ANÁLISIS 66.

INDETERMINACIÓN "1^{∞}"

ESTUDIAREMOS UN CASO PARTICULAR DE ESTA INDETERMINACIÓN. NOS CONCENTRAREMOS EN EL SIGUIENTE LÍMITE ESPECIAL:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (\text{nro. de Euler}).$$

MÁS GENERALMENTE, SI $(a_n)_{n \geq 1}$ ES UNA SUCESIÓN TAL QUE $a_n \xrightarrow[n \to]{} +\infty$, ENTONCES:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e. \qquad (\alpha).$$

FRENTE A UNA INDETERMINACIÓN DEL TIPO "1^{∞}", INTENTAREMOS REESCRIBIR A LA SUCESIÓN COMO UNA PARECIDA A LA DE MÁS ARRIBA.

Ej 1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{7n}\right)^{7n} = e$, PUES $7n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$.

Ej 2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n} \longrightarrow 1^{\infty}$ ¡indet!

¡OJO! EN (α), EL EXPONENTE Y EL DENOMI-

NADOR DEL SEGUNDO TÉRMINO DE LA BASE DEBEN SER <u>IGUALES</u>, PARA LOGRAR ESTO, TRASTOCAMOS EL EXPONENTE.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n\cdot\frac{3}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e}\Bigg]^{\frac{1}{3}} =$$

$$= e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

Ej 3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n+1}$ $\quad$ base $\longrightarrow 1$, exponente $\longrightarrow \infty$; ¡indet!

REESCRIBIMOS:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{5}}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{5}}\right)^{\frac{n^2}{5}\cdot\frac{5}{n^2}(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{5}}\right)^{\frac{n^2}{5}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e}\Bigg]^{\overbrace{\frac{5(n+1)}{n^2}}^{\longrightarrow ?}} = (*)$$

CAUX: $\lim_{n \to \infty} \frac{5(n+1)}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n+5}{n^2} \begin{array}{l} \to \infty \\ \to \infty \end{array}$ ¡indet!

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n+5}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(5+5/n)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{5 + \overbrace{5/n}^{\to 0}}{n} = 0 .$$

VOLVEMOS: $(*) = e^0 = 1$ -

Ej 4) $\lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{2n^3+1}{2n^3-3}\right)}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 1}^{n^4} \begin{array}{l} \longrightarrow \infty \\ \longrightarrow 1 \end{array}$ ¡indet!

(¿POR QUÉ?)

SI QUEREMOS LLEVAR LA EXPRESIÓN $\frac{2n^3+1}{2n^3-3}$ A ALGO DE LA FORMA $1 + \frac{1}{a_n}$, NECESITAMOS HACER APARECER EL TÉRMINO 1. UNA FORMA DE HACER ESTO ES LA SIGUIENTE:

$$\frac{2n^3+1}{2n^3-3} = \frac{2n^3-3+3+1}{2n^3-3} =$$

$$= \frac{2n^3-3+4}{2n^3-3} = \frac{2n^3-3}{2n^3-3} + \frac{4}{2n^3-3} =$$

$$= 1 + \frac{4}{2m^3-3} = 1 + \frac{1}{\frac{2m^3-3}{4}}.$$

CON ESTA REESCRITURA, VOLVEMOS AL LÍMITE:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m^3+1}{2m^3-3}\right)^{m^4} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2m^3-3}{4}}\right)^{m^4} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2m^3-3}{4}}\right)^{\frac{2m^3-3}{4}\cdot\frac{4}{2m^3-3}\cdot m^4} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{2m^3-3}{4}}\right)^{\frac{2m^3-3}{4}}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} e}\Bigg]^{\underbrace{\frac{4m^4}{2m^3-3}}_{\to\,?}} = (*)$$

$\xrightarrow[m\to\infty]{} e$, PUES $\frac{2m^3-3}{4}\xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty$.

CAUX $\lim_{m\to\infty}\frac{4m^4}{2m^3-3}\;\begin{matrix}\longrightarrow \infty\\ \longrightarrow \infty\end{matrix}\;\frac{\infty}{\infty}$ ¡indet!

$$\lim_{m\to\infty}\frac{4m^4}{m^3\left(2-\frac{3}{m^3}\right)} = \lim_{m\to\infty}\frac{\overbrace{4m}^{\to\infty}}{\underbrace{2-\frac{3}{m^3}}_{\to 2}} = +\infty.$$

ENTONCES: $(*) = +\infty$. //

Ej 5) $\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{2n+5}{2n-1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}\right)^{3n+1} \begin{matrix}\xrightarrow{\quad} \infty \\ \xrightarrow{\quad} 1\end{matrix}$ ¡indet!

(¿POR QUÉ?)

REESCRIBIMOS LA BASE:

$$\frac{2n+5}{2n-1} = \frac{2n-1+1+5}{2n-1} = \frac{2n-1+6}{2n-1} =$$

$$= \frac{2n-1}{2n-1} + \frac{6}{2n-1} = 1 + \frac{1}{\frac{2n-1}{6}}$$

VOLVEMOS AL LÍMITE:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{2n-1}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{6}}\right)^{3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{6}}\right)^{\frac{2n-1}{6}\cdot\frac{6}{2n-1}(3n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{6}}\right)^{\frac{2n-1}{6}}\right]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e}^{\underbrace{\frac{18n+6}{2n-1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 9}} = e^{9}$$

(¿POR QUÉ?)

EN OCASIONES, UNA REFORMULACIÓN DEL LÍMITE (9) PUEDE VENIR BIEN:

$$(\alpha)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e \quad, \text{ SI } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty .$$

LLAMAMOS $b_n = \dfrac{1}{a_n}$. COMO $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ADEMÁS, $a_n = \dfrac{1}{b_n}$. REESCRIBIMOS (α):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+b_n\right)^{\frac{1}{b_n}}=e \quad, \text{ SI } b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

FACTORIAL.

DEF. SEA $n \in \mathbb{N}$. EL FACTORIAL DE n, $n!$, SE DEFINE:

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1.$$

Ej: $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720.$

$3! = 3.2.1 = 6.$

$1! = 1.$

CASO ESPECIAL SE EXTIENDE LA DEFINICIÓN AL CERO: $0! = 1.$

PROP: $n! = n.(n-1)!$.

CRITERIO DE D'ALEMBERT

QUEREMOS CALCULAR $\lim_{n \to \infty} a_n$.

CALCULAMOS PRIMERO $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$.

ENTONCES:

i) SI $L > 1$, ó L ES $+\infty$. $\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n| = +\infty$.

ii) SI $L \in [0,1) \longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

iii) SI $L = 1$, EL CRITERIO NO DECIDE.

Ej 1) CALCULAR $\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+2}}{n!}$.

USAMOS D'ALEMBERT: $a_n = \frac{3^{n+2}}{n!} \; (>0)$

CALCULAMOS:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{3^{(n+1)+2}}{(n+1)!}}{\frac{3^{n+2}}{n!}} = \frac{3^{(n+1)+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^{n+2}} =$$

$$= 3^{n+1+2-n-2} \cdot \frac{n!}{(n+1)\,n!} = \frac{3}{n+1}.$$

ENTONCES, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 = L$

COMO $L=0$, EL CRITERIO DICE QUE

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}}{n!} = 0$. //

CRITERIO DE CAUCHY

QUEREMOS CALCULAR $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

CALCULAMOS PRIMERO $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$.

ENTONCES:

i) SI $L\in[0,1) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

ii) SI $L>1$ Ó L ES $+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

iii) SI $L=1$, EL CRITERIO NO DECIDE.

Ej 2) CALCULAR $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+2}}{n}$.

USAMOS CAUCHY: $a_n = \frac{5^{n+2}}{n}\ (>0)$.

$$\sqrt[n]{\frac{5^{n+2}}{n}} = \sqrt[n]{\frac{5^n \cdot 5^2}{n}} = \frac{\sqrt[n]{5^n}\sqrt[n]{5^2}}{\sqrt[n]{n}} =$$

$$= \frac{5 \overbrace{\sqrt[n]{25}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 5 = L$$

LUEGO, COMO $L = 5 > 1$, $\lim_{n \to \infty} |a_n| =$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{5^{n+2}}{n} = +\infty .$$

Ej 3) CALCULAR $\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)!}{3n}$.

USAMOS D'ALEMBERT: $a_n = \frac{(n+2)!}{3n}$ (>0).

CALCULAMOS:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1+2)!}{3(n+1)}}{\frac{(n+2)!}{3n}} = \frac{(n+1+2)!}{3(n+1)} \frac{3n}{(n+2)!} =$$

$$= \frac{(n+2+1)(n+2)!}{(n+2)!} \frac{3n}{3n+3} = (n+3)\frac{3n}{3n+3} =$$

$$= \frac{3n^2+9n}{3n+3} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

POR EL CRITERIO, $\lim_{n \to \infty} |a_n| =$

$$= \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)!}{3n} = +\infty .$$

Ej 4) Sea $(b_n)_{n\geq 1}$ la sucesión dada por

$$b_n = \frac{8^{n+1}}{a^{3n}} \frac{(n-1)^2}{n}, \text{ donde } a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Analizar $\lim_{n\to\infty} b_n$ para cada valor posible de a.

Usamos Cauchy:

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{8^{n+1}}{a^{3n}}\frac{(n-1)^2}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{8^{n+1}}{|a|^{3n}}\frac{(n-1)^2}{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{8^n\, 8\, (n-1)^2}}{\sqrt[n]{|a|^{3n}\, n}} = \frac{8\sqrt[n]{8}\ \sqrt[n]{(n-1)^2}}{|a|^3\ \sqrt[n]{n}}$$

Tenemos: i) $\sqrt[n]{8} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

ii) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

iii) $\sqrt[n]{(n-1)^2} = \sqrt[n]{n^2-2n+1} =$

$$= \sqrt[n]{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Entonces:

$$\sqrt[n]{|b_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{8}{|a|^3} = L$$

SABEMOS QUE:

(•) SI $L \in [0,1)$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$

(•) SI $L > 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} |b_n| = +\infty$.

(•) SI $L = 1$, EL CRITERIO NO DECIDE, Y TENDREMOS QUE ESTUDIAR EL CASO A MANO.

CALCULAMOS:

(•) $L < 1$ sii $\dfrac{8}{|a|^3} < 1$ sii $8 < |a|^3$

sii $2 < |a|$ sii $\underline{a < -2 \text{ ó } a > 2}$.

$\downarrow$

$f(x) = x^3$ CRECIENTE

[SI $a < -2$ ó $a > 2$, $L < 1$, POR LO QUE $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.]

(•) $L > 1$ sii $\dfrac{8}{|a|^3} > 1$ sii $8 > |a|^3$

sii $2 > |a|$ sii $-2 < a < 2$

$\downarrow$

$f(x) = x^3$ CRECIENTE.

LUEGO, SI $a \in (-2;0) \cup (0;2)$, $L > 1$, POR LO CUAL $\lim\limits_{n \to \infty} |b_n| = +\infty$. ¿QUÉ PASA CON $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$?

EL RESULTADO DEPENDE DEL SIGNO DE a:

→ SI $a \in (0,2)$, $|b_n| = b_n$, POR LO CUAL $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$.

→ SI $a \in (-2,0)$, (b_n) ALTERNA EN SIGNO. EN ESTE CASO, EL LÍMITE NO EXISTE.

(•) $L = 1$ sii $\dfrac{8}{|a|^3} = 1$ sii $|a|^3 = 8$ sii $a = \pm 2$.

A MANO:

$a = 2$ $\quad b_n = \dfrac{8^{n+1}(n-1)^2}{2^{3n}\, n} = \dfrac{8^n\, 8\,(n-1)^2}{8^n\, n} =$

$= \dfrac{8(n-1)^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ (¿POR QUÉ?)

$a = -2$ $\quad b_n = \dfrac{8^{n+1}(n-1)^2}{(-2)^{3n}\, n} = \dfrac{8^n\, 8\,(n-1)^2}{(-8)^n\, n} =$

$= \dfrac{(-1)^n\, 8\,(n-1)^2}{n}$ ⟹ EL LÍMITE NO EXISTE ($|b_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ y (b_n) ALTERNA EN SIGNO).

SUBSUCESIONES

DADOS $(a_n)_{n\geq 1}$ UNA SUCESIÓN Y $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ UNA SUCESIÓN CRECIENTE DE ÍNDICES, DIREMOS QUE $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ ES UNA SUBSUCESIÓN DE $(a_n)_{n\geq 1}$.

Ej: $a_n = (-1)^n$.

$\Rightarrow (a_{2n})_{n\geq 1}, (a_{2n+1})_{n\geq 1}, (a_{3n})_{n\geq 1}$

SON SUBSUCESIONES DE (a_n).

a_{2n}: $1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots$

a_{2n+1}: $-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad \dots$

a_{3n}: $-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad \dots$

PROP: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ SI Y SÓLO SI

$a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$, PARA TODA SUBSUCESIÓN (a_{n_k}) DE (a_n).

OBS: ESTO SERVIRÁ PARA VER QUE CIERTOS

LÍMITES NO EXISTEN.

Ej: $a_n = (-1)^n$

$\Rightarrow (a_{2n})$ y (a_{2n+1}) son subsucesiones de (a_n)

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n} = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \\ a_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n \to \infty]{} -1 \end{array}\right\} \neq.$$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n \to \infty} a_n$. //

NOTA: EN EL EJEMPLO 4 (DE D'ALEMBERT / CAUCHY), PODEMOS USAR ESTE ARGUMENTO PARA MOSTRAR LA INEXISTENCIA DE CIERTOS LÍMITES (TAREA).