ANÁLISIS 66.

ASÍNTOTAS

(*) A. HORIZONTALES.

DEF: DIREMOS QUE LA RECTA DE ECUACIÓN $y=b$ ES ASÍNTOTA HORIZONTAL A DERECHA DEL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN f SI $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$. ANÁLOGAMENTE, LA RECTA DE ECUACIÓN $y=b$ ES A. HORIZONTAL A IZQUIERDA DEL GRÁFICO DE f SI $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$. SI UNA RECTA ES AH. A DERECHA Y A IZQUIERDA, LA LLAMAREMOS ASÍNTOTA HORIZONTAL (A SECAS).

Ej: i) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

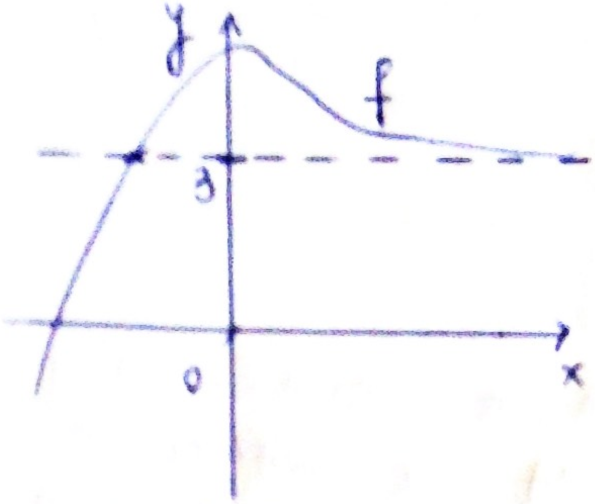
$\Rightarrow$ $y=0$ AH. DEL GRÁFICO DE f.

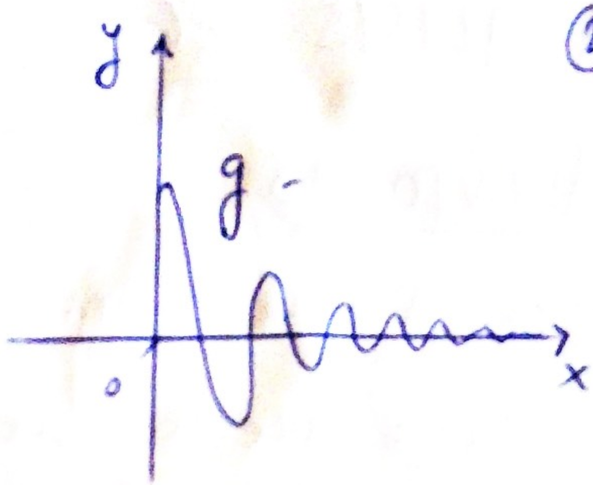
ii) $g(x) = e^x$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \; ; \; \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$\rightarrow$ $y=0$ A.H. A IZQUIERDA DEL GRÁFICO DE g.

Obs: EL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN PUEDE INTERSECAR A SUS ASÍNTOTAS HORIZONTALES:





(*) A. VERTICALES

DEF: DIREMOS QUE LA RECTA VERTICAL DE ECUACIÓN $x = a$ ES ASÍNTOTA VERTICAL DEL GRÁFICO DE f SI SE VERIFICA AL MENOS UNA DE LAS SIGUIENTES CONDICIONES: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$.

Obs: PARA VERIFICAR LAS CONDICIONES DE MÁS ARRIBA, NECESITAMOS CONOCER "a" DE ANTEMANO. COMO LAS ASÍNTOTAS VERTICALES IMPLICAN NECESARIAMENTE UNA DISCONTINUIDAD, LOS CANDIDATOS A ASINTOTA ESTARAN DADOS POR LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD Y LOS BORDES DEL DOMINIO.

Ej: i) $f(x) = \frac{1}{x}$. $\quad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

CANDIDATO.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \underbrace{x = 0 \ \text{A.V.}}$

(NO ES NECESARIO CALCULAR $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$).

EJEMPLO 1) SEA $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$. HALLAR $Dom(f)$, $I\nearrow(f)$, $I\searrow(f)$, EXTREMOS RELATIVOS Y ASÍNTOTAS. GRAFICAR.

¿$Dom(f)$? EL DENOMINADOR NO PUEDE ANULARSE.

$$x^2-4=0$$
$$(x-2)(x+2)=0$$
$$\underbrace{x=2} \lor \underbrace{x=-2}$$
$$Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}.$$

DERIVAMOS: $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-4)-(x^2-1)2x}{(x^2-4)^2} =$

(DESARROLLAR EL CUADRADO DEL DENOMINADOR NO ES NECESARIO).

$$= \frac{2x^3-8x-2x^3+2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{-6x}{(x^2-4)^2}$$

¿PUNTOS CRÍTICOS?

¿$Dom(f')$? NO PUEDE ANULARSE EL DENOM.

$$(x^2-4)^2=0$$
$$(x^2-4)(x^2-4)=0$$
$$x^2-4=0$$
$$\underbrace{x=\pm 2}$$
$$Dom(f')=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}.$$

¿Co(f')? $f'(x)=0$

$$\frac{-6x}{(x^2-4)^2}=0$$

$$-6x=0$$

$$\underbrace{x=0}$$

¿$x=2$ y $x=-2$ SON PUNTOS CRÍTICOS? NO,

PUES $2, -2 \notin Dom(f)$.

$x=0$ ← ÚNICO PUNTO CRÍTICO.

COMO f' ES CONTINUA EN SU DOMINIO, USAMOS BOLZANO.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	−	$\nexists$	−
f	↗	$\nexists$	↗		↘	$\nexists$	↘

$f'(x)=\frac{-6x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f'(-3)=\frac{-\cdot-}{+}=+$;

$f'(-1)=\frac{-\cdot-}{+}=+$; $f'(1)=\frac{-\cdot+}{+}=-$;

$f'(3)=\frac{-\cdot+}{+}=-$

ASÍNTOTAS

A.H. OBSERVAMOS QUE EVALUAR f EN UN NÚMERO Y EN SU OPUESTO ES INDISTINTO, i.e.

$f(x) = f(-x)$. ESTO SE DEBE A QUE LA VARIABLE APARECE EN LA FUNCIÓN ÚNICAMENTE ELEVADA AL CUADRADO. CONCLUIMOS QUE EL GRÁFICO DE f ES SIMÉTRICO RESPECTO DEL EJE Y. ESTO NOS AHORRARÁ UNAS CUENTAS.

⌈ PARÉNTESIS: A UNA FUNCIÓN TAL QUE $f(x) = f(-x)$, PARA TODO $x \in Dom(f)$, SE LE DICE FUNCIÓN PAR ⌋

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \underset{f \text{ PAR}}{=} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{1}{1} = 1$$

, PORQUE NUMERADOR Y DENOMINADOR TIENEN IGUAL GRADO.

ASÍ, $\underbrace{y = 1 \text{ ES A.H.}}$

A.V. CANDIDATOS $x = 2$ Y $x = -2$.

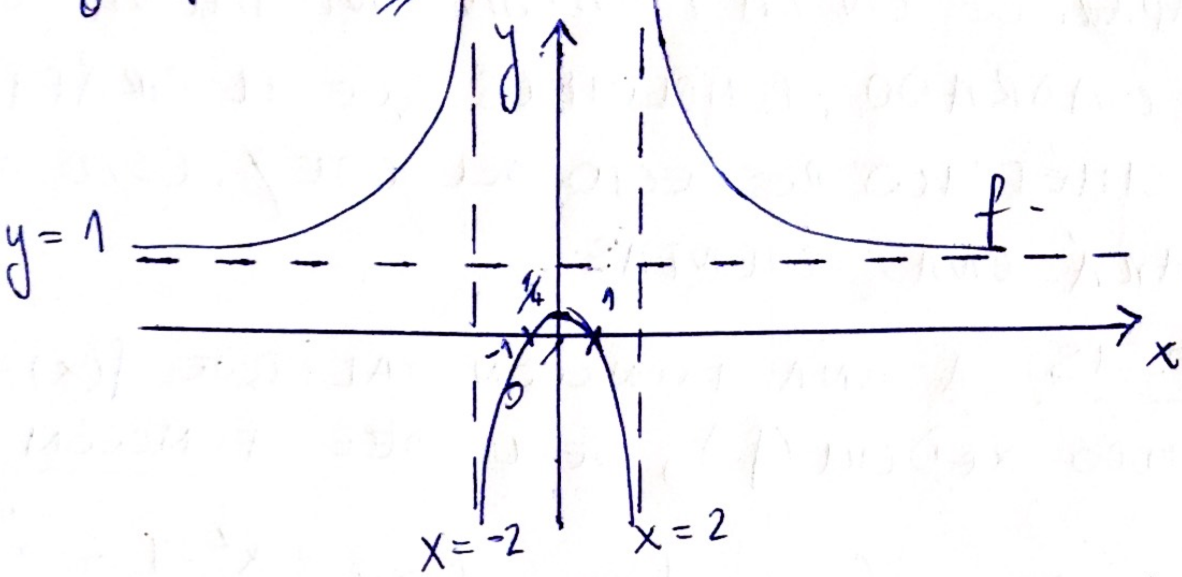
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 3}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0}} = \infty.$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 3}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0}} = \infty.$$

$\Rightarrow \underbrace{x = -2}$ Y $\underbrace{x = 2}$ SON A.V.

PARA EL GRÁFICO VIENEN BIEN LOS DATOS:

$f(0) = \dfrac{0^2-1}{0^2-4} = \dfrac{1}{4}$. $\quad C_0(f) = \{-1 ; 1\}$.



EJEMPLO 2) BUSCAR LAS ASÍNTOTAS AL GRÁFICO DE

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(-x) + x^2 + x + 2 & , \text{ si } x < 0 \\ e^{-x^2-x} + 3 & , \text{ si } x \geq 0 . \end{cases}$$

ESTUDIEMOS CONTINUIDAD DE f EN $x=0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{e^{-x^2-x}}_{\to 1} + 3 = 4 .$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{-\underbrace{\ln(\underbrace{-x}_{\to 0^+})}_{\to -\infty}}_{\to +\infty} + \underbrace{x^2 + x + 2}_{\to 0} = +\infty .$$

ESTOS DOS LÍMITES MUESTRAN QUE f ES DISCONTINUA EN $x=0$, Y ADEMÁS, EL SEGUNDO LÍMITE MUESTRA QUE $\underline{x=0 \text{ ES A.V.}}$

¿ A.H. ? $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2-x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} + 3 = 3 .$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\underbrace{-\underbrace{\ln(\underbrace{-x}_{\to+\infty})}_{\to+\infty}}_{\to-\infty} + \underbrace{x^2+x+2}_{\to+\infty}}$$ **indet!**

REESCRIBIMOS:

$$\lim_{x\to-\infty} -\ln(-x)+x^2+x+2 = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{-\ln(-x)}{x^2}+1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}\right)}_{\to ?} = +\infty.$$

CAUX:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{-\ln(-x)}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to\infty}} \overset{LH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{-x}(-1)}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2x^2} = 0$$

LUEGO, $\underline{y=3}$ AH A DERECHA.

EJEMPLO 3) ANALIZAR $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

NOTA: A ESTA FUNCIÓN PARTICULAR SE LA LLAMA TANGENTE HIPERBÓLICA.

¿Dom (f)? $\underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$ NO HAY SOLUCIÓN

$\to$ Dom (f) = $\mathbb{R}$.

NO HAY AV.

¿A.H.? $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{e^x} - \overset{\nearrow 0}{e^{-x}}}{\underset{\searrow +\infty}{e^x} + \underset{\searrow 0}{e^{-x}}}$ indet! $\left(\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$.

L'HOPITAL EN ESTE CASO NO FUNCIONA ¿POR QUÉ?

REESCRIBIMOS:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \overbrace{e^{-2x}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\boxed{y = 1 \text{ AH A DERECHA}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0} - e^{-x}}{\underbrace{e^x}_{\to 0} + e^{-x}} \begin{matrix} \to \infty \\ \to \infty \end{matrix} \quad \text{indet!}$$

REESCRIBIMOS:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0} - 1}{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$\boxed{y = -1 \text{ AH A IZQ.}}$

DERIVAMOS:

$$f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{2e^x \; 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.$$

CLARAMENTE, $Dom(f') = \mathbb{R}$ Y $f'_{(x)} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. LUEGO, f ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE. ADEMÁS, f NO TIENE PUNTOS CRÍTICOS.

ESTUDIEMOS CONCAVIDAD/CONVEXIDAD.

DERIVAMOS: $$f''_{(x)} = \frac{-4.2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^4} =$$

$$= \frac{-8(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}.$$

$Dom(f'') = \mathbb{R}$ (¿POR QUÉ?)

¿$Co(f'')$?

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{-8\left(e^{x} - e^{-x}\right)}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^{3}} = 0$$

$$e^{x} - e^{-x} = 0$$

$$e^{x} = e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$$

$$e^{2x} = 1 \longrightarrow \boxed{x = 0}.$$

$C_0(f') = \{0\}$.

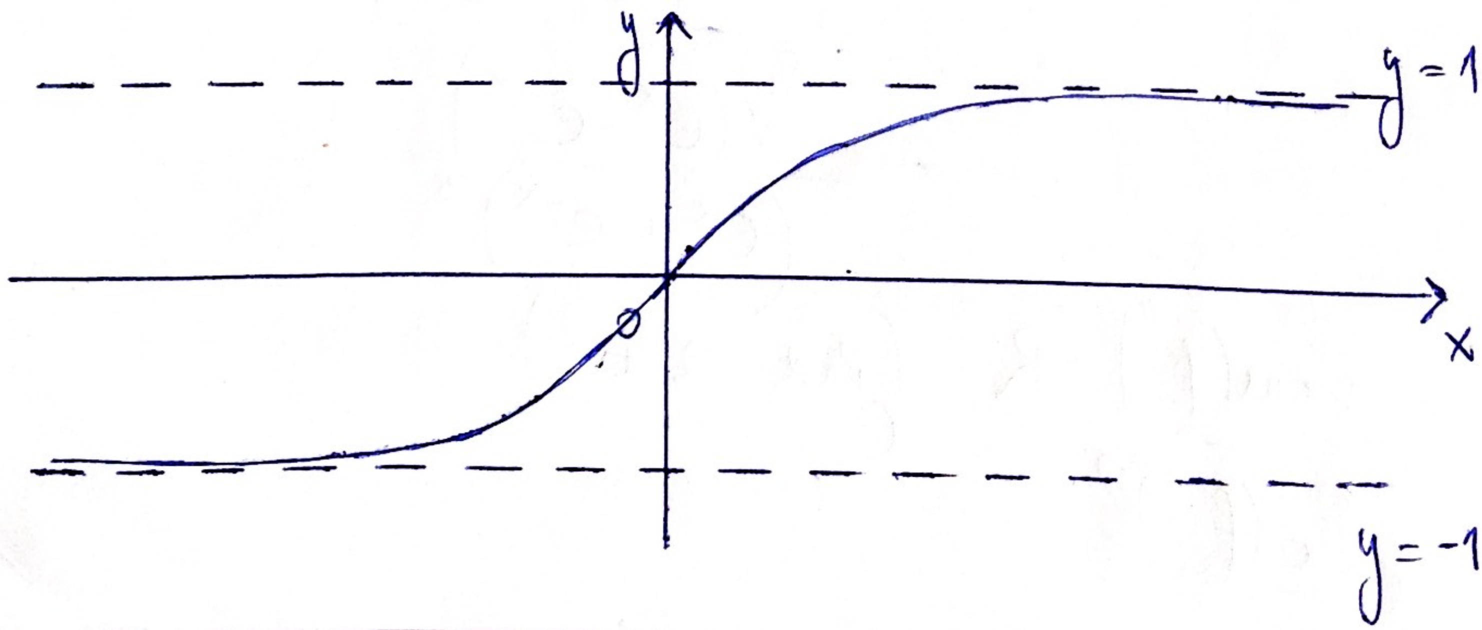
USAMOS BOLZANO SOBRE f'':

x	$(-\infty; 0)$ $(x = -1)$	0	$(0; +\infty)$ $(x = 1)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\rightarrow$ f ES CONVEXA EN $(-\infty; 0)$.

f ES CÓNCAVA EN $(0, +\infty)$

DATO EXTRA. $f(0) = 0$.



EJEMPLO 4) BUSCAR LAS ASÍNTOTAS AL GRÁFICO DE $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(4x^3)+x}{x}$.

$Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

¿AV? $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(4x^3)+x}^{\to 0}}{x} \begin{matrix}\to\\ \to\end{matrix} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ ¡indet!

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(4x^3)+x}{x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(4x^3).12x^2+1}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{12x^2}_{\to 0}\underbrace{\cos(4x^3)}_{\to 1}+1 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(4x^3)+x}^{\to 0}}{x} \begin{matrix}\to\\ \to\end{matrix} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$ ¡indet!

PARA VARIAR, AHORA SIN L'HOPITAL:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(4x^3)}{x}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(4x^3)}{4x^3}}_{\to 1}.\underbrace{4x^2}_{\to 0}+1\right) = 1.$$

(LÍMITE ESPECIAL)

$\Longrightarrow$ NO HAY AV.

¿AH?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(4x^3) + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}(4x^3)}_{\text{ACOT}}}_{\to 0} + 1 \right] = 1.$$

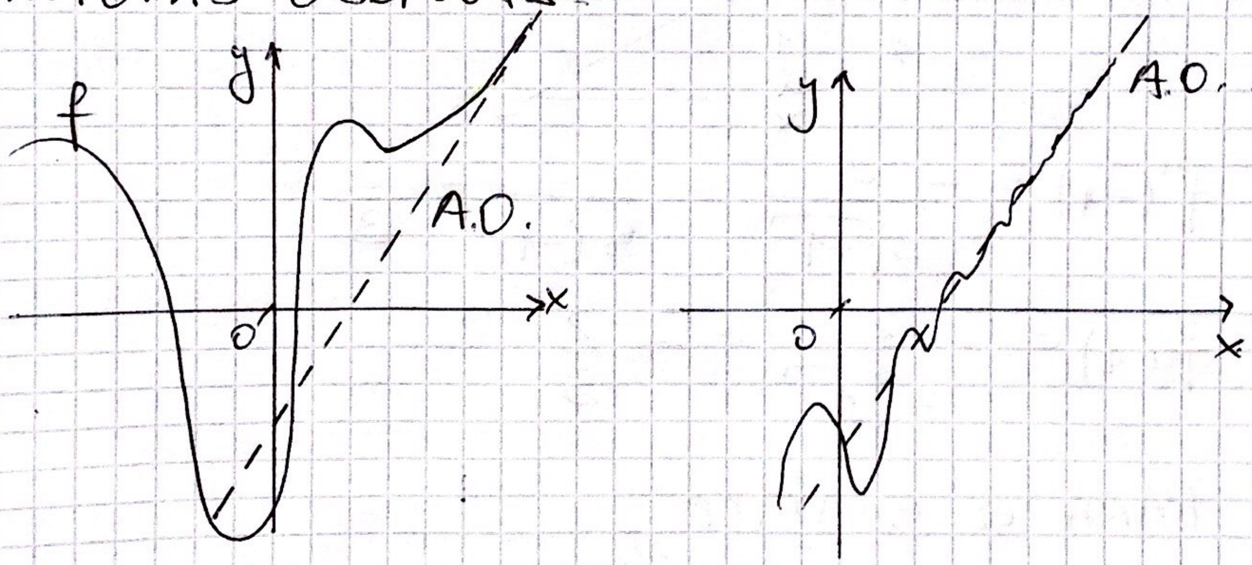
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen}(4x^3) + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}(4x^3)}_{\text{ACOT.}} + 1 \right] = 1.$$

$\Longrightarrow$ $y = 1$ AH.

ASÍNTOTAS

YA SABEMOS TRABAJAR CON ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES. EN ESENCIA, UNA ASÍNTOTA ES UNA RECTA A LA QUE EL GRÁFICO DE LA FUNCIÓN SE PARECE MUCHO BAJO CIERTAS CONDICIONES. RESULTA NATURAL, ENTONCES, CONSIDERAR ASÍNTOTAS OBLICUAS.



DEF: DECIMOS QUE LA RECTA DE ECUACIÓN $y = mx + b$, CON $m \neq 0$, ES ASÍNTOTA OBLICUA DE f, SI:

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx + b) \right) = 0.$$

¿CÓMO ENCONTRAR LA A.O., SI LA HAY?

SUPONGAMOS QUE $y = mx + b$ ES AO DE f. ENTONCES, $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx + b)\right) = 0$.

LUEGO, $\lim_{x \to \infty} \frac{\left(f(x) - (mx + b)\right)}{x} = 0$. POR ÁLGEBRA DE LÍMITES:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - \underbrace{\lim_{x \to \infty} m}_{= m} - \underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{b}{x}}_{= 0} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}}$$

CONOCIDA m, PARA ENCONTRAR b NOS REMITIMOS A LA DEFINICIÓN:

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx + b)\right) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right) - b = 0$$

$$\boxed{b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right)}$$

NOTA

ENTONCES, SI EL LÍMITE $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ EXISTE Y ES DIFERENTE DE CERO (*), f TIENE A.O.,

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$.

OJO: HAY QUE ANALIZAR POR SEPARADO LOS CASOS $x \longrightarrow -\infty$ y $x \longrightarrow +\infty$.

EJ: DECIDIR EN CADA CASO SI HAY A.O.

1) $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 1}{3x^2 - x + 1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-7x^2+1}{x(3x^2-x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-7x^2+1}{3x^3-x^2+x} \begin{matrix}\longrightarrow \\ \longrightarrow\end{matrix} \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \text{ indet!}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3} \quad \text{(¿POR QUÉ?)}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{3}}$$

ANÁLOGO CON $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-7x^2+1}{3x^2-x+1} - \frac{x}{3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-21x^2+3 - x(3x^2-x+1)}{3(3x^2-x+1)} =$$

(*) y EXISTE $\lim (f(x) - mx)$

HOJA Nº

FECHA

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-20x^2+2}{9x^2-3x+3} = -\frac{20}{9} \quad (¿\text{POR QUÉ?})$$

$$\longrightarrow \boxed{b = -\frac{20}{9}} \qquad \boxed{y = \frac{x}{3} - \frac{20}{9} \quad \text{A.O}}$$

ANÁLOGO CON $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$.

2) $f(x) = 7x - e^{2x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{7x - e^{2x}}{x} \longrightarrow \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\infty} \text{ indet.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7x - e^{2x}}{x} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{7 - 2e^{2x}}{1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 7 - 2e^{2x} = -\infty \implies \boxed{\text{NO HAY A.O}}$$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \longrightarrow \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\infty} \text{ indet.}$$

(¡PRUEBEN L'H!)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}} =$$

NOTA

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

<u>Dos casos</u>:

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}}} = 1$$

$$\boxed{m = 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - m x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - \cancel{x}\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(x - \sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(x - \sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+3}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+3}}{x + \sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(x^2 - (x^2+3)\right)}{\sqrt{x^2+3}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\ (-3)}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}_{\longrightarrow 1}\ \underbrace{\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}_{\longrightarrow +\infty}} = 0.$$

ASÍ, $\boxed{y = x \text{ A.O.}}$ (CUANDO $x \to +\infty$)

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}_{\to 1}} = -1.$

$\boxed{m = -1}$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} + x \right) =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(\cancel{x} + \sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(x+\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}} \frac{(x - \sqrt{x^2+3})}{(x - \sqrt{x^2+3})} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(x^2 - (x^2+3))}{\sqrt{x^2+3}\,(x - \sqrt{x^2+3})} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\,(x - \sqrt{x^2+3})} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}_{\to 1}\,\underbrace{(x - \sqrt{x^2+3})}_{\to -\infty}} = 0.$ //

$\downarrow$

$|x| = -x$

LUEGO, $\underline{y = -x \quad AO}$ (CUANDO $x \longrightarrow -\infty$).

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$, (Trabajo en clase)

EXTREMOS ABSOLUTOS

EL CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA NOS PERMITE ENCONTRAR EXTREMOS RELATIVOS (LO MISMO SUCEDE CON EL CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA). PARA DETERMINAR EXTREMOS ABSOLUTOS TENDREMOS QUE HACER UN ANÁLISIS MÁS PROFUNDO.

EJEMPLO 1) HALLAR, SI EXISTEN, EL MÁXIMO Y EL MÍNIMO ABSOLUTOS DE $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2+65}$.

$Dom(f) = \mathbb{R}$, PORQUE $x^2+65>0$.

DERIVAMOS: $$f'(x) = \frac{1(x^2+65)-(x+4)2x}{(x^2+65)^2}$$

$$= \frac{x^2+65-2x^2-8x}{(x^2+65)^2}$$

$$= \frac{-x^2-8x+65}{(x^2+65)^2}$$

$Dom(f') = \mathbb{R}$, PORQUE $(x^2+65)^2>0$.

¿$C_0(f')$?
$$f'(x)=0$$

$$\frac{-x^2-8x+65}{(x^2+65)^2} = 0$$

$$-x^2-8x+65=0.$$

$$x=5 \qquad x=-13$$

USAMOS BOLZANO S/f':

x	$(-\infty;-13)$	-13	$(-13;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$	MÁX	$\searrow$

$$f'(x) = \frac{-(x+13)(x-5)}{(x^2+65)^2}$$ (¿ES NECESARIO EVALUAR?)

$\longrightarrow$ f ALCANZA UN MÍNIMO LOCAL EN $x=-13$.

f ✓ ✓ MÁXIMO LOCAL EN $x=5$.

¿SERÁN MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS?

¿VEAMOS CÓMO SE COMPORTA LA FUNCIÓN CUANDO $x \longrightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+4}{x^2+65} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{65}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+4/x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{65}{x^2}\right)}_{\to 1}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+4}{x^2+65} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{65}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{1+4/x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}\underbrace{\left(1+65/x^2\right)}_{\to 1}} = 0^-$$

CUENTA: $f(-13)=\frac{-9}{234}=-\frac{1}{26}$.

$$f(5)=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}.$$

COMO f ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE EN $(-13;5)$ Y $f(-13)=-\frac{1}{26}$, $f(5)=\frac{1}{10}$, ESTOS DOS VALORES FUNCIONAN COMO PISO Y TECHO EN ESTE INTERVALO:

$$-\frac{1}{26}<f(x)<\frac{1}{10} \quad \forall x\in(-13;5).$$

COMO f ES ESTRICTAMENTE ~~DE~~CRECIENTE EN $(5;+\infty)$, $f(5)=\frac{1}{10}$ Y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$, TENEMOS:

$$0<f(x)<\frac{1}{10} \quad \forall x\in(5;+\infty).$$

COMO f ES ESTRICTAMENTE DECRECIENTE EN $(-\infty;-13)$, $f(-13)=-\frac{1}{26}$ Y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$, TENEMOS:

$$-\frac{1}{26}<f(x)<0 \quad \forall x\in(-\infty;-13).$$

SI TENEMOS TODO ESTO EN CUENTA, $\left(-13,-\frac{1}{26}\right)$ ES MÍNIMO ABSOLUTO Y $\left(5;\frac{1}{10}\right)$ ES MÁXIMO ABSOLUTO.

EJEMPLO 2) HALLAR, SI EXISTEN, LOS EXTREMOS ABSOLUTOS DE $f(x)=4x^6-3x^3$.

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$.

DERIVAMOS: $f'(x) = 24x^5 - 9x^2$

$Dom(f') = \mathbb{R}$.

¿$Co(f')$? $f'(x) = 0$

$24x^5 - 9x^2 = 0$

$x^2(24x^3 - 9) = 0$

$\underbrace{x = 0}$ $\vee$ $24x^3 - 9 = 0$

$x^3 = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

$\underbrace{x = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}}$ $(\simeq 0{,}72\ldots)$

BOLZANO SOBRE f':

x	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2};+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	SILLA	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$

$f'(x) = x^2(24x^3 - 9)$.

$f'(-1) = + \cdot - = -$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = + \cdot - = -$

$f'(1) = + \cdot + = +$

CUENTA:

$\underbrace{f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) = -\frac{9}{16}}$.

CALCULAMOS: ¿POR QUÉ?

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 4x^6 - 3x^3 = +\infty$.

DE LA TABLA Y LOS LÍMITES, f TIENE UN MÍNIMO ABSOLUTO EN $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2} ; -\frac{9}{16}\right)$, Y NO TIENE MÁXIMOS.

EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALOS

RECORDAMOS TEO WEIERSTRASS. SI f ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN UN INTERVALO CERRADO Y ACOTADO, f ALCANZA MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS EN DICHO INTERVALO.

CUANDO BUSQUEMOS LOS EXTREMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN CONTINUA EN UN INTERVALO $[a;b]$, CUYA EXISTENCIA ESTÁ GARANTIZADA POR WEIERSTRASS, CALCULAREMOS LOS EXTREMOS LOCALES DE LA FUNCIÓN EN $[a;b]$, LES SUMAREMOS LOS BORDES DEL INTERVALO, Y COMPARAREMOS ENTRE TODOS.

EJEMPLO 1) HALLAR LOS EXTREMOS ABSOLUTOS DE $f(x) = x\sqrt[3]{8-x}$ EN $[0;9]$

DERIVAMOS: $f(x) = x\,(8-x)^{1/3}$

$$f'(x) = 1\,(8-x)^{1/3} + x\,\frac{1}{3}(8-x)^{-2/3}.(-1)$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{8-x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}}$$

$Dom(f') = \mathbb{R} \setminus \{8\}$.

¿$Cd(f')$? $\quad f'(x) = 0$

$$\sqrt[3]{8-x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}} = 0$$

$$\sqrt[3]{8-x} = \frac{x}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}}$$

$$3(8-x) = x$$

$$24 - 3x = x$$

$$24 = 4x$$

$$\boxed{x = 6}$$

PTOS CRÍTICOS EN $[0,9]$

$x = 8$ y $x = 6$.

EVALUAMOS:

$f(0) = 0$

$f(9) = -9 \longrightarrow$ MIN ABS EN $(9,-9)$.

$f(8) = 0$

$f(6) = 6\sqrt[3]{2} \longrightarrow$ MÁX ABS EN $(6, 6\sqrt[3]{2})$.

EJEMPLO 2) HALLAR LOS EXTREMOS ABSOLUTOS DE $f(x) = 2x^2 - 25\ln(x)$ EN $[1;e]$.

$$f'(x) = 4x - \frac{25}{x}$$

$Dom(f') \supseteq [1;e]$.

$$f'(x) = 0$$

$$4x - \frac{25}{x} = 0$$

$$4x = \frac{25}{x}$$

$$x^2 = \frac{25}{4} \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

PUNTOS CRÍTICOS EN $[1;e]$: $x = \frac{5}{2}$.

EVALUAMOS:

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 25\ln(1) = 2.$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 25\ln\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2} - 25\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$f(e) = 2e^2 - 25\ln(e) = 2e^2 - 25$$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{2} - 25\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ MÍN ABS.

$(1; 2)$ MÁX ABS.