TEOREMA DE BOLZANO

SEA $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN CONTINUA TAL QUE $f(a).f(b)<0$. ENTONCES, EXISTE $c \in (a;b)$ CON $f(c)=0$.

Ej 1) SEA $f(x)=x^3+x+1$. PROBAR QUE f TIENE AL MENOS UN CERO EN $[-1;0]$.

f ES FUNCIÓN POLINÓMICA, Y POR LO TANTO CONTINUA. PODEMOS USAR EL TEOREMA DE BOLZANO.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3-1+1=-1 \\ f(0)=0^3+0+1=1 \end{array}\right\} \text{SIGNOS DIFERENTES}$$

$$\Longrightarrow \exists c \in (-1;0) \ / \ f(c)=0.$$

COMO $c \in (-1;0)$, C TIENE LA PINTA $-0,\ldots$ ¿PODEMOS ENCONTRAR AL MENOS UN DECIMAL DE C?

DIVIDIMOS AL INTERVALO EN 10 SUBINTERVALOS DE IGUAL LONGITUD. EVALUAMOS EN LOS BORDES DE CADA INTERVALO Y APLICAMOS EL TEOREMA.

$f(-1)$	$f(-0,9)$	$f(-0,8)$	$f(0,7)$	$f(-0,6)$	$f(-0,5)$	$f(-0,4)$	$f(-0,3)$	$f(-0,2)$
−	−	−	−	+	+	+	+	+

$f(-0,1)$	$f(0)$
+	+

COMO $f(-0,7)\,f(-0,6) < 0$, EL TEOREMA NOS DICE QUE EXISTE UN CERO DE f EN EL INTERVALO $(-0,7\,;-0,6)$, ESTO ES, HAY UN CERO DE LA FORMA $-0,6\ldots$

NOTA ESTE CERO QUE ENCONTRAMOS NO ES NECESARIAMENTE EL MISMO C QUE HALLAMOS MÁS ARRIBA.

Ej 2) PROBAR QUE EXISTE AL MENOS UNA SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN $e^x = 3x$.

OBS: DESPEJAR X EN $e^x = 3x$ ES TODO UN DESAFÍO (¿SERÁ POSIBLE?). ESTE ES UN EJEMPLO DE ECUACIÓN TRASCENDENTE.

CONSIDEREMOS LA FUNCIÓN $f(x) = e^x - 3x$. OBSERVEMOS QUE LOS CEROS DE f SE CORRESPONDEN CON LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN:

$$f(x) = 0 \iff e^x - 3x = 0 \iff e^x = 3x.$$

COMO f ES CONTINUA, PODEMOS USAR BOLZANO. TANTEAMOS HASTA ENCONTRAR UN CAMBIO DE SIGNO EN f:

$$f(-1) > 0 \qquad \underbrace{f(0) > 0 \qquad f(1) < 0}_{f \text{ CAMBIA DE SIGNO EN } [0,1]}$$

$\Longrightarrow \exists c \in (0,1) \ / \ f(c) = 0$

$\Longrightarrow \exists \ c \in (0,1) \ / \ e^{c} = 3.c.$

<u>CONTRARRECÍPROCO DE BOLZANO</u>

SI UNA FUNCIÓN CONTINUA f NO TIENE CEROS EN UN INTERVALO $(a;b)$, ENTONCES f NO CAMBIA DE SIGNO EN $(a;b)$.

Ej 3) HALLAR $C_+(f)$ Y $C_-(f)$ PARA $f(x) =$
$= -3(x-1)^2\left(x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{2}{3}\right)$

BUSCAMOS $C_0(f)$:

$$f(x) = 0$$

$$-3(x-1)^2\left(x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$(x-1)^2\left(x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x = \frac{-11/6 \pm \sqrt{(11/6)^2 - 4.1.2/3}}{2.1}$$

$$x = \frac{-\frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{2}$$

$$x = \frac{-\frac{11}{6} \pm \frac{5}{6}}{2}$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}} \qquad \boxed{x = -\frac{4}{3}}$$

$C_0(f) = \left\{1, -\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}\right\}$.

COMO f ES POLINÓMICA, ES CONTINUA. USAMOS BOLZANO:

x	$\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{4}{3}$	$\left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$	1	$(1; +\infty)$
$f(x)$	$f(-2) > 0$	0	$f(-1) < 0$	0	$f(0) > 0$	0	$f(2) > 0$
	$-$		$+$		$-$		$-$

OBTENEMOS:

$$C_-(f) = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$$

$$C_+(f) = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right).$$

Ej 4) SEA $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-2}$. HALLAR $C_+(f)$.

PRIMERO, CALCULAMOS $Dom(f)$:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x-2} \longrightarrow x > 0$$

$$\longrightarrow x \neq 2$$

$$\Longrightarrow Dom(f) = (0; 2) \cup (2; +\infty).$$

f ES CONTINUA EN SU DOMINIO.

BUSCAMOS $C_0(f)$:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{\ln(x)}{x-2} = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$C_0(f) = \{1\}.$$

DIVIDIMOS AL DOMINIO DE ACUERDO A LOS CEROS:

x	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f(x)$	$f(\frac{1}{2})$	0	$f(\frac{3}{2})$	$\nexists$	$f(3)$
	$+$		$-$		$+$

RESULTA: $C_+(f) = (0;1) \cup (2;+\infty)$.

DERIVADAS

DEF: SEA f UNA FUNCIÓN DEFINIDA EN UN INTERVALO $(a;b)$, Y SEA $x_0 \in (a;b)$. SE DEFINE EL COCIENTE INCREMENTAL DE f EN $x=x_0$ COMO:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DEF: DADOS f UNA FUNCIÓN DEFINIDA EN $(a;b)$ Y $x_0 \in (a;b)$, SE DICE QUE f ES DERIVABLE EN x_0 SI $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ EXISTE Y ES FINITO. EN ESTE CASO, DICHO LÍMITE SE LLAMA DERIVADA DE f EN x_0, Y SE NOTA $f'(x_0)$.

Ej 1) SEAN $f(x) = x^2+2x+1$ Y $g(x) = \sqrt{x}$.

CALCULAR $f'(1)$ Y $g'(2)$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) + 1 - (1^2 + 2 \cdot 1 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1^2 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} h + 4 = 4 \qquad \boxed{f'(1) = 4}$$

$$g'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \,//$$

$$\Longrightarrow \boxed{g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

<u>RECTA TANGENTE AL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN</u>.

$f'(x_0)$ ES LA PENDIENTE DE LA RTG.
AL GRÁFICO DE f EN EL PUNTO $(x_0, f(x_0))$

Ej 2) SEA $f(x) = \frac{1}{x}$. HALLAR LA EC. DE LA RTG.
AL GRÁFICO DE f EN EL PUNTO DE ABSCISA
$x = 2$.

BUSCAMOS UN PUNTO Y LA PENDIENTE.

<u>PUNTO</u>. $x = 2$
$f(2) = \frac{1}{2}$ $\Longrightarrow \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

<u>PENDIENTE</u> $m = f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2h(2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} =$$

$$= \frac{-1}{4} \quad \Longrightarrow \quad f'(2) = -\frac{1}{4}$$

R.T.G.

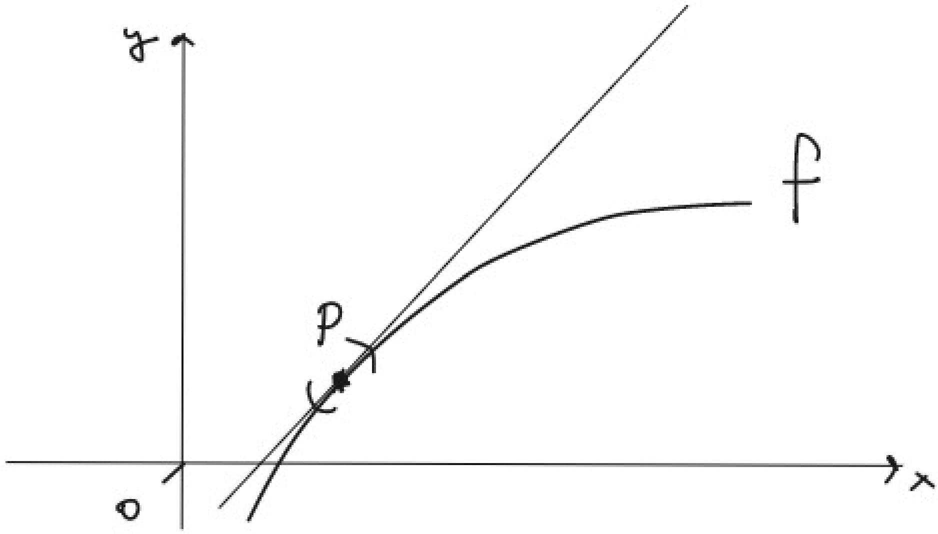
$$y = mx + b$$

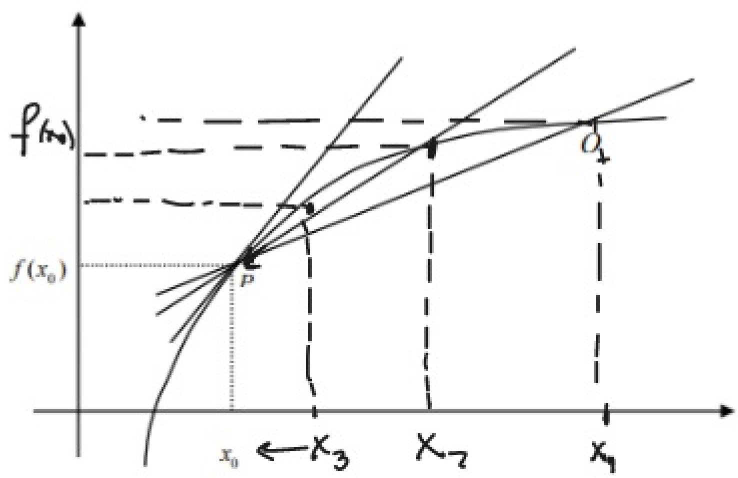
$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

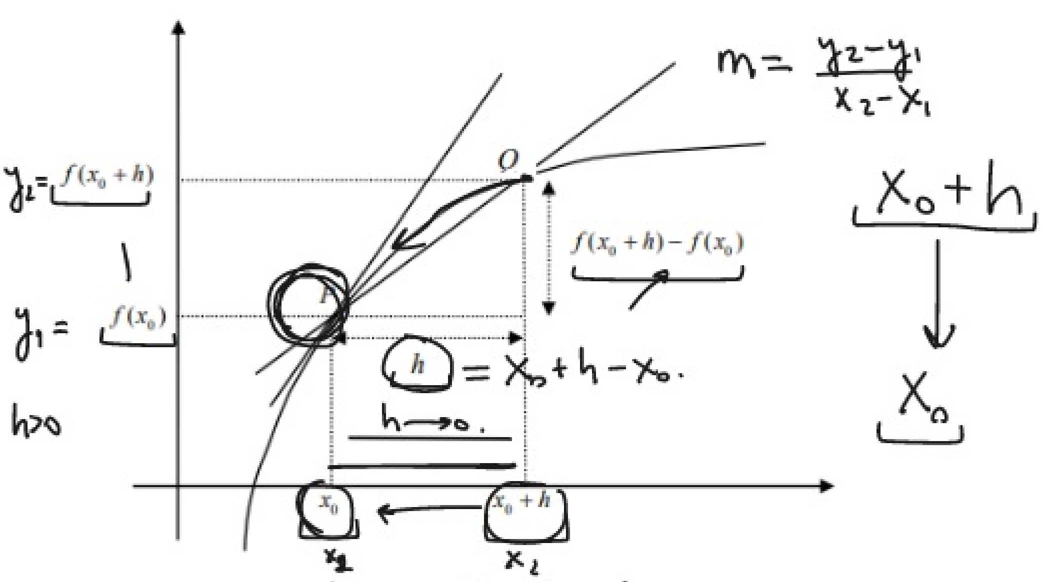
$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b$$

$$b = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + 1}$$







$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Cociente incremental de f en x_0.

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} < \infty$$

EXISTE

$$= f'(x_0)$$