

Integrazione numerica del sistema di Lorenz

Federica Benassi

Ottobre 2022

Introduzione

Il sistema di Lorenz, ideato da Edward N. Lorenz nel 1963, descrive un modello a tre variabili a partire dalla semplificazione delle equazioni primitive per un fluido non rotante, non viscoso, non divergente, in approssimazione di Boussinesq, in presenza di un gradiente verticale di temperatura e utilizzando il metodo di Galerkin:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

dove σ , r e b sono costanti arbitrarie. Le tre variabili x , y e z assumono significati fisici ben definiti e associati all'intensità del flusso di massa e ad altre proprietà termodinamiche della cella convettiva. Una scelta opportuna delle costanti porta a una soluzione caotica del sistema, cioè a una forte dipendenza della traiettoria dalla scelta della condizione iniziale. In questa esperienza, la soluzione del sistema è stata determinata tramite integrazione Euler forward:

$$f_{n+1} = f_n + \dot{f} \cdot dt. \quad (2)$$

Inizialmente, si è studiata la dipendenza della traiettoria dalla scelta delle costanti (σ , b , r). Con un fissato set di costanti, poi, si è proceduto valutando l'evoluzione del sistema nel tempo perturbando casualmente la condizione iniziale scelta e studiandone il comportamento in maniera più generale tramite la media d'ensemble. Infine, si è valutato l'effetto di un forcing dipendente dal tempo sull'evoluzione a lungo termine della soluzione.

1 Visualizzazione delle traiettorie per due famiglie di costanti

La forma della soluzione del sistema di Lorenz dipende fortemente dal valore delle costanti (σ , b , r). In questo studio sono stati scelti due set di parametri: set A = (10, 8/3, 28) e set B = (10, 8/3, 9). L'integrazione è stata effettuata per le tre variabili (x , y , z) con un time step $dt = 0.005$ e per un tempo $t = 60$ unità, per un totale di 12000 steps. La condizione iniziale scelta è $L_0 = (9, 10, 20)$. In Figura 1 è riportata la visualizzazione grafica delle traiettorie sul piano xz per i due set di parametri scelti.

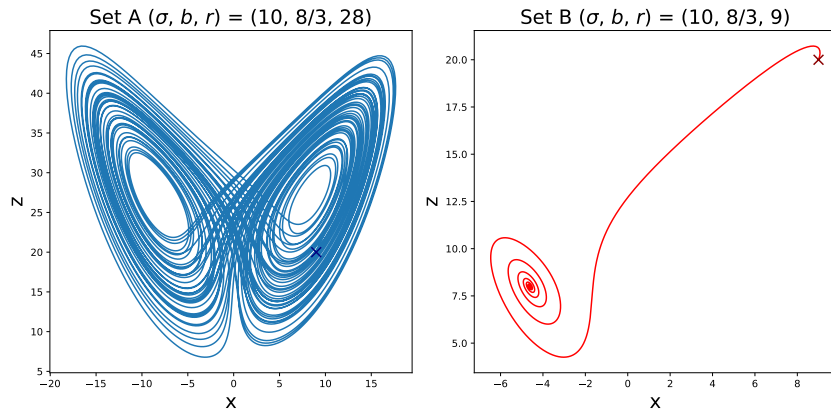


Figura 1: Traiettorie sul piano xz per due set di parametri diversi. La croce rappresenta la condizione iniziale L_0

Come si può osservare, le forme delle due traiettorie sono molto differenti pur avendo variato un solo parametro (r): la soluzione del sistema A presenta la caratteristica forma a "farfalla", associata storicamente al sistema di Lorenz. La posizione in questo caso oscilla tra due regioni ben distinte, estendendosi sul piano. Nel caso del set B, invece, la posizione si allontana drasticamente dalla condizione iniziale nei primi istanti di integrazione, per poi formare una spirale la cui ampiezza decade attorno a un singolo punto.

2 Perturbazione della condizione iniziale

Per entrambi i set di parametri è poi stata studiata la risposta della soluzione a una perturbazione della condizione iniziale $L'_0 = (9 + \epsilon, 10, 20)$, con $\epsilon = 1 \cdot 10^{-10}$. In Figura 2a e 2b sono riportati gli andamenti nel tempo della coordinata x per le due condizioni iniziali scelte.

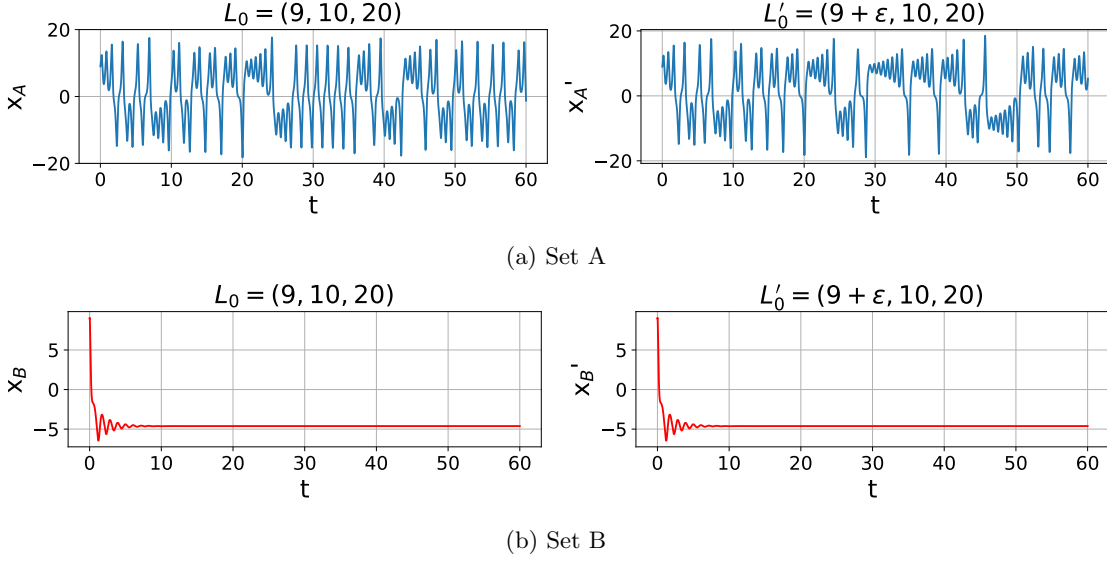


Figura 2: Andamenti di $x(t)$ in base alla condizione iniziale

Come già accennato nella sezione 1, l'andamento della coordinata è molto diverso dipendentemente dai due set di parametri scelti. Il set A mostra un comportamento oscillatorio la cui forma è apparentemente la stessa solamente per i primi step temporali; viceversa, per il set B le due traiettorie sembrano coincidere con precisione. Questo è visibile maggiormente osservando le differenze tra le traiettorie in in Figura 3.

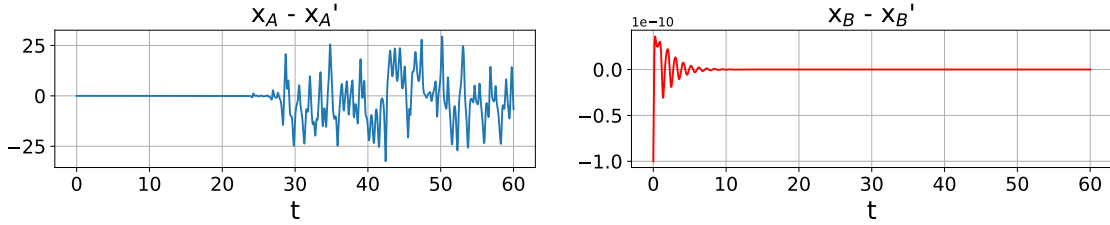


Figura 3: Differenza tra $x(t)$ e $x'(t)$ in funzione del tempo per il set A (a sinistra) e per il set B (a destra)

Le due soluzioni sono in accordo per il set A fino a $t = 25$, dopodiché le differenze diventano significative mostrando ampie e irregolari oscillazioni. Per quanto riguarda il set B, invece, le differenze sono maggiori all'inizio dell'integrazione ma tendono a zero già a partire da $t = 9$. Inoltre, gli ordini di grandezza tra le due situazioni sono molto diversi, essendo comunque le differenze associate al set B minori della perturbazione stessa (10^{-10}). La soluzione associata al set A, quindi, rappresenta un sistema caotico, fortemente dipendente dalla condizione iniziale scelta ed estremamente sensibile a piccole perturbazioni di essa. L'evoluzione del sistema B, invece, è stabile ed evolve verso lo stesso punto.

3 Predicibilità e RMSE

Il problema della caoticità associata al sistema A può essere studiato nei termini di predicibilità della soluzione tra uno stato "osservato" $L_{true}(t, L_0)$, dove $L_0 = (9, 10, 20)$, e la soluzione perturbata da un errore iniziale $L(t, L'_0)$ con $L'_0 = (9 + \epsilon, 10, 20)$. Si può calcolare il *root mean square error* (RMSE) tra le due traiettorie in funzione del tempo come:

$$RMSE(t) = \sqrt{(x_{true}(t) - x'(t))^2 + (y_{true}(t) - y'(t))^2 + (z_{true}(t) - z'(t))^2}. \quad (3)$$

In Figura 4 sono riportati gli andamenti del RMSE rispetto al tempo in scala lineare e semilogaritmica.

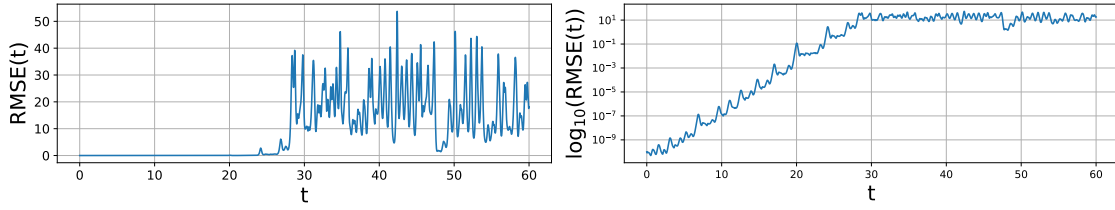


Figura 4: RMSE in funzione del tempo, in scala lineare (a sinistra) e in scala semilogaritmica (a destra)

Si può osservare che l'errore tra le due soluzioni rimane piuttosto piccolo fino a $t = 25$, mostrando comunque una crescita esponenziale in questo periodo temporale. Dopodiché, l'errore si stabilizza su valori dello stesso ordine di grandezza (10^1), oscillando irregolarmente. L'errore sulla condizione iniziale influenza significativamente la predicibilità della soluzione. Il tempo di predicibilità t_a può essere definito come l'istante fino a cui il RMSE rimane al di sotto una soglia arbitraria a : in questo caso, si è scelto $a = 0.5$. In Tabella 1 sono riportati i tempi di predicibilità in funzione di diversi valori di perturbazione ϵ .

ϵ	10^{-10}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-1}
t	23.915	12.395	6.715	2.925

Tabella 1: Tempo di predicibilità t tale per cui $RMSE(t) > 0.5$

Si può osservare che all'aumentare di ϵ , cioè per un maggiore discostamento delle due condizioni iniziali, t diminuisce: questo significa che il RMSE raggiunge più rapidamente la soglia scelta. Le due traiettorie, quindi, sono comparabili per un range temporale minore, al di sopra del quale domina la caoticità del sistema.

4 Studio di un ensemble

Si può studiare in maniera più generale il sistema considerando un ensemble di condizioni iniziali perturbate e osservando il comportamento medio dell'evoluzione. In questo caso, l'ensemble è stato generato a partire da $N = 100$ condizioni iniziali perturbate $L_0^{(k)} = (9 + \epsilon_k, 10, 20)$, dove ϵ_k è un numero campionato da una distribuzione uniforme tra -0.75 e 0.75. Ogni membro dell'ensemble è poi stato integrato fino a $t = 4$, per un totale di 800 steps temporali. In Figura 5 è riportato il confronto tra il RMSE calcolato tra la traiettoria media $\langle L(t) \rangle$ e lo stato osservato L_{true} definito in sezione 3, e il RMSE medio $\langle R(t) \rangle$ calcolato per ogni traiettoria $L_k(t)$ dell'ensemble rispetto a L_{true} .

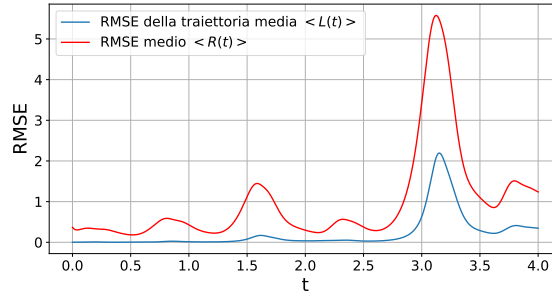


Figura 5: RMSE della media sugli ensemble e media degli RMSE delle traiettorie rispetto allo stato osservato L_{true}

Entrambi gli andamenti presentano delle oscillazioni di diversa ampiezza con una certa periodicità. Come si può osservare, il RMSE medio $\langle R(t) \rangle$ è molto maggiore rispetto al RMSE calcolato rispetto alla traiettoria media $\langle L(t) \rangle$. Questo rende il calcolo di media di ensemble $\langle L(t) \rangle$ un buon approccio per aumentare l'accordo con lo stato osservato.

5 Confronto tra RMSE

Successivamente, si è confrontato l'andamento del RMSE rispetto alla traiettoria media con la deviazione standard della coordinata x dei membri dell'ensemble a ogni istante di tempo: $s = \sqrt{\langle (x_k - \langle x_k \rangle)^2 \rangle}$. In Figura 6 è riportato l'andamento temporale dei due parametri.

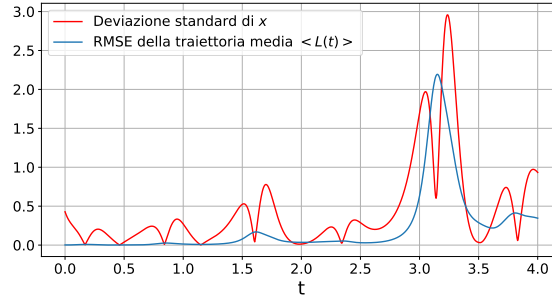


Figura 6: RMSE calcolato rispetto alla media e deviazione standard dell'ensemble

Come si può osservare, la deviazione standard presenta una serie di oscillazioni la cui ampiezza è maggiore attorno all'istante $t = 3$; in particolare, essa raggiunge un minimo locale in corrispondenza del massimo di RMSE a $t = 3.15$. Il significato di questi due parametri è molto diverso: il RMSE è calcolato come discostamento da una traiettoria "vera", fissata a priori (L_{true}), mentre la deviazione standard descrive la dispersione dei valori di ogni membro dell'ensemble rispetto alla loro media a ogni istante temporale. Di conseguenza, nel punto di minimo di s , i valori dell'ensemble si discostano di meno dalla traiettoria media, ma quest'ultima presenta una differenza massima dallo stato osservato L_{true} .

6 Introduzione di un forcing

Infine, si è studiato come l'introduzione di un forcing $f(t)$ può influenzare l'evoluzione del sistema nel tempo. Il forcing scelto ha la forma $\sqrt{t}/3$ ed è stato aggiunto all'equazione relativa a \dot{y} . L'integrazione è stata effettuata per un tempo $t = 500$ su $N = 50$ elementi di un ensemble, le cui condizioni iniziali sono perturbazioni di L_0 campionate da una distribuzione uniforme tra -20 e 20 per x e y , e tra 0 e 30 per z . Ogni membro k dell'ensemble è stato suddiviso in sezioni di 5000 steps temporali ciascuna ed è stata calcolata la probabilità $P_k(t)$ che la coordinata x delle traiettorie fosse negativa. In Figura 7a e 7b sono riportati gli andamenti di $P_k(t)$ e la loro media di ensemble $\langle P(t) \rangle$, in presenza e in assenza di forcing.

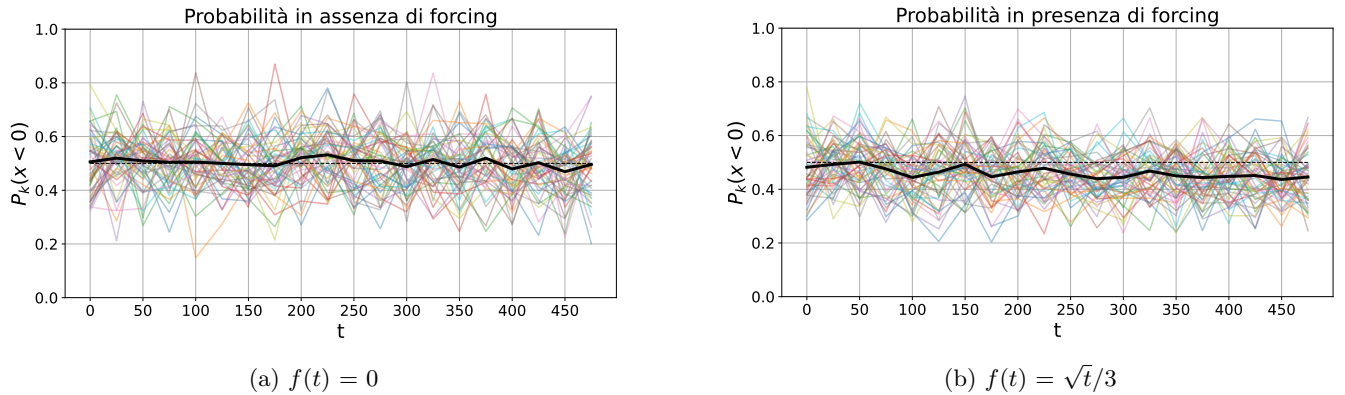


Figura 7: Probabilità $P_k(t)$ (background colorato) e media di ensemble $\langle P(t) \rangle$ (in nero), in assenza e presenza di forcing

Si può osservare che la probabilità per il sistema senza forcing resta stabile attorno a 0.5, con qualche fluttuazione legata alla casualità della condizione iniziale; con il forcing temporale attivo, invece, si osserva in generale un trend di diminuzione nel tempo della probabilità media, visibile soprattutto a partire da $t = 75$ circa. In assenza di forcing, quindi, il sistema oscilla uniformemente tra lo spazio delle x negative e positive. Aggiungendo il forcing, invece, si osserva un trend di diminuzione della probabilità: il sistema, quindi, evolve verso lo spazio di x positive.

Conclusioni

Il sistema di Lorenz è costituito da tre equazioni differenziali ottenibili manipolando le equazioni primitive di un fluido in una cella convettiva. La forma della sua soluzione dipende significativamente dalla scelta del set di costanti (σ , b , r); in questa esperienza è stata studiata la traiettoria per due valori diversi di r (sezioni 1 e 2). Per $r = 28$, la soluzione è caotica e quindi sensibile alla scelta delle coordinate di partenza: una loro perturbazione porta a un'evoluzione molto diversa del sistema nel tempo. Per $r = 9$, invece, la soluzione è stabile e converge verso uno stesso punto anche perturbando la posizione iniziale.

È interessante studiare la predicibilità della soluzione caotica, perché il comportamento dell'atmosfera è analogo e le previsioni si basano su condizioni iniziali che spesso possono essere assunte come perturbazioni dello stato osservato $L_{true}(t, L_0)$. Per questo motivo, si è studiato l'andamento temporale del *root mean square error* tra quest'ultimo e un'integrazione con condizione iniziale perturbata (sezione 3). Si osserva una crescita esponenziale del RMSE per i primi istanti di integrazione, dopodiché l'ordine di grandezza di tale parametro si stabilizza. Il tempo critico a cui il RMSE tra le due traiettorie raggiunge valori troppo grandi (tempo di predicibilità) dipende dall'ordine di grandezza della perturbazione nella condizione iniziale: esso è più piccolo all'aumentare della perturbazione. Di conseguenza con questo approccio non è possibile ottenere previsioni accurate a lungo termine se non si conosce con precisione lo stato "vero" dell'atmosfera. Tuttavia, l'accordo tra lo stato osservato e l'integrazione numerica migliora se si considera la media di ensemble su un set di traiettorie integrato a partire da condizioni iniziali perturbate casualmente (sezione 4). Come dimostrato, infatti, il RMSE calcolato rispetto alla traiettoria media è minore rispetto alla media dei RMSE calcolati per ogni singola traiettoria. Questo è dovuto al fatto che il calcolo della traiettoria media rimuove buona parte del rumore associato alla caoticità del sistema, mantenendo un trend generale descritto dalla maggioranza dei membri dell'ensemble. Nonostante ciò, anche il calcolo della media di ensemble presenta delle limitazioni rispetto alla riproduzione dello stato osservato (sezione 5). Si può osservare, infatti, che l'approccio dell'ensemble fallisce soprattutto in alcuni istanti temporali nella stima minimizzando la dispersione dalla media in quello stesso punto, ma massimizzando il RMSE della traiettoria media rispetto allo stato osservato.

Infine, si è studiato l'effetto di un forcing temporale proporzionale a \sqrt{t} sull'evoluzione della coordinata x (sezione 6), calcolando la probabilità $P(x < 0)$. Si osserva che, in presenza del forcing, il sistema evolve verso lo spazio delle x positive. Questo spostamento diventa significativo a scale temporali molto maggiori rispetto a quelle considerate finora. In ambito atmosferico, il forcing introdotto può rappresentare una forzante climatica, che agisce a lungo termine.