Hola a todxs!

Propongo un par de ejercicios. Tómense los primeros minutos de la clase para pensarlos. Aprovechen el tiempo para releer el Teorema de Cauchy. Empezamos 14:15.

1) $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

2) $$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+10} + 3x^{7/3}}{4x^2 + 3x - 1}$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1 - \cos(x)}$$

Teorema de Cauchy. Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivables en el intervalo abierto $(a;b)$. Entonces existe un valor $c \in (a;b)$ tal que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Si, además, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a;b)$, entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

1) $$\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{x^2-2x-3}^{\longrightarrow 0}}{\underbrace{x-3}_{\longrightarrow 0}} \quad \underline{\text{indet}}!$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-2x-3=0 \\ \underline{x=3} \qquad \underline{x=-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 3} x+1 = 4 \;//.$$

Paréntesis:

$$\underset{1}{\underline{a}}(x-r_1 (x-r_2))$$

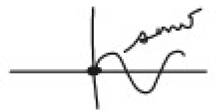
$$(x-r_1)(x-r_2) = x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2$$

$$= x^2 \underbrace{-(r_1+r_2)}_{\text{SUMA CAMBIADA DE SIGNO}}x + \underbrace{r_1r_2}_{\text{PRODUCTO}}.$$

$$\boxed{x^{1/3} = \sqrt[3]{x}}$$

2) $$\lim_{x \to -1} \frac{\overbrace{\sqrt{x+10}}^{\to 3} + \overbrace{3x^{1/3}}^{\to -3}}{\underbrace{4x^2 + 3x - 1}_{\to 0}} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \quad \underline{\text{indet!}}$$

$\hookrightarrow$ ¿Ideas?



3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1 - \underbrace{\cos(x)}_{\to 1}} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \quad \underline{\text{indet!}}$$

<u>Otro camino</u>: $\dfrac{\overline{1+\cos x}}{1+\cos x}$

<u>ID. PITAGÓRICA</u>

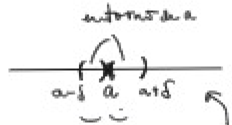
$\to$ $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$

$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x.$

dif. $\square$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\overline{1-\cos^2 x}}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+\cos x)\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{1-\cos x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 1 + \underbrace{\cos x}_{\to 1} = 2. \quad //$$



Teorema. Regla de L'Hospital: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un entorno de a, es decir, en un intervalo alrededor del punto, salvo quizás en el punto a, y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x) \neq 0$ cerca de a, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ y existe el $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Sea x fijo en el entorno de a, $x > a$.
Usamos Cauchy con F y G en $[a;x]$.

- F y G continuas en $[a;x]$
- F y G derivables en $(a;x)$.
- $G' \neq 0$ en $(a;x)$.

Demostración

Supongamos que f y g son continuas en $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$, definimos:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

F así definida resulta continua en el intervalo $(a-\delta,a+\delta)$ que contiene a a, pues $f(x)$ es continua en $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ y como $\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$, es continua en a.

Los mismos argumentos valen para la función G, con lo cual es continua en $(a-\delta,a+\delta)$.

Por el Teorema del valor medio $\exists\, x_1$ con $a < x_1 < x$ tal que $\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}$.

Tomando límite por derecha $x \to a^+$ "entonces" $x_1 \to a^+$ y $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

El límite por izquierda es igual, con lo cual, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Paso a paso:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)-\overbrace{F(a)}^{=0}}{G(x)-\underbrace{G(a)}_{=0}} =$$

$$= \lim_{x \to a^+} \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1 OTRA VEZ

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} "\frac{0}{0}"$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}}_{\text{VALE SI}} \overset{H}{=} \underbrace{\lim_{x \to 3} \frac{2x-2}{1}}_{\text{EXISTE}} = 4 \; /\!/$$

2) $$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+10} + 3x^{1/3}}{4x^2+3x-1} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} "\frac{0}{0}"$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+10}}}^{\to 1/6} + \overbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}^{\to 1}}{\underbrace{8x+3}_{\to -5}} = \frac{1/6 + 1}{-5}$$

$$= \frac{-7}{30} \; /\!/$$

CAUX $$\left(\sqrt{x+10}\right)' = \left((x+10)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(x+10)^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(x+10)'}_{1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \; /\!/$$

CAUX: $$\left(3x^{1/3}\right)' = 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \; /\!/$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(x) \cdot \cos(x)}{0-(-\sin(x))} =)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{\sin x} \cos x}{\cancel{\sin x}} = \lim_{x \to 0} 2\underbrace{\cos x}_{\to 1} = 2 \; /\!/$$

Enunciado Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y derivables, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Mediante el cambio de variable $x=\frac{1}{t}$, cuando $x\to\infty$, $t\to 0$.

Utilizando la regla de L'Hopital para el caso $t\to 0$ obtenemos $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} =$

$\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}$ y simplificando $\left(\frac{-1}{t^2}\right)$ queda $\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Con lo que queda demostrado.

Esto nos dice que podemos usar la Regla en límites con x tendiendo a infinito.

Enunciado Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un entorno de a alrededor del punto salvo quizás en a, y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x)\neq 0$ cerca de a, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ y existe el $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Tomamos un $x_1 \neq a$, por el Teorema de valor medio existe un x_0 para el cual se cumple

(A) $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ para $a<x<x_0<x_1$

Por otro lado, sacamos $f(x)$ factor común en el numerador y $g(x)$ en el denominador en el primer miembro obtenemos:

(B) $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1-f(x_1)/f(x)}{1-g(x_1)/g(x)}\right)$

Utilizando la ecuación (B), la ecuación (A) queda así:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1-f(x_1)/f(x)}{1-g(x_1)/g(x)}\right) = \left(\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right)$$

Al multiplicar ambos miembros por $\frac{1-(g(x_1)/g(x))}{1-(f(x_1)/f(x))}$, obtenemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-(g(x_1)/g(x))\,f'(x_0)}{1-(f(x_1)/f(x))\,g'(x_0)}$$

Supongamos que $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ tiene límite l cuando $x_0\to a$, o sea, $\lim_{x_0\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Elegimos x_1 suficientemente próximo a a para este cociente y como $1-(f(x_1)/f(x))$ y $1-(g(x_1)/g(x))$ tienden a 1, entonces, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l$ y podemos afirmar que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ que es lo que queríamos demostrar.

Esto nos dice que podemos usar la Regla en el caso de indeterminación tipo "infinito/infinito". Se puede usar en límites con x tendiendo a un número o a infinito.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\to 0}}{x^3} \begin{matrix}\to \\ \to\end{matrix} \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$ <u>indet!</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{3x^2} \begin{matrix}\to \\ \to\end{matrix} \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\operatorname{sen} x)}{6x} \begin{matrix}\to \\ \to\end{matrix} \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \quad //$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (*^{10})' = 10\,*^{9} \cdot *' \\ \operatorname{sen}(*)' = \cos(*) \cdot *' \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \end{array}}$$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{10}(x)}{\operatorname{sen}(x^{10})} \begin{matrix}\to \\ \to\end{matrix} \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$ indet.

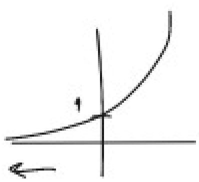
$(\operatorname{sen} x)^{10}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{10}(x)}{\operatorname{sen}(x^{10})} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{10}\,\operatorname{sen}^9(x)\cdot\cos x}{\cos(x^{10})\cdot\cancel{10}\,x^9} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^9(x)\,\cos(x)}{\underbrace{x^9\,\cos(x^{10})}_{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}_{\to 1}{}^{9}}_{\to 1} \; \underbrace{\frac{\overbrace{\cos(x)}^{\to 1}}{\cos(x^{10})}}_{\to 1} = 1. \quad //$$

6) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} \begin{matrix}\to \\ \to\end{matrix} \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$ <u>indet!</u>

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty. \quad //$$



$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{e^x}}{\underset{\searrow \infty}{x}} = 0$$ <u>NO HAY INDET</u> -

7) $\lim\limits_{t\to+\infty} \underbrace{t}_{\to+\infty} \underbrace{\ln\underbrace{\left(1+\frac{3}{t}\right)}_{\to 1}}_{\to 0}$ indet!

$$\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)\cdot t = \ln\left(1+\frac{3}{t}\right) : \frac{1}{t} = \frac{\overbrace{\ln(1+3/t)}^{\to 0}}{\frac{1}{t}} \quad \frac{1}{t} \to 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{3}{t}}\cdot\left(0-\frac{3}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+3/t}\left(-\frac{3}{\cancel{t^2}}\right)}{-\frac{1}{\cancel{t^2}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{3}{1+3/t}}{1}$$

$3\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{3}{1+\underbrace{\frac{3}{t}}_{\to 0}} = 3. \quad //$$

CAUX $\frac{1}{t} = t^{-1}$ $\quad (t^{-1})' = -1\cdot t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$

$$\left(\frac{1}{t}\right)' = \frac{1'\cdot t - 1\cdot t'}{t^2}$$

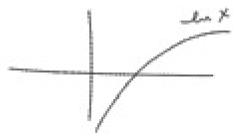
$$\left(\frac{3}{t}\right)' = (3t^{-1})' = 3\cdot(t^{-1})' = -\frac{3}{t^2}$$

8) $\overbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}}^{A}$ "∞^0" indet!

$y = x^{1/x}$

$\ln y = \ln(x^{1/x})$.

$\ln(y) = \frac{1}{x}\cdot\ln(x) = \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}$.



$$\underset{?}{\ln(A)} = \ln\left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(x^{1/x})\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \text{ indet!}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad //$$

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \\ \parallel \\ f\left(\underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} x}_{=x_0}\right) = f(x_0) \end{array}\right.$$

$\ln(A) = 0$

$\boxed{A=1}$