Quando un segnale positivo è presente sul gate, il FET conduce tutte le volte che $v_i > 0$, a condizione che sia $v_i > v_o$. Notiamo che il secondo A.O. è connesso come inseguitore di tensione, con v_o unito all'ingresso invertente del primo A.O. Quindi v_o è forzato a seguire v_i durante il “sampling time”. Notiamo che la corrente che carica il condensatore è erogata dal push-pull e non dall'A.O..

Quando il gate è basso (intervallo di hold) v_o rimane uguale al valore che esso aveva raggiunto durante l'intervallo di sample, a parte un piccolo drift dovuto alla corrente di bias dell'A.O. di uscita ed alle correnti di leakage dell'Emitter follower e del FET. Maggiore il valore della capacità C, minore sarà il drift della tensione durante la fase di hold. Tuttavia, all'aumentare di C, come si è visto, aumenta il

tempo di acquisizione. La soluzione sarà quindi un compromesso tra le due diverse esigenze.

17.3 Convertitori Digitale-Analogico

I convertitori Digitale-Analogico (DAC) sono dispositivi attraverso i quali un sistema digitale può comunicare con il mondo analogico. Oltre all'applicazione, molto diffusa, di tali circuiti nella realizzazione di convertitori Analogico-Digitale, esiste un'ampia gamma di applicazioni, che va dalla realizzazione di sistemi di display per tubi a raggi catodici a sintetizzatori musicali, generatori di forme d'onda, attenuatori, e sistemi digitali di trasmissione/ricezione, quali quelli adoperati nei più recenti sistemi di comunicazione.

Immaginiamo di voler convertire in un segnale analogico, ad esempio in una tensione, un'informazione binaria, e che questa sia disponibile all'uscita di un circuito digitale. Possiamo ad esempio pensare che l'informazione digitale consista nei livelli d'uscita di un registro costituito da N Flip-Flops. Se indichiamo in generale con a_0 l'uscita del FF0 (corrispondente al bit meno significativo), con a_1 quella di FF1, e via di seguito fino al FF($N-1$) cui associamo il bit a_{N-1} , vogliamo realizzare un circuito che fornisca in uscita un livello di tensione V_0 dato da:

$$V_0 = V (a_0 + 2^1 a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + 2^{N-1} a_{N-1})$$

dove V è un coefficiente di proporzionalità, legato al range di valori analogici che si desidera avere in uscita, ed i coefficienti a_0, a_1, \dots, a_{N-1} valgono 0 o 1 a seconda che l'uscita del corrispondente FF sia bassa o alta. Un metodo per realizzare tale funzione è suggerito dal sommatore per segnali analogici, ottenuto con un operazionale (in configurazione invertente) come nell'esempio di figura 17.9, relativo al caso di due soli bit:

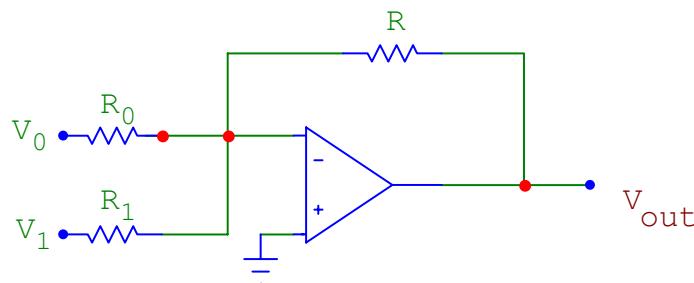


Figura 17.9: Sommatore per segnali analogici a due bit costituito da un operazionale in configurazione invertente.

Se in tale circuito scegliamo $R_0 = R$ e $R_1 = R/2$ avremo:

$$V_{out} = -(V_0 + 2V_1)$$

498 Capitolo 17. Convertitori Digitale-Analogico ed Analogico-Digitale

e se ora immaginiamo che V_0 e V_1 siano le uscite di un registro a 2 bit:

$$V_i = 0 \Rightarrow \text{livello basso} \Rightarrow \text{numero binario 0}$$

$$V_i = 1 \Rightarrow \text{livello alto} \Rightarrow \text{numero binario 1}$$

vediamo che abbiamo realizzato un convertitore digitale-analogico a due bit. Infatti, se è:

$$V_0 = 1, V_1 = 0$$

avremo

$$V_{out} = -1$$

Se è:

$$V_0 = 0, V_1 = 1$$

avremo:

$$V_{out} = -2$$

e così via.

L'estensione ad un numero maggiore di bit è immediata. Uno schema di massima per il caso di N bit è mostrato in figura 17.10, dove potrebbe ad esempio essere: $V_R = -10 V$, $R = 1k$, $R' = 5k$.

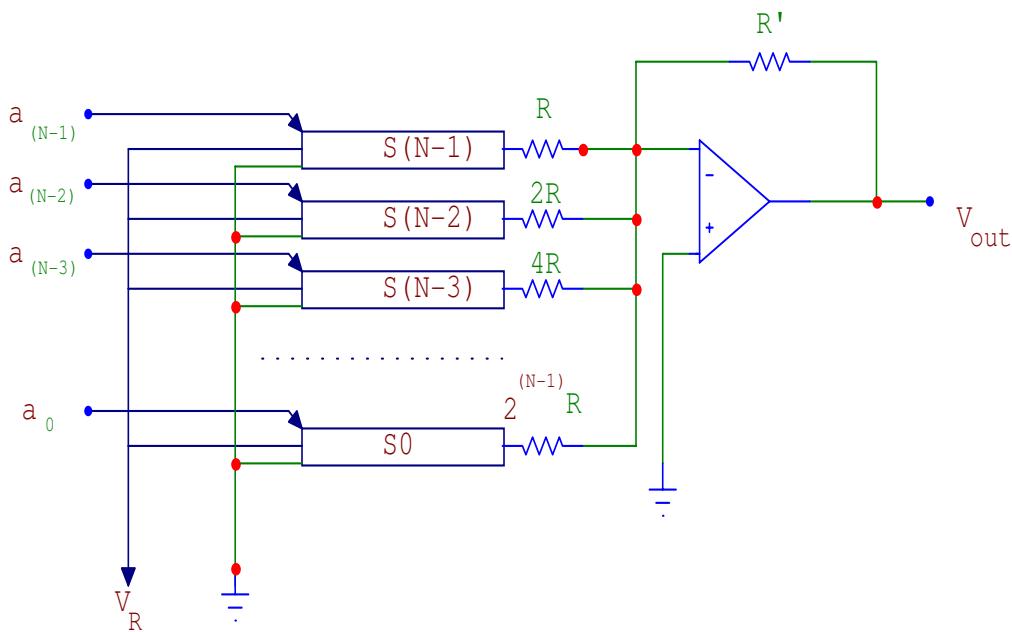


Figura 17.10: Convertitore digitale-analogico ad N bit costituito da un operazionale in configurazione invertente.

Il circuito è un sommatore dove:

$$V_o = - \left(\frac{R'}{R} a_{N-1} + \frac{R'}{2R} a_{N-2} + \cdots + \frac{R'}{2^{N-1}R} a_0 \right) V_R =$$

$$= 5 \left(a_{N-1} + \frac{1}{2} a_{N-2} + \cdots + \frac{1}{2^{N-1}} a_0 \right)$$

Se il coefficiente a_i è zero, il corrispondente interruttore S_i è collegato a massa ed il termine corrispondente nell'espressione ora scritta sarà 0. Gli interruttori S_0, S_1, \dots, S_{N-1} hanno il ruolo di collegare l'uscita a massa o a V_R , a seconda che sul gate di ingresso sia presente uno 0 oppure un 1. Tali interruttori possono essere realizzati in molti modi diversi. Una possibilità è quella mostrata in figura 17.11, che rappresenta un “totem pole MOSFET drive”.

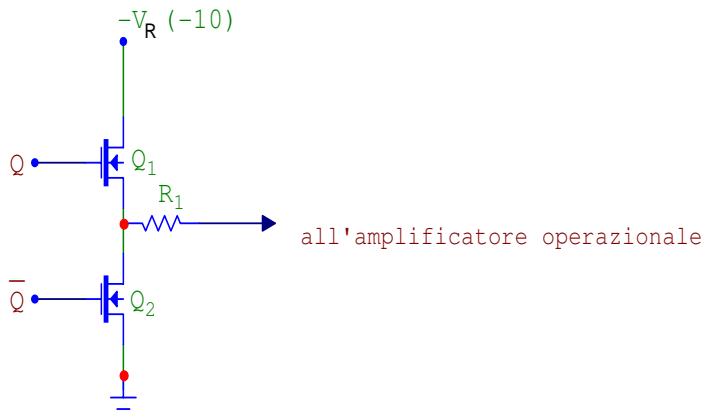


Figura 17.11: Interruttore: “totem pole MOSFET drive”.

Gli input Q e \bar{Q} al MOSFET vengono da un registro dove è stata preventivamente immagazzinata l'informazione digitale da convertire in segnale analogico. Assumiamo di lavorare in una logica negativa, dove lo 0 è rappresentato da 0 V e l'1 da -10 V. Un 1 in ingresso ad un opportuno FLIP-FLOP che precede il MOSFET manda $Q \rightarrow 1$ e $\bar{Q} \rightarrow 0$. Con ciò il MOSFET Q_1 sarà ON. La resistenza R_1 sarà così collegata alla tensione $-V_R$, mentre Q_2 sarà OFF. Analogamente, con un segnale in ingresso uguale a 0, avremo $Q = 0$ e $\bar{Q} = 1$, con che Q_1 sarà OFF e Q_2 ON. Cioè la resistenza R_1 verrà ad essere collegata a massa.

L'accuratezza e stabilità dei DAC ora illustrati dipende in primo luogo dall'accuratezza dei valori delle resistenze, nonché dalla variazione che ciascuna di esse subisce con la temperatura. Un limite importante di questo tipo di DAC è costituito dal grande range di valori di resistenza necessario. Per un DAC a 10 bit, se la più piccola delle resistenze è $10k\Omega$, la più grande dovrà essere $5.12M\Omega$ (cioè 2^{N-1} volte la più piccola, con $N=10$), che comincia ad essere un valore troppo grande. Inoltre, la tolleranza sulla resistenza da $10k\Omega$, che nella somma ha un peso pari a 2^9 volte quello della resistenza più grande, dovrà essere 2^9 volte più piccola! Se quindi la resistenza da $5.12M\Omega$ è al 10%, quella da $10k\Omega$ dovrà essere allo 0.002%, che è praticamente impossibile da realizzare. Per questo motivo, i circuiti del tipo mostrato sono poco adoperati e sono invece sostituiti dai DAC a “ladder” (cioè a scala) che ora esamineremo.

Questo circuito, di cui mostriamo in figura 17.12 la configurazione non-invertente, usa solo due valori di resistenza: R e $2R$.

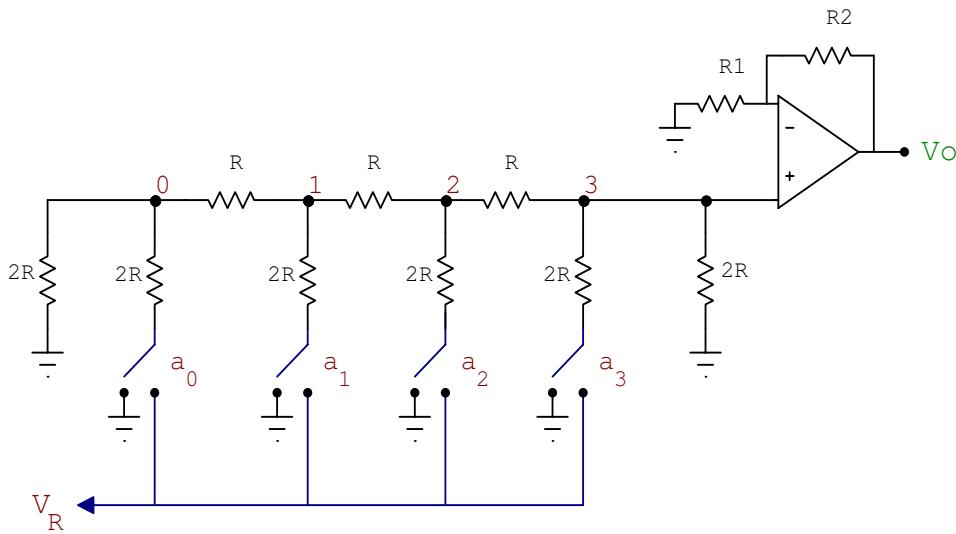


Figura 17.12: Convertitore digitale-analogico a 4 bit a scala o “ladder”.

L'esempio di figura è relativo ad un convertitore a 4 bit. Esaminiamo ora il funzionamento di tale circuito.

Cominciamo con l'osservare che, da un generico nodo, si “vede” la medesima resistenza sia che “guardi” verso sinistra, sia che si “guardi” verso destra o verso il basso. Così, dal nodo 0, guardando verso sinistra si vede una resistenza $2R$, verso il basso si vede sempre $2R$, sia che l'interruttore a_0 sia collegato a massa, sia che esso sia collegato a V_R (ricordiamo che un generatore di tensione ideale ha una resistenza interna nulla). Guardando dal nodo 0 verso destra si vede una resistenza R in serie con altre resistenze che, come è facile verificare, valgono ancora R , comunque siano disposti gli interruttori a_1, a_2, \dots, a_3 . Verifichiamolo: la resistenza vista dal nodo 3 guardando a destra è $2R$, verso il basso è ancora $2R$; di conseguenza la resistenza totale vista dal nodo 3 guardando verso destra e verso il basso è il parallelo di $2R$ con se stessa, cioè R . Ora, guardando dal nodo 2 verso destra vediamo una resistenza R in serie con questa, cioè una resistenza $2R$. Poiché dal nodo 2 verso il basso c'è una resistenza $2R$, è chiaro che dal nodo 2 verso il basso + destra c'è una resistenza R . Il ragionamento è facilmente estendibile a tutti i nodi labellati 0, 1, 2, 3.

Se ora un generico interruttore è connesso a V_R e tutti gli altri a massa, la tensione nel nodo corrispondente sarà V_R meno la caduta ai capi della resistenza $2R$ che collega il nodo all'interruttore. Cioè:

$$V_i = V_R - 2RI$$

dove la corrente è quella che è erogata dal generatore V_R verso il nodo. Lo schema equivalente utilizzabile per calcolare tale corrente è mostrato in figura 17.13.

Dalla figura è immediato vedere che:

$$I = \frac{V_R}{3R}$$

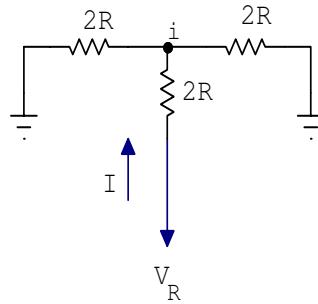


Figura 17.13: Circuito equivalente ad una parte del convertitore di figura 17.12.

per cui:

$$V_i = V_R - \frac{2R}{3R}V_R = \frac{1}{3}V_R$$

Quindi un generico nodo il cui interruttore sia chiuso su V_R è ad un potenziale $V_R/3$. Se questo fosse il nodo 3, avremmo:

$$V_i = V_3 = \frac{1}{3}V_R = V_+ = V_-$$

dove si è fatto uso del principio del corto-circuito-virtuale all'ingresso dell'operazionale. Ne seguirebbe, dall'uguaglianza delle correnti nelle resistenze R_1 ed R_2 :

$$\left(V_o - \frac{V_R}{3} \right) \frac{1}{R_2} = \frac{V_R}{3R_1}$$

da cui segue:

$$V_o = \frac{V_R}{3} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \equiv \bar{V}$$

Se invece fosse collegato a V_R l'interruttore a_2 , e tutti gli altri fossero collegati a massa, la tensione al terminale non invertente dell'A.O. sarebbe determinata dal partitore costituito dalla resistenza R posta tra i nodi 2 e 3 e da quella costituita dal parallelo delle due resistenze pari a $2R$ poste tra il nodo 3 e massa. Tale tensione sarebbe quindi la metà di quella presente al nodo 3. La tensione in uscita sarebbe quindi la metà di quella calcolata in precedenza:

$$V_o = \frac{1}{2} \frac{V_R}{3} \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \bar{V}$$

In modo analogo, se a V_R fosse collegato l'interruttore a_1 e tutti gli altri fossero collegati a massa, troveremmo una tensione in uscita pari alla metà di quella precedente, e così via.

Facendo ora uso del principio di sovrapposizione, troveremo nel caso generale:

$$V_o = \bar{V} \left(a_3 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{8}a_0 \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \bar{V} (2^3 a_3 + 2^2 a_2 + 2^1 a_1 + a_0)$$

cioè, con una fattore moltiplicativo $\bar{V}/8$, la rappresentazione analogica del numero binario: a_3, a_2, a_1, a_0 .

Un problema che è presente nel tipo di DAC appena discusso è quello legato al ritardo nella propagazione del segnale associato alla chiusura degli interruttori. Se infatti gli ingressi a_3, \dots, a_0 valgono 1000 e si commutano tutti simultaneamente in 0111 (ricordiamo che il bit più significativo è quello più vicino all'ingresso non-invertente dell'A.O.) l'effetto del cambiamento del bit più significativo si farà sentire per primo ed il sistema passerà nello stato 0000. Successivamente si sentirà l'effetto del cambiamento del secondo bit ed il sistema passerà nello stato 0100, etc. Così, per un breve intervallo di tempo, l'uscita dell'operazionale acquisterà la successione di valori (decimali) 8,4,6,7. Per ovviare a questo inconveniente conviene adottare uno schema in cui gli interruttori sono collegati tutti direttamente all'ingresso dell'operazionale. Uno schema (invertente) che realizza questo scopo è quello mostrato in figura 17.14.

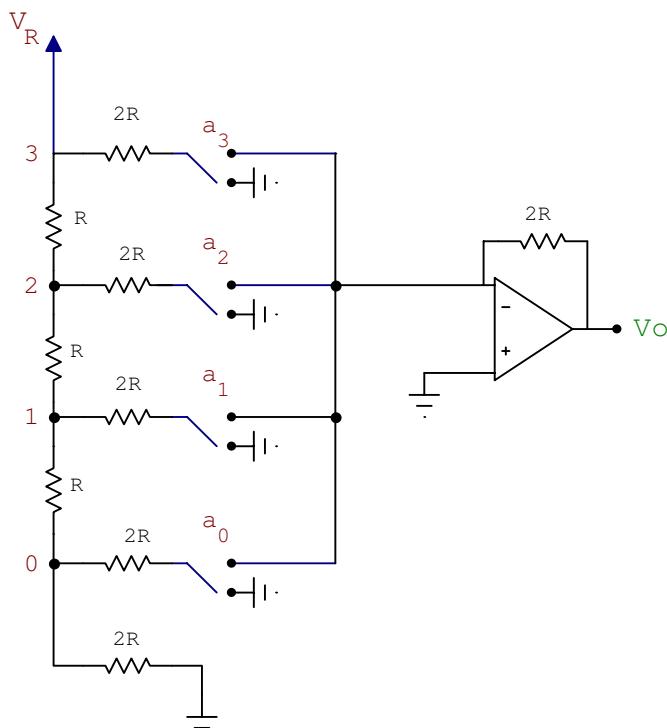


Figura 17.14: Convertitore digitale-analogico a 4 bit a scala o “ladder” in cui tutti gli interruttori sono collegati direttamente all’ingresso dell’operazionale.

Notiamo che gli interruttori a_3, a_2, a_1, a_0 sono collegati o a massa o comunque alla massa virtuale dell’operazionale. La resistenza vista da un generico nodo (0-3), guardando verso destra o verso il basso è sempre pari a $2R$. La corrente erogata dal generatore sarà quindi quella che attraversa due resistenze in parallelo, ciascuna

uguale a $2R$. Tale corrente è quindi: $I = V_R/R$. Se ora a_3 è collegato all'ingresso invertente dell'A.O. e gli altri interruttori sono collegati a massa, una corrente pari ad $I/2$ fluirà nella resistenza di feedback ($2R$) e quindi avremo:

$$V_o = -2R \frac{I}{2} = -RI = -V_R$$

Se ad esser collegato all'ingresso invertente è invece a_2 , la corrente nella medesima resistenza sarà la metà di quella precedente, e quindi:

$$V_o = -\frac{1}{2}V_R$$

e così via per a_1, a_0 . Il funzionamento di questo circuito è quindi analogo a quello discusso in precedenza, ma ora il problema dei ritardi è eliminato.

Uno dei vantaggi di un circuito di conversione a “ladder” del tipo esaminato è costituito dal fatto che una “scala” di resistenze R-2R può esser realizzata industrialmente con tecniche di deposizione di film sottili su di un singolo substrato. Ciò fa sì che le variazioni di temperatura siano le stesse per tutte le resistenze del ladder; si ottengono in tal modo variazioni delle resistenze relative, con la temperatura, inferiori ad una parte per mille per $^{\circ}C$.

I convertitori D/A esaminati rientrano nella categoria del tipo *moltiplicatore* (Multiplying D/A converter o MDAC). Un MDAC è un convertitore D/A che accetta una V_R (tensione di riferimento) variabile nel tempo. L'output è quindi proporzionale alla $V_R(t)$ secondo una costante di proporzionalità che dipende dal numero binario impostato sull'ingresso digitale. Un dispositivo di questo tipo può esser utilizzato quindi per moltiplicare due segnali, uno dei quali sia disponibile in forma digitale e l'altro in forma analogica. Ad esempio, essi possono essere adoperati per effettuare una conversione da coordinate polari (r, θ) a coordinate cartesiane realizzando la moltiplicazione: $r \cos \theta$. Esistono versioni ultraveloci di MDAC, quali il modello AD668 (Analog Devices) che è estremamente veloce ed è disponibile sotto la forma di circuito integrato.

17.4 Convertitori Digitale-Analogico pilotati in corrente

I DAC che abbiamo esaminato hanno l'inconveniente di far uso di interruttori basati su transistor bipolar, che vengono portati dall'interdizione alla saturazione e viceversa. Questo rappresenta un limite alla velocità di conversione poiché, come sappiamo, un transistor impiega tempi relativamente lunghi per uscire dalla saturazione. L'alternativa di far uso di interruttori basati su FET presenta altri problemi, legati all'impedenza dei FET e delle resistenze necessarie per polarizzarli.

Un tipo di DAC che non risente di questi problemi è quello che sostituisce il generatore di tensione V_R con generatori di corrente posti in ciascuno dei rami della rete R-2R, e che adopera interruttori in logica ECL, attraverso i quali le correnti possono essere indirizzate verso l'opportuno nodo della rete, o verso massa. Lo schema di principio di tale circuito è mostrato in figura 17.15.

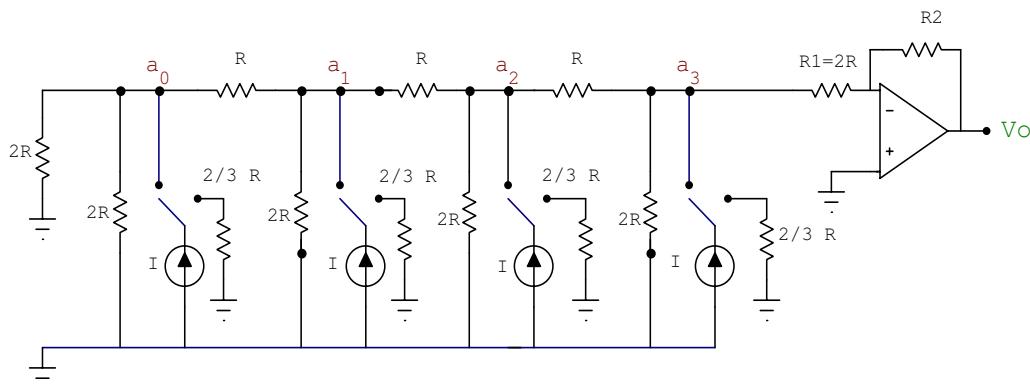


Figura 17.15: Convertitore digitale-analogico pilotato in corrente.

Come si vede, ciascuno degli interruttori può esser chiuso sul nodo i^{mo} della rete R-2R o su di una resistenza di valore $2/3R$. È facile vedere che la resistenza vista guardando dall'interruttore verso il nodo i^{mo} è anch'essa pari a $2/3 R$. Infatti, come è facile verificare relativamente, ad esempio, al nodo a_0 il circuito equivalente è quello di figura 17.16.

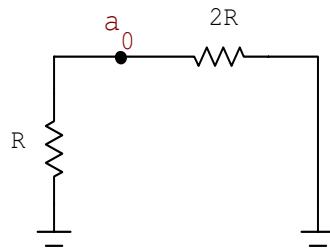


Figura 17.16: Circuito equivalente al nodo a_0 del convertitore di figura 17.15.

Si vede da tale figura che la resistenza “vista” dal generatore di corrente che alimenta tale nodo è: $2/3R$. Lo stesso è vero per gli altri nodi. Se ora ammettiamo che l'interruttore che è collegato al nodo a_3 sia in posizione tale da collegare il generatore alla rete, la corrente nella resistenza R_1 sarà uguale a:

$$I_1 = \frac{1}{3}I$$

e la tensione all'uscita dell'operazionale:

$$V_o = -R_2 I_1 = -\frac{R_2}{3}I$$

Se invece l'interruttore a_3 è chiuso sulla resistenza $2/3R$ e ad essere collegato alla rete è invece il generatore che alimenta a_2 , è facile vedere che la corrente in R_1 sarà

la metà di quella precedente, e quindi la tensione in uscita sarà:

$$V_o = -R_2 I_1 = -\frac{R_2}{3} I \cdot \frac{1}{2}$$

Vediamo così che i generatori collegati ai nodi a_2, a_1, a_0 compaiono nella tensione d'uscita con pesi che è ciascuno la metà di quello del nodo di indice immediatamente più elevato. Il circuito è quindi un convertitore digitale-analogico a 4 bit.

Come accennato, gli interruttori in tale circuito sono realizzati con porte ECL, ciascuna delle quali è costituita da una coppia di transistor accoppiati, come mostrato in figura 17.17. Il segnale di tensione applicato alla base del transistor T_B di figura fà sì che la corrente fluisca nello stesso transistor, e quindi verso massa, o nel transistor T_A , che alimenta il relativo nodo della rete R-2R. È chiaro che in tale circuito la corrente non viene mai interrotta, ma semplicemente incanalata su uno o l'altro dei due rami.

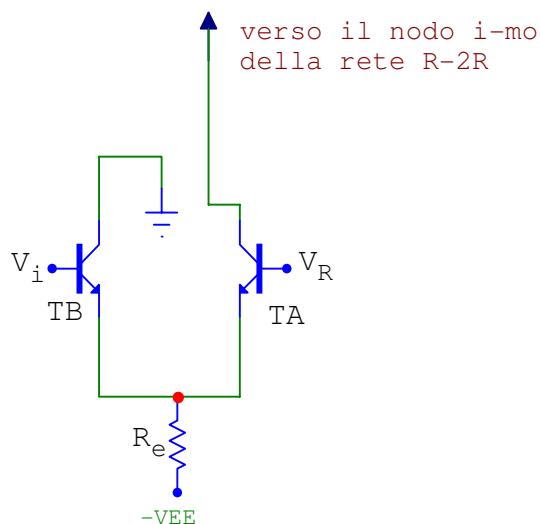


Figura 17.17: Interruttore costituito da una porta ECL.

Per un'analisi dettagliata di tale switch, si consultino i riferimenti [7] o [8].

17.5 Convertitori Analogico-Digitale (ADC)

17.5.1 ADC a contatore (Counting ADC)

Se il segnale analogico da convertire è disponibile all'uscita di un sistema di Sample-And-Hold, la conversione può essere realizzata in vari modi. Di questi, il più semplice ed economico (anche se probabilmente il più lento) è quello che fa uso di un contatore, un DAC ed un comparatore. Il principio su cui tale circuito si basa è quello di generare, facendo uso del contatore, una sequenza di numeri binari, aventi un numero di bit pari a quello che si intende adoperare nella conversione, partendo da zero, fino

al massimo valore che il numero dei bit consente. Tale numero viene convertito dal DAC in un livello di tensione che è poi confrontato dal comparatore con il segnale che si desidera convertire. Ammettendo che questo sia positivo e che esso sia applicato all'ingresso non-invertente del comparatore, al cui ingresso invertente è inviata l'uscita del DAC, il segnale in uscita dal comparatore sarà positivo fino a quando il numero binario generato dal contatore non sia tale da far sì che il segnale all'uscita del DAC superi in ampiezza il segnale da convertire. Qualora invece il confronto dia un'uscita negativa, un opportuno segnale blocca il contatore. Il numero letto all'uscita del contatore a questo punto è una stima (approssimata per eccesso) del segnale da convertire. Lo schema di funzionamento è quello mostrato in figura 17.18.

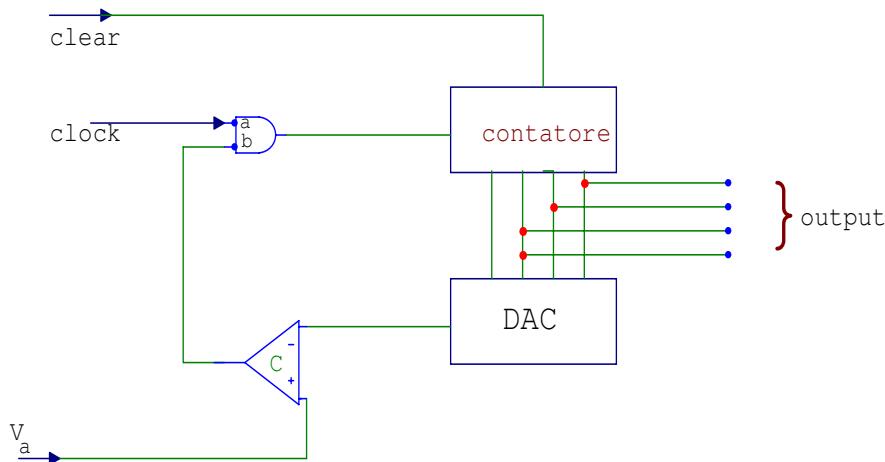


Figura 17.18: Convertitore analogico-digitale realizzato con un contatore.

Un impulso di clear resetta il contatore binario, che conta il numero di impulsi che vengono dal clock. L'uscita del contatore è quindi un numero binario che aumenta linearmente (nel nostro caso, in cui abbiamo ipotizzato 4 bit, l'uscita varierà da 0 a 15). Questo numero binario viene convertito dal DAC in un segnale di tensione V , proporzionale al numero binario stesso, secondo una costante di proporzionalità nota, dipendente dalle caratteristiche del DAC. La tensione V viene poi confrontata, tramite il comparatore C, con la tensione da convertire, V_a . Fino a che è $V_a > V$, l'uscita del comparatore sarà alta. Di conseguenza l'input b della porta AND sarà alto ed i segnali di clock continueranno a fare avanzare il contatore. Si noti che V_a non potrà superare il massimo valore che V può assumere, che nel nostro esempio di un contatore a quattro bit vale $15V_R$, dove V_R è la tensione di fondo scala del DAC.

Quando V supera V_a , l'uscita del comparatore va al livello basso ed il gate AND viene ad essere disabilitato. Ora il clock si arresta ed il numero binario presente sui canali di output corrisponde al numero binario immediatamente più alto (di 1 bit) del valore binario di V_a .

Notiamo che tale convertitore è affetto da un “errore di quantizzazione” legato al numero di bit adoperato. L’errore è tipicamente uguale a metà del bit meno

significativo. Così ad esempio, ammettendo di avere un ADC a 4 bit, con una risoluzione di 1 bit/100 mV, l'errore sarà di $\pm 50 \text{ mV}$.

Questo tipo di ADC è intrinsecamente lento. Se infatti l'impulso V_a in ingresso è vicino al fondo scala, occorreranno quasi 15 impulsi di clock ed altrettanti confronti per realizzare la conversione. Se il numero di bit fosse 12 e V_a fosse vicino al fondo scala, dovremmo aspettare 4095 impulsi di clock. Se la frequenza del clock fosse 50 ns, dovremmo aspettare circa 200 μs per ottenere una conversione.

Un circuito che, pur basandosi, come il precedente, sull'idea del confronto del livello di tensione con tutta una serie di livelli di tensione generati da un DAC, realizza lo stesso scopo in tempi molto inferiori, è quello noto come “ADC ad approssimazioni successive”, discusso nella prossima sezione.

17.5.2 ADC ad approssimazioni successive

Per comprendere il principio su cui è basato questo ADC, ammettiamo di voler convertire in binario un numero compreso tra 0 e 15, ad esempio il numero 8.5. Nel metodo descritto in precedenza noi facciamo avanzare un contatore, partendo da 0, confrontando l'uscita analogica con il numero. Il confronto viene prima effettuato con il numero 0, poi con l'1 e via dicendo fino a 9. Il numero di confronti, e quindi di cicli di clock, è 10. Ammettiamo di fare il confronto in modo diverso, ponendoci cioè le seguenti domande:

- a) È il numero maggiore o uguale (\geq) della metà del range totale? (cioè di 8). Se la risposta è positiva, il valore è compreso tra 8 e 16 (estremo superiore escluso); altrimenti esso è compreso tra 0 e 8. Nel primo caso il bit più significativo del numero cercato è 1, nel secondo 0.
- b) Nel caso in cui il primo bit sia risultato essere 1, (è il nostro caso, poiché il nostro numero è 8.5) confrontiamo il numero con il valore che divide a metà il range (8-16), cioè con 12. Se il risultato del confronto è positivo (numero ≥ 12) il secondo bit del numero cercato è 1, altrimenti è 0. Infatti notiamo che $12_{10} = 1100_2$. Ammettiamo che il risultato del confronto sia negativo e che quindi il secondo bit sia 0, allora:
- c) Confrontiamo il numero con quello che divide a metà il range 8-12, cioè con 10. Se il risultato del confronto è positivo (cioè il numero è ≥ 10) il terzo bit è 1, altrimenti esso è 0. Infatti $10_{10} = 1010_2$. Nel nostro caso troveremo che il terzo bit è 0.
- d) Confrontiamo infine il numero con quello che divide a metà il range (8-10), cioè con 9. Se il risultato del confronto è positivo, il quarto bit dovrà essere 1, altrimenti esso è 0. Nel nostro esempio il bit è 0.

A questo punto la conversione è terminata. Il numero di confronti è stato solo 4, anziché 10. Ciascun confronto effettuato determina il valore di uno dei bit, a cominciare da quello più significativo fino a quello meno significativo. Si può dimostrare in generale che la conversione di un numero di N bit con questo sistema richiede solo N confronti e non più 2^N , come nel caso precedente. Ad esempio, per

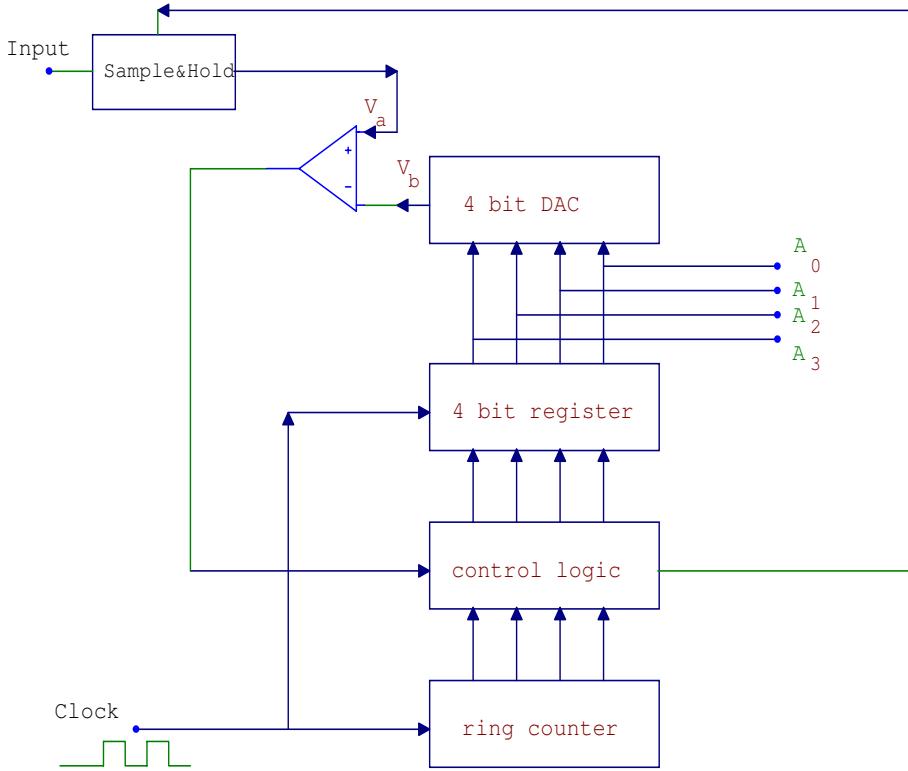


Figura 17.19: Convertitore analogico-digitale ad approssimazioni successive.

un numero di 12 bit il numero dei confronti è 12 anziché $2^{12} = 4096$. Lo schema di massima del circuito è mostrato in figura 17.19.

Si inizia con l'impostare i bit all'ingresso del DAC in modo che solo il bit più significativo A_3 sia 1. L'uscita del DAC è quindi una tensione corrispondente al numero $1000 = 8_{10}$. Si confronta V_b con V_a . Se $V_a \geq V_b$ la logica di controllo lascia a 1 il bit più significativo, altrimenti lo mette a 0. Il successivo impulso del contatore ad anello (ring-counter) pone $A_2 = 1$ mentre lascia invariati gli altri bit.

Nel nostro esempio, in cui il numero (tensione in ingresso) era 8.5 V, il primo confronto avrebbe posto $A_3 = 1$. Ora la configurazione presente nel registro è:

A_3	A_2	A_1	A_0
1	1	0	0

Quindi la tensione V_b all'uscita del DAC è 12V. Un ulteriore confronto troverà quindi $V_a = 8.5$ V e $V_b = 12$ V, per cui l'uscita del comparatore sarà bassa. Ora la logica di controllo pone a 0 il bit A_2 e ad 1 il bit A_1 . Quindi ora avremo:

A_3	A_2	A_1	A_0
1	0	1	0

Corrispondente a 10_{10} . Il successivo confronto trova ancora una volta un livello basso all'uscita del comparatore. Ora la logica di controllo pone $A_1 = 0$ e $A_0 = 1$:

$$\begin{array}{cccc} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

corrispondente a 9_{10} . Il successivo impulso di clock pone $A_0 = 0$, lasciando invariati A_3, A_2, A_1 :

$$\begin{array}{cccc} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

corrispondente a $V_b = 8$. Ora il ciclo di arresto. La conversione è terminata. Una possibile implementazione di un convertitore di questo tipo, limitato, per evitare eccessive complicazioni, a 3 bit, è mostrata in figura 17.20. I cinque FF di tipo D (A, B, C, D, E) sono connessi in modo da realizzare un anello modulo 5. Le cinque uscite vengono a trovarsi una alla volta al livello logico 1. I tre FF ($FF0, FF1, FF2$) servono a registrare i bit, con $FF0$ che registra il bit meno significativo ed $FF2$ quello più significativo.

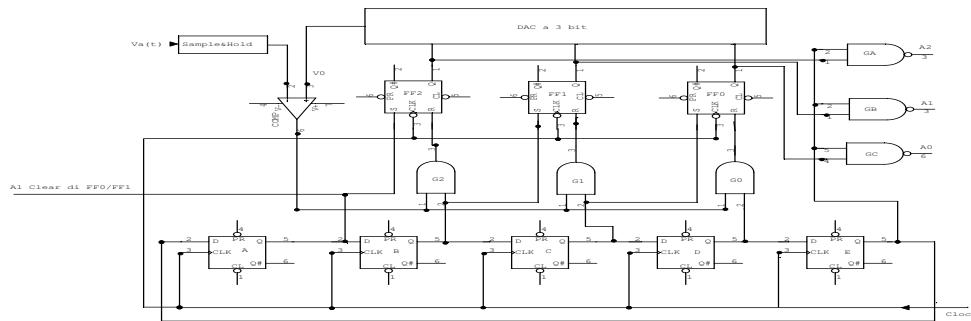


Figura 17.20: Schema di un convertitore analogico-digitale ad approssimazioni successive a 3 bit.

Si inizia con $Q_A = 1$, $Q_B = 0$, $Q_C = 0$, $Q_D = 0$, $Q_E = 0$. Il FF2 è quindi nello stato di SET mentre FF0, FF1 sono in quello di RESET. Avremo quindi $Q_2 = 1$, $Q_1 = Q_0 = 0$. In tal modo il numero binario 100 viene dato in ingresso al DAC. L'uscita del comparatore sarà $C_0 = 0$ se $V_a \geq V_0$, sarà $C_0 = 1$ se $V_a < V_0$. Nel successivo ciclo Q_B sarà uguale ad 1, mentre tutti gli altri saranno 0. Con ciò la porta G_2 risulterà abilitata ed FF2 verrà a trovarsi nello stato di RESET se $C_0 = 1$, di SET se $C_0 = 0$. Ciò che in sostanza abbiamo fatto è stato di provare ad assegnare il valore 1 al bit più significativo; l'abbiamo lasciato uguale ad 1 se il risultato del confronto dava un valore di $C_0 = 0$ (cioè se $V_a \geq V_0$) mentre l'abbiamo posto uguale a 0 nell'altro caso. Con il successivo impulso di clock, il livello 1 si sposta da Q_B a Q_C . Con ciò sarà ora abilitata G_1 .

Q_2 rimane al valore che aveva in precedenza. Il nuovo numero binario presente sui FF (Q_2, Q_1, Q_0) viene ora convertito dal DAC e fornito al comparatore. Se $V_0 \leq V_a$, $C_0 = 0$ e le porte (G_A, G_B, G_C) rimangono disabilitate. Quindi Q_1 non sarà resettato. Se invece $C_0 = 1$, la porta G_1 sarà abilitata e Q_1 sarà resettato. Il confronto prosegue fino a quando Q_E non diventi uguale ad 1. A quel punto vengono abilitate le porte G_A, G_B, G_C e l'uscita digitale sarà disponibile per la lettura.

17.5.3 Convertitore ADC a rampa singola

In tale convertitore si misura il tempo necessario affinché una sorgente di corrente costante carichi un condensatore di capacità nota ad una tensione pari a quella che si vuol digitizzare. Il relativo schema è mostrato in figura 17.21:

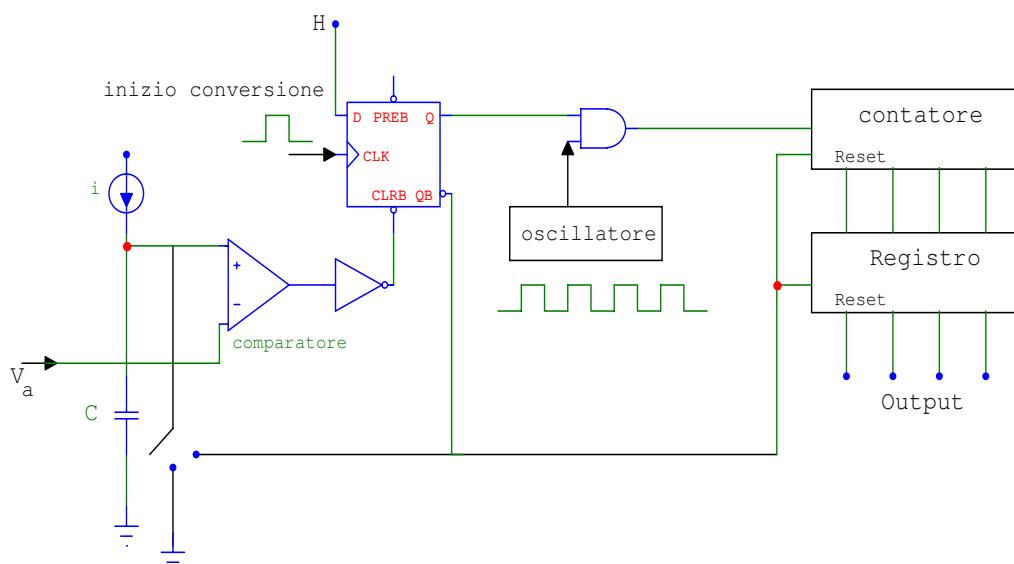


Figura 17.21: Convertitore analogico-digitale a rampa singola.

Ammettiamo che C sia inizialmente scarico e che V_a sia una tensione positiva. L'uscita del comparatore sarà bassa. Il segnale di inizio conversione porrà ad 1 l'uscita Q del FF, con che la porta AND sarà abilitata ed il contatore conterà gli impulsi di clock. Nel frattempo la corrente costante i carica il condensatore C e

dopo un tempo tale che:

$$V_+ = \frac{i}{C} \Delta t = V_a$$

l'uscita del comparatore si porterà al suo livello alto, resettando con ciò il *F.F.*. Ora \bar{Q} passerà al livello alto e Q a quello basso. La porta AND sarà disabilitata ed il registro indicherà un conteggio N proporzionale a Δt e quindi a V_a . Il livello alto di \bar{Q} resetterà contatore e registro, oltre a chiudere l'interruttore, scaricando così il condensatore. Il sistema è così pronto ad un nuovo ciclo di conversione. Questo tipo di ADC, pur molto semplice, non è altrettanto accurato. L'accuratezza è determinata dall'accuratezza e stabilità della capacità C , del generatore di corrente e del comparatore. Per questo motivo si preferisce ricorrere all'ADC a doppia rampa, descritto nel paragrafo successivo.

17.5.4 L'ADC a doppia rampa

In questo tipo di ADC l'idea base è la seguente. Un convertitore tensione-corrente viene utilizzato per fornire ad un condensatore una corrente rigorosamente proporzionale alla tensione V_a applicata all'ingresso (tensione che si vuol digitizzare). Ciò vien fatto per un intervallo di tempo T_1 fisso e ben definito. Il condensatore si carica fino a raggiungere una tensione \bar{V} come indicato in figura 17.22.

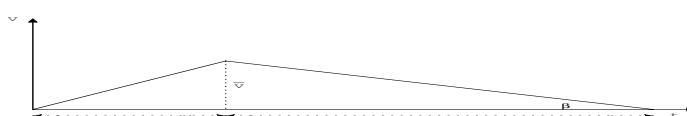


Figura 17.22: Carica e scarica di un condensatore a corrente costante.

Successivamente, il condensatore viene scaricato a corrente costante, fino a che, dopo un tempo T_2 , non si annulli la tensione ai suoi capi. Un contatore misura il numero di impulsi forniti dal clock nel tempo T_2 . L'uscita del contatore sarà quindi proporzionale a T_2 , che a sua volta è proporzionale a \bar{V} (essendo la pendenza β una costante) determinata da V_a .

Prima di esaminare i dettagli di un tipico circuito di questo tipo, notiamo che il risultato ora non dipende dal preciso valore C della capacità. Infatti, se C aumenta, nell'intervallo di tempo T_1 la corrente i caricherà il condensatore ad una tensione più bassa. Questa sarà comunque tale che il prodotto CV sia costante. Nella successiva scarica del condensatore (a corrente costante i) il tempo T_2 sarà determinato dalla

condizione:

$$T_2 = \Delta t = \frac{C\bar{V}}{i}$$

e sarà quindi il medesimo di prima, essendo \bar{V} diminuito in modo tale che $C\bar{V}$ rimanesse costante.

Notiamo inoltre che, essendo il conteggio espresso in numero di impulsi di clock, il risultato non dipende dal valore esatto della frequenza del clock. Infatti, ammettiamo che il clock sia un po' più lento del "normale". Essendo T_1 espresso in numero di cicli di clock, l'intervallo T_1 sarà fisicamente più lungo del "normale" e di conseguenza \bar{V} sarà maggiore. Il processo di scarica impiegherà quindi un tempo corrispondentemente più lungo. Ma, essendo alla fine tale tempo espresso in unità di cicli di clock, che sono più lenti del "normale", il numero risultante risulterà invariato.

Veniamo ora ad un'implementazione schematica di tale convertitore, come quella di figura 17.23.

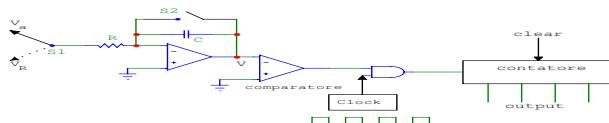


Figura 17.23: Convertitore analogico-digitale a doppia rampa.

Ammettiamo che V_a sia > 0 e $V_R < 0$. L'interruttore S_1 è inizialmente aperto, S_2 è chiuso ed il contatore è azzerato. Ammettiamo ora che all'istante $t = t_1$ S_1 sia portato in posizione V_a ed S_2 venga aperto. L'operazionale darà un segnale di tensione V in uscita proporzionale all'integrale di V_a (che ammettiamo rimanga costante durante il tempo di conversione). Inoltre tale segnale sarà negativo. Ammettendo che il contatore sia congegnato in modo da azzerarsi dopo 2^N impulsi di clock (dove N è il numero di bit in uscita) e che dopo tale tempo esso dia un segnale di clear che agisce su S_1 portandolo in posizione V_R , avremo che, a partire da tale istante il condensatore comincia a scaricarsi e V comincia a risalire, come mostrato in figura 17.24.

Vediamo dalla figura che V prima decresce e poi cresce linearmente nel tempo. Al tempo $t = t_3$ l'uscita V dell'integratore ripassa per lo zero. Fino a che V rimane negativo, l'uscita del comparatore sarà al suo livello alto e la porta AND permetterà il conteggio degli impulsi di clock. In $t = t_3$ V diviene uguale a zero, il gate AND



Figura 17.24: Andamento della tensione in uscita dall’operazionale nello schema di figura 17.23.

è disabilitato ed il conteggio si arresta. Possiamo ora far vedere che la lettura del contatore al tempo $t = t_3$ è proporzionale al segnale in ingresso. Questo può essere compreso intuitivamente, se si pensa che la pendenza del segmento di retta che rappresenta V nell’intervallo di tempo $t_1 - t_2$ è proporzionale all’ampiezza del segnale in ingresso. Di conseguenza, l’altezza massima raggiunta da V è proporzionale al segnale in ingresso. D’altronde, il tempo che il segnale impiega a ritornare a zero è proporzionale all’altezza massima che esso aveva raggiunto, e tale tempo è quello che il contatore ha sulla propria uscita digitale alla fine, cioè al tempo t_3 . In modo più formale; il valore di V per $t = t_3$ è dato da:

$$V = -\frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_2} V_a dt - \frac{1}{RC} \int_{t_2}^{t_3} V_R dt = 0$$

da cui:

$$V_a(t_2 - t_1) + V_R(t_3 - t_2) = 0$$

e quindi:

$$V_a \cdot T_1 + V_R \cdot T_2 = 0$$

Se il numero di impulsi nel tempo $t_2 - t_3$ è n_2 , allora $T_2 = n_2 T$; inoltre: $T_1 = n_1 T$; per cui:

$$V_a 2^N T + V_R n_2 T = 0$$

$$V_a = n_2 \frac{|V_R|}{2^N} = k n_2$$

17.5.5 Flash ADC

Un tipo di ADC estremamente veloce è quello a comparatori paralleli, noto anche come Flash ADC. L’idea base di questo convertitore è quella di confrontare la tensione da convertire con un insieme finito di livelli di tensione predeterminati, corrispondenti ciascuno ad un diverso numero binario in uscita. Il confronto vien-

fatto contemporaneamente con tutti tali livelli di tensione; ciò che rende il circuito estremamente veloce. Esaminiamo la struttura base di un convertitore a 3 bit, quale quello mostrato in figura 17.25.

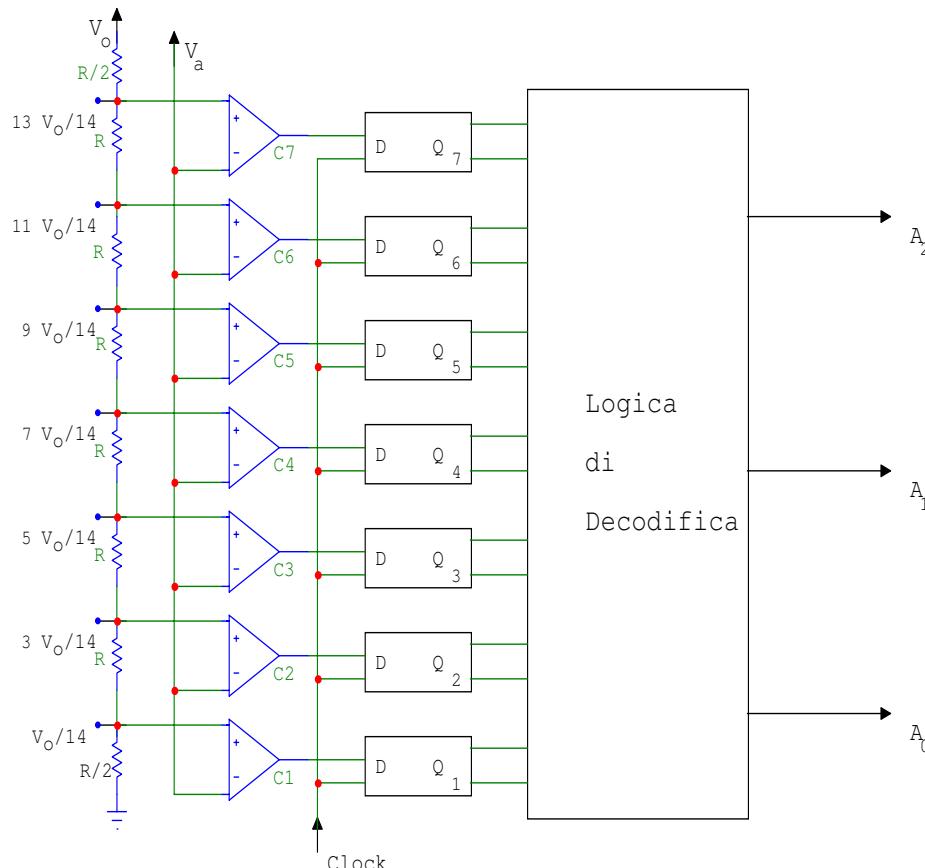


Figura 17.25: Schema di un flash ADC a 3 bit: convertitore analogico-digitale a comparatori paralleli.

V_a è la tensione da convertire, V_o una tensione fissa di riferimento. Il partitore costituito dalle resistenze $R/2, R$, fa sì che l'ingresso non invertente del comparatore C_7 sia ad una tensione pari a $13V_o/14$, quello di C_6 a $11V_o/14$, e via dicendo, fino a C_1 che ha l'ingresso non invertente a $V_o/14$. L'uscita dei comparatori è collegata all'ingresso di altrettanti flip-flop di tipo D, che a loro volta sono collegati alla logica di decodifica (costituita di porte AND) che genera i bit A_0, A_1, A_2 .

Ammettiamo che V_a sia compresa tra $5/14V_o$ e $7/14V_o$. L'uscita dei comparatori C_1, C_2, C_3 sarà allora al livello 0, mentre quella dei restanti sarà al livello 1. Notiamo che *tutti* i comparatori C_i con $i > 3$ hanno le uscite al livello 1, mentre tutti i comparatori C_i con $i \leq 3$ hanno le uscite al livello 0. Se ora V_a aumentasse e salisse ad esempio al di sopra di $7/14V_o$, il numero delle uscite che sono al livello 0 aumenterebbe, cioè la colonna degli 0 salirebbe. Quindi l'altezza di tale colonna è una misura della tensione V_a applicata in ingresso. Per tale motivo è invalso l'uso di riferirsi all'output della colonna dei comparatori come "thermometer code", poiché sale e scende come la colonnina di mercurio in un termometro. La logica di

controllo, la cui struttura interna non è indicata, è essenzialmente un decodificatore. Alla configurazione del nostro esempio dovranno corrispondere in uscita i bit 011. Tale ADC richiede 2^{N-1} comparatori per convertire una tensione in un numero di N bits; cioè 4095 comparatori per un numero di 12 bit.

17.6 Caratteristiche dei DAC ed ADC commerciali

In questa sezione accenneremo brevemente alle caratteristiche dei DAC disponibili in commercio, discutendo quelli che sono i parametri più importanti tra quelli quotati dai produttori. Tale terminologia si applica, con le dovute precisazioni, anche ai convertitori analogico-digitale. Per ulteriori dettagli si consiglia di consultare i manuali forniti dai produttori. Ad esempio, si consulti il sito WEB della National Semiconductor [9]

- Risoluzione

Questa è determinata dal numero di bits del convertitore. Un convertitore a 8 bit può “distinguere” 256 numeri diversi ed ha quindi una risoluzione di $1/256 \approx 4\%$. Un convertitore a 12 bit può distinguere 4096 livelli (numeri) diversi ed ha una risoluzione di circa lo 0,24%.

- Linearità

Se applichiamo all’ingresso di un DAC una serie di numeri binari da 0 a 2^{N-1} , dove N è il numero di bit, la tensione in uscita avrà un andamento a scala, come mostrato in figura 17.26.

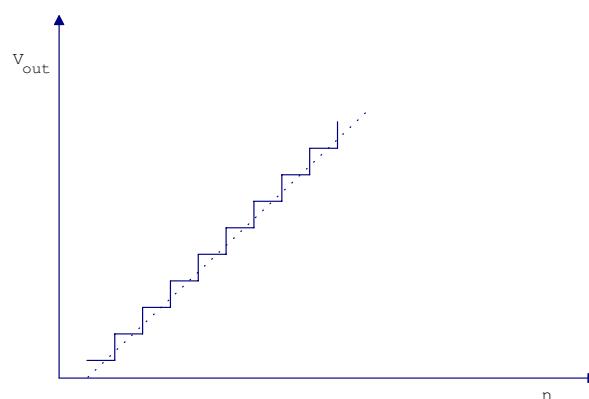


Figura 17.26: Andamento della tensione in uscita da un convertitore digitale-analogico quando in ingresso è applicata una serie di numeri binari.

Se effettuiamo un fit con una retta a tale andamento e valutiamo poi lo scostamento di ciascun gradino da tale retta, si definisce di solito “non-linearità” la massima deviazione trovata. Idealmente questa dovrebbe essere inferiore alla variazione di tensione corrispondente ad una variazione di metà del bit meno

significativo. Ad esempio, se il convertitore è a 12 bit e quindi il numero dei livelli possibili è 4096, la deviazione dalla linearità dovrebbe idealmente essere inferiore a $\frac{1}{2} \frac{1}{4096} = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

- **Linearità differenziale**

È in genere quotata una non-linearità differenziale, definita come la differenza tra la variazione di tensione letta in uscita e quella ideale, cioè quella corrispondente alla variazione di 1 LSB (bit meno significativo) in ingresso. Ad esempio, un DAC per il quale, variando l'ingresso di un LSB si osservi una variazione della tensione in uscita che corrisponda ad 1.5 LSB, ha una non-linearità differenziale di 1/2 LSB.

- **Monotonicità**

All'aumentare del numero binario impostato sull'ingresso di un DAC, la tensione in uscita deve salire in corrispondenza. Se per un certo incremento dell'input, l'uscita subisce una diminuzione, il DAC non è monotono. La non-monotonicità è quindi legata alla non-linearità.

- **Offset**

Questo è il segnale che è presente in uscita quando l'ingresso digitale è zero. Questo è in genere specificato in mV o μV o come frazione del bit meno significativo.

- **Precisione (Scale error)**

Questa è la differenza tra la tensione analogica reale in uscita e quella ideale. La mancanza di linearità contribuisce a diminuire la precisione. La precisione è in genere quotata ad esempio come “0.1% di fondo scala $\pm \frac{1}{2}$ del bit meno significativo”.

- **Errore di offset**

È la tensione all'uscita del DAC quando tutti gli ingressi sono zero. Questo è causato in genere dalla tensione o corrente di offset degli operazionali impiegati. In genere è aggiustabile regolando un trimmer o potenziometro esterno al DAC.

- **Tempo di assestamento**

Questo è definito come l'intervallo di tempo necessario, dopo l'applicazione dell'input, perché l'uscita si assesti sul suo valore asintotico.

17.7 ADC e campionamento dei segnali

Una generica forma d'onda, quale ad esempio quella mostrata in figura 17.27, può esser “campionata”, ciò che richiede che il suo valore ad intervalli di tempo regolari sia immagazzinato in una memoria analogica, quale potrebbe essere un circuito di sample-and-hold (*S&H*), e poi convertita in una successione di valori digitali.

Si può anche, in un sistema di trasmissione digitale, inviare la successione di valori binari ottenuti ad un eventuale dispositivo di ricezione che dovrà eseguire la

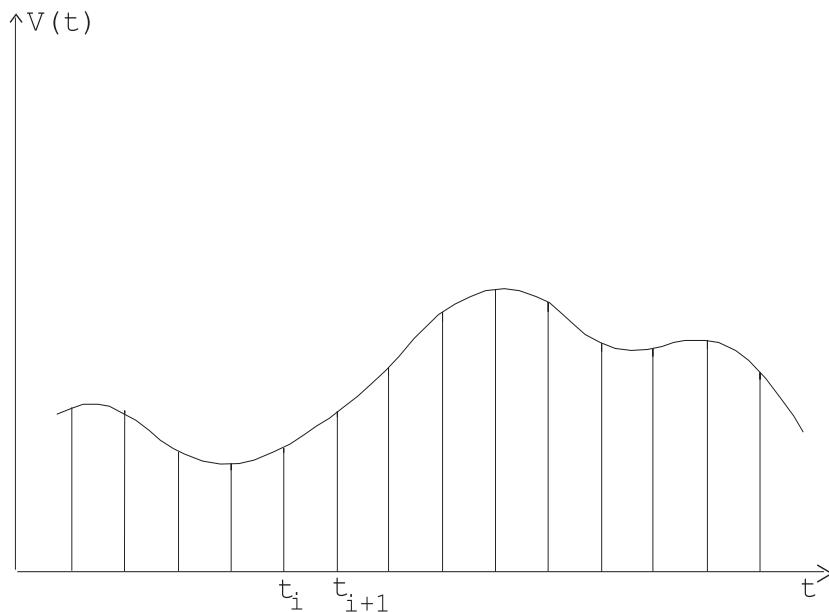


Figura 17.27: Forma d'onda campionata ad intervalli di tempo regolari t_i .

“ricostruzione” dell’originale segnale analogico. Lo schema diviene così quello di figura 17.28.

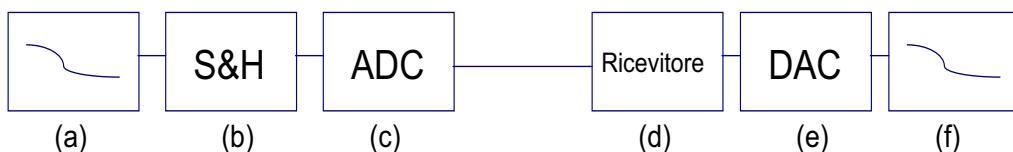


Figura 17.28: Struttura generale della catena di campionamento, conversione, trasmissione e ricostituzione della forma d'onda iniziale.

La forma d’onda (a) è campionata dal circuito di (S&H) (b), convertita dall’ADC (c) in una successione di valori numerici binari e poi trasmessa al ricevitore (d). Qui l’informazione digitale è nuovamente convertita in un segnale analogico (f) tramite il DAC (e). Tale segnale analogico potrà esser poi adoperato per pilotare un altoparlante, uno schermo video etc.

La domanda che ora ci poniamo è se con tale procedimento noi riusciremo in (f) a ricostruire in modo univoco la forma d’onda iniziale. In particolare: quale dovrà essere l’intervallo temporale tra due campionamenti successivi $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ (figura 17.27) se si vuole che la forma d’onda sia ricostruita in modo univoco? A questa domanda è stata data una semplice risposta da Nyquist¹ nel 1928. La relativa dimostrazione matematica, dovuta a Shannon, arrivò solo 21 anni più tardi, nel

¹Anche Whittaker ha contribuito in modo notevole alla soluzione del problema, ed in effetti alcuni autori citano questo come “teorema di Whittaker”. Il relativo riferimento è: J.M. Whittaker, *Interpolary Function Theory*, Cambridge University Press, 1935.

1949. Tale risposta è comunemente nota come “teorema di Nyquist” o “teorema di Shannon” o, più semplicemente, come “teorema del campionamento”.

Il teorema asserisce che, se nello sviluppo in serie di Fourier del segnale originale compaiono solo frequenze che non superino una certa frequenza f_{max} , la frequenza di campionamento f_c deve essere almeno il doppio di f_{max} :

$$f_c \geq 2 f_{max}$$

Il valore $f_N = 2f_{max}$ è noto come “frequenza di campionamento di Nyquist”.

Un punto su cui torneremo, ma che è importante chiarire fin d'ora, è la presenza nel segnale campionato, per effetto del campionamento stesso, di ripetizioni o *alias* dello spettro di frequenze del segnale iniziale, a frequenze più alte, con una periodicità determinata dalla frequenza di campionamento. Tali frequenze andranno eliminate facendo uso di opportuni filtri.

Il teorema del campionamento si applica, come visto, a segnali che non abbiano frequenze al di sopra di un valore finito. In pratica si può far uso del teorema ove opportuni filtri abbiano preliminarmente rimosso le frequenze al di sopra di un valore prefissato.

Ad esempio, l'orecchio umano può udire suoni nel campo di frequenze che va da $\approx 20\text{ Hz}$ a $\approx 20\text{ kHz}$. Segue dal teorema che occorre campionare il suono ad una frequenza di almeno 40 kHz se si vuole che il suono ricostruito risulti accettabile per l'orecchio umano.

Qualora frequenze più alte della metà della frequenza di campionamento di Nyquist siano presenti nel segnale, queste daranno luogo, nel segnale ricostruito, ad un fenomeno noto come *aliasing*. Con questo termine si intende che saranno presenti nel segnale ricostruito, oltre alle frequenze presenti in quello originario, altre frequenze che, pur cadendo nella banda di frequenze del segnale originario, non sono quelle che erano presenti in questo.

Nell'esempio delle onde acustiche, se nel suono originario sono presenti frequenze superiori a 20 kHz (non udibili per l'orecchio umano) ed il campionamento viene effettuato alla frequenza di 40 kHz , il contributo delle onde di frequenze maggiori di 20 kHz risulterà in un *aliasing* nella zona sotto i 20 kHz , con risultati sgradevoli. Per tale motivo occorre far precedere il circuito che effettua il campionamento da un opportuno filtro passa-basso, che tagli le frequenze superiori a 20 kHz . In pratica, nei sistemi comunemente adoperati, si effettua un campionamento a circa 44 kHz anziché a 40 kHz , per tener conto del fatto che il taglio effettuato da un filtro reale non è mai sufficientemente “netto”.

Chiariamo i concetti esposti, con riferimento alla figura 17.29.

Ammettiamo che il campionamento sia effettuato a precisi istanti t_i , intervallati di un tratto T . Ciò è schematizzabile come il prodotto della $f(t)$ per una serie infinita di funzioni $\delta(t)$ spaziate di un tratto pari alla periodicità T del campionamento, come mostrato in figura. Qui la funzione d'onda mostrata in (a) è moltiplicata per la serie temporale di funzioni δ mostrate in (b). Il risultato è la serie di altezze d'impulso mostrate in (c).

Notiamo che, come si può vedere in (e) e come si potrebbe dimostrare, la trasformata di Fourier di una serie di funzioni δ spaziate di T è una serie di funzioni δ spaziate di $f_s = 1/T$. La trasformata della funzione originaria è la $F(f)$ mostrata in (d). Per l'ipotesi fatta all'inizio, questa è nulla per frequenze superiori ad un

certo valore f_1 . Se ora calcoliamo la trasformata del segnale campionato mostrato in (c), ammettendo che la frequenza di campionamento $f_s = 1/T$ soddisfi il teorema del campionamento, troveremo, come vedremo nel seguito, una distribuzione come quella mostrata in (f). Oltre alla distribuzione a frequenze inferiori ad f_1 , che è una copia di quella originale, abbiamo un'ulteriore copia di questa a frequenze che vanno da f_s in su, una copia *speculare* di questa che inizia alla frequenza f_s e si estende verso frequenze inferiori, ed una serie infinita di ripetizioni di queste. Le copie e le immagini speculari di queste costituiscono degli *alias* della distribuzione di frequenze iniziale mostrata in (d). Un filtro che tagli le frequenze superiori ad f_1 eliminerà tali alias.

Se la condizione $f_1 < f_s - f_1$, ovvero $f_s > 2f_1$ non è soddisfatta, si vede dalla figura che gli *alias* costituiti dall'immagine speculare della prima copia della distribuzione iniziale di frequenza, verranno ad estendersi fin nella zona $f < f_1$, *che non è tagliata dal nostro filtro passa-basso*. Ciò dimostra chiaramente la necessità di imporre la condizione richiesta dal teorema del campionamento.

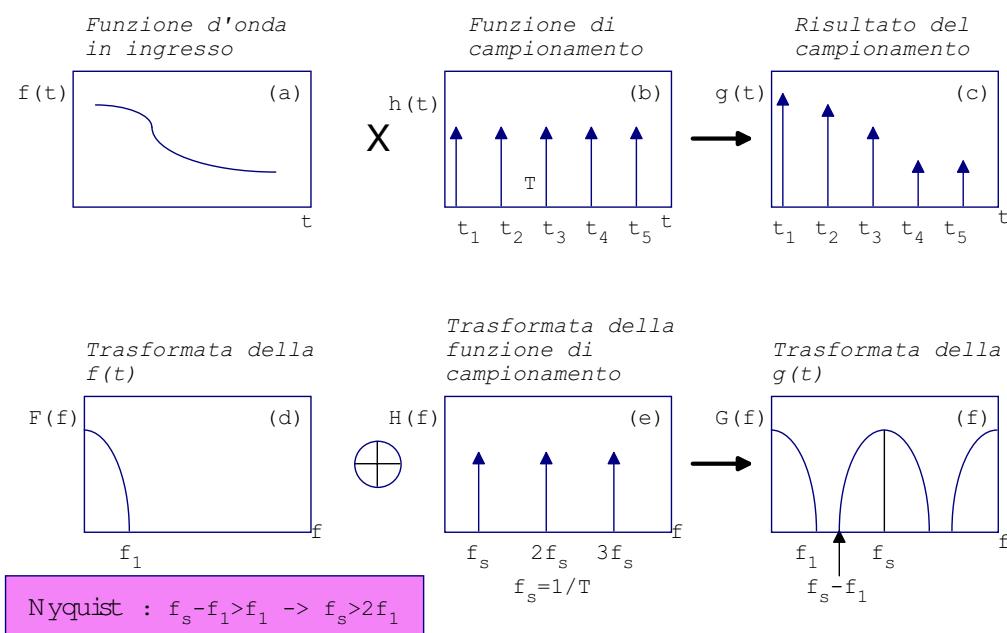


Figura 17.29: Schema generale del campionamento.

La figura 17.30 illustra in modo diverso ciò che accade. Nelle figure (a), (b) e (c) il campionamento rispetta la condizione di Nyquist. In (d) la frequenza del segnale è pari a 0.95 volte quella della frequenza di campionamento. Vediamo ora che i valori campionati, oltre ad *accordarsi* con la frequenza del segnale, riproducono anche una frequenza molto più bassa, non presente nel segnale.

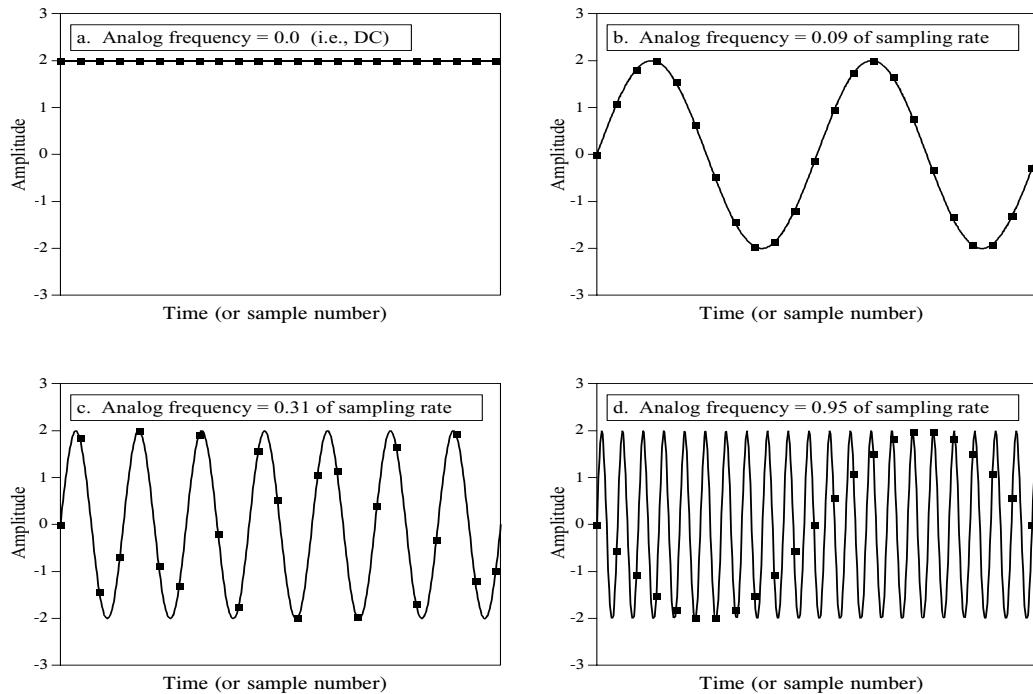


Figura 17.30: Le linee continue rappresentano il segnale, i quadretti il risultato del campionamento. Nel grafico (a) il segnale è costante. In (b) la forma d'onda sinusoidale ha una frequenza pari a 0.09 volte quella di campionamento. Ad esempio, potrebbe trattarsi di un segnale sinusoidale di 90 Hz, campionato ad una frequenza di 1000 Hz; il che implica 11.1 campionamenti per ogni ciclo completo dell'onda sinusoidale. Questo è un esempio di campionamento corretto. In (c) abbiamo solo 3.2 campionamenti per ogni ciclo. Ancora una volta il campionamento è corretto. In (d) abbiamo appena 1.05 campionamenti per ciclo. Vediamo che ora, oltre alla frequenza iniziale, i campionamenti sono consistenti con un'onda avente una frequenza pari a 0.05 volte quella dell'onda originale, ovvero un *alias* di questa.

17.8 Il teorema del campionamento

Possiamo far vedere il perché della condizione che il teorema pone sulla frequenza di campionamento nel modo seguente.

Il processo di campionamento è equivalente, come già visto, alla moltiplicazione della forma d'onda data per una serie infinita di funzioni δ , spaziate con una periodicità data dall'inverso della frequenza di campionamento $T = 1/f_c$, serie che si estende da $-\infty$ a $+\infty$ ²:

$$\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)$$

Si può dimostrare che lo spettro in frequenza angolare di tale funzione, vale a

²Tale funzione, il cui grafico ricorda un “pettine” è nota come *Dirac comb*, cioè “pettine di Dirac”.

dire la sua trasformata di Fourier, è data da:

$$H(\omega) = F[\chi(t)] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\omega - n\omega_c) \quad (17.1)$$

con:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T}$$

Vediamo che lo spettro è ancora una “Dirac comb” nello spazio delle ω .

Dobbiamo ora effettuare il “campionamento” della $f(t)$ data, e per far ciò dobbiamo calcolare il prodotto:

$$f(t) \chi(t)$$

Ammettiamo di aver calcolato la trasformata di Fourier $F(\omega)$ della $f(t)$. Calcoliamo il prodotto di convoluzione di questa con la $H(\omega)$:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - \omega') H(\omega') d\omega'$$

Sostituendo in questa alla $H(\omega)$ la sua espressione (17.1), otteniamo:

$$G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - \omega') \delta(\omega' - n\omega_c) d\omega'$$

Questa è uguale a:

$$G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(\omega - n\omega_c)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} & F(\omega) + F(\omega - \frac{2\pi}{T}) + F(\omega - \frac{4\pi}{T}) + F(\omega - \frac{6\pi}{T}) + \dots \\ & + \dots F(\omega + \frac{2\pi}{T}) + F(\omega + \frac{4\pi}{T}) + F(\omega + \frac{6\pi}{T}) + \dots \end{aligned}$$

vale a dire la somma della trasformata $F(\omega)$ della funzione originale, sommata ad un numero infinito di repliche della medesima, traslate di tratti multipli di $\omega_c = 2\pi/T$ rispetto a questa.

Il risultato trovato ci dice che il prodotto di convoluzione delle funzioni $F(\omega)$ ed $H(\omega)$ è uguale ad una somma infinita della $F(\omega)$ e di repliche della medesima, traslate di tratti multipli di $2\pi/T$. Come vedremo tra poco, tale prodotto di convoluzione altro non è che la trasformata di Fourier del prodotto $f(t)\chi(t)$, cioè *della funzione campionata*. Ne segue che: *la trasformata di Fourier della funzione campionata è uguale alla somma della trasformata della funzione iniziale e di infinite repliche della stessa, traslate di tratti pari a $\omega_c = 2\pi/T$.*

Ricordiamo ora la definizione della trasformata di Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Dove si vede facilmente che il termine reale è simmetrico per uno scambio di ω in $-\omega$, mentre quello immaginario è antisimmetrico. Ne segue che il precedente

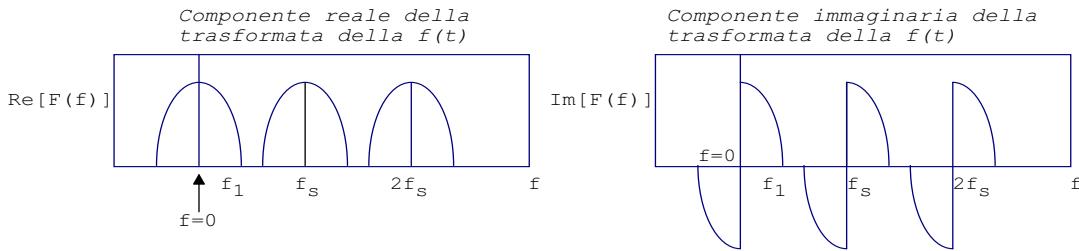


Figura 17.31: Componenti reale ed immaginaria della trasformata di Fourier.

risultato, applicato rispettivamente alla parte reale ed a quella immaginaria, fornisce distribuzioni del tipo mostrato in figura 17.31.

Ora ricordiamo che T è l'intervallo tra campionamenti successivi e ω_c è la relativa frequenza angolare. Se ω_c è inferiore al massimo valore (ω_{max}) di ω presente nella $F(\omega)$ (vale a dire se $T > 2\pi/\omega_{max}$) le *repliche* della $F(\omega)$ verranno a sovrapporsi alla stessa $F(\omega)$ e la ricostituzione della $f(t)$ iniziale a partire dalla trasformata, anche con l'applicazione di un filtro passa-basso alla frequenza f_1 , non sarà più possibile.

Dimostriamo infine quanto asserito sopra, cioè che il prodotto di convoluzione di due generiche funzioni $F(\omega)$ e $H(\omega)$, trasformate rispettivamente di $f(t)$ ed $h(t)$ è uguale alla trasformata di Fourier del prodotto $f(t)h(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') H(\omega - \omega') d\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Per verificarlo, verifichiamo che l'antitrasformata del primo membro è uguale all'antitrasformata del secondo, che è ovviamente $f(t)h(t)$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') H(\omega - \omega') e^{j\omega t} d\omega d\omega'$$

Poniamo in questa: $\omega - \omega' = \alpha$. Avremo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') H(\alpha) e^{j\omega' t} e^{j\alpha t} d\omega' d\alpha = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} H(\alpha) e^{j\alpha t} d\alpha = f(t)h(t) \end{aligned}$$

Con che è verificato quanto asserito.

Ricostruzione del segnale iniziale a partire dai valori campionati

Per completare il teorema del campionamento, dobbiamo mostrare come, a partire dai valori $f(nT)$ ottenuti dal campionamento, si possa ricostruire la funzione iniziale.

Il risultato, che non dimostreremo, è dato dalla relazione:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT) \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

dove si ammette che la funzione sia stata campionata ad intervalli di tempo T , pari a $1/(2f_{max})$, con f_{max} la massima frequenza contenuta nel segnale iniziale e dove la funzione *sinc* è data da:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Capitolo 18

Il rumore nei circuiti elettronici

18.1 Introduzione

Anche in assenza di segnale applicato in ingresso, una tensione o corrente di rumore è sempre presente all'uscita di un amplificatore. Tale segnale può aver origine nei componenti dell'amplificatore medesimo (transistori, FET, resistenze, diodi etc.) o può avere origini esterne (disturbi di natura elettromagnetica nell'ambiente, insufficiente filtraggio della tensione di alimentazione ottenuta dalla rete elettrica, rumore già presente all'ingresso dell'amplificatore).

Se si osserva il segnale all'uscita dell'amplificatore con un oscilloscopio, si vedrà una successione di impulsi di forma irregolare, positivi e negativi, come è possibile vedere in figura 18.1.

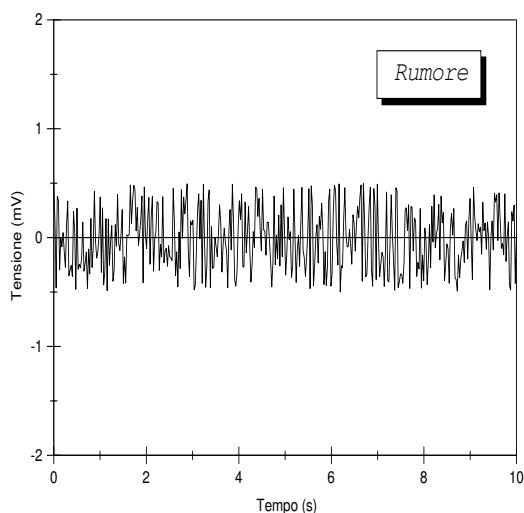


Figura 18.1: Segnale di rumore visto da un oscilloscopio. Si noti che la forma è del tutto irregolare, con picchi positivi e negativi.

L'altezza degli impulsi è spesso molto piccola e la loro distribuzione nel tempo è nella più gran parte dei casi, casuale (non lo sarà ovviamente se il rumore ha origine

nella rete elettrica a 220 V, in emissioni elettromagnetiche da parte di motori elettrici nell'ambiente etc).

Ci limiteremo qui allo studio del rumore di tipo casuale, che ha prevalentemente origine nei componenti del circuito o negli elementi che lo precedono.

Lo studio del rumore è particolarmente importante in quelle applicazioni in cui è necessario amplificare dei segnali la cui ampiezza è molto piccola. In tali circostanze, l'ampiezza del rumore può divenire una frazione apprezzabile di quella del segnale e diviene importante adottare accorgimenti particolari per amplificare il segnale e non il rumore. È necessario, a tale scopo, conoscere le caratteristiche del rumore, quali ad esempio il suo spettro di frequenza.

I tre tipi principali di rumore sono:

- il rumore termico ;
- il rumore di tipo shot ;
- il rumore $1/f$.

Nei paragrafi che seguono esamineremo le caratteristiche principali di tali tipi di rumore, cominciando con una breve descrizione dei metodi adoperati per caratterizzarlo.

18.2 Processi stocastici stazionari

Ci occuperemo qui dei processi stocastici che si ripetono nel tempo e che possono essere considerati, su lunghi intervalli di tempo, stazionari. Nella più gran parte dei casi essi hanno origine in fluttuazioni che hanno luogo a livello microscopico. In tal caso risulta opportuno affrontare il problema studiando la distribuzione di tali processi nel tempo. Dal punto di vista sperimentale è invece comodo effettuare misure nel dominio della frequenza. Ci occuperemo ora dei metodi adoperati per la caratterizzazione nel dominio temporale. Si vedrà successivamente come le due descrizioni siano legate l'una all'altra da utili relazioni matematiche.

18.2.1 Descrizione nel dominio del tempo

Distribuzioni

Consideriamo un sistema fisico soggetto a fluttuazioni statistiche casuali. Sia $x(t)$ la grandezza della variabile che fluttua, all'istante t , relativamente al sistema in esame. Tale variabile potrebbe essere una tensione, una corrente, una carica, un numero di fotoni etc. Per caratterizzare le proprietà del sistema si introducono delle opportune medie effettuate su di esso. Più dettagliatamente, si supponga di considerare un gran numero N di sistemi identici a quello sotto esame, ciascuno dei quali sia soggetto alle medesime fluttuazioni, ma *indipendentemente dagli altri*. Fissato un certo istante t_1 , sia $x_i(t_1)$ il valore che la variabile relativa all'ie-mo sistema ha in tale istante. Sia ora ΔN il numero dei sistemi per i quali la variabile ha, nell'istante considerato, un valore compreso tra x e $x + \Delta x$. Per $N \rightarrow \infty$ si prenda ora il rapporto $\Delta N/N$. Tale rapporto esprime la probabilità che il sistema abbia il valore della variabile x

compreso nell'intervallo suddetto, al tempo t_1 . Chiameremo tale probabilità ΔP . Il rapporto tra tale probabilità e l'ampiezza Δx dell'intervallo scelto per la variabile x è, per $\Delta x \rightarrow 0$, la funzione *densità di probabilità*:

$$\frac{dP}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x, t_1)$$

La probabilità che il sistema abbia, all'istante t_1 , un valore della variabile compreso in un intervallino dx è esprimibile in funzione della $f(x, t)$:

$$dP = f(x, t)dx$$

Se la funzione $f(x, t)$ è indipendente da t , il sistema si dice *stazionario*. La più gran parte dei processi di rumore che si incontrano sono stazionari.

Nota la densità di probabilità, è facile calcolare valori medi di variabili che siano funzioni della variabile casuale x . Le medie che si ottengono sono *medie sull'insieme dei sistemi identici* considerati. Ad esempio, si possono calcolare i *momenti*:

$$\overline{x^m} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx$$

Data una generica funzione $g(x)$ della variabile casuale x , il suo valor medio sull'insieme è:

$$\overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Se $f(x)$ è simmetrica ($f(x)=f(-x)$) ed x può variare tra valori uguali ed opposti ($-x_0, +x_0$) allora il valor medio di tutte le potenze dispari di x sarà nullo. Se il valor medio di x (cioè il momento di ordine 1) è diverso da zero, si può introdurre la grandezza:

$$\Delta x = (x - \bar{x})$$

il cui valor medio è nullo.

Si definisce la *varianza* di x come:

$$var(x) \equiv \overline{\Delta x^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Abbiamo fatto implicitamente l'ipotesi che la funzione $f(x)$ fosse normalizzata ad 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Se questa condizione non fosse soddisfatta, sarebbe comunque possibile definire una nuova funzione, legata alla $f(x)$ da una semplice relazione di proporzionalità, normalizzata ad 1.

Abbiamo finora effettuato l'operazione di media ammettendo di disporre di un numero (teoricamente infinito) di sistemi *identici a quello che si sta studiando* e soggetti a fluttuazioni indipendenti. Questo è chiaramente un artificio di calcolo. Nella realtà disponiamo di un solo sistema soggetto a fluttuazioni che si ripetono nel tempo. Ammettiamo di studiare le fluttuazioni del sistema sull'intervallo di tempo (0-T). Sia $x(t)$ la variabile che caratterizza le fluttuazioni del sistema e sia $g(x)$ una

funzione della x . Possiamo definire il valor medio, sull'intervallo di tempo T , della $g(x)$:

$$\langle g(x) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(x(t)) dt$$

Se questa media temporale è uguale alla media effettuata sull'insieme, cioè a $\overline{g(x)}$, allora il processo di rumore in esame si dice *ergodico*. La più gran parte dei processi di rumore sono ergodici.

Le considerazioni precedenti sono facilmente estendibili al caso di più variabili. Se infatti $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono variabili stocastiche indipendenti possiamo, analogamente a quanto fatto nel caso di una singola variabile, definire la probabilità che la variabile x_1 abbia un valore compreso nell'intervallo $(x_1, x_1 + dx_1)$ e la variabile x_2 abbia un valore compreso nell'intervallo $(x_2, x_2 + dx_2)$:

$$dP = f(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2$$

Se tale funzione non dipende dal tempo, il sistema si dice *stazionario*. In modo analogo a quello seguito nel caso della funzione $f(x)$, possiamo definire i valori medi di funzioni delle variabili x_1, x_2 . Ad esempio, i momenti saranno:

$$\overline{x_1^n x_2^m} = \int \int x_1^n x_2^m f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Particolarmente importante è la *correlazione*:

$$\overline{x_1 x_2} = \int \int x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

che è uguale a zero se le due variabili non sono correlate. Si definisce poi il *coefficiente di correlazione*:

$$C = \frac{\overline{x_1 x_2}}{\sqrt{\overline{x_1^2} \overline{x_2^2}}}$$

Si può facilmente vedere che $-1 \leq C \leq 1$. Basta far uso del fatto che l'espressione:

$$\overline{(ax_1 + bx_2)^2} \geq 0$$

per tutti i valori di a e b .

Il coefficiente di correlazione vale 0 se le variabili sono non correlate e ± 1 se la correlazione è massima. Se il modulo di C è minore di 1 (ma non nullo) si dice che la correlazione è parziale.

Autocorrelazione

Se nel calcolo della correlazione definita sopra, facciamo uso di $x(t)$ al posto di x_1 e di $x(t+\tau)$ al posto di x_2 , otteniamo quella che è nota come *funzione di autocorrelazione*

$$\Phi(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \quad (18.1)$$

La funzione di autocorrelazione fornisce una misura della durata temporale di una fluttuazione.

Essa ha le seguenti proprietà:

- $\Phi(\tau)$ è indipendente da t se $x(t)$ è stazionaria.
- $\Phi(\tau)$ è o continua (anche se $x(t)$ è discontinua) o è una funzione δ di τ . Infatti, se $\Phi(\tau)$ non è una funzione $\delta(\tau)$, generiche discontinuità in $x(t)$ e in $x(t + \tau)$ avranno luogo ad istanti diversi nei diversi elementi dell'insieme. Ne segue che tali discontinuità daranno una media finale nulla.
- $\Phi(\tau) = \overline{x(t)^2}$ per $\tau = 0$, a meno che $\Phi(\tau)$ non sia una funzione δ .
- $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$ se $x(t)$ è stazionaria.

L'ultima relazione scritta si può dimostrare come segue:

$$\Phi(\tau) \equiv \overline{x(t)x(t + \tau)} = \overline{x(u - \tau)x(u)} = \overline{(x(u)x(u - \tau))} = \overline{x(t)x(t - \tau)}$$

Dove il primo passaggio è ottenuto ponendo $u = (t + \tau)$, il secondo scambiando i due termini che figurano nella media ed il terzo sostituendo u con t , il che è consentito dal fatto che la $x(t)$ è stazionaria.

Ulteriori proprietà della funzione di autocorrelazione sono:

- Per $\tau \rightarrow \infty$, $\Phi(\tau)$ va a zero abbastanza rapidamente che l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) d\tau$$

esiste. Tale condizione può non esser verificata in alcuni casi.

- Dalla correlazione si può, se $\Phi(\tau)$ non è una funzione $\delta(\tau)$, ottenere il coefficiente di autocorrelazione normalizzato: $c(\tau) = \frac{\overline{x(t)x(t+\tau)}}{\overline{x^2}}$

Nel caso in cui $\Phi(\tau)$ è una funzione δ :

$$\Phi(\tau) = A \cdot \delta(\tau) \quad (18.2)$$

il rumore si dice *bianco*.

Consideriamo ora alcuni esempi di sorgenti di rumore. Consideriamo una sequenza di impulsi (funzioni δ) positivi e negativi, distribuiti in modo casuale nel tempo, come mostrato in figura 18.2; la probabilità che un impulso abbia luogo nell'intervallo di tempo $(t, t+dt)$ sia cioè costante ed indipendente da t . Sia inoltre A l'ampiezza degli impulsi, cioè l'integrale di ciascuna delle funzioni δ che li descrivono.

Sappiamo che in tal caso la distribuzione del numero n di impulsi in un tempo finito T è una Poissoniana. La funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau)$ sarà allora nulla per tutti i valori di τ , tranne che nel punto $\tau=0$. Più precisamente, essa sarà una funzione $\delta(0)$ di ampiezza pari ad A^2 .

Se ora tale sorgente di rumore viene applicata ad un filtro passa-basso avente una costante di tempo τ_1 , la funzione $w(t)$ all'uscita avrà la forma mostrata in figura 18.3 e la corrispondente funzione di autocorrelazione avrà la forma mostrata in figura 18.4.

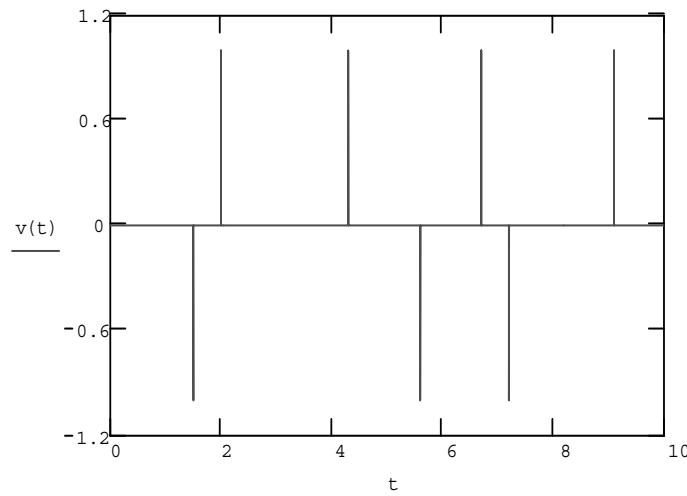


Figura 18.2: Sequenza di impulsi (funzioni δ) positivi e negativi, distribuiti casualmente nel tempo.

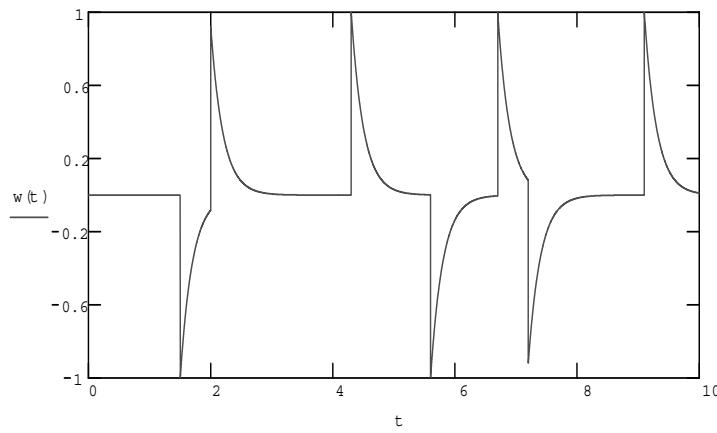


Figura 18.3: Segnale in uscita da un filtro passa basso a cui sia stato applicato in ingresso il segnale mostrato in figura 18.2.

Infatti la risposta di un circuito caratterizzato da una funzione di trasferimento $h(t)$ ad un segnale $v(t)$ è data dalla convoluzione:

$$v_o(t) = \int_0^t v(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (18.3)$$

la cui trasformata di Laplace è:

$$\tilde{v}_o(s) = \tilde{v}(s) \cdot \tilde{h}(s)$$

Per dimostrare tale relazione, L-trasformiamo entrambi i membri della (18.3):

$$\tilde{v}_o(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t v(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

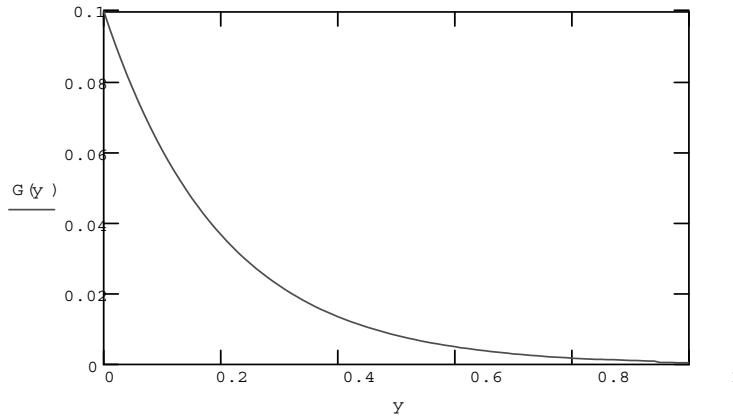


Figura 18.4: Autocorrelazione del segnale in uscita dal filtro.

Trasformiamo ora l'integrale interno, estendendo l'integrazione fino ad ∞ . Ciò può esser ottenuto moltiplicando l'integrando per la funzione gradino unitario $u(t - \tau)$, che è nulla per $\tau > t$:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_o(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty v(t - \tau) h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty h(\tau) d\tau \int_0^\infty v(t - \tau) u(t - \tau) e^{-st} dt\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato l'ordine delle due integrazioni. L'integrale interno è nullo per $t < \tau$. Possiamo quindi limitare l'integrazione fra τ ed ∞ , dove è $u(t - \tau) = 1$. Ponendo $t' = t - \tau$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_o(s) &= \int_0^\infty h(\tau) d\tau \int_0^\infty v(t') e^{-s(t'+\tau)} dt' = \\ &= \int_0^\infty h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty v(t') e^{-st'} dt' = \tilde{h}(s) \cdot \tilde{v}(s)\end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. Nel nostro caso (circuito passa-basso) la trasformata della funzione di trasferimento del circuito (cioè della $h(t)$) è:

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{s + a} \quad \text{con : } a = \frac{1}{\tau_1}$$

e la trasformata dell'eccitazione (funzione δ) è 1. Ne segue per la risposta:

$$v_o(t) = e^{-t/\tau_1}$$

Cioè la risposta è un esponenziale. Poiché gli impulsi hanno luogo ad istanti casuali, ed inoltre possono essere sia positivi che negativi, la correlazione tra impulsi diversi sarà nulla e l'unico contributo che rimane all'autocorrelazione è quella del generico impulso con se stesso, la cui forma è quella mostrata in figura 18.4.

Come si vede $\Phi(\tau)$ è diverso da zero per valori di $\tau \neq 0$.

Funzione di autocorrelazione all'uscita di un circuito

Il procedimento formale per trovare la funzione di autocorrelazione $\Phi_2(\tau)$ all'uscita di un circuito quando sia nota la funzione di autocorrelazione $\Phi_1(\tau)$ all'ingresso è il seguente. Sia $h(t)$ la funzione che esprime la risposta del circuito ad una funzione $\delta(t)$. Definiamo allora la funzione di autocorrelazione del circuito:

$$\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) * h(t + \lambda) dt \quad (18.4)$$

che esprime la 'memoria' del circuito al tempo λ . Si dimostra allora che $\Phi_2(\tau)$ è dato da:

$$\Phi_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) * \Phi_1(t - \lambda) d\lambda \quad (18.5)$$

18.2.2 Analisi nel dominio della frequenza

Lo sviluppo in serie di Fourier di una tensione di rumore $v(t)$ può essere effettuato su di un intervallo di tempo definito (0-T):

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(j\omega_n t) \quad (18.6)$$

dove:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot \exp(-j\omega_n t) dt \quad (18.7)$$

ed:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm n$$

Notiamo che dalla (18.7), con $v(t)$ reale, segue che:

$$a_n^* = a_{-n}$$

I primi termini ($|n| \leq 2$) dello sviluppo (18.6) sono:

$$v(t) = a_{-2} \exp(-j4\pi \frac{t}{T}) + a_{-1} \exp(-j2\pi \frac{t}{T}) + a_0 + a_1 \exp(j2\pi \frac{t}{T}) + a_2 \exp(j4\pi \frac{t}{T})$$

Per un dato T, la componente di Fourier di pulsazione ω_n è:

$$v_n(t) = a_n \exp(j\omega_n t) + a_{-n} \exp(-j\omega_n t)$$

Applichiamo ora questo sviluppo separatamente a ciascun elemento di un insieme di sistemi identici, soggetti a fluttuazioni. Calcoliamo il valore quadratico medio di v_n sugli elementi dell'insieme:

$$\overline{v_n^2} = \overline{a_n^2} \exp(2j\omega_n t) + \overline{a_{-n}^2} \exp(-2j\omega_n t) + 2\overline{a_n a_n^*} \quad (18.8)$$

Notiamo che a_n è un vettore nel piano complesso:

$$a_n = |a_n| \exp(j\phi_n)$$

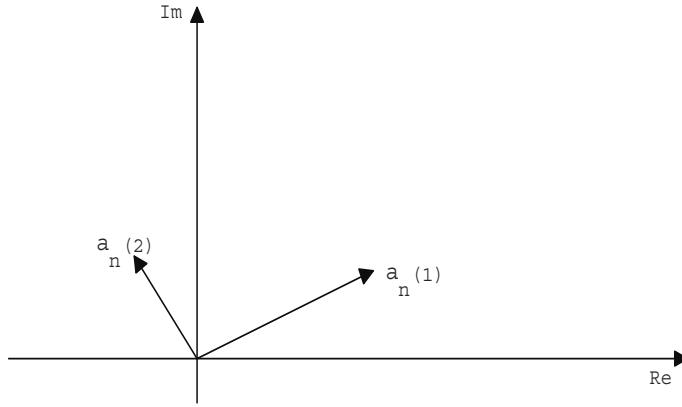


Figura 18.5: Il valore quadratico medio della componente di Fourier di pulsazione ω_n è $\overline{v_n^2} = \overline{a_n^2} \exp(2j\omega_n t) + \overline{a_{-n}^2} \exp(-2j\omega_n t) + 2\overline{a_n a_n^*}$ dove $a_n = |a_n| \exp(j\phi_n)$ ed $a_n^2 = |a_n|^2 \exp(2j\phi_n)$. In figura sono mostrati i vettori nel piano complesso che rappresentano a_n^2 per due diversi valori di n .

ed a_n^2 :

$$a_n^2 = |a_n|^2 \exp(2j\phi_n)$$

I vettori che rappresentano a_n^2 per due diversi elementi dell'insieme sono mostrati in figura 18.5.

I due vettori possono avere moduli e fasi diverse. Dato però il carattere casuale della fluttuazione, dato un elemento del sistema che ha, ad un dato istante, un certo modulo e fase, esisterà nell'insieme un elemento con uguale modulo e fase uguale a quella del primo, aumentata di π . Per tale coppia di elementi, la somma dei relativi vettori (uguali ed opposti) è nulla. Poiché ciò è vero per qualunque valore di a_n , ne segue che:

$$\overline{a_n^2} = 0$$

Analogamente si vede che è:

$$\overline{a_{-n}^2} = 0$$

Invece non è nullo l'ultimo dei termini che compaiono nella (18.5). Ciò segue dal fatto che esso è reale:

$$a_n a_n^* = |a_n| \exp(j\phi_n) |a_n| \exp(-j\phi_n) = |a_n|^2$$

Di conseguenza, la cancellazione tra elementi diversi ora non ha luogo. Avremo in definitiva:

$$\overline{v_n^2} = 2\overline{a_n a_n^*} \quad (18.9)$$

Quanto detto finora si applica sia al caso $\bar{v} = 0$ che al caso $\bar{v} \neq 0$. Poiché siamo comunque liberi di ridefinire $v(t) - \bar{v}$ come la quantità che fluttua, potremo sempre assumere, senza perdere generalità, che sia $\bar{v} = 0$.

Densità spettrale

Nello sviluppo (18.6), alla componente di pulsazione $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ è associata una frequenza:

$$f_n = \frac{n}{T}$$

Considerando l'intervallo di frequenza:

$$\Delta f \equiv f_{n+1} - f_n = \frac{1}{T}$$

definiremo la *densità spettrale* come:

$$S_v(f_n) = \frac{\overline{v_n^2}}{\Delta f} \quad (18.10)$$

Questa rappresenta la potenza quadratica media di rumore per unità di intervallo di frequenza, in prossimità della frequenza f_n , sviluppata su di una resistenza di 1Ω cui sia applicato tale segnale di tensione.

Per $T \rightarrow \infty$ l'equazione (18.10) si può riscrivere, facendo uso della (18.9), come:

$$S_v(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \overline{a_n a_n^*}$$

Essa esprime l'importanza delle singole componenti nello sviluppo in serie di Fourier.

Il teorema di Wiener-Khintchine (vedi appendice A) lega la densità spettrale così definita alla funzione di autocorrelazione:

$$S_v(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(t) v(t + \tau)} \exp(j\omega\tau) d\tau = 4 \int_0^{+\infty} \overline{v(t) v(t + \tau)} \cos(\omega\tau) d\tau \quad (18.11)$$

Dove il termine $\overline{v(t) v(t + \tau)}$ è la funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau)$. L'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\exp(j\omega\tau) = \cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau)$, che $\cos(\omega\tau)$ è una funzione pari e $\sin(\omega\tau)$ una funzione dispari di τ e che la funzione di autocorrelazione gode della proprietà che: $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$. Quindi scriveremo:

$$S_v(f) = 4 \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (18.12)$$

Questa equazione può essere invertita, per esprimere la funzione di autocorrelazione in termini della densità spettrale:

$$\Phi(\tau) = \int_0^{+\infty} S_v(f) \cos(\omega\tau) df \quad (18.13)$$

Si vede da ciò che $S_v(f)$ e $\Phi(\tau)$ sono l'una la trasformata di Fourier dell'altra. Attraverso queste equazioni è possibile ricavare la densità spettrale dalla funzione di autocorrelazione e viceversa. Nelle misure si determina la densità spettrale, da cui si ricava poi la funzione di autocorrelazione. I calcoli forniscono invece la funzione di autocorrelazione, da cui si ricava poi la densità spettrale facendo uso della (18.12).

Notiamo subito che nel caso di una sorgente di rumore *bianco*, che ha una funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau) = A \cdot \delta(\tau)$ (con A una costante), si trova $S_v(f) = 2 \cdot A$, cioè la densità spettrale è costante.

Ponendo $\tau = 0$ la (18.13) fornisce:

$$\Phi(0) = \int_0^{+\infty} S_v(f) df$$

e, poichè $\Phi(0) = \overline{v^2(t)}$, si trova:

$$\overline{v^2(t)} = \int_0^{+\infty} S_v(f) df \quad (18.14)$$

Cioè il valor medio del quadrato della tensione di rumore è dato da un'integrale sull'intero spettro di frequenze, della densità spettrale. La tensione quadratica media per unità di intervallo di frequenza è semplicemente $S_v(f)$.

Banda di rumore di un amplificatore

Ammettiamo ora che un segnale casuale $v(t)$ sia applicato all'ingresso di un generico sistema lineare, caratterizzato da una funzione di trasferimento $g(f)$. Sia $w(t)$ il segnale all'uscita del sistema. Siano $S_v(f)$ e $S_w(f)$ le corrispondenti densità spettrali ed a_n e b_n i relativi coefficienti di Fourier. La linearità del sistema porta a:

$$b_n = g(f) \cdot a_n$$

e quindi:

$$S_w(f) = S_v(f) \cdot |g(f)|^2$$

Per cui:

$$\overline{w^2(t)} = \int_0^{\infty} S_v(f) \cdot |g(f)|^2 df$$

Se il sistema lineare è un amplificatore con una banda passante molto stretta centrata sulla frequenza f_0 , avremo:

$$\overline{w^2(t)} = S_v(f_0) \cdot \int |g(f)|^2 df = S_v(f_0) \cdot g_0^2 \cdot B_N \quad (18.15)$$

dove $g_0 = g(f_0)$ è la risposta a metà banda del sistema lineare e B_N è la larghezza di banda effettiva (nota anche come *banda equivalente di rumore* o *equivalent noise bandwidth*), definita da:

$$B_N = \frac{1}{g_0^2} \int_0^{\infty} |g(f)|^2 df \quad (18.16)$$

In altre parole, la banda di rumore del nostro amplificatore è la larghezza di banda di un amplificatore ideale avente una risposta in frequenza rettangolare, che fornisce in uscita la medesima potenza di rumore dell'amplificatore reale.

Nel caso in cui il rumore sia *bianco*, potremo facilmente estendere tale risultato al caso di un amplificatore la cui banda passante non sia necessariamente stretta, essendo in tal caso la $S_v(f)$ una costante.

La definizione di banda equivalente di rumore è poi utile anche nel caso di un filtro. Consideriamo ad esempio un filtro passa-basso, la cui funzione di trasferimento sia:

$$|g(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_0)^2}$$

La banda equivalente di rumore sarà:

$$B_N = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (f/f_0)^2} df = f_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du$$

con $u = f/f_0$.

Si trova:

$$B_N = f_0 \arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2} f_0 \approx 1.57 f_0$$

cioè la banda equivalente di rumore è circa 1.57 volte la banda passante f_0 del filtro.

18.2.3 Determinazione sperimentale della densità spettrale

La densità spettrale $S_v(f)$ può esser misurata ad una generica frequenza f_0 , facendo uso di un filtro di cui si conosca il guadagno a metà banda g_0 e B_N , nonchè di un rivelatore quadratico (cioè di un rivelatore in grado di fornire $w(t)^2$) all'uscita del filtro.

La densità spettrale sarà ottenibile invertendo l'equazione (18.15) :

$$S_v(f_0) = \frac{\overline{w(t)^2}}{g_0 \cdot B_N}$$

Variando la frequenza f_0 del filtro si potrà in tal modo ottenere una misura della densità spettrale su di un ampio campo di frequenze. Si noti che spesso, al posto della densità spettrale, espressa in V^2/Hz si fa uso della sua radice quadrata (in V/\sqrt{Hz}).

18.3 Rumore termico

Il rumore termico (noto anche come rumore Johnson) è quello misurabile ai capi di una resistenza. Se misuriamo la differenza di potenziale ai capi della resistenza, troveremo che essa fluttua attorno allo zero, ma ha un valore quadratico medio diverso da zero. Si può pensare al rumore termico come dovuto al moto di agitazione termica degli elettroni nel materiale di cui è fatta la resistenza. Esso è analogo al moto Browniano, le cui proprietà erano state ottenute da Einstein nel 1906.

Il rumore osservato agli estremi della resistenza può esser descritto come il risultato di una serie di impulsi casuali. Ciascun impulso è un *evento*, costituito dal transito di un elettrone tra collisioni successive con atomi del materiale. Tale evento produce una modifica nella distribuzione di carica all'interno del materiale, e causa quindi una fluttuazione nella differenza di potenziale alle estremità. A tale evento segue un *rilassamento*, che riporta il sistema in equilibrio.

Segue da questa descrizione che ciascun elettrone presente produce un treno casuale di impulsi di tensione alle estremità del materiale resistivo, via via che esso si muove nel materiale. La forma d'onda di rumore osservata è la somma delle successioni di impulsi associati al complesso degli elettroni nel dispositivo.

La distribuzione temporale degli eventi è casuale, nel senso che la probabilità che un evento (il moto di un elettrone) abbia luogo in un intervallino di tempo δt è indipendente dalla storia precedente ed è proporzionale a δt :

$$dP = \nu \delta t$$

dove ν (numero medio di eventi per unità di tempo) non dipende da t . Si può vedere (vedi appendice B) che la P è una distribuzione di Poisson e che quindi la probabilità

di osservare m collisioni in un intervallo di tempo finito t è data da:

$$P(m) = \frac{(\nu t)^m}{m!} e^{-\nu t} \quad (18.17)$$

Per tale distribuzione si dimostra che è:

$$\bar{m} = \nu t$$

la quale mostra che il parametro ν ha il significato del numero medio di eventi per unità di tempo. Inoltre si dimostra che la varianza σ^2 è:

$$\sigma^2 = \overline{(m - \bar{m})^2} = \overline{m^2} - \bar{m}^2 = \bar{m}$$

Cioè la varianza è uguale al valor medio. Questa è una caratteristica importante della distribuzione di Poisson.

Si può dimostrare che lo spettro di potenza del rumore è bianco, e più precisamente che la potenza di rumore in un intervallo di frequenza df è:

$$W = \frac{h f df}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1} \quad (18.18)$$

dove h è la costante di Planck ($h = 6.6262 \cdot 10^{-34} J s$), K quella di Boltzmann ($K = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$) e T la temperatura assoluta.

A temperatura ambiente ($T = 300 K$) l'esponente nel denominatore di questa espressione vale $\approx 1.6 \cdot 10^{-13} f (Hz)$.

Vediamo quindi che per frequenze f non troppo alte (e/o temperature non troppo basse), l'esponente $\frac{hf}{KT} \ll 1$ e quindi:

$$W = KT df \quad (18.19)$$

Che è l'espressione comunemente adoperata nella più gran parte delle applicazioni. Essa mostra che si tratta in effetti di rumore bianco: la potenza di rumore è proporzionale all'ampiezza della banda di frequenze scelta. Ciò almeno per frequenze $\leq 10^{12} Hz$, quando le deviazioni previste dalla (18.18) da un andamento costante cominciano a farsi sentire.

Notiamo che l'andamento dato dalla (18.19) porterebbe ad una potenza di rumore totale (integrata su tutte le frequenze) infinitamente grande. La correzione quantistica contenuta nella (18.18) rende finito l'integrale della potenza sull'intero campo di fequenze.

Per calcolare il valor medio del quadrato della tensione di rumore, consideriamo ora il circuito di figura 18.6, dove la resistenza R_1 è quella che genera il rumore (schematizzato dalla sorgente di tensione di rumore v_1) mentre la resistenza R_2 assorbe la potenza W_1 che la prima fornisce.

Ammettiamo che le due resistenze siano uguali, ma che la seconda sia priva di rumore¹. La tensione ai capi della resistenza R_2 sarà $\frac{1}{2}v_1$ e la potenza media sviluppata sarà $\frac{1}{4}\frac{v_1^2}{R}$. Poichè questa quantità deve uguagliare W_1 , si trova:

$$W_1 = \frac{1}{4} \frac{\overline{v_1^2}}{R} \quad (18.20)$$

¹Basta immaginare che la resistenza R_2 sia stata posta in un bagno termico ad una temperatura prossima allo zero assoluto.

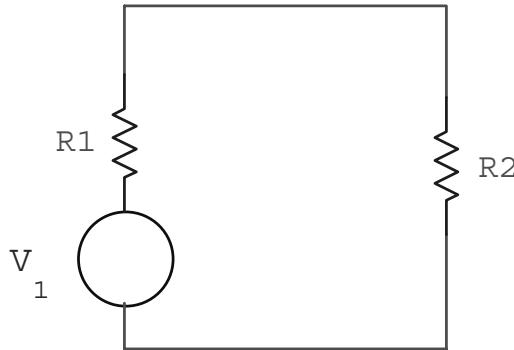


Figura 18.6: Circuito per calcolare il valore quadratico medio della tensione di rumore. La resistenza R_1 è quella che genera il rumore (schematizzato dalla sorgente di tensione di rumore v_1) mentre la resistenza R_2 assorbe la potenza W_1 che la prima fornisce.

dove si è posto:

$$R = R_1 = R_2$$

e quindi:

$$\overline{v_1^2} = 4RW_1 = 4KRTdf$$

Da questo risultato si vede che il valor medio del quadrato della tensione di rumore e quello della corrente di rumore sono dati da:

$$\overline{v^2} = 4KTRdf \quad (18.21)$$

$$\overline{i^2} = \frac{4KTdf}{R} \quad (18.22)$$

Il rumore termico fu scoperto nel 1927-1928 da Johnson [16], il quale osservò che una tensione non periodica esisteva alle estremità di tutti i conduttori e che tale effetto dipendeva dalla temperatura. Successivamente Nyquist [17] ne dette una spiegazione teorica, basata su di un argomento termodinamico, che descriveremo brevemente nella prossima sezione.

Notiamo che le proprietà statistiche del rumore Johnson possono anche essere studiate seguendo un approccio basato sul comportamento del moto degli elettroni a livello microscopico e facendo uso della distribuzione di Poisson, che caratterizza il succedersi temporale degli eventi elementari. Tale metodo è analogo a quello seguito da Einstein e poi da Langevin [18] per lo studio del moto Browniano. Per una dimostrazione si veda il riferimento ([19]).

18.3.1 Metodo di Nyquist

Ammettiamo di avere due resistenze identiche, alla medesima temperatura T , connesse fra di loro da una linea di trasmissione ideale avente impedenza caratteristica R , uguale a quella delle resistenze (vedi figura 18.7).

Sia L la lunghezza della linea. In condizioni di equilibrio, la prima delle due resistenze cede alla linea una potenza W nell'intervallo di frequenza df . Tale potenza

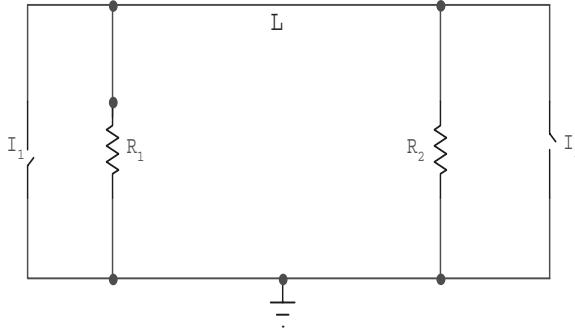


Figura 18.7: Circuito per verificare la formula del rumore termico con il metodo di Nyquist. Le due resistenze sono supposte identiche ed isoterme, connesse da una linea di trasmissione ideale avente impedenza caratteristica uguale al valore delle resistenze.

è poi assorbita dall'altra resistenza. Nel medesimo tempo, la seconda resistenza cede alla linea una potenza W che è poi assorbita dalla prima. Nell'intervallo di tempo $\Delta t = L/v$ (dove v è la velocità di propagazione di un'onda e.m. lungo la linea) che il segnale impiega a propagarsi lungo la linea, quest'ultima ha ricevuto quindi una energia

$$2W\Delta t = 2WL/v \quad (18.23)$$

dalle resistenze, nell'intervallo di frequenza df .

Se ora, chiudendo simultaneamente i due interruttori I_1 ed I_2 , mettiamo in cortocircuito le estremità della linea, si formeranno onde stazionarie e l'energia rimarrà intrappolata nella linea stessa.

Le onde stazionarie presenti nella linea avranno frequenze:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{v}{2L} \\ f_2 &= 2f_1 \\ f_3 &= 3f_1 \end{aligned}$$

etc.

La spaziatura tra frequenze consecutive è $\delta f = \frac{v}{2L}$. Se L è grande, la spaziatura sarà piccola ed il numero di modi di vibrazione in un intervallo di frequenza df sarà:

$$\frac{df}{\delta f} = df \cdot \frac{2L}{v}$$

Per il principio di equipartizione, a ciascun modo di vibrazione compete un'energia:

$$\bar{E} = \frac{hf}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1}$$

L'energia nell'intervallo di frequenza df sarà quindi:

$$\frac{2L}{v} \cdot df \cdot \bar{E} = \frac{2L}{v} \frac{hf}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1} \cdot df$$

Uguagliando questa espressione all'energia (18.23) ceduta dalle resistenze alla linea nell'intervallo di frequenza df , cioè a:

$$2W \frac{L}{v}$$

troviamo:

$$W = \frac{hf}{\exp(\frac{hf}{KT}) - 1}$$

che è quanto intendevamo dimostrare.

18.4 Il rumore di tipo *shot*

Questo rumore ha origine nelle fluttuazioni statistiche del numero di portatori di carica. È stato osservato da Schottky in valvole termoioniche e fu da lui attribuito al fatto che la corrente nei tubi a vuoto è costituita da un flusso discreto di cariche elettriche. Esso si osserva in numerosissimi dispositivi elettronici; ad esempio nella corrente in un diodo, nella corrente di gate in un FET, nei fotomoltiplicatori etc. In tutti questi casi, ed in molti altri analoghi, la distribuzione temporale del flusso delle cariche è, analogamente a quanto accade nel caso del rumore termico, una Poissoniana.

Il valore che si trova per la deviazione quadratica media della corrente dal suo valor medio, cioè per la quantità:

$$\bar{i^2} \equiv \bar{I^2} - \bar{I}^2$$

è

$$\bar{i^2} = 2e\bar{I}df \quad (18.24)$$

dove \bar{I} è la corrente media. La grandezza $2e\bar{I}$ è quindi la densità spettrale $S_i(f)$ relativa alla corrente. Vediamo che anche in questo caso abbiamo a che fare con un rumore bianco.

Che la fluttuazione quadratica media della corrente attorno al valor medio ($\bar{i^2}$) sia *proporzionale* al prodotto $\bar{I}e$ può esser compreso facilmente facendo uso della distribuzione di Poisson. Infatti la corrente media \bar{I} è uguale al prodotto del numero di cariche elementari che attraversano nell'unità di tempo la sezione del conduttore, per la carica elementare:

$$\bar{I} = \bar{n}e$$

La fluttuazione quadratica media della corrente attorno al valor medio è:

$$\overline{(I - \bar{I})^2} = \bar{i^2} = \overline{(n - \bar{n})^2} e^2 = \sigma_n^2 e^2 = \bar{n}e^2$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che la distribuzione di n è una Poissoniana. Da questa segue poi:

$$\bar{i^2} = \frac{\bar{I}}{e} e^2 = \bar{I}e$$

Una dimostrazione completa della (18.24), che rende conto del fattore 2, è la seguente.

Ammettiamo che un certo fenomeno sia determinato dalla somma di un gran numero di eventi che avvengono in modo casuale, con una rate media λ . Sia $F(t - t_i)$ la funzione che descrive l'evoluzione temporale di una certa variabile fisica, originata dal verificarsi di uno degli eventi al tempo t_i . La funzione $Y(t)$ che descrive l'andamento temporale macroscopico, risultante dal verificarsi di un numero N di eventi elementari in un certo tempo è allora data dalla somma:

$$Y(t) = \sum_i F(t - t_i)$$

dove $F(t - t_i) = 0$ per $t < t_i$ ed $F(t - t_i)$ rappresenta l'effetto di un evento che ha luogo nell'istante t_i . Definiamo la trasformata di Fourier di $F(u)$ come:

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot \exp(-j\omega u) du$$

Si dimostra allora (teorema di Carson-vedasi appendice C) che la densità spettrale $S_y(f)$ di $Y(t)$ è data da:

$$S_y(f) = 2\lambda |\psi(f)|^2 \quad (18.25)$$

Applichiamo ora tale teorema al problema dell'emissione di elettroni da parte di un catodo riscaldato, dove il numero di elettroni emessi per unità di tempo è una variabile Poissoniana.

Se V_a è il potenziale dell'anodo (il catodo sia a potenziale nullo), d la distanza catodo-anodo, τ il tempo di transito dell'elettrone dal catodo all'anodo, si ha:

$$\tau = \frac{2d}{v_a} = \frac{2d}{\sqrt{2eV_a/m}}$$

dove m è la massa dell'elettrone, e la sua carica e v_a la velocità massima che esso raggiunge (all'anodo). La corrente $i(t)$ associata ad un singolo elettrone emesso all'istante t_i è:

$$i(t) = \frac{2e(t - t_i)}{\tau^2} \quad (t_i \leq t \leq t_i + \tau)$$

La correttezza di questa equazione è facilmente verificabile:

$$\int_0^\infty i(t) dt = \int_{t_i}^{t_i + \tau} \frac{2e(t - t_i)}{\tau^2} dt = \frac{2e}{\tau^2} \int_0^\tau t' dt' = e$$

Quindi:

$$\Psi_i(f) = \int_0^\tau \frac{2eu}{\tau^2} e^{j\omega u} du = e\Phi(j\omega\tau)$$

con:

$$\Phi(j\omega\tau) = \frac{2}{(j\omega\tau)^2} [1 - e^{-j\omega\tau} - j\omega\tau e^{-j\omega\tau}]$$

Ne segue che, essendo:

$$\bar{I} = \bar{n}e$$

dove \bar{n} è il numero medio di elettroni emessi per unità di tempo:

$$S_I(f) = 2\bar{n} |\Psi_i(f)|^2 = \frac{2\bar{I}}{e} |\Psi_i(f)|^2 = \frac{2\bar{I}e^2}{e} |\Phi|^2$$

Poiché τ è dell'ordine di $10^{-9} s$ e $|\Phi|^2$ è dell'ordine di 1 per $\omega\tau < \pi$, ne segue che:

$$S_I(f) = 2e\bar{I}$$

per frequenze fino a qualche centinaio di MHz (teorema di Schottky)

Lo shot noise si riscontra non soltanto nelle valvole termioniche, ma anche nei semiconduttori, quando la corrente è dovuta a portatori minoritari ed a condizione che l'extrapolamento e la ricombinazione siano trascurabili. Questo è ad esempio il caso di una giunzione pn con polarizzazione inversa. Ciò continua ad esser vero in polarizzazione diretta, ma a basse tensioni dirette comincia ad essere apprezzabile l'effetto delle ricombinazioni nella zona di svuotamento.

Lo shot-noise è ridotto quando un qualche meccanismo intervenga a ridurre le fluttuazioni nel numero dei portatori di carica. Ad esempio, in un tubo termoionico in cui si formi una zona di carica spaziale tra catodo ed anodo, questa agisce da *buffer*, smussando le fluttuazioni nel flusso delle cariche verso l'anodo e quindi riducendo lo shot-noise.

18.5 Rumore 1/f

Questo è un tipo di rumore che è presente in un'ampia varietà di sistemi (elettronici, biologici, musicali, geologici etc.) ed in particolare nei dispositivi a semiconduttore, dove è stato ampiamente studiato, ma solo parzialmente compreso. Nel caso dei transistor tale rumore è legato ad imperfezioni delle superfici delle giunzioni. Esso è noto sotto vari nomi: "rumore 1/f", "flicker-noise", "contact-noise", "excess-noise". La denominazione "1/f" è legata al fatto che la sua densità spettrale varia come $1/f^\alpha$ con α nel range 0.8-1.5.

Tale dipendenza è stata osservata fino a frequenze bassissime ($10^{-6} Hz$). Si noti che l'andamento 1/f non può continuare fino a frequenza zero, poiché in tal caso la potenza totale di rumore risulterebbe divergente.

A frequenze molto alte il suo effetto è mascherato dalla presenza di altre sorgenti di rumore, quali quello termico. Scriveremo in generale, per questo tipo di rumore:

$$\overline{v^2} = A_f \frac{df}{f^\alpha}$$

con A_f una costante, dipendente dal particolare dispositivo. Una immediata conseguenza dell'andamento come 1/f di questo tipo di rumore, è quella che la potenza di rumore in ciascuna decade di frequenza è la stessa. In altra parola, la potenza di rumore nella banda compresa tra 10 e 100 Hz è uguale a quella nella banda tra 0.01 e 0.1 Hz.

18.6 Circuiti equivalenti per il rumore

Agli effetti del rumore Johnson una resistenza reale alla temperatura T può essere sostituita da una ideale (cioè priva di rumore) in serie con un generatore di tensione

di rumore la cui f.e.m. sia quella del rumore termico:

$$\overline{v^2} = 4KTR\Delta f$$

dove Δf è l'intervallo di frequenza su cui si effettua la misura.

Ne segue per la tensione di rumore:

$$v_n = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{4KTR\Delta f}$$

Come mostrato in figura 18.8.

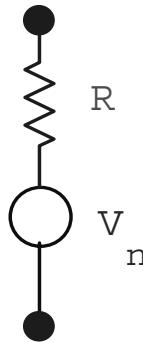


Figura 18.8: Generatore equivalente di rumore. Agli effetti del rumore termico una resistenza reale alla temperatura T può essere sostituita con una resistenza ideale R seguita da un generatore di tensione la cui f.e.m sia quella del rumore termico.

Si può anche, facendo uso del teorema di Norton, assimilare tale resistenza ad una ideale in parallelo con un generatore di corrente i_n , con:

$$i_n = \frac{v_n}{R} = \sqrt{\frac{4KT\Delta f}{R}}$$

Un sistema di due resistenze in serie, R_1 ed R_2 potrà essere assimilata ad una resistenza di valore $R_1 + R_2$ in serie con un generatore di tensione di rumore pari a $v_n = v_{n1} + v_{n2}$. Il quadrato del valore efficace sarà:

$$\overline{v_n^2} = \overline{(v_{n1} + v_{n2})^2} = \overline{v_{n1}^2} + \overline{v_{n2}^2} = 2 \cdot \overline{v_{n1} \cdot v_{n2}}$$

Poichè v_{n1} e v_{n2} sono indipendenti, avremo:

$$\overline{v_{n1} \cdot v_{n2}} = \overline{v_{n1}} \cdot \overline{v_{n2}}$$

che è nullo, poichè sono nulli i singoli valori medi. Quindi:

$$\overline{v_n^2} = \overline{v_{n1}^2} + \overline{v_{n2}^2} = 4KT\Delta f \cdot (R_1 + R_2)$$

Nel caso di due resistenze in parallelo si può analogamente verificare che la corrente quadratica media di rumore è data da:

$$\overline{i_n^2} = 4KT\Delta f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Il rumore presente ai capi di un diodo può, in modo analogo, esser descritto introducendo un generatore di corrente di rumore (shot) in parallelo al diodo (supposto privo di rumore) tale che la corrente quadratica media di rumore sia:

$$\overline{i_n^2} = 2eI\Delta f$$

dove I è la corrente nel diodo, e la carica dell'elettrone e Δf l'intervallo di frequenza.

Più in generale, dato un generico dispositivo a due terminali alla temperatura T , il rumore (qualunque la sua origine) può esser descritto introducendo una f.e.m. ai suoi capi, in serie con la sua impedenza $Z=R+jX$, di valore:

$$\overline{v_n^2} = 4KTR_n\Delta f \quad (18.26)$$

Ad R_n si da il nome di “resistenza equivalente di rumore” (equivalent noise resistance) del dispositivo. Se abbiamo a che fare con un circuito passivo in cui le sorgenti di rumore siano esclusivamente termiche a temperatura T , allora:

$$R_n = R$$

Se sono presenti altre sorgenti di rumore, R_n può differire da R .

Alternativamente possiamo descrivere il rumore ai capi di un dispositivo a due terminali, di ammettenza $Y = 1/Z = g + jb$, introducendo un generatore di corrente di rumore in parallelo ad Y :

$$\overline{i_n^2} = 4KTg_n\Delta f \quad (18.27)$$

dove g_n è la *conduttanza equivalente di rumore* (equivalent noise conductance) del dispositivo.

Se il rumore ha origine esclusivamente termica, allora $g_n = g$, mentre se altre sorgenti di rumore sono presenti, g_n può differire da g .

Un concetto che appare comunemente nella letteratura è quello di “temperatura di rumore equivalente” (equivalent noise temperature). Questa esprime il rumore come se esso fosse puramente termico e fosse generato da una resistenza pari a quella del dispositivo, ma ad una temperatura $T_n \neq T$. Il rumore risulta espresso in termini di tale temperatura come:

$$\overline{v_n^2} = 4KT_nR\Delta f \quad (18.28)$$

Si può alternativamente esprimere il rumore come una corrente in parallelo al dispositivo, di valore pari alla corrente di rumore generata da una resistenza pari alla resistenza del dispositivo, alla temperatura T_n :

$$\overline{i_n^2} = 4KT_ng\Delta f \quad (18.29)$$

confrontando la (18.26) con la (18.28) e la (18.27) con la (18.29) si ottiene nei due casi, rispettivamente:

$$T_n = \frac{R_n}{R}T$$

$$T_n = \frac{g_n}{g}T$$

Sul concetto di temperatura di rumore e di resistenza equivalente di rumore torneremo quando discuteremo del rumore negli amplificatori.

18.7 Rumore in un quadripolo

Il rumore prodotto in un quadripolo è convenzionalmente descritto tramite un generatore di tensione di rumore v_n in serie alla maglia d'ingresso e da un generatore di corrente di rumore i_n in parallelo alla medesima maglia.

Il primo renderà conto del rumore presente in uscita quando l'ingresso è in cortocircuito, il secondo del rumore presente ad ingresso aperto. La configurazione è illustrata in figura 18.9.

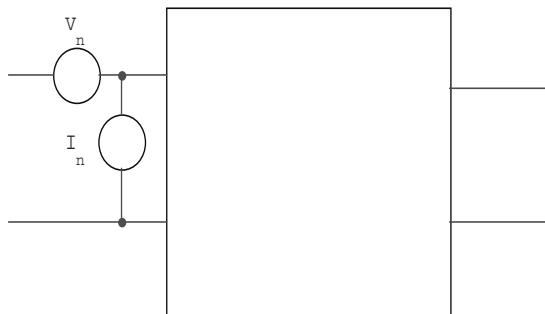


Figura 18.9: Sorgenti di rumore in un quadripolo. Il rumore prodotto in un quadripolo è convenzionalmente descritto tramite un generatore di tensione di rumore v_n in serie alla maglia d'ingresso e da un generatore di corrente di rumore i_n in parallelo alla medesima maglia.

Poichè il rumore nell'amplificatore è determinato prevalentemente da processi di un determinato tipo, le due sorgenti i_n e v_n non sono del tutto indipendenti. Per tener conto di questo fatto si introduce un coefficiente di correlazione γ . Un valore zero per questo parametro vuol dire che le due sorgenti sono totalmente non correlate; $\gamma = 1$ vuol dire che esse sono massimamente correlate.

Ammettiamo ora che l'ingresso del quadripolo sia chiuso su di una resistenza R come mostrato in figura 18.10.

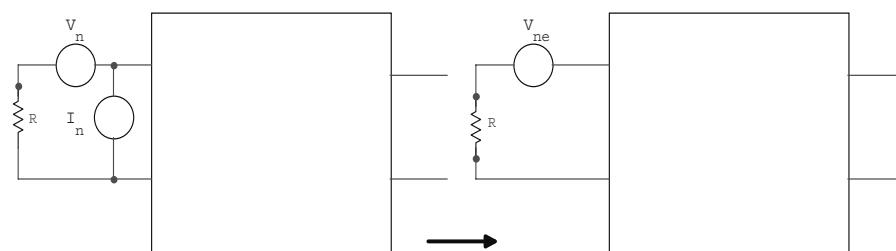


Figura 18.10: Quadripolo con l'ingresso chiuso su una resistenza R . Se tale resistenza non genera rumore, la tensione di rumore complessiva all'ingresso del quadripolo sarà: $v_{ne} = v_n + R i_n$. Tale tensione va sotto il nome di *tensione di rumore in eccesso*.

Se tale resistenza non genera rumore, la tensione di rumore complessiva all'ingresso del quadripolo sarà: $v_{ne} = v_n + R i_n$. Tale tensione va sotto il nome di

tensione di rumore in eccesso poichè rappresenta la tensione di rumore che occorre sommare a quella v_{ns} della sorgente (di resistenza R) per ottenere il rumore totale:

$$v_{nt} = v_{ns} + v_{ne} = v_{ns} + v_n + i_n R$$

Il valore quadratico medio di v_{ne} vale:

$$\overline{v_{ne}^2} = \overline{v_n^2} + R^2 \overline{i_n^2} + 2R \overline{v_n i_n}$$

L'ultimo termine in questa espressione dipende da γ e si annulla per $\gamma = 0$. Per $\gamma \neq 0$ esso vale:

$$2R\gamma\sqrt{\overline{v_n^2}}\sqrt{\overline{i_n^2}} = 2R\gamma I_n V_n$$

Con ovvio significato dei nuovi simboli I_n e V_n . Quindi:

$$\overline{v_{ne}^2} = V_n^2 + R^2 I_n^2 + 2R\gamma V_n I_n$$

Vediamo che se $R=0$, $\overline{v_{ne}^2} = \overline{v_n^2}$. Se R è grande dominerà invece l'effetto di I_n ed avremo:

$$\overline{v_{ne}^2} = R^2 I_n^2$$

In definitiva avremo per il rumore totale:

$$\overline{v_{nt}^2} = \overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2} + R^2 \overline{i_n^2} + 2R \overline{v_n i_n}$$

18.8 Dipendenza del rapporto segnale/rumore in un quadripolo dalla resistenza della sorgente

Consideriamo dapprima il caso di una sorgente costituita da un generatore di tensione v_s in serie con la propria resistenza R_s . Ammettiamo che un generatore in serie v_{ns} renda conto del rumore introdotto dalla sorgente. Lo schema è quello di figura 18.11.

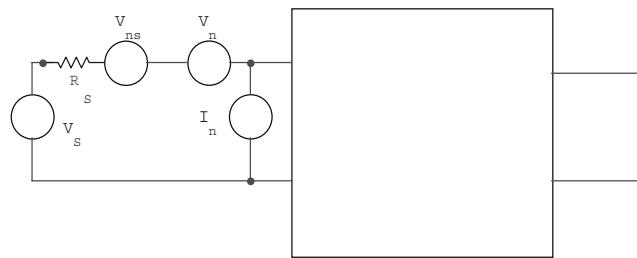


Figura 18.11: Quadripolo alimentato con un generatore di tensione reale, schematizzato in figura come un generatore di tensione v_s in serie con la propria resistenza R_s e con in serie anche il generatore v_{ns} che schematizza il rumore introdotto dal generatore reale stesso.

Il rapporto segnale-rumore (riferito all'ingresso) sarà:

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{v_s^2}}{\overline{v_{nt}^2}} = \frac{\overline{v_s^2}}{\overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2} + \overline{i_n^2} R_s^2}$$

avendo trascurato i termini di correlazione.

Vediamo che il rapporto $\frac{S}{N}$ diminuisce all'aumentare di R_s , poiché aumenta il termine $\overline{i_n^2} R_s^2$.

Consideriamo ora il caso di un generatore di corrente i_s in parallelo con R_s . Anche in questo caso continueremo a parametrizzare il rumore introdotto dalla sorgente mediante un generatore di tensione di rumore v_{ns} in serie, come mostrato in figura 18.12.

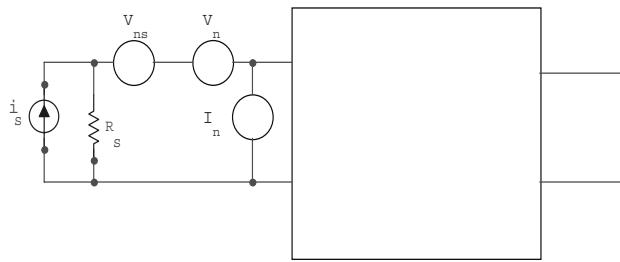


Figura 18.12: Quadripolo alimentato con un generatore di corrente reale. In questo caso il generatore può essere schematizzato come un generatore di corrente i_s in parallelo con R_s . Il rumore introdotto dalla sorgente può essere schematizzato mediante un generatore di tensione di rumore v_{ns} in serie.

In questo caso avremo:

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{i_s^2} R_s^2}{v_{nt}^2} = \frac{\overline{i_s^2}}{\frac{\overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2}}{R_s^2} + \overline{i_n^2}}$$

Vediamo che ora, all'aumentare di R_s il rapporto $\frac{S}{N}$ aumenta. Al limite di $R_s \rightarrow \infty$ esso tende a:

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{i_s^2}}{\overline{i_n^2}}$$

che dipende solo dalla sorgente di corrente di rumore.

18.9 Cifra di rumore

Se indichiamo con G_P il guadagno in potenza di un amplificatore, con S_0 la potenza del segnale presente in uscita, in una stretta banda di frequenza df, con S_i quella presente in ingresso nella medesima banda di frequenza, avremo:

$$S_0 = G_P S_i \quad (18.30)$$

Se ora applichiamo in ingresso, al posto di S_i , un segnale di rumore di potenza N_i (nella medesima banda di frequenza), il segnale di rumore N_o all'uscita sarà ottenibile da una relazione analoga:

$$N_o = G'_P N_i$$

dove però $G'_P > G_P$, poiché l'amplificatore introduce di suo un ulteriore contributo al rumore in uscita.

Si scrive in generale:

$$N_o = F G_P N_i \quad (18.31)$$

dove F è un fattore sicuramente maggiore di 1. Ad F si dà il nome di *figura di rumore puntiforme* alla frequenza f (spot-noise figure). Tenendo conto delle relazioni scritte possiamo definire F come:

$$F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} \quad (18.32)$$

F è in generale funzione, oltre che della frequenza, della resistenza d'uscita del generatore.

Dalla (18.31) segue anche che:

$$F = \frac{N_o}{G_P N_i}$$

Sia ora:

$$N_o = G_P(N_i + N_d)$$

dove N_i è la potenza di rumore in ingresso nell'intervallo df ed N_d è la potenza di rumore introdotta dall'amplificatore, nella medesima banda di frequenza df, *riportata in ingresso*.

Si ha quindi:

$$F = \frac{G_P(N_i + N_d)}{G_P N_i} = 1 + \frac{N_d}{N_i}$$

e quindi:

$$N_d = N_i(F - 1)$$

La grandezza $F_e = F - 1$ è detta *cifra di rumore in eccesso*. Dall'ultima relazione scritta si vede che il rumore N_d introdotto dall'amplificatore è uguale a quello presente in ingresso, moltiplicato per la cifra di rumore in eccesso. La cifra di rumore (NF) espressa in dB è poi:

$$NF = 10 \log F = 10 \log \frac{N_o}{G_P N_i}$$

Dalla (18.32) si ha poi:

$$NF = 10 \log \frac{N_o/S_o}{N_i/S_i} \quad (18.33)$$

Come si vede, la cifra di rumore esprime l'aumento del rapporto rumore/segnales ($\frac{N}{S}$) passando dall'ingresso all'uscita del quadripolo, cioè fornisce una misura del contributo che al rumore ha aggiunto il quadripolo.

18.10 Rumore nel caso di una catena di più amplificatori in cascata

Se più amplificatori sono collegati in serie, allo scopo di ottenere un maggior guadagno, si può facilmente vedere che il contributo al rumore portato dai diversi elementi della catena può essere molto diverso. Infatti, il rumore introdotto dal primo amplificatore della catena sarà amplificato dai successivi elementi; quello introdotto dall'ultimo elemento della catena avrà un'importanza decisamente inferiore. È quindi critico scegliere per i primi amplificatori della catena degli elementi a basso rumore.

Calcoliamo la cifra di rumore relativa ad una catena di più amplificatori. Ammetteremo che l'impedenza d'uscita di ciascun amplificatore sia uguale all'impedenza d'ingresso del successivo; ciò assicura il massimo trasferimento di potenza tra elementi consecutivi. Abbiamo definito la cifra di rumore F nel caso di un amplificatore come il rapporto tra la potenza di rumore presente in uscita (per unità di intervallo di frequenza, come sarà sempre sottinteso nel seguito), divisa per il guadagno G_P dell'amplificatore, e quella (N_i) presente in ingresso:

$$F = \left(\frac{N_o}{G_P} \right) / N_i \quad (18.34)$$

Il numeratore di questa espressione (il rumore totale presente in uscita, "traslato" all'ingresso) è la somma del rumore N_i presente in ingresso e di quello introdotto dall'amplificatore, che chiameremo N_o^e/G_P (rumore in eccesso, traslato all'ingresso dell'amplificatore):

$$\frac{N_o}{G_P} = N_i + \frac{N_o^e}{G_P}$$

Possiamo quindi riscrivere la (18.34) nella forma:

$$F = 1 + \frac{N_o^e}{G_P} / N_i = 1 + F_e \quad (18.35)$$

dove compare la *cifra di rumore in eccesso* F_e già introdotta:

$$F_e = \frac{N_o^e}{G_P} / N_i$$

Se immaginiamo che N_i sia unitario (1 W/Hz) le equazioni (18.34) e (18.35) si scrivono rispettivamente:

$$F = \frac{N_o}{G_P} = 1 + F_e$$

$$F_e = \frac{N_o^e}{G_P}$$

La prima di queste ci dice che la cifra di rumore è pari alla potenza di rumore totale presente in uscita, divisa per il guadagno dell'amplificatore, per unità di rumore in ingresso. La seconda ci dice che la cifra di rumore in eccesso è il rumore introdotto dall'amplificatore diviso per il guadagno del medesimo.

Esaminiamo ora il caso di due amplificatori collegati in serie. Siano F_1 ed F_2 le rispettive cifre di rumore; siano analogamente F_{e1} ed F_{e2} le corrispondenti cifre di

rumore in eccesso. Il rumore all'ingresso del primo amplificatore, dovuto a questo soltanto, è F_{e1} . Il rumore totale all'ingresso del medesimo è: $F_{e1} + 1 = F_1$. Il rumore introdotto dal secondo stadio *riportato all'ingresso di questo* è $F_{e2} = F_2 - 1$. Questo stesso rumore, traslato all'ingresso del primo stadio è:

$$\frac{F_{e2}}{G_{P1}} = \frac{F_2 - 1}{G_{P1}}$$

Abbiamo quindi per il rumore totale (sempre riportato all'ingresso del primo stadio):

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{P1}}$$

Questa è quindi la cifra di rumore relativa al caso considerato.

È facile estendere le considerazioni svolte al caso di un numero generico di amplificatori. Ad esempio, nel caso di una catena di tre amplificatori, avremo:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{P1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{P1}G_{P2}}$$

Questa è nota come *formula di Friiss*.

18.11 Espressione analitica della cifra di rumore

Possiamo far uso dei generatori v_n ed i_n che descrivono il rumore introdotto dal quadripolo, per calcolare la cifra di rumore F.

Calcoliamo N_i , potenza di rumore in ingresso, ammettendo che siano:

- R_s resistenza d'uscita della sorgente di rumore;
- v_{ns} tensione efficace di rumore della sorgente;
- R_i resistenza d'ingresso del quadripolo.

Con riferimento alla figura 18.13 avremo:

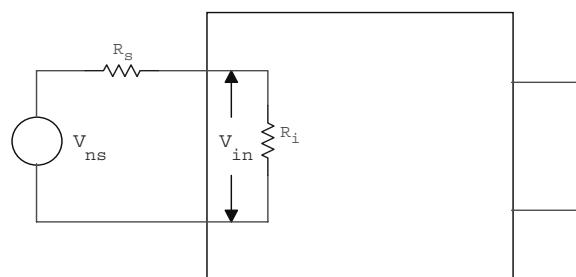


Figura 18.13: Circuito per il calcolo analitico della cifra di rumore F, dove R_s rappresenta la resistenza d'uscita della sorgente di rumore, v_{ns} la tensione efficace di rumore della sorgente e R_i resistenza d'ingresso del quadripolo.

$$v_{in} = v_{ns} \frac{R_i}{(R_s + R_i)}$$

per cui la potenza di rumore in ingresso N_i è:

$$N_i = \frac{\overline{v_{in}^2}}{R_i} = \frac{\overline{v_{ns}^2}}{R_i} \frac{R_i^2}{(R_s + R_i)^2} = \overline{v_{ns}^2} \frac{R_i}{(R_s + R_i)^2}$$

Calcoliamo ora la potenza di rumore complessiva facendo uso dell'espressione già ricavata per $\overline{v_{nt}^2}$ (tensione quadratica media di rumore all'ingresso):

$$\overline{v_{nt}^2} = \overline{v_{ns}^2} + \overline{v_n^2} + R_s^2 \overline{i_n^2} + 2R_s \overline{v_n i_n}$$

Troviamo in tal modo:

$$N_o = \frac{\overline{v_{nt}^2}}{(R_s + R_i)^2} G_P \frac{R_i}{\overline{v_{ns}^2}}$$

Sostituendo in questa espressione quella di $\overline{v_{nt}^2}$ e dividendo poi N_o per $G_P N_i$, troviamo:

$$F = \frac{N_o}{G_P N_i} = \frac{\overline{v_{nt}^2}}{\overline{v_{ns}^2}} = 1 + \frac{\overline{v_n^2} + R_s^2 \overline{i_n^2} + 2R_s \overline{v_n i_n}}{\overline{v_{ns}^2}} \quad (18.36)$$

Il secondo termine nell'ultima espressione scritta è il rapporto tra la potenza di rumore dovuta al solo quadripolo e quella in ingresso. Esso è quindi la *cifra di rumore in eccesso* F_e :

$$F_e = F - 1$$

Ammettendo che la tensione di rumore all'ingresso sia quella dovuta alla resistenza R_s (data da $\sqrt{4KTR_s\Delta f}$, avremo:

$$F = 1 + \frac{1}{4KTR_s\Delta f} \left(\frac{V_n^2}{R_s} + R_s I_n^2 + 2\gamma V_n I_n \right) \quad (18.37)$$

Il valore fornito da tale equazione per una frequenza determinata è la *cifra di rumore puntiforme*. Esso dipende dalla frequenza se non si tratta di rumore bianco.

La cifra di rumore espressa in decibel è poi:

$$NF = 10 \log F$$

L'andamento (qualitativo) del NF in funzione di R_s descritto dalla (18.37) è mostrato in figura 18.14.

Per bassi valori di R_s domina il termine V_n^2/R_s e quindi la sorgente di tensione di rumore. Per grandi valori di R_s domina invece l'effetto del generatore di corrente. Si può facilmente vedere, derivando la (18.37) rispetto ad R_s che il NF è minimo quando ciascun generatore contribuisce in ugual misura al rumore complessivo.

Ciò avviene per:

$$R_s = \frac{V_n}{I_n}$$

che fornisce il valore ottimale della resistenza R_s . Il corrispondente valore della cifra di rumore F è:

$$F_{min} = 1 + (1 + \gamma) \frac{V_n I_n}{2KTR_s\Delta f}$$

L'equazione: $NF = 10 \log F$ ci dice che per un valore di 5 del parametro NF il contributo del rumore all'uscita del quadripolo è 3.2 volte quello della sorgente. All'altro estremo, un NF di 0.4 ci dice che il contributo della tensione di rumore all'uscita è 1.05 volte quello della sorgente, che ha quindi aggiunto un modesto 5% (in tensione efficace).

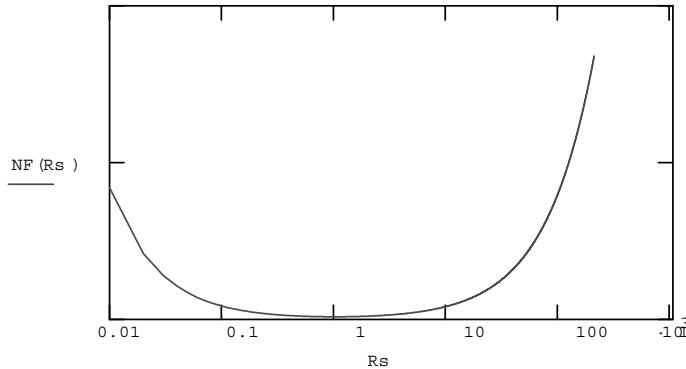


Figura 18.14: Andamento qualitativo della figura di rumore in funzione di R_s relativa al circuito di figura 18.13.

18.12 Temperatura di rumore

Sappiamo che una resistenza ad una temperatura assoluta T_s è sorgente di rumore Johnson (termico) con densità spettrale data da:

$$S_v(f) = 4KT_sR$$

cioè:

$$\overline{v^2} = 4KT_sR\Delta f$$

nell'intervallo di frequenza Δf .

Se una resistenza R è collegata all'ingresso di un amplificatore avente cifra di rumore in eccesso F_e e quindi cifra di rumore $F = F_e + 1$, il rumore effettivo all'ingresso dell'amplificatore (privo di rumore, essendosi traslato il rumore all'ingresso) sarà:

$$\overline{w^2} = F\overline{v^2}$$

Spesso conviene, per motivi pratici, ragionare come se l'amplificatore fosse del tutto esente da rumore e l'intero rumore fosse attribuibile alla medesima resistenza R , ora però ad una temperatura T_n , tale che:

$$4KT_nR\Delta f = \overline{w^2}$$

Dalle equazioni scritte segue:

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= (F_e + 1)\overline{v^2} = F_e\overline{v^2} + \overline{v^2} = \\ &= 4F_eKT_sR\Delta f + 4KT_sR\Delta f = 4KR(F_eT_s)\Delta f + 4KRT_s\Delta f = \\ &= 4KRT_n\Delta f + 4KRT_s\Delta f \end{aligned}$$

Alla quantità $T_n = F_eT_s$ si da il nome di *temperatura di rumore* dell'amplificatore. L'equazione:

$$T_n = F_eT_s = (F - 1)T_s$$

ci da poi:

$$F = 1 + \frac{T_n}{T_s}$$

Da questa, nota la temperatura della sorgente e la temperatura di rumore, si può facilmente ricavare la cifra di rumore.

18.13 Esempio: Transistor bipolare

Ricordiamo il modello a parametri h in cui si trascuri h_{re} . Questo è mostrato in figura 18.15.

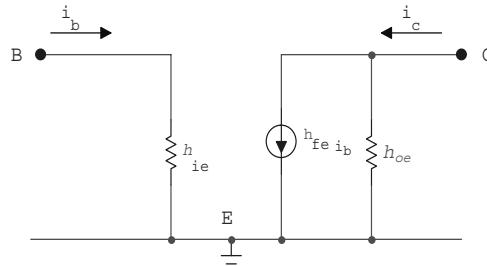


Figura 18.15: Modello a parametri h del transistor bipolare in cui si trascura h_{re} .

Esso può essere trasformato nello schema di figura 18.16.

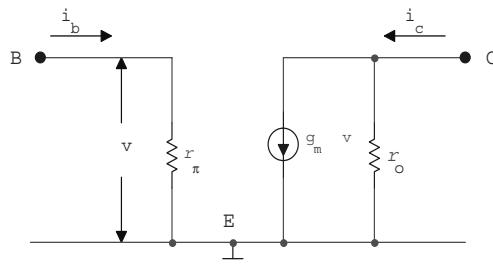


Figura 18.16: Modello equivalente di quello a parametri h in cui si utilizza un generatore a transconduttanza $g_m v$.

Basta infatti scrivere:

$$i_c = h_{fe} i_b = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} (h_{ie} i_b) = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} v \equiv g_m v$$

con:

$$g_m \equiv \frac{h_{fe}}{h_{ie}}$$

Il generatore di corrente $h_{fe} i_b$ viene così sostituito da un generatore a transconduttanza $g_m v$.

Si ha:

$$h_{ie} \equiv r_\pi \equiv \frac{h_{fe}}{g_m}$$

Introduciamo in tale circuito la sorgente di corrente di rumore i_{nb} nella maglia d'ingresso e quella i_{nc} nella maglia d'uscita, come mostrato in figura 18.17.

Queste sorgenti di rumore hanno origine nelle fluttuazioni nel numero di portatori di carica attraverso la giunzione base-emettitore (i_{nb}) e collettore-emettitore (i_{nc}).

Esse sono attribuibili in larga misura al rumore shot, per cui:

$$\overline{i_{nb}^2} = 2eI_b\Delta f$$

$$\overline{i_{nc}^2} = 2eI_c\Delta f$$

dove I_b ed I_c sono rispettivamente le correnti (quiescenti) di base e di collettore.

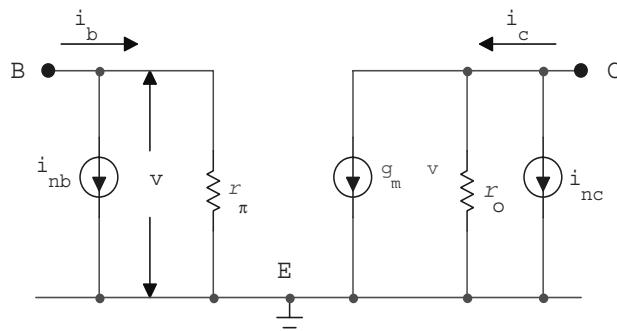


Figura 18.17: Modello con introdotte le correnti di rumore: la sorgente di corrente di rumore i_{nb} nella maglia d'ingresso e quella i_{nc} nella maglia d'uscita.

Determiniamo ora i parametri del quadripolo equivalente, cioè v_n e i_n . Cominciamo con il determinare il generatore di tensione v_n . Ricordiamo che questo è l'unico ad avere un effetto sulla tensione di rumore in uscita, quando l'ingresso sia in cortocircuito.

Se ammettiamo quindi di aver cortocircuitato l'ingresso e supponendo che l'uscita sia chiusa su di un carico R_p , avremo per la tensione di uscita:

$$v'_o = (g_m v + i_{nc}) R_{eq}$$

con:

$$R_{eq} = R_p // r_o$$

dove $v = 0$ (i morsetti d'ingresso nel circuito di figura 18.17 sono in cortocircuito).

Quindi:

$$v'_o = i_{nc} R_{eq}$$

Nel corrispondente quadripolo con terminali d'ingresso in cortocircuito avremmo:

$$v'_o = A_v v_n$$

Quindi:

$$v_n = \frac{R_{eq}}{A_v} i_{nc}$$

Rimane da determinare A_v nel nostro amplificatore a parametri h. Abbiamo:

$$v_o = g_m R_{eq} v$$

da cui:

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v} = g_m R_{eq}$$

Ne segue:

$$v_n = \frac{R_{eq} i_{nc}}{g_m R_{eq}} = \frac{i_{nc}}{g_m}$$

Determiniamo ora i_n . A tale scopo supponiamo che i terminali d'ingresso siano aperti. In tal modo il generatore di tensione di rumore nel quadripolo non potrà dare alcun contributo. Avremo:

$$v''_o = (g_m v + i_{nc}) R_{eq}$$

con:

$$v = i_{nb} r_\pi$$

Da cui:

$$v''_o = (g_m i_{nb} r_\pi + i_{nc}) R_{eq} = (h_{fe} i_{nb} + i_{nc}) R_{eq}$$

Nel caso del quadripolo con gli ingressi aperti, avremmo:

$$v''_o = A_i i_n R_{eq}$$

Dove A_i è l'amplificazione in corrente che nel nostro caso vale h_{fe} . Quindi:

$$v''_o = h_{fe} i_n R_{eq} = (h_{fe} i_{nb} + i_{nc}) R_{eq}$$

da cui:

$$i_n = i_{nb} + \frac{i_{nc}}{h_{fe}}$$

Sostituendo ora ai due generatori di rumore (i_n, v_n) presenti all'ingresso del quadripolo un unico generatore in serie con la resistenza R_s del generatore (facendo uso del teorema di Thevenin):

$$v_{ne} = v_n + R_s i_n$$

troviamo:

$$v_{ne} = \frac{i_{nc}}{g_m} + R_s \left(i_{nb} + \frac{i_{nc}}{h_{fe}} \right) = \frac{i_{nc}}{g_m} + R_s \left(i_{nb} + \frac{i_{nc}}{g_m r_\pi} \right) = \frac{i_{nc}}{g_m} \left(1 + \frac{R_s}{r_\pi} \right) + R_s i_{nb}$$

da cui:

$$\overline{v_{ne}^2} = \overline{i_{nc}^2} \frac{1}{g_m^2} \left(1 + \frac{R_s}{r_\pi} \right)^2 + R_s^2 \overline{i_{nb}^2}$$

dove $\overline{i_{nb}^2}$ ed $\overline{i_{nc}^2}$ sono date dal rumore shot:

$$\overline{i_n^2} = 2eI\Delta f$$

dove e è la carica dell'elettrone, I la corrente nel circuito (di base o di collettore) e Δf la banda di frequenza. Quindi:

$$\overline{v_{ne}^2} = \left(1 + \frac{R_s}{r_\pi} \right)^2 \cdot \frac{1}{g_m^2} \cdot 2eI_C\Delta f + R_s^2 \cdot 2e \cdot I_b \cdot \Delta f$$

Poichè inoltre è $I_c = h_{FE} I_b$, segue:

$$\overline{v_{ne}^2} = [(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m^2} + \frac{R_s^2}{h_{FE}}] \cdot 2eI_c\Delta f$$

Utilizziamo ora le relazioni²:

$$I_c = g_m V_T = g_m \frac{KT}{e}$$

ed otteniamo:

$$\overline{v_{ne}^2} = [(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m} + \frac{R_s^2}{h_{FE}} g_m] \cdot 2KT\Delta f \quad (18.38)$$

Determiniamo ora il valore ottimale di R_s , cioè quello che rende minimo il rumore. Questo, come già visto è dato da:

$$(R_s^{opt})^2 = \frac{\overline{v_n^2}}{\overline{i_n^2}}$$

Sostituendo in questa i valori trovati per $\overline{v_n^2}$ ed $\overline{i_n^2}$, si trova:

$$(R_s^{opt})^2 = \frac{\frac{\overline{i_{nc}^2}}{g_m^2}}{\frac{\overline{i_{nb}^2}}{h_{fe}^2} + \frac{\overline{i_{nc}^2}}{h_{fe}^2}} = \frac{\frac{1}{g_m^2}}{\frac{\overline{i_{nb}^2}}{\overline{i_{nc}^2}} + \frac{1}{h_{fe}^2}} = \frac{\frac{1}{g_m^2}}{\frac{I_b}{I_c} + \frac{1}{h_{fe}^2}} = \frac{1}{g_m^2} \frac{1}{\frac{1}{h_{FE}} + \frac{1}{h_{fe}^2}} \approx \frac{h_{FE}}{g_m^2}$$

dove si è fatto uso delle relazioni:

$$\overline{i_{nb}^2} = 2eI_b\Delta f$$

$$\overline{i_{nc}^2} = 2eI_c\Delta f$$

Vediamo che il valore ottimale della resistenza R_s dipende da h_{FE} e da g_m .

Utilizziamo ora il risultato ottenuto (18.38) per la tensione quadratica media in eccesso ($\overline{v_{ne}^2}$) per il transistor bipolare, per ottenere la corrispondente temperatura di rumore:

$$T_n = F_e T_s$$

dove:

$$F_e = \frac{\overline{v_{ne}^2}}{\overline{v_{ns}^2}} = \frac{[(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m} + \frac{R_s^2}{h_{FE}} g_m]}{2R_s}$$

²La transconduttanza g_m è definita come

$$g_m = dI_c/dV_{BE}$$

dove, per il diodo base-emettitore in zona attiva è:

$$I_c = I_0[\exp(e V_{BE}/KT) - 1]$$

Ne segue:

$$g_m = dI_c/dV_{BE} = I_c e / KT$$

Otteniamo:

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{[(1 + \frac{R_s}{r_\pi})^2 \frac{1}{g_m} + \frac{R_s^2}{h_{FE}} g_m]}{2R_s}$$

cioè:

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{1}{2g_m R_s} + \frac{1}{h_{fe}} + \frac{R_s}{2} \left(\frac{g_m}{h_{FE}} + \frac{g_m}{h_{fe}^2} \right)$$

Trascurando l'ultimo termine in parentesi:

$$\frac{T_n}{T_s} = \frac{1}{2g_m R_s} + \frac{1}{h_{fe}} + \frac{R_s g_m}{2h_{FE}}$$

Per $R_s = R_s^{opt} = \frac{\sqrt{h_{FE}}}{g_m}$ si trova:

$$\frac{T_n}{T_s}^{min} = \frac{1}{\sqrt{h_{FE}}} + \frac{1}{h_{fe}} \approx \frac{1}{\sqrt{h_{FE}}}$$

Per $h_{FE} = 100$ questa fornisce:

$$T_n^{min} = \frac{T_s}{10}$$

che, alla temperatura ambiente ($27^\circ C = 300^\circ K$) vuol dire una temperatura di rumore di $30^\circ K$.

18.14 Il rumore nei componenti elettronici

18.14.1 Introduzione

Ci siamo già occupati del rumore termico nelle resistenze. Questa è la principale sorgente di rumore nei componenti passivi. Condensatori ed induttanze non sono sorgente di rumore se non per quel che concerne la loro componente resistiva. Un'altra componente di rumore è dovuta ai contatti tra componenti ed alle giunzioni interne dei diodi e/o transistor. Si tratta di un rumore $1/f$. La corrente di rumore per unità di radice quadrata di larghezza di banda è:

$$\frac{I_f}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{kI}{\sqrt{f}}$$

dove I è la corrente media, f la frequenza, Δf la larghezza di banda centrata sulla frequenza f e k una costante che dipende dai materiali e dalla geometria.

Ricordiamo che il rumore $1/f$ continua fino frequenze bassissime, dell'ordine di pochi cicli/giorno.

In aggiunta al rumore termico, a quello shot ed a quello $1/f$, una ulteriore varietà, chiamato popcorn noise è stato osservato nei diodi a semiconduttore e nei circuiti integrati. Se esso è amplificato ed inviato ad un altoparlante si sente un rumore simile al caratteristico scoppiettare del granturco, da cui il nome. Questo tipo di rumore è dovuto a difetti di fabbricazione e può essere eliminato con opportuni accorgimenti nel processo di produzione.

Anche questo tipo di rumore ha uno spettro del tipo $1/f^n$ con n tipicamente uguale a 2. L'ampiezza è compresa tra 2 e 10 volte quella del rumore termico nel medesimo dispositivo.

Ci occuperemo ora del rumore nei transistor a giunzione e successivamente di quello nei FET.

18.14.2 Il rumore nel transistor bipolare

La figura di rumore per un tipico transistor bipolare è mostrata in figura 18.18.

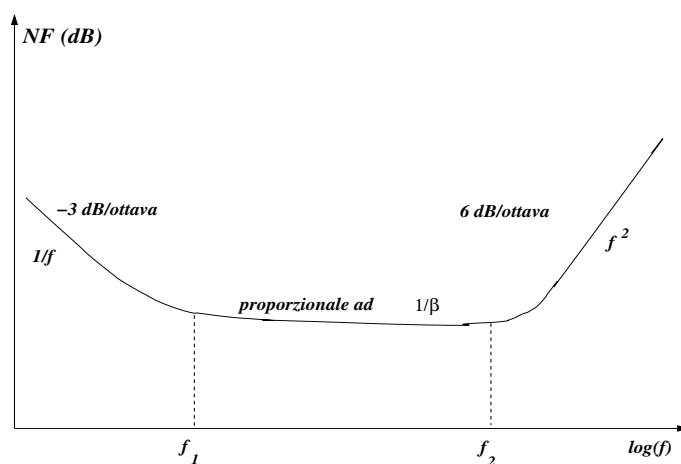


Figura 18.18: Figura di rumore per un tipico transistor bipolare. La zona a basse frequenze è dominata dal rumore $1/f^n$, quella centrale dal rumore termico della resistenza di base e dal rumore shot delle giunzioni, mentre il rumore alle alte frequenze è legato al fatto che il guadagno del transistor diminuisce con la frequenza mentre il rumore della giunzione rimane costante.

Si ha una regione di basse frequenze, in cui il rumore dominante è quello $1/f$. Tale regione si estende fino a frequenze f_1 che variano, a seconda del tipo di transistor, tra 1 e 50 KHz. Si ha poi una regione di rumore bianco, costituito da rumore termico nella resistenza della base e rumore shot nelle giunzioni, che si estende fino a frequenze di circa 1 MHz. Si ha infine una regione di frequenze più elevate (superiori ad un certo valore f_2) in cui il rumore aumenta come f^2 . Questo aumento del NF è legato alla diminuzione del guadagno del transistor alle alte frequenze ed al fatto che il rumore prodotto alla giunzione di collettore rimane costante.

Alcuni speciali transistor, prodotti per essere adoperati ad alte frequenze, hanno un valore di f_2 molto più elevato.

Sono stati sviluppati modelli che, partendo dal circuito a parametri h o da altri analoghi, ed aggiungendo sorgenti di rumore nei rami del circuito, consentono di calcolare con ragionevole accuratezza il rumore nel transistor bipolare nel campo di frequenze di interesse [20]. Le caratteristiche di rumore dei transistor sono fornite generalmente dalle case costruttrici.

Ricordiamo che il noise-factor F è definito come:

$$F =$$

$$= \frac{Potenza\ di\ rumore\ in\ uscita}{Guadagno\ in\ potenza \times Potenza\ di\ rumore\ dovuto\ alla\ resistenza\ della\ sorgente}$$

Se indichiamo con R_s la resistenza della sorgente, con i_n ed e_n i generatori di rumore nel quadripolo equivalente già incontrato e con Δf la banda passante, avremo:

$$F = \frac{\bar{i_t^2}}{\bar{i_{R_s}^2}}$$

dove i_t è la corrente totale di rumore ai terminali d'ingresso ed i_{R_s} quella dovuta alla sola resistenza R_s . Quest'ultima vale:

$$\bar{i_{R_s}^2} = \frac{4KT\Delta f}{R_s}$$

Quindi avremo, come già visto in precedenza:

$$\bar{i_t^2} = \frac{4KT\Delta f}{R_s} + \frac{\bar{e_n^2}}{R_s} + \bar{i_n^2}$$

da cui:

$$F = 1 + \frac{\bar{e_n^2}}{4KT\Delta f R_s} + \frac{\bar{i_n^2} R_s}{4KT\Delta f}$$

Ponendo ora:

$$R_{eq} = \frac{\bar{e_n^2}}{4KT\Delta f}$$

$$I_{eq} = \frac{\bar{i_n^2}}{2e\Delta f}$$

dove e è la carica dell'elettrone, l'ultima equazione scritta diventa:

$$F = 1 + \frac{R_{eq}}{R_s} + \frac{2eI_{eq}}{4KT} R_s$$

e, poichè $\frac{e}{2KT} = 20 V^{-1}$ alla temperatura di $290^\circ K$ avremo:

$$F = 1 + \frac{R_{eq}}{R_s} + 20I_{eq}R_s \quad (18.39)$$

Il valore ottimale di R_s , cioè quello per cui la cifra di rumore è minima, si ottiene derivando quest'espressione rispetto ad R_s . Si trova:

$$R_{s(opt)}^2 = \frac{R_{eq}}{20I_{eq}} = \frac{\bar{e_n^2}}{\bar{i_n^2}} \quad (18.40)$$

da cui:

$$F_{opt} = 1 + 2\sqrt{20R_{eq}I_{eq}}$$

Facciamo ora uso delle ultime due equazioni per esprimere R_{eq} ed I_{eq} in funzione di F_{opt} ed $R_{s(opt)}$. Si trova:

$$R_{eq} = \frac{1}{2}(F_{opt} - 1) R_{s(opt)}$$

$$I_{eq} = \frac{1}{2} \frac{(F_{opt} - 1)}{20R_{s(opt)}}$$

Sostituendo questa nella (18.39), si trova:

$$F = 1 + \frac{1}{2}(F_{opt} - 1) \left[\frac{R_{s(opt)}}{R_s} + \frac{R_s}{R_{s(opt)}} \right]$$

Si vede da questa espressione che, noti F_{opt} ed $R_{s(opt)}$, si può ottenere il NF per una generica resistenza R_s .

Definendo un fattore K:

$$K = \frac{1}{2} \left[\frac{R_{s(opt)}}{R_s} + \frac{R_s}{R_{s(opt)}} \right] \quad (18.41)$$

L'ultima equazione si può riscrivere come:

$$F = 1 + K [F_{opt} - 1]$$

Ammettiamo ora di sapere che $F_{opt} = 1.4$ e che $R_{s(opt)} = 1k\Omega$. Ci chiediamo quale sarà F in un circuito in cui la resistenza R_s valga $8k\Omega$. Vediamo che $\frac{R_s}{R_{s(opt)}} = 8$ e quindi, dalla (18.41) si vede che $K \cong 4$. Quindi F sarà:

$$F = 1 + 4(1.4 - 1) = 2.6$$

ed il noise factor NF varrà:

$$NF = 4.1dB$$

I valori di $\overline{e_n^2}$ ed $\overline{i_n^2}$ sono poi entrambi funzioni della corrente di collettore e crescono al crescere di questa. Tuttavia $\overline{i_n^2}$ cresce più rapidamente di $\overline{e_n^2}$. Di conseguenza $R_{s(opt)}$ diminuisce al crescere della corrente di collettore. Ne segue che, come si può vedere in figura 18.19, la curva che descrive l'andamento della cifra di rumore al variare di R_s cambia, spostandosi verso sinistra (cioè verso valori decrescenti di R_s) all'aumentare di I_c .

18.14.3 Il rumore nei FET

L'andamento complessivo della cifra di rumore in un FET in funzione della frequenza è qualitativamente simile a quello dei transistor bipolari. Si ha cioè una regione di rumore $1/f$ alle basse frequenze, seguita da una regione di rumore bianco a frequenze intermedie ed infine da una zona di alta frequenza in cui il rumore cresce al crescere di f.

Il rumore $1/f$ è molto più elevato nei MOSFET che nei FET.

Ci occuperemo ora del rumore in questi ultimi. Le principali sorgenti di rumore in essi sono:

- rumore termico nella resistenza di polarizzazione del gate R_g ;
- rumore shot associato alla corrente di gate I_g (diodo Gate-Source con polarizzazione inversa);
- rumore termico nel canale;
- rumore shot nel canale;

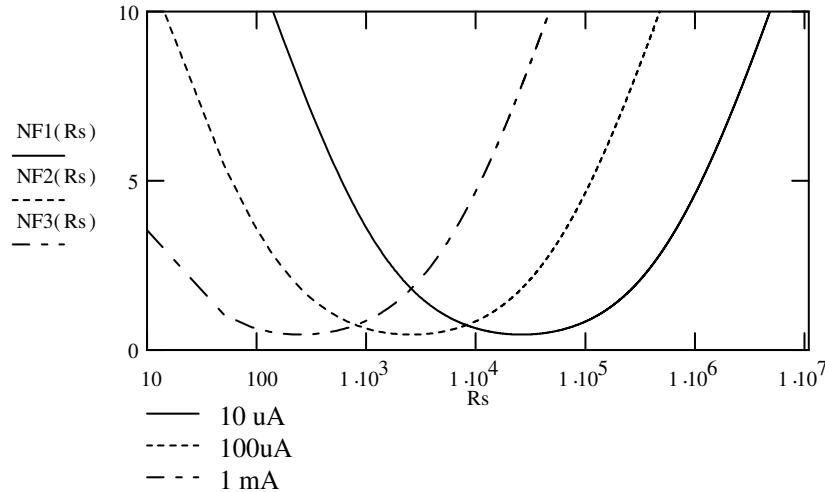


Figura 18.19: Andamento della cifra di rumore nel transistor bipolare al variare di R_s . Si noti che la curva si sposta verso sinistra all'aumentare di I_c .

- rumore $1/f$ nel canale.

Tra questi contributi, il penultimo è fortemente soppresso a causa della elevata densità di cariche nel canale. Discutiamo ora in dettaglio gli altri contributi.

Rumore termico nella resistenza di gate

La corrente quadratica media di rumore nell'intervallo di frequenza df in R_g è:

$$\overline{i_R^2} = \frac{4KTdf}{R_g}$$

Se indichiamo con C_{in} la capacità d'ingresso del FET, la tensione quadratica media ai capi di questa sarà:

$$\overline{v_R^2} = \overline{i_{R_s}^2} Z_c^2 = \frac{4KTdf}{R_g} \frac{1}{\omega^2 C_{in}^2} = \frac{2KT}{\pi R_g C_{in}^2} \frac{d\omega}{\omega^2}$$

Vediamo che la tensione di rumore è tanto più piccola quanto più è grande R_g .

Rumore di tipo shot associato alla corrente di gate

Esso è dato da:

$$\overline{i^2} = 2eI_g df$$

con ovvio significato dei simboli. Tale corrente scorre in C_{in} se R_g è molto grande. La tensione quadratica media ai capi di C_{in} sarà:

$$\overline{v_g^2} = \frac{2eI_g df}{\omega^2 C_{in}^2} = \frac{eI_g d\omega}{\pi \omega^2 C_{in}^2}$$

Rumore termico nel canale

La corrente di rumore associata a questo è:

$$\overline{i_c^2} = \frac{4KTdf}{R_0}$$

dove R_0 è la resistenza del canale nella parte iniziale delle caratteristiche (cioè nella zona ohmica). La corrispondente tensione \bar{v}_c^2 al gate (l'ingresso, cui riferiamo tutte le sorgenti di rumore) è:

$$\bar{v}_c^2 = \frac{\bar{i}_c^2}{g_m^2}$$

dove g_m è la transconduttanza del FET.

Si trova quindi:

$$\bar{v}_c^2 = \frac{2KT}{\pi R_0 g_m^2} d\omega$$

Ponendo:

$$R_{eq} = \frac{1}{R_0 g_m^2}$$

questa si scrive:

$$\bar{v}_c^2 = 2KTR_{eq} \frac{d\omega}{\pi}$$

dove si può dimostrare che $g_m = \frac{1}{R_0}$, con che:

$$R_{eq} = \frac{1}{g_m}$$

Rumore 1/f nel canale

Questo è dato da:

$$\bar{v}_F^2 = A_f \frac{d\omega}{\omega}$$

Rumore complessivo

Questo sarà la somma dei contributi elencati sopra, cioè:

$$\bar{v}_t^2 = \frac{2KT}{\pi R_g C_{in}^2} \frac{d\omega}{\omega^2} + \frac{eI_g d\omega}{\pi \omega^2 C_{in}^2} + 2KTR_{eq} \frac{d\omega}{\pi} + A_f \frac{d\omega}{\omega} \quad (18.42)$$

Il rumore totale nell'amplificatore a FET può ora esser calcolato, moltiplicando ciascuno dei precedenti contributi per la funzione $f(\omega)$ che descrive la risposta in frequenza dell'amplificatore, integrando su ω da 0 ad ∞ e sommando infine tutti i contributi. La funzione $f(\omega)$ rappresenta il guadagno *in potenza* dell'amplificatore, legato al guadagno in tensione A_v da: $f(\omega) = |A_v|^2$.

18.15 Appendice A

Dimostriamo ora il teorema di Wiener-Khintchine. A tale scopo premettiamo alcuni semplici teoremi, che trovano ampia applicazione nello studio del rumore. Siano $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ due funzioni del tempo, ed indichiamo con $F_1(\omega)$ ed $F_2(\omega)$ le rispettive trasformate di Fourier. Si dimostra allora che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega \quad (18.43)$$

(teorema di Parseval).

Per dimostrarlo, sostituiamo a primo membro di questa equazione, ad $x_2^*(t)$ la sua antitrasformata, ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega x_1(t)X_2^*(\omega)e^{-j\omega t}$$

scambiamo ora l'ordine di integrazione sulle variabili t ed ω a secondo membro:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_2^*(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt x_1(t)e^{-j\omega t}$$

che è uguale a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$$

Questo è appunto il secondo membro della (18.43).

Applichiamo ora questo teorema alla funzione di correlazione $\Phi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v(t+\tau)dt$$

dove $v(t)$ è la tensione di rumore. Troviamo in tal modo:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (18.44)$$

che per $\tau = 0$ ci da:

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega)|^2 d\omega$$

che è noto come teorema di Plancherel o teorema dell'energia. Il termine a destra di questa equazione rappresenta l'energia totale sviluppata, sull'intero spettro di frequenze. Ne segue che $|V(\omega)|^2$ può essere interpretato come la densità di energia per unità di intervallo di frequenza. La potenza media è l'energia totale divisa per T , o meglio il limite di tale rapporto per $T \rightarrow \infty$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2|V(\omega)|^2}{T} d\omega$$

dove si è modificato il limite inferiore d'integrazione nel membro destro dell'equazione (da $-\infty$ a 0) e si è moltiplicato per 2, poiché si ammette che $|V(\omega)|^2$ sia una funzione pari di ω . Abbiamo così per la densità spettrale di potenza:

$$S_v(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|V(\omega)|^2}{T}$$

Notiamo la differenza tra l'ultima equazione scritta e la (18.10). Questa aveva un T a fattore moltiplicativo, mentre l'ultima equazione scritta ha T a denominatore. Ciò deriva dal fatto che nella (18.10) avevamo fatto uso della serie di Fourier, dove i coefficienti a_n hanno un T a denominatore, mentre nella trasformata di Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

il T a denominatore è assente.

Dalla (18.44), dividendo entrambi i membri per T, effettuando una media su di un insieme (infinito) di sistemi identici e prendendo poi il limite per $T \rightarrow \infty$, si ottiene:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v(t)v(t+\tau)} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2 \frac{|V(\omega)|^2}{T} \cos(\omega\tau) d\omega$$

dove abbiamo fatto uso della simmetria della $|V(\omega)|^2$.

Il termine a sinistra di questa equazione è la funzione di autocorrelazione $\Phi(\tau)$. Invertendo nel termine a destra il limite con l'integrazione, otteniamo:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_v(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega = \int_0^{\infty} S_v(f) \cos(\omega\tau) df$$

Questa è una trasformata di Fourier, la cui inversa è:

$$S_v(f) = 4 \int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

Le ultime equazioni scritte costituiscono il teorema di Wiener-Khintchine.

18.16 Appendice B

Ci proponiamo in questa appendice di studiare la funzione di distribuzione temporale relativa ad eventi elementari che avvengano in modo casuale ed indipendente. Un esempio è quello di un elettrone che si muove in un materiale conduttore, subendo urti con gli atomi che incontra. Ciascun urto è un *evento* casuale, intendendosi con ciò il fatto che la probabilità che un evento abbia luogo in un piccolo intervallo di tempo compreso tra t e $t + \delta t$ è piccola ed indipendente da t. Quando diciamo "piccola" intendiamo che la probabilità di osservare due eventi nell'intervallo di tempo considerato è trascurabile. Chiamando $\nu\delta t$ la probabilità che un evento abbia luogo nell'intervallo di tempo suddetto, ci proponiamo di calcolare la probabilità $p(m, t)$ che esattamente m eventi abbiano luogo in un intervallo di tempo finito t.

Per calcolare tale probabilità, partiamo dalla considerazione che vi sono solo due modi per ottenere esattamente m eventi nell'intervallo di tempo (0-t). Potremo cioè avere (m-1) eventi nell'intervallo di tempo $(0, t - \delta t)$ ed uno nell'intervallo δt o m eventi nell'intervallo di tempo $(0, t - \delta t)$ e nessuno nell'intervallino δt . In formule:

$$p(m, t) = p(m-1, t - \delta t)\nu\delta t + p(m, t - \delta t)(1 - \nu\delta t)$$

Sviluppando i termini a secondo membro di questa espressione in serie di Taylor, otteniamo:

$$p(m-1, t - \delta t)\nu\delta t = p(m-1, t)\nu\delta t - \frac{\partial p(m-1, t)}{\partial t}\nu(\delta t)^2$$

$$p(m, t - \delta t) \cdot (1 - \nu\delta t) = p(m-1, t)\nu\delta t + p(m, t) -$$

$$-\frac{\partial p(m, t)}{\partial t}\delta t - p(m, t)\nu\delta t + \dots (\delta t)^2$$

Per cui l'ultima espressione scritta si può scrivere:

$$p(m, t) = p(m-1, t)\nu\delta t + p(m, t) - \frac{\partial p(m, t)}{\partial t}\delta t - p(m, t)\nu\delta t$$

da cui segue:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{dp(m, t)}{\delta t} = \frac{dp(m, t)}{dt} = \nu[p(m-1, t) + p(m, t)] \quad (18.45)$$

Per $m=0$ questa è (essendo $p(-m, t)=0$):

$$\frac{dp(0, t)}{dt} = \nu p(0, t)$$

che ha come soluzione:

$$p(0, t) = e^{-\nu t}$$

Per m generico possiamo riscrivere la (18.45) come:

$$e^{-\nu t} \frac{d}{dt}[e^{\nu t} p(m, t)] = \nu p(m-1, t)$$

che, integrata tra i limiti $(0, t)$ (con $p(0, 0)=1$), ci da:

$$e^{\nu t} p(m, t) = \nu \int_0^t e^{\nu t} p(m-1, t) dt$$

Questa è una formula di ricorrenza che ci consente di calcolare $p(m, t)$ a partire da $p(m-1, t)$. Conoscendo $p(0, t)$ otteniamo così:

$$e^{\nu t} p(1, t) = \nu \int_0^t e^{\nu t} e^{-\nu t} dt = \nu t$$

da cui:

$$p(1, t) = \nu t e^{-\nu t}$$

Si trova in generale:

$$p(m, t) = \frac{(\nu t)^m e^{-\nu t}}{n!}$$

Possiamo da questa calcolare la distribuzione della distanza temporale tra due eventi successivi. La probabilità che due eventi abbiano luogo separati da un tempo t è pari alla probabilità che, dato un evento, nessun evento abbia luogo per un tempo pari a t ed un evento abbia luogo nel successivo intervallino temporale δt . Cioè:

$$f(t) = p(0, t)\nu\delta t$$

dove:

$$p(0, t) = e^{-\nu t}$$

e quindi:

$$f(t) = \nu e^{-\nu t} \delta t$$

Il valor medio di m (cioè il momento di ordine 1 della distribuzione) è:

$$\begin{aligned}\bar{m} &= \sum_{m=0}^{\infty} mp(m, t) = e^{-\nu t} \nu t [1 + \frac{\nu t}{1} + \frac{(\nu t)^2}{2!} + \frac{(\nu t)^3}{3!} + \dots] = \\ &= e^{-\nu t} \nu t e^{\nu t} = \nu t\end{aligned}$$

Analogamente si può dimostrare che il momento di ordine 2 (la varianza) è:

$$\sigma^2 = \overline{(m - \bar{m})^2} = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 p(m, t) - \bar{m}^2 = \bar{m}$$

18.17 Appendice C

18.17.1 Teoremi di Campbell e di Carson

Consideriamo un rumore casuale, originato da un gran numero di eventi indipendenti. Ciascun evento produca un impulso di una certa forma, descritta da una funzione (uguale per tutti) $f(t - t_i)$, dove t_i è l'istante in cui si è verificato l'evento i -esimo. L'evento potrà essere generico: un elettrone che urta con un atomo, una goccia di pioggia che cade, un soffio di vento durante un temporale, la ricombinazione di una coppia elettrone-lacuna in un semiconduttore, etc. La $f(t)$ è la funzione che descrive la conseguenza percettibile dell'evento, funzione del tempo. Ciò che in realtà percepiamo è la risultante di un gran numero di eventi indipendenti. Essa può esser descritta facendo uso del principio di sovrapposizione:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k f(t - t_k)$$

dove a_k rappresenta l'ampiezza dell' i -mo evento, t_k è l'istante in cui tale evento ha avuto luogo, N è il numero totale di eventi nel tempo di osservazione T e la funzione $f(t)$ è nulla per $t < 0$. Faremo l'ipotesi che la funzione $f(t)$ sia diversa da zero solo per tempi molto minori del tempo di osservazione T .

Poiché gli eventi sono indipendenti, la distribuzione dei tempi t_k soddisfa alla statistica di Poisson, con un numero medio di eventi al secondo dato da:

$$\nu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N}{T}$$

Il valore medio aspettato per la variabile $x(t)$ è allora:

$$\overline{x(t)} = \nu \bar{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (18.46)$$

dove \bar{a} è il valor medio dell'ampiezza a_k . Il risultato espresso dalla (18.46) è noto come *teorema di Campbell del valor medio*.

La trasformata di Fourier della $x(t)$ è:

$$X(j\omega) = \sum_{k=1}^N [a_k e^{-j\omega t_k} F(j\omega)] = F(j\omega) \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega t_k}$$

La densità spettrale della potenza è:

$$\overline{S_x(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|X(j\omega)|^2}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|F(j\omega)|^2}{T} \sum_{k,m=1}^N \overline{a_k a_m e^{-j\omega(t_k - t_m)}}$$

La sommatoria a secondo membro di questa espressione può essere riscritta, separandola nella parte con $k = m$ e in quella con $k \neq m$. Quest'ultima, essendo gli a_k indipendenti tra loro ed indipendenti da t_k , può esser riscritta come:

$$\sum_{k \neq m=1}^N \overline{a_k a_m} e^{-j\omega(t_k - t_m)} = \bar{a}^2 \sum_{k \neq m=1}^N e^{-j\omega(t_k - t_m)}$$

avendo posto:

$$\overline{a_k a_m} = \bar{a}^2$$

Se la distribuzione delle ampiezze a_k è simmetrica attorno a zero, il termine in questione si annulla, poiché $\bar{a} = 0$. Ne segue che in tal caso è:

$$\overline{S_x(\omega)} = 2\nu\bar{a}^2 |F(j\omega)|^2$$

dove \bar{a}^2 è il valore quadratico medio delle a_k . Questo è il teorema di Carson.

Se i coefficienti a_k non sono distribuiti simmetricamente attorno allo zero, il termine prima ignorato sarà presente. In tal caso si può dimostrare che è:

$$\overline{x^2(t)} - \overline{x(t)}^2 = \nu\bar{a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

Questo è il teorema di Campbell del valor quadratico medio.

Capitolo 19

Elettronica per rivelatori di particelle

19.1 Introduzione

Una particella elettricamente carica che attraversa un mezzo materiale può subire perdite d'energia a causa di processi di varia natura. Tale energia è depositata sotto varie forme nel mezzo attraversato. Tra tali processi, particolarmente importanti sono la ionizzazione, il bremsstrahlung, la radiazione di luce *Čerenkov*, la radiazione di transizione ed altri. Tale rilascio di energia, la cui natura ed ampiezza dipendono sia dal particolare mezzo attraversato che dalla natura ed energia della particella carica¹ (elettrone, protone, mesone π^\pm , leptone μ^\pm, \dots) può esser utilizzato per rivelare la particella. In particolare si può:

- (a) valutare l'istante in cui la particella è passata nel mezzo;
- (b) ottenere una stima dell'energia della particella, che è spesso legata all'energia che essa ha depositato nel mezzo medesimo;
- (c) misurare la posizione della particella nell'istante in cui essa ha attraversato il mezzo;
- (d) “identificare” la particella; cioè stabilire (entro un predeterminato “livello di confidenza”) se essa sia un elettrone, π , protone... In tale tipo di applicazione sono molto utili i rivelatori basati sull'emissione di luce *Čerenkov* e quelli basati sulla radiazione di transizione.

Non intendiamo qui entrare nei dettagli dei rivelatori, ma limitarci a studiare alcuni dei problemi che essi pongono all'elettronica di “front end”, cioè ai circuiti che debbono amplificare e rivelare i deboli segnali elettrici prodotti. Ovviamente, i vincoli posti sull'elettronica cambiano molto a seconda del tipo di rivelatore e del tipo di informazione che si vuole estrarre (tempo, energia, posizione etc.). Ciò vuol dire che una trattazione esauriente dei problemi elettronici da affrontare non può esser disgiunta da una trattazione dei diversi rivelatori. Ci limiteremo qui a discutere alcuni dei principali problemi e ad esaminare le soluzioni comunemente adottate.

¹Ci limitiamo qui a considerare particelle cariche, ma considerazioni analoghe potrebbero essere fatte per quelle neutre, in particolare per i fotoni.

Dettagli possono essere trovati nei riferimenti ([26]), ([27]), ([29]), ([31]), ([30]), ([34]), ([35]).

Esamineremo, a titolo di esempio, la struttura di tre rivelatori: gli scintillatori, i rivelatori a gas e quelli a semiconduttore.

È opportuno, prima di entrare nell'analisi dei singoli rivelatori, esaminare i parametri che conviene ottimizzare: la risoluzione energetica, la risoluzione temporale, l'efficienza ed il "tempo morto". Nella prossima sezione ci occuperemo di un'analisi semplificata di tali parametri.

19.2 Caratteristiche di risposta dei rivelatori

19.2.1 Risoluzione energetica

È spesso importante che il rivelatore fornisca una determinazione, il più possibile precisa, dell'energia che la particella ha depositato nell'attraversarlo. Essendo l'interazione della particella con il materiale di cui il rivelatore è costituito, caratterizzata a livello microscopico da un gran numero di processi elementari (ionizzazione, bremsstrahlung etc.) ciascuno dei quali ha un carattere stocastico, è naturale aspettarsi una fluttuazione nel numero di tali processi per unità di spessore del materiale attraversato. Poiché a ciascuno dei processi elementari corrisponde un deposito di una piccola frazione dell'energia, segue da semplici considerazioni statistiche che la risposta energetica del rivelatore ad una particella di energia definita avrà una dispersione relativa tanto maggiore quanto minore è il numero di processi elementari che hanno avuto luogo.

Vediamo infatti che, se il numero N dei processi elementari è distribuito in modo gaussiano, la dispersione nell'energia totale depositata sarà proporzionale alla radice quadrata della varianza di N , cioè a \sqrt{N} .

Se E è l'energia totale depositata (proporzionale ad N) si definisce "risoluzione energetica" la variabile ΔE , pari alla larghezza a metà altezza (Full Width at Half Maximum o FWHM) della distribuzione delle energie rivelate quando il mezzo è attraversato da un gran numero di particelle, tutte di uguale energia E (vedasi la figura 19.1).

Notiamo che, mentre E_0 è l'energia della particella, E è l'energia che essa rilascia in media nel rivelatore. Pur esistendo rivelatori in cui $E \simeq E_0$, nella maggior parte dei casi l'energia depositata E è inferiore ad E_0 . La particella ha in tal caso, all'uscita dal rivelatore, un'energia pari a $E_0 - E$ (a meno di perdite dovute a processi di varia natura).

In generale si quota la *risoluzione relativa*, definita come:

$$R = \frac{\Delta E}{E}$$

Questa, in un tipico rivelatore, migliora all'aumentare dell'energia. Se ϵ è l'energia media spesa nella generazione di un processo elementare nel rivelatore (ad esempio, ionizzazione) allora il numero di processi elementari che avranno luogo per un'energia totale depositata E , è dato da:

$$N = \frac{E}{\epsilon}$$

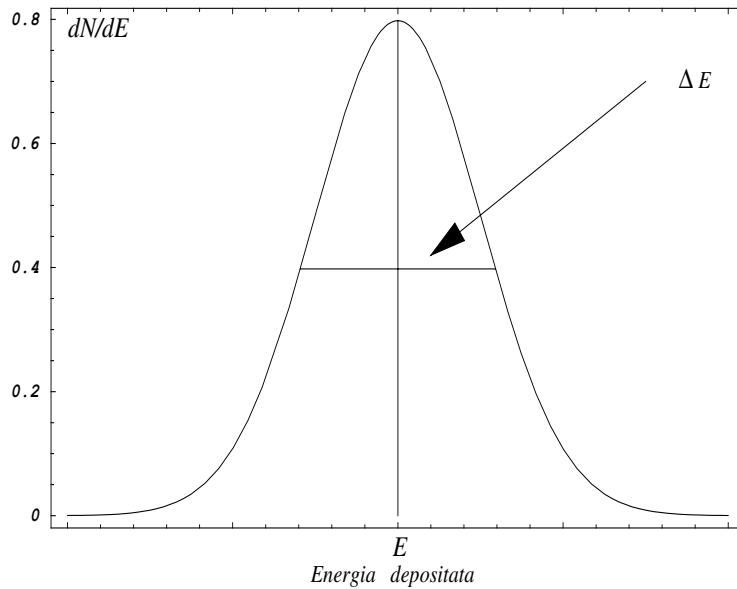


Figura 19.1: Distribuzione delle energie depositate da particelle di energia E_0 . E è l'energia media depositata, ΔE la larghezza a metà altezza della distribuzione.

Ad esempio, in un rivelatore al silicio, l'energia necessaria per la produzione di una coppia elettrone-lacuna è $\simeq 3.6 \text{ eV}$. Una particella carica, di alta energia, che attraversi un rivelatore di questo tipo spesso $300 \mu\text{m}$, perde mediamente circa 100.000 eV , cui corrisponde un numero di coppie:

$$N = \frac{100.000}{3.6} \simeq 28.000$$

La fluttuazione su tale numero è pari a $\sigma(N) = \sqrt{28.000} \simeq 166$. Ammettendo che la distribuzione nel numero dN/dE dei processi elementari sia gaussiana, si ha che la larghezza a metà altezza (FWHM) della distribuzione è legata alla σ della gaussiana dalla relazione:

$$FWHM = 2.36 \sigma$$

La risoluzione relativa R è allora pari a:

$$R = 2.36 \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{2.36}{\sqrt{N}} = \frac{2.36}{166} \simeq 1.4\%$$

Tale relazione necessita di una correzione nel caso in cui l'energia depositata E coincide con l'energia totale E_0 . In tal caso è infatti necessario introdurre un fattore addizionale F minore di 1 (noto come “fattore di Fano”), attraverso:

$$R = 2.36 \cdot F \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{E_0}}$$

La risoluzione relativa in tal caso migliora rispetto al caso in cui non tutta l'energia sia depositata nel rivelatore.

Funzione di risposta del rivelatore

Nelle considerazioni precedenti abbiamo lavorato nell'ipotesi che la distribuzione delle energie depositate dalla particella nell'attraversare il rivelatore sia gaussiana. Nella più gran parte dei casi ciò non è vero, o lo è solo in modo approssimato. Infatti in generale la distribuzione ha una forma che dipende dall'energia della particella e dalle caratteristiche del rivelatore. La forma di tale risposta, importante per valutare la risoluzione energetica, può esser ottenuta facendo uso di tecniche montecarlo, unitamente alla conoscenza della fisica dei processi elementari che hanno luogo nel rivelatore.

19.2.2 Risposta temporale

Questa è definita dal tempo necessario perché il segnale sia disponibile all'uscita del rivelatore, dopo che questo sia stato attraversato dalla particella.

Per rivelatori da utilizzare per definire con precisione l'istante in cui una particella li abbia attraversati è necessario che questo tempo sia il più piccolo possibile (dell'ordine del ns). L'andamento temporale del segnale elettrico disponibile all'uscita del rivelatore dipenderà inoltre dall'elettronica utilizzata all'uscita del rivelatore (elettronica di "front-end"). Un'andamento tipico è quello mostrato in figura 19.2.

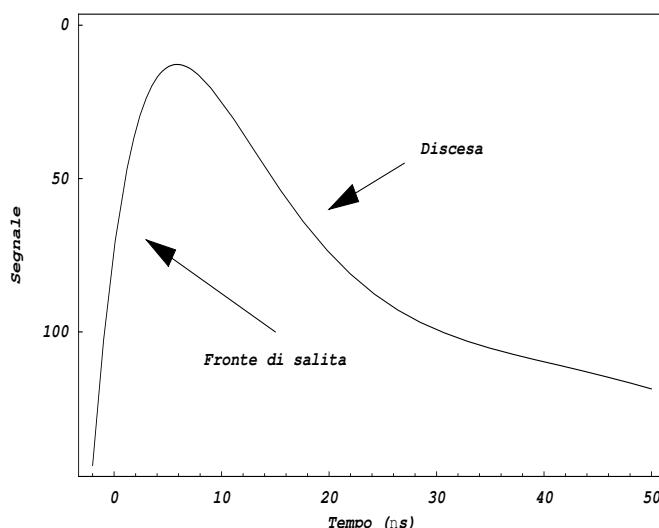


Figura 19.2: Forma temporale tipica del segnale all'uscita del rivelatore.

Per una buona risposta temporale è opportuno che il fronte di salita sia il più piccolo possibile. È anche importante, se il *rate* di eventi è elevato, che la discesa sia rapida, per evitare che l'impulso associato ad un evento si sovrapponga alla coda di quello associato all'evento precedente (fenomeno noto come *pile-up*).

19.2.3 Efficienza

L'efficienza di un rivelatore è definita come la probabilità che esso generi un segnale utilizzabile, una volta che una particella del tipo voluto lo abbia attraversato. Essa è funzione sia del tipo di rivelatore che della natura ed energia della particella. È importante che tale efficienza sia alta; ancora più importante è che essa sia nota con grande precisione, allo scopo di poter calcolare dal numero di particelle rivelate il numero di quelle che hanno attraversato il rivelatore.

19.2.4 Tempo morto

In un tipico esperimento, il segnale (impulso elettrico all'uscita del rivelatore) viene utilizzato per generare l'informazione digitale relativa all'istante in cui la particella è passata, nonché quella relativa all'altezza d'impulso del segnale (legata all'energia depositata). Tali informazioni digitali, insieme a quelle associate agli altri rivelatori che costituiscono l'apparato sperimentale, sono poi trasmesse ad elaboratori elettronici e registrate su opportune memorie.

Tale sequenza di operazioni richiede un tempo che, anche se piccolo, può esser grande rispetto all'intervallo temporale che intercorre tra l'arrivo di particelle successive. Ciò fa sì che, dopo l'arrivo di una particella, il sistema non sia pronto a registrare l'arrivo di nuove particelle per un certo tempo τ , noto come *tempo morto*. Se si vuol conoscere il numero totale di particelle che hanno investito il rivelatore, comprensivo di quelle non rivelate a causa del tempo morto, occorre conoscere quest'ultimo.

Se in una misura durata complessivamente T secondi, sono stati registrati k eventi, il sistema sarà stato insensibile (morto) per un tempo $k\tau$. Se m è il numero "vero" di eventi al secondo, il numero di eventi complessivamente persi nel tempo T sarà: $m k \tau$. Il numero totale di eventi $m T$ è d'altronde pari alla somma del numero k di eventi registrati più il numero $m k \tau$ di quelli persi. Si ha cioè:

$$mT = k + m k \tau$$

da cui, se τ è noto, si può, dalla misura di k , ricavare m :

$$m = \frac{k}{T - k\tau} = \frac{k/T}{1 - k\tau/T}$$

Per $\tau = 0$ troviamo ovviamente $m = k/T$.

Un metodo per ottenere sperimentalmente τ è quello detto "delle due sorgenti".

Si effettuano cioè tre misure indipendenti: la prima con una sorgente 1, la seconda con una sorgente 2 e la terza con entrambe. Se indichiamo con R_1 , R_2 , R_{12} i rispettivi conteggi per unità di tempo e con n_1 , n_2 , n_{12} quelli "veri", avremo:

$$n_1 = \frac{R_1}{1 - R_1\tau}$$

$$n_2 = \frac{R_2}{1 - R_2\tau}$$

$$n_{12} = \frac{R_{12}}{1 - R_{12}\tau}$$

dove deve essere:

$$n_{12} = n_1 + n_2$$

da cui:

$$\frac{R_1}{1 - R_1\tau} + \frac{R_2}{1 - R_2\tau} = \frac{R_{12}}{1 - R_{12}\tau}$$

Da questa è poi facile ricavare τ .

19.3 Rivelatori a scintillazione

Una particella carica che attraversa un mezzo materiale può provocare dei processi di eccitazione molecolare o ionizzazione. In alcuni tipi di sostanze le molecole eccitate decadono poi al loro stato fondamentale con emissione di luce.

Il mezzo non è tuttavia trasparente alla luce emessa, poiché questa, la cui frequenza cade tipicamente nell'ultravioletto, può esser assorbita dalle molecole del mezzo medesimo (autoassorbimento). Per ottenere un segnale ottico rivelabile è necessario ridurre tale assorbimento a livelli accettabili. A tale scopo si ricorre al processo di “fluorescenza”, in cui il fotone dà luogo ad una nuova eccitazione, mentre la successiva diseccitazione avviene con emissione di fotoni di maggiore lunghezza d'onda. Si aggiungono quindi al materiale primario (tipicamente una sostanza organica) delle piccole quantità di opportuni fluori, che “spostano” la luce primaria emessa a frequenze più basse (*wavelength shifting*), tali che a tali frequenze il materiale risulti trasparente. È importante che il picco di frequenza della luce emessa nel processo primario di ionizzazione sia ben separato dal picco della distribuzione in frequenza della luce emessa nel processo di fluorescenza. La separazione in lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ tra i due picchi è nota come *Stokes Shift*. Quanto maggiore lo Stokes Shift, tanto minore sarà l'autoassorbimento.

In prima approssimazione, l'evoluzione temporale del processo di emissione può esser descritta da un semplice termine esponenziale:

$$N(t)dt = \frac{N_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

dove $N(t)dt$ è il numero di fotoni emessi nell'intervallo di tempo dt , N_0 il numero totale di fotoni emessi e τ la costante di decadimento (vita media).

Il segnale consiste in un brusco impulso, caratterizzato da un “tempo di salita” brevissimo, che poi scende in modo esponenziale.

In alcuni casi le costanti di tempo interessate nel processo di decadimento sono due; in tal caso si può scrivere:

$$N(t)dt = \left(A e^{-\frac{t}{\tau_f}} + B e^{-\frac{t}{\tau_s}} \right) dt$$

dove τ_f è la costante di tempo relativa alla componente a breve vita media e τ_s quella della componente a vita media lunga.

Per esser concretamente utilizzabile, uno scintillatore deve avere le seguenti caratteristiche:

- (a) elevata efficienza di conversione di energia in radiazione;

- (b) trasparenza alla radiazione emessa;
- (c) spettro di emissione adatto alla rivelazione della luce (che tipicamente utilizza dei fotomoltiplicatori);
- (d) breve tempo di decadimento.

Esistono svariati tipi di materiali scintillanti che possiedono in maggiore o minore misura tali caratteristiche. I più comunemente usati sono degli “scintillatori organici”, costituiti da idrocarburi della serie aromatica, in soluzioni organiche liquide o plastiche (come plastiche sono comunemente adoperate il polistirene, il polivinil-toluene o il polifenil-benzene). Le costanti di decadimento vanno da 1.7 a 4 ns. Essendo la costante di decadimento così breve, non è sempre possibile trascurare rispetto ad essa il tempo di salita. Una parametrizzazione spesso adoperata per tener conto di ciò è una convoluzione di una gaussiana con un termine esponenziale:

$$N(t) = N_0 f(\sigma, t) e^{-t/\tau}$$

dove $\sigma \approx 0.5 \text{ ns}$.

Lo spettro di emissione di queste sostanze è nella regione 400-500 nm.

L’efficienza di conversione è definita come l’energia che una particella deve perdere in media perché sia prodotto un fotone. Negli scintillatori plastici tale energia è dell’ordine di 1000-3000 eV. Tale efficienza è piuttosto bassa rispetto a quella che si ha in altri tipi di rivelatore. Poiché la risoluzione in energia di un rivelatore è tanto migliore quanto più bassa è la soglia minima di energia che esso può rivelare, si vede che la risoluzione in energia di uno scintillatore non è molto buona. In effetti, fatta eccezione per gli scintillatori a cristalli inorganici, che hanno un’ottima risoluzione in energia, gli scintillatori comunemente adoperati (liquidi e plastici) hanno principalmente il pregio di una elevatissima velocità di risposta e di un costo contenuto.

Il meccanismo di emissione è sostanzialmente diverso negli “scintillatori inorganici”. Questi sono costituiti da cristalli di alogenuri alcalini con l’aggiunta di piccole percentuali di “attivatori” che vengono indicati tra parentesi. Tra i più usati, ricordiamo il NaI(Tl), CsI(Tl), KI(Tl), LiI(Eu) e CsF₂.

Gli scintillatori basati su cristalli inorganici, il cui uso è frequente in applicazioni che richiedano una elevata risoluzione in energia, sono caratterizzati da tempi di decadimento molto più lunghi, il che ne sconsiglia l’uso in esperimenti ad alto rate. La tabella 19.1, contenente dati tratti dalla referenza [37], mostra alcune grandezze caratteristiche di rivelatori inorganici, confrontate alle analoghe per scintillatori organici plastici. Le grandezze mostrate nella tabella sono: la densità ρ , la lunghezza di radiazione λ_r ², il tempo di decadimento τ , il numero di fotoni prodotti per MeV di energia depositata nel materiale, la lunghezza d’onda λ_{max} che corrisponde al picco dell’emissione di luce nello scintillatore ed infine l’indice di rifrazione n . Quest’ultimo è importante poiché, nell’accoppiare lo scintillatore alle guide di luce, il numero di fotoni che si perdono è tanto minore quanto più l’indice di rifrazione dello scintillatore è vicino a quello della guida di luce.

²La lunghezza di radiazione è definita come la lunghezza di materiale necessaria per attenuare l’energia della particella incidente ad 1/e del suo valore. Essa dipende dalla densità, dal numero atomico e dal numero di massa.

Materiale	ρ (g/cm^3)	λ_r (cm)	τ (ns)	fotoni/MeV	λ_{max} (nm)	n
BaF_2	4.89	2.03	0.6-620	2000-6500	220-310	1.45
$CsI(Tl)$	4.51	1.86	900	51800	570	1.74
$CsI(Na)$	4.51	1.86	630	38500	420	1.74
CsI	4.51	1.86	6-35	16800	310-420	1.74
$NaI(Tl)$	3.70	2.59	230	37700	410	1.85
BGO	7.13	1.13	300	8200	480	2.15
$CaF_2(Eu)$	3.18	3.5	1000	23650	435	1.43
NE102A	1.03	42.5	2.5	10000	425	1.58

Tabella 19.1: Caratteristiche di alcuni scintillatori. Le grandezze sono: la densità ρ , la lunghezza di radiazione λ_r , il tempo di decadimento τ , il numero di fotoni prodotti per MeV di energia depositata nel materiale, la lunghezza d'onda λ_{max} corrispondente al picco dell'emissione di luce nello scintillatore ed infine l'indice di rifrazione n.

Come si vede dalla tabella, gli scintillatori organici plastici (mostrati nell'ultima riga della tabella) hanno tempi di decadimento molto più brevi di quelli che caratterizzano gli scintillatori inorganici. In compenso, questi ultimi producono un numero di fotoni, per unità di energia depositata dalla particella, molto maggiore. Ciò è dovuto al fatto che si tratta tipicamente di materiali ad alto numero atomico Z.

Quanto alla rapidità di risposta, solo lo Ioduro di Cesio, con $\tau=6$ ns, può esser pensato come un competitore degli scintillatori plastici.

Come accennato, i fotoni prodotti quando una particella attraversa uno scintillatore, possono essere rivelati facendo uso di un fotomoltiplicatore. Nella prossima sezione discuteremo il principio di funzionamento di questi.

19.4 Fotomoltiplicatori

Un fotomoltiplicatore è un dispositivo che converte un (debole) segnale luminoso in un impulso di corrente. Esso è costituito di un tubo a vuoto, come schematizzato in figura 19.3, sull'interno della cui faccia frontale è depositato un materiale fotosensibile, cioè un materiale con una bassa soglia per l'effetto photoelettrico.

Un certo numero di elettrodi sono posti all'interno del tubo (dinodi) con il compito di “moltiplicare” il piccolo numero di elettroni prodotti per effetto photoelettrico dalla radiazione che investe il fotocatodo. Infine un ulteriore elettrodo (anodo) raccolge la nuvola di elettroni prodotta dalla moltiplicazione, fornendo in uscita un breve impulso di corrente. Il fotocatodo è tenuto ad un potenziale negativo rispetto all'anodo, mentre i vari dinodi sono tenuti a potenziali (negativi) via via decrescenti (in valore assoluto) andando dal fotocatodo verso l'anodo³.

Un elettrone prodotto nel processo di interazione del fotone incidente con il materiale che costituisce il fotocatodo, è accelerato verso il primo dinodo dal potenziale applicato. Qui esso può liberare 2 o più elettroni, che vengono accelerati verso il se-

³In alcuni casi è il fotocatodo ad esser tenuto al potenziale di massa, mentre i dinodi e l'anodo sono tenuti a potenziali positivi.

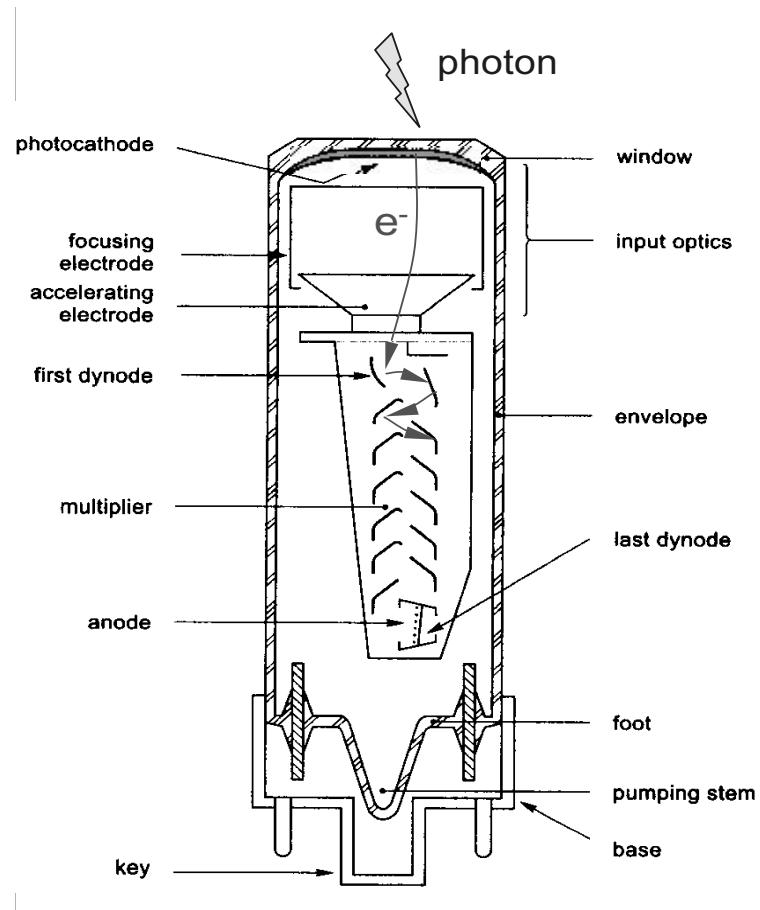


Figura 19.3: Diagramma schematico di un tubo fotomoltiplicatore.

condo dinodo, e così di seguito. Si ha così un processo di moltiplicazione che genera infine una “nuvola” di elettroni, raccolta poi dall’anodo.

Nell'esaminare la struttura ed il funzionamento di un tipico fotomoltiplicatore, è opportuno distinguere il ruolo delle parti che lo compongono: il fotocatodo, il sistema di focalizzazione degli elettroni emessi da questo, il sistema di moltiplicazione (costituito nella più gran parte dei casi da “dinodi”) con la relativa catena di distribuzione delle tensioni tra i vari dinodi.

a) Il fotocatodo. Questo è costituito da un sottile strato di una sostanza a bassa energia di estrazione, depositata sulla faccia interna della parte del fotomoltiplicatore che sarà esposta alla luce incidente. All'interno del tubo è praticato il vuoto. È il fotocatodo che converte i fotoni incidenti in elettroni. L'efficienza di conversione (sensibilità catodica) varia con la lunghezza d'onda della luce incidente. Tale relazione tra sensibilità catodica e lunghezza d'onda è nota come *caratteristica spettrale*.

La risposta spettrale può esser quotata in termini della “sensibilità luminosa” (S) o della “efficienza quantica” (QE). La prima di queste grandezze è il rapporto tra la corrente fotoelettrica dal fotocatodo e la potenza luminosa incidente ad una frequenza determinata. Essa è espressa in Ampere/Watt (A/W). L'efficienza quantica (QE) è il rapporto tra il numero di fotoelettroni emessi dal catodo ed il

numero di fotoni incidenti. Essa è normalmente espressa in percento. Le due diverse espressioni della risposta spettrale sono legate tra loro dalla relazione:

$$QE = \frac{S \times 1240}{\lambda} \times 100$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce incidente espressa in nanometri.

La figura 19.4 mostra una tipica curva di risposta spettrale per un photocatodo⁴ costituito da un materiale bialcalino (Sb-Rb-Cs o Sb-K-Cs).

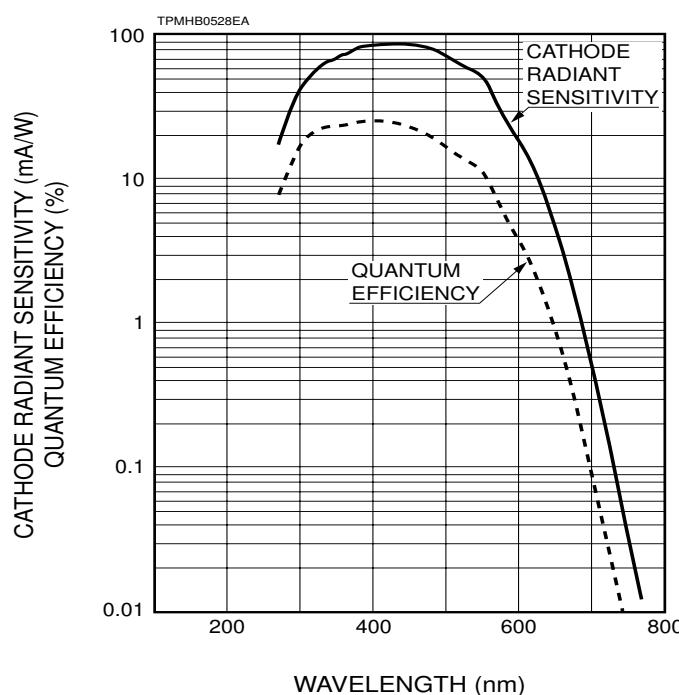


Figura 19.4: Efficienza quantica e sensibilità luminosa di un photocatodo.

Valori tipici dell'efficienza quantica al massimo dello spettro variano tra il 10% ed il 25%.

b) Lo stadio di focalizzazione o “ottica d’ingresso”. Questo ha lo scopo di far sì che gli elettroni emessi dal photocatodo si dirigano verso la superficie utile del primo dinodo. Esso può esser costituito da uno o più elettrodi. Tale ottica determina la cosiddetta “efficienza di raccolta” (η) del primo stadio, definita come il rapporto tra il numero di elettroni che raggiungono la superficie utile del primo dinodo ed il numero totale di elettroni emessi dal photocatodo. Il parametro η dipende anche dalla lunghezza d’onda della radiazione incidente e generalmente supera l’80%.

c) Lo stadio di moltiplicazione. Questo, come già detto, è costituito da un certo numero di *dinodi*, tenuti a potenziali progressivamente più elevati andando dal primo all’ultimo dinodo. I fotoelettroni emessi dal photocatodo sono accelerati dal campo elettrico in modo da colpire il primo dinodo e produrre elettroni per

⁴Le curve sono quelle del fotomoltiplicatore R1450 della Hamamatsu [31].

emissione secondaria. Si definisce “fattore di emissione secondaria” (δ) il numero medio di elettroni emessi da un dinodo colpito da un elettrone. Tale fattore dipende, oltre che dal materiale di cui sono costituiti i dinodi, dal potenziale acceleratore applicato, vale a dire dall’energia cinetica che gli elettroni prodotti acquistano per effetto del campo. Valori tipici di δ variano tra 2 e 4. Gli elettroni secondari emessi dal primo dinodo sono successivamente accelerati dal campo esistente tra primo e secondo dinodo e, colpendo quest’ultimo, danno luogo ad un numero più elevato di elettroni. La ripetizione di tale processo nei successivi stadi produce infine un’elevata guadagno in corrente. Una corrente molto piccola all’uscita del fotocatodo può così dar luogo ad un’elevata corrente dall’anodo del fotomoltiplicatore.

Il “guadagno” (G) di un fotomoltiplicatore, definito come la carica all’anodo per unità di carica all’uscita del fotocatodo (o equivalentemente come il numero di elettroni che raggiungono l’anodo per un elettrone emesso dal fotocatodo) dipende ovviamente dal fattore di emissione secondaria e dal numero N di dinodi (numero di stadi). I fotomoltiplicatori disponibili in commercio hanno tra 8 e 14 stadi, con guadagni tipici di 10^7 .

Poiché il fattore di emissione secondaria aumenta rapidamente all’aumentare della tensione applicata, ed essendo il guadagno in carica del fotomoltiplicatore proporzionale ad una potenza elevata di tale parametro, ne segue che una anche piccola variazione della tensione applicata si traduce in un’apprezzabile variazione del guadagno.

Il fattore di moltiplicazione secondaria δ è infatti esprimibile [31] in funzione della differenza di potenziale V_d tra dinodi consecutivi, come:

$$\delta = AV_d^\alpha$$

dove A è una costante ed α un coefficiente che dipende dalla geometria e dal materiale di cui sono fatti i dinodi. Valori tipici di α variano tra 0.7 e 0.8. Se $V = (N + 1)V_d$ è la tensione applicata tra anodo e catodo, in un fotomoltiplicatore ad N stadi⁵ il guadagno diviene:

$$G = \delta^N = A^N V_d^{\alpha N} = A^N \frac{V^{\alpha N}}{(N + 1)^{\alpha N}} = k V^{\alpha N}$$

con k una costante.

Poiché il numero degli stadi è nel range 8-14, si vede da tale relazione che il guadagno varia molto rapidamente con la tensione applicata V . Si ha:

$$dG = k V^{\alpha N} \frac{\alpha N}{V} dV$$

da cui:

$$\frac{dG}{G} = \alpha N \frac{dV}{V}$$

Se ad esempio è $N=14$, una variazione dello 0.1% in V si traduce in una variazione di circa l’1% nel guadagno. Per tale motivo è importante far uso di alimentatori d’alta tensione che abbiano un’elevata stabilità. È anche importante stabilire delle

⁵Si è qui fatta l’ipotesi che tutte le V_d siano uguali.

condizioni di operazione del fotomoltiplicatore tali che la risposta dipenda poco dalla tensione applicata (zona di *plateau*).

Lo schema tipico di alimentazione dei vari elettrodi (fotocatodo, dinodi ed anodo) è quello mostrato in figura 19.5. Come si vede, esso è costituito da un partitore resistivo. Per una buona stabilità delle tensioni applicate agli elettrodi è opportuno che la corrente che fluisce nel partitore sia grande rispetto a quella anodica media. Lo scopo dei condensatori posti in parallelo ai dinodi più vicini all'anodo è quello di stabilizzare la tensione di questi ultimi qualora la corrente di elettroni tra catodo ed anodo, e quindi la corrente nel partitore, aumenti bruscamente a seguito di un improvviso aumento del flusso luminoso in ingresso.

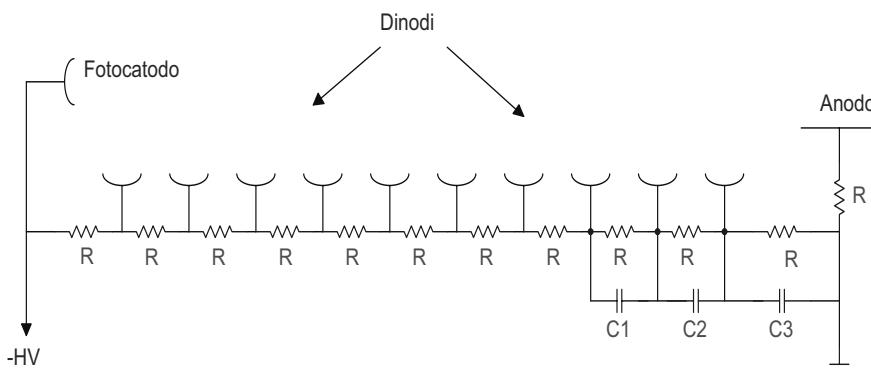


Figura 19.5: Schema di alimentazione di un tubo fotomoltiplicatore.

19.4.1 Risoluzione energetica di un fotomoltiplicatore

Una delle più importanti caratteristiche di un fotomoltiplicatore è la *linearità*. La carica q_a raccolta all'anodo in un breve intervallo di tempo τ è proporzionale al numero dei fotoni che in un intervallo di tempo uguale hanno raggiunto il catodo. Questo è a sua volta proporzionale all'energia che la particella ha depositato nello scintillatore. Tale proporzionalità implica che se il fotocatodo è stato raggiunto da un numero di fotoni tale da dar luogo ad un singolo fotoelettrone (tenendo conto dell'efficienza quantica ρ del fotocatodo) all'anodo debba osservarsi una certa carica q_1 ; se il numero di fotoni, e quindi di fotoelettroni raddoppia, tale carica dovrà esser doppia e così via.

In realtà, tale proporzionalità è vera solo *in media*. La distribuzione della carica osservata all'anodo quando al fotocatodo è prodotto un singolo fotoelettrone ha una larghezza considerevole. Analoga cosa è vera nel caso di due o più fotoelettroni prodotti al catodo. Ciò che continua ad esser vero è che i valori medi delle rispettive distribuzioni sono proporzionali al numero di fotoelettroni prodotti.

La situazione è complicata ulteriormente dal fatto che, per un dato numero n_f di fotoni incidenti sul fotocatodo, il numero n_e di fotoelettroni è uguale a $n_f \rho$ *solo in media*. Il numero osservato in una serie di misure fluttuerà attorno a tale valore

secondo la statistica di Poisson:

$$P(n_e) = \frac{\bar{n}_e^{n_e} e^{-\bar{n}_e}}{n_e!}$$

con $\sigma_e = \sqrt{\bar{n}_e}$, e quindi:

$$\frac{\sigma_e}{\bar{n}_e} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}_e}}$$

Per piccoli valori di \bar{n}_e , le fluttuazioni relative sono importanti.

Un meccanismo analogo è quello che, nella catena di moltiplicazione, dà luogo a fluttuazioni nella carica raccolta all'anodo per un numero fissato di fotoelettroni prodotti al catodo.

Anche in tal caso infatti la moltiplicazione che ha luogo a ciascun dinodo è soggetta a fluttuazioni di tipo Poissoniano. Ciò è particolarmente importante ai primi dinodi, dove il numero di elettroni è piccolo e quindi maggiore è la fluttuazione relativa.

Se ammettiamo che si abbiano N dinodi, tutti caratterizzati da un medesimo fattore di moltiplicazione δ , il guadagno $G = \delta^N$ avrà una varianza relativa data da:

$$\left(\frac{\sigma_G}{G}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\delta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\delta}{\delta}\right)^4 + \cdots \left(\frac{\sigma_\delta}{\delta}\right)^{2N}$$

che si ottiene considerando indipendenti le fluttuazioni su ciascun dinodo e sommandole quadraticamente. Essendo poi $\sigma_\delta = \sqrt{\delta}$ (statistica di Poisson) otteniamo:

$$\left(\frac{\sigma_G}{G}\right)^2 = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \cdots \frac{1}{\delta^N} \simeq \frac{1}{\delta - 1}$$

Si vede da tali espressioni che il massimo contributo alle fluttuazioni è quello dovuto ai primi stadi di moltiplicazione.

Nel caso in cui, come spesso accade, il primo stadio abbia un fattore di moltiplicazione δ_1 più elevato, ed indicando con η l'efficienza di raccolta di tale stadio, si dimostra [30] che tale espressione diviene:

$$\left(\frac{\sigma_G}{G}\right)^2 = \sigma_\eta^2 + \frac{1}{\eta} \frac{1}{\delta_1} \frac{\delta}{\delta - 1}$$

dove σ_η^2 è la varianza relativa al fattore η .

Se si ammette che η sia uguale ad 1, questa si semplifica in:

$$\left(\frac{\sigma_G}{G}\right)^2 = \frac{1}{\delta_1} \frac{\delta}{\delta - 1}$$

Complessivamente l'effetto delle fluttuazioni nel fattore di moltiplicazione e di quelle nell'emissione di fotoelettroni sulla varianza relativa nel numero di fotoelettroni che arrivano all'anodo in un piccolo intervallo di tempo τ è dato da [33]:

$$\left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{\bar{n}_f \rho \tau} \left(1 + \frac{\sigma_G}{G}\right)^2$$

dove $n = n_f \rho G$ è il numero di elettroni che nel tempo τ arrivano all'anodo, \bar{n}_f il numero medio di fotoni che colpiscono il fotocatodo nell'unità di tempo e ρ l'efficienza quantica del fotocatodo.

La risoluzione relativa R diventa allora:

$$R = \frac{\Delta E}{E} = 2.36 \frac{\sigma_n}{n} = \frac{2.36}{\sqrt{\bar{n}_f \rho \tau}} \left(1 + \frac{\sigma_G}{G} \right)$$

dove possiamo assumere che sia:

$$\frac{\sigma_G}{G} = \frac{\delta}{\delta_1(\delta - 1)}$$

Ammettiamo ad esempio che sia:

$$\bar{n}_f \tau = 100$$

$$\rho = 0.2$$

$$\delta_1 = 7 \quad , \quad \delta = 4$$

Troveremo allora:

$$R = \frac{2.36}{\sqrt{20}} \left(1 + \frac{4}{21} \right) = 62.5\%$$

Il risultato di tali fluttuazioni si traduce in distribuzioni di carica raccolta all'anodo che hanno, al posto di picchi molto stretti corrispondenti ad 1, 2, 3,... fotoelettroni, dei massimi in distribuzioni del tipo di quella mostrata in figura 19.6, relativa al fotomoltiplicatore Hamamatsu M16, analizzata nella referenza [32].

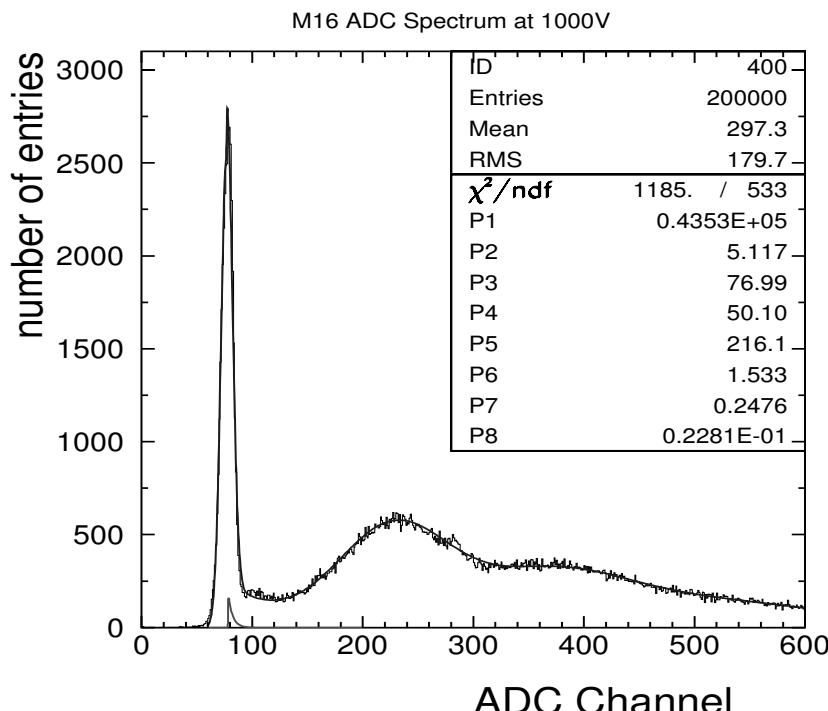


Figura 19.6: Distribuzione della carica raccolta all'anodo del fotomoltiplicatore Hamamatsu M16.

Qui si nota un “piedistallo” a circa 80 conteggi ADC, corrispondente ad un numero di fotoelettroni uguale a zero, seguito da un massimo a circa 220 conteggi, corrispondente ad un singolo fotoelettrone, un ulteriore massimo a circa 370 conteggi, corrispondente a due fotoelettroni, e ad un continuo in cui non si distinguono gli altri massimi. Sottraendo dal numero di conteggi relativi ad 1 e 2 fotoelettroni, quello relativo al piedistallo, si trova che il massimo corrispondente ad 1 fotoelettrone ha 140 conteggi ADC e quello corrispondente a 2 fotoelettroni 290 conteggi ADC. Vediamo quindi che, entro gli errori, le posizioni dei due massimi sono nel corretto rapporto di 2 ad 1. Vediamo anche che la larghezza del secondo massimo è maggiore di quella corrispondente al primo. Si potrebbe verificare che le larghezze σ_2/σ_1 stanno nel rapporto $\sqrt{2}$. La figura 19.7 mostra il risultato ottenuto per il fotomoltiplicatore Hamamatsu M64, analizzato nella medesima referenza, caratterizzato da una migliore risoluzione energetica. Vediamo che ora si distingue chiaramente anche il picco corrispondente a 3 fotoelettroni ed inoltre che i picchi corrispondenti ad 1 e 2 fotoelettroni sono nettamente più stretti.

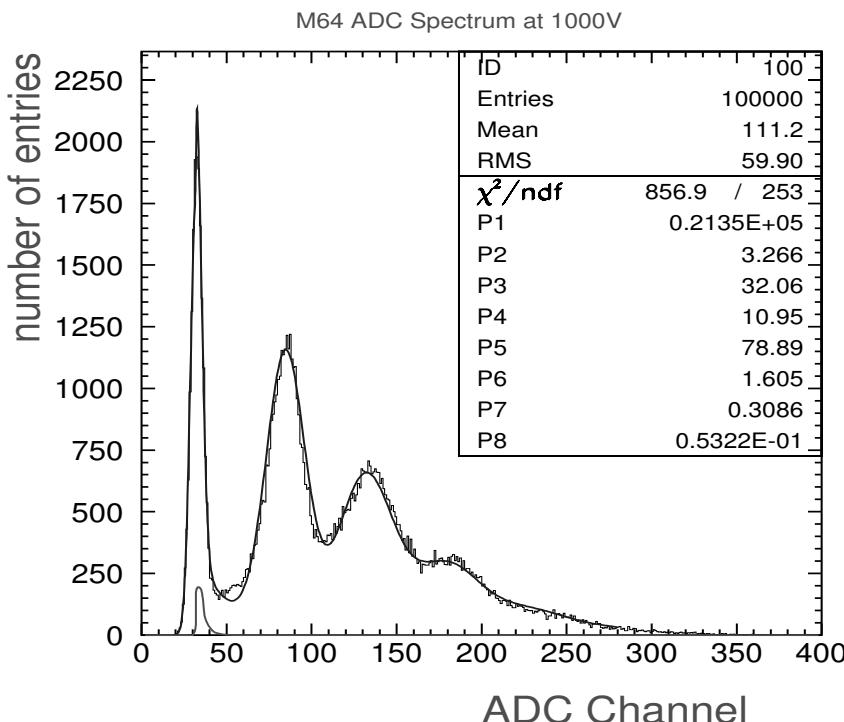


Figura 19.7: Distribuzione della carica raccolta all'anodo del fotomoltiplicatore Hamamatsu M64.

19.4.2 Risoluzione temporale

In misure di brevi impulsi luminosi, associati al passaggio di particelle attraverso lo scintillatore, il segnale anodico dovrebbe riprodurre fedelmente la distribuzione temporale del segnale luminoso in ingresso. Tale riproducibilità è però notevolmente influenzata dal cosiddetto *tempo di transito* (TT) degli elettroni nel tubo, dal tempo di salita del segnale anodico e dallo spread nel tempo di transito (TTS).

Come mostrato in figura 19.8 il tempo di transito è l'intervallo tra l'arrivo dell'impulso luminoso (ipotizzato come infinitamente stretto, in pratica di durata inferiore a 50 ps) al fotocatodo e l'istante in cui il segnale anodico raggiunge il suo valore massimo. Il tempo di salita del segnale anodico è definito come il tempo richiesto perché esso passi dal 10% al 90% del valore di picco, quando il fotocatodo sia illuminato uniformemente da un segnale luminoso di durata inferiore a 50 ps. Valori tipici di tale tempo sono di 1-2 ns.

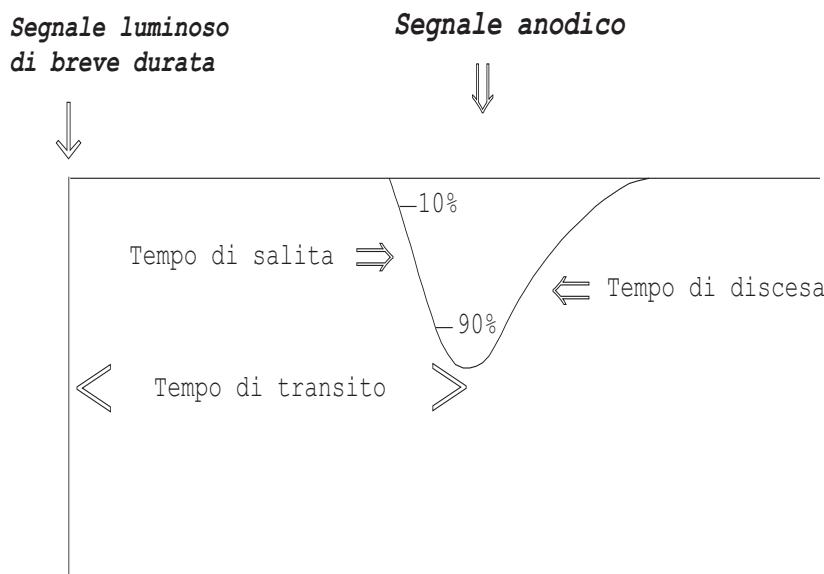


Figura 19.8: Rappresentazione grafica del tempo di transito in uno scintillatore.

Il tempo di transito fluttua tra un impulso e l'altro. Il valore RMS della distribuzione dei tempi di transito per un gran numero di impulsi di durata ugualmente breve è noto come “Transit Time Spread” (TTS). Il TTS è di grande importanza in misure che richiedano una risoluzione temporale spinta. Valori tipici del TT sono di 20-40 ns; quelli del TTS sono di una frazione di ns.

19.5 Forma dell'impulso all'uscita del fotomoltiplicatore

Il segnale all'uscita del fotomoltiplicatore è un breve impulso di corrente, il cui integrale è la carica totale, proporzionale al numero di fotoelettroni liberati al catodo del fotomoltiplicatore. Tale impulso di corrente è tipicamente convertito in un impulso di tensione, facendo uso di una resistenza R_L posta tra anodo e massa, come mostrato in figura 19.9.

Qui la capacità C rappresenta l'effetto combinato della capacità dell'anodo rispetto agli altri elettrodi e delle capacità dei cavi di collegamento. L'operazionale, non sempre presente, è utilizzato come adattatore d'impedenza.

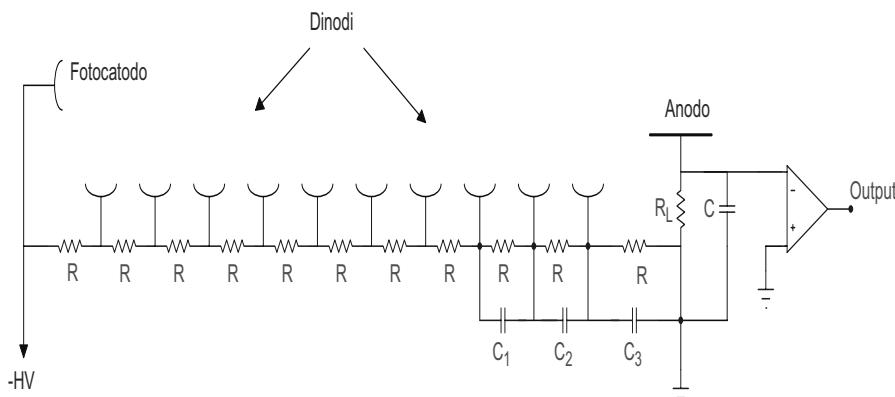


Figura 19.9: Schema elettrico di un fotomoltiplicatore con lo stadio di uscita.

Il fotomoltiplicatore può cioè esser considerato, con ottima approssimazione, un generatore di corrente, in parallelo con la capacità vista dall'anodo guardando verso massa e con una resistenza R , come schematizzato in figura 19.10.

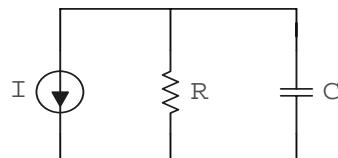


Figura 19.10: Circuito equivalente di un fotomoltiplicatore.

Esaminiamo ora l'andamento del segnale all'uscita del fotomoltiplicatore. Ammettendo che il segnale luminoso al photocatodo sia quello emesso dallo scintillatore e che questo si possa approssimare con una singola costante di tempo, la corrente anodica sarà data da:

$$i(t) = G \frac{N_e e}{\tau_s} e^{-t/\tau_s}$$

dove G è il guadagno del fotomoltiplicatore; N_e il numero di fotoelettroni emessi dal catodo; e la carica dell'elettrone; τ_s la costante di decadimento dello scintillatore. L'equazione del nostro circuito è:

$$\tilde{v} = \tilde{i} \tilde{Z} = A \frac{R/sC}{R + 1/sC} \frac{1}{s + 1/\tau_s} = \frac{R}{\tau} \frac{A}{(s + 1/\tau)(s + 1/\tau_s)}$$

con:

$$A = G \frac{N_e e}{\tau_s}$$

$$\text{e } \tau = RC.$$

Se $\tau \neq \tau_s$, l'antitrasformata può esser calcolata con facilità facendo uso della relazione (2.14) a pagina 42.

Si trova:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{RA}{\tau} \left\{ \left[\frac{e^{st}}{s + 1/\tau_s} \right]_{s=-1/\tau} + \left[\frac{e^{st}}{s + 1/\tau_s} \right]_{s=-1/\tau_s} \right\} = \\
 &= \frac{RA}{\tau} \left\{ \frac{e^{-t/\tau}}{1/\tau_s - 1/\tau} + \frac{e^{-t/\tau_s}}{1/\tau - 1/\tau_s} \right\} = \frac{GN_e e R}{\tau - \tau_s} \{ e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau_s} \} = \\
 &= \frac{Q}{C} \frac{\tau}{\tau - \tau_s} \{ e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau_s} \}
 \end{aligned}$$

dove $Q = GN_e e$ è la carica totale liberata all'anodo.

Se $\tau = \tau_s$, cioè se la costante di tempo del circuito è uguale a quella dello scintillatore, l'antitrasformata di Laplace si può calcolare facendo uso della (2.15) a pagina 42. Si ha in tal caso:

$$\tilde{v} = \frac{RA}{\tau} \frac{1}{(s + 1/\tau)^2}$$

da cui:

$$v(t) = \frac{RA}{\tau} t e^{-t/\tau} = \frac{RGN_e e}{\tau^2} t e^{-t/\tau} = \frac{Q}{C\tau} t e^{-t/\tau}$$

L'andamento della $v(t)$ è qualitativamente mostrato in figura 19.11, nel caso in cui sia $\tau \neq \tau_s$ ed in figura 19.13 nel caso $\tau = \tau_s$:

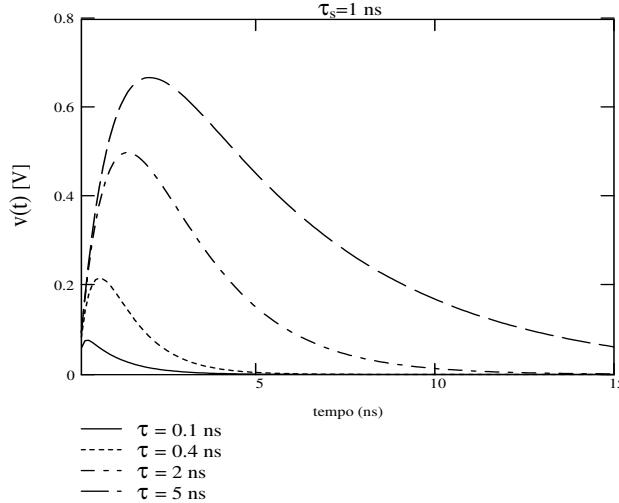


Figura 19.11: Andamento dell'impulso all'uscita del fotomoltiplicatore ($\tau \neq \tau_s$).

Si può verificare che l'ampiezza v_{max} nel primo caso è data da:

$$v_{max} = \frac{Q}{C} \frac{\tau}{\tau - \tau_s} \left\{ \left[\frac{\tau}{\tau_s} \right]^{\frac{\tau_s}{\tau - \tau_s}} - \left[\frac{\tau}{\tau_s} \right]^{\frac{\tau}{\tau - \tau_s}} \right\}$$

e si ha per:

$$t = \frac{\tau \tau_s}{\tau - \tau_s} \ln \frac{\tau_s}{\tau}$$

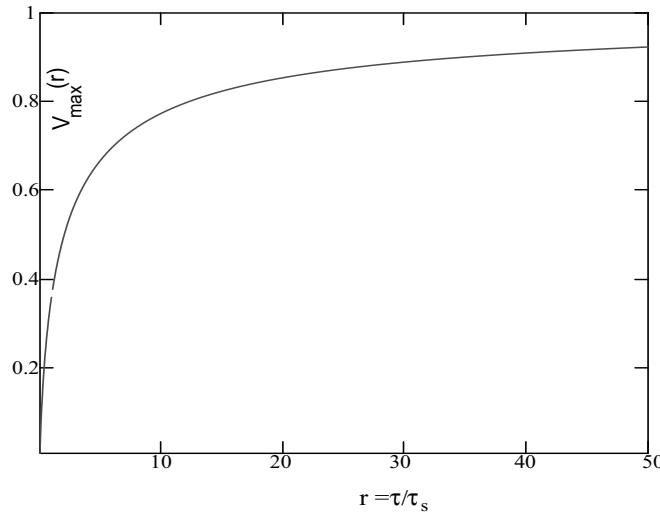


Figura 19.12: Andamento dell'ampiezza del segnale di un fotomoltiplicatore in funzione del rapporto τ/τ_s .

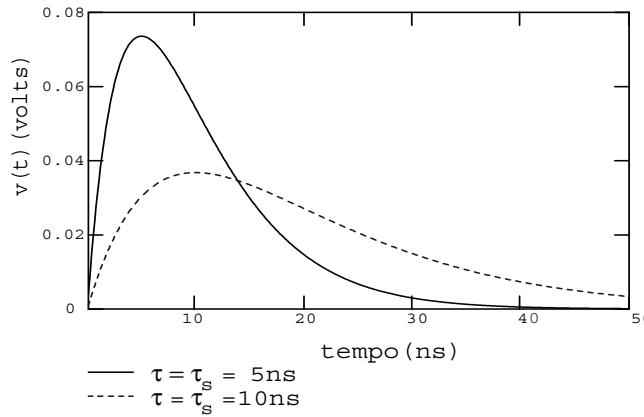


Figura 19.13: Andamento dell'impulso all'uscita del fotomoltiplicatore ($\tau = \tau_s$).

L'andamento in funzione del rapporto $r = \tau/\tau_s$ è mostrato in figura 19.12. Si vede che l'ampiezza è massima quando la costante di tempo del circuito τ è molto maggiore di quella dello scintillatore τ_s .

Nel caso $\tau = \tau_s$ il massimo si ha per $t = \tau$ ed esso vale:

$$v_{\max} = \frac{Q}{Ce}$$

Nel caso in cui è $\tau \ll \tau_s$ l'ampiezza del segnale è ridotta, ma essa riproduce fedelmente la forma del segnale dallo scintillatore. Il tempo di salita è rapido ed è determinato essenzialmente dalla costante di tempo τ del circuito. Quello di discesa è invece determinato da τ_s . In tali condizioni si dice che si lavora nel “modo corrente”, poiché $v(t)$ in tali condizioni è una replica della corrente attraverso la resistenza R .

Per $\tau \gg \tau_s$ l'ampiezza del segnale aumenta, ma contemporaneamente l'impulso si allunga. La durata dell'impulso in tali condizioni è determinata essenzialmente

dalla costante di tempo del circuito. Il tempo di salita è invece determinato da τ_s , ed è quindi breve. Si dice che si lavora nel “modo tensione”, poiché ora $v(t)$ è essenzialmente la differenza di potenziale ai capi di C, che “integra” la corrente.

In genere si preferisce lavorare nel modo tensione, poiché in tali circostanze si hanno impulsi più elevati ($\approx 1\text{ V}$). Il prezzo che si paga è che gli impulsi sono molto più lunghi e che, come conseguenza, ad elevati rate di conteggio si può avere sovrapposizione di impulsi generati da arrivi successivi di particelle sul rivelatore. Tale fenomeno è noto come “pile-up” e su di esso torneremo in seguito.

Lavorando nel modo corrente si può eliminare tale inconveniente e si ha inoltre il vantaggio di un segnale che riproduce la forma del segnale emesso dalla scintillatore (che è utile in alcune applicazioni particolari). Il prezzo che si paga è quello di un segnale di pochi mV, quindi fortemente influenzato dal rumore.

Per una trattazione esauriente dei rivelatori a scintillazione e dei fotomoltiplicatori si consultino le referenze [27], [30], [31].

19.6 Rivelatori a gas

Tra la fine del 1930 e gli inizi del 1940 furono sviluppati tre nuovi tipi di rivelatori di particelle, che avrebbero poi giocato un ruolo sempre più importante, insieme agli scintillatori che già esistevano, in Fisica Subnucleare. Questi erano: la *camera a ionizzazione*, il *contatore proporzionale* ed il *contatore di Geiger-Mueller*. Questi rivelatori erano tutti basati sul medesimo principio: la ionizzazione prodotta da particelle cariche nei gas. Schematicamente, essi sono costituiti da un recipiente sigillato contenente una miscela di gas inerti, all’interno del quale sono presenti due elettrodi tra cui è applicata una elevata differenza di potenziale.

Una particella che attraversi la zona occupata dal gas, può liberare delle cariche (elettroni e ioni) lungo il proprio cammino. Per effetto della differenza di potenziale applicata, nascerà una corrente di drift degli elettroni verso l’elettrodo tenuto a potenziale positivo e degli ioni verso quello tenuto a potenziale negativo. Su tali elettrodi si avrà quindi una corrente, proporzionale al numero di ioni-elettroni prodotti e quindi all’energia che la particella ha perduto nell’attraversare il mezzo⁶.

Il più antico dei rivelatori a gas, la camera a ionizzazione, ha ora un limitato campo di applicazioni. Essa ha tipicamente come elettrodi due armature conduttrici parallele, come mostrato in figura 19.14.

Il campo elettrico costante esistente nella zona compresa tra le armature fa sì che elettroni e ioni migrino verso di esse, generando un segnale di corrente rivelabile. Occorre che il campo elettrico sia sufficientemente elevato da impedire che elettroni e ioni possano ricombinarsi prima di raggiungere le rispettive armature. Anche se gli elettroni, durante il moto di drift, subiscono molti urti con gli atomi del gas, la loro energia cinetica non è sufficientemente elevata da causare ulteriori ionizzazioni del gas. Questo è il tipico funzionamento della camera a ionizzazione, in cui il segnale raccolto è giusto la ionizzazione primaria prodotta dalla particella. Poiché il numero delle coppie elettrone-ione prodotte è tipicamente 120/cm, il segnale ottenuto è di modesta entità.

⁶Ricordiamo che una particella carica che attraversi un gas perde all’incirca 30 eV per ogni coppia elettrone-ione prodotta.

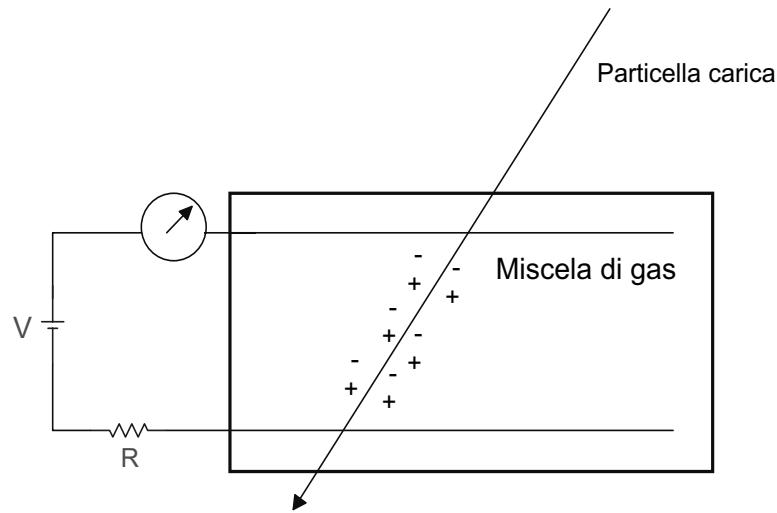


Figura 19.14: Schema di camera a ionizzazione a facce piane e parallele.

Se indichiamo con q la carica di ionizzazione (elettrone o ione) prodotta in un punto posto a distanza x dall'armatura positiva del rivelatore ed assimiliamo questo ad un condensatore a facce piane e parallele separate da una distanza d , il lavoro compiuto dal campo elettrico nello spostamento della carica q di un trattino dx è:

$$dW = Eqdx = \frac{V}{d} qdx$$

Questa variazione di energia deve esser compensata da un lavoro compiuto dal generatore, che deve mantenere costante la differenza di potenziale V fornendo una certa carica dQ . L'energia spesa dal generatore è:

$$dW_g = d \left(\frac{Q^2}{2C} \right) = \frac{QdQ}{C}$$

Uguagliando questa a dW si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{QdQ}{C} &= \frac{V}{d} qdx \\ dQ &= \frac{CV}{Q} q \frac{dx}{d} = q \frac{dx}{d} \end{aligned}$$

In un tempo dt avremo quindi, per gli elettroni:

$$dQ_e = \frac{q}{d} \frac{dx_e}{dt} dt = \frac{q}{d} v_e dt$$

dove $v_e = dx_e/dt$ è la velocità di drift degli elettroni nel campo elettrico E .

Analogamente avremo, per gli ioni:

$$dQ_i = \frac{q}{d} v_i dt$$

dove v_i è la velocità di drift degli ioni.

La velocità di drift è legata al campo elettrico dalla relazione:

$$v = \frac{\mu E}{P}$$

dove P è la pressione del gas ed il coefficiente μ vale all'incirca:

$$\mu \equiv \mu_e \simeq 10^3 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

per gli elettroni, e:

$$\mu \equiv \mu_i \simeq 1 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

per gli ioni.

Per campi elettrici di 10^3 V/cm , valori tipici delle velocità di drift nei gas a pressione atmosferica sono:

$$v_e \simeq 10^6 \text{ cm/s}$$

e:

$$v_i \simeq 10^3 \text{ cm/s}$$

Se prendiamo ad esempio: $d=1 \text{ cm}$ ed integriamo il segnale su $1 \mu\text{s}$, otteniamo allora:

$$dQ_i = 10^{-3}q$$

$$dQ_e = q$$

Vediamo quindi che il segnale dovuto agli elettroni è 10^3 volte quello dovuto agli ioni.

Con campi elettrici di circa 100 V/cm , in una camera a ionizzazione spessa 1 cm il tempo di drift è $\simeq 10 \mu\text{s}$ per gli elettroni e $\simeq 10 \text{ ms}$ per gli ioni. Si tratta quindi di un rivelatore intrinsecamente lento.

Se l'intensità del campo elettrico viene portata a valori abbastanza più elevati, gli elettroni possono acquistare un'energia cinetica sufficiente a causare ulteriori processi di ionizzazione e dar quindi luogo ad un processo a valanga (scarica Townsend). Questa è la zona di funzionamento schematicamente indicata in figura 19.15.

Nella figura, le due diverse curve sono relative rispettivamente a particelle α (curva superiore) e ad elettroni (curva inferiore). La curva relativa a particelle α , che producono un numero di coppie/cm molto più elevato, è circa due ordini di grandezza più in alto (almeno per potenziali applicati inferiori a circa 700 V). Notiamo, in entrambe le curve, il tratto iniziale, in cui una gran parte delle coppie prodotte si ricombinano, il che fa sì che l'altezza d'impulso osservata sia molto piccola. Segue un tratto (*plateau della regione di ionizzazione*) dove l'altezza d'impulso è costante al variare del potenziale. Qui la ricombinazione non ha più luogo e la carica totale raccolta coincide con quella prodotta dalla ionizzazione. Questa è la zona di funzionamento di una camera a ionizzazione.

Continuando ad aumentare il potenziale applicato, il campo elettrico comincia ad essere abbastanza elevato che ciascun elettrone prodotto acquista un'energia cinetica sufficiente a ionizzare a sua volta altri atomi, producendo una minuscola valanga.

Questa regione di funzionamento si raggiunge per valori tipici del potenziale di un centinaio di Volt. Questa è la zona di funzionamento detta "proporzionale".

A tensioni ancora più elevate (diverse centinaia di Volt), l'effetto di moltiplicazione aumenta rapidamente ma, con l'aumentare del numero di valanghe prodotte,

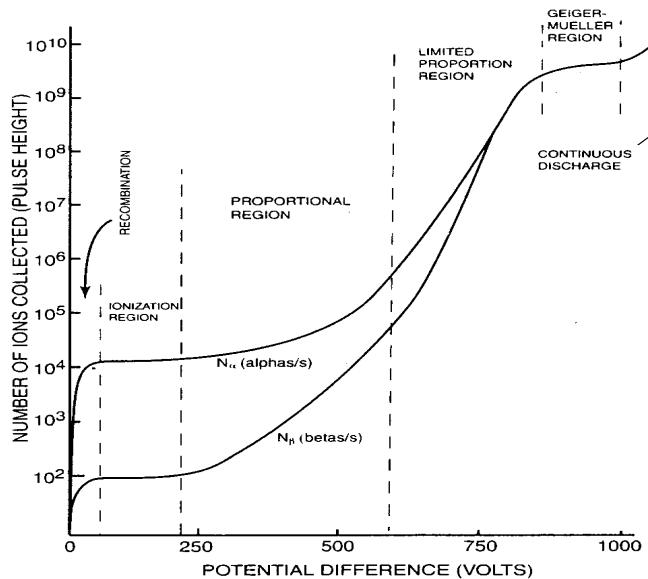


Figura 19.15: Ampiezza d’impulso misurata in un rivelatore a gas, al variare della tensione applicata. La curva superiore è relativa a particelle α , quella inferiore ad elettronni.

queste cominciano ad interagire tra loro; si entra nella zona nota come “di proporzionalità limitata”. Se il potenziale vien fatto aumentare ulteriormente, la carica raccolta diviene indipendente dalla ionizzazione che l’ha prodotta. In questa zona, come si vede dalla figura, la curva relativa alle particelle α viene a coincidere con quella relativa agli elettronni e forma un *plateau* all’aumentare della tensione. Questa è nota come “regione di Geiger-Mueller”. I rivelatori che operano in questa zona, noti comunemente come *contatori Geiger*, sono molto usati in misure di radioattività.

Ci concentreremo ora su quello che è oggi il più adoperato dei rivelatori a gas, quello che opera nella zona di “proporzionalità”, noto appunto come *contatore proporzionale*.

19.6.1 Il Contatore Proporzionale

Un notevole progresso nello sviluppo dei rivelatori a gas si è avuto con la realizzazione dei *contatori proporzionali*, il cui prototipo, mostrato in figura 19.16, è costituito da un cilindro metallico, avente un diametro dell’ordine del centimetro, costituente il catodo del rivelatore.

Si costruiscono oramai strutture costituite dall’equivalente di migliaia di contatori proporzionali assemblati in geometrie planari. Queste, note come *Camere Proporzionali a Fili*, consentono di determinare con buona precisione il punto in cui una o più particelle hanno attraversato la struttura.

Lungo l’asse del cilindro è tenuto sotto una leggera tensione un sottile filamento metallico avente un diametro di poche decine di μm , isolato elettricamente dalle pareti del cilindro. Questo costituisce l’anodo del rivelatore.

Il cilindro è chiuso alle estremità e riempito con un gas a pressione atmosferica.

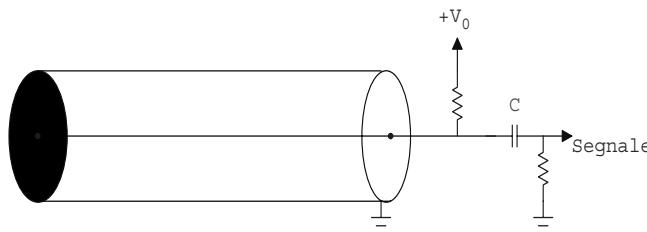


Figura 19.16: Prototipo di contatore proporzionale.

In genere si adopera un gas nobile (Argon) con l'aggiunta di una piccola percentuale ($\approx 10\%$) di un gas quale CO_2 o CH_4 . La differenza di potenziale applicata tra il filamento centrale (anodo) e l'involucro metallico (catodo) è di diverse centinaia di Volt. Gli elettroni liberati dal passaggio di una particella nel rivelatore sono accelerati verso l'anodo dal campo elettrico:

$$E(r) = \frac{V_0}{r \ln(\frac{r_c}{r_w})} \quad (19.1)$$

dove r è la distanza dall'anodo, V_0 il potenziale applicato, r_c il raggio del contenitore ed r_w quello del filo. In prossimità di quest'ultimo, dove il campo acquista valori estremamente elevati, gli elettroni hanno ormai acquistato abbastanza energia da ionizzare a loro volta, producendo altri elettroni che sono nuovamente accelerati. Il processo si ripete molte volte fino a generare una carica apprezzabile che è poi raccolta dall'anodo. Gli ioni positivi prodotti migreranno invece verso il catodo producendo un impulso di tensione ⁷ all'uscita (anodo nell'esempio) del rivelatore. I segnali prodotti sono proporzionali alla ionizzazione iniziale. Questo tipo di rivelatore può quindi fornire informazioni sull'energia depositata dalla particella nell'attraversarlo.

Notiamo che, a causa della moltiplicazione nel numero di elettroni causato dall'elevato campo elettrico, il dispositivo in questione ha un *guadagno intrinseco* elevato (valori tipici vanno da qualche centinaio a diverse migliaia). Ciò implica, oltre a segnali di ampiezza apprezzabile, basse "fluttuazioni" e quindi un'ottima risoluzione energetica e temporale.

Se un elettrone è generato in un certo punto posto a distanza r dal filo, indicando con q la carica ottenuta nel processo di moltiplicazione (con q negativa per gli elettroni, positiva per gli ioni) ed ammettendo che tale carica si sposti nel campo elettrico di un trattino dr in un tempo dt , il lavoro compiuto dal campo sarà:

$$dW = qE(r)dr$$

Il generatore che alimenta il contatore dovrà fornire, per mantenere costante il potenziale V_0 , una carica dQ tale da compensare questo lavoro. Il lavoro fatto dal

⁷In realtà il moto delle cariche verso gli elettrodi induce un segnale in corrente. Questo è però integrato dalla capacità del rivelatore, producendo così un segnale in carica, e quindi una tensione ai capi di tale capacità.

generatore è:

$$dW_g = d \left(\frac{Q^2}{2C} \right) = \frac{Q}{C} dQ$$

dove C è la capacità del rivelatore (condensatore cilindrico di raggio interno r_w ed esterno r_c).

Uguagliando le due espressioni dell'energia, troviamo:

$$dQ = \frac{C}{Q} q E(r) dr$$

da cui, facendo uso dell'espressione del campo elettrico (19.1):

$$dQ = \frac{Cq}{Q} \frac{V_0}{r \ln(r_c/r_w)} dr = \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \frac{dr}{r} \quad (19.2)$$

Notiamo che la carica q_e , uguale in modulo a q_i , si sviluppa, come questa, nelle immediate vicinanze del filo (anodo) dove il campo elettrico raggiunge valori molto elevati. Ne segue che il moto di drift degli elettroni (verso l'anodo) sarà estremamente breve, mentre quello degli ioni, che debbono raggiungere la parete esterna del rivelatore (catodo) dovendo attraversare una zona di campo molto meno intenso e con una minore mobilità, durerà molto più a lungo.

La carica totale indotta sul catodo dagli ioni è però molto maggiore di quella indotta sull'anodo dagli elettroni. Per calcolare la prima, integriamo l'espressione (19.2) tra il punto dove la carica si è sviluppata, a distanza r dall'asse, ed il punto di raccolta degli ioni, ad un raggio r_c :

$$Q_i = \int_r^{r_c} \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \frac{dr'}{r'} = \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \ln(r_c/r)$$

La carica indotta sull'anodo dal moto degli elettroni è invece:

$$Q_e = \int_r^{r_w} \frac{-q}{\ln(r_c/r_w)} \frac{dr'}{r'} = \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \ln(r_w/r)$$

Il rapporto delle due è:

$$\frac{Q_e}{Q_i} = \frac{\ln(r_w/r)}{\ln(r_c/r)}$$

dove, per quanto detto, si ha tipicamente:

$$\frac{r}{r_w} \leq 2$$

$$\frac{r_c}{r} \simeq 1000$$

Ne segue:

$$\frac{Q_e}{Q_i} < 0.1$$

Gli elettroni danno quindi un contributo minore alla carica indotta.

L'intensità della corrente associata agli elettroni è però, nei primi istanti dopo la produzione della carica, molto maggiore di quella associata agli ioni, che dura peraltro molto più a lungo.

La prima di queste è infatti data da:

$$i_e = \frac{dQ_e}{dt} = \frac{dQ_e}{dr'} \frac{dr'}{dt}$$

dove:

$$Q_e(r') = \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \int_r^{r'} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \ln(r'/r)$$

e quindi:

$$\frac{dQ_e}{dr'} = \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \frac{1}{r'}$$

È poi:

$$\frac{dr'}{dt} = v_e(r') = \mu_e E(r') = \mu_e \frac{V_0}{r' \ln(r_c/r_w)}$$

Si ha pertanto:

$$i_e(r') = \frac{q}{\ln(r_c/r_w)} \frac{1}{r'} \mu_e \frac{V_0}{r' \ln(r_c/r_w)} = \frac{qV_0}{\ln^2(r_c/r_w)} \frac{\mu_e}{r'^2}$$

Analogamente troviamo:

$$i_i(r') = \frac{qV_0}{\ln^2(r_c/r_w)} \frac{\mu_i}{r'^2}$$

In queste espressioni la variabile r' è la distanza dall'asse a cui è calcolata la corrente. Nel caso degli elettroni tale distanza è limitata a $\approx 40 \mu m$, mentre nel caso degli ioni essa arriva fino a $\approx cm$. Essendo inoltre la mobilità degli elettroni $\approx 10^3$ volte quella degli ioni, vediamo che il rapporto delle correnti i_e/i_i , nel (brevissimo) intervallo di tempo in cui quella dovuta agli elettroni è finita, è dell'ordine di 10^9 .

Si vede così che il segnale di corrente ha una componente veloce, ma di grande ampiezza, dovuta agli elettroni, sovrapposta ad una componente che è più lunga di molti ordini di grandezza, ma di ampiezza molto minore, dovuta agli ioni.

Analizzando in dettaglio il segnale generato da una particella carica che attraversa il rivelatore depositando una carica q , si può dimostrare che la forma dell'impulso di tensione generato dagli ioni è data da:

$$v(t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon L} \ln \left(1 + \frac{\mu CV_0}{\pi\epsilon r_c^2} t \right)$$

dove:

- L = lunghezza del rivelatore
- ϵ = costante dielettrica del gas
- $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(\frac{r_c}{r_w})}$ = capacità per unità di lunghezza del condensatore cilindrico.
- μ = mobilità degli ioni nel gas
- V_0 = potenziale applicato
- q = carica prodotta dalla ionizzazione primaria

- r_c = raggio del cilindro
- r_w = raggio del conduttore interno (filo)
- t = tempo (misurato a partire dall'istante in cui la particella è passata)

L'andamento tipico della $v(t)$ è mostrato in figura 19.17:

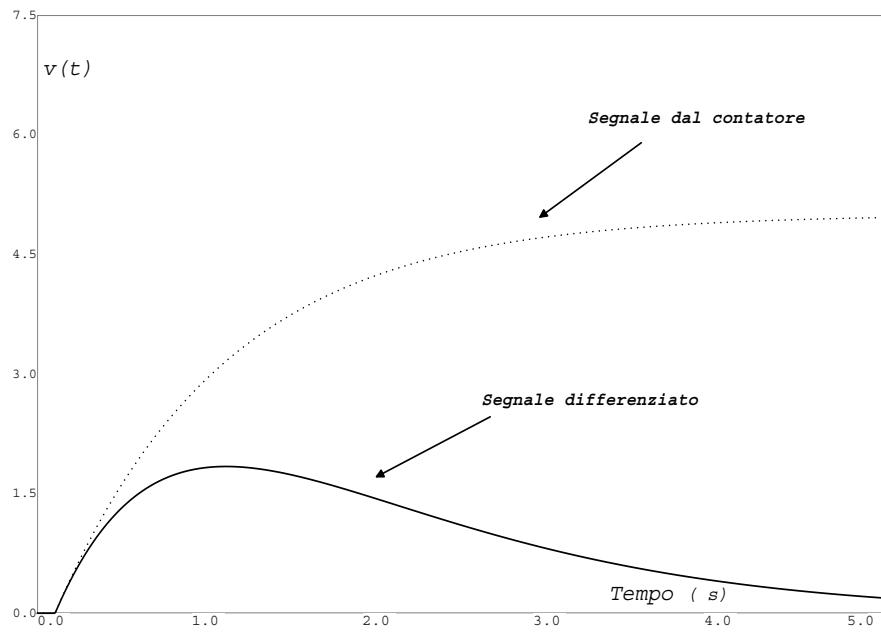


Figura 19.17: Andamento del segnale all'uscita di un contatore proporzionale.

Il segnale è intrinsecamente lungo. Occorrerà quindi differenziarlo, ad esempio utilizzando un circuito CR. Il segnale risultante dalla differenziazione è mostrato nella stessa figura.

A causa del processo di moltiplicazione a valanga che ha luogo nel gas, e del fatto che è possibile realizzare rivelatori in cui la zona di gas attraversata dalla particella è relativamente spessa ($\approx cm$), l'ampiezza dei segnali prodotti da tale tipo di rivelatore è intrinsecamente elevata e pone quindi richieste di non grande entità sull'elettronica posta a valle.

19.6.2 Il modo streamer limitato

Segnali di ampiezza ancora più elevata si ottengono nel modo di funzionamento a *streamer limitato*, usato prevalentemente in camere multifilo sensibili alla posizione di passaggio delle particelle cariche (tubi di Iarocci). Anche in questo tipo di rivelatori la carica di ionizzazione primaria che si forma lungo la traiettoria della particella incidente subisce un'amplificazione per la formazione di valanghe di Townsend, ma le modalità con cui tali valanghe si propagano attraverso il gas sono diverse. La differenza è dovuta in particolare al modo in cui sono trattati i fotoni ultravioletti emessi dagli atomi del gas eccitati dalle collisioni degli elettroni durante

l’evoluzione della valanga stessa. Tali fotoni possono infatti provocare a loro volta ulteriori ionizzazioni di atomi. Nel modo proporzionale, il processo a valanga viene soppresso dall’aggiunta di un gas cosiddetto di *quenching*, ad esempio isobutano, il quale è in grado di assorbire i fotoni ultravioletti senza ulteriore rilascio di elettroni.

Nei contatori Geiger i fotoni emessi in una valanga si propagano per tutta la lunghezza del filamento. Il processo quindi si arresta solo quando le valanghe secondarie, prodotte dai fotoni stessi, hanno occupato l’intero volume del gas, generando un segnale saturato che non dipende dal numero di coppie di ioni iniziali.

Nei rivelatori a streamer limitato l’uso di particolari miscele di gas in grado di assorbire i fotoni ultravioletti fa sì che il processo di moltiplicazione avvenga in modo controllato e solo in prossimità della regione di ionizzazione primaria. In questo modo le valanghe si sviluppano in forma di stretti “streamer” che si estendono solo per pochi millimetri, in direzione radiale, a partire dal filo anodico. Lo streamer termina quando il campo elettrico, di intensità decrescente mano a mano che ci si allontana dall’anodo, non è più in grado di generare ulteriori valanghe.

Nel modo di funzionamento a streamer limitato si ottengono i vantaggi di un elevato guadagno intrinseco tipico del contatore Geiger, ma senza i lunghi tempi morti che caratterizzano quest’ultimo a causa della carica spaziale che si produce per tutta la lunghezza del filo, la quale schermendo il campo elettrico nella regione di moltiplicazione rende il rivelatore stesso inutilizzabile per circa 100 μs .

19.7 Rivelatori a semiconduttore

In un normale diodo a semiconduttore realizzato mediante una giunzione p-n si ha una corrente apprezzabile solo se la polarizzazione applicata è diretta. L’applicazione invece di una polarizzazione inversa darà luogo ad una corrente molto piccola (la corrente inversa I_0) dovuta alla generazione termica di coppie elettrone-lacuna nella zona p ed in quella n (vedi figura 19.18). Attorno alla giunzione si forma quella che è nota come “zona di svuotamento”, dove è presente un accumulo di cariche negative sul lato “p” della giunzione e positive sul lato “n”. Notiamo che le cariche presenti in tale regione sono “legate”; esse non contribuiscono alla conducibilità che, in tale zona, è estremamente bassa. Di qui il termine “zona di svuotamento”.

Se una particella ionizzante attraversa la zona di svuotamento, essa libererà coppie elettrone-lacuna lungo il percorso. Come mostrato in figura, gli elettroni generati nella zona di svuotamento sul lato p saranno allora accelerati dal potenziale esterno V applicato e fluiranno verso la zona n. Analogamente, le lacune generate nella zona n in prossimità della giunzione saranno accelerate dal potenziale V e si muoveranno verso la zona p.

Si avrà in tal modo un improvviso aumento della corrente inversa attraverso il diodo. La misura di tale corrente può essere utilizzata per rivelare il passaggio della particella ed eventualmente per valutare l’energia che essa ha depositato nell’attraversare il mezzo (cioè la zona di svuotamento).

La generazione di coppie elettrone-lacuna in una giunzione p-n attraversata da una particella carica è, per molti rispetti, simile alla produzione di coppie elettrone-ione nei rivelatori a gas, con una importante differenza. Mentre nel caso dei rivelatori a gas l’energia necessaria a produrre una coppia era $\approx 30 \text{ eV}$, nel caso di un semi-

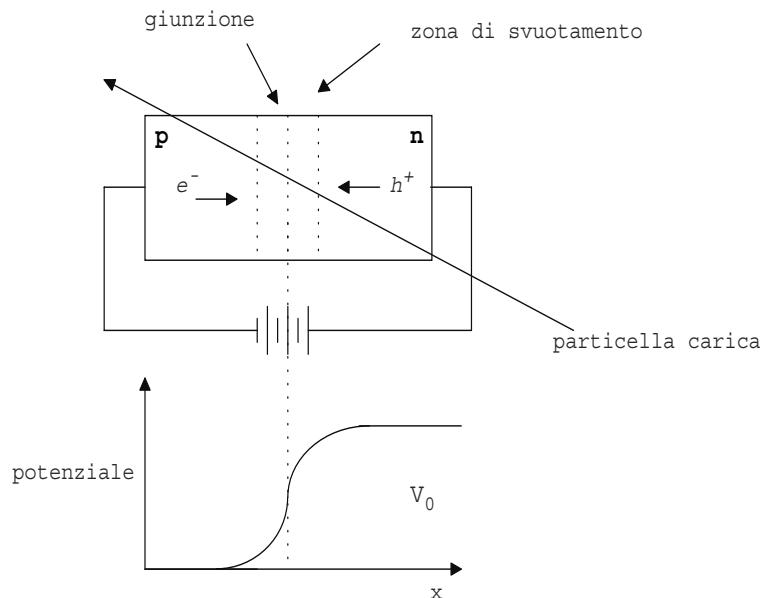


Figura 19.18: Principio di funzionamento di un rivelatore a semiconduttore e andamento del potenziale in prossimità della giunzione.

condutture sono sufficienti 3-4 eV, cioè un ordine di grandezza meno. Poiché la risoluzione in energia del rivelatore è tanto migliore quanto maggiore il numero di coppie prodotte, ne segue un indubbio vantaggio nel caso dei rivelatori a semiconduttore. A ciò contribuisce anche la maggior densità del materiale nel caso di un semiconduttore, rispetto al caso del gas. Per farci un'idea del segnale che possiamo aspettarci in un tipico rivelatore, consideriamo ad esempio il caso di un rivelatore al silicio dello spessore di 300 μm . Una particella ultrarelativistica (particella ionizzante al minimo o MIP) che attraversa tale spessore, deposita un'energia di circa 116 KeV. Poiché bastano circa 3.6 eV per produrre una coppia elettrone-lacuna, il numero di coppie prodotte sarà:

$$n_p = \frac{116}{3.6} \cdot 1000 \approx 32200$$

corrispondenti ad una carica di:

$$32200 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 5.16 \cdot 10^{-15} \text{ C}$$

cioè circa 5 fC.

I materiali adoperati per realizzare i diodi da usare come rivelatori sono principalmente il silicio ed il germanio. Rivelatori al germanio sono adoperati in misure che richiedano una elevata risoluzione energetica (fino a 150-200 eV). Ciò è possibile grazie al fatto che si riesce a produrre Ge con elevatissime purezze (concentrazioni di impurezze che scendono fino a 10^{10} atomi/cm³), il che consente di realizzare diodi al Ge che possono operare con tensioni inverse molto elevate e conseguentemente con zone di svuotamento molto ampie (fino a ≈ 10 mm). Purtroppo, tali rivelatori

debbono essere operati a bassissime temperature ($\approx 80^{\circ}K$) a causa della bassissima (0.7 eV) differenza di energia tra banda di conduzione e banda di valenza nel Ge. Se un rivelatore al Ge fosse adoperato a temperatura ambiente, la corrente inversa risultante sarebbe inaccettabilmente elevata.

Un uso molto più diffuso hanno i rivelatori al Si, che possono essere adoperati a temperatura ambiente. I diodi utilizzati come rivelatori in fisica nucleare e subnucleare sono di regola drogati in modo fortemente sbilanciato: un materiale di tipo p viene fortemente drogato n da un lato (o viceversa). Inoltre, lo spessore del materiale di tipo p è molto maggiore di quello di tipo n. In tali condizioni la zona di svuotamento verrà ad estendersi in profondità nel lato p (quello di maggiore spessore), come mostrato in figura 19.19.

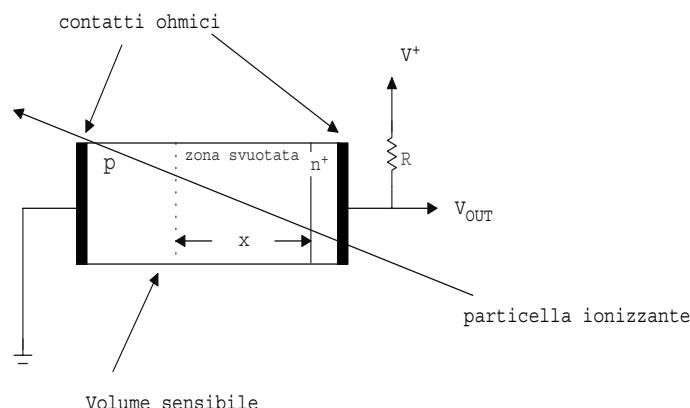


Figura 19.19: Schema di alimentazione di un rivelatore a semiconduttore.

La zona di svuotamento si estenderà tanto più in profondità all'interno della zona p quanto più elevata sarà la polarizzazione inversa applicata. Si può dimostrare (ref. [27], pag. 217, [29], pag. 357, [34] pag. 181) che la profondità della zona di svuotamento è data da:

$$d \simeq \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{eN_A}}$$

dove V_0 è la tensione inversa applicata, N_A la concentrazione degli accettori (nell'ipotesi $N_D \gg N_A$) ed ϵ la costante dielettrica del materiale.

Come vediamo, la profondità della zona di svuotamento cresce con la radice quadrata della tensione inversa applicata. Se il rivelatore è di piccolo spessore sarà facile raggiungere una tensione tale da far sì che la larghezza della zona svuotata, d, divenga praticamente uguale allo spessore del detector. Si dice che il rivelatore è allora *completamente svuotato*. Nei rivelatori comunemente adoperati, il completo svuotamento si raggiunge per tensioni di 50-100 V.

Questa condizione di lavoro è quella quasi sempre adoperata.

Si può facilmente vedere che, per un rivelatore completamente svuotato, il campo elettrico decresce linearmente in funzione della distanza x dalla giunzione. Se la tensione inversa applicata è maggiore di quella che corrisponde al completo svuotamento, il campo elettrico sarà la somma di quello uniforme dovuto a tale "tensione

in eccesso” e di quello linearmente decrescente che corrisponde al completo svuotamento. Se la tensione inversa vien fatta aumentare ulteriormente, il termine costante diverrà quello dominante. Useremo nel seguito tale modello.

Dobbiamo ora esaminare i processi che hanno luogo nel rivelatore quando questo è attraversato da una particella carica. Sono possibili due situazioni estreme:

- (a) la particella deposita tutta la sua energia in un punto ben preciso, caratterizzato da un determinato valore di x ;
- (b) la particella attraversa tutto il rivelatore, depositando energia a tutti i possibili valori di x .

Calcoleremo la risposta temporale del rivelatore nel caso a). La risposta nel caso b) potrà poi essere ottenuta, effettuando una opportuna integrazione, a partire da quella relativa al caso a), dove si intenda per “energia depositata” quella della singola coppia elettrone-lacuna, nel dato punto del campo presente all’interno del diodo.

Notiamo che il diodo svuotato può essere assimilato ad un condensatore piano, di spessore pari alla larghezza d della zona di svuotamento che, nel caso in esame, coincide in pratica con lo spessore fisico del rivelatore.

Esaminiamo l’effetto che il moto di drift delle cariche (elettroni e lacune) liberate nella zona di svuotamento, ha sulla carica presente sulle “armature” del condensatore-diodo. La capacità del condensatore è:

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

dove A è la superficie delle “armature” ed ϵ la costante dielettrica.

Se la differenza di potenziale ai capi del “condensatore” è V , la sua energia sarà:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Una carica elementare q (elettrone o lacuna), posta ad una distanza x dalla giunzione, avrà un’energia:

$$\mathcal{E} = qxE(x) = qxE$$

dove E è il campo elettrico, che nel caso in esame non dipende da x . Essendo poi $E = V/d$, avremo:

$$\mathcal{E} = qxE = qx\frac{V}{d}$$

Se ora la carica si sposta di un tratto infinitesimo dx , la conseguente variazione della sua energia (cioè il lavoro che il campo avrà fatto su di essa) sarà:

$$d\mathcal{E} = q\frac{V}{d}dx \quad (19.3)$$

A questa dovrà corrispondere una variazione dell’energia totale del condensatore:

$$d\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{Q}{C}dQ \quad (19.4)$$

Uguagliando le espressioni (19.3) e (19.4) si trova:

$$\frac{Q}{C}dQ = \frac{q}{d}Vdx$$

da cui:

$$dQ = \frac{q}{d}dx$$

Nel caso in esame, le cariche che si spostano per effetto del campo elettrico sono l'elettrone e la lacuna prodotta nel punto di ascissa x. Esse si muoveranno in versi opposti ma, avendo cariche opposte, i loro effetti saranno concordi.

L'elettrone si muoverà in direzione opposta a quella del campo elettrico (cioè verso destra nella figura), la lacuna nella direzione del campo.

Le rispettive velocità di drift v_e e v_h (costanti se il campo è costante) sono date da:

$$\begin{aligned} v_e &= \mu_e E \\ v_h &= \mu_h E \end{aligned}$$

dove μ_e e μ_h sono le rispettive mobilità (che, per il silicio a temperatura ambiente, valgono: $\mu_e \simeq 1350 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$ e $\mu_h \simeq 480 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$).

La carica totale indotta dal moto dell'elettrone al tempo t sarà allora:

$$Q_e(t) = \frac{q}{d}v_e t$$

Se indichiamo con N_e il numero di elettroni prodotti nel punto x, la relativa corrente sarà:

$$I_e(t) = \frac{N_e q}{d} v_e$$

al tempo $t = x/v_e$ l'elettrone avrà raggiunto la giunzione (che, nel modello in esame, rappresenta una delle armature del condensatore). La carica finale indotta dal moto di un singolo elettrone sarà quindi:

$$Q_e \left(t = \frac{x}{v_e} \right) = \frac{q}{d}x$$

Analogamente, la carica indotta dal moto di una singola lacuna al tempo t sarà:

$$Q_h(t) = \frac{q}{d}v_h t$$

e la relativa corrente, per un numero N_h di lacune prodotte nel punto x, sarà:

$$I_h(t) = \frac{N_h q}{d} v_h$$

Questa sarà diversa da zero fino all'istante:

$$t' = \frac{d-x}{v_h}$$

A tale istante la carica Q_h avrà raggiunto l'altra armatura. La carica finale indotta dal moto di una singola lacuna sarà allora:

$$Q \left(t = \frac{d-x}{v_h} \right) = q \frac{d-x}{d}$$

La carica complessiva raccolta sarà:

$$\frac{q}{d}x + \frac{q}{d}(d-x) = q$$

Se la radiazione incidente perde tutta la propria energia appena al di là della giunzione, x sarà molto piccolo ed il contributo degli elettroni sarà trascurabile (la relativa corrente si annulla in tempi molto brevi). Sopravvive in tal caso il solo contributo delle lacune.

Riassumendo, i contributi alla carica raccolta al tempo t sono dati da:

$$Q_e(t) = \frac{q}{d}v_e t \quad (0 < t < \frac{x}{v_e})$$

$$Q_h(t) = \frac{q}{d}v_h t \quad (0 < t < \frac{d-x}{v_h})$$

$$Q(t) = \frac{q}{d}(v_e + v_h)t \quad (0 < t < \frac{x}{v_e})$$

$$Q(t) = \frac{q}{d}v_h t \quad (\frac{x}{v_e} < t < \frac{d-x}{v_h})$$

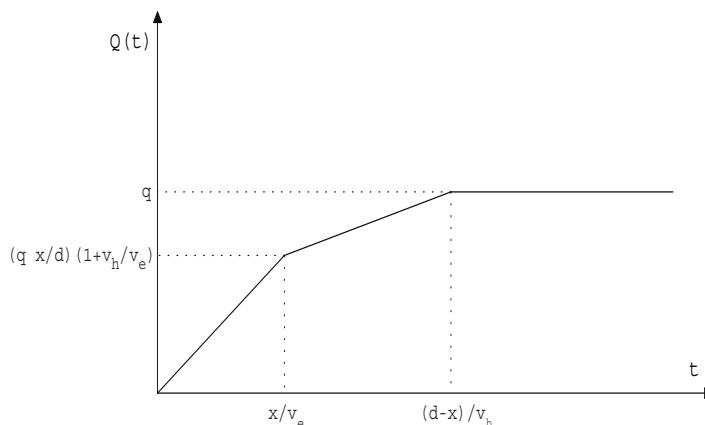


Figura 19.20: Forma dell'impulso di carica in un rivelatore a semiconduttore con campo elettrico costante.

L'andamento temporale della carica raccolta sarà allora quello indicato in figura 19.20 dove si è fatta l'ipotesi che sia:

$$\frac{d-x}{v_h} > \frac{x}{v_e}$$

Ciò è vero nell'ipotesi che la polarizzazione inversa applicata al diodo sia sufficientemente elevata da poter considerare il campo elettrico costante nell'intera zona attiva.

Qualora invece la polarizzazione applicata fosse giusto quella sufficiente ad ottenere il completo svuotamento del rivelatore, il campo avrebbe un andamento linearmente decrescente andando dalla giunzione (valore massimo del campo) all'estremità

della zona attiva del rivelatore (campo nullo). In tal caso le formule ottenute vanno modificate. Il risultato (vedasi [27] e [29]) è:

$$Q_e(t) = \frac{q}{d}x \left(1 - e^{\mu_e t / \mu_h \tau}\right) \quad (t < \tau \frac{\mu_h}{\mu_e})$$

$$Q_e(t) = \frac{q}{d}x(1 - e) \quad (t \geq \tau \frac{\mu_h}{\mu_e})$$

$$Q_h(t) = -\frac{q}{d}x \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

dove $\tau = \epsilon/\sigma$; ϵ è la costante dielettrica, σ la conducibilità e μ_e e μ_h indicano rispettivamente le mobilità degli elettroni e delle lacune. Inoltre x è la distanza dalla giunzione del punto dove la coppia è stata prodotta.

La forma del corrispondente impulso di carica è quella mostrata in figura 19.21.

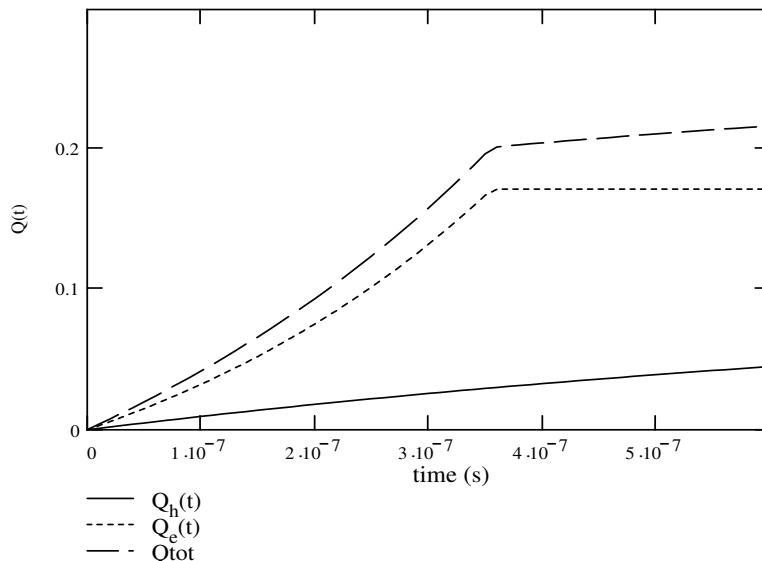


Figura 19.21: Forma dell'impulso di carica in un rivelatore a semiconduttore con campo elettrico linearmente decrescente.

Il parametro τ determina ora il tempo di salita del segnale. In silicio abbiamo $\tau = \rho 10^{-12} s$, con la resistività ρ espressa in Ωcm . Quindi, per $\rho \simeq 1000 \Omega cm$, $\tau = 1 ns$.

Notiamo che $Q_h(t)$ satura asintoticamente al valore $-qx/d$, mentre $Q_e(t)$ satura al valore $(q/d)x(1 - e)$.

Notiamo poi che, non essendo presente nel caso dei rivelatori a semiconduttore alcun processo di moltiplicazione come quello incontrato nel caso dei tubi proporzionali e degli scintillatori accoppiati a fotomoltiplicatori, il segnale prodotto da un rivelatore a semiconduttore è relativamente piccolo. Si dovrà quindi ricorrere ad una preamplificazione del segnale prima di ogni ulteriore elaborazione/trasmissione dello stesso. Si dovrà quindi trasformare il segnale in carica in un segnale in tensione ed a tale scopo si ricorrerà ad un preamplificatore di carica, come discusso qui di seguito.

19.7.1 Preamplificatori di carica per rivelatori a semiconduttore

Un tipico preamplificatore è illustrato nella figura 19.22(a). Supponiamo che l'amplificatore invertente indicato abbia un guadagno A indipendente dalla frequenza.

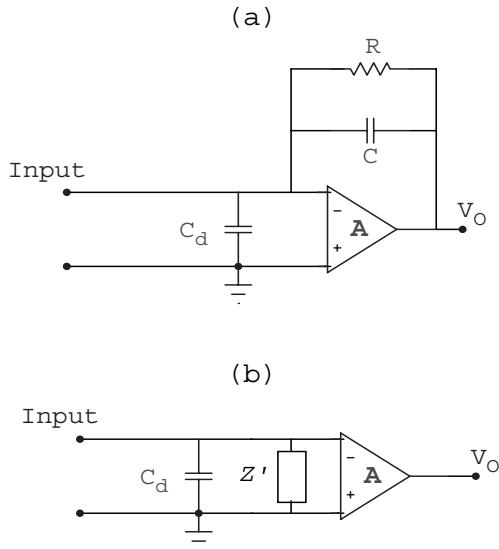


Figura 19.22: Amplificatore di carica per rivelatore a semiconduttori.

In questo circuito C_d schematizza la capacità associata al detector più eventuali cavetti di collegamento con l'amplificatore, in parallelo alla capacità d'ingresso del preamplificatore. Poiché C_d può cambiare con la temperatura, scelta del punto di lavoro etc., è importante realizzare un circuito che fornisca una risposta indipendente da tale capacità. Ciò è quanto avviene nel circuito di figura. Per vederlo, ammettiamo che il segnale in ingresso sia un impulso di corrente:

$$i(t) = Q\delta(t)$$

con:

$$\int_0^\infty i(t)dt = Q$$

Facendo uso del teorema di Miller, trasformiamo il circuito in quello mostrato in figura 19.22(b), dove è:

$$Z' = \frac{Z}{1+A}$$

con A il modulo del guadagno dell'amplificatore e Z il parallelo di R con l'impedenza capacitiva associata a C :

$$Z = \frac{1}{C(s + 1/RC)} = \frac{1}{C(s + 1/\tau)}$$

dove $\tau = RC$.

Quindi:

$$Z' = \frac{1}{C(1+A)(s + 1/\tau)}$$

La trasformata dell'impedenza del parallelo di Z' e Z_{C_d} è:

$$\frac{1}{C(1+A)/\tau + [C(1+A) + C_d] s}$$

La risposta sarà, come richiesto, indipendente da C_d se è:

$$C_d \ll C(1+A)$$

In tal caso, l'espressione precedente diventa:

$$\frac{1}{C(1+A)} \frac{1}{s + 1/\tau} \equiv Z_{Tot}$$

La trasformata della tensione all'ingresso dell'amplificatore sarà ora:

$$\tilde{v}_{in} = Z_{Tot} \cdot \tilde{i}(s) = Z_{Tot} Q$$

dove $\tilde{i}(s)$ è la trasformata della $i(t)$.

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che la trasformata di Laplace di $i(t) = Q\delta(t)$ è giusto Q .

Da questa, antitrasformando, si ottiene:

$$v_{in} = \frac{Q}{C(1+A)} e^{-t/\tau}$$

e quindi:

$$v_{out} = \frac{AQ}{C(1+A)} e^{-t/\tau} \approx \frac{Q}{C} e^{-t/\tau}$$

Quindi la risposta di tale amplificatore dipende solo dalla capacità di feedback C. Il tempo di caduta del segnale dipende dal prodotto $\tau = RC$.

Notiamo ancora che il guadagno dell'amplificatore, cioè il rapporto tra tensione in uscita e carica in ingresso per $t = 0$ è uguale ad $1/C$, con C la capacità di feedback.

19.8 Struttura della catena di rivelazione ed amplificazione

La funzione principale di un amplificatore di impulsi in fisica nucleare/subnucleare è quella di trasformare il debole segnale generato dal rivelatore, dopo averlo amplificato ed opportunamente riformato, in un impulso più adatto per la successiva elaborazione. Il primo passo di tale elaborazione consiste nell'immagazzinamento (sample and hold) del segnale analogico e nella successiva conversione dell'altezza dell'impulso in un numero (conversione analogico-digitale mediante ADC) ed

eventualmente del tempo associato al fronte di salita del segnale in un numero (conversione tempo-digitale mediante un TDC).

In tale processo, il rivelatore ha il compito di convertire l'energia depositata in una carica elettrica, che può dar luogo ad un segnale in corrente, se la costante di tempo associata al preamplificatore è piccola rispetto alla durata del processo che dà luogo al deposito di energia nel rivelatore; ad un segnale in carica nel caso opposto.

Il rivelatore è seguito da un preamplificatore, che converte il segnale di carica (o di corrente) in un segnale di tensione, con un minimo contributo di rumore. Questo è seguito da un amplificatore-formatore e dalla catena di lettura.

L'informazione contenuta nell'impulso iniziale deve essere preservata in tale processo. A tale scopo il sistema preamplificatore-formatore-amplificatore deve esser tale da fornire una relazione lineare tra l'ampiezza del segnale prodotto dal rivelatore e quella del segnale all'uscita dell'amplificatore, conservando al medesimo tempo l'informazione temporale. Forma, ampiezza e contenuto in rumore del segnale che il preamplificatore fornisce all'amplificatore sono determinati dal rivelatore e dal preamplificatore. Notiamo che l'energia depositata dalla particella nel rivelatore è proporzionale alla carica totale depositata sulla capacità d'ingresso del preamplificatore, cioè a:

$$\int_0^\infty i(t)dt$$

Se tuttavia la forma dell'impulso di corrente è *costante* tra segnali successivi, allora *l'altezza* dell'impulso è anch'essa proporzionale all'energia depositata e può quindi esser adoperata come una misura di questa. Di qui la terminologia di *pulse-height analysis*.

La carica totale generata da ciascuna particella assorbita nel rivelatore è direttamente proporzionale all'energia che essa ha perduto. Si tratta di cariche molto piccole, che variano tra 10^{-15} e 10^{-10} Coulomb/impulso (cioè tra 1 fC e 100 pC).

La durata dell'impulso varia a seconda del rivelatore e, per un dato rivelatore, può variare con il tipo di particella e con la sua energia. La durata più breve si ha nel caso dei rivelatori a scintillazione e nei rivelatori a semiconduttore aventi una zona di svuotamento poco profonda. In tali casi, le durate tipiche variano tra 0.1 e 10 ns. Le durate più lunghe si hanno nel caso dei rivelatori a gas (10 ns-5 μ s).

Per ciò che concerne l'energia convertita in carica, i fattori di conversione (ϵ) nel caso dei rivelatori a semiconduttore sono 3.6 eV/coppia elettrone-lacuna nel silicio e 2.9 eV nel caso del Germanio. Non si ha moltiplicazione.

Nei rivelatori a scintillazione il valore effettivo di ϵ varia tra 3 e 30 eV/elettrone, con guadagni dell'ordine di 10^7 nel fotomoltiplicatore.

Nei rivelatori a gas i fattori di conversione valgono 25-35 eV/coppia elettrone-ionizzazione. I fattori di moltiplicazione sono dell'ordine di 10^4 nel caso dei contatori proporzionali.

Notiamo ancora che, anche nei casi in cui il segnale all'uscita del rivelatore è una corrente, è l'integrale di questa, cioè la carica, che è direttamente legata all'energia rilasciata nel rivelatore. È quindi necessario in tal caso integrare il segnale.

Se la costante di tempo degli elementi presenti all'uscita del rivelatore è piccola rispetto alla durata della corrente, la forma del segnale in uscita sarà preservata ed avremo un segnale del tipo "current-mode". Se viceversa la costante di tempo è grande, il segnale in corrente sarà integrato dal preamplificatore ed avremo in uscita

un segnale di tensione: $V=Q/C$, dove Q è la carica totale rilasciata nel detector e C è la capacità d'uscita. L'impulso di tensione avrà poi un decadimento esponenziale con costante di tempo determinata dal rivelatore. Il tempo di salita sarà invece coincidente con il tempo di salita dell'impulso di corrente e non dipenderà dalla costante di tempo del circuito.

Nella scelta di un sistema di preamplificazione-amplificazione-shaping, è necessario tener conto di diversi fattori. Tra questi i più importanti sono:

1. il rumore introdotto dagli amplificatori;
2. la risposta temporale, legata al problema del “pile-up”;
3. la linearità.

Di alcuni di questi problemi ci occuperemo nelle prossime sezioni.

19.8.1 Preamplificatori e rumore

Se il segnale all'uscita del rivelatore è di piccola ampiezza, il rumore elettronico introdotto dal preamplificatore diviene importante. È questo il caso dei rivelatori a semiconduttore, ma anche di altri (ad esempio quelli ad Argon liquido) che non possiedono un meccanismo interno di moltiplicazione della carica, quale quello presente ad esempio nei tubi proporzionali.

Val la pena di ricordare che la risoluzione in energia è determinata sia dalla risoluzione intrinseca del rivelatore che dai limiti posti dal rumore associato ai preamplificatori-amplificatori che seguono il rivelatore. A sua volta, la risoluzione intrinseca del rivelatore è determinata dalle fluttuazioni nel numero di coppie elettrone-ione nel caso dei rivelatori a gas, dal numero di coppie elettrone-lacuna nel caso di quelli a semiconduttore, ed infine dal numero di fotoelettroni che arrivano ai primi dinodi del fotomoltiplicatore nel caso di uno scintillatore.

Se indichiamo con ΔE_{flutt} il contributo alla risoluzione da parte delle fluttuazioni e con ΔE_{elec} quello dovuto al rumore degli amplificatori, la risoluzione sarà:

$$\Delta E = \sqrt{\Delta E_{flutt}^2 + \Delta E_{elec}^2}$$

A seconda del tipo di rivelatore, potrà risultare dominante l'uno o l'altro dei due contributi. Ad esempio, in un rivelatore a scintillazione sarà in genere dominante ΔE_{flutt} ; in un rivelatore a semiconduttore basato sul Ge sarà dominante il rumore elettronico.

Poiché il segnale di tensione all'uscita del preamplificatore corrisponde ad una carica all'uscita del rivelatore (la carica accumulata sul condensatore d'ingresso del preamplificatore), il rumore osservato in uscita, cioè il valore quadratico medio v_{rms} della tensione in uscita, può essere espresso come quella carica che, se presente all'uscita del rivelatore, darebbe all'uscita del preamplificatore una tensione pari a v_{rms} . Questa è nota come “carica equivalente di rumore” (Equivalent Noise Charge o ENC). Notiamo che la *carica media di rumore* è nulla, mentre è diverso da zero il suo valore quadratico medio.

Anche se la carica depositata nel corso di ogni singolo evento fosse costante, il valor medio osservato all'uscita dell'amplificatore fluttuerrebbe come conseguenza del rumore introdotto dall'amplificatore stesso. Poiché l'energia depositata è proporzionale alla carica depositata, ciò implica un limite sulla risoluzione energetica.

Se indichiamo con C_{in} la capacità d'ingresso del preamplificatore, con A_0 l'amplificazione e con $Q_n = ENC$ la “equivalent noise charge”, avremo:

$$ENC = Q_n = C_{in} \frac{v_{rms}}{A_0}$$

Le dimensioni della ENC sono Coulomb. È però uso comune quello di quotarla in “numero di elettroni”, dividendo il valore in Coulomb per la carica dell'elettrone ($1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb).

Esaminiamo ad esempio il legame tra ENC e risoluzione in energia nel caso di un rivelatore al silicio. Per produrre una coppia elettrone-lacuna nel silicio sono necessari in media 3.66 eV. Se osserviamo un gran numero di eventi in ciascuno dei quali una particella di energia E deposita (per produzione di coppie elettrone-lacuna) tutta la sua energia nel materiale, il numero di coppie sarà:

$$n_p = \frac{E \text{ (eV)}}{3.66} \quad (19.5)$$

La carica all'uscita del detector sarà:

$$q = n_p \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} E}{3.66} \text{ (C)} = 0.437 \cdot 10^{-19} E \text{ (C)} \quad (19.6)$$

e la tensione all'uscita del preamplificatore:

$$v = \frac{q}{C_{in}} A_0 = E \frac{A_0}{C_{in}} \cdot 0.437 \cdot 10^{-19} \text{ (Volt)} \quad (19.7)$$

Se possono essere trascurate le fluttuazioni statistiche sul numero n_p di coppie, la tensione in uscita dovrà avere un valore ben definito, uguale per tutti gli eventi. La distribuzione sarà cioè una funzione $\delta(v)$. Il rumore del preamplificatore altera questa situazione. Non avremo più una funzione δ ma una gaussiana, la cui larghezza a metà altezza è legata al rumore introdotto dall'amplificatore.

Se indichiamo con Q la carica totale depositata in un evento, con Q_n la *carica di rumore* nel medesimo evento e con Q_t la carica effettiva totale, avremo:

$$Q_t = Q + Q_n$$

$$\overline{Q_t^2} = \overline{Q^2} + \overline{Q_n^2} = Q^2 + \overline{Q_n^2}$$

poiché stiamo facendo l'ipotesi che la carica depositata sia sempre la medesima.

D'altronde, poiché la carica Q_n fluttua con valor medio zero, avremo:

$$\overline{Q_t} = Q$$

Lo scarto quadratico medio della carica totale sarà allora:

$$\sigma_Q^2 = \overline{Q_t^2} - \overline{Q_t}^2 = \overline{Q_n^2} = ENC^2$$

La fluttuazione sull'energia misurata sarà allora:

$$\sigma_E = \sigma_Q / 0.437 \cdot 10^{-19} \text{ (eV)}$$

la larghezza a metà altezza della distribuzione in energia sarà poi data da:

$$\Gamma = FWHM = \sigma_E \cdot 2.36 \quad (19.8)$$

dove il fattore 2.36 è quello che lega la larghezza a metà altezza alla σ della distribuzione.

Ad esempio, una ENC di 500 elettroni, corrispondente ad una carica di $8 \cdot 10^{-17}$ (C), corrisponde ad una FWHM per l'energia di 1.83 KeV.

La ENC dipende sia dalle caratteristiche del preamplificatore, che dalla capacità d'uscita del rivelatore e di quella associata ai cavi di collegamento. Si può far vedere (vedi sezione 19.8.9) che essa è esprimibile come:

$$ENC = k_1 + k_2 C_{ext}$$

dove C_{ext} contiene l'effetto delle capacità associate ai cavi ed al rivelatore, mentre il contributo della capacità d'ingresso del preamplificatore è contenuto nel termine k_1 . Le costanti k_1 e k_2 , dipendenti dal preamplificatore, sono normalmente fornite dal costruttore.

19.8.2 Rumore elettronico

Abbiamo visto come il rumore dovuto al rivelatore ed all'elettronica di amplificazione influisca sulla risoluzione energetica. Ci proponiamo ora di analizzare con maggior dettaglio tale problema. Per una trattazione approfondita dell'argomento si consultino le referenze [36] e [35].

Inizieremo con l'analizzare l'effetto che sul rumore ha la capacità C_{det} del rivelatore.

Occorre però premettere alcune considerazioni sulle possibili sorgenti di rumore e sui loro effetti, ricordando che stiamo parlando di rumore prodotto all'interno dell'amplificatore, anche se, seguendo la consuetudine, parliamo di rumore riferito all'ingresso dell'amplificatore. Molte delle considerazioni che faremo sono già state discusse nel capitolo 18.

I tipi di rumore che conosciamo sono:

1. **rumore termico.** Questo è caratterizzato da uno spettro di potenza dato da:

$$\frac{dP_{noise}}{df} = 4KT$$

o equivalentemente da una tensione quadratica media di rumore:

$$e_n^2 = \frac{dV_{noise}^2}{df} = 4KTR$$

o da una corrente quadratica media:

$$i_n^2 = \frac{dI_{noise}^2}{df} = \frac{4KT}{R}$$

2. **shot noise.** Questo è caratterizzato da una corrente quadratica media:

$$i_n^2 = \frac{dI_{noise}^2}{df} = 2q_e I$$

dove q_e è la carica dell'elettrone ed I la corrente costante.

3. **rumore 1/f.** La potenza di rumore per unità di intervallo di frequenza è:

$$\frac{dP_{noise}}{df} = \frac{1}{f^\alpha}$$

con $\alpha \simeq 0.5 \div 2.0$

Il rumore totale dipende dalla larghezza di banda del sistema. Ad esempio, la tensione totale di rumore all'uscita di un amplificatore di tensione avente un guadagno $A_v(f)$ è data da:

$$v_{on}^2 = \int_0^\infty e_n^2 A_v^2(f) df$$

Occorre tener presente la distinzione tra la “larghezza di banda” (signal bandwidth) dell'amplificatore e la “larghezza di banda di rumore” (noise bandwidth) del medesimo.

Ammettiamo infatti che il guadagno dell'amplificatore sia espresso come:

$$A(f) = A_0 G(f)$$

con A_0 il valore massimo del guadagno e $G(f)$ l'andamento in funzione della frequenza.

La larghezza di banda Δf_s dell'amplificatore è definita come:

$$\Delta f_s = f_{max} - f_{min}$$

dove f_{max} ed f_{min} sono rispettivamente la frequenza di taglio superiore ed inferiore.

La larghezza di banda di rumore Δf_n è definita dalla relazione:

$$v_{no} = \sqrt{\int_0^\infty e_{ni}^2 |A_0 G(f)|^2 df} = e_{ni} A_0 \sqrt{\int_0^\infty G^2(f) df} = e_{ni} A_0 \sqrt{\Delta f_n}$$

dove v_{no} è la tensione di rumore all'uscita dell'amplificatore ed e_{ni} quella all'ingresso e dove si suppone che il rumore sia *bianco*.

Consideriamo come esempio il semplice amplificatore a transistor di figura 19.23.

Il guadagno è dato da:

$$A_v = g_m R_L \frac{1}{1 + j\omega R_L C_0}$$

dove g_m è la transconduttanza del transistor.

Ponendo in questa:

$$g_m R_L \equiv A_0$$

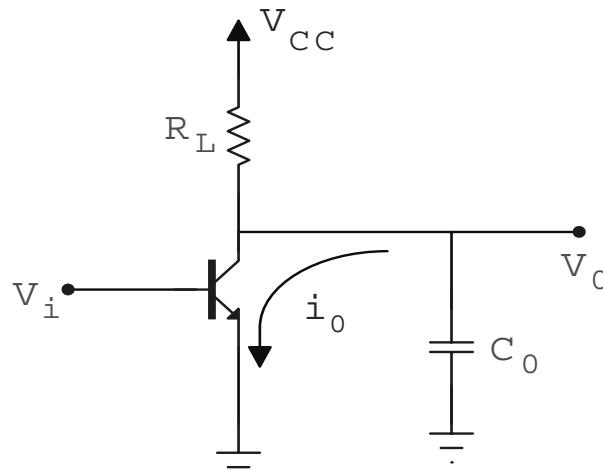


Figura 19.23: Amplificatore a transistor adoperato nel calcolo della banda di rumore.

$$G(f) = \frac{1}{1 + j(2\pi f R_L C_0)}$$

Si ottiene con semplici passaggi:

$$\Delta f_n = \int_0^\infty G^2(f) df = \int_0^\infty \frac{df}{1 + 4\pi^2(R_L C_0)^2 f^2} = \frac{1}{4R_L C_0}$$

Mentre la banda passante dell'amplificatore, come si può facilmente vedere è:

$$\Delta f_s = \frac{1}{2\pi R_L C_0}$$

Vediamo così che le due grandezze: “noise bandwidth” e “signal bandwidth”, non sono in genere uguali.

Esaminiamo ora la dipendenza del rapporto segnale/rumore dalla capacità del rivelatore e dalla capacità d'ingresso del preamplificatore, distinguendo tra i tre possibili tipi di preamplificatore: di *tensione*, di *carica* e di *corrente*.

Se l'amplificatore è di tensione, e la sua costante di tempo è abbastanza grande da integrare il segnale di corrente rilasciato dal rivelatore, la tensione in ingresso sarà data da:

$$v_{in} = \frac{Q_{det}}{C} = \frac{\int i(t) dt}{C}$$

dove C è la somma della capacità del rivelatore, di quella dei cavetti di collegamento e di quella d'ingresso del preamplificatore. Trascurando quella dei cavetti, chiameremo C_{det} la capacità del rivelatore e C_{in} quella del preamplificatore.

Per una data tensione di rumore v_n all'ingresso del preamplificatore avremo per il rapporto segnale/rumore (S/N):

$$\frac{S}{N} = \frac{v_{in}}{v_n} \propto \frac{1}{C}$$

Vediamo che il rapporto segnale/rumore aumenta al diminuire di C . Se inoltre è $C_{det} \ll C_{in}$ il rapporto S/N diviene indipendente da C_{det} .

Esaminiamo ora il caso di un amplificatore di carica, come quello di figura 19.24.

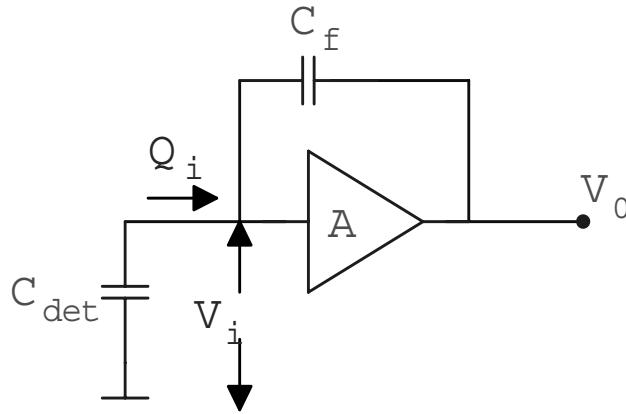


Figura 19.24: Amplificatore di carica.

Lo schema è simile a quello già visto, con l'unica differenza che ora la resistenza in parallelo a C_f è assente. Il guadagno in tensione dell'amplificatore senza feedback è:

$$A = -\frac{dv_0}{dv_i}$$

Per il guadagno in carica dell'amplificatore con feedback si può facilmente verificare che esso è dato da:

$$A_f^Q \equiv \frac{dv_0}{dQ_i} = \frac{1}{C_f}$$

Infatti la differenza di potenziale ai capi di C_f è data da:

$$v_f = (A + 1)v_i$$

La carica depositata su C_f sarà:

$$Q_f = C_f v_f = C_f (A + 1) v_i$$

Questa deve uguagliare Q_i poiché l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore è molto grande. Ne segue:

$$\frac{Q_i}{v_i} = (A + 1)C_f$$

Questa è quindi la capacità d'ingresso del nostro amplificatore. Il guadagno in carica è allora:

$$A_f^Q = \frac{v_0}{Q_i} = \frac{Av_i}{C_i v_i} = \frac{A}{(A + 1)C_f} \simeq \frac{1}{C_f}$$

Come visto, la capacità d'ingresso: $(A + 1)C_f$ è molto grande ed in genere è molto maggiore di C_{det} . Ne segue che la tensione d'uscita è indipendente da C_{det} .

Cosa possiamo dire per ciò che riguarda il rumore ? Notiamo che questo nasce all'interno dell'amplificatore. Non esiste un segnale di rumore all'ingresso. Tuttavia, la presenza del feedback fa sì che una parte del rumore in uscita sia riportato in ingresso. Essendo il guadagno in carica uguale a $1/C_f$, un segnale di rumore v_{n0} in uscita implica all'ingresso una carica di rumore data da:

$$Q_{ni} = \frac{v_{n0}}{A_f^Q} = v_{n0}C_f$$

Il rumore v_{ni} ora è dovuto esclusivamente a v_{n0} attraverso il partitore capacitivo costituito da C_{det} e C_f . Si ha quindi:

$$v_{ni} = v_{n0} \frac{Z_{C_{det}}}{Z_{C_{det}} + Z_{C_f}} = v_{n0} \frac{C_f}{C_f + C_{det}}$$

Pertanto:

$$Q_{ni} = v_{n0}C_f = v_{ni}(C_f + C_{det})$$

Il rapporto segnale/rumore sarà allora:

$$\frac{Q_s}{Q_{ni}} = \frac{Q_s}{v_{ni}(C_{det} + C_f)} = \frac{Q_s}{v_{ni}} \frac{1}{C}$$

Cioè ancora una volta il rapporto va come l'inverso della capacità. Notiamo però che ora il segnale Q_s è costante al variare di C , mentre il rumore è proporzionale a C .

Si può infine vedere che se il preamplificatore è di corrente, il risultato è uguale a quello ottenuto nei due casi precedenti.

19.8.3 “Formazione” dei segnali prodotti da rivelatori di particelle

Da quanto si è visto nei paragrafi precedenti, il segnale all'uscita del rivelatore è nella più gran parte dei casi un segnale in carica che, opportunamente integrato, fornisce un segnale in tensione. Tale segnale ha in genere un piccolo tempo di salita (determinato dalla piccola costante di tempo del rivelatore) ma un tempo di decadimento molto lungo (qualche decina di μs). In prima approssimazione possiamo rappresentare il segnale come mostrato in figura 19.25(a). L'altezza del segnale è proporzionale all'energia rilasciata.

Il problema che qui si incontra è costituito dal fatto che, lavorando a rate elevati, i successivi impulsi vengono a sommarsi, di modo che l'altezza di un impulso è la somma di questo e delle code di quelli che lo hanno preceduto, come illustrato in figura 19.25(b). Tale fenomeno è noto come “pile-up”.

Per risolvere tale problema occorre trasformare il segnale originale in uno abbastanza stretto da evitare il problema del pile-up, conservando però l'informazione sull'altezza d'impulso. Un metodo spesso adoperato a tale scopo è quello noto come CR-RC shaping, tramite un circuito che effettua prima una differenziazione e poi un'integrazione del segnale. Un circuito che realizza tale funzione è mostrato in figura 19.26, dove gli inseguitori di tensione con amplificazione unitaria fungono da adattatori d'impedenza.

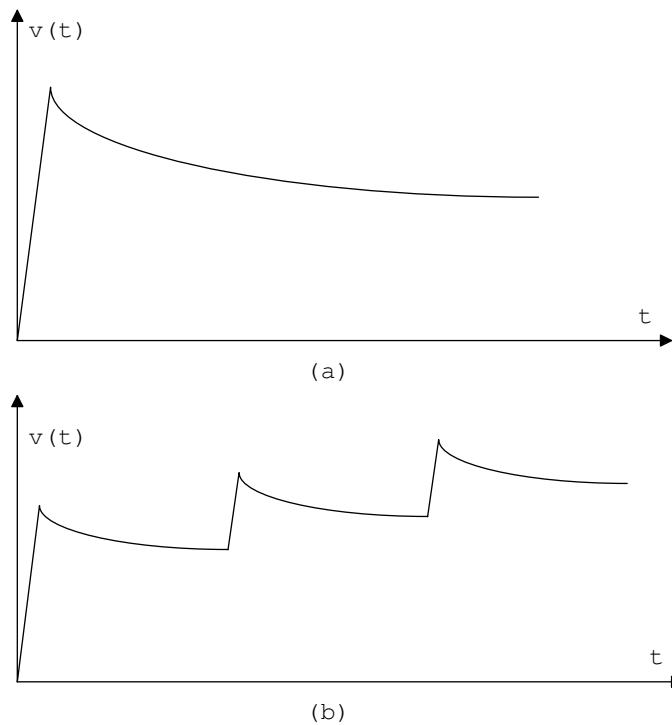


Figura 19.25: Forma dei segnali all'uscita di un rivelatore di particelle.

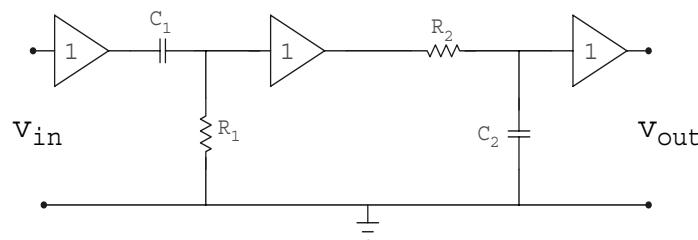


Figura 19.26: Circuito formatore CR-RC.

La funzione di trasferimento del circuito è:

$$G(s) = \frac{sC_1R_1}{1 + R_1C_1s} \frac{1}{1 + R_2C_2s} = \frac{1}{\tau_2} \frac{s}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} \quad (19.9)$$

Se l'impulso di tensione all'uscita del rivelatore è un esponenziale caratterizzato da una costante di tempo molto grande, possiamo schematizzarlo approssimativamente con un gradino di tensione di altezza A . Ricordando che la trasformata del gradino unitario è $1/s$, la tensione in uscita dal formatore sarà data dall'antitrasformata di:

$$\tilde{v}_{out} = A \frac{1}{\tau_2(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} \quad (19.10)$$

L'antitrasformata può essere ricavata seguendo il procedimento adottato in precedenza in questo capitolo. Si trova:

a) per $\tau_1 \neq \tau_2$:

$$v_{out}(t) = \frac{A\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} [e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}] \quad (19.11)$$

b) per $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$:

$$v_{out}(t) = \frac{A}{\tau} te^{-t/\tau} \quad (19.12)$$

La forma di tali impulsi, simile nei due casi indicati, è qualitativamente indicata in figura 19.27.

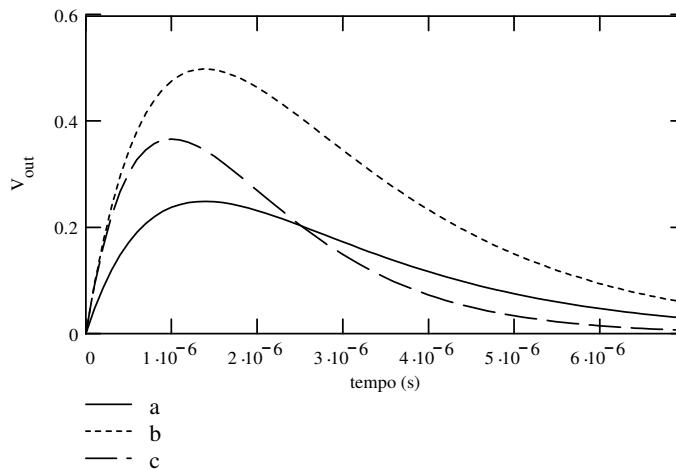


Figura 19.27: Andamento del segnale all'uscita di un circuito CR-RC.

Nella figura, la curva (a) è stata ottenuta facendo uso di valori $\tau_1 = 1 \mu s$, $\tau_2 = 2 \mu s$; la (b) per $\tau_1 = 2 \mu s$, $\tau_2 = 1 \mu s$ e la (c) per $\tau_1 = \tau_2 = 1 \mu s$.

Notiamo che nel caso $\tau_1 \neq \tau_2$, il massimo si ha per:

$$t(v_{max}) = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \ln \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

Il corrispondente valore di v_{max} può facilmente essere ottenuto dalla (19.11). Ponendo $r = \tau_2/\tau_1$, troviamo:

$$v_{max} = \frac{A}{1-r} \left[\frac{1}{r^{r/(r-1)}} - \frac{1}{r^{1/(r-1)}} \right]$$

Per $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ troviamo invece:

$$t(v_{max}) = \tau$$

e

$$v_{max} = \frac{A}{e}$$

La scelta delle costanti di tempo dipende in primo luogo dalla costante di tempo del rivelatore, cioè dal tempo necessario per la raccolta della carica. Se si vuol ridurre il pile-up è desiderabile scegliere dei valori il più possibile piccoli, in modo da assicurare un rapido ritorno allo zero del segnale in uscita. D'altro canto, il risultato che abbiamo ottenuto era basato sull'ipotesi che il segnale all'ingresso del formatore CR-RC fosse molto lungo, in modo da poterlo approssimare con un gradino.

Se il tempo di decadimento del segnale è invece corto, la funzione di trasferimento continuerà ad esser data dall'equazione (19.9), ma la trasformata dell'input (che è un esponenziale) sarà ora:

$$\frac{1}{s + 1/\tau}$$

e la trasformata dell'output sarà:

$$\tilde{v}_{out} = A \frac{s}{\tau_2(s + 1/\tau)(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} \quad (19.13)$$

Si può risolvere tale equazione e far vedere che la soluzione è:

$$\begin{aligned} v(t) &= A\tau\tau_1 \left[\frac{-1}{[(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)]} \cdot e^{-t/\tau} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{[(\tau_1 - \tau_2)(\tau - \tau_1)]} \cdot e^{-t/\tau_1} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{[(\tau_1 - \tau_2)(\tau - \tau_2)]} \cdot e^{-t/\tau_2} \right] \end{aligned}$$

Questa ha l'aspetto mostrato in figura 19.28.

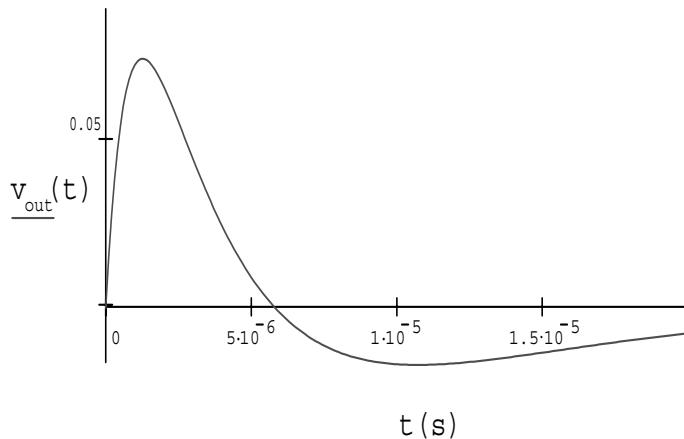


Figura 19.28: Forma dell'impulso all'uscita di un circuito CR-RC per un segnale con tempo di decadimento breve.

Si vede che il segnale raggiunge un massimo, ridiscende fino a raggiungere valori negativi e poi risale lentamente verso lo zero. Tale discesa a valori negativi causa un pile-up di segnali (questa volta il successivo segnale "siede" sulla coda di un impulso negativo) ed è un difetto da correggere⁸.

⁸Questo è noto come "undershoot".

Notiamo per inciso che la “coda” è dovuta alla costante di tempo τ dell’amplificatore.

La (19.13) ha uno zero a numeratore e tre poli in $s = -1/\tau$, $s = -1/\tau_1$, $s = -1/\tau_2$. Se si riesce a trasformarla in una funzione priva di zeri e con solo due poli (come era la (19.10)), il problema sarà risolto.

La soluzione è stata trovata da Nowlin e Blankenship (Review of Scientific Instruments, 36, 1830 (1965)) ed è nota come “pole-zero cancellation”.

La modifica da apportare al circuito consiste nel porre una resistenza in parallelo al condensatore che effettua la differenziazione, come mostrato in figura 19.29.

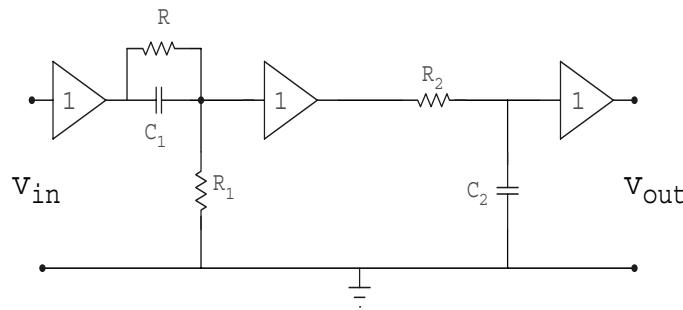


Figura 19.29: Circuito formatore CR-RC con “pole-zero cancellation”.

La funzione di trasferimento è ora:

$$G(s) = \frac{R_1(1 + RC_1 s)}{R_1(1 + RC_1 s) + R} \cdot \frac{1}{sC_2 R_2 + 1}$$

che, ponendo:

$$\tau' = RC_1 , \quad \tau'' = \tau' \frac{R_1}{R_1 + R} , \quad \tau_2 = R_2 C_2$$

può essere messa nella forma:

$$G(s) = \frac{1}{\tau_2} \frac{s + 1/\tau'}{s + 1/\tau''} \frac{1}{s + 1/\tau_2}$$

La trasformata della risposta all’esponenziale:

$$v_{in}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

sarà:

$$\tilde{v}_{out} = \frac{A}{\tau_2} \frac{1}{s + 1/\tau} \frac{s + 1/\tau'}{s + 1/\tau''} \frac{1}{s + 1/\tau_2}$$

Scegliendo ora R e C_1 in modo tale che $\tau' = \tau$, si ottiene:

$$\tilde{v}_{out} = \frac{A}{\tau_2} \frac{1}{(s + 1/\tau'')(s + 1/\tau_2)}$$

Cioè abbiamo una risposta del tipo desiderato.

Possiamo scegliere ancora R_1 in modo tale che τ'' sia uguale al vecchio valore di τ_1 , ed il risultato sarà esattamente quello voluto.

Notiamo che con il procedimento adottato abbiamo “spostato” la posizione dello zero della funzione di trasferimento iniziale in uno zero nel punto $1/\tau'$ ed abbiamo fatto in modo che τ' fosse giusto uguale alla costante di tempo τ dell'esponenziale in ingresso, in modo tale da “cancellare” lo zero con il polo in $s = -1/\tau$. Di qui l'origine del nome.

19.8.4 Altri metodi di “shaping” dei segnali

Esistono molti altri metodi per la formazione (shaping) dei segnali. Dettagli possono esser trovati nelle referenze: [26] (pagg. 91 e seguenti), [27] (pagg. 272-275), [29] (pagg. 564-582).

Ci limiteremo qui ad accennare sommariamente ad alcuni dei metodi seguiti.

19.8.5 Shaping $CR - (RC)^n$

Questo è anche noto come “shaping gaussiano”.

Se facciamo seguire ad un singolo circuito CR (differenziatore) n circuiti RC (integratori) si ottiene un impulso in uscita che è, con buona approssimazione, una gaussiana. Se tutte le costanti di tempo sono uguali a τ , la soluzione è:

$$v_{out} = v_0 \left(\frac{t}{\tau} \right)^n e^{-t/\tau}$$

In pratica, un circuito $CR - (RC)^4$ da già dei buoni risultati.

In tale circuito, il tempo necessario perché il segnale raggiunga il suo valore massimo è $n\tau$, ed è quindi più lungo di quello ottenibile con un semplice circuito CR-RC. Tuttavia la discesa a zero è molto più rapida ed il pileup è quindi ridotto. Il metodo dello shaping gaussiano ha anche il vantaggio di migliorare il rapporto segnale/rumore.

19.8.6 Shaping triangolare

È stato dimostrato che l'ottimo dal punto di vista del rapporto segnale-rumore è ottenibile con un circuito che fornisca un segnale triangolare. È possibile approssimare tale comportamento facendo uso di filtri attivi.

19.8.7 Spostamento della linea di zero

Con tale termine si intende il fatto che un segnale periodico (o all'incirca periodico) il cui valor medio sia diverso da zero, acquista un valor medio zero se lo si fa passare attraverso un condensatore. Ciò è legato al fatto che un condensatore non può trasmettere una componente continua. Poiché i formatori (shapers) che abbiamo descritto utilizzano tutti dei condensatori in serie per effettuare la differenziazione del segnale, questo sarà inevitabilmente spostato in modo che il valor medio sia nullo (vedi figura 19.30).

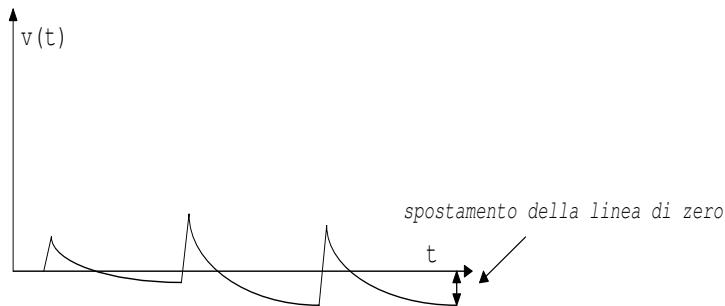


Figura 19.30: Andamento del segnale a valor medio nullo all'uscita di un circuito formatore.

Tale fenomeno (comunemente indicato come “baseline shift”) causa un’alterazione dell’ampiezza dei singoli impulsi, normalmente riferita allo zero. Si può inoltre vedere che lo spostamento dipende dalla frequenza di arrivo degli impulsi, il che lo rende ancora più fastidioso, in quanto, essendo nella più gran parte dei casi tale frequenza variabile in modo casuale, l’altezza d’impulso risulterà alterata in modo altrettanto aleatorio, con conseguente allargamento dello spettro misurato.

Si può ovviare a tale problema essenzialmente con due tecniche diverse. La prima di queste, nota come “baseline restoration” consiste nell’utilizzo di appositi circuiti che “riportano” il segnale a zero dopo ciascun impulso. Per dettagli, si vedano le referenze [26] e [29].

La seconda tecnica consiste nel trasformare l’impulso unipolare come quello fin qui ipotizzato, in un impulso bipolare. Questo ha già un valor medio nullo e non subisce quindi alcuno “shift” nell’attraversare un condensatore. L’impulso bipolare è ottenuto da quello unipolare facendo in modo che questo subisca una “riflessione” e facendo poi seguire al segnale iniziale quello riflesso, come qualitativamente indicato in figura 19.31 nel caso di un impulso rettangolare.

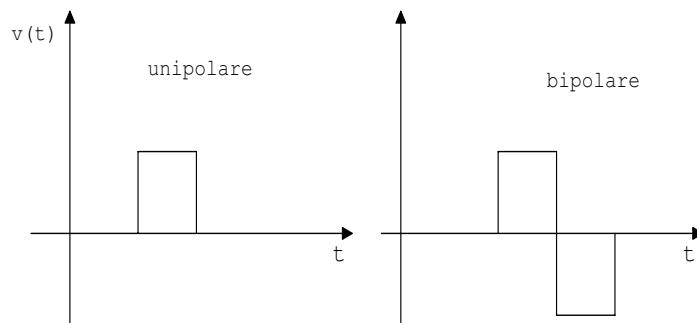


Figura 19.31: Impulso bipolare ottenuto dalla riflessione di un impulso unipolare.

Il metodo più ovvio per realizzare tale riflessione dell’impulso è quello di ricorrere ad una linea di ritardo cortocircuitata ad un’estremità. Il coefficiente di riflessione

ρ di una linea avente impedenza caratteristica Z , chiusa su di una resistenza R è:

$$\rho = \frac{R - Z}{R + Z}$$

Si vede che per $R=0$ si ha $\rho = -1$. Un gradino sarà quindi trasformato in un segnale rettangolare di durata pari al doppio del ritardo caratteristico della linea. Uno schema tipico è mostrato in figura 19.32. Anche in questo caso gli amplificatori indicati (con guadagno unitario) fungono da adattatori d'impedenza.

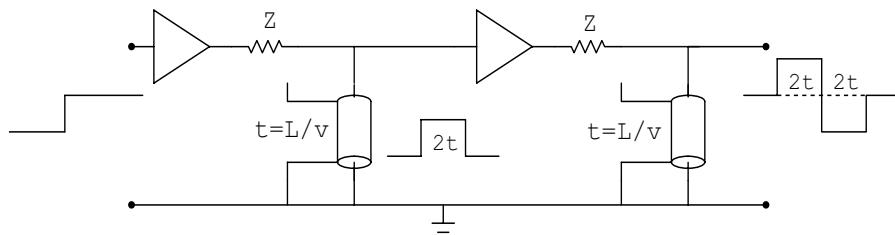


Figura 19.32: Circuito formatore con doppia linea di ritardo.

Se alla prima riflessione se ne fa seguire una seconda, come mostrato nella parte destra della figura, si ottiene un impulso bipolare. Questo non presenta più il problema del “baseline shift”, ma ha l’inconveniente di uno spettro di Fourier molto ampio, con conseguente necessità di amplificatori ad ampia banda passante il che introduce un elevato livello di rumore. Per ovviare a tale inconveniente conviene integrare il segnale all’uscita della seconda linea di ritardo, ottenendo in tal modo un segnale triangolare, come mostrato in figura 19.33.

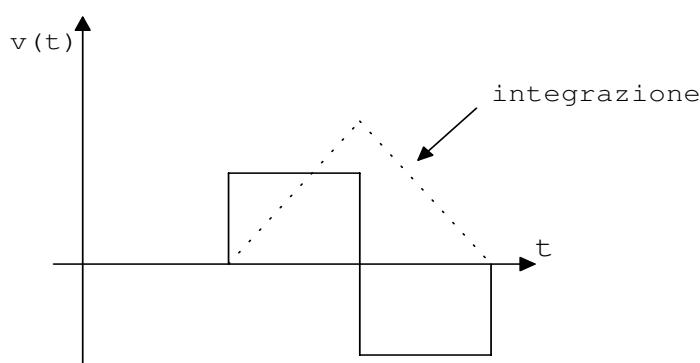


Figura 19.33: Segnale bipolare ottenuto per integrazione.

Il segnale così ottenuto è nuovamente positivo e presenta quindi nuovamente il problema del “baseline shift”. Una seconda differenziazione con una “delay line” lo trasformerà nuovamente in un segnale bipolare, conservando la forma triangolare, che è molto buona dal punto di vista del rumore.

Un metodo alternativo per ottenere un impulso bipolare è quello di effettuare una seconda differenziazione dopo la prima formazione CR-RC. Si adopererà cioè un sistema CR-RC-CR. Questo schema è mostrato in figura 19.34.

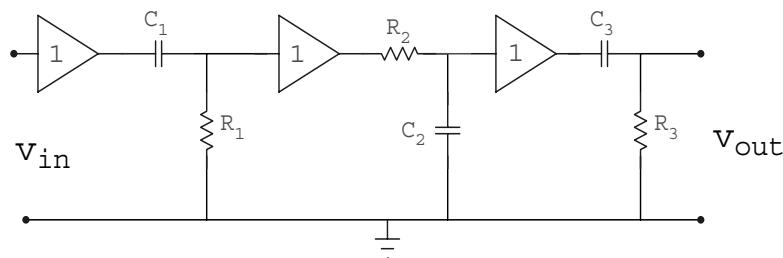


Figura 19.34: Circuito formatore CR-RC-CR.

La forma d'onda che ne risulta, per un impulso esponenziale in ingresso, è mostrata in figura 19.35.

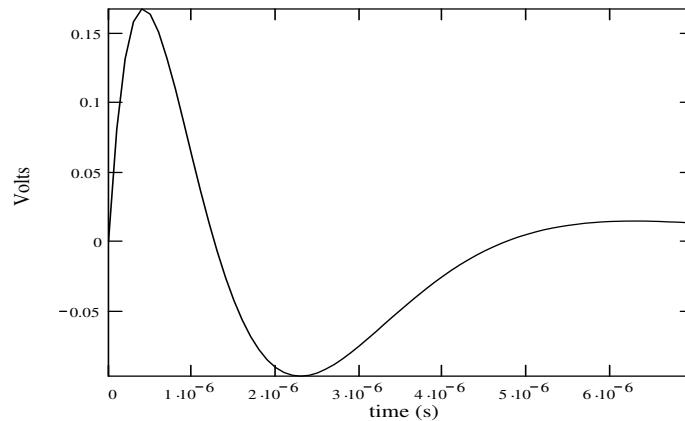


Figura 19.35: Forma del segnale all'uscita di un formatore CR-RC-CR.

Vediamo che ora lo spostamento dallo zero è meno severo di quello che si ha con segnali unipolari. Tuttavia le aree sopra e sotto l'asse non sono esattamente uguali, quindi un piccolo spostamento dello zero è sempre presente.

19.8.8 Deficit balistico e scelta delle costanti di tempo

Il segnale ottenuto facendo uso di uno shaping CR-RC ha un andamento temporale dato dalla (19.11), che possiamo riscrivere nella forma:

$$v_{out}(t) = A \frac{\tau_F}{\tau_F + \tau_R} (e^{-t/\tau_F} - e^{-t/\tau_R}) \quad (19.14)$$

dove abbiamo posto:

$$\tau_F = \tau_1, \quad \tau_R = \tau_2$$

Possiamo vedere che τ_F è legato al tempo di discesa del segnale e τ_R a quello di salita. Vediamo infatti che per $\tau_F \rightarrow \infty$, l'espressione in parentesi diventa:

$$1 - e^{-t/\tau_R}$$

che descrive un esponenziale crescente con costante di tempo τ_R . Analogamente, per $\tau_R \rightarrow 0$ l'espressione in parentesi si riduce a :

$$e^{-t/\tau_F}$$

cioè ad un esponenziale decrescente con costante di tempo τ_F .

Ammettiamo ora che il tempo di salita τ_R sia quello caratteristico del rivelatore medesimo. L'altezza dell'impulso associato al segnale è proporzionale all'energia rilasciata dalla particella nel rivelatore. Il segnale di tensione tenderebbe a divenire asintoticamente uguale a tale valore, se il termine $\exp(-t/\tau_F)$ non intervenisse a farlo scendere verso lo zero. Ciò è illustrato in figura 19.36.

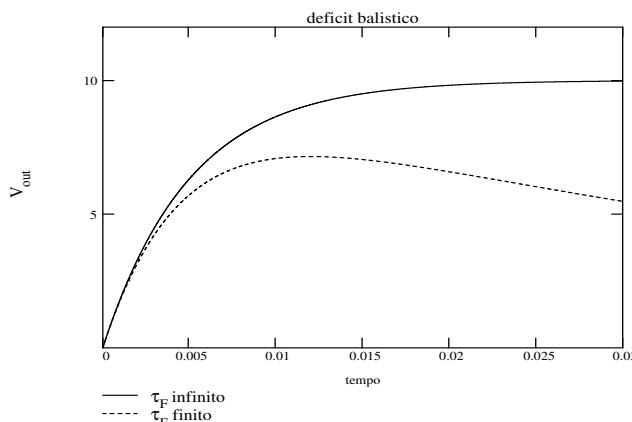


Figura 19.36: Andamento di un segnale con deficit balistico.

Alla differenza tra il valore asintotico che il segnale tenderebbe ad acquistare per effetto dell'integrazione ed il valore massimo che esso effettivamente raggiunge prima di ricominciare a scendere per effetto della differenziazione, si dà il nome di "deficit balistico".

Si potrebbe pensare di ridurre il deficit balistico scegliendo un valore di τ_F molto grande. Tale scelta va però contro l'esigenza di avere dei segnali corti, per evitare il fenomeno del "pile-up".

In figura 19.37 è mostrato l'andamento ottenuto facendo uso della (19.14) (con $A=1$) fissando τ_R a $1\mu s$ e per i valori di τ_F indicati in figura.

19.8.9 Shaping e rumore

Abbiamo visto al capitolo 18 che la potenza di rumore in un amplificatore a FET è data, nel dominio della frequenza, dall'espressione (18.42), che riscriviamo per comodità:

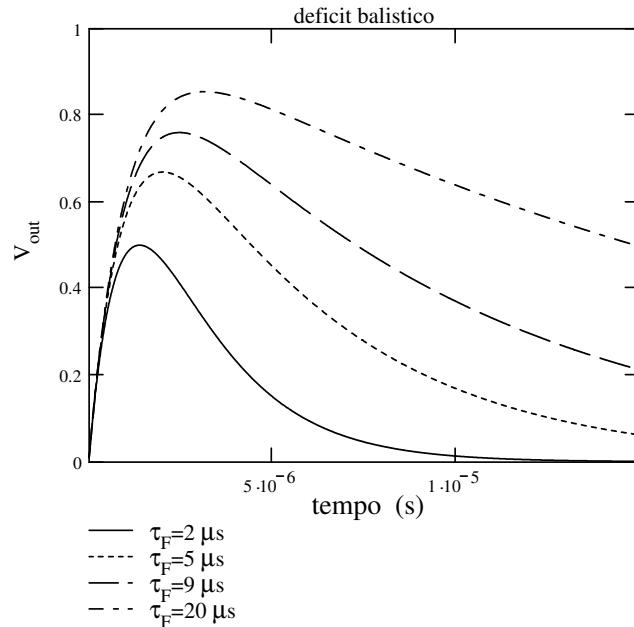


Figura 19.37: Confronto di segnali con diverso deficit balistico.

$$\overline{v_N^2} = \frac{d\omega}{\omega} \left\{ A_f + \frac{2KT}{\pi R_g C_{in}^2 \omega} + \frac{eI_g}{\pi \omega C_{in}^2} + \frac{2KT\omega}{\pi g_m} \right\} \quad (19.15)$$

dove g_m è la transconduttanza del FET, C_{in} la capacità parassita all'ingresso dello stesso, I_g la corrente di gate, R_g la resistenza di gate ed A_f una costante che rende conto del rumore $1/f$.

La potenza di rumore all'uscita di un circuito di shaping dipenderà dalla funzione di trasferimento $f(\omega)$ che lo caratterizza. Si dimostra che lo shaping ottimale dal punto di vista del rapporto segnale/rumore è quello che fornisce in uscita un segnale a cuspide, come quello di figura 19.38.

Uno shaping di questo tipo non è realizzabile nella pratica. Dei segnali che costituiscono delle ragionevoli approssimazioni a quello ideale sono quello triangolare e quello gaussiano. Esamineremo qui lo shaping triangolare. Questo può essere ottenuto facendo uso di una funzione di trasferimento del tipo di quella discussa nel capitolo 9 (equazione (9.33) con $\omega_L = \omega_U = 1/\tau$) cioè:

$$G(\omega) = \frac{A_0(\omega\tau)}{(1 + \omega^2\tau^2)}$$

La tensione quadratica media di rumore all'uscita dell'amplificatore sarà allora:

$$\overline{w_N^2} = \int_0^\infty |G(\omega)|^2 \overline{v_N^2} d\omega$$

Da cui:

$$\overline{w_N^2} = A_0^2 \left(\frac{KT}{2R_g C_{in}^2} \frac{\tau}{\omega} + \frac{eI_g}{4} \frac{\tau}{C_{in}^2} + \frac{KT}{2g_m \tau} + \frac{A_f}{2} \right) \quad (19.16)$$

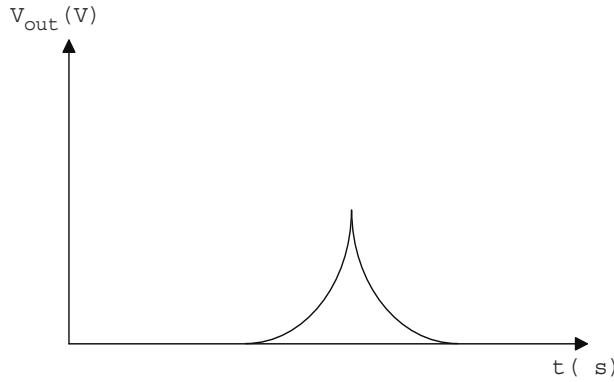


Figura 19.38: Segnale a cuside.

Ammettiamo ora che Q sia la carica che il rivelatore deposita sulla capacità d'ingresso dell'amplificatore (C_{in}). Se A_0 è il guadagno dell'amplificatore, il segnale in uscita sarà:

$$v'_{out} = A_0 \frac{Q}{C_{in}}$$

Tuttavia, in presenza di uno shaping triangolare, con tempi di salita e di discesa del segnale $\tau_r = \tau_f = \tau$, il guadagno è ridotto di un fattore e . Cioè:

$$v_{out} = \frac{A_0}{e} \frac{Q}{C_{in}} \quad (19.17)$$

La ENC si ottiene uguagliando la (19.16) ed il quadrato della (19.17):

$$\frac{A_0^2}{e^2} \frac{Q^2}{C_{in}^2} = A_0^2 \left(\frac{KT}{2R_g} \frac{\tau}{C_{in}^2} + \frac{eI_g}{4} \frac{\tau}{C_{in}^2} + \frac{KT}{2g_m \tau} + \frac{A_f}{2} \right)$$

da cui si ha:

$$(ENC)^2 = Q^2 = e^2 \left\{ \frac{KT}{2R_g} \tau + \frac{eI_g}{4} \tau + \frac{KTC_{in}^2}{2g_m \tau} + \frac{A_f C_{in}^2}{2} \right\} \quad (19.18)$$

I primi due termini non dipendono da C_{in} , i restanti due ne dipendono.

Ciò è legato al fatto che per i primi due termini la sorgente di rumore, come il segnale, può esser considerata in parallelo alla capacità C_{in} , mentre per i rimanenti due la sorgente di rumore è in serie.

Esaminiamo ora la dipendenza del rumore dalla costante di tempo τ . Riscriviamo a tale scopo la (19.18) nella forma:

$$(ENC)^2 = L\tau + \frac{M}{\tau} C_{in}^2 + N C_{in}^2 \quad (19.19)$$

Questa ha un minimo quando si annulla la derivata prima, cioè:

$$L - \frac{M}{\tau^2} C_{in}^2 = 0$$

da cui:

$$\begin{aligned}\tau_{min}^2 &= \frac{M}{L} C_{in}^2 \\ \tau_{min} &= \sqrt{\frac{M}{L}} C_{in}\end{aligned}$$

(notiamo che la derivata seconda è positiva: $2MC_{in}^2/\tau^3 > 0$).

Sostituendo questa espressione di τ_{min} nella (19.19) si trova il minimo valore della ENC:

$$(ENC)_{min}^2 = \sqrt{LM}C_{in} + \sqrt{LM}C_{in} + NC_{in}^2$$

Vediamo che con questa scelta i primi due termini contribuiscono in ugual misura. Essi corrispondono rispettivamente al rumore termico nella resistenza di gate ed allo shot noise nella corrente di gate.

Sostituendo valori numerici tipici si trova che τ deve essere almeno dell'ordine dei μs . Questo valore è troppo alto se si lavora a rate elevati. Scegliendo valori di τ molto minori di quello ottimale, il contributo del rumore termico nel canale diviene dominante sui primi due. Se il rumore 1/f può essere trascurato, il rumore complessivo diviene:

$$(ENC)^2 \approx M \frac{C_{in}^2}{\tau} = e^2 \frac{KTC_{in}^2}{2g_m \tau}$$

o anche:

$$ENC \approx \sqrt{\frac{M}{\tau}} C_{in}$$

Inoltre C_{in} può esser divisa in due pezzi: la capacità esterna (C_{ext}) all'amplificatore (cavi, rivelatore, etc.) e quella (C_0) del FET, per cui:

$$ENC = \sqrt{\frac{M}{\tau}} (C_0 + C_{ext}) = k_1 + k_2 C_{ext}$$

Nel caso dei preamplificatori commerciali, i produttori quotano le costanti k_1 e k_2 (per valori dati di τ), in opportune unità.

Bibliografia

- [1] Paul M. Chiarlan: "Basic Network Theory"; Mc Graw-Hill Book Company, p. 233, 1969.
- [2] P.W. Nicholson: "Nuclear Electronics"; John Wiley & Sons , 1974
- [3] A. Alberigi-Quaranta e B. Rispoli: "Elettronica". Zanichelli, 1960
- [4] Leonard S. Bobrow: "Elementary linear circuit analysis". 2nd Ed., Oxford University Press, 1987
- [5] Micro-Cap Evaluation 7.0.6.0. Copyright(c) 1988-2001 Spectrum Software. By Andy Thompson, Tim O'Brien and Bill Steele. Indirizzo del sito Web: <http://www.spectrum.co.uk>
- [6] A. Antoniou: "Realization of gyrators using operational amplifiers, and their use in RC-active-network synthesis". IEEE Proc., vol. 116, no. 11, pp. 1838-1850, Nov. 1969.
- [7] Donald L. Schilling, Charles Belove: "Electronic circuits, Discrete and Integrated". McGRAW-HILL International Editions (1989). Pagg. 740-745.
- [8] Herbert Taub, Donald Schilling: "Elettronica Integrata Digitale". Gruppo Editoriale Jackson (1981). Pagg. 553-562
- [9] National Semiconductor Corporation: <http://www1.national.com>
- [10] Paul Horowitz and Winfield Hill: "The art of electronics". Cambridge University Press, 1997
- [11] Jacob Millman e Arvin Grabel. "Microelettronica". McGraw- Hill Libri Italia srl, 1987.
- [12] Ramon Cerdà :"Quartz crystal primer part I". www.raltron.com
- [13] : HCMOS Crystal Oscillators. Fairchild Semiconductor Application Note 340, May 1983.
- [14] Ronald Mancini, Electronic Design, 20 Febbraio 1995, p.110
- [15] Donald L. Schilling, Charles Belove: "Electronic circuits, Discrete and Integrated". McGRAW-HILL International Editions (1989). Capitolo 12

- [16] J.B. Johnson: "Thermal agitation of electricity in conductors". Nature 119, 50 (1927). Physical Review 29, 367 (1928)
- [17] H. Nyquist: "Thermal agitation in conductors". Physical Review 29, 614 (1928). "Thermal agitation of electric charge in conductors". Physical Review 32, 110 (1928)
- [18] M.P. Langevin: "Sur la theorie du mouvement brownien". Compt. Rend. Acad. Sci. Paris; 146, 530 (1908)
- [19] M.J. Buckingham: "Noise in electronic devices and systems". Ellis Horwood Limited Ed., 1983
- [20] Henry W. Ott: "Noise reduction techniques in electronic systems" John Wiley & Sons 1976 (cap. 8-9)
- [21] P.W. Nicholson: "Nuclear Electronics". John Wiley & Sons 1974 (cap. 4-5)
- [22] Gasperini e Mirri: "Dispositivi e Circuiti Elettronici". Calderini 1980, Vol. II (cap. 14)
- [23] Aldert Van der Ziel: "Noise: sources, characterization, measurement" Prentice Hall 1970
- [24] C.F. Delaney: "Electronics for the Physicist with applications". John Wiley & Sons 1980. (cap. 11-13)
- [25] Muhammad H. Rashid: "Microelectronic Circuits: Analysis and Design". PWS Publishing Company, 1999
- [26] E. Kowalski: "Nuclear Eletronics". Springer-Verlag, 1970.
- [27] W.R. Leo: "Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments". Springer- Verlag, 1987.
- [28] Hai Hung Chiang: "Basic Nuclear Electronics". Wiley-Interscience, 1969.
- [29] Glenn F. Knoll: "Radiation detection and measurement"; John Wiley and Sons, 1989.
- [30] Philips photomultiplier handbook
- [31] Photomultiplier tube, principle to applications. Hamamatsu Photonics K.K., 1994. Vedi anche: Hamamatsu Photonics K.K., Electron Tube Center <http://www.hamamatsu.com>
- [32] P. Adamson, R. Saakyan, J. Thomas, A. Weber: "Photoelectron Counting by Several Methods". Report NuMI-L-661, Agosto 2000.
- [33] F.J. Lombard, F. Martin; Rev. Sci. Inst., 32, 200, (1961)
- [34] Dan Green: "The Physics of particle detectors". Cambridge University Press, 2000.

- [35] Helmuth Spieler: “Front-End Electronics and Signal Processing”. First IC-FA Instrumentation School/Workshop. Morelia, Michoacan, Mexico (2002). <http://www.physics.lbl.gov/> spieler
- [36] E. Gatti and P.F. Manfredi: “Processing the signals from solid-state detectors in elementary-particle physics”. La Rivista del Nuovo Cimento, Vol 9, Serie 3, 1986
- [37] Crystan Crystals. BDH Advanced materials division, BDH Limited (1988)
- [38] <http://www.pbs.org/transistor/science/events/pnjunct.html>
- [39] <http://www.pbs.org/transistor/background1/events/miracleemo.html>
- [40] <http://www.localhistory.wlv.ac.uk/Museum/Engineering/Electronics/history/Transistordetails.htm>
- [41] <http://www.sscs.org/AdCom/transistorhistory.pdf>
- [42] Adel S. Sedra and Kenneth C. Smith: “Microelectronic Circuits”. 4th Ed., Oxford University Press, 1998
- [43] William F. Brinkman, Douglas E. Haggan, and William W. Troutman: “A History of the Invention of the Transistor and Where it Will Lead Us”. IEEE Journal of solid-state circuits, Vol. 32, No.12, December 1997
- [44] M. Riordan and L. Hoddeson: “Crystal Fire the Birth of the Information Age”. New York, Norton
- [45] Wolfram Research, Mathematica 4. (www.wolfram.com)

Indice analitico

- N*-polo, 8
- R_f resistenza diretta del diodo, 103
- R_r resistenza inversa del diodo, 103
- β per il transistor bipolare, 138
- h_{fe} per un transistor bipolare, 146
- h_{ie} per un transistor bipolare, 146
- h_{oe} per un transistor bipolare, 146
- Accettori, 92
- Active pull-down, 291
- Active pull-up, 291
- Aliasing, 402
- Amplificatore
 - a CMOS
 - risposta in frequenza, 255
 - a transconduttanza, 185
 - a transistor, 495
 - di classe A, 495
 - di classe AB, 495
 - di classe B, 495
 - di classe C, 495
 - a transresistenza, 185
 - amplificatore CE seguito da EF, 201
 - base comune, 204
 - guadagno in corrente, 205
 - guadagno in tensione, 206
 - impedenza d'ingresso, 206
 - impedenza d'uscita, 206
 - collettore comune, 186
 - di carica, 318, 611
 - di corrente, 185
 - di tensione, 185
 - differenziale, 261–263, 271
 - impedenza d'ingresso, 273
 - risposta a piccoli segnali, 267
 - emettitore comune, 193
 - con resistenza sull'emettitore, 194
 - esempio, 195
 - guadagno in corrente, 193
 - guadagno in tensione, 194
 - impedenza d'uscita, 194
 - resistenza d'ingresso, 193
 - generico
 - relazione tra A_v ad A_i , 208
 - Amplificatore Operazionale, 297
 - amplificatore differenziale, 307
 - amplificatore invertente, 300
 - amplificatore non-invertente, 305
 - amplificazione finita, 342
 - applicazioni lineari, 300
 - applicazioni non-lineari, 325
 - banda passante, 344
 - caratteristiche ideali, 298
 - coefficiente di reazione, 343
 - derivatore, 314
 - fattore di reazione, 343
 - guadagno a catena chiusa, 344
 - guadagno della catena, 344
 - ingresso differenziale, 298
 - integratore, 309
 - limiti rispetto al funzionamento ideale, 342
 - loop gain, 344
 - slew-rate, 347
 - sommatore, 307
 - Antoniou
 - circuito di, 374
 - Autocorrelazione, 528
 - Banda di rumore, 535
 - Banda passante, 360
 - Barkhausen
 - condizione di, 429, 439
 - Barriera di potenziale
 - in una giunzione p-n, 98
 - Baseline restoration, 618
 - Baseline shift, 618, 619
 - Bell
 - laboratori Bell, 88
 - Bessel

- filtro di, 384
- Bode
diagramma di Bode per il modulo, 52
diagramma di Bode per la fase, 52,
54
rette asintotiche, 52
- Boltzmann
equazione di, 96
- Breakdown
tensione di, 104
- Butterworth
filtro di, 377
- Camera a ionizzazione, 588, 590
- Campionamento del segnale, 492, 516
- Carico standard, 286
- Cavi coassiali, 71, 72
capacità per unità di lunghezza, 72
induttanza per unità di lunghezza, 72
propagazione di un gradino di tensione, 74
velocità di propagazione nei cavi coassiali, 74
- Chebyshev
filtro, 371
filtro di, 384
- Cifra di rumore, 547–552
- Cifra di rumore in eccesso, 548
- Cifra di umore, 560
- Circuiti equivalenti per il rumore, 542
- Circuito *CR*, 13
- Circuito *RC*, 13
- Circuito RC passa alto
funzione di trasferimento, 53
- Circuito RC passa-basso
funzione di trasferimento, 51
- Circuito RCL
funzione di trasferimento, 62
- Clamping
circuito clamping, 115
- CMOS, 252
amplificatori, 254
caratteristica di trasferimento, 254
dissipazione di energia, 253
invertitore, 252
polarizzazione, 255
- Comparatore, 325
- Concentrazione
di accettori, 97
di donori, 97
- Conduttività, 90
- Conduzione elettrica
nei solidi, 90
- Contatore
Geiger, 591, 596
proportionale, 591
- Convertitore
analogico-digitale, 491, 505
a contatore, 505, 506
a doppia rampa, 511, 512
a rampa singola, 510
ad approssimazioni successive, 507
flash, 513, 514
digitale-analogico, 491, 497
a scala, 499, 503
pilotato in corrente, 503
- Convertitore corrente-tensione, 321
- Convertitore tensione-corrente, 321
- Convertitore tensione-frequenza, 356
- Coppia differenziale, 263, 264
- Correlazione, 528
- Corrente
di ricombinazione, 99
inversa di saturazione, 101
termica, 99
- CR-RC shaping, 612
- Darlington
impedenza d'ingresso, 164
struttura Darlington, 163
- Deficit balistico, 621
- Densità di corrente, 90, 95
- Densità spettrale, 534
- Derivatore, 13, 15, 16, 18, 314
- Diagramma di Nyquist, 69
circuito passa-basso, 69
funzione di trasferimento con due poli ed uno zero non nell'origine, 69
funzione di trasferimento con un polo ed uno zero non nell'origine, 69
- Diffusione
coefficiente di, 95
in un semiconduttore, 94
- Dinodo, 576–578, 581

- Diodo
- a cristalli, 88
 - a valvole termoioniche, 87
 - capacità di diffusione, 108
 - capacità di transizione, 107, 108
 - caratteristica del, 100
 - equazione del, 100
 - modello per piccoli segnali, 106
 - polarizzato direttamente, 100, 101
 - polarizzato inversamente, 100
 - polarizzazione inversa, 104
 - portatori minoritari, 104
 - resistenza differenziale, 107
 - rettificatore ad onda intera, 113
 - Zener, 104
 - come stabilizzatori di tensione, 104
 - zona di svuotamento, 108
- Donori, 92
- Drogaggio
- con arsenico, 92
 - con Boro, 92
 - di un semiconduttore, 92
 - non uniforme, 95
 - non uniforme di elettroni, 95
 - non uniforme di lacune, 95
- Duplicatore di tensione, 118
- Eccitazione di forma generica
- calcolo della risposta, 36, 38
- Eccitazione sinusoidale
- risposta di un circuito RC con il metodo delle trasformate di Laplace, 47
- Effetto di campo, 89
- Effetto Early
- per il transistor bipolare, 146
- Efficienza quantica, 577, 578
- Einstein
- equazione di, 95
- Elettroni
- concentrazione intrinseca degli, 92
 - di conduzione, 91
 - mobilità degli, 91
- Emitter follower, 186, 495
- ad alta impedenza d'ingresso, 192
 - complementare, 495, 496
 - guadagno in corrente, 190
 - guadagno in tensione, 187, 190
 - impedenza d'ingresso, 188, 191
 - impedenza d'uscita, 189, 191
 - sommario delle caratteristiche, 192
- Equivalent Noise Charge, 606–608, 624
- Ergodico
- sistema, 528
- Famiglie logiche, 279
- Fan-Out, 281, 284
- Fattore di emissione secondaria, 579
- Fattore di Fano, 571
- Feedback
- concetto di, 403
 - corrente-parallelo, 409, 413
 - corrente-serie, 410, 412
 - fattore di, 404
 - in un amplificatore a J-FET, 417
 - in un transistor, 418
 - negativo, 403, 404
 - negli amplificatori operazionali, 418
 - positivo, 403
 - rete di, 404
 - segnale di, 405
 - stabilità negli amplificatori con, 426
 - tensione-parallelo, 410, 414, 419
 - tensione-serie, 409, 411, 417, 423
- Figura di rumore, 558
- Filtro, 13, 359
- a condensatori commutati, 400
 - a retroazione multipla, 394
 - attivo, 359
 - biquadratico, 386, 391
 - elimina-banda, 359
 - passa-alto, 13, 15–18, 359
 - passa-banda, 359, 364
 - passa-basso, 13, 14, 18, 359
 - passa-tutto, 361
 - passivo, 359
 - RLC, 365
- Flash ADC, 513, 514
- Flicker noise, 542
- Formula di Friiss, 550
- Fotocatodo, 576, 577, 580, 584
- Fotomoltiplicatore, 576, 580, 583–585
- Fourier, 532
- antitrasformata, 23

- proprietà della trasformata, 24
- trasformata, 23
- trasformata dell'ammittenza, 26
- trasformata dell'impedenza, 26
- trasformata dell'impedenza capacitiva, 27
- trasformata dell'impedenza induttiva, 26
- Frequenza d'impulsi
 - misura analogica di, 120
- Funzione
 - biquadratica di trasferimento, 367
- Funzione di Green, 27
- Funzione di trasferimento
 - caso di 2 poli complessi coniugati, 64
 - con due poli distinti e due zeri immaginari, 61
 - con un polo ed uno zero non nell'origine, 55
 - con uno zero doppio nell'origine e due poli, 60
 - con uno zero semplice nell'origine e due poli distinti, 61
- Generatore, 7
 - di corrente, 7
 - di impulsi, 332, 353
 - di onde rettangolari, 328, 350
 - di onde triangolari, 333
 - di tensione, 7, 320
 - dipendente, 7
 - ideale, 7
 - reale, 7
- Giratore, 373, 374
- Giunzione
 - giunzione p-n, 96
- Gradiente di concentrazione, 95
- Gradino unitario
 - di tensione, 25
 - risposta di un circuito LCR, 42
 - risposta di un circuito LRC-serie, 45
 - risposta di un circuito RC, 34
 - risposta di un circuito RL, 35
- Guadagno, 404
 - a circuito aperto, 404
 - desensibilizzazione del, 406
 - di un amplificatore, 405
 - nel modo comune, 299
 - nel modo differenziale, 299
- Hall
 - effetto Hall, 91
- Howland current source, 325
- Inseguitore
 - di emettitore, 141, 186
 - di tensione, 306
- Integratore, 13, 15, 19, 309
- Interruttore
 - a ponte di diodi, 123
- JFET, 209
 - I_{DS} , 210
 - V_P , 211
 - V_{DS} , 210
 - V_{GS} , 210
 - a canale n, 209
 - I_{DSS} , 213
 - caratteristiche, 221
 - circuito equivalente, 224
 - conduttanza di drain, 224
 - conduttanza differenziale, 223
 - confronto con il transistor bipolare, 223
 - corrente di saturazione, 213
 - pinchoff, 221
 - punto di lavoro, 225
 - retta di carico, 227
 - schema di polarizzazione, 228
 - schemi di polarizzazione, 225
 - simbolo adoperato, 211
 - tensione di pinchoff, 211, 212
 - transconduttanza, 223
 - zona di interdizione, 214
 - zona di saturazione, 214, 221
 - zona ohmica, 214
 - a canale p, 211
 - simbolo adoperato, 211
- amplificatore, 214, 229
 - guadagno in tensione, 230, 231, 236
 - impedenza d'uscita, 232, 236, 237
 - struttura generale, 234
 - come dispositivo unipolare, 214
- common source
 - impedenza d'uscita, 237

- drain, 210
 gate, 210
 impedenza del gate, 215
 inseguitore di source, 232
 bootstrap, 233
 guadagno in tensione, 232, 237
 impedenza d'ingresso, 233
 impedenza d'uscita, 233
 pinchoff
 luogo dei punti di, 215
 source, 210
 source comune
 calcolo completo della risposta in frequenza, 246
 risposta a tutte le frequenze, 246
 risposta ad un gradino di tensione, 249
 risposta alle alte frequenze, 239
 risposta alle basse frequenze, 245
 risposta in frequenza, 238
 tensione di breakdown, 215
 transconduttanza, 230
 zona d'interdizione, 215
 zona di breakdown, 215
 zona di saturazione, 215
 zona ohmica, 215
 Johnson, 536
- Lacune, 91
 concentrazione intrinseca delle, 91
 mobilità delle, 91
- Laplace
 antitrasformata, 28
 calcolo dell'antitrasformata per funzioni esprimibili come rapporti di polinomi, 38
 caso di poli complessi semplici, 39
 caso di poli multipli, 41
 caso di poli reali semplici, 38
 esempi di calcolo dell'antitrasformata, 32
 poli e zeri della trasformata, 30
 proprietà della trasformata, 28
 risposta di un circuito nel caso in cui si conosca la trasformata, 42
 trasformata, 28
- classe delle funzioni di ordine esponenziale, 29
 trasformata dell'impedenza capacitiva, 34
 trasformata dell'impedenza induttiva, 33
 trasformata dell'impedenza resistiva, 33
 trasformate di alcune funzioni elementari, 29
- Legami atomici
 covalenti, 90
- Legami chimici
 covalenti, 91
- Legge dell'azione di massa, 92
- Legge di Kirchoff, 2
- Legge di Ohm, 2
- Limitatore, 336
- Linee di ritardo, 71
- Linee di trasmissione, 71
 adattamento d'impedenza, 81, 82
 coefficiente di riflessione all'estremità, 76
 costante di propagazione, 80
 effetti resistivi, 79
 impedenza caratteristica, 75, 76
 linea chiusa su di un condensatore, 83
 lunghezza d'attenuazione, 80
 riflessioni multiple, 77
 versioni commerciali, 82
- Livelli di tensione, 280
- Livelli logici, 279
- Logica
 CMOS, 295
 invertitore, 295
 porta NAND a due ingressi, 295
- DTL, 283
 ECL, 281
 NIM, 281
 TTL, 279, 281, 287, 289
- Luce Čerenkov, 569
- Maglia
 correnti di, 2
 nodo della, 1
 ramo della, 1
- Media, 527

- Mobilità, 90, 593, 594, 600
Modello a parametri g , 11
Modello a parametri h , 11
Modello a parametri y , 10
Modello a parametri z , 11
Modello a parametri ibridi, 11
Modo comune, 262, 266
 guadagno nel, 262
Modo differenziale, 262, 266
 guadagno nel, 262
MOSFET, 209, 216
 V_t , 217
 a canale n
 a svuotamento, 219
 ad arricchimento, 216, 219
 caratteristica di trasferimento, 220
 enhancement, 216
 a canale n ad arricchimento
 simboli adoperati, 217
 a canale p
 ad arricchimento, 218
 drain, 216
 gate, 216
 impedenza del gate, 218
 source, 216
 substrato, 216
 zona di breakdown, 217
 zona di saturazione, 217
 zona ohmica, 217
Multivibratore
 astabile, 328, 350
 monostabile, 332, 353

Negative Impedance Converter, 371
NMOS, 216
 caratteristica di trasferimento, 218
 corrente di saturazione, 218
 zona di ohmica, 218
 zona di saturazione, 218
Noise-factor, 558
Nyquist, 538

Oscillatore
 a mezzo ponte di Wien, 442
 a ponte di Wien, 444
 a sfasamento, 432, 435
 a transistor bipolare, 437, 439
 sinusoidale, 431, 441
 in quadratura, 439

Phase-splitter, 291
Pile-up, 572, 588, 612
Plot di Nyquist, 427
PMOS
 simboli adoperati, 218
Polarizzazione
 diretta, 99
 inversa, 99
Pole-zero cancellation, 616
Ponte di Wien, 442, 444
Popcorn noise, 557
Porta, 9
 Porta a diodi, 494
Portatori di carica
 maggioritari, 93
 minoritari, 93
Portatori liberi, 94
Principio di sovrapposizione, 6
Processi stocastici
 stazionari, 526
Pulse stretcher, 354
Push-pull, 495

Quadripoli del secondo ordine, 56
Quadripolo, 9, 545
Quenching, 596

Raddrizzatori, 109
 a cristallo, 87
Rampa unitaria di tensione
 risposta di un circuito RC, 35
 risposta di un circuito RL, 36
Retta di carico, 266, 271
 per un diodo, 103
Rettificatore, 336
Ripple
 nei filtri, 371
Rivelatore
 a semiconduttore, 597, 602, 605, 606
 al germanio, 597
 al silicio, 597
 di picco, 339
Rivelatore di picco, 114, 118
Rumore, 526
 1/f, 526, 542, 609
 bianco, 540

- in un quadripolo, 545
- nel FET, 560
- nel quadripolo, 545, 546, 550
- nel transistor bipolare, 553, 558
- shot, 526, 540
- termico, 526, 536, 608
- Sample-and-hold, 114, 492, 496
- Schottky, 542
 - diodi Schottky, 109
- Scintillatore, 575, 576
- Segnale di errore, 405
- Shaping
 - gaussiano, 617
 - triangolare, 622
- Shot noise, 609
- Sistema
 - stazionario, 527, 528
- Slew-rate, 347
- Spot noise figure, 548
- Spot-noise, 547
- Stokes Shift, 574
- Streamer limitato, 595, 596
- Temperatura di rumore, 544, 552
- Tempo di acquisizione, 493
- Tempo di transito, 583
- Tempo morto, 573
- Tensione di rumore in eccesso, 545
- Tensione Zener, 105
- Teorema del campionamento, 517, 520
- Teorema di Campbell, 567
- Teorema di Carson, 567
- Teorema di Miller, 12
- Teorema di Norton, 5
- Teorema di Nyquist, 517
- Teorema di Plancherel, 563
- Teorema di Shannon, 517
- Teorema di Thévenin, 3–5
- Teorema di Wiener-Khintchine, 562
- Timer 555, 349
- Totem-pole, 291
 - MOSFET drive, 499
- Townsend, 590, 595
- Transistor
 - β_F , 133
 - β_R , 133
 - base, 126
 - caratteristiche d'uscita, 131
 - collettore, 126
 - corrente di base, 132
 - corrente di collettore, 131
 - corrente di emettitore, 131
 - Darlington, 275, 439
 - emettitore, 125
 - giunzione base-collettore, 126
 - giunzione collettore-base
 - polarizzata inversamente, 126
 - giunzione emettitore-base, 126
 - polarizzata direttamente, 126
 - in interdizione, 132
 - in saturazione, 133
 - in zona attiva, 131, 132
 - in zona attiva inversa, 132
 - nomenclatura adoperata, 133
 - npn, 125
 - parametro α , 129
 - parametro β , 130
 - pnp, 125
 - simboli adoperati, 125
- Transistor a giunzione
 - ad effetto di campo, 209
- Transistor bipolare, 125
 - base-spreading-resistance, 144
 - circuiti di polarizzazione, 155
 - circuito di polarizzazione a V_B costante, 158
 - collegamento a diodo, 166
 - come elemento di circuito logico, 141
 - configurazione base-comune, 152
 - configurazione CB, 141
 - configurazione CC, 141
 - configurazione CE, 141
 - configurazione collettore-comune, 152
 - convenzione adoperata per tensioni e correnti, 142
 - corrente di emettitore, 144
 - effetto Early, 146
 - funzionamento in zona attiva, 142
 - generatore dipendente di corrente, 144
 - guadagno in corrente, 138
 - in interdizione, 140
 - in saturazione, 140
 - modello di Giacoletto, 147
 - base-spreading-resistance, 149

- conduttanza d'ingresso, 148
- conduttanza d'uscita, 150
- conduttanza di feedback, 149
- relazioni tra parametri h e parametri r_b , r_π , g_m , r_0 , 151
- parametri ibridi, 146
- parametro h_{re} , 147
- polarizzazione per mezzo di una sorgente di corrente costante, 161
- reazione negativa, 158
- relazioni tra i parametri h nelle tre configurazioni CE, CB, CC, 152, 154
- resistenza "vista" guardando in base, 144, 145
- resistenza d'uscita, 146
- resistenza differenziale del diodo base-emettitore, 144
- retta di carico, 156
- scelta del punto di lavoro, 155
- specchio di corrente, 166
- thermal runaway, 157
- transconduttanza, 150
- valori tipici dei parametri ibridi h, 147
- zona lineare delle caratteristiche, 140
- Trasformata di Laplace
 - teoremi del valore iniziale e del valore finale, 31
- Trigger di Schmitt, 326, 355
- Varianza, 527
- Varicap, 107
- Velocità
 - di drift, 600
- Widlar
 - generatore di corrente costante, 170
- Wilson
 - generatore di corrente di Wilson, 172
- Zener
 - circuito limitatore, 121
- Zona di carica spaziale, 96
- Zona di svuotamento, 96, 596, 598
- Zona di transizione, 96