

Integrazione numerica delle equazioni Shallow Water

Federica Benassi

Novembre 2022

Introduzione

Le equazioni Shallow Water sono un'approssimazione delle equazioni di Navier-Stokes per un fluido omogeneo, non rotante, in approssimazione idrostatica, non viscoso, con batimetria piatta e la cui estensione verticale H è molto minore rispetto a quella orizzontale L . La loro versione conservativa, unidimensionale e linearizzata per la perturbazione della superficie libera η e della velocità u è scrivibile come:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Questo sistema è composto da due equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine accoppiate, e rappresenta un problema di Cauchy con condizioni iniziali $\eta(x, 0)$ e $u(x, 0)$.

Le equazioni possono essere disaccoppiate definendo due nuove variabili come combinazione lineare di η e u :

$$c_1(x, t) = \eta(x, t) - \frac{H}{\lambda} u(x, t) \quad c_2(x, t) = \eta(x, t) + \frac{H}{\lambda} u(x, t) \quad (2)$$

dove $\lambda = \sqrt{gH}$ è la velocità delle onde di gravità. In questo modo è possibile ottenere due equazioni lineari avvelte (iperboliche):

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} + \lambda \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

In questo studio l'integrazione numerica è stata effettuata per due condizioni iniziali di diversa forma (sinusoidale e a gradino) e tramite tre diversi metodi (Godunov, MUSCL-Hancock non limitato, MUSCL-Hancock con limitazione SUPERBEE). I risultati sono stati confrontati con un caso in cui il criterio di stabilità computazionale non è rispettato.

1 Metodi numerici

Le equazioni avvelte in c_1 e c_2 sono lineari e iperboliche e con velocità caratteristica $a = \mp \lambda$, risolvibili numericamente tramite una discretizzazione spaziale e temporale con passo Δx e Δt rispettivamente, e considerando un approccio ai volumi finiti dove le variabili sono definite come media integrale su celle centrate in x_i e con interfacce in $x_{i\pm 1/2}$. La stabilità computazionale dello schema numerico è determinata dal valore del numero di Courant c (criterio CFL):

$$c = |\lambda| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Lo schema numerico di evoluzione nel tempo di una generica variabile z in uno schema ai volumi finiti può essere scritto come

$$z_i^{n+1} = z_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (4)$$

dove $f_{i\pm 1/2}$ sono detti flussi numerici e sono calcolati utilizzando le soluzioni del problema di Riemann locale alle interfacce delle celle.

Per il **metodo di Godunov** i flussi sono definiti come:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \lambda z_i^n & \text{se } a > 0 \\ \lambda z_{i+1}^n & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Questo schema permette di ottenere una soluzione al primo ordine di accuratezza $O(\Delta x, \Delta t)$, ed è notoriamente dissipativo nel tempo.

Il **metodo MUSCL-Hancock** (MH) permette di ottenere una soluzione al secondo ordine di accuratezza $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ introducendo una procedura di interpolazione lineare tra le interfacce della cella:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \lambda \bar{z}_i^R & \text{se } a > 0 \\ \lambda \bar{z}_{i+1}^L & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (5)$$

dove le due nuove quantità \bar{z}_i^R e \bar{z}_i^L sono:

$$\bar{z}_i^L = z_i^n - \frac{1}{2} \Delta x (1+c) \sigma_i^n \quad \bar{z}_i^R = z_i^n + \frac{1}{2} (1-c) \sigma_i^n$$

Il parametro σ_i^n è detto *slope*, e in questo studio è definito tramite il metodo di Fromm alle differenze centrate:

$$\sigma_i^n = \frac{z_{i+1}^n - z_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

È inoltre possibile introdurre un limitatore di slope ξ_i per ridurre le oscillazioni dell'integrazione in presenza di forti gradienti: la slope ridotta ha espressione $\bar{\sigma}_i^n = \xi_i \sigma_i^n$. La limitazione utilizzata in questo studio è del tipo **SUPERBEE**.

I tre metodi di integrazione temporale (Godunov, MH non limitato e MH con limitazione SUPERBEE) sono stati applicati alle variabili (c_1, c_2) precedentemente introdotte, convertendo poi i risultati nella coppia (η, u) e fissando su di essi le condizioni al contorno a ogni step temporale: trasmissive a entrambi i lati per η , trasmissive a sinistra e riflettive a destra per u . Per consentire l'integrazione su tutto il dominio spaziale sono state introdotte due *ghost cells* a entrambi gli estremi della griglia.

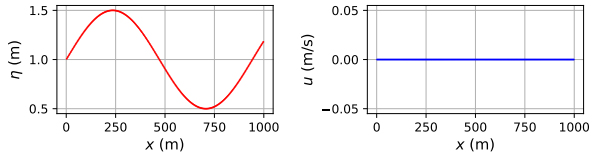
Le due condizioni iniziali scelte rappresentano una funzione sinusoidale e un'onda a gradino, e sono riportate in Fig.1. In entrambi i casi, il sistema iniziale è in quiete. Le espressioni numeriche sono le seguenti:

$$\eta_1(x, 0) = 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{150}x\right)$$

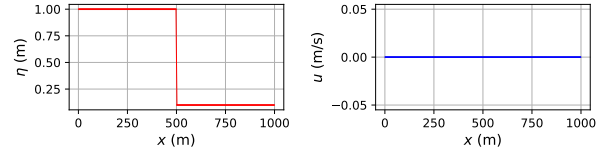
$$u_1(x, 0) = 0$$

$$\eta_2(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 500 \\ 0.1 & \text{se } x \geq 500 \end{cases}$$

$$u_2(x, 0) = 0$$



(a) Condizione iniziale sinusoidale

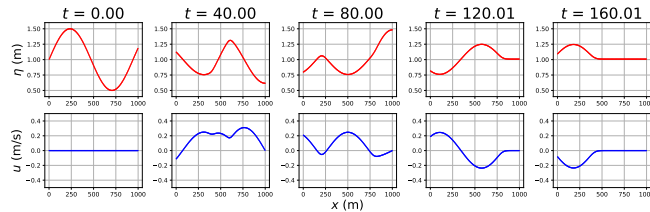


(b) Condizione iniziale a gradino

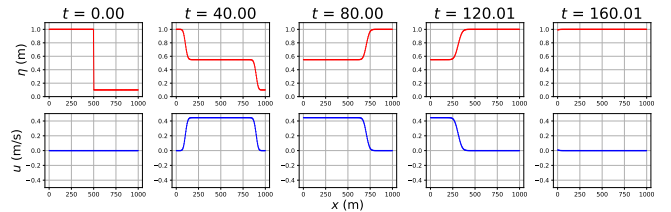
Figura 1: Condizioni iniziali su superficie libera e velocità

2 Risultati

Le equazioni Shallow Water sono state integrate per un sistema monodimensionale con estensione orizzontale $L = 1000$ m, altezza $H = 10$ m, passo di griglia $\Delta x = 5$ m e numero di Courant $c = 0.8$, fino a $t = 200$ s. Dalla definizione di c si ottiene $\Delta t = 0.404$ s. In Fig.2a e Fig.2b è riportato lo stato del sistema a diversi istanti temporali per le due condizioni iniziali scelte.



(a) Condizione iniziale sinusoidale



(b) Condizione iniziale a gradino

Figura 2: Evoluzione dei campi di η e u nel tempo per le due condizioni iniziali scelte (integrazione tramite metodo di Godunov)

Come si può osservare, le due funzioni si propagano verso destra, vengono riflesse e si muovono poi verso sinistra, viaggiando al di fuori del dominio. Questo comportamento generale è visibile per tutti e tre i metodi di integrazione utilizzati. In Fig.3 sono riportate le soluzioni a un determinato istante temporale, confrontate per i tre metodi.

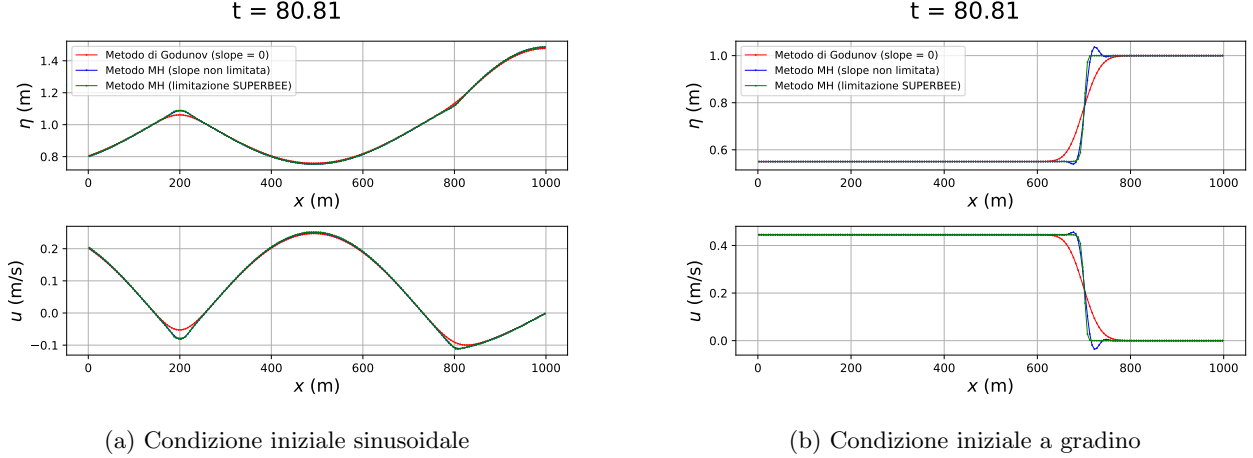


Figura 3: Soluzioni dell'integrazione per i tre metodi all'istante temporale $t = 80.81$.

In entrambi i casi in analisi si nota un generico accordo tra le soluzioni, specialmente nei punti in cui le funzioni non hanno forti gradienti o discontinuità. Per la soluzione sinusoidale (Fig.3a) si osserva una completa sovrapposizione tra i due metodi MH (a slope non limitata e con limitazione SUPERBEE); l'integrazione con il metodo di Godunov presenta invece una curvatura meno accentuata in presenza di massimi e minimi della funzione sia per η che per u . La differenza tra i tre metodi è maggiore nell'intorno della discontinuità della soluzione a gradino (Fig.3b): nel caso del metodo di Godunov essa presenta una maggiore gradualità, mentre i due metodi del secondo ordine riescono a mantenere meglio la forma della condizione iniziale; tuttavia, è presente un'oscillazione attorno al gradino nella soluzione del metodo MH non limitato. La differenza tra i due metodi del secondo ordine allo stesso istante temporale considerato in precedenza è riportata in Fig.4.

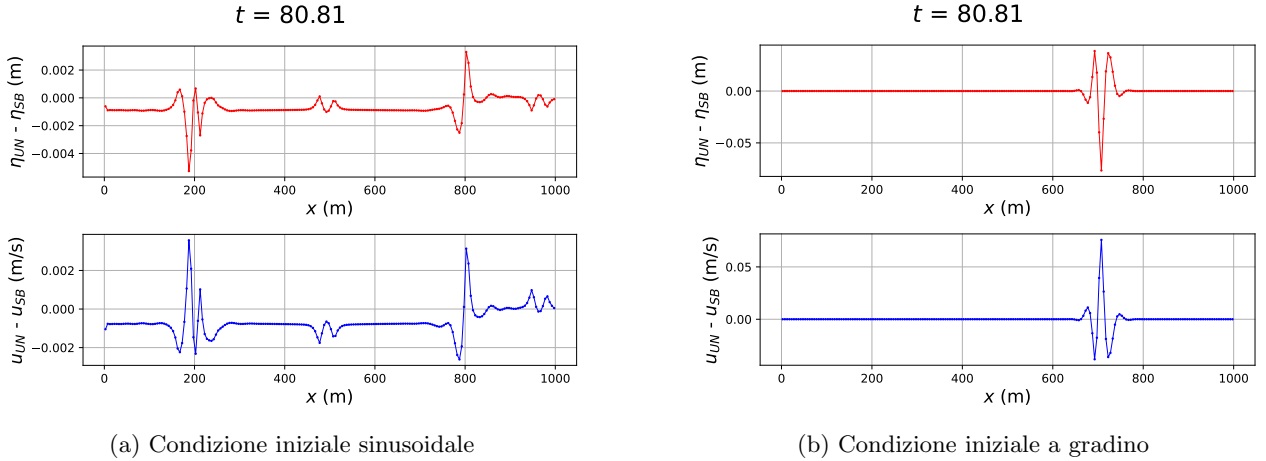


Figura 4: Differenza tra le soluzioni calcolate con il metodo MH non limitato (η_{UN} , u_{UN}) e con limitazione SUPERBEE (η_{SB} , u_{SB})

Si notano in entrambi i casi delle oscillazioni in corrispondenza dei punti di massimo e minimo per la soluzione sinusoidale (Fig.4a) e nell'intorno della discontinuità per la soluzione a gradino (Fig.4b). Come già accennato, queste oscillazioni derivano dall'integrazione con il metodo a slope non limitata, e il loro ordine di grandezza è diverso in base alla soluzione considerata: nel caso sinusoidale, le loro ampiezze in η (e u) sono dell'ordine di 10^{-3} m (e m/s) rispettivamente, per la soluzione a gradino di un ordine di grandezza superiore.

La stabilità computazionale dello schema è determinata dal criterio CFL precedentemente introdotto: se il numero di Courant c è maggiore di 1, la soluzione integrata nel tempo diverge. Per lo studio della soluzione instabile si è deciso di utilizzare $c = 1.1$, che corrisponde a uno step temporale $\Delta t = 0.555$ s per fissato $\Delta x = 5$ m.

In Fig.5 è riportata l'evoluzione del sistema instabile.

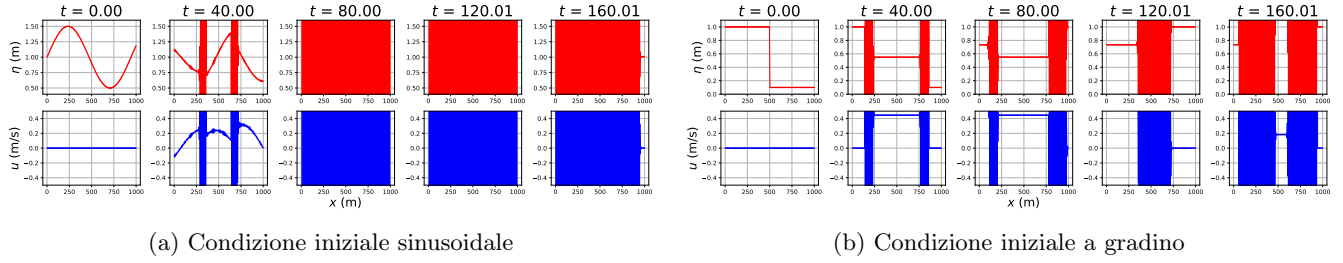


Figura 5: Evoluzione dei campi di η e u nel tempo per le due condizioni iniziali scelte, per $c = 1.1$ (integrazione tramite metodo di Godunov)

Come si può osservare, la soluzione numerica inizialmente presenta oscillazioni molto ampie soprattutto in presenza dei punti di curvatura (Fig.5a) e di discontinuità (Fig.5b); la divergenza poi si estende a tutto il dominio negli step successivi. In Fig.6 le soluzioni sono rappresentate a un istante temporale fissato (vicino all'inizio dell'integrazione).

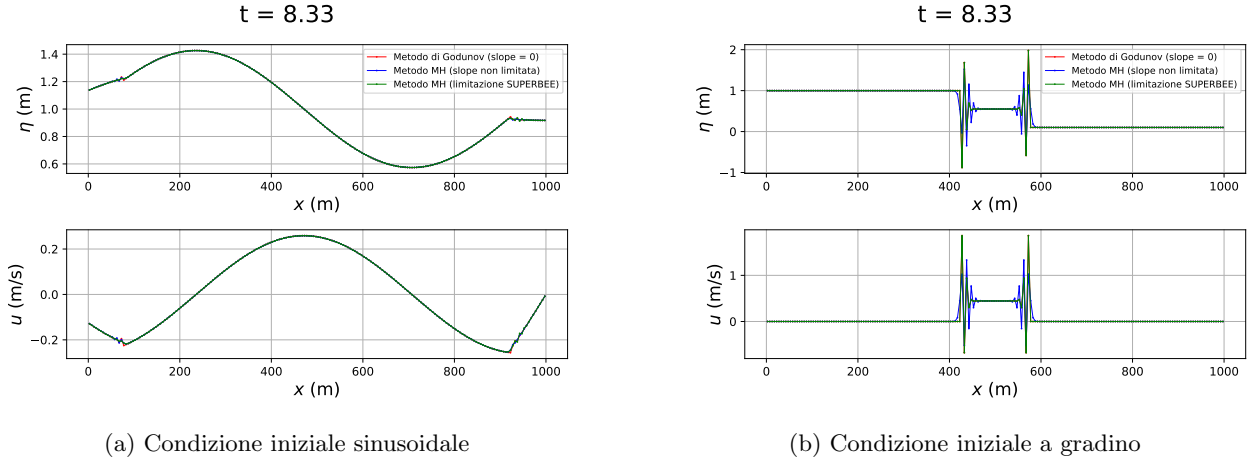


Figura 6: Soluzioni dell'integrazione per i tre metodi all'istante temporale $t = 8.33$, per $c = 1.1$

A questo istante temporale, la soluzione sinusoidale presenta ancora una certa stabilità nel dominio e delle piccole oscillazioni in corrispondenza dei punti di massimo e minimo locale. Le ampiezze sono molto maggiori nelle discontinuità della soluzione a gradino, specialmente per entrambe le integrazioni con il metodo MH.

3 Conclusioni

Le equazioni Shallow Water rappresentano l'evoluzione della perturbazione della superficie libera η e della velocità orizzontale u per un sistema fluidodinamico semplificato. Le due equazioni possono essere disaccoppiate introducendo due nuove variabili (c_1 , c_2) che sono ottenute dalla combinazione lineare di η e u : in questo modo si ottengono due equazioni lineari avvelte. L'integrazione numerica è stata effettuata sfruttando un metodo al primo ordine di accuratezza (Godunov) e un metodo al secondo ordine (MUSCL-Hancock) senza limitatore di slope e con limitazione SUPERBEE. Le soluzioni sono state ottenute per due condizioni iniziali differenti, di forma sinusoidale e a gradino.

In generale si osserva che il metodo di Godunov è in grado di rappresentare l'evoluzione generale del sistema, ma presenta una maggiore gradualità della soluzione in presenza di forti gradienti e discontinuità: questo è principalmente dovuto alla caratteristica dissipatività dei sistemi del primo ordine.

Il metodo MUSCL-Hancock è più rappresentativo della condizione iniziale nei punti indicati; tuttavia, in assenza di un limitatore di slope, la soluzione oscilla significativamente in questi punti. Questo comportamento è visibile in entrambi i casi ma è più evidente in prossimità della discontinuità a gradino. L'introduzione della limitazione SUPERBEE permette di eliminare tali oscillazioni.

Il sistema è stato poi integrato in condizione di violazione del criterio CFL, e quindi di instabilità numerica. La divergenza è significativa e inizialmente è concentrata soprattutto nei punti di curvatura e discontinuità, per poi propagarsi su tutto il dominio. Questo mostra la sensibilità dei metodi numerici alla sussistenza del criterio CFL: pur essendo cambiato leggermente il valore dello step temporale Δt , la soluzione è profondamente diversa.