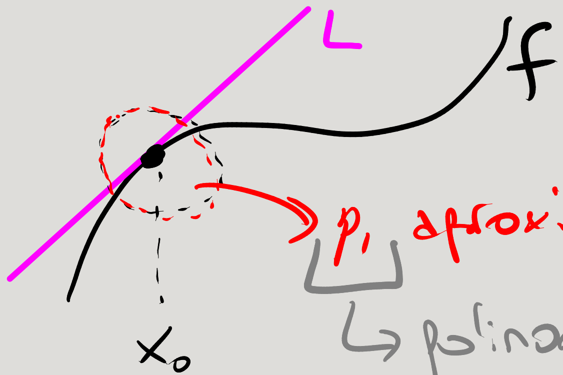
Polinomio de taylor

Sabíamos → recta tangente al gráfico de f en el punto $\underbrace{(x_0, f(x_0))}_{P=}$



→ $\underbrace{p_1}$ aproxima "bien" a f. !

↳ polinomio de taylor de orden 1 de f en $x = x_0$. = recta tangente

$$\boxed{p_1(x) = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)}$$

p_1 cumple $\begin{cases} p_1(x_0) = f(x_0) \\ p_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$

El polinomio de Taylor de orden n de f centrado en $x = x_0$ es

$$p_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}.(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

← teorema de Taylor

- Existe el $p_n(x)$
- los coeficientes son estos.

$P_n(x)$ cumple:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n'(x_0) = f'(x_0) \\ P_n''(x_0) = f''(x_0) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

<u>Ejercicio</u> Dada f y x_0 calcular $P_n(x)$

Basta con calcular

$$P_n(x) = \boxed{f(x_0)} + \boxed{f'(x_0)}(x-x_0) + \frac{\boxed{f''(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{\boxed{f^{(n)}(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n$$

y con esos valores reemplazo en la ecuación de $p_n(x)$.

<u>Observaciones</u>

1) ¿$P_n(x)$ tiene grado n? NO (necesariamente)

Sabemos que tiene <u>a lo sumo</u> grado n.

Pero podría tener grado menor a n.

<u>Ejemplo</u>: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $x_0 = 0$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f'''(0) = -1$$

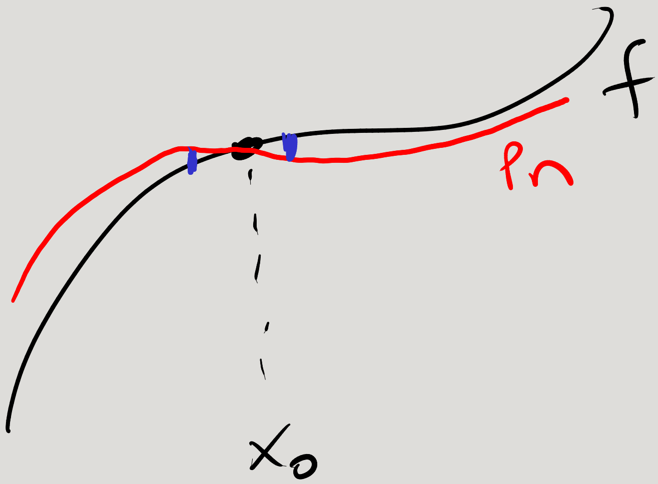
$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$f^{(5)}(0)$

se repite

- $P_1(x) = \overbrace{f(0)}^{0} + \overbrace{f'(0)}^{1} \cdot (x-0) = x$
- $P_2(x) = P_1(x) + \overbrace{\dfrac{f''(0)}{2!}}^{0}(x-0)^2 = x$ ← <u>NO</u> tiene grado 2
- $P_3(x) = P_2(x) + \overbrace{\dfrac{f'''(0)}{\underbrace{3!}_{6}}}^{-1}(x-0)^3 = x - \dfrac{1}{6}x^3$
- $P_4(x) = P_3(x) + \overbrace{\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}}^{0}(x-0)^4 = x - \dfrac{1}{6}x^3$ ← <u>NO</u> tiene grado 4
- $P_5(x) = P_4(x) + \overbrace{\dfrac{f^{(5)}(0)}{\underbrace{5!}_{120}}}^{1}(x-0)^5 = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5$

2) A medida que aumenta n, ¿P_n aproxima mejor a f? <u>NO</u>. ($P_3 = P_4$ y la aprox es igual).



Lo que va a pasar es que aproxima "posta" si $f = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \dots$
(final de la materia "series")

Resto de Taylor:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Notar que el error cometido al aproximar $f(x)$ por $p_n(x)$ es $|R_n(x)|$.

Ejemplo:

$$R_3(x) = \operatorname{sen}(x) - \underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}_{p_3(x)}$$

$$R_3(x) = \operatorname{sen}(x) - x + \frac{1}{6}x^3$$

¿cuánto vale aprox sen(0,1)?

$$\operatorname{sen}(0{,}1) \approx p_3(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{1}{6}(0{,}1)^3 = 0{,}09983\dots$$

¿Por cuánto le pifié?

$$\left|R_3(0{,}1)\right| = \left|\operatorname{sen}(0{,}1) - \left(0{,}1 - \tfrac{1}{6}(0{,}1)^3\right)\right|$$

la respuesta

no lo sé calcular

No podemos saber cuál es el error posta pero podemos acotarlo

teorema: si f es $n+1$ veces derivable y esas derivadas son continuas

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

con c un número entre x y x_0.

En el ejemplo: $n=3$ $x_0=0$ $x=0{,}1$

$$R_3(0{,}1) = \operatorname{sen}(0{,}1) - \left(0{,}1 - \tfrac{1}{6}(0{,}1)^3\right) = \frac{\boxed{f^{(4)}(c)}}{4!}(0{,}1-0)^4$$

$4! = 24$ $\left(\frac{1}{10}\right)^4$

$c \in (0\,;\,0{,}1)$

Sabemos que al aproximar $\operatorname{sen}(0{,}1)$ por $P_3(0{,}1) = 0{,}09983\ldots$ nos equivocamos en

$$|R_3(0,1)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{24}\cdot\frac{1}{10^4}\right|$$

Pero $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$

Entonces

$$|R_3(0,1)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(c)}{240000}\right|$$

para algún $c \in (0;0,1)$

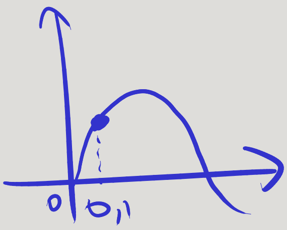
Quiero <u>Acotar</u> esto sin que dependa de c

$$|R_3(0,1)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(c)}{240000}\right| \leq \boxed{}$$

para todo c.

No lo sé

$\frac{\operatorname{sen}(0,1)}{240000}$ ← 1) Máximo de la función $\frac{\operatorname{sen}(c)}{240000}$ en $[0;0,1]$



2) 1 millón (quiero una cota menor)

3) Como $|\operatorname{sen}(c)| \leq 1$ siempre

Puedo decir que $\left|\frac{\operatorname{sen}(c)}{240000}\right| \leq \boxed{\frac{1}{240000}}$

es bueno.

Puedo afirmar que

$\operatorname{sen}(0,1) \approx 0,09983$ con un error de a lo sumo $\frac{1}{240000}$.

Ejercicio 11': aproximar $\sqrt[5]{e}$ con un error menor a 10^{-4}.

- $\sqrt[5]{e} = e^{\boxed{1/5}} \longrightarrow f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

quiero aproximar $f(1/5) = f(0{,}2)$

Observemos que $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots\ldots = e^x$

$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots\ldots = e^0 = \boxed{1}$

Es decir $P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$

y $\left|R_n\left(\frac{1}{5}\right)\right| = \left| \dfrac{e^c}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \right|$ con $c \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$

$e^c = f^{(n+1)}(c)$

El problema me pide hallar $n \in \mathbb{N}$ de manera que $\left|R_n(1/5)\right| < 10^{-4}$

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!\,5^{n+1}} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!\,5^{n+1}} \underset{\text{quiero}}{<} 10^{-4}$$

pero $\underbrace{\dfrac{e^c}{(n+1)!\,5^{n+1}}}_{g(c)} < \dfrac{e^{1/5}}{(n+1)!\,5^{n+1}} < \dfrac{e^1}{(n+1)!\,5^{n+1}} < \dfrac{3}{(n+1)!\,5^{n+1}}$

exp. es creciente

O sea busco $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{3}{(n+1)!\,5^{n+1}} < 10^{-4} = 0,0001$$

Pruebo: $n=1$ $\quad \frac{3}{2!\,5^2} = \frac{3}{50}$ ⊗

$n=2$ $\quad \frac{3}{3!\,5^3} = \frac{1}{250}$ ⊗

$n=5$ $\quad \frac{3}{6!\,5^6} = \frac{1}{240.5^6} = \dots < 0,0001$ ✓

Buscamos el primero $\boxed{n=4 \to \frac{3}{120.5^5} = 8.10^{-6}}$ ✓

$n=3 \to \frac{3}{24.5^4} = 0,0002$ ⊗.

Si aproximo $f(0,2) = \sqrt[5]{e}$ con

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

me aseguro un error $< 10^{-4}$. → me asegura 3 dígitos decimales

$$\Rightarrow f(0,2) \approx P_4(0,2) = 1 + 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2} + \frac{(0,2)^3}{6} + \frac{(0,2)^4}{24}$$

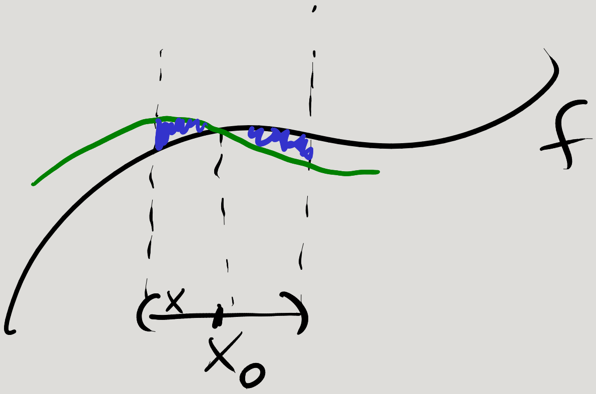
$$= 1,2214$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[5]{e} \approx 1,2214}$$

El valor exacto es $\sqrt[5]{e} = \boxed{1,221\,|\,40}\,27.....$

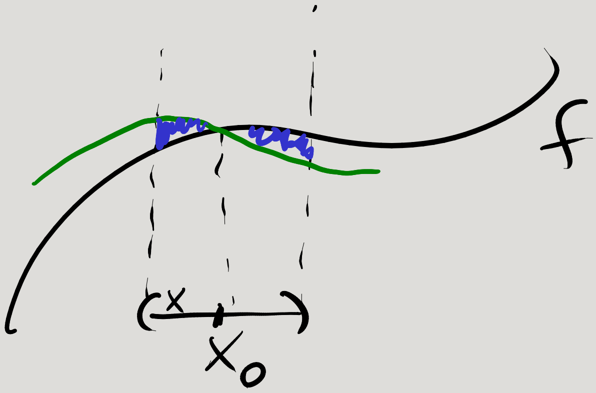
$\neq 9$ $\quad = 0$. YAPA

principio →



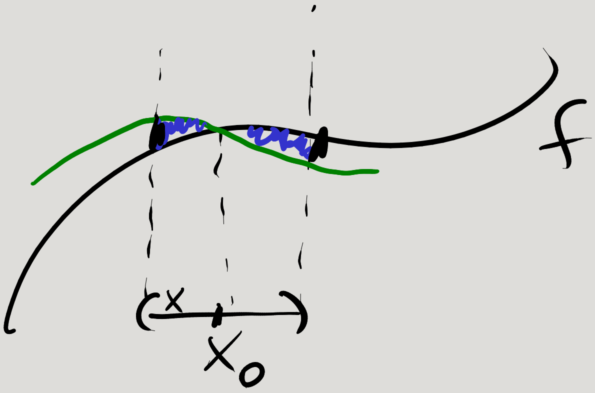
Dada f, x_0, x y n ¿en cuánto me equivoqué?

recién →



Dada f, x_0, x y el error hallar n.

NO LO VIMOS →



Dada f, x_0, n y el error ¿qué valores de x sirven?

Integrales

- Problema 1: ¿podemos deshacer la derivación?

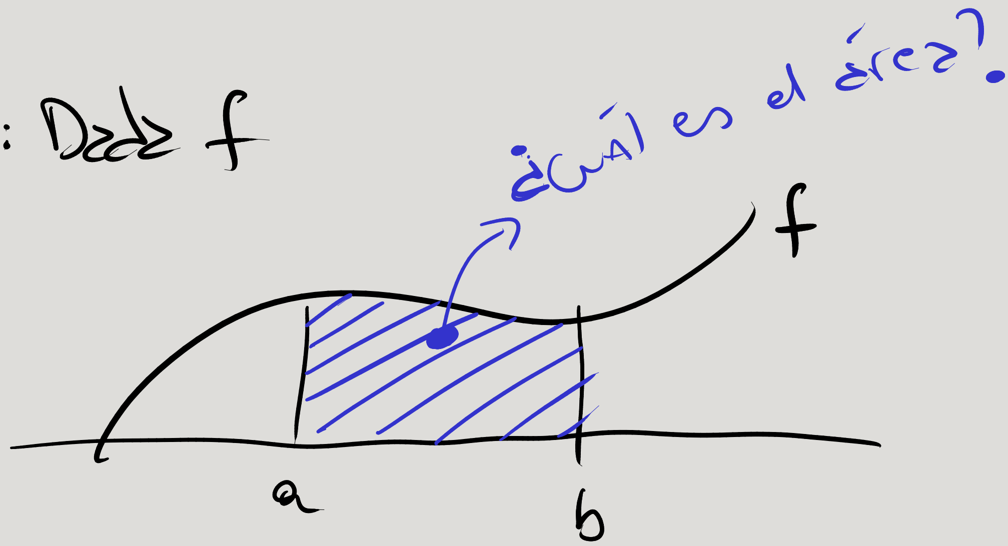
$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left] & f' \arrow[l, bend left, "?"] \end{tikzcd}$$

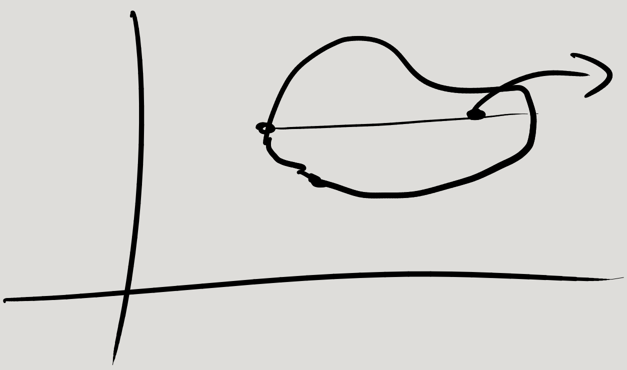
$$\begin{tikzcd} x+1 \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left, "?"] \end{tikzcd}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 \\ x^2+7 \\ x^2+5 \end{array}\right. \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xleftarrow{?} \end{array} 2x$$

podría volver a muchas funciones.

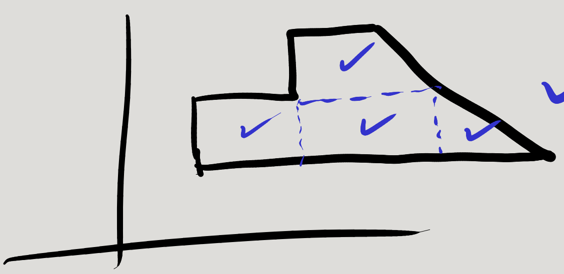
- Problema 2: Dada f





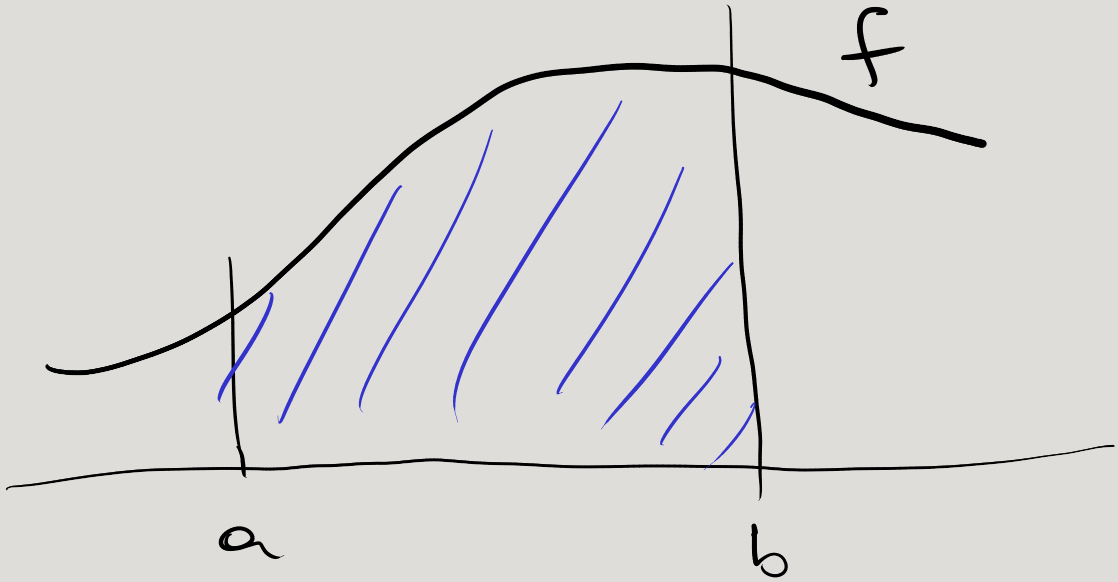
¿cuál es el área?

no lo sabemos hacer

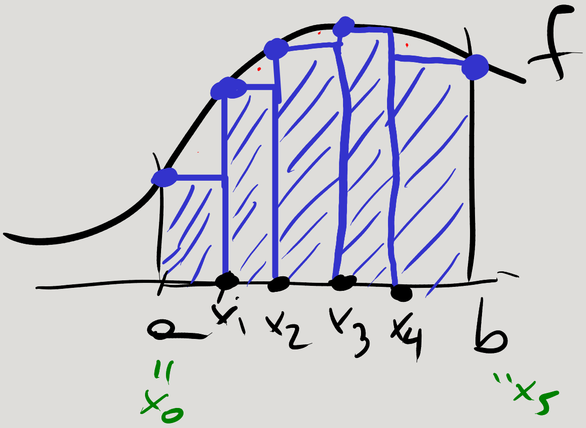


sí lo sé hacer.

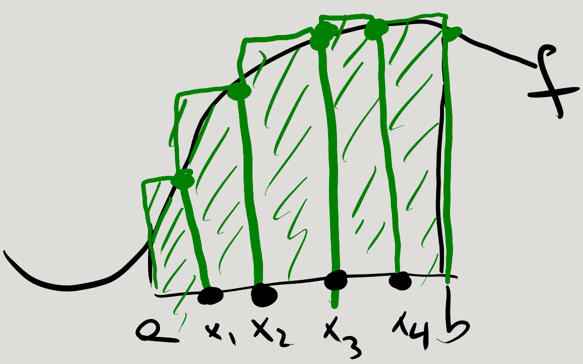
Problema del área:



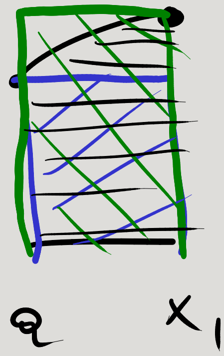
Aproximemos el área con rectángulos:



Área ▭ < Área f



Área ▭ > Área f

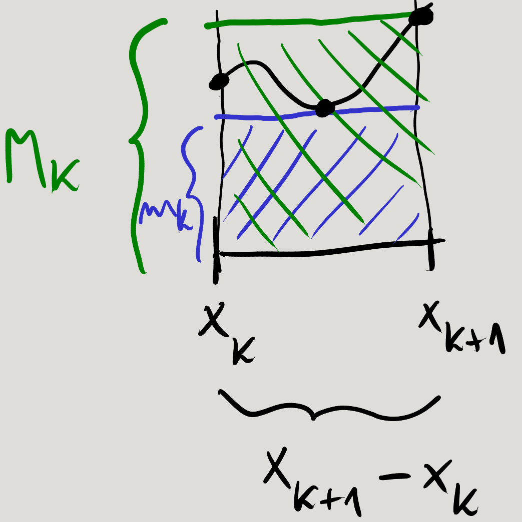


Área $\boxed{}$ < Área $\boxed{}$

A medida que la base de ese rectángulo es cada vez más chica la diferencia entre las áreas de los rectángulos se parecerán.

- Llamamos <u>partición</u> de $[a,b]$ a un conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i \leq x_{i+1}$ para Todo $1 \leq i \leq n-1$.

- El rectángulo de base x_k, x_{k+1} tiene altura



$M_K = \text{máx } f \text{ en } [x_K, x_{K+1}]$

$m_K = \text{mín } f \text{ en } [x_K, x_{K+1}]$

(existen porque f cont. Weierestrass)

El área del rectángulo será

$M_K \cdot (x_{K+1} - x_K)$

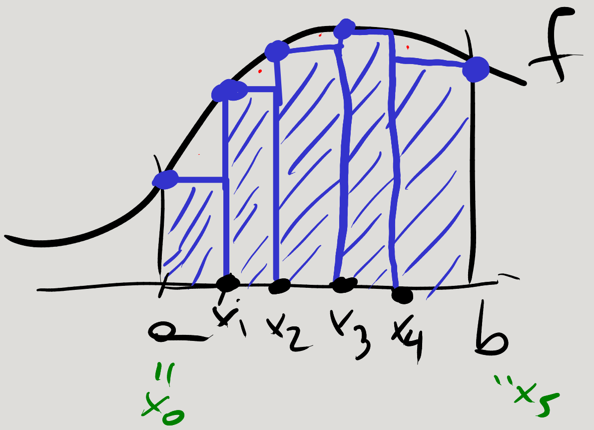
$m_K \cdot (x_{K+1} - x_K)$

• Si me dan una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (con $x_0 = a$, $x_n = b$)

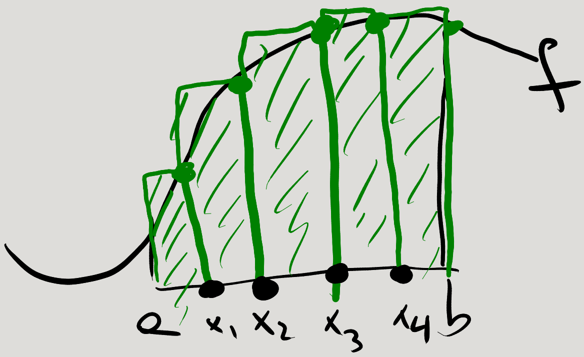
Llamaremos

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = \text{Área} \ \boxed{\ }$$

$$I_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) = \text{Área} \ \boxed{\ }$$



Área $\boxed{\ }$ < Área f



Área $\boxed{\ }$ > Área f

Finalmente llamaremos

Integral inferior → I_f = supremo $\{ I_p(f) : P \text{ partición} \}$

S_f = Ínfimo $\{ S_p(f) : P \text{ partición} \}$

↑ integral superior

Si $I_f = S_f$ diremos que f es <u>integrable</u> y la integral de f en $[a,b]$ valdrá

diferencial x.

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_f = S_f .$$

Área bajo la curva de f.