Note sugli appunti di relatività di Reall

Belliardo Federico

5 gennaio 2019

- p.34 Fare esercizio alla fine della pagina.
- p.36 La derivazione della geodetica funziona anche nel caso di fotoni? Non credo perché in quel caso $G = 0$ sempre e on può stare a denominatore dell'equazione geodetica.
- p.38 Cose si può vedere che in generale la geodesica massimizza il tempo proprio?
- p.38 La lagrangiana non dovrebbe essere scritta in termini di τ ma in termini di un parametro $\lambda \in [0, 1]$: $\mathcal{L} = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}\frac{dx^\nu(\lambda)}{d\lambda}}$. Si osservi poi che la lagrangiana non ha una dipendenza esplicita da λ: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 0$ questo implica l'esistenza di uan quantità conservata (l'Hamiltoniana): se la si calcola si vede che $-g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}\frac{dx^\nu(\lambda)}{d\lambda}$ deve essere conservata sul moto lungo una geodetica (verificare!)
- p.38 Non mi è chiaro perchè si possa scrivere la lagrangiana ed eseguire la variazione in termini del tempo proprio? Non serve un parametro aggiuntivo?
- p.41 Mostrare che la differenza di due connessioni è un tensore (1, 2).
- p.45 Non mi convince troppo la derivazione di $\nabla_Y Y = fY$, non dovrebbe essere $h : M \to \mathbb{R}$? Qui sembra che sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- p.46 Postulato della relatività generale è che le particelle si muovono su geodetiche con parametrizzazione affine, cioè su linee integrali di campi vettoriali che soddisfano $\nabla_X X = 0$. Da questa equazione si può recuperare l'equazione geodetica prima ottenuta con la lagrangiana. Vi è una riparametrizzazione lineare del tempo affine che ha dunque due parametri liberi, che diventano uno del caso di curve time-like o space-like, imponendo la condizione $g(X, X) = \pm 1$. Nel caso di lice non esiste un tempo proprio ma ho due gradi di libertà nella parametrizzazione. $\nabla_X g(X, X) = 0$ Dunque il modulo della quadrivelocità è fissato (e uguale a -1) nel caso di temo proprio.
- p.47 **Coordiante normali Riemanniane**: Dato un punto di una varietà costruisco la geodetica che passa per quel punto e che è tangente al vettore dato risolvendo le opportune equazioni geodetiche. Il tempo affine vale 0 sul punto p. Vi è una libertà di scala nel tempo affine. Localmente la mappa esponenziale è un isomorfismo e può essere usata per definire un sistema di coordinate normale. Come si fa a fissare consistemente la velocità di tutte le geodetiche. Alla fine della dimostrazione si fa vedere che $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}k^\rho k^\sigma = 0 \to \Gamma^\mu_{[\rho\sigma]} = 0$: questo perché prendendo k in modo che siano uguali a 1 solo le coordinate corrispondenti al simbolo che vogliamo annullare si vede che segue la tesi. Vanno bene vettori iniziali ti qualunque tipo (anche non fisici). **Vedersele su un libro di geometria, come l'Abate, riportare la dimostrazione di Hawking and Ellis, molto più concisa e apprezzabile**.
- p.48 Non mi è chiaro perchè in un sistema di coordiante normale il tensore metrico è: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$
- p.54 Dimostrare equazioni di Navier-Stokes relativistiche.
- p.57 Non capisco dove va a finire la derivata rispetto al commutatore nell'identità di Ricci.
- p.58 Dimostrare che se due campi vettoriali X e Y commutano si può trovare un sistema di coordinate in cui $X = \frac{\partial}{\partial s}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial t}$. **Importante da FARE!**

  Appunti sulla deviazione geodetica Sia data la mappa $\gamma : I \times I' \to M$ questa definisce una carta in cui le due coordinate della sottovarità sono (s, t). Sia $\gamma(t, s)$ una curva geodetica con t parametro affine per ogni s. Costruisco il campo vettoriale T definendolo in un punto (s, t) come il vettore tangente alla geodetica passante per s e S è il campo vettoriale in ogni punto tangente alla curva $\gamma_t(s)$. Per definizione questi due campi vettoriali sono: $S = \frac{\partial}{\partial s}$ e $T = \frac{\partial}{\partial t}$. Essendo vettori di base relativi alle coordinate normali commutano. Si può anche vedere che essendo le loro componenti legate alla derivata dela funzione γ in un qualunque sistema di riferimento ho che il commutatore è nullo (se lo scrivo esplicitamente). Come si può anche vedere applicando la definizione in una base generica conoscendo componenti $T^\mu = \frac{\partial x^\mu(x,t)}{\partial t}$. Vale la relazione: $x^\mu(t, s+ds) = x^\mu(t, s+ds) + dsS^\mu + O(ds^2)$ per definizione stessa di vettore tangente. Quindi $\nabla_T S$ quantifica la velocità di allontanamento di due geodetiche mentre $\nabla_T \nabla_T S$ ne quantifica l'accelerazione.

Il tensore torsione è definito come: $\mathbf{T}(T,S) = \nabla_T S - \nabla_S T - [T,S]$. Dunque $\nabla_T S = \nabla_S T$ e quindi $\nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T = \nabla_S \nabla_T T + \mathbf{R}(T,S)T = \mathbf{R}(T,S)T$. L'equazione geodetica è: $\nabla_T \nabla_T S = \mathbf{R}(T,S)T$.

Caveat: la parametrizzazione che abbiamo dato è solamente bidimensionale. E' ncessario introdurre tanti vettori deviazioni quante sono le dimensioni del possibile "fascio" di geodetiche che costruiamo. Così che tutti i campi vettoriali che studio siano definiti in un intorno aperto (a parte interna non nulla) della varietà spazio-tempo. Si può anche studiare come cambia il volume di un "bunch" di geodetiche che evolvono vicine, vedi Carroll e Baez ("The meaning of Einstein Equation").

- p.58 Rivedere calcolo della non commutatività delle derivate covarianti rispetto a campi vettoriali a commutatore nullo, per mostrare che il trasporto parallelo su loop chiuso seguendo le geodetiche di due diversi campi vettoriali commutanti è legato al tensore di Riemann.
- p.62 Svolgere gli esercizi sul tensore di Riemann.
- p.63 Dimostrare la contracted Bianchi identity.
- p.64 Approfondire il teorema di Lovelock.
- p.68/69 Eseguire i calcoli per trovare le componenti di generico tensore in seguito a pullback e pushforward.

  Nota sui tensori Un covettore è definito come una funzione lineare $TM \to \mathbb{R}$, mentre in virtù dell'isomorfismo canonico con il biduale si può definire un vettore come una funzione $TM^* \to \mathbb{R}$. Un tensore è definito come una funzione $TM \times TM...TM^* \times TM^* \to \mathbb{R}$ lineare. Questa è la giusta definizione di tensore dalla geometria. Ma come si lega con la definione algebrica mediante la proprietà universale?

  Finire: le due definizioni che ho in mente probabilmente si legano grazie alla proprietà universale.
- p.69 Dimostrare che i pullback e pushforward commutano con la contrazione e il prodotto tensore.
- p.72 Dimostrare esplicitamente che la mappa esponenziale del campo vettoriale X è localmente un isomorfismo.
- p.72 Mostrare che localmente esiste una superficie che è sempre ortogonale al campo vettoriale X. Una ipersuperficie può essere definita da una funzione $f(x) = cost$ non degenere (attenzione ai teoremi di analisi 3 sulle funzioni inverse) Essa definisce una ipersuperficie. Va da se che il campo vettoriale $\eta^a = g^{ab}\nabla_b f$ è ortogonale alla varietà. Viceversa se ho un campo vettoriale posso costruire la 1-forma $g_{ab}X^b$, questa localmente (in un intorno semplicemente connesso) può essere integrata per dare luogo localmente a una superficie ortogonale a X.
- p.72 Calcolare le derivate di Lie del campo di covettori (fatto) e della metrica (da fare)
- Read linerized theory
- p.102 Show that the definition of external derivative is indipendet on the chart. Show that pullback and extrnal derivative commute. Read about Poincarè lemma.