Quantum metrology

Federico Belliardo

Relatore: Vittorio Giovannetti

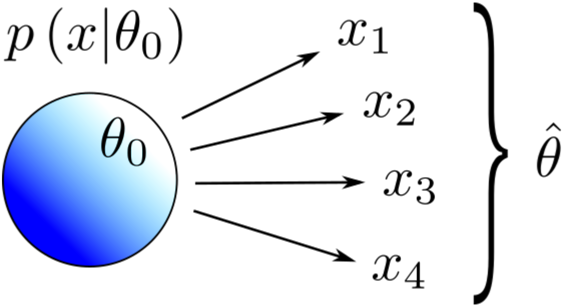
Scuola Normale Superiore

24 Aprile 2018

Sommario

- Stima dei parametri classica e quantistica
- Teoria della misura quantistica
- Ottimizzazioni (stimatore, misura, probe)
- Stimatore adattivo
- Heisenberg scaling

Sistema caratterizzato da un parametro θ_0.



- Misura: interrogazione del sistema produce x con $p(x|\theta_0)$.
- Data processing: costruzione dello stimatore $\hat{\theta}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$

Esiste un limite alla precisione di $\hat{\theta}$?

Limite di Cramér-Rao e informazione di Fisher

Limite di Cramér-Rao

Sia $\hat{\theta}(\vec{x})$ stimatore di θ con $\vec{x}$ vettore delle misure. Esiste un lower bound sulla sua varianza:

$$Var\left(\hat{\theta}\right) \geq \frac{1}{NI(\theta)}$$

con N numero di misure, dove $I(\theta)$ è detta **informazione di Fisher** ed è definita come:

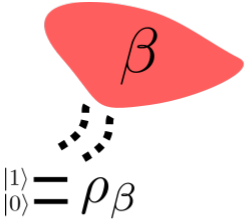
$$I(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log p(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right]$$

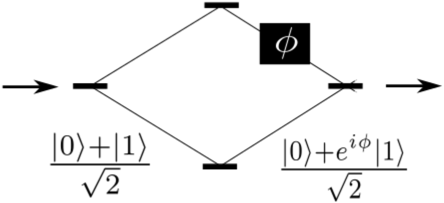
Il maximum likelyhood estimator è asintoticamente efficiente, cioè: $Var\left(\hat{\theta}_{ML}\right) \to \frac{1}{NI(\theta)}$ per $N \to \infty$.

Stima dei parametri quantistica

In MQ il parametro θ che caratterizza un sistema è codificato nello stato ρ_θ.

Esempi: $\rho_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$ (temperatura), $|\psi\rangle_\phi = \frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}}$ (fase interferometrica), ...





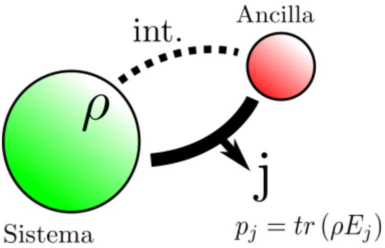
Stima dei parametri quantistica

Il processo di misura è costituito dall'interazione di una *probe* ρ_0 con il sistema caratterizzato da θ. L'interazione è rappresentata da un generico canale quantistico (CPT).

$$\rho_0 \to \mathcal{E}_\theta(\rho) = \rho_\theta$$

Bisogna formulare il problema di stima in termini della teoria della misura quantistica! Le misure sono distruttive: è necessario utilizzare molti ρ_θ.

POVM: *Positive Operator Valued Measure*



- Interazione con ancilla
- Misure proiettive sul sistema *joint*

ρ è la matrice densità ridotta del sistema

$$0 \leq E_j \leq \mathbb{I} \quad p_j = tr(\rho E_j) \quad \sum_j E_j = \mathbb{I}$$

La distribuzione di probabilità $p(j, \theta)$ dipende dalla misura! Si può ottimizzare la POVM per massimizzare l'informazione estratta.

Quantum Fisher Information

Si definisce $QFI\left(\theta\right)$ la massima informazione di Fisher che si può estrarre variando la POVM applicata su ρ_θ:

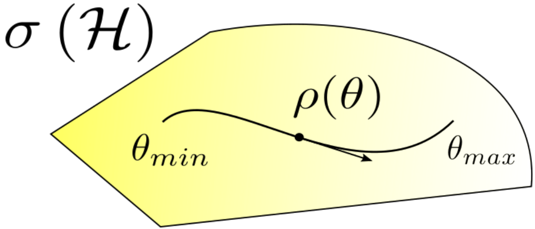
$$QFI\left(\theta\right) = \max_{POVM} I\left(\theta\right)$$

La QFI è esprimibile come derivata della distanza di Bures tra stati:

$$D_B(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2}\left[1 - \left|\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}\right|\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$QFI\left(\theta\right) = 4\lim_{\delta\to 0}\frac{D_B^2\left(\rho_{\theta+\delta}, \rho_\theta\right)}{\delta^2}$$

$S = \{\rho_\theta, \theta \in \Theta\}$ è una traiettoria 1D nello spazio degli stati quantistici.



La *QFI* (θ) codifica la velocità con cui gli stati quantistici lungo la linea diventano **distinguibili** l'uno dall'altro.

Proprietà della QFI

Consideriamo il caso in cui $\rho_\theta = e^{-i\theta H} \rho e^{+i\theta H}$ (interferometro di Ramsey, Mach-Zehnder, ...). Per uno stato puro $|\psi_k\rangle$:

$$QFI(\theta) = 4 (\Delta H)^2_{\psi_k}$$

Relazione di indeterminazione energia-tempo

$$Var\left(\hat{\theta}\right) = (\Delta\theta)^2_{\psi_k} \geq \frac{1}{4 (\Delta H)^2_{\psi_k}} \rightarrow \Delta\theta \Delta H \geq \frac{1}{2}$$

Proprietà della QFI

La POVM ottimale ($I = QFI$) per estrarre informazione da ρ_θ è costituita dai proiettori sugli autospazi dell'operatore L_θ chiamato *symmetric logarithmic derivative* che soddisfa a:

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\left(\rho_\theta L_\theta + L_\theta \rho_\theta\right)$$

In generale la POVM ottimale dipende da θ. Ma il valore vero θ_0 non è noto a priori! E' necessario utilizzare una **strategia adattiva**.

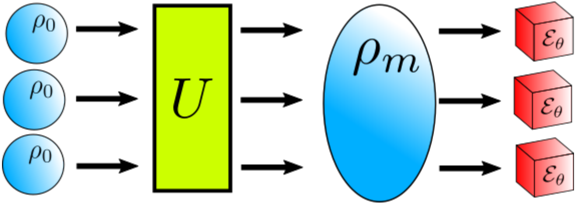
Ottimizzazioni

Riassunto sulle possibilità di ottimizzazione:

- Stimatore $\hat{\theta}$
- POVM (Nuova!) - problema della dipendenza da θ_0 della misura ottimale
- Probe ρ_0 (Nuova!)

La convessità della *QFI* (θ) assicura che l'informazione è massima per gli stati ρ_0 puri.

E' possibile far interagire m probes tra loro prima dell'applicazione di $\mathcal{E}_\theta$ creando dunque uno stato **entangled**:



$$\underbrace{\rho_0 \otimes \rho_0 \otimes \ldots \otimes \rho_0}_{m} \to \rho_m$$

Può l'entanglement migliorare la precisione delle misure?

QFI per stati entangled

Identificata la $QFI(\theta)$ come figura di merito per la precisione di una stimatore possiamo chiederci quanto vale per uno stato ρ_N costituito da N probe. Si osserva che:

$$QFI_{\rho^{\otimes N}}(\theta) = NQFI_{\rho}(\theta)$$

$$H = \sum_{i=1}^{N} h_i$$

$$QFI_{\rho^{\otimes N}}(\theta) = 4(\Delta H)^2 = 4\sum_{i=1}^{N}(\Delta h_i)^2 = NQFI_{\rho}(\theta)$$

cioè QFI scala come il numero N di probe per stati separabili.

QFI per stati entangled

Per un generico stato ρ_N di N probe abbiamo:

$$QFI_{\rho_N}(\theta) = 4(\Delta H)^2 \leq N^2$$

dunque:

$$QFI_{\rho_N} \leq N^2$$

Heisenberg scaling?

$$Var\left(\hat{\theta}\right) \propto \frac{1}{N^2} \quad (N \to \infty)$$

QFI per stati entangled

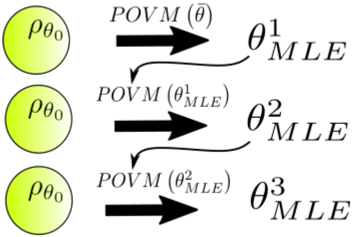
Vediamo alcuni esempi di stati utili:

- $|\psi\rangle_{NOON} = \frac{|N,0\rangle + |0,N\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{|N,0\rangle + e^{iN\theta}|0,N\rangle}{\sqrt{2}}$ θ misurabile *mod* $\frac{2\pi}{N}$, sensing, stati tipici di interferometri, $QFI(\theta) = N^2$
- $|\psi\rangle_{GHZ} = \frac{|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}}$ (come sopra)

Gli stati entangled evolvono N volte più velocemente degli stati separabili (in termini di distinguibilità).

Stimatore adattivo

Dimentichiamo l'entanglement per ora.
Per raggiungere il quantum Cramér-Rao bound si utilizza uno stimatore MLE addattivo:



La bontà di uno stimatore è caratterizzata da:

- Consistenza: $\theta^n_{MLE} \rightarrow \theta_0$ per $n \rightarrow +\infty$
- Efficienza: $Var\,(\theta^n_{MLE}) \rightarrow \frac{1}{nQFI(\theta_0)}$, la definizione classica prevede $I(\theta_0)$

Consistenza ed efficienza

Consistenza forte ed efficienza dello stimatore di massima likelyhood adattivo.

- $x \in X$ spazio risultati delle misure (discreto)
- $\theta \in \Theta$ spazio dei parametri (compatto)
- $e \in E$ spazio degli esperimenti (compatto)

Ipotesi: conosciamo il miglior esperimento $\hat{e}(\theta)$ associato ad ogni valore θ (si ottiene diagonalizzando la SLD).
$f(x_n, \theta, e_n)$ è la probabilità di misurare il valore x_n eseguendo la POVM e_n sullo stato ρ_θ.

$$\hat{\theta}_{MLE} = arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta, e_i)$$

Consistenza ed efficienza

Teorema (Fujiwara 2006)

Supponiamo che il valore vero del parametro sia θ_0 e che la misura e_n sia scelta sulla base del risultato delle misure precedenti: $e_n = \hat{e}\left(\hat{\theta}_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\right)$ allora

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \to N\left(0, QFI(\theta)^{-1}\right)$$

Ipotesi:

- $f(x, \theta, e) > 0$ per ogni (x, θ, e), continua in (x, θ, e).
- $\mu\left(x | f(x, \theta, e) \neq f(x, \theta', e)\right) > 0$ per ogni $\theta \neq \theta'$, $e \in E$.
- $f(x, \theta, e)$ è C^3 in θ.

La tesi rimane vera anche se non si aggiorna subito la POVM da eseguire.

Passaggi fondamentali della dimostrazione:

- Si dimostra che $P_{\theta_0}\left[|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq a\right] \leq e^{-bn}$ con $b > 0$. b dipende dalla misura, dallo stato iniziale ρ_0 e da a.
- $P_{\theta_0}\left[|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq a \; i.o.\right] = 0$. L'evento $|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq a$ accade un numero finito di volte. Questo prova la consistenza forte dello stimatore adattivo.
- Definiamo $\mathcal{L}(\theta|x, e) = \log f(x, \theta, e)$ e $\mathcal{L}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(\theta|x_i, e_i)$. Sviluppiamo a primo ordine: $\mathcal{L}_n^{'}(\theta) = \mathcal{L}_n^{'}(\theta_0) + \mathcal{L}_n^{''}(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_n^{'''}(\theta^*)(\theta - \theta_0)^2$. $\mathcal{L}_n^{'}(\hat{\theta}_n) = 0$ per definizione di MLE, dunque:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) = \frac{\frac{\mathcal{L}_n^{'}(\theta_0)}{\sqrt{n}}}{-\frac{\mathcal{L}_n^{''}(\theta_0)}{n} - \frac{\mathcal{L}_n^{'''}(\theta^*)}{2n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right)}$$

- $\frac{\mathcal{L}_n'''(\theta^*)}{2n} \leq M$ in probabilità: vi è un numero finito di n per cui la disuguaglianza non è verificata. $-\frac{\mathcal{L}_n'''}{2n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \to 0$.
- $\frac{\mathcal{L}_n''(\theta_0)}{n} \to -QFI\left(\theta_0\right)$ in probabilità: l'informazione osservata media tende alla $QFI\left(\theta_0\right)$.
- $\frac{\mathcal{L}_n'(\theta_0)}{\sqrt{n}} \to N(0, QFI\left(\theta_0\right))$ in distribuzione.

Teorema

$\{X_n\} \to X$ in distribuzione e $\{Y_n\} \to c$ in probabilità allora $\frac{X_n}{Y_n} \to \frac{X}{c}$ in distribuzione.

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \to \frac{N\left(0, QFI\left(\theta_0\right)\right)}{QFI\left(\theta_0\right)} = N\left(0, QFI\left(\theta_0\right)^{-1}\right)$$

Varianza asintotica

Cosa possiamo dire sulla raggiungibilità dell'Heisenberg scaling?

$$Var\left(\hat{\theta}\right) \propto \frac{1}{N^2} \quad (N \to \infty)$$

Lo stimatore adattivo raggiungere asintoticamente la varianza:

$$Var\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \to \frac{1}{nQFI(\theta_0)}$$

Se eseguiamo la stima su n blocchi entangled di M probe il cui stato è stato scelto in maniera ottimale si ha $QFI\left(\theta_0\right) = M^2$, $N_{tot} = Mn$. La varianza asintotica diventa:

$$Var\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \to \frac{n}{N_{tot}^2}$$

Heisenberg scaling

Non è chiaro se a N_{tot} fissato esiste una nozione di scaling: dato $\epsilon > 0$, per $N_{tot} > N_{tot}^0$ fissato $\exists\, n_0 \mid n > n_0$ si ha:

$$\left| Var\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \frac{N_{tot}^2}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

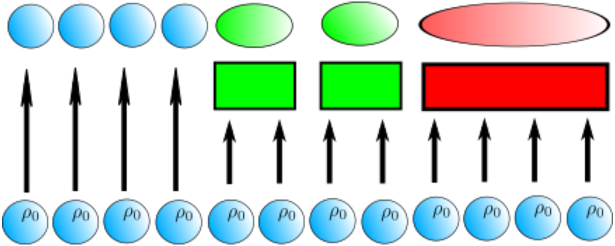
In generale il valore n_0 da cui comincia a valere il risultato asintotico può dipendere dal valore N_{tot} così che la varianza per n_0 misure sia:

$$Var\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \sim \frac{n_0(N_{tot})}{N_{tot}^2}$$

Heisenberg scaling?

Heisenberg scaling

Nello schema di Fujiwara non si possono utilizzare subito blocchi entangled, per via della limitata regione di sensibilità (θ *mod* $\frac{2\pi}{M}$).



E' necessaria una strategia in cui si varia la dimensione del blocco di qubit entangled (aumentandola esponenzialmente), oltre che il numero di ripetizioni. Non contemplata da Fujiwara perché la *QFI* non ha limite in questi schemi (cresce con M).

Rimane un problema aperto la raggiungibilità dell'Heisenberg scaling in qualche schema!

Bibliografia

- Géza Tóth and Iagoba Apellaniz, Quantum metrology from a quantum information science perspective, 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* 47 424006
- Akio Fujiwara, Strong consistency and asymptotic efficiency for adaptive quantum estimation problems, 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 12489

Grazie per l'attenzione!