Sucesiones

↳ Álgebra de límites

↳ indeterminaciones → $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, ∞^0, 1^∞, 0^0, $0 \cdot \infty$ ✓

$\frac{\infty}{\infty}$ → FACTOR COMÚN

$\infty - \infty$ → CONJUGADO

- ¿Qué pasa con "$0 \cdot \infty$"?

"$0 \cdot \infty$" $= \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ "="

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\to \infty} = \frac{\overbrace{n^2}^{\to\infty}}{\underbrace{n+1}_{\to\infty}}$$

$$n+1 = \frac{1}{\frac{1}{n+1}}$$

Propiedad del sandwich: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que $c_n \le a_n \le b_n$ (para todo n a partir de un momento)

$c_i \le a_i \le b_i$

$$\begin{array}{cccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_i & \cdots \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_i & \cdots \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_i & \cdots
\end{array}$$

y $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L$

Entonces el $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe y vale L.

Observaciones:

para todo.

- $\underbrace{n}_{c_n} \leq \underbrace{n+1}_{a_n} \leq \underbrace{n+2}_{b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

- $\underbrace{1-\frac{1}{n}}_{\to 1} \leq \underbrace{1}_{\to 1} \leq \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

tres sucesiones distintas que converjan a lo mismo.

$\boxed{\text{Aplicación}}$

Por ejemplo:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$ ¿?

$n \to \infty$

$\operatorname{sen}(8000) = 0,98\ldots \qquad \operatorname{sen}(9000) = 0,61\ldots$

$\operatorname{sen}(10000) = -0{,}3$ $\quad \operatorname{sen}(11000) = -0{,}95 \ldots$

$\operatorname{sen}(12000) = -0{,}77$

(pensar) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n)$ no existe.

Conclusión: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}$ no sé cómo calcularlo (ni sé si existe)

Idea: usar sandwich

función real

Como sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ vale que $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\underbrace{\boxed{\frac{-1}{n}}}_{c_n} \leq \underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}}}_{a_n} \leq \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{b_n} \quad (n>0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$c_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $\qquad b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Entonces por sándwich $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}$ existe y también vale 0.

Más en general

Propiedad: si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n acotada

entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

"cero · acotado = cero"

En el ejemplo: $\dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n} = \underbrace{\boxed{\dfrac{1}{n}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\operatorname{sen}(n)}}_{\text{ACOTADA}} \to 0$

Ej: Calcular, si existen,

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + 3\cos(n)}{n^2+5}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\overset{a_n}{\frac{1}{n^2+5}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left[(-1)^n + 3\cos(n)\right]}_{\text{¿ESTÁ ACOTADO?}}$$

- $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

- $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \xrightarrow[\times 3]{} -3 \leq 3\cos(n) \leq 3$

$$\Longrightarrow \quad -4 \leq \underbrace{(-1)^n + 3\cos(n)}_{b_n \text{ está acotada}} \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

"0. Acot"

Luego $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+5} \cdot \left[(-1)^n + 3\cos(n)\right] = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \boxed{\operatorname{sen}(n)} \cdot \boxed{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$

Acot entre -1 y 1

¿ $\to 0$?

CA: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ "$\infty - \infty$" $= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)}_{\to 0}$$

(X)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}^{(a\ -\ b)} \cdot \overbrace{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}^{(a+b)}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\cancel{n}+1}^{a^2} - \overbrace{\cancel{n}}^{b^2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\boxed{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}_{\to +\infty}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n) \cdot \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \overset{\text{"0.Acot"}}{=} 0$$

<u>Pregunta</u>: ¿Cómo calculo, si existe,

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\operatorname{sen}(n)}_{\substack{\text{Acotado} \\ \text{entre } -1 \text{ y } 1}} \cdot \underbrace{\left(5+\frac{1}{n}\right)}_{\to 5} \quad ?$$

USAR SANDWICH <u>NO</u> SIRVE

Si bien es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{-\left(5+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow \; -5} \leq \operatorname{sen}(n) \cdot \left(5+\frac{1}{n}\right) \leq \underbrace{5+\frac{1}{n}}_{\downarrow \; 5}$$

Def: • una sucesión se dice monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

• Análogamente monótona decreciente si $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

teorema de la sucesiones monótonas

A) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y Acotada $\Rightarrow$ existe $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$

B) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y NO Acotada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(Análogos con decreciente)

Recuerdo

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & 0<r<1 \\ 1 & r=1 \\ +\infty & r>1 \end{cases}$$

Prop: si $r > 1$, $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = +\infty}$

Demostración:

Veamos que $a_n = \frac{r^n}{n}$ es monótona creciente y NO acotada (y luego, por el teorema visto tendríamos que el límite es $+\infty$)

1) quiero ver que es creciente

$$a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{r^{\cancel{n}+1}}{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{\cancel{r^n}}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{r}{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \quad r \overset{?}{\geq} \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Como $r > 1$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r > 1 + \frac{1}{n_0}$ $\Longrightarrow$ $r \geq 1 + \frac{1}{n}$ a partir de un momento.

$\Longrightarrow$ $\frac{r^n}{n}$ es creciente.

2) a_n NO es acotada.

Si fuera acotada (como ya sé que es creciente) tendría límite en $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\overbrace{a_{n+1}}^{\to L}}{\underbrace{a_n}_{\to L}} = \boxed{1}$$

Pero $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{r^{n+1}}{n+1}}{\frac{r^n}{n}}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{r^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} r \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \boxed{r}$$

Pero entonces $r = 1$ ~~Absurdo~~! $(r > 1)$

$\Rightarrow \frac{r^n}{n}$ NO está acotada.

Ejemplo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$$

$2^n \to \infty$ Prop

$n \to \infty$

IND $\frac{\infty}{\infty}$

Propiedad: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

1) ojo en $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n}$ tengo IND ∞^0.

2) La demostración usa que $\frac{r^n}{n} \to +\infty$

Calcular, si existe,

1) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2+2} \rightarrow \text{IND } \infty^0$ $\quad \underbrace{(n^2+2)}_{\to +\infty}{}^{\overbrace{1/n}^{\to 0}}$

$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}$

$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\underbrace{1 + \frac{2}{n^2}}_{\to 1}} \rightarrow 1^0 = 1$

$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{1 + \frac{2}{n^2}}}_{\to 1} = \boxed{1}$ ✓

2) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n + 7^n} \rightarrow \text{IND } \infty^0$

$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{7^n \cdot \left(\frac{n}{7^n} + 1\right)}$

$\rightarrow 1^0 = 1$

$= \lim_{n \to +\infty} \cancel{\sqrt[n]{7^n}} \cdot \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n}{7^n}}_{\to 0} + 1} = \boxed{7}$

(pensar con la prop $\frac{r^n}{n}$)

3) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{3^n + n}{n+1} \to \text{IND } \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}\left(\frac{3^n}{n} + 1\right)}{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\overbrace{\boxed{\frac{3^n}{n}}}^{\to +\infty} + 1}{\underbrace{1 + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}_{\to 1}} = \boxed{+\infty}$$