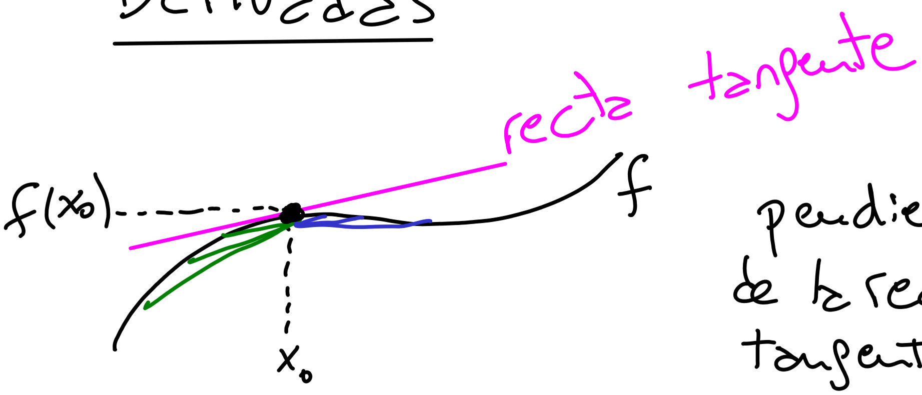
Derivadas



pendiente de la recta tangente $= f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)$$

¿Cómo calculo la recta tangente? $y = ax + b$

- $a = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
- pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, o sea

$$y = a x + b$$

$$f(x_0) = a \cdot x_0 + b$$

Ejemplo: $f(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad x_0 = 1$

La clase pasada calcularon $f'(1) = 4$.

O sea calcularon

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - \overbrace{f(1)}^{1^2+2.1+1=4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) + 1 - 4}{h}$$

$$= \cdots = 4.$$

• ¿Cuánto da $f'(2)$?

Deberíamos calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - \overbrace{f(2)}^{2^2+2.2+1=9}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(2+h)^2}^{(2+h)(2+h)} + 2(2+h) + 1 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2^2} + 2.2.h + h^2 + \cancel{4} + 2h + \cancel{1} - \cancel{9}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+6)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h+6 = \boxed{6}$$

Em general, cuánto vale $f'(x_0)$ para un x_0 cualquiera

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 + 2(x_0+h) + 1 - (x_0^2 + 2x_0 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h^2 + \cancel{2x_0} + 2h + \cancel{1} - \cancel{x_0^2} - \cancel{2x_0} - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 \cdot h + h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x_0 + h + 2)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x_0 + h + 2$$

$$= \boxed{2x_0 + 2}$$

Entonces para cualquier valor x_0 que me pida sé que $f'(x_0) = 2x_0 + 2$

$x_0 = 1$ ✓
$x_0 = 2$ ✓

<u>Definición</u>: FUNCIÓN DERIVADA

Dada una función f consideramos la función f' que para cada x contiene la información de la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x, f(x))$.

Por ejemplo antes calculamos que si $f(x) = x^2 + 2x + 1$

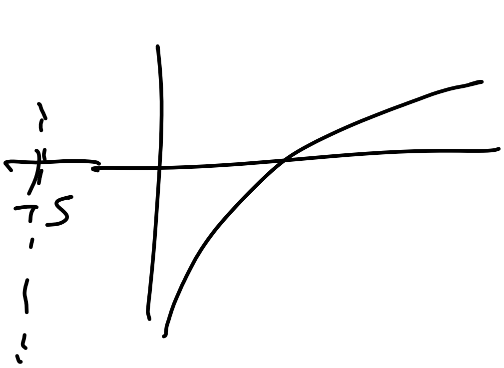
$\Rightarrow f'(x) = 2x + 2$

¿Quién es el dominio de $f'(x)$?

- En el ejemplo ~~Dom f'~~ $= \mathbb{R}$ $=$ ~~Dom f~~.
- En general

$$\text{Dom} f' = \left\{ \begin{array}{l} \text{valores de } x \text{ para} \\ \text{los cuales} \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \subseteq \text{Dom} f$$

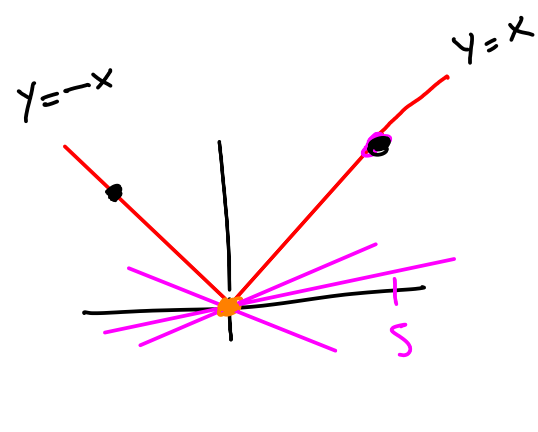
(el límite existe y es finito)



¿tiene sentido preguntarse $\ln'(-5)$? NO

pues $-5 \notin \text{Dom}$

$\boxed{\text{ejemplos}}$



a) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$x_0 = 0 \quad \text{Dom} f = \mathbb{R}$

¿$f'(0)$? Tengo que calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$ depende de si $h>0$ o $h<0$

Calculo los 2 límites lateral

- $\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(h)}^{=h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+} 1 = \boxed{1}$

$0 \leftarrow h$

$h>0$

- $\lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(h)}^{=-h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^-} -1 = \boxed{-1}$

$h \rightarrow 0$

$h<0$

Como los límites laterales $\Rightarrow$ $\boxed{f'(0) \text{ no existe}}$

Esto es un ejemplo de que $\mathrm{Dom}\, f' \subsetneq \mathrm{Dom}\, f$

b) Calcular, si existe, $f'(3)$ para

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-5 & \text{si } x \geq 3 \\ 2x+1 & \text{si } x<3 \end{cases}$$

tengo que calcular

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{\underbrace{f(3+h)}_{\text{depende de } h} - \underbrace{f(3)}_{3^2+3-5=7}}{h} \longrightarrow$$ tengo que ver los límites lateral.

- $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(\underbrace{3+h}_{<3}) - 7}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(3+h)+1-7}{h}$$
  $(h<0)$
  $$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{6}+2h+\cancel{1}-\cancel{7}}{h}$$
  $$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}$$
  $$= \lim_{h \to 0^-} 2 = \boxed{2}$$

- $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(\underbrace{3+h}_{>3}) - 7}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h)^2+(3+h)-5-7}{h}$$
  $(h>0)$
  $$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{9}+6h+h^2+\cancel{3}+h-\cancel{5}-\cancel{7}}{h}$$
  $$= \lim_{h \to 0^+} 6+h+1 = \boxed{7}$$

Por lo tanto, <u>NO</u> existe $f'(3)$. (porque $2 \neq 7$)

Calculemos algunas funciones derivadas

1) $f(x) = \ln(x)$ $\quad$ Dom $f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$k \cdot \ln(a) = \ln(a^k)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h}\right)$$

$\frac{x+h}{x} = \frac{x}{x} + \frac{h}{x} = 1 + \frac{h}{x}$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\left(\underbrace{1 + \boxed{\frac{h}{x}}}_{\to 1}\right)^{1/h}\right)$$

$\frac{h}{x} \to 0$, $\quad 1/h \to \infty$

Rdo

$$\lim_{\square\to 0} (1+\square)^{1/\square} = e$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\underbrace{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}_{\to e}{}^{\cdot \frac{1}{x}}\right)$$

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{\frac{h}{x}}$$

$$= \ln\left(e^{1/x}\right) = \boxed{\frac{1}{x}}$$

Obs $\text{Dom}\ \frac{1}{x} = \mathbb{R} - \{0\}$

pero $\text{Dom}\ (\ln(x))' = (0, +\infty)$

O sea $\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $\text{Dom}\ f = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$\to 0$ $\qquad$ $\to 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h) \cdot x}}{h}$$

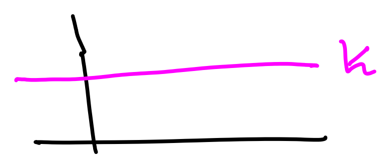
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{Dom } f' = \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

TABLA DE DERIVADAS

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
e^x	e^x
k	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$



$a \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo

- $\boxed{(\sqrt{x})'} = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2 x^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

- $(x^5)' = 5 \cdot x^4$

- $\boxed{(x)' = 1 \cdot x^0 = 1}$

Propiedades de la derivación

Si $k \in \mathbb{R}$ y f y g son funciones derivables

1) $(f+g)' = f' + g'$ $\qquad \left(\operatorname{sen}(x)+x^2\right)' = \overbrace{\cos(x)+2x}^{(\operatorname{sen}(x))' + (x^2)'}$ $\qquad x'$

2) $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ $\qquad (2x)' = 2 \cdot 1$

Comentario: con esto sabemos derivar cualquier polinomio.

$$(x^2+2x+1)' = (x^2)' + (2x)' + (1)'$$
$$= 2x + 2(x)' + 0$$
$$= 2x + 2 \cdot 1 + 0$$
$$= 2x + 2$$

✓ (chequear antes)

TODAVÍA NO SÉ DERIVAR MULTIPLICACIONES, DIVISIONES NI COMPOSICIONES

ES MENTIRA:

1) $\left(x^2 \cdot \operatorname{sen}(x)\right)' \cancel{=} 2x \cdot \cos(x)$

2) $\left(\dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x)}\right)' \cancel{=} \dfrac{2x}{\cos(x)}$

3) $\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)' \cancel{=} \cos(2x)$

Reglas de derivación

$\longrightarrow \left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\longrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

$\longrightarrow \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Regla de la cadena