



## Trabajo Práctico N°3

75.29 - Teoría de Algoritmos I

Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires

1er. Cuatrimestre 2017

Federico Brasburg, *Padrón Nro. 96.653*  
federico.brasburg@gmail.com

Pablo Rodrigo Ciruzzi, *Padrón Nro. 95.748*  
p.ciruzzi@hotmail.com

Andrés Otero, *Padrón Nro. 96.604*  
oteroandres95@gmail.com

23 de junio de 2017

# Índice

<b>1. Programación Dinámica</b>	<b>3</b>
1.1. Cómo correrlo . . . . .	3
<b>2. Algoritmos Randomizados</b>	<b>3</b>
2.1. Cómo correrlo . . . . .	3
<b>3. Algoritmos Aproximados</b>	<b>3</b>
3.1. Cómo correrlo . . . . .	3
<b>4. Código</b>	<b>4</b>

## 1. Programación Dinámica

### 1.1. Cómo correrlo

## 2. Algoritmos Randomizados

La idea del algoritmo de contracción de Karger es encontrar el corte mínimo en un grafo  $G = (V, E)$ . Esto es, dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , donde  $A \cap B = \emptyset$  y  $A \cup B = V$ . El tamaño del corte  $(A, B)$  se define como el número de aristas  $e = (u, v)$  con  $u \in A$  y  $v \in B$ , o viceversa y lo que se busca es que éste sea mínimo.

Este algoritmo es un caso de randomización de tipo **Monte Carlo**, ya que tiene una probabilidad de que el mismo falle en encontrar la solución correcta.

El algoritmo de contracción en sí consiste en elegir una arista  $e = (u, v)$  al azar, y “fusionar” los vértices creando un *supernodo*, el cual tiene todas las aristas de  $u$  y  $v$  (Salvo la arista entre ellos). Es importante recalcar que el grafo debe permitir múltiples aristas entre dos vértices, ya que al fusionar es importante que se mantengan la cantidad de aristas (Nuevamente, salvo la que es entre  $u$  y  $v$ ). Este proceso se debe repetir hasta que el grafo sólo conste de 2 vértices (Notar que en cada “iteración” eliminamos un nodo), los cuales se corresponderán con el corte  $(A, B)$ , y la cantidad de aristas en el grafo será el tamaño del mismo.

Lo más interesante de esto es que su probabilidad de falla es relativamente alta, pero puede ser reducida ampliamente mediante múltiples (en cantidad polinomial) corridas. Yendo a los números, la probabilidad de que el algoritmo sea correcto con una única corrida es de al menos  $\binom{n}{2}^{-1}$  (con  $n = |V|$ ), lo cual para un  $n$  grande es un número muy chico (Es decir, su probabilidad de falla es como mucho  $1 - \binom{n}{2}^{-1}$ ). Pero si el mismo se corre  $\binom{n}{2}$  veces, se reduce a que se puede fallar en encontrar el corte mínimo con una probabilidad  $(1 - \binom{n}{2}^{-1})^{\binom{n}{2}} \leq \frac{1}{e}$ . Aún más, si se corre  $\binom{n}{2} * \ln n$  veces, esta probabilidad desciende a  $e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$ , lo cual es más que aceptable para un  $n$  grande.

### 2.1. Cómo correrlo

Correr el algoritmo con una instancia del grafo con  $n$  vértices y  $2*n$  aristas es tan simple como correr `python karger.py n` desde la carpeta `src` del proyecto.

## 3. Algoritmos Aproximados

### 3.1. Cómo correrlo

## 4. Código

creador\_grafos.py

```
from random import randint
from grafo import Grafo

# Crea un grafo de n vertices y 2*n aristas, junto con el archivo correspondiente
# Importante: No correr el algoritmo para  $n \leq 4$ , ya que para esos  $n$ ,  $2*n > n*(n-1)/2$ 
# (Aristas en grafo completo), por lo que no existe grafo posible con n vertices y 2*n aristas
def crearGrafoConexo(n, nombre):
    if 2 * n > n * (n - 1) / 2:
        print 'No_es_posible_correr_el_algoritmo_ya_que_2*n_>_n*(n-1)/2_para_n_', n
        return
    cantAristas = 2 * n

    arch = open(nombre, 'w')
    arch.write(str(n) + "\n")
    arch.write(str(cantAristas) + "\n")
    # Escribo la primer arista, que siempre se va a corresponder con la 0 <-> 1
    arch.write(str(0) + "_" + str(1) + "\n")
    # Creo el grafo inicial, junto con la primera arista
    g = Grafo()
    g.agregar_vertice(0)
    g.agregar_vertice(1)
    g.agregar_arista_no_dirigida(0, 1)

    # Primero creo un grafo conexo de n vertices y n-1 aristas, agregando de a 1 por vez
    # y creando una arista entre el y cualquiera de los anteriores
    for i in range(2, n):
        verticeRandom = randint(0, i - 1)
        arch.write(str(i) + "_" + str(verticeRandom) + "\n")
        g.agregar_vertice(i)
        g.agregar_arista_no_dirigida(i, verticeRandom)
    # Despues genero las n+1 aristas restantes de manera aleatoria, teniendo en cuenta
    # que no se creen aristas repetidas
    i = 0
    while i <= n:
        verticeRandom1 = randint(0, n - 1)
        verticeRandom2 = randint(0, n - 1)
        if verticeRandom1 != verticeRandom2 and not g.son_vecinos(verticeRandom1,
            verticeRandom2):
            arch.write(str(verticeRandom1) + "_" + str(verticeRandom2) + "\n")
            g.agregar_arista_no_dirigida(verticeRandom1, verticeRandom2)
            i += 1
    arch.close()
    return g

# Crea un grafo completo con n vertices, junto con el archivo correspondiente
def crearGrafoCompleto(n, nombre):
    g = Grafo()
    for i in range(n):
        g.agregar_vertice(i)
    cantAristas = n * (n - 1) / 2
    arch = open(nombre, 'w')
```

```

arch.write(str(n) + "\n")
arch.write(str(cantAristas) + "\n")
for i in range(n):
    for j in range(i + 1, n):
        g.agregar_arista_no_dirigida(i, j)
        arch.write(str(i) + "_" + str(j) + "\n") # Crea una arista del vertice i al vertice j
arch.close()
return g

```

grafo.py

```

PRIMERO = 0
SEGUNDO = 1
TERCERO = 2

class Arista(object):
    def __init__(self, id1, id2, peso):
        self.id1 = id1
        self.id2 = id2
        self.peso = peso

    def peso(self):
        return self.peso

    def __str__(self):
        return str(self.id1) + "_a_" + str(self.id2) + "_peso_" + str(self.peso)

class Grafo(object):
    def __init__(self):
        """Crea un Grafo dirigido (o no) con aristas pesadas (o no)"""
        self.aristas = {}
        self.vertices = []

    def devolver_aristas(self):
        """Devuelve las aristas del grafo"""
        return self.aristas

    def devolver_aristas_list(self):
        lista = []
        for i in self.aristas:
            for j in self.aristas[i].values():
                lista += j
        return lista

    def devolver_vertices(self):
        return self.vertices

    def devolver_cant_vertices(self):
        """Devuelve los nodos del grafo"""
        return len(self.vertices)

    def agregar_vertice(self, id):
        """Agrega un vertice que se identifica con un nombre y un ID"""
        self.vertices.append(id)

```

```

self . aristas [id] = {}

def agregar_arista_no_dirigida(self, id1, id2, peso=0):
    """Agrego una arista no dirigida entre los nodos con id1 y id2"""
    self . agregar_arista_dirigida(id1, id2, peso)
    self . agregar_arista_dirigida(id2, id1, peso)

def agregar_arista_dirigida(self, id1, id2, peso=0):
    """Agrego una arista dirigida entre los nodos con id1 y id2"""
    arista = Arista(id1, id2, peso)
    if id2 in self . aristas [id1]:
        self . aristas [id1][id2].append(arista)
    else:
        self . aristas [id1][id2] = [arista]

def son_vecinos(self, id1, id2):
    """Devuelve si id1 y id2 son vecinos"""
    try:
        if self . aristas [id1][id2]:
            return True
        return False
    except:
        return False

def peso_arista(self, id1, id2):
    """Devuelve el peso de la arista entre id1 e id2"""
    if self . son_vecinos(id1, id2):
        return self . aristas [id1][id2].peso
    raise ValueError

def borrar_vertice(self, id):
    self . vertices . remove(id)
    del self . aristas [id]

def borrar_arista_no_dirigida(self, id1, id2):
    self . borrar_arista_dirigida(id1, id2)
    self . borrar_arista_dirigida(id2, id1)

def borrar_arista_dirigida(self, id1, id2):
    if self . son_vecinos(id1, id2):
        del self . aristas [id1][id2]

def adyacentes(self, id):
    """Pide un id de un nodo existe y devuelve una lista de los id de sus adyacentes"""
    adyacentes = []
    for arista in self . aristas [id]:
        adyacentes.append(arista)
    return adyacentes

def _leer(self, nombre, dirigido=False):
    """Lee un grafo (dirigido o no) de un archivo con nombre"""
    try:
        mi_arch = open(nombre)
        cant_nodos = int(mi_arch.readline())
        for i in range(0, cant_nodos):
            self . agregar_vertice(i)

```

```

cant_aristas = int(mi_arch.readline())
for i in range(0, cant_aristas):
    linea = mi_arch.readline()
    numeros = linea.split("_")
    peso = 0
    if len(numeros) > 2:
        peso = numeros[TERCERO].rstrip('\n')
    else:
        numeros[SEGUNDO] = numeros[SEGUNDO].rstrip('\n')
    if dirigido:
        self.agregar_arista_dirigida(int(numeros[PRIMERO]), int(numeros[SEGUNDO]), peso)
    else:
        self.agregar_arista_no_dirigida(int(numeros[PRIMERO]), int(numeros[SEGUNDO]), peso)
mi_arch.close()
return True
except:
    return False

def leer_dirigido(self, nombre):
    self._leer(nombre, True)

def leer_no_dirigido(self, nombre):
    self._leer(nombre, False)

```

karger.py

```

from creador_grafos import crearGrafoConexo
from creador_grafos import crearGrafoCompleto
from parser import Parser
from os.path import isfile
from random import randint
from math import log
import sys

"""Correr como python karger.py n, con n la cantidad de vertices del grafo"""

class Karger(object):
    def __init__(self, n):
        path = '../out/grafosKarger.txt'
        # Verifico que el archivo, si ya esta creado, sea de la misma cantidad de nodos
        if isfile(path) and int(open(path).readline()) == n:
            p = Parser()
            self.grafo = p.leer_grafo_no_dirigido(path)
        else:
            self.grafo = crearGrafoConexo(n, path)
            # self.grafo = crearGrafoCompleto(n, path)
            # Aca se guardara el set al que pertenezcan
            self.corte = {i: [i] for i in range(self.grafo.devolver_cant_vertices())}

    def contraer(self, id1, id2):
        for destino, aristas in self.grafo.devolver_aristas()[id2].items():
            # Me fijo que cantidad de aristas hay entre ellos
            cantidad_aristas = len(aristas)
            # Borro las aristas originales del grafo

```

```

        self.grafo.borrar_arista_no_dirigida(id2, destino)
        # Si la arista a agregar no es una arista entre id1 e id2, agrego tantas como saque
        if destino != id1:
            for _ in range(cantidad_aristas):
                self.grafo.agregar_arista_no_dirigida(id1, destino)
            # Borro el vertice que contraje, que se fusione con id1
            self.grafo.borrar_vertice(id2)
            # Actualizo el set al que pertenece el vertice id2
            self.corte[id1] += self.corte[id2]
            # Borro la key id2 del diccionario
            self.corte.pop(id2, None)

    def karger(self):
        if self.grafo.devolver_cant_vertices() == 2:
            return self.corte, len(self.grafo.devolver_aristas_list()) / 2
        aristas = self.grafo.devolver_aristas_list()
        aristaRandom = aristas[randint(0, len(aristas) - 1)]
        # De esta forma me aseguro que id1 siempre sea menor que id2
        self.contraer(min(aristaRandom.id1, aristaRandom.id2), max(aristaRandom.id1,
            aristaRandom.id2))
        return self.karger()

if len(sys.argv) != 2:
    print 'Se debe especificar el parametro n como argumento. _Correr_python_karger.py_10,_por_
        ejemplo.'
    exit()
n = int(sys.argv[1]) # Cantidad de vertices
combinatorio = float(n * (n - 1)) / 2
corte_minimo = []
aristas_minimas = 2 * n + 1
print int(combinatorio * log(n))
for i in range(int(combinatorio * log(n))):
    k = Karger(n)
    corte, cant_aristas = k.karger()
    if cant_aristas < aristas_minimas:
        aristas_minimas = cant_aristas
        corte_minimo = corte
print 'El corte_minimo encontrado es con', str(aristas_minimas), 'con probabilidad al menos', str
    (1 - (1 / float(n))), \
    'siendo el corte', corte_minimo

```

parser.py

```

from grafo import Grafo

CERO = 0
UNO = 1

class Parser(object):
    def leer_grafo_no_dirigido(self, nombre):
        """Lee un archivo de un grafo no dirigido sin peso"""
        try:
            grafo = Grafo()
            grafo.leer_no_dirigido(nombre)

```



```

        return grafo
    except:
        print "Ocurrio_un_error_leyendo_el_archivo_de_grafo_no_dirigido_" + nombre
        return False

def leer_grafo_dirigido(self, nombre):
    """Lee un archivo de un grafo dirigido sin peso"""
    try:
        grafo = Grafo()
        grafo.leer_dirigido(nombre)
        return grafo
    except:
        print "Ocurrio_un_error_leyendo_el_archivo_de_grafo_dirigido_" + nombre
        return False

```

pg.py

```

def compraVenta(a):
    if len(a) < 2:
        return []
    posMin = 0
    posMax = 1
    dif = a[posMax] - a[posMin]
    posMinActual = posMin
    for i in range(1, len(a)):
        if a[i] >= a[posMinActual]:
            if (a[i] - a[posMinActual]) > dif:
                dif = a[i] - a[posMinActual]
                posMin = posMinActual
                posMax = i
        else:
            posMinActual = i
    return [posMin, posMax]

```

pg\_test.py

```

import random
from pg import compraVenta

def minMax(a):
    if len(a) == 2:
        return a
    min = a[0]
    max = a[1]
    for i in range(2, len(a)):
        if max < a[i]:
            max = a[i]
    before = minMax(a[1:])
    if (before[1] - before[0]) > (max - min):
        return before
    return [min, max]

def generadorArray(n):
    a = []

```

```

    for _ in range(n):
        a.append(random.randint(1, 1000))
    return a

bien = 0
n = 1000
inicial = 2
for i in range(inicial, n):
    a = generadorArray(i)
    rta = compraVenta(a)
    rtaCuadrada = minMax(a)
    if (a[rta[1]] - a[rta[0]]) == (rtaCuadrada[1] - rtaCuadrada[0]):
        bien += 1
    else:
        print a
        print rtaCuadrada
        print rta
print bien == (n - inicial)

```

subset\_sum.py

```

import random
import pickle

class SubsetSum(object):
    def levantar_problema(self, nombre_archivo):
        listaNumeros = []
        with open(nombre_archivo, 'rb') as f:
            listaNumeros = pickle.load(f)
        return listaNumeros

    def generar_problema_aleatorio(self, nombre_archivo, n, numMin, numMax):
        listaNumeros = []
        for x in range(0, n):
            listaNumeros.append(random.randint(numMin, numMax))
        with open(nombre_archivo, 'wb') as f:
            pickle.dump(listaNumeros, f)

    def recortar_lista(self, listaNumeros, d):
        if not listaNumeros:
            return
        # print "\nrecortar lista con d",d
        listaNumeros = sorted(listaNumeros)
        n = len(listaNumeros)
        last = listaNumeros[0]
        nuevaListaNumeros = [listaNumeros[0]]
        # print "ultimo",last
        for i in range(1, n):
            # print "comparacion",listaNumeros[i],last*(1+d)
            if listaNumeros[i] > (last * (1 + d)):
                nuevaListaNumeros.append(listaNumeros[i])
                last = listaNumeros[i]
            # print "\n"
        return nuevaListaNumeros

```

```

def resolverProblema(self, nombre_archivo, t, e):
    listaNumeros = self.levantar_problema(nombre_archivo)
    if not listaNumeros:
        return
    n = len(listaNumeros)
    L = range(0, n + 1)
    L[0] = [0]
    for i in range(1, n):
        # print "paso",i
        # print listaNumeros[i-1]
        nuevalista = map(lambda x: x + listaNumeros[i - 1], L[i - 1])
        L[i] = list(set(L[i - 1] + nuevalista))
        # print "lista ",L[i]
        L[i] = self.recortar_lista(L[i], e / (2 * n))
        # print "lista recortada",L[i]
        L[i] = [j for j in L[i] if j <= t]
        # print "lista filtrada ",L[i]
    L[n] = sorted(L[n - 1])
    z = L[-1][-1]
    return z

```

subset\_sum\_test.py

```

import time
from subset_sum import SubsetSum

s = SubsetSum()
print s
for i in range(0, 3):
    for j in range(1, 6):
        n = 10 ** i * j
        s.generar_problema_aleatorio("../files/subsetSum" + str(n) + ".txt", n, -100, 100)
        start = time.time()
        print s.resolverProblema("../files/subsetSum" + str(n) + ".txt", n * 50, 0.5), n * 50
        end = time.time()
        print "tamano", n, "tiempo", end - start
n = 1000
s.generar_problema_aleatorio("../files/subsetSum" + str(n) + ".txt", n, -100, 100)
start = time.time()
print s.resolverProblema("../files/subsetSum" + str(n) + ".txt", n * 50, 0.5), n * 50
end = time.time()
print "tamano", n, "tiempo", end - start

```