

Quantum metrology

Federico Belliardo

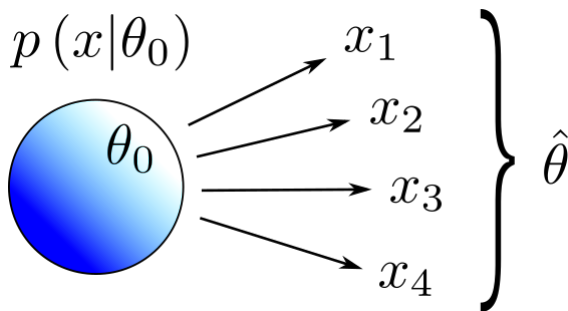
Relatore: Vittorio Giovannetti

Scuola Normale Superiore

24 Aprile 2018

- Stima dei parametri classica e quantistica
- Teoria della misura quantistica
- Ottimizzazioni (stimatore, misura, probe)
- Stimatore adattivo
- Heisenberg scaling

Sistema caratterizzato da un parametro θ_0 .



- Misura: interrogazione del sistema produce x con $p(x|\theta_0)$.
- Data processing: costruzione dello stimatore $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Esiste un limite alla precisione di $\hat{\theta}$?

Limite di Cramér-Rao

Sia $\hat{\theta}(\vec{x})$ stimatore di θ con \vec{x} vettore delle misure. Esiste un lower bound sulla sua varianza:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{NI(\theta)}$$

con N numero di misure, dove $I(\theta)$ è detta **informazione di Fisher** ed è definita come:

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log p(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log p(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right]$$

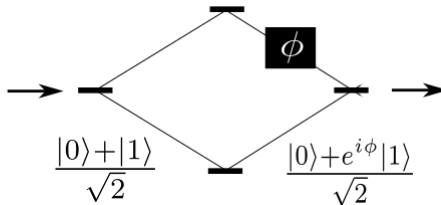
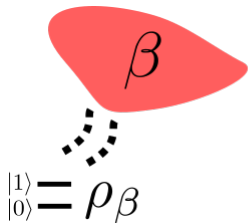
Il maximum likelihood estimator è asintoticamente efficiente, cioè:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{ML}) \rightarrow \frac{1}{NI(\theta)} \text{ per } N \rightarrow \infty.$$

Stima dei parametri quantistica

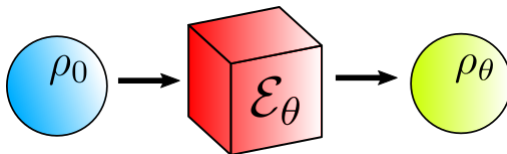
In MQ il parametro θ che caratterizza un sistema è codificato nello stato ρ_θ .

Esempi: $\rho_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$ (temperatura), $|\psi\rangle_\phi = \frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}}$ (fase interferometrica), ...



Stima dei parametri quantistica

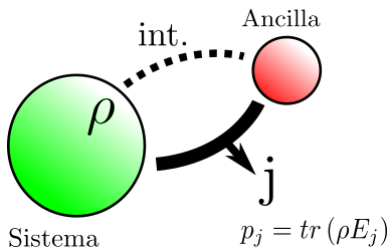
Il processo di misura è costituito dall'interazione di una *probe* ρ_0 con il sistema caratterizzato da θ . L'interazione è rappresentata da un generico canale quantistico (CPT).



$$\rho_0 \rightarrow \mathcal{E}_\theta(\rho) = \rho_\theta$$

Bisogna formulare il problema di stima in termini della teoria della misura quantistica! Le misure sono distruttive: è necessario utilizzare molti ρ_θ .

POVM: *Positive Operator Valued Measure*



- Interazione con ancilla
- Misure proiettive sul sistema *joint*

ρ è la matrice densità ridotta del sistema

$$0 \leq E_j \leq \mathbb{I} \quad p_j = \text{tr}(\rho E_j) \quad \sum_j E_j = \mathbb{I}$$

La distribuzione di probabilità $p(j, \theta)$ dipende dalla misura! Si può ottimizzare la POVM per massimizzare l'informazione estratta.

Quantum Fisher Information

Si definisce $QFI(\theta)$ la massima informazione di Fisher che si può estrarre variando la POVM applicata su ρ_θ :

$$QFI(\theta) = \max_{POVM} I(\theta)$$

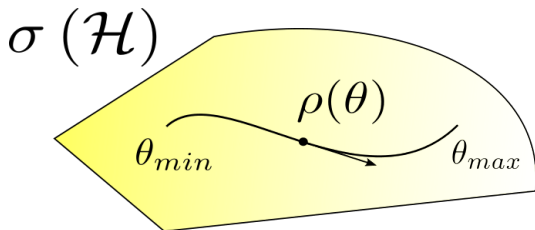
La QFI è esprimibile come derivata della distanza di Bures tra stati:

$$D_B(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2} \left[1 - \left| \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right| \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$QFI(\theta) = 4 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_B^2(\rho_{\theta+\delta}, \rho_\theta)}{\delta^2}$$

Quantum Fisher Information

$S = \{\rho_\theta, \theta \in \Theta\}$ è una traiettoria 1D nello spazio degli stati quantistici.



La $QFI(\theta)$ codifica la velocità con cui gli stati quantistici lungo la linea diventano **distinguibili** l'uno dall'altro.

Consideriamo il caso in cui $\rho_\theta = e^{-i\theta H} \rho e^{+i\theta H}$ (interferometro di Ramsey, Mach-Zehnder, ...). Per uno stato puro $|\psi_k\rangle$:

$$QFI(\theta) = 4(\Delta H)_{\psi_k}^2$$

Relazione di indeterminazione energia-tempo

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = (\Delta\theta)_{\psi_k}^2 \geq \frac{1}{4(\Delta H)_{\psi_k}^2} \rightarrow \Delta\theta\Delta H \geq \frac{1}{2}$$

La POVM ottimale ($I = QFI$) per estrarre informazione da ρ_θ è costituita dai proiettori sugli autospazi dell'operatore L_θ chiamato *symmetric logarithmic derivative* che soddisfa a:

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (\rho_\theta L_\theta + L_\theta \rho_\theta)$$

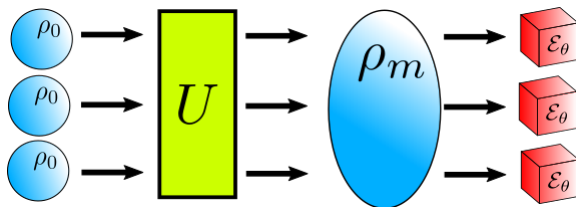
In generale la POVM ottimale dipende da θ . Ma il valore vero θ_0 non è noto a priori! E' necessario utilizzare una **strategia adattiva**.

Riassunto sulle possibilità di ottimizzazione:

- Stimatore $\hat{\theta}$
- POVM (Nuova!) - problema della dipendenza da θ_0 della misura ottimale
- Probe ρ_0 (Nuova!)

La convessità della $QFI(\theta)$ assicura che l'informazione è massima per gli stati ρ_0 puri.

E' possibile far interagire m probes tra loro prima dell'applicazione di \mathcal{E}_θ creando dunque uno stato **entangled**:



$$\underbrace{\rho_0 \otimes \rho_0 \otimes \dots \otimes \rho_0}_m \rightarrow \rho_m$$

Può l'entanglement migliorare la precisione delle misure?

Identificata la $QFI(\theta)$ come figura di merito per la precisione di una stimatore possiamo chiederci quanto vale per uno stato ρ_N costituito da N probe. Si osserva che:

$$QFI_{\rho^{\otimes N}}(\theta) = NQFI_{\rho}(\theta)$$

$$H = \sum_{i=1}^N h_i$$

$$QFI_{\rho^{\otimes N}}(\theta) = 4(\Delta H)^2 = 4 \sum_{i=1}^N (\Delta h_i)^2 = NQFI_{\rho}(\theta)$$

cioè QFI scala come il numero N di probe per stati separabili.

Per un generico stato ρ_N di N probe abbiamo:

$$QFI_{\rho_N}(\theta) = 4(\Delta H)^2 \leq N^2$$

dunque:

$$QFI_{\rho_N} \leq N^2$$

Heisenberg scaling?

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \propto \frac{1}{N^2} \quad (N \rightarrow \infty)$$

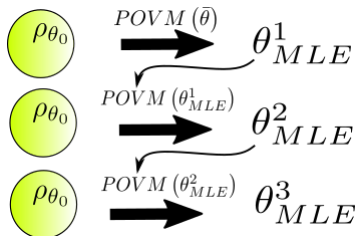
Vediamo alcuni esempi di stati utili:

- $|\psi\rangle_{NOON} = \frac{|N,0\rangle + |0,N\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{|N,0\rangle + e^{iN\theta}|0,N\rangle}{\sqrt{2}}$ θ misurabile $\text{mod } \frac{2\pi}{N}$, sensing, stati tipici di interferometri, $QFI(\theta) = N^2$
- $|\psi\rangle_{GHZ} = \frac{|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}}$ (come sopra)

Gli stati entangled evolvono N volte più velocemente degli stati separabili (in termini di distinguibilità).

Dimentichiamo l'entanglement per ora.

Per raggiungere il quantum Cramér-Rao bound si utilizza uno stimatore MLE addattivo:



La bontà di uno stimatore è caratterizzata da:

- Consistenza: $\theta_{MLE}^n \rightarrow \theta_0$ per $n \rightarrow +\infty$
- Efficienza: $Var(\theta_{MLE}^n) \rightarrow \frac{1}{nQFI(\theta_0)}$, la definizione classica prevede $I(\theta_0)$

Consistenza forte ed efficienza dello stimatore di massima likelihood adattivo.

- $x \in X$ spazio risultati delle misure (discreto)
- $\theta \in \Theta$ spazio dei parametri (compatto)
- $e \in E$ spazio degli esperimenti (compatto)

Ipotesi: conosciamo il miglior esperimento $\hat{e}(\theta)$ associato ad ogni valore θ (si ottiene diagonalizzando la SLD).

$f(x_n, \theta, e_n)$ è la probabilità di misurare il valore x_n eseguendo la POVM e_n sullo stato ρ_θ .

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta, e_i)$$

Teorema (Fujiwara 2006)

Supponiamo che il valore vero del parametro sia θ_0 e che la misura e_n sia scelta sulla base del risultato delle misure precedenti:

$$e_n = \hat{e} \left(\hat{\theta}_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \right) \text{ allora}$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \rightarrow N \left(0, QFI(\theta)^{-1} \right)$$

Ipotesi:

- $f(x, \theta, e) > 0$ per ogni (x, θ, e) , continua in (x, θ, e) .
- $\mu(x | f(x, \theta, e) \neq f(x, \theta', e)) > 0$ per ogni $\theta \neq \theta', e \in E$.
- $f(x, \theta, e)$ è C^3 in θ .

La tesi rimane vera anche se non si aggiorna subito la POVM da eseguire.

Passaggi fondamentali della dimostrazione:

- Si dimostra che $P_{\theta_0} \left[|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq a \right] \leq e^{-bn}$ con $b > 0$. b dipende dalla misura, dallo stato iniziale ρ_0 e da a .
- $P_{\theta_0} \left[|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq a \text{ i.o.} \right] = 0$. L'evento $|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq a$ accade un numero finito di volte. Questo prova la consistenza forte dello stimatore adattivo.
- Definiamo $\mathcal{L}(\theta|x, e) = \log f(x, \theta, e)$ e
 $\mathcal{L}_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\theta|x_i, e_i)$. Sviluppiamo a primo ordine:
 $\mathcal{L}'_n(\theta) = \mathcal{L}'_n(\theta_0) + \mathcal{L}''_n(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}\mathcal{L}'''_n(\theta^*)(\theta - \theta_0)^2$.
 $\mathcal{L}'_n(\hat{\theta}_n) = 0$ per definizione di MLE, dunque:

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) = \frac{\frac{\mathcal{L}'_n(\theta_0)}{\sqrt{n}}}{-\frac{\mathcal{L}''_n(\theta_0)}{n} - \frac{\mathcal{L}'''_n(\theta^*)}{2n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right)}$$

- $\frac{\mathcal{L}_n'''(\theta^*)}{2n} \leq M$ in probabilità: vi è un numero finito di n per cui la disuguaglianza non è verificata. $-\frac{\mathcal{L}_n'''}{2n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \rightarrow 0$.
- $\frac{\mathcal{L}_n''(\theta_0)}{n} \rightarrow -QFI(\theta_0)$ in probabilità: l'informazione osservata media tende alla $QFI(\theta_0)$.
- $\frac{\mathcal{L}_n'(\theta_0)}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0, QFI(\theta_0))$ in distribuzione.

Teorema

$\{X_n\} \rightarrow X$ in distribuzione e $\{Y_n\} \rightarrow c$ in probabilità allora
 $\frac{X_n}{Y_n} \rightarrow \frac{X}{c}$ in distribuzione.

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \rightarrow \frac{N(0, QFI(\theta_0))}{QFI(\theta_0)} = N\left(0, QFI(\theta_0)^{-1}\right)$$

Cosa possiamo dire sulla raggiungibilità dell'Heisenberg scaling?

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \propto \frac{1}{N^2} \quad (N \rightarrow \infty)$$

Lo stimatore adattivo raggiungere asintoticamente la varianza:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightarrow \frac{1}{nQFI(\theta_0)}$$

Se eseguiamo la stima su n blocchi entangled di M probe il cui stato è stato scelto in maniera ottimale si ha $QFI(\theta_0) = M^2$, $N_{tot} = Mn$. La varianza asintotica diventa:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightarrow \frac{n}{N_{tot}^2}$$

Non è chiaro se a N_{tot} fissato esiste una nozione di scaling:
dato $\epsilon > 0$, per $N_{tot} > N_{tot}^0$ fissato $\exists n_0 \mid n > n_0$ si ha:

$$\left| \text{Var} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \frac{N_{tot}^2}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

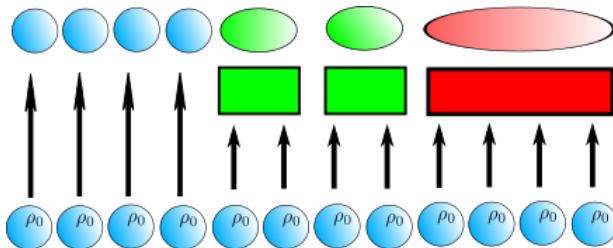
In generale il valore n_0 da cui comincia a valere il risultato
asintotico può dipendere dal valore N_{tot} così che la varianza per n_0
misure sia:

$$\text{Var} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \sim \frac{n_0(N_{tot})}{N_{tot}^2}$$

Heisenberg scaling?

Heisenberg scaling

Nello schema di Fujiwara non si possono utilizzare subito blocchi entangled, per via della limitata regione di sensibilità ($\theta \bmod \frac{2\pi}{M}$).



E' necessaria una strategia in cui si varia la dimensione del blocco di qubit entangled (aumentandola esponenzialmente), oltre che il numero di ripetizioni. Non contemplata da Fujiwara perché la QFI non ha limite in questi schemi (cresce con M).

Rimane un problema aperto la raggiungibilità dell'Heisenberg scaling in qualche schema!



Géza Tóth and Iagoba Apellaniz, Quantum metrology from a quantum information science perspective, 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* 47 424006



Akio Fujiwara, Strong consistency and asymptotic efficiency for adaptive quantum estimation problems, 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 12489

Grazie per l'attenzione!