

# Integer Quantum Hall Effect

Belliardo Federico

9 dicembre 2017

## Sommario

Si presenta qui una prima teoria per spiegare l'effetto Hall quantistico intero.

## 1 L'effetto Hall classico

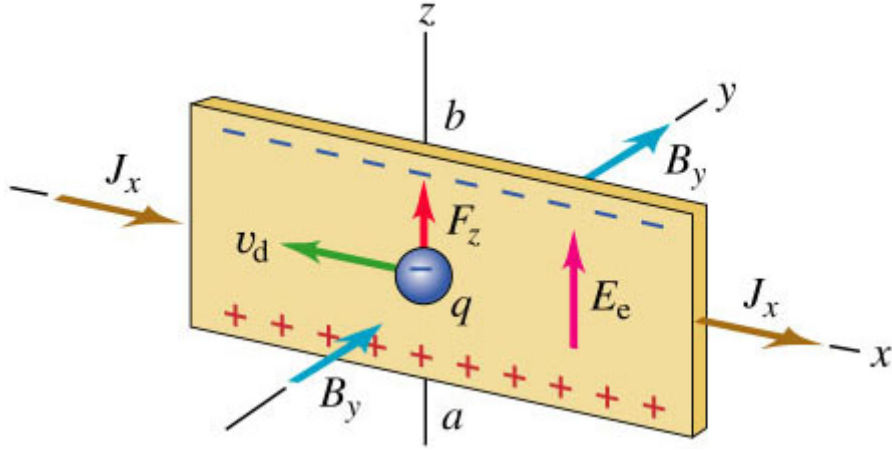


Figura 1: Disegno schematico dell'effetto Hall classico.

Consideriamo un insieme di elettroni confinati su una superficie bidimensionale su cui trasversalmente è applicato un campo magnetico. L'equazione di moto classica è:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau} \quad (1)$$

Il coefficiente  $\tau$  è il tempo di scattering e riassume qualsiasi impedimento al moto dell'elettrone (impurità, altri elettroni, ...).

Cerchiamo una soluzione stazionaria dell'equazione del moto ricordando che

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v} \quad (2)$$

abbiamo ( $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{B}$  sono trasversali):

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ \omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J} = \frac{e^2 n \tau}{m} \mathbf{E} \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4)$$

che è la legge di Ohm, in particolare troviamo:

$$\sigma = \frac{\sigma_{DC}}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ \omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

dove  $\sigma_{DC} = \frac{ne^2}{m}$ . Vediamo che per avere una corrente di equilibrio  $I_x \neq 0$  e  $I_y = 0$  è necessario avere anche una componente del campo elettrico lungo  $y$  a causa della forma non diagonale della matrice. Questo fenomeno fu scoperto da Edwin Hall nel 1879 grazie ad un esperimento stimolato da una nota di Maxwell nel suo famoso trattato. Possiamo calcolare la resistività:

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{DC}} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

sostituendo nella formula di sopra otteniamo la previsione classica:

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2 \tau} \quad \rho_{xy} = \frac{B}{ne} \quad (7)$$

Dunque vediamo che  $\rho_{xx}$  dovrebbe essere costante al variare del campo magnetico mentre  $\rho_{xy}$  è previsto crescere linearmente con il campo magnetico.

## 2 Misura dell'effetto Hall quantistico intero.

Nel 1980 von Klitzing studiò la resistenza di Hall del gas 2D di elettroni in un MOSFET di GaAs/AlGaAs a basse temperature e alte intensità del campo magnetico. Egli trovò che le misure di  $\rho_{xy}$  e  $\rho_{xx}$  si discostavano dall'aspettativa classica e mostravano una ricca struttura.

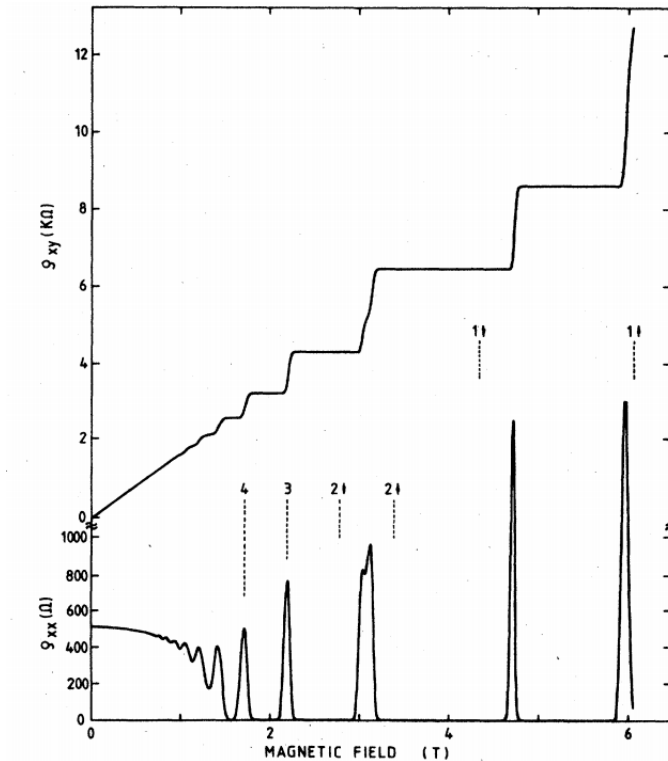


Figura 2: Misure della resistività  $\rho_{xy}$  e  $\rho_{xx}$  di von Klitzing per le quali vinse il premio Nobel nel 1985.

Alcune osservazioni sulle misure:

- La resistività è quantizzata secondo la legge:

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

Questa quantizzazione non dipende da alcuna proprietà del materiale come densità di elettroni o impurezze. Per la sua natura universale questo fenomeno è usato per misure precise dell'unità di resistenza e per misurare la costante di struttura fine.

- Per piccoli campi magnetici l'andamento misurato è effettivamente quello classico.
- $\rho_{xy}$  presenta una serie di *plateau* con una transizione *sharp* tra uno e l'altro.
- $\rho_{xx}$  invece è diverso da 0 solamente durante le transizioni da un *plateau* all'altro. quando ci si trova su un *plateau* non c'è resistività longitudinale.
- Aumentando il disordine del campione (impurità) si vede che i *plateau* diventano più definiti. In questo effetto il disordine svolge un ruolo costruttivo.
- Non è mostrato nella figura ma a più alti campi magnetici iniziano ad apparire plateau a valori frazionari della resistenza. Questo fenomeno è noto come *effetto Hall quantistico frazionario*.

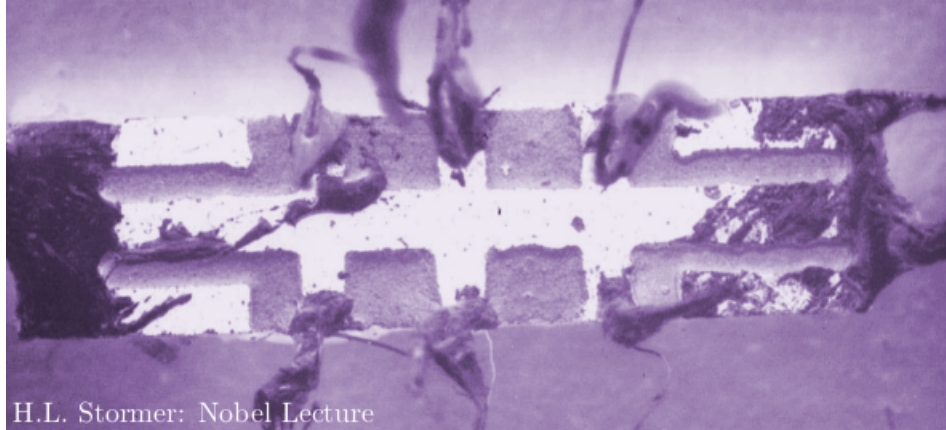


Figura 3: Fotografia di un campione di GaAs/AlGaAs.

### 3 Elettroni di Bloch in campo magnetico

Per spiegare l'IQHE si studierà un modello di elettroni non interagenti in campo magnetico trasverso su un background periodico. Scriviamo l'Hamiltoniana di singola particella:

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + U(x, y) \quad (8)$$

dove  $U(x + a, y) = U(x, y + b) = U(x, y)$ .

In ciò che segue trascureremo lo spin dell'elettrone. A livello di elettroni non interagenti l'unico effetto che avrebbe sarebbe la degenerazione di spin, ma a basse temperature e per grandi campi magnetici gli spin sono tutti allineati lungo  $\mathbf{B}$  quindi non si verifica nemmeno la doppia occupazione di ogni livello perché è energeticamente sfavorita.

L'introduzione del campo magnetico rompe la simmetria discreta dell'Hamiltoniana per traslazioni nel reticolo di Bravais diretto.

Al fine di caratterizzare gli autostati dell'Hamiltoniana introduciamo gli operatori di traslazione magnetici:

$$T_R = \exp \left( \frac{i \mathbf{R} \cdot (\mathbf{p} + e \mathbf{A})}{\hbar} \right) \quad (9)$$

Questi dipendono dalla scelta della gauge e si vede che commutano con l'Hamiltoniana

$$[T_R, \mathcal{H}] = 0$$

tuttavia questi operatori di traslazione non commutano tra di loro, infatti:

$$T_a T_b = \exp(2\pi\phi) T_b T_a$$

dove  $\phi = \left(\frac{eB}{\hbar}\right) ab$  è il numero di flussi magnetici elementari  $\frac{h}{e}$  nella cella del reticolo. Non abbiamo quindi speranza di diagonalizzare contemporaneamente tutti gli operatori di traslazione.

Tuttavia facendo l'ipotesi che sia  $\phi = \frac{p}{q}$  con  $p, q$  due numeri interi (possiamo sempre sceglierli con precisione arbitraria) abbiamo la speranza di diagonalizzarne alcuni. Consideriamo il sottoreticolo definito dalle traslazioni

$$\mathbf{R} = n(q\mathbf{a}) + m\mathbf{b} \quad (10)$$

queste commutano tra di loro. Classificheremo dunque gli autostati con gli autovalori di  $\mathcal{H}$ ,  $T_{qa}$ ,  $T_b$ . In particolare sarà:

$$T_{qa}\psi = \exp(ik_1 qa) \psi$$

$$T_b\psi = \exp(ik_2 b) \psi$$

dove  $k_1$  e  $k_2$  sono i quasi-impulsi magnetici. Essi possono essere ristretti nella zona di Brillouin magnetica:

$$0 \leq k_1 \leq \frac{2\pi}{qa} \quad 0 \leq k_2 \leq \frac{2\pi}{b}$$

Si ricorda che per il teorema spettrale normale gli operatori hermitiani (come l'Hamiltoniana) e unitari (come le traslazioni) possono essere diagonalizzati da una base ortonormale di autovettori.

Dunque diagonalizzo prima  $T_{qa}$  trovando una base ortonormale, i suoi autospazi sono invarianti per  $T_b$ , che posso diagonalizzare all'interno di ognuno di essi sempre con una base ortonormale. Ripeto la procedura per l'Hamiltoniana all'interno di ogni sottospazio  $\mathbf{k}$ . Ottengo dunque un insieme ortogonale di autovettori.

Gli autostati sono quindi:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

dove  $\alpha$  è l'indice di banda (in generale  $\alpha$  sono tutti gli altri numeri quantici che servono per costruire lo spazio di Hilbert, nelle nostre applicazioni si tratta solamente di un numero intero che è l'indice di banda).  $u$  sono delle funzione invarianti per gli operatori di traslazione magnetica.

## 4 La conduttanza di Hall come risposta lineare

Affronteremo pedissequamente il problema di determinare la conduttanza *bulk* del gas di elettroni sfruttando la formula di Kubo per la risposta lineare.

Consideriamo un sistema generico (anche a molti corpi interagente) e accendiamo un campo elettrico esterno uniforme che descriviamo in termini di  $\mathbf{A}$  scegliendo  $\phi = 0$ , dunque

$$\Delta\mathcal{H} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$$

dove  $\mathbf{J}$  è la corrente elettrica associata al sistema in esame. Poiché gli esperimenti di QHE sono fatti a temperatura bassa possiamo assumere  $T = 0$  e eseguire il calcolo in rappresentazione di interazione. Si suppone che il sistema cominci a evolvere sotto l'effetto dell'Hamiltoniana di interazione a partire dal ground state  $|0\rangle$ :

$$\langle 0(t) | \mathbf{J}(t) | 0(t) \rangle = \langle 0 | U^{-1}(t) \mathbf{J}(t) U(t) | 0 \rangle = \langle 0 | \left( \mathbf{J}(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\Delta H(t'), \mathbf{J}(t)] \right) | 0 \rangle \quad (12)$$

Ci limitiamo a calcolare la risposta lineare perché supponiamo di eseguire misure con piccoli campi elettrici, di fatto misuriamo:  $\rho_{xy} = \frac{\partial J_y}{\partial E_x} \Big|_{E_x=0}$ .

Scegliamo per comodità di calcolo  $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{E}}{i\omega} \exp(i\omega t)$  dunque otteniamo:

$$\langle J_y(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^t dt' \langle 0 | [J_x(t'), J_y(t)] | 0 \rangle E_x e^{-i\omega t'} \quad (13)$$

Abbiamo assunto che il valore di aspettazione della corrente sul ground state non interagente fosse nullo:  $\langle 0 | \mathbf{J} | 0 \rangle = 0$ .

Poiché abbiamo calcolato la risposta al primo ordine immaginando di far agire la perturbazione da  $-\infty$  arrivati al tempo al tempo  $t$  siamo ormai in condizioni stazionarie e possiamo sfruttare l'invarianza temporale osservando che l'integrando può veramente dipendere solo da  $t'' = t - t'$ :

$$\langle J_y(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \left( \int_0^{+\infty} dt'' e^{i\omega t''} \langle 0 | [J_x(0), J_y(t'')] | 0 \rangle \right) E_x e^{-i\omega t} \quad (14)$$

otteniamo finalmente la formula di Kubo per la conduttività:

$$\sigma_{xy}(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle 0 | [J_y(0), J_x(t)] | 0 \rangle \quad (15)$$

Della derivazione di questa formula possono chiaramente essere messi in dubbio l'approssimazione lineare e l'ipotesi di stazionarietà.

Inseriamo un insieme completo di autostati dell'Hamiltoniana e scriviamo  $\mathbf{J}(t) = V(t)^{-1} \mathbf{J}(0) V(t)$  dove  $V(t) = \exp(-i\hbar\mathcal{H}_0 t)$ . Otteniamo:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \sum_n \left[ \langle 0 | J_y | n \rangle \langle n | J_x | 0 \rangle e^{i\frac{(E_n - E_0)t}{\hbar}} - \langle 0 | J_x | n \rangle \langle n | J_y | 0 \rangle e^{i\frac{(E_0 - E_n)t}{\hbar}} \right] \quad (16)$$

Eseguendo l'integrale temporale e ricordando che il ground state non contribuisce alla conduttività arriviamo a:

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{i}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left[ \frac{\langle 0 | J_y | n \rangle \langle n | J_x | 0 \rangle}{\hbar\omega + E_n - E_0} - \frac{\langle 0 | J_x | n \rangle \langle n | J_y | 0 \rangle}{\hbar\omega + E_0 - E_n} \right] \quad (17)$$

Si capisce che l'ipotesi di questa formula è che il ground state non sia degenere così che non si abbiano divergenze nel denominatore.

Ora vogliamo specificare questa formula nel caso in cui i conduttori di corrente siano  $N$  elettroni indipendenti. Lo stato quantistico *many-body* è dunque fattorizzabile e lo si può inserire nella formula ricavata considerando tutte le possibili occupazioni dei livelli da parte degli elettroni. In maniera più semplice si può argomentare che lo stato iniziale degli elettroni occupanti gli stati più bassi disponibili fino alla superficie di Fermi sarà scrivibile come:

$$|0\rangle = \frac{A}{\sqrt{N}} |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \dots |\psi_N\rangle$$

Dove  $A$  è l'operatore che antisimmetrizza la funzione d'onda.

L'operatore di evoluzione temporale si spezza e i ket dei singoli elettroni evolvono indipendentemente, abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} \langle 0(t) | \mathbf{J}(t) | 0(t) \rangle &= \frac{1}{N} \langle \psi_1(t) | \langle \psi_2(t) | \dots \langle \psi_N(t) | A^{-1} (\mathbf{J}_1(t) + \dots + \mathbf{J}_N(t)) A | \psi_1(t) \rangle | \psi_2(t) \rangle \dots | \psi_N(t) \rangle = \\ &= \langle \psi_1(t) | \mathbf{J}_1(t) | \psi_1(t) \rangle + \langle \psi_2(t) | \mathbf{J}_2(t) | \psi_2(t) \rangle + \dots + \langle \psi_N(t) | \mathbf{J}_N(t) | \psi_N(t) \rangle \end{aligned}$$

Infatti il valore di aspettazione su un determinante di Slater di una somma di operatori a singola particella si scrive come la somma dei valori di aspettazione dei singoli operatori su ogni possibile stato degli elettroni.

Consideriamo un elettrone che si trovi nella funzione d'onda  $|\psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x})\rangle$  il suo contributo alla conduttività è:

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{i}{\omega} \sum_{\beta \neq \alpha} \left[ \frac{\langle \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} | J_y | \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} \rangle \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} | J_x | \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \rangle}{\hbar\omega + E^\beta(\mathbf{k}') - E^\alpha(\mathbf{k})} - \frac{\langle \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} | J_x | \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} \rangle \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} | J_y | \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \rangle}{\hbar\omega - E^\beta(\mathbf{k}') + E^\alpha(\mathbf{k})} \right] \quad (18)$$

In questa formula e in tutte le successive si è sottintesa la somma sugli indici di banda  $\mathbf{k}$ . Il contributo di tutti gli elettroni si ottiene quindi sommando su  $\alpha$ :

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{i}{\omega} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \left[ \frac{\langle \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} | J_y | \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} \rangle \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} | J_x | \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \rangle}{\hbar\omega + E^\beta(\mathbf{k}') - E^\alpha(\mathbf{k})} - \frac{\langle \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} | J_x | \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} \rangle \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{(\beta)} | J_y | \psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \rangle}{\hbar\omega - E^\beta(\mathbf{k}') + E^\alpha(\mathbf{k})} \right] \quad (19)$$

dove  $\alpha$  indica gli stati occupati e  $\beta$  indica ogni altro possibile stato. La suddetta formula assumeva che il contributo alla corrente dello stato  $|0\rangle$  fosse nullo, per poter dire il primo termine della formula (15) è nullo. Questo non è vero per ogni singolo elettrone, ma è vero quando si considerano gli stati  $|\psi_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}\rangle$  e  $|\psi_{-\mathbf{k}}^{(\alpha)}\rangle$ .

Sappiamo che  $\mathbf{J} = \frac{e}{m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = e\mathbf{v}$ , dunque abbiamo (introducendo una notazione semplificata):

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{ie^2}{\omega} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \left[ \frac{\langle \alpha | v_y | \beta \rangle \langle \beta | v_x | \alpha \rangle}{\hbar\omega + E^\beta - E^\alpha} - \frac{\langle \alpha | v_x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle}{\hbar\omega - E^\beta + E^\alpha} \right] \quad (20)$$

Ora vogliamo considerare il caso  $\omega \rightarrow 0$  che è il caso statico che ci interessa:

$$\frac{1}{\pm \hbar\omega + E^\alpha - E^\beta} = \frac{1}{E^\alpha - E^\beta} \left( 1 \mp \frac{\hbar\omega}{E^\alpha - E^\beta} \right) + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (21)$$

Scriviamo  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ :

$$\sigma^1 = \frac{-ie^2}{\omega} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \frac{\langle \alpha | v_x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle + \langle \alpha | v_y | \beta \rangle \langle \beta | v_x | \alpha \rangle}{E^\alpha - E^\beta} \quad (22)$$

$$\sigma^2 = -ie^2 \hbar \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \frac{-\langle \alpha | v_x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle + \langle \alpha | v_y | \beta \rangle \langle \beta | v_x | \alpha \rangle}{(E^\alpha - E^\beta)^2}. \quad (23)$$

Il primo termine a causa della serie geometrica nelle energie potrebbe divergere ma non lo fa, vediamo:

$$\langle \alpha | v_x | \beta \rangle = \langle \alpha | H_0 x - x H_0 | \beta \rangle = (E^\alpha - E^\beta) \langle \alpha | x | \beta \rangle$$

$$\sigma^1 = \frac{-ie^2}{\omega} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \frac{(E^\alpha - E^\beta) \langle \alpha | x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle - (E^\alpha - E^\beta) \langle \alpha | v_y | \beta \rangle \langle \beta | x | \alpha \rangle}{E^\alpha - E^\beta}$$

$$\sigma^1 = \frac{-ie^2}{\omega} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \langle \alpha | x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle - \langle \alpha | v_y | \beta \rangle \langle \beta | x | \alpha \rangle$$

Introduco la relazione di completezza:  $\sum_{\beta \neq \alpha} |\beta\rangle \langle \beta| = 1 - |\alpha\rangle \langle \alpha|$ , cioè sommo su tutti i  $\beta$  diversi da  $\alpha$ . Rimane ancora la sommatoria il  $\alpha$ . Ottengo:

$$\sigma^1 = \frac{-ie^2}{\omega} \sum_{\alpha} [\langle \alpha | x (1 - |\alpha\rangle \langle \alpha|) v_y | \alpha \rangle - \langle \alpha | v_y (1 - |\alpha\rangle \langle \alpha|) x | \alpha \rangle]$$

$$\sigma^1 = \frac{-ie^2}{\omega} \sum_{\alpha} [\langle \alpha | x v_y - v_y x | \alpha \rangle - \langle \alpha | x | \alpha \rangle \langle \alpha | v_y | \alpha \rangle + \langle \alpha | v_y | \alpha \rangle \langle \alpha | x | \alpha \rangle]$$

Gli operatori  $x$  e  $v_y$  commutano, dunque il primo termine si cancella. Il secondo anche è nullo per ogni  $\alpha$ .

Scriviamo dunque l'equazione ottenuta per la conduttività:

$$\sigma^2 = -ie^2 \hbar \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \frac{-\langle \alpha | v_x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle + \langle \alpha | v_y | \beta \rangle \langle \beta | v_x | \alpha \rangle}{(E^\alpha - E^\beta)^2}. \quad (24)$$

Come abbiamo detto precedentemente la somma su  $\alpha$  è fatta sugli stati occupati dagli elettroni e il significato di  $\beta \neq \alpha$  è di evitare la divergenza a denominatore (non si intende  $\beta$  diverso da tutti gli  $\alpha$  ma solo da quello particolare che stiamo considerando nel sottotale). Osserviamo che se  $\beta = u$  è uno stato occupato allora per ogni  $\alpha = v$  esiste un elemento della somma in cui si scambiano  $\beta = v$  e  $\alpha = u$ , dunque essendo la frazione antisimmetrica per scambio di  $\alpha, \beta$  otteniamo l'equazione finale per la conduttività lineare:

$$\sigma^2 = -ie^2 \hbar \sum_{E^\alpha < E_F < E^\beta} \frac{-\langle \alpha | v_x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle + \langle \alpha | v_y | \beta \rangle \langle \beta | v_x | \alpha \rangle}{(E^\alpha - E^\beta)^2}. \quad (25)$$

Stiamo ora supponendo di trovarci a cavallo tra due bande, in particolare è una nostra ipotesi che sia vera una sorta di struttura a bande per il sistema.

Dove abbiamo indicato con  $E_F$  l'energia di Fermi e la somma è fatta per  $\alpha$  che corre sugli stati al di sotto di essa e  $\beta$  sugli stati al di sopra. Scriviamo l'equazione di Schrödinger come:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = E^\alpha(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$$

dove

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \frac{(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k} + e \mathbf{A})^2}{2m} + U(x, y) \quad (26)$$

Ricordiamo che in tutte le formule l'indice di banda  $\mathbf{k}$  è sempre sottinteso.

Dato  $\mathbf{v} = \frac{-i\hbar \nabla + e \mathbf{A}}{m}$ , abbiamo che la velocità commuta con le traslazioni magnetiche, quindi essa non può cambiare  $\mathbf{k}$ , ovviamente l'Hamiltoniana non commuta con la velocità.

In particolare gli operatori di traslazione magnetici commutano separatamente con la velocità e con il potenziale periodico  $U(x, y)$ . Vediamo che lo stato  $\mathbf{v} \psi_{\mathbf{k}}^\alpha$  appartiene allo stesso autospazio caratterizzato dall'autovalore  $\mathbf{k}$  quindi esso potrà avere prodotto scalare non nullo solamente con i vettori all'interno dello stesso autospazio:

$$T_{qa}(\mathbf{v} \psi_{\mathbf{k}}^\alpha) = \mathbf{v}(T_{qa} \psi_{\mathbf{k}}^\alpha) = e^{ik_1 qa} \mathbf{v} \psi_{\mathbf{k}}^\alpha$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | v_x | \beta \rangle &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \int_0^{qa} dx \int_0^b dy \quad \psi_{\mathbf{k}}^{\alpha*} \mathbf{v} \psi_{\mathbf{k}'}^\beta = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \int_0^{qa} dx \int_0^b dy \quad e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} u_{\mathbf{k}}^{\alpha*} \frac{\mathbf{p} + e\mathbf{A}}{m} \left( e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} u_{\mathbf{k}'}^\beta \right) = \\
&= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \int_0^{qa} dx \int_0^b dy \quad e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} u_{\mathbf{k}}^{\alpha*} \frac{\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}' + e\mathbf{A}}{m} u_{\mathbf{k}'}^\beta = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{\hbar} \int_0^{qa} dx \int_0^b dy \quad u_{\mathbf{k}}^{\alpha*} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^\beta
\end{aligned}$$

Poiché il valore di aspettazione è non nullo solo tra stati con stesso  $\mathbf{k}$  possiamo limitare l'integrale ad una cella magnetica dello spazio reale, perché nelle altre entrambe le funzioni di cui si calcola il prodotto scalare prendono la stessa fase che si cancella nel valore di aspettazione. Le funzioni  $u(\mathbf{x})$  normalizzate sulla cella magnetica del reticolo di Bravais.

Poiché  $\alpha$  e  $\beta$  hanno lo stesso  $\mathbf{k}$  possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | v_x | \beta \rangle &= \frac{1}{\hbar} \left\langle \alpha \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_x} \right| \beta \right\rangle \\
\langle \alpha | v_y | \beta \rangle &= \frac{1}{\hbar} \left\langle \alpha \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_y} \right| \beta \right\rangle
\end{aligned} \tag{27}$$

inoltre:

$$\left\langle u^\alpha \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_y} \right| u^\beta \right\rangle = (E^\beta - E^\alpha) \left\langle u^\alpha \left| \frac{\partial u^\beta}{\partial k_j} \right\rangle = -(E^\beta - E^\alpha) \left\langle \frac{\partial u^\alpha}{\partial k_j} \right| u^\beta \right\rangle \tag{28}$$

Arriviamo dunque a scrivere:

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar} \sum_{E^\alpha < E_F < E^\beta} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} [\langle \partial_y u^\alpha | u^\beta \rangle \langle u^\beta | \partial_x u^\alpha \rangle - \langle \partial_x u^\alpha | u^\beta \rangle \langle u^\beta | \partial_y u^\alpha \rangle] \tag{29}$$

Dove abbiamo reintrodotta esplicitamente la somma sugli stati a  $\mathbf{k}$  diverso.

Ora usiamo il fatto che

$$\sum_{E^\alpha < E_F} |\alpha\rangle \langle \alpha| + \sum_{E_F < E^\beta} |\beta\rangle \langle \beta| = 1$$

Portiamo la somma sugli stati non occupati all'interno dell'integrale e otteniamo:

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar} \sum_{\alpha} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[ \langle \partial_y u^\alpha | \partial_x u^\alpha \rangle - \langle \partial_x u^\alpha | \partial_y u^\alpha \rangle + \sum_{\alpha'} \langle \partial_y u^\alpha | \alpha' \rangle \langle \alpha' | \partial_x u^\alpha \rangle - \langle \partial_x u^\alpha | \alpha' \rangle \langle \alpha' | \partial_y u^\alpha \rangle \right]$$

l'ultimo pezzo si scrive:

$$\sum_{\alpha', \alpha} \left[ \langle \partial_y u^\alpha | u^{\alpha'} \rangle \langle u^{\alpha'} | \partial_x u^\alpha \rangle - \langle \partial_x u^\alpha | u^{\alpha'} \rangle \langle u^{\alpha'} | \partial_y u^\alpha \rangle \right]$$

Abbiamo visto precedentemente che:

$$\langle u^\beta | \partial u^\alpha \rangle = - \langle \partial u^\beta | u^\alpha \rangle$$

quando  $\beta \neq \alpha$ , questo segue dal fatto che funzioni  $u_{\mathbf{k}}^\alpha$  e  $u_{\mathbf{k}}^\beta$ , a fisso  $\mathbf{k}$  sono ortogonali, ciò segue dall'ortogonalità delle funzioni d'onda  $\psi_{\mathbf{k}}^\alpha$  e dal fatto che la fase si cancella nel prodotto scalare. Sostituendo solamente nel primo dei due prodotti scalari moltiplicati:



$$\sum_{\alpha', \alpha} \left[ -\langle u^\alpha | \partial_y u^{\alpha'} \rangle \langle u^{\alpha'} | \partial_x u^\alpha \rangle + \langle u^\alpha | \partial_x u^{\alpha'} \rangle \langle u^{\alpha'} | \partial_y u^\alpha \rangle \right]$$

Dunque abbiamo che la sommatoria è simmetrica nei due indici  $\alpha$  e  $\alpha'$  mentre l'oggetto all'interno è antisimmetrico, dunque l'intera somma è nulla.

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar} \sum_{\alpha} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [\langle \partial_y u^\alpha | \partial_x u^\alpha \rangle - \langle \partial_x u^\alpha | \partial_y u^\alpha \rangle] \quad (30)$$

In questa formula abbiamo sempre supposto di potere fare una scelta della fase in modo che le  $u^\alpha$  fossero sempre derivabili in  $\mathbf{k}$ . Se questo non è sempre vero il significato della formula per la conduttività è di definire la *field strenght* in regioni aperte in cui è definibile con continuità e senza singolarità ai bordi. In ogni caso trascurando i  $\mathbf{k}$  su cui non si può definire con continuità la fase costituisce un errore trascurabile essi sono infatti comunque insiemi di misura nulla nello spazio dei  $\mathbf{k}$

## 5 Invariante TKNN

Arrivati a questo punto mostreremo che la conduttività trasversa è quantizzata per motivi topologici. Consideriamo la zona di Brillouin parametrizzata dai due quasimpulsi  $k_1$  e  $k_2$ , se identifichiamo i lati opposti essa diventa topologicamente un toro  $\mathbf{T}^2$ .

Consideriamo la 2-forma definita sul toro:

$$\mathcal{F}^\alpha = -i \langle \partial_y u^\alpha | \partial_x u^\alpha \rangle + i \langle \partial_x u^\alpha | \partial_y u^\alpha \rangle dk_1 \wedge dk_2$$

Sempre supponendo che la componente che vogliamo associare alla forma sia definibile con continuità su tutto il toro  $\mathbf{T}^2$  vediamo che questa è una buona definizione di  $\mathcal{F}^\alpha$  su tutta la varietà infatti giunti agli estremi delle coordinate è possibile semplicemente prolungarle oltre  $\frac{2\pi}{qa}$  e sovrapponendo quindi una *patch* in cui le coordinate nuove sono semplicemente le traslate di quelle vecchie. Pertanto le 1-forme di base sono le stesse (il cambio di base è l'identità) così come è la stessa la componente che si vuole assegnare alla 2-forma. Ricordiamo che per definizione  $u_{\mathbf{k}}$  sono uguali a meno di traslazioni di  $\mathbf{k}$  di  $\frac{2\pi}{qa}$  o  $\frac{2\pi}{b}$ . Dunque la definizione della 2-forma data nello stesso punto in coordinate diverse è corretta, perché le due definizioni coincidono. Riassumiamo: se la componente  $-i \langle \partial_y u^\alpha | \partial_x u^\alpha \rangle + i \langle \partial_x u^\alpha | \partial_y u^\alpha \rangle$  è ben definita su tutta la varietà è possibile definire una 2-forma su tutta la varietà scegliendo le coordinate  $\mathbf{k}$  o loro prolungamenti.

La definizione di integrale di una  $n$ -forma su una  $n$ -varietà è:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\phi(\Sigma)} \phi^* \omega$$

dove  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  è la funzione coordinate sulla varietà.

Introduciamo una 1-forma così definita:

$$\mathcal{A}^\alpha = -i \langle u_{\mathbf{k}}^\alpha | \partial_{k_1} u_{\mathbf{k}}^\alpha \rangle dk_1 - i \langle u_{\mathbf{k}}^\alpha | \partial_{k_2} u_{\mathbf{k}}^\alpha \rangle dk_2 \quad (31)$$

Essa assomiglia alla connessione di Berry  $U(1)$  tuttavia è concettualmente differente perché la vera connessione di Berry agisce sullo spazio dei parametri, mentre questa 1-forma vive sullo spazio degli stati. Calcoliamo la *field strength* associata ad  $\mathcal{A}_i$ :

$$\mathcal{F}_{xy}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{A}_x^\alpha}{\partial k_y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y^\alpha}{\partial k_x} = -i \langle \partial_y u^\alpha | \partial_x u^\alpha \rangle + i \langle \partial_x u^\alpha | \partial_y u^\alpha \rangle \quad (32)$$

Possiamo dire che dove è definita la forma  $\mathcal{A}$  vale  $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ . Notiamo che stiamo correttamente integrando una 2-forma su una 2-superficie. Supponiamo ora che l'energia di Fermi si trovi tra una banda e l'altra così che le bande occupate siano tutte piene e l'integrale sullo spazio degli stati sia completo, siamo arrivati a:

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha} \int_{\mathbf{T}^2} \mathcal{F}^{\alpha} dS = -\frac{e^2}{h} \sum_{\alpha} \mathcal{C}_{\alpha} \quad (33)$$

L'integrale della *field strength* sulla superficie del toro è noto nella teoria dell'effetto Hall quantistico come invariante TKNN, dal nome dei fisici che per primi lo hanno identificato in questo contesto (D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale e M. den Nijs). Nella matematica è noto come primo numero di Chern, esso è sempre un numero intero.

Notiamo che abbiamo una 1-forma (e quindi un'integrale sulla zona di Brillouin magnetica) diverso per ogni banda occupata del sistema. Osserviamo che abbiamo scritto la somma sullo spazio degli stati come un integrale considerando dunque gli stati come continui nel vettore d'onda. Questa è una buona approssimazione nel limite termodinamico. Variando il campo è possibile cambiare il numero di stati in ogni banda in modo analogo a quanto succede per i livelli di Landau quindi si può cambiare il numero di bande riempite.

## 6 Quantizzazione topologica

Nelle sezioni precedenti abbiamo assunto di poter derivare impunemente le funzioni d'onda  $u$  nell'indice di banda  $\mathbf{k}$ , ora analizzeremo meglio questa ipotesi. Sappiamo che le funzioni d'onda sono definite a meno di una fase globale:

$$u(\mathbf{k}) \rightarrow e^{if(\mathbf{k})} u(\mathbf{k}) \quad (34)$$

Questo causa una ridefinizione del potenziale vettore (se la funzione  $f(\mathbf{k})$  è *smooth*):

$$\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_i + \nabla f(\mathbf{k}) \quad (35)$$

Perché siano ben definite la connessione e la sua curvatura è necessario che le funzioni d'onda  $u(\mathbf{k})$  siano derivabili in  $\mathbf{k}$ . Il fenomeno significativo è che non è detto sia possibile scegliere una fase globale (una gauge) che renda *smooth* le funzioni  $u(\mathbf{k})$  su tutta la varietà. Il significato dell'invariante TKNN è di definire e integrare la *field strength* sulle regioni in cui è possibile farlo separatamente e trascurare le loro frontiere (che saranno comunque un insieme di misura nulla).

Notiamo che se fosse possibile definire globalmente la connessione  $\mathcal{A}$  e la sua derivata esterna allora per il teorema di Stokes il numero di Chern sarebbe nullo essendo il bordo del toro  $\partial\mathbf{T}^2 = 0$ .

La scelta delle regioni in cui è bene definita la connessione dipende fortemente dalle funzioni  $u(\mathbf{k})$ . Supponiamo che sia possibile prendere due zone  $H_I$  e  $H_{II}$  (vedi figura 4) in cui sono definite le  $u(\mathbf{k})$  in maniera *smooth* allora avrò un *phase mismatch* dato da una funzione  $\chi(\mathbf{k})$  su una corona del bordo tra le due zone. Se il *phase mismatch* è una funzione continua sappiamo come sono legate tra loro le connessioni definite nelle due regioni, dunque:

$$\int_{\mathbf{T}^2} \mathcal{F} dS = \int_{H_I} \mathcal{F}_I dS + \int_{H_{II}} \mathcal{F}_{II} dS \quad (36)$$

Ricordiamo che l'integrale TKNN è stato definito sulle regioni aperte della zona di Brillouin in cui era possibile definire la *field strength*.

Applico il teorema di Stokes separatamente:

$$\int_{H_I} \mathcal{A}_I dS + \int_{H_{II}} \mathcal{A}_{II} dS = \int_{\partial H} \mathcal{A}_I \cdot d\mathbf{l} - \int_{\partial H} \mathcal{A}_{II} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\partial H} \nabla \chi(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n \quad (37)$$

Abbiamo indicato con  $\partial H$  il bordo delle due regioni del toro. Il cambio di segno occorre perché l'orientazione indotta sul bordo dalle due sottovarietà  $H_I$  e  $H_{II}$  è opposta.

La funzione  $\chi(\mathbf{k})$  essendo per ipotesi ben definita e liscia ha come integrale su una linea chiusa un multiplo intero di  $2\pi$ . Nella figura 4 è mostrata la fase per una componente  $\langle x_0 | u_{\mathbf{k}} \rangle$  della funzione d'onda. Essa è rappresentata da una freccia (il cui angolo va appunto da 0 a  $2\pi$ ). Nel disegno la connessione non è scelta con continuità nella regione  $H_I$ .

Nelle applicazioni alla fisica dello stato solido le discontinuità si possono sempre ridurre a punti isolati. Pertanto è sempre possibile spostarle in un disco del toro mediante un opportuna scelta della gauge per operare poi una “chirurgia” che sostituisca questo disco a uno in cui non vi sono singolarità (perché sono state spostate nella regione esterna).

In generale vale:

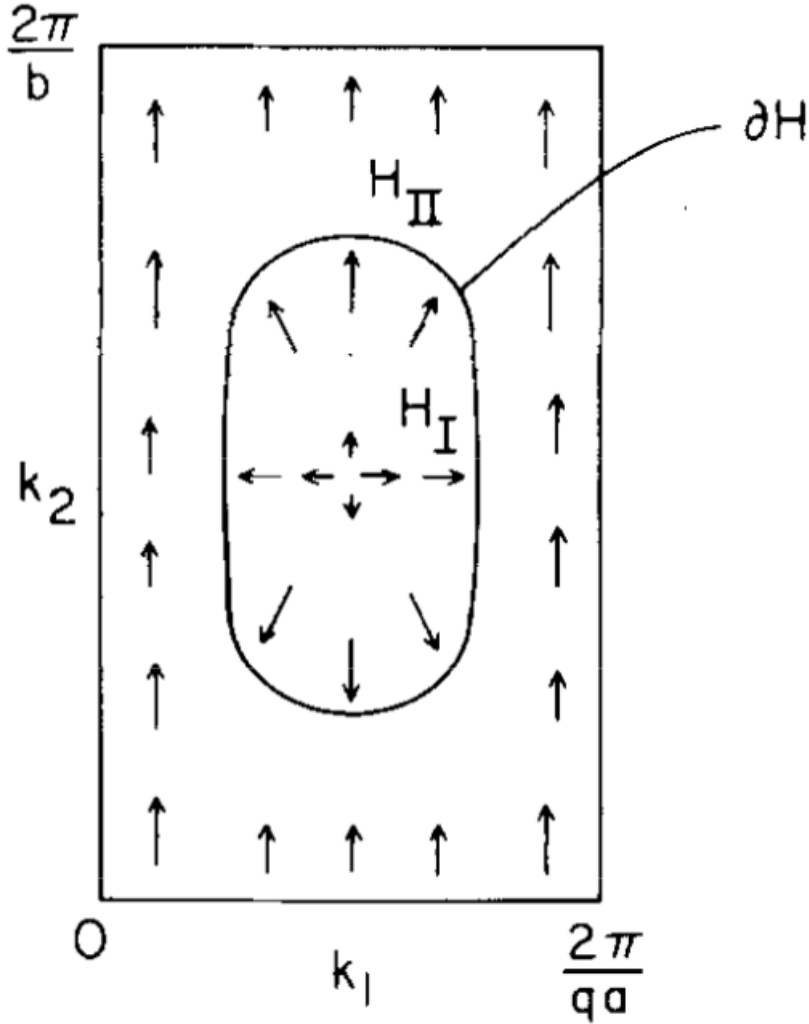


Figura 4: Scelte della fase nella zona di Brillouin

**Teorema :** L'integrale della 2-forma  $\mathcal{F}_{xy}^\alpha = -i \langle \partial_y u^\alpha | \partial_x u^\alpha \rangle + i \langle \partial_x u^\alpha | \partial_y u^\alpha \rangle$  sulla superficie di una varietà compatta, senza bordo e orientabile è quantizzato.

E' difficile dare una dimostrazione nel nostro caso senza ricorrere a strumenti di topologia algebrica o senza conoscere la forma delle funzioni d'onda  $u(\mathbf{k})$  e mostrando esplicitamente le opportune scelte delle gauge nelle varie regioni del dominio che realizzano la lisciazza. Possiamo

aspettarci che l'impossibilità di definire  $u_{\mathbf{k}}$  su tutta la zona di Brillouin sia dovuta alla presenza di "vorticosità" nella fase di  $u(\mathbf{k})$  per certi valori di  $\mathbf{x}$ .

La derivazione di  $\sigma_{xy}$  è valida quando l'energia di Fermi si trova tra due bande, in questa situazione ci aspettiamo che il sistema si comporti da isolante in effetti mostriamo la conduttività longitudinale è nulla. Sappiamo infatti che:

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

e visto che  $\rho_{xy}$  è non nullo otteniamo:

$$\rho_{xx} = 0 \rightarrow \sigma_{xx} = 0 \quad (38)$$

E' possibile mostrare che sia  $\sigma_{xy}$  che  $\rho_{xy}$  si annullano nel limite di campi magnetici piccoli perché si annullano i numeri di Chern delle bande. A piccoli  $\mathbf{B}$ ,  $\rho_{xx}$  è diversa da 0 e  $\sigma_{xy} = 0 \rightarrow \rho_{xy} = 0$

Si possono calcolare le funzioni d'onda e gli integrali di superficie scegliendo il potenziale  $U(x, y)$  più semplice possibile a patto che sia connesso con continuità a quello vero. Una variazione continua dei parametri del problema infatti non può causare un cambiamento della quantità quantizzata: questo è il significato di invariante topologico.

## 7 Conclusioni

L'ipotesi che il flusso sia una frazione è di fatto immateriale, possiamo assumere che la funzione  $\sigma_{xy}$  abbia al più un numero finito di discontinuità al variare del campo magnetico associate a un qualche fenomeno fisico che accade nel campione, dunque  $\sigma_{xy}(\mathbf{B})$  è costante a tratti e i *plateau* sono spazati di  $\frac{2\pi\hbar}{e^2}$  come misurato sperimentalmente. Poiché  $\rho_{xx} = 0$  abbiamo  $\rho_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{1}{\nu}$ . Possiamo aspettarci che la descrizione data venga meno quando il livello di Fermi attraversa una banda, in questa situazione la conduttività  $\sigma_{xy}$  cambia in maniera *sharp* mentre  $\rho_{xx}$  presenta degli *spikes*.

Presentiamo una lista (incompleta) delle direzioni in cui si potrebbe proseguire lo studio del QHE:

- Ruolo del disordine, stati localizzati e percolazioni: la teoria proposta non permette di descrivere le transizioni da un *plateau* all'altro. Il fatto che esse diventino più *sharp* all'aumentare del disordine del campione fa pensare che siano associate alla localizzazione di Anderson. Osserviamo che questo modello non è affatto robusto rispetto al disordine perché si basa sull'assunzione che esista la zona di Brillouin e questo è vero solo per potenziali rigorosamente periodici. Quando l'energia di Fermi attraversa una banda il sistema diventa conduttore e  $\rho_{xy} \neq 0 \rightarrow \sigma_{xy} \neq 0$ . Fenomeni alla localizzazione e alle percolazioni rendono più *sharp* questa transizione. Esiste un argomento di Thouless che assume un'Hamiltoniana con un potenziale generico e elettroni interagenti. Si impongono generiche condizioni al bordo e si calcola la conduttività di *bulk*. Nell'ipotesi che questa non dipenda dalle condizioni al bordo possiamo mediare, dunque integrare sullo spazio delle condizioni al bordo trovando nuovamente il numero di Chern.
- *Chiral edge modes*: sui bordi del materiale in cui si ha QHE si propagano modi chirali che trasportano corrente. Nella nostra teoria abbiamo trattato solamente la conduttività di *bulk* trascurando quanto succede ai bordi. Si ritiene che negli esperimenti la corrente sia trasportata sia dal *bulk* che dai modi *edge*.
- Argomento di Laughlin: sfruttando il concetto di flusso spettrale si può approssimare il QHE nell'ipotesi di alcune topologie particolari per il campione.

- Fractional Quantum Hall Effect: a campi magnetici più elevati si osservano dei multipli frazionari della conduttanza fondamentale, questi sono stati spiegati da Laughlin studiando l'interazione tra gli elettroni, che nella nostra trattazione è stata completamente trascurata.

## 8 Bibliografia

1. K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980)
2. D. Thouless, M. Kohmoto, M. Nightingale, M. den Nijs, *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*, Phys. Rev. Lett. 49, 405, (1982)
3. R. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. B 23, 5632 (1981)
4. M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. London Ser. A 392, 45 (1984)
5. M. Kohmoto, *Topological Invariant and the Quantization of the Hall Conductance*, Annals of Physics, 160:343–354, 1985
6. T. Fukui, Y. Hatsugai, H. Suzuki, *Chern Numbers in Discretized Brillouin Zone: Efficient Method of Computing (Spin) Hall Conductances*, Journal of the Physical Society of Japan, 74(6):1674–1677, 2005
7. D. Tong, *The Quantum Hall Effect*, TIFR Infosys Lectures, DAMPT Cambridge, 2016