

# Integrazione numerica dell'equazione della vorticità barotropica

Gruppo A: Federica Benassi, Beatrice Biagi, Serena Negroni, Deniel Pavone, Chiara Ventrucci

26 ottobre 2022

## Introduzione

Il primo tentativo di realizzare un'integrazione numerica delle equazioni primitive dei moti atmosferici è dovuto a Richardson (1922), che ottenne una variazione irrealistica di pressione di 146 hPa in 6 ore. Nel 1950 J. Charney, R. Fjortoft e J. Von Neumann realizzarono la prima previsione meteorologica di successo, integrando l'equazione della vorticità barotropica. Questo importante risultato fu raggiunto introducendo l'approssimazione quasi-geostrofica nelle equazioni del moto, che permette di risolvere i due principali problemi del metodo di Richardson: l'instabilità numerica e l'inizializzazione dello schema. Inoltre, il problema fu semplificato con l'introduzione di un modello barotropico equivalente, ottenendo un sistema di equazioni che descrive l'evoluzione temporale dell'altezza di geopotenziale  $Z$  al livello barotropico equivalente, in cui il moto del fluido è uguale alla dinamica mediata verticalmente, che in atmosfera corrisponde a 500 hPa ( $Z_{500}$ ).

In questo elaborato ci si propone di riprodurre tale risultato storico, realizzando una previsione dello stato dell'atmosfera di 24 ore a partire dal 5 gennaio 1949, per un dominio centrato sul Nord America. Nella sezione 1 si riporta il risultato dell'integrazione; nella sezione 2, invece, si studia la *tendency* del campo di altezza di geopotenziale, confrontandola con i dati osservati e con una previsione basata su un modello di persistenza. Nella sezione 3, infine, si discutono le approssimazioni introdotte ed eventuali miglioramenti.

## 1 Integrazione

Le equazioni primitive del moto con le approssimazioni precedentemente introdotte si riducono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} = J(hL + f, Z) \\ h = \frac{gm^2}{f} \\ \nabla^2 Z = L \end{cases} \quad (1)$$

in cui  $J$  è l'operatore Jacobiano  $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y}$  e  $h$  è un parametro che tiene conto del cambio di coordinate tra il sistema di riferimento sferico terrestre e quello piano del dominio, dipendente dalla latitudine  $\phi$  tramite il fattore geometrico  $m$ :

$$m = \frac{2}{1 + \sin \phi}$$

È possibile ottenere una soluzione numerica del sistema fissando un set di condizioni iniziali  $Z_0$ . Lo schema di risoluzione prevede, poi, di sostituire il dato iniziale nella seconda equazione del sistema (1) per ottenere il Laplaciano  $L$  al primo istante temporale, il quale, a sua volta, è utilizzato nella prima equazione per determinare  $J$  mediante uno schema alle differenze finite. Da questa equazione si può ottenere  $\frac{\partial L}{\partial t}$  e quindi  $\frac{\partial Z}{\partial t}$ , da cui poi si ricava  $Z$  all'istante successivo con il metodo *Eulero Forward*:

$$Z_1 = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot \Delta t$$

Per i successivi istanti temporali l'integrazione di  $Z(t)$  avviene mediante il metodo *Leapfrog*:

$$Z_{i+1} = Z_{i-1} + \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot 2\Delta t$$

L'integrazione è stata effettuata su un periodo di 24 ore, a passi  $\Delta t$  di 30 minuti, per un dominio piano rettangolare di  $16 \times 19$  punti. La condizione iniziale  $Z_0$  deriva da un set di osservazioni, dal quale sono state estrapolate anche le condizioni al contorno. Queste ultime si sono supposte costanti per tutto il periodo di integrazione.

Si riportano in Fig. 1 le osservazioni dello stato iniziale e finale e la previsione ottenuta. Il campo di  $Z_{500}$  osservato al 5 gennaio mostra il caratteristico minimo di geopotenziale sul Polo Nord e delle ondulazioni con valori crescenti, che si estendono verso le medie latitudini. Inoltre, è presente un secondo minimo locale associabile ad un ciclone extratropicale, che nel corso delle 24 ore si sposta verso est e si approfondisce. In aggiunta, si nota che il 6 gennaio si forma un secondo minimo di 4900 m. La previsione è in grado di ricostruire la struttura a grande scala delle oscillazioni del campo di geopotenziale. Mostra, inoltre, l'approfondimento del ciclone, ma non il suo spostamento verso est e sovrastima le dimensioni del secondo minimo locale. Infine, le osservazioni mostrano un gradiente moderato di geopotenziale nella regione in alto a sinistra nel dominio, molto più accentuato nella previsione.

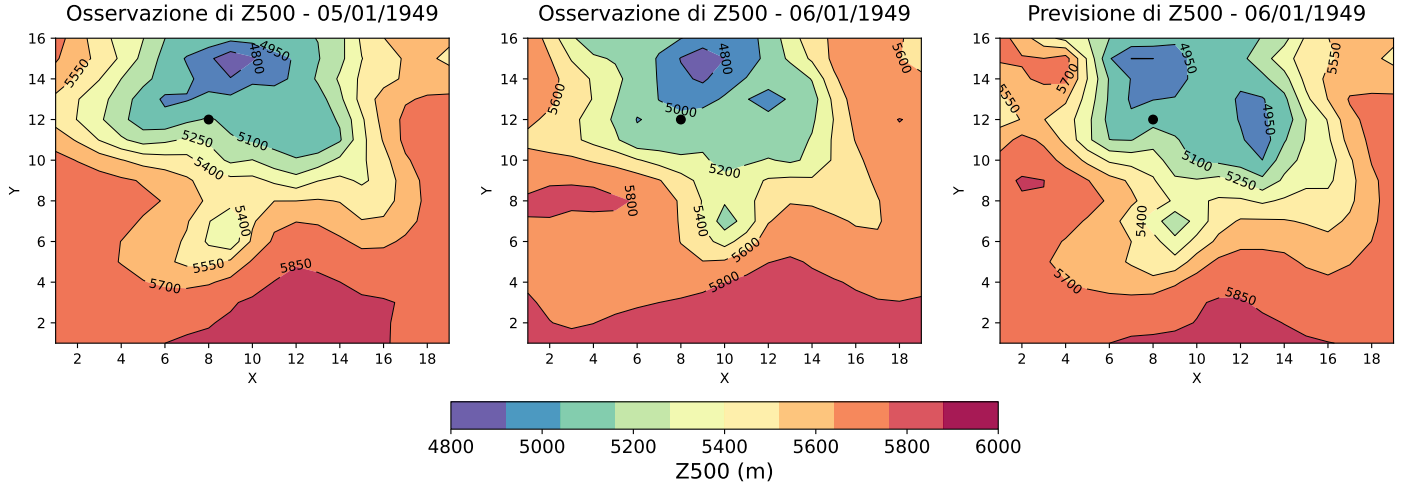


Figura 1: Altezza di geopotenziale a 500 hPa osservata per i giorni 05-06/01/1949 e prevista. Il punto nero è il Polo Nord.

## 2 Studio della previsione

Per stimare l'accuratezza della previsione si analizzano le *tendency*, definite come la differenza del dato previsto e del dato osservato rispetto alle condizioni iniziali  $Z_0$ . I risultati sono riportati in Fig. 2.

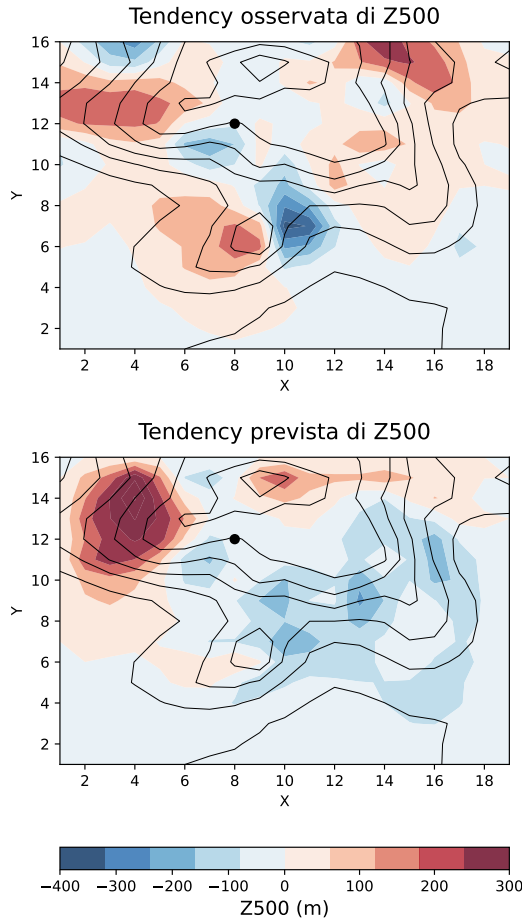


Figura 2: *Tendency* di Z500 osservata e prevista per il 06/01/1949 (area colorata). Le linee nere rappresentano  $Z_0$ ; il punto nero è il Polo Nord.

La *tendency* osservata mostra lo spostamento del ciclone verso est: si identificano due regioni affiancate, per quella a sinistra la *tendency* è positiva, mentre per quella a destra è negativa, con una differenza di geopotenziale di circa 400 m. L'integrazione è in grado di prevedere correttamente la struttura del ciclone, ma sottostima significativamente la *tendency*, mostrando una riduzione di geopotenziale di al massimo 200 m, distribuita su un'area più ampia, rispetto all'osservazione. Ciò è legato al fatto che non si osserva uno spostamento netto del centro della perturbazione e si sovrastima il secondo minimo. Infine, si nota che nella regione in alto a sinistra del dominio è presente una *tendency* positiva di 150 m, la cui stima raddoppia nella previsione, superando i 300 m. Anche la *tendency* in alto a destra è sottostimata e più spostata verso sinistra.

Successivamente, la previsione numerica è confrontata con una ottenuta attraverso la persistenza, ovvero assumendo che lo stato dopo 24 ore sia lo stesso delle condizioni di partenza. L'errore in ogni punto griglia è stimato come la differenza in valore assoluto tra l'altezza prevista e l'altezza osservata, per entrambi i modelli di previsione. La differenza tra i due valori è riportata in Fig. 3, insieme alla *tendency* osservata. Si nota che la differenza tra i due modelli non è omogenea in tutto il dominio considerato: intorno al Polo sono presenti delle regioni in cui l'errore dell'integrazione numerica è minore rispetto a quello della persistenza e altre in cui è maggiore, con differenze anche di 200 m. Alle medie latitudini i due modelli sono maggiormente in accordo, con scarti di qualche decina di metri. Inoltre, si osserva una grande differenza nella regione in cui è presente il ciclone, individuata dalla intensa *tendency* negativa, nella quale l'errore commesso dalla previsione numerica è minore. Si può dedurre, dunque, che la persistenza non descrive accuratamente il comportamento delle masse d'aria in questa regione, interessata da variazioni significative. Questa evoluzione, inoltre, non è ben catturata neanche dalla previsione numerica, come sottolineato nell'analisi della Fig. 2.

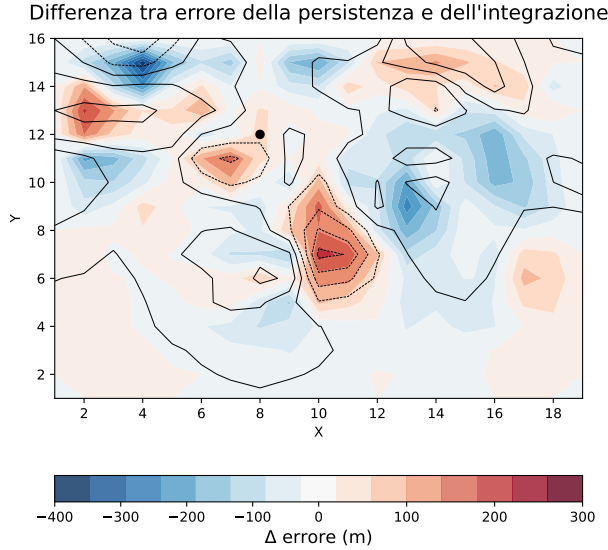


Figura 3: Differenza tra l'errore del modello di persistenza e dell'integrazione numerica (area colorata). I contorni rappresentano la *tendency* osservata. Il punto nero è il Polo Nord.

Successivamente, sono calcolati i valori medi dell'errore della previsione fatta con la persistenza e con l'integrazione numerica, su tutto il dominio e sulla regione coinvolta nell'evoluzione del ciclone. I valori ottenuti sono riportati in Tab.1.

Area	Persistenza	Integrazione
Totale	61	74
Ciclone	104	102

Tabella 1: Errore medio commesso dai modelli di persistenza e di integrazione numerica, sull'area totale e su quella coinvolta nell'evoluzione del ciclone.

Si osserva che, complessivamente, l'errore commesso dalla previsione numerica è maggiore rispetto a quello della persistenza. Tale comportamento può essere legato al fatto che a larga scala il sistema è piuttosto stazionario. Viceversa, osservando l'area ristretta sul ciclone, l'integrazione fornisce un risultato di poco migliore, tuttavia, l'errore è molto alto per entrambi i modelli. Si conclude che né la persistenza, né l'integrazione sono in grado di rappresentare correttamente l'evoluzione della perturbazione.

### 3 Strategie per migliorare la previsione

La previsione ottenuta dall'integrazione numerica di Charney riesce qualitativamente a riprodurre le variazioni a larga scala dell'altezza di geopotenziale verificatesi in 24 ore. Ciononostante, la *tendency* rispetto all'osservazione non è accurata: questo è strettamente legato alle forti approssimazioni introdotte, in particolare quella quasi-geostrofica. Con questa ipotesi, le onde di Rossby sono le uniche che possono propagarsi: esse sono caratteristiche dei moti a larga scala e sono sufficientemente lente per soddisfare l'ipotesi di stabilità dello schema numerico; di conseguenza, le onde veloci vengono filtrate completamente ed è eliminato il loro contributo alla variabilità del campo. Questo problema è risolvibile separando le due scale, mediante un metodo semi-implicito. In particolare, l'introduzione di un metodo implicito per la trattazione delle onde veloci garantisce stabilità incondizionata.

Il modello prevede, inoltre, l'integrazione dei moti su un unico livello non divergente posto a 500 hPa: ciò esclude lo sviluppo dei processi baroclini, i quali sono caratterizzanti dello stato dell'atmosfera alle medie latitudini. Perciò, è più realistico integrare lo schema su più livelli di pressione, come realizzato da Richardson; tuttavia, questo aumenterebbe significativamente il costo computazionale.

I risultati migliorerebbero ulteriormente se non si considerassero costanti le condizioni al contorno: utilizzando un modello globale si potrebbero calcolare queste ultime istante per istante, fornendole al modello ad area limitata. Provando, invece, a estrapolare le condizioni al contorno a ogni istante dai dati integrati, il metodo diverge.

Il sistema integrato in questa analisi è un sistema non lineare e multi-scala. Per tenere conto dell'evoluzione dei processi di sotto-griglia, si potrebbero introdurre delle parametrizzazioni oppure si potrebbe aumentare la risoluzione spaziale, riducendo la propagazione dell'errore alle scale più grandi. In quest'ultimo caso, però, è necessario prestare attenzione alla scelta del passo temporale e dello schema numerico, affinché stabilità e convergenza siano garantite. In aggiunta, si osserva che le approssimazioni fisiche introdotte riducono la sensibilità del sistema alle condizioni iniziali: provando a integrare il sistema con il metodo dell'*ensemble*, la soluzione è molto simile a quella qui ottenuta.

Infine, si potrebbe migliorare significativamente il modello non considerando solo la dinamica delle masse d'aria, ma aggiungendo la termodinamica e altre interazioni con le componenti del sistema Terra.

## Conclusioni

Il modello utilizzato da Charney permette di prevedere l'evoluzione del campo di geopotenziale a larga scala in modo realistico, nell'arco di 24 ore. In particolare, la variazione di altezza di geopotenziale prevista per il punto in cui si osserva lo spostamento del ciclone il 06/01/1949 risulta di circa 120 m, equivalenti a una differenza di pressione superficiale di 16 hPa. Tale risultato è stato ottenuto attraverso l'equazione ipsometrica, utilizzando come altezza di geopotenziale iniziale 5550 m. Questo valore è plausibile, contrariamente ai 146 hPa in 6 ore ottenuti da Richardson. Dal confronto tra le *tendency* osservata e prevista emerge che il modello numerico riproduce la presenza del ciclone, ma non il suo spostamento. Anche l'evoluzione delle strutture a scala più piccola non è ben prevista. Dal confronto tra il risultato

numerico e una previsione basata sulla persistenza delle condizioni iniziali emerge che il primo è più affidabile nella regione del ciclone, pur non rappresentandolo fedelmente. Dato che in una vasta regione del dominio il campo è stazionario, tuttavia, una previsione realistica potrebbe essere realizzata anche con un modello di persistenza. Il modello utilizzato in questa previsione permette, quindi, di risolvere i problemi dell'instabilità numerica e delle condizioni iniziali incontrati da Richardson. Il risultato potrebbe essere migliorato in modo significativo rilassando l'approssimazione quasi-geostrofica, aumentando il numero di livelli verticali ed evolvendo le condizioni al contorno, in modo da garantire la stabilità dello schema numerico utilizzato.