Esperienza 15: Misura della costante di Boltzmann

Gruppo BN
Lisa Bedini, Federico Belliardo, Marco Costa

May 23, 2017

1 Scopo dell'esperienza

Misurare la costante di Boltzmann dal rumore termico (Johnson-Nyquist) di una resistenza a temperatura nota, grazie ad un amplificatore, un filtro passa-banda e un convertitore RMS.

2 Materiale a disposizione

- INA114 Amplificatore
- AD708: OpAmp integrati
- AD736: RMS converter

Tutte le resistenze, i condensatori, le tensioni di alimentazione sono stati misurati con il multimetro digitale (in DC), quindi l'errore è stato propagato secondo le specifiche nel manuale ($0.8\% + 3$ digit per le resistenze,$4\% + 3$ digit per i condensatori, $0.5\% + 1$ digit per i voltaggi). Anche la tensione in uscita al circuito è stata misurata tramite multimetro, ma date le fluttuazioni di tali valori l'errore è stato stimato come semidispersione rispetto al valore centrale. I tempi e le restanti tensioni sono state misurate con i cursori dell'oscilloscopio: l'errore sui tempi è dato dalla risoluzione dei cursori stessi mentre quello sulle tensioni è stato propagato considerando solamente l'errore sul posizionamento dei cursori. E' stato trascurato l'errore sistematico del 3% dell'oscilloscopio nella misure di tensione poiché queste compaiono solo in rapporti e la componente sistematica tende a compensarsi.

3 Montaggio del circuito

3.1 Power filter

La tensione di alimentazione (positive e negative) sono state filtrate mediante circuiti passa-basso (figura 1) prima di fornirle agli integrati in modo da ridurne le fluttuazioni:

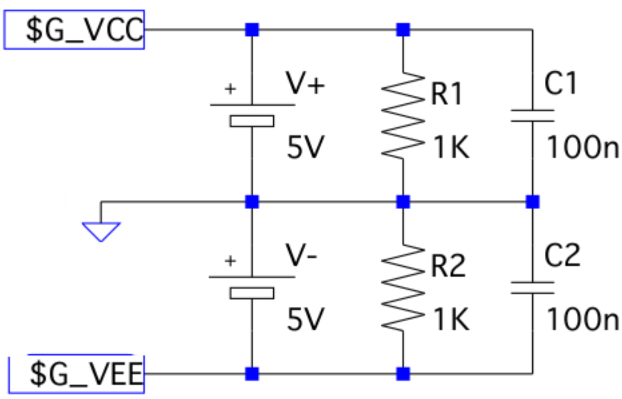

Figure 1: Filtri passa basso per le alimentazioni.

3.2 Preamplificatore

Abbiamo montato il circuito in figura 2. Il primo stadio di amplificazione è stato realizzato con un *Precision instrumentation amplifier* avente un guadagno atteso: $G_1 = 1 + \frac{50k\Omega}{1k\Omega} = 51$. Il secondo stadio è un semplice amplificatore invertente con guadagno teorico $G_2 = \frac{68k\Omega}{4.7k\Omega} = 14.5$. Il valore atteso dell'amplificazione complessiva è: $A_1 = 740$, dove abbiamo moltiplicato le due amplificazioni: le resistenze in ingresso dei due circuiti sono grandi rispetto a quelle in uscita.

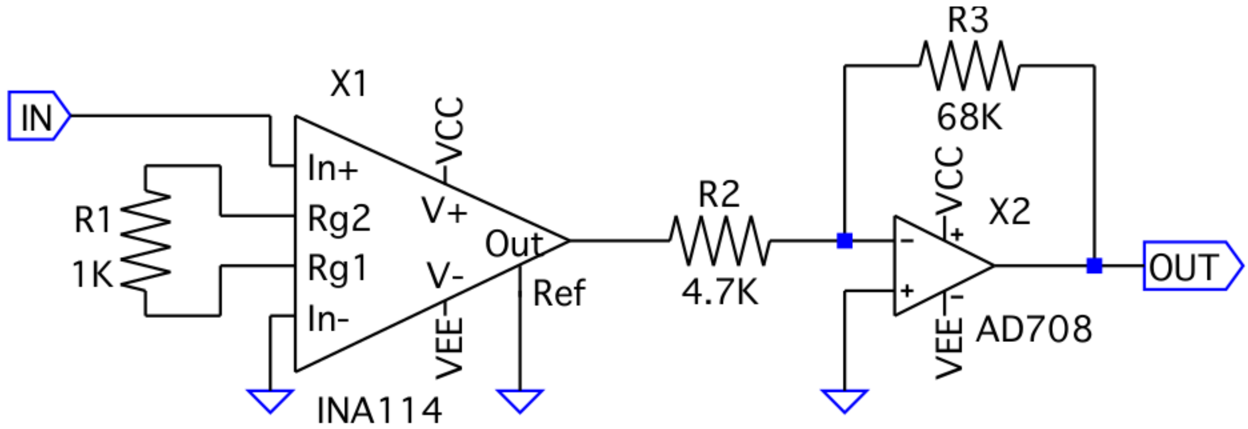

Figure 2: Preamplificatore realizzato con OpAmp AD708 e INA114.

Per limitare il rumore tutte le terre di uno stesso "blocchetto" della breadboard sono state collegate ai "blocchetti" adiacenti. Sono state collegate anche le due linee di terra usate in modo trasversale alla linea stessa. In questo modo si sono evitati offset spuri nel circuito.

Il circuito è stato analizzato fornendo in ingresso con il generatore di funzioni un onda sinusoidale di piccola ampiezza ($V_0 = 7.1 \pm 0.1$mV picco-picco) e misurando l'ampiezza picco picco del segnale in uscita. L'ampiezza del segnale in ingresso è stata scelta come la più alta possibile che non mandasse in saturazione l'opAmp a bassa frequenza, ossia nella zona dove è atteso il guadagno massimo. L'ingresso è prima dell'integrato INA114 e l'uscita dopo l'amplificatore invertente. I dati raccolti sono in tabella 1 e riportati nel diagramma di bode in figura 3. Si è eseguito un fit (con la funzione *curve fit* di *pylab*)con la funzione di trasferimento di un integratore: $A(\omega) = \frac{A_1}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_t})}}$. Da questo si vede che il preAmp si comporta effettivamente come un filtro passa basso con una frequenza di taglio $f_t = 14 \pm 1$kHz e un'ampiezza massima $A_1 = 770 \pm 10$, che è maggiore di quella attesa poiché le resistenze reali hanno un valore leggermente diverso da quello di progettazione. La matrice di covarianza[1] è: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.02 & -7.00 \\ -7.00 & 167 \end{pmatrix}$. Con un $\chi^2/ndof = 114/10$.

$V_{out}(mV)$	$\Delta V_{out}(mV)$	f(kHz)	Δf(kHz)
5.36	0.04	0.00098	0.00001
5.36	0.04	0.0097	0.0001
5.36	0.04	0.098	0.001
5.36	0.04	0.99	0.01
5.36	0.04	3.00	0.03
5.36	0.04	5.98	0.06
4.96	0.04	10.0	0.1
4.24	0.04	14.8	0.1
3.48	0.04	20.1	0.2
2.84	0.02	25.5	0.3
1.37	0.02	49.7	0.5
0.52	0.01	100	1

Table 1: Tensioni in uscita dal preamplificatore V_{out} in funzione della frequenza f.

Per frequenze basse si vede in figura 4 che il circuito agisce da amplificatore e esegue uno sfasamento del segnale di $\pi\, rad$. Infatti l'integrato che funziona da passa-basso aggiunge una fase nulla ed è l'amplificatore invertente che sfasa il segnale. Alle alte frequenze (figura 5) l'integratore sfasa di $-\frac{\pi}{2}$, dunque lo sfasamento complessivo è $\frac{\pi}{2}$ e il segnale di uscita è anticipato.

[1]In tutta la relazione non si sono mai riportate le unità di misura delle entrate della matrice di covarianza, poiché sono le ovvie combinazioni delle unità in cui sono stati riportati i dati numerici: in questo caso mV e kHz.

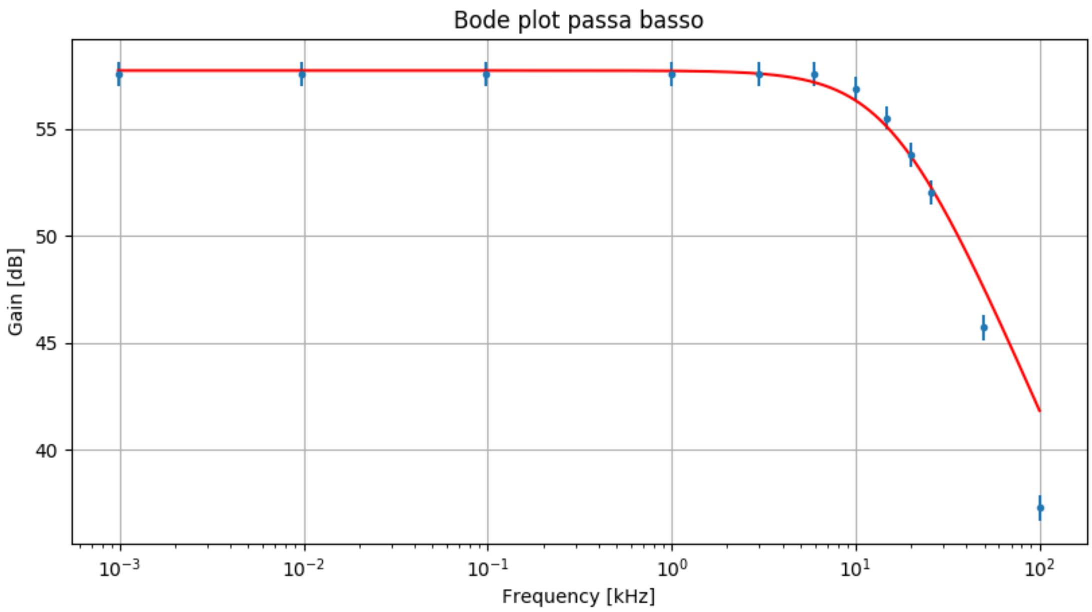

Figure 3: Diagramma di Bode del preamplifiatore.

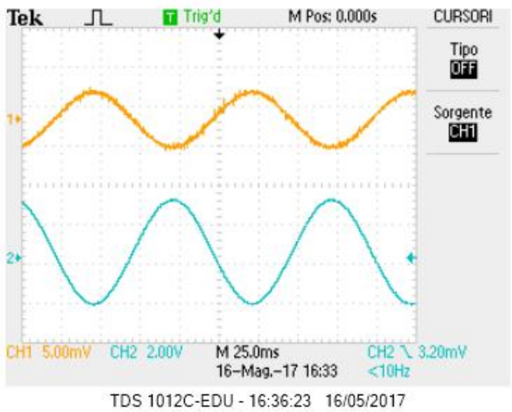

Figure 4: Onde sfasate di π rad in ingresso e uscita al preamplificatore.

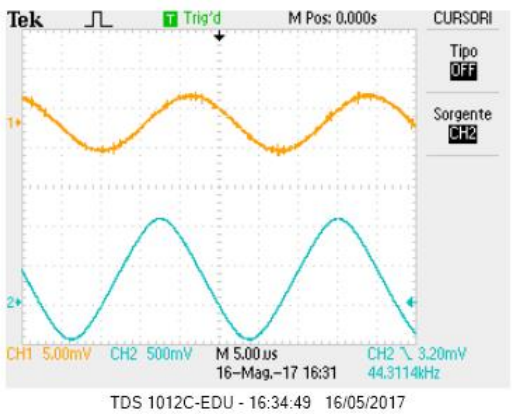

Figure 5: Onde sfasate di $\frac{\pi}{2}$ rad in ingresso e uscita al preamplificatore.

Si vede che alle alte frequenze l'attenuazione per decade è maggiore di quella attesa di $20\frac{dB}{decade}$. Questo è compatibile con la presenza di ulteriori poli che diventano importanti ad alta frequenza all'interno dell'OpAmp. Il prodotto GWB dell'opAmp è $GBW = 4$MHz dunque con un guadagno di circa 50 ci aspettiamo che la finitezza di GBW inizi a diventare rilevante a frequenze di circa 80kHz, come in effetti accade. La deviazione dalla legge attesa (che rappresenta un andamento non solamente un errore sperimentale) è la causa del χ^2 fuori misura.

In realtà ai fini della misura del solo guadagno massimo è più efficace eseguire un fit alla sola retta sui dati a bassa frequenza, cioè dei primi sei punti con valori tutti uguali di V_{out}, ciò corrisponde a eseguire la semplice divisione $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ con propagazione dell'errore, che fornisce $A_1 = 754 \pm 12$. Questo è il valore usato nei calcoli successivi.

3.3 Filtro passa-banda e postamplificatore

Si sono realizzati il filtro passa-banda e il postamplificatore come mostrato nelle figure 6 e 7 rispettivamente.

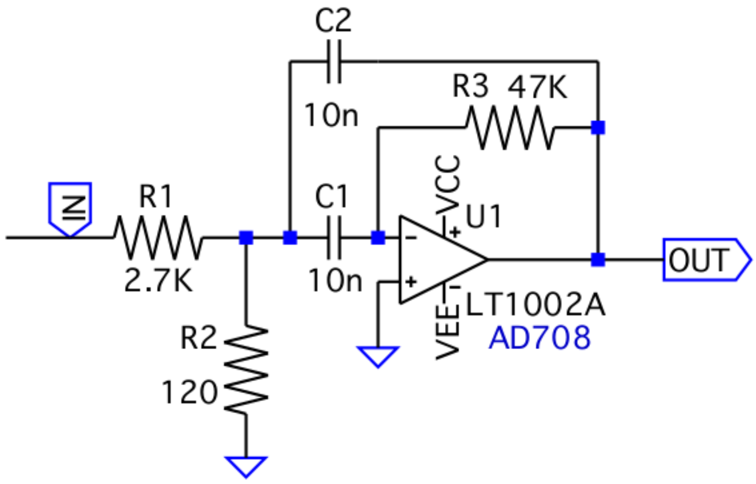

Figure 6: Filtro passa-banda realizzato con OpAmp.

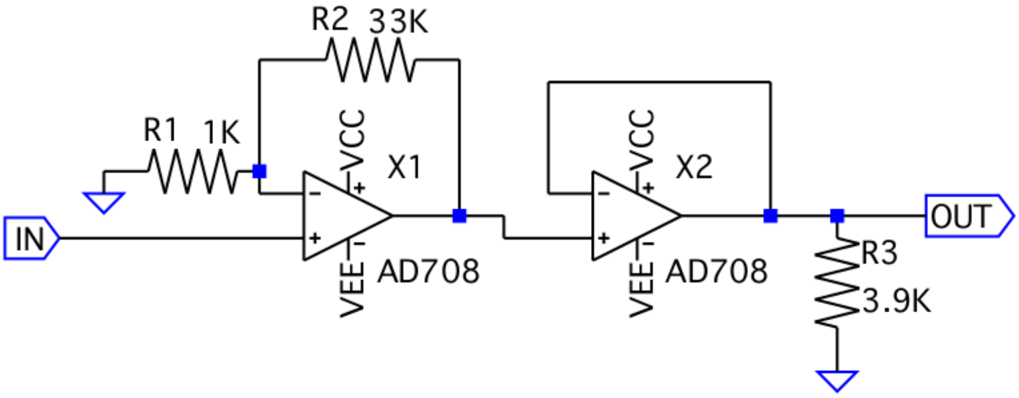

Figure 7: Postamplificatore realizzato con OpAmp.

L'analisi teorica del circuito passa-banda indica che questo ha una amplificazione massima $A_{banda} = \frac{R_3}{2R_1} = 8.7$ in corrispondenza della frequenza $f_t = \frac{1}{2\pi C}\sqrt{\frac{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}{R_3}} = 6.7$kHz. La larghezza di banda prevista è: $\Delta f = \frac{1}{\pi R_3 C} = 667$Hz, agli estremi della quale l'amplificazione è di $3dB$ inferiore a quella di picco. Il postamplificatore ha invece un guadagno $A_{post} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 34$, come è ben noto. L'amplificazione a centro banda attesa è dunque $A_2 = A_{banda}A_{post} = 269$.

L'analisi in frequenza (e la costruzione del relativo diagramma di Bode) è stata eseguita con un segnale sinusoidale di ampiezza picco-picco $V_{in} = 28.6 \pm 0.5$ mV. Abbiamo scelto questa ampiezza come la massima possibile che non mandi in saturazione gli OpAmp. L'ingresso è prima del passa-banda e l'uscita è dopo il postamplificatore. I dati sono riportati in tabella 2. E' stato eseguito un fit (figura 8) a tre parametri della funzione $A(f) = \frac{A_2 \Delta f}{\sqrt{(f^2-f_0^2)^2+f\Delta f}}$, ottenuta dal modello teorico con il principio della massa virtuale. Esso ha riportato come risultati: $A_2 = 235.6 \pm 1.2$, $f_0 = 6.349 \pm 0.002$kHz, $\Delta f = 638 \pm 6$Hz. La matrice di covarianza

risulta essere: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.34 & -2.93 \cdot 10^{-4} & -5.68 \cdot 10^{-3} \\ -2.93 \cdot 10^{-4} & 5.55 \cdot 10^{-4} & 1.36 \cdot 10^{-6} \\ -5.68 \cdot 10^{-3} & 1.36 \cdot 10^{-6} & 3.64 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$. Con un $\chi^2/ndof = 136/22$.
Nuovamente il χ^2 elevato è dovuto al fatto che ad alte frequenze l'andamento è apprezzabilmente diverso da quello *fittato*.

$V_{out}(mV)$	$\Delta V_{out}(mV)$	f(kHz)	Δf(kHz)
0.011	0.005	0.098	0.001
0.0344	0.0005	0.300	0.003
0.118	0.004	1.00	0.01
0.160	0.004	1.31	0.01
0.19	0.01	1.59	0.02
0.340	0.008	2.50	0.03
0.564	0.008	3.50	0.04
1.03	0.02	4.60	0.05
1.41	0.02	5.00	0.05
2.48	0.04	5.60	0.06
3.06	0.08	5.75	0.06
4.40	0.08	5.99	0.06
5.92	0.08	6.18	0.06
6.48	0.08	6.43	0.06
5.56	0.08	6.58	0.07
3.80	0.08	6.83	0.07
2.92	0.04	7.05	0.07
2.38	0.08	7.25	0.07
1.88	0.04	7.50	0.07
1.37	0.02	8.00	0.08
1.07	0.02	8.54	0.09
0.90	0.01	9.02	0.09
0.66	0.01	10.0	0.1
0.28	0.04	15.2	0.1
0.097	0.001	27.6	0.3

Table 2: Tensioni in uscita dal passa-banda e postamplificatore V_{out} in funzione della frequenza f.

Né l'amplificazione massima né la larghezza di banda misurate sono compatibili con quanto atteso. Questo è probabilmente dovuto a poli dell'OpAmp (non idealità) che non sono stati considerati.

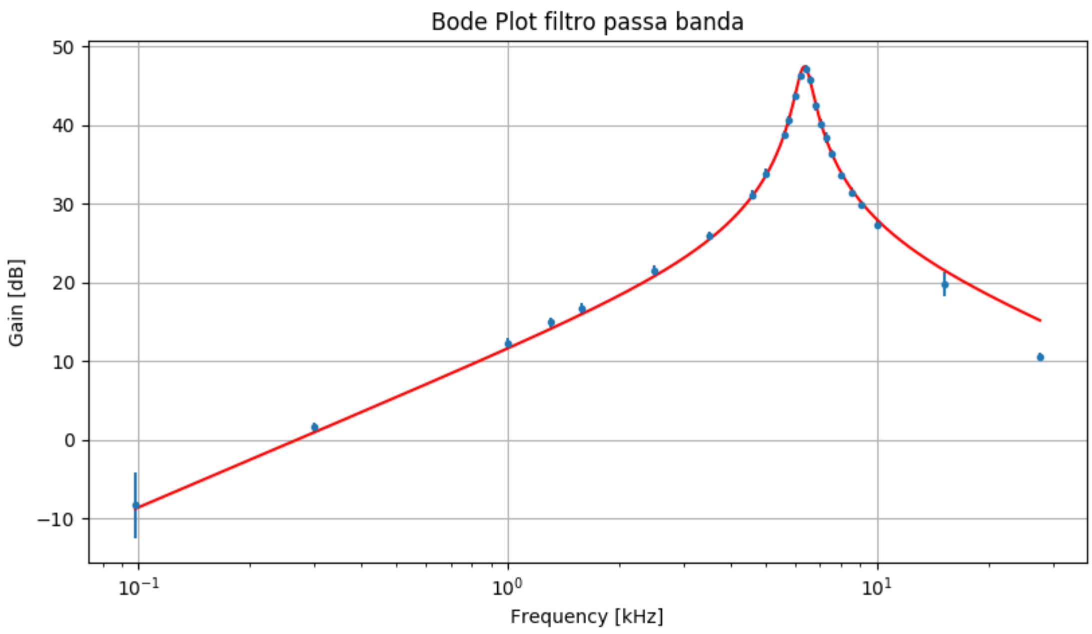

Figure 8: Fit del diagramma di Bode del circuito passa-banda.

Ai fini di determinare solamente il guadagno massimo è stato eseguito un fit con un set di dati ridotto intorno al massimo della curva (figura 9). Esso da $A_2 = 234.9 \pm 1.2$, $f_0 = 6.349 \pm 0.002$kHz, $\Delta f = 638 \pm 6$Hz. La matrice di covarianza risulta essere: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.54 & -2.85 \cdot 10^{-4} & -6.19 \cdot 10^{-3} \\ -2.85 \cdot 10^{-4} & 5.12 \cdot 10^{-4} & 1.26 \cdot 10^{-6} \\ -6.20 \cdot 10^{-3} & 1.26 \cdot 10^{-6} & 3.43 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$. Con un $\chi^2/ndof = 1/6$.

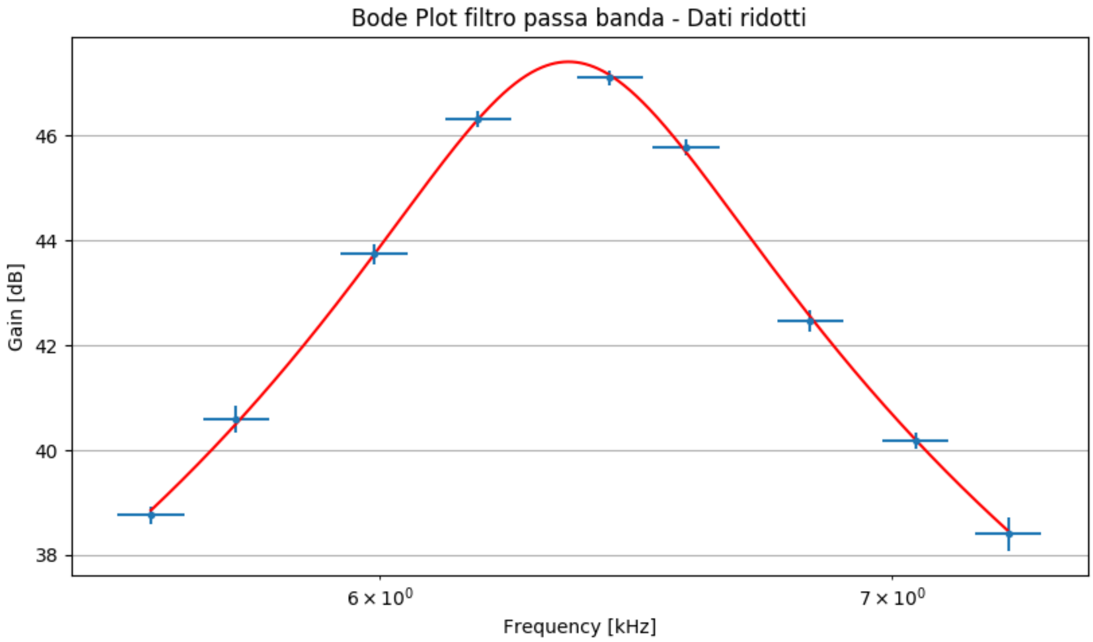

Figure 9: Fit del diagramma di Bode del circuito passa banda - Centro banda.

In conclusione l'amplificazione totale del circuito a centro banda, ottenuta moltiplicando i guadagni di tutti gli amplificatori misurati è: $A_0 = A_1 A_2 = (1.78 \pm 0.03) \cdot 10^5$, qui riportata perché usata nei calcoli seguenti.

3.4 Convertitore RMS

L'ultima parte del circuito ha lo scopo di trasformare un segnale alternato in un segnale continuo restituendone il valore quadratico medio ed è stato realizzato con l'apposito integrato nel circuito riportato in figura 10.

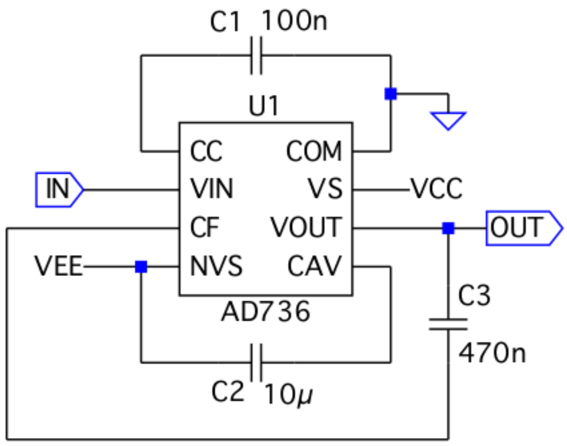

Figure 10: Circuito RMS realizzato con appostito integrato.

Inviando un segnale sinusoidale di ampiezza $V_{in} = 174 \pm 4$mV ci aspettiamo un segnale in uscita continuo $V_{out,att} = 123 \pm 3$mV, in ottimo accordo con quello misurato $V_{out,mis} = 124 \pm 4$mV. In figura 11 si osservano il segnale in ingresso sinusoidale e il suo valore quadratico medio. Abbiamo verificato che entro il range di frequenze $500\text{Hz} - 10\text{kHz}$ il sistema funziona bene come RMS, ma al di fuori di questo no. La banda passante del passa-banda è ampiamente contenuta in questo range dunque questa limitazione non è un problema.

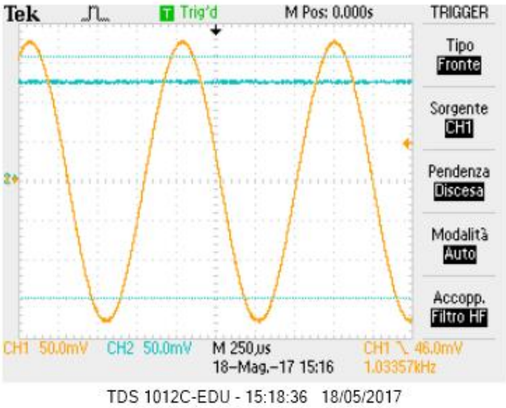

Figure 11: Verifica del funzionamento del circuito RMS: segnale in ingresso sinusoidale e rispettivo valore RMS.

4 Misura della costante di Boltzmann

Il rumore (V_{rms}) totale è determinato dalla somma in quadratura dei rumori associati alla resistenza e quelli dovuti all'amplificatore, modellizzati come rumori in serie e in parallelo all'amplificatore. Dalla teoria ci aspettiamo dunque

$$V_{rms} = V_0\sqrt{1 + \frac{R}{R_t} + \left(\frac{R}{R_n}\right)^2} \tag{1}$$

dove:

- V_0 è il rumore in uscita a resistenza nulla (dato solo dal rumore in serie all'amplificatore).
- $R_t = \frac{V_0^2}{4k_bTA_0^2\Delta f}$ è la resistenza equivalente del rumore in serie sull'ingresso dell'amplificatore (resistenza che genererebbe un rumore termico equivalente). Il parametro A_0 è l'amplificazione totale del circuito utilizzato (misurata), Δf è la larghezza di banda del circuito (a cui si suppone contribuisca solo il passa-banda), T è la temperatura ambiente.
- R_n è il rapporto tra il rumore in parallelo e il rumore in serie dell'amplificatore. E' chiaro che il rumore in parallelo (a differenza del rumore in serie) è presente solamente se vi è una resistenza ai capi dell'ingresso dell'amplificatore.

Le misure sono state eseguite misurando la tensione in uscita dal convertitore RMS con il multimetro digitale in DC. Si è visto che il valore misurato presentava forti oscillazioni e si è preso come errore sulla misura la semidispersione dei valori visualizzati dal multimetro e come misura la media di essi.

In tabella 3 e in figura 12 sono riportati i valori di V_{rms} per un range di resistenze che va da 1.78kΩ a 216kΩ. Per resistenze di valore superiore i dati sono risultati essere totalmente inaffidabili: in particolare non si osservava più una dipendenza apprezzabile di V_{rms} dal valore della resistenza.

R(kΩ)	ΔR(kΩ)	$V_{rms}(mV)$	$\Delta V_{rms}(mV)$
1.78	0.02	80	5
8.16	0.08	90	5
10.0	0.2	100	5
15.1	0.2	107	5
21.4	0.3	110	5
46.3	0.5	140	5
55.7	0.5	145	5
*80.8	0.7	175	10
*99.2	0.9	180	10
*118	2	215	10
*147	2	220	10
*216	3	230	10

Table 3: Misure di V_{rms} e relative resistenze.

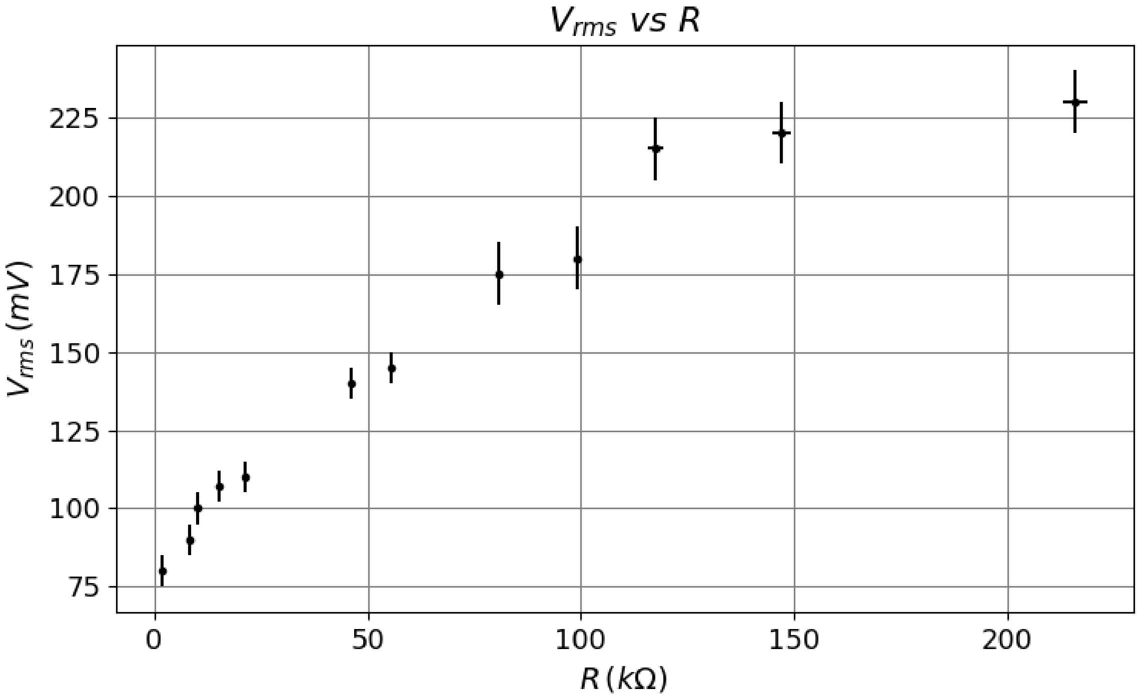

Figure 12: Plot di tutti i dati misurati V_{rms} vs R.

Si è eseguito inizialmente un fit a tre parametri della funzione $V_{rms} = V_0\sqrt{1 + \frac{R}{R_t} + (\frac{R}{R_n})^2}$. Il parametro R_n risultava tuttavia essere dell'ordine delle decine di MΩ dunque l'ultimo termine si può considerare ininfluente. In effetti R_n restituito dall'algoritmo di fit fluttuava anche di un ordine di grandezza al variare del valore iniziale dal quale si esegue la minimizzazione del χ^2. Per questi motivi il fit è stato ripetuto a due parametri secondo il modello: $V_{rms} = V_0\sqrt{1 + \frac{R}{R_t}}$.
Nel successivo fit sono stati escluse le righe marcate con l'asterisco nella tabella 3 poiché affetti da fluttuazioni troppo grandi come si può vedere dagli errori[2].

I parametri riportati dal fit sono $V_0 = 80 \pm 3$mV e $R_t = 23 \pm 3$kΩ. La matrice di covarianza è: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 12.1 & 11.8 \\ 11.8 & 13.9 \end{pmatrix}$. Con un $\chi^2/ndof = 2.76/5$ (basso per probabile sovrastima delle incertezze).
Invertendo la formula per R_t otteniamo: $k_B = \frac{V_0^2}{4R_tTA_0^2\Delta f} = (1.16 \pm 0.11) \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$. La temperatura è stata stimata (arbitrariamente) come $T = 298 \pm 2$K. Gli errori più significativi che si propagano (in quadratura, considerando la covarianza) in questa formula sono quelli sui parametri del fit della curva di rumore.

Di seguito (figura 14) è riportato il fit eseguito con tutti i dati nella tabella 3.

I parametri estratti sono $V_0 = 81 \pm 3$mV e $R_t = 24 \pm 3$kΩ. La matrice di covarianza è: $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 8.80 & 7.76 \\ 7.56 & 7.48 \end{pmatrix}$. Con $\chi^2/ndof = 13/10$. La costante di Boltzmann con questi dati risulta essere $k_B = (1.15 \pm 0.11) \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$. Dunque non significativamente diverso dal valore prima ottenuto, nonostante l'accortezza di non inserire i dati più affetti da fluttuazioni nel fit precedente.

Il valore atteso della costante di Boltzmann è $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$, che non è compatibile entro l'errore con il valore trovato. Ci aspettiamo in effetti una sottostima della costante perché il guadagno sulla banda passante è comunque sempre minore o uguale del guadagno massimo. Pertanto A_0 è in effetti una sovrastima del guadagno totale e pertanto porta a una sottostima di k_B. Se si prende come A_2 la media tra il guadagno massimo e quello agli estremi della banda passante, assegnandogli come incertezza la semidispersione (arbitrariamente) si ottiene $A_2 = 215 \pm 15$ e $A_0 = (1.62 \pm 0.12) \cdot 10^5$. Si può eseguire questo calcolo ricordando che il guadagno agli estremi della banda è $A_2^{max} - 3dB$. Sostituendo nella formula $k_B = \frac{V_0^2}{4R_tTA_0^2\Delta f} = (1.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$. Il valore ottenuto contiene il valore vero citato sopra entro l'incertezza. Il metodo descritto per stimare A_2 è molto grossolano, tuttavia risponde al problema reale che l'amplificazione non sarà quella massima in tutta la banda passante, il risultato ottenuto è pertanto da considerasi attendibile. Inoltre mette in luce come k_B misurata sia fortemente sensibile all'amplificazione su tutta la banda passante.

[2] Alla procedura di fit sono stati forniti solo gli errori sulle tensioni e non quelli sulle resistenze in quanto trascurabili nella regione di dati usata.

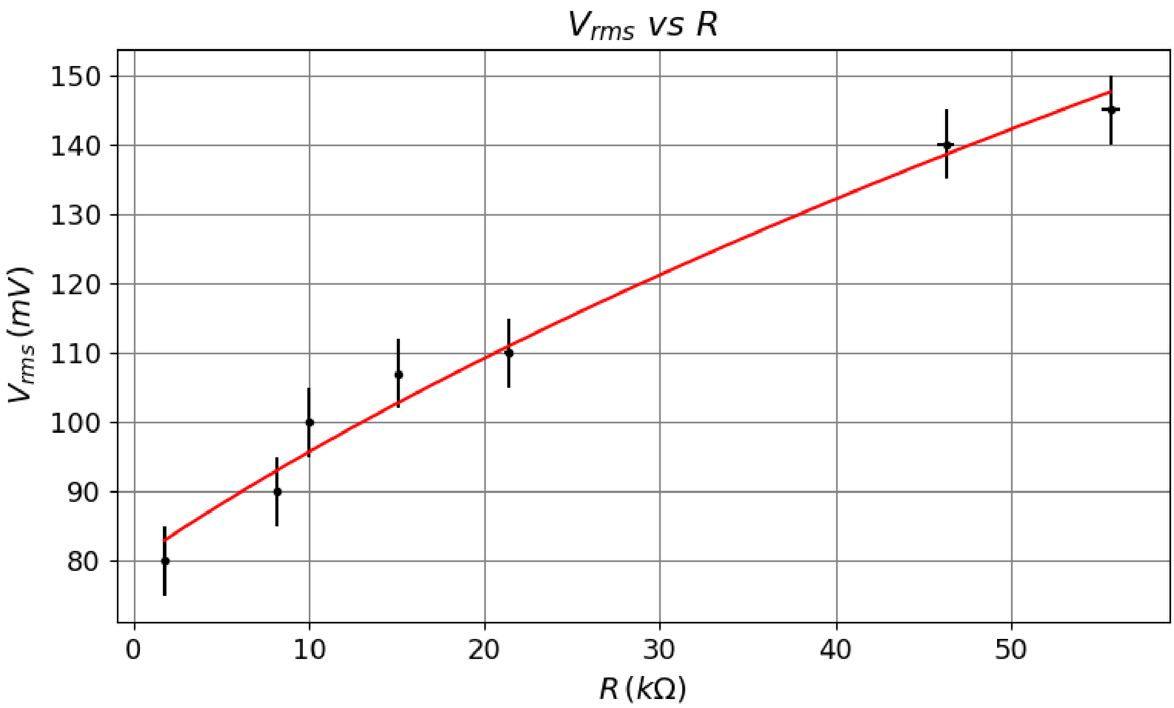

Figure 13: Fit V_{rms} vs R con i dati più stabili.

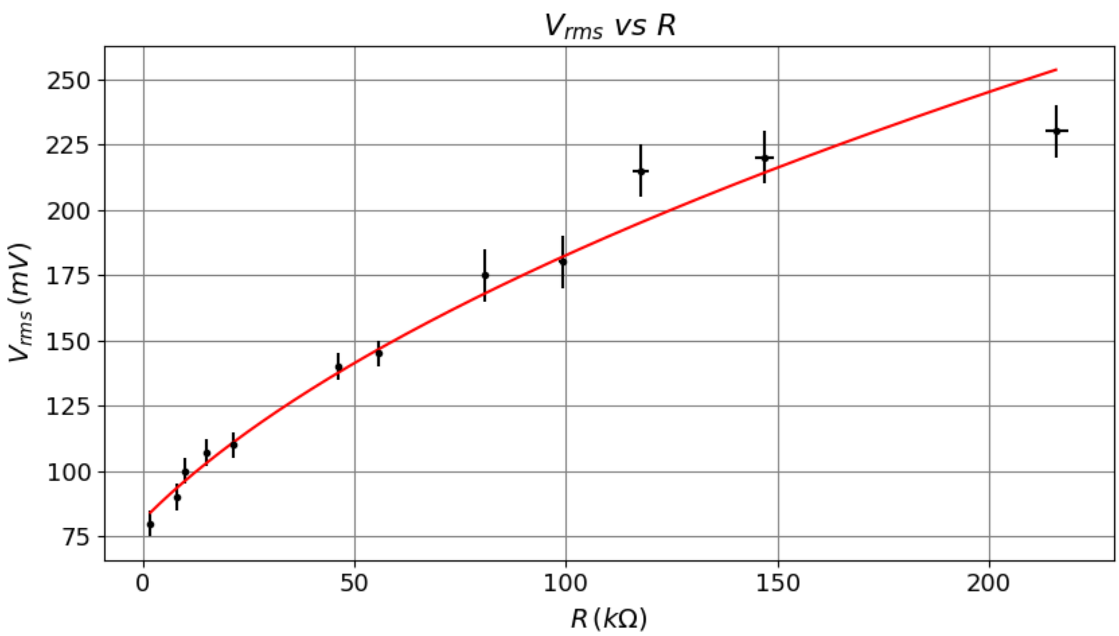

Figure 14: Fit V_{rms} vs R con tutti i dati.