ANÁLISIS 66.

POLINOMIO DE TAYLOR

EN EL CURSO HEMOS DESARROLLADO HERRAMIENTAS QUE NOS PERMITEN ESTUDIAR UNA AMPLIA VARIEDAD DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE. RESULTA INTERESANTE OBSERVAR QUE EN MUCHOS CASOS PODEMOS OBTENER MUCHA INFORMACIÓN DE FUNCIONES QUE A DURAS PENAS PODEMOS EVALUAR. TOMEMOS EL EJEMPLO DE $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ / $f(x)=\ln(x)$. SOBRE f SABEMOS: $C_0(f)=\{1\}$, $C_+(f)=(1,+\infty)$, $X=0$ ES AV. DE SU GRÁFICO, ETC. NO PODEMOS, SIN EMBARGO, RESPONDER UNA SIMPLE (¿SIMPLE?) PREGUNTA: ¿CUÁNTO VALE $f(1,1)=\ln(1,1)$?

GRACIAS A LA CONTINUIDAD DEL LOGARITMO Y A QUE $f(1)=\ln(1)=0$, SABEMOS QUE $f(1,1)$ ES "PARECIDO" A 0. EVIDENTEMENTE, TOMAR $f(1,1)\simeq 0$ ES UNA APROXIMACIÓN MUY GROSERA. ¿CÓMO PODRÍAMOS HACERNOS DE UNA MEJOR APROXIMACIÓN?

AQUÍ ENTRA EN JUEGO LA RECTA TANGENTE (RTg) AL GRÁFICO DE LA FUNCIÓN f EN $X=1$. BUSCAMOS SU ECUACIÓN:

$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f(1)=0 \leftarrow \text{PUNTO.}$$

$$f'(1)=\frac{1}{1}=1. \leftarrow \text{PENDIENTE.}$$

$$y=mx+b$$

$$y=x+b \longrightarrow 0=1+b \longrightarrow b=-1$$

$y = x - 1$ ← RTg AL GRÁFICO DE f EN $x=1$.

AL VER LOS GRÁFICOS DE f Y DE LA RECTA DE ECUACIÓN $y=x-1$, OBSERVAMOS QUE CERCA DEL PUNTO $(1,0)$ EL GRÁFICO DE f Y LA RECTA SON MUY PARECIDOS. ESTA ES, JUSTAMENTE, LA GRACIA DE LA RTg. DE HECHO, PODRÍAMOS DAR LA SIGUIENTE DEFINICIÓN DE RTg:

<u>DEF</u>. SEAN $\mathcal{C}$ UNA CURVA Y P UN PUNTO DE LA MISMA. LA RTg. A $\mathcal{C}$ EN P ES, DE ENTRE TODAS LAS RECTAS POSIBLES, LA QUE MAS SE PARECE A $\mathcal{C}$ EN UNA PROXIMIDAD DE P.

EN OTRAS PALABRAS, LA RTg A $\mathcal{C}$ EN P ES LA MEJOR APROXIMACIÓN LINEAL DE $\mathcal{C}$ CERCA DE P.

ASÍ, PODEMOS APROXIMAR $f(1,1)$ POR LA EVALUACIÓN DE LA RTg EN $x=1,1$ (OBSERVAR QUE 1,1 ESTÁ CERCA DE 1). TENEMOS:

$$f(1,1) \simeq 1,1-1 = 0,1.$$

EL VALOR ARROJADO POR LA CALCULADORA ES 0,0953101798.

¿CÓMO PODRÍAMOS CONSEGUIR UNA MEJOR APROXIMACIÓN?

EN LUGAR DE BUSCAR LA R.Tg. AL GRÁFICO DE f EN $(1,0)$, PODRÍAMOS BUSCAR LA PARÁBOLA QUE MÁS SE PAREZCA AL GRÁFICO DE f EN UNA PROXIMIDAD DE $(1,0)$.

PARA HACER ESTO, NECESITAMOS ENTENDER BIEN LA CONSTRUCCIÓN DE LA RTg. AL GRÁFICO DE f EN $(1,0)$.

$$\begin{cases} f(x)=\ln(x) & , f'(x)=1/x \\ g(x)=x-1 & , g'(x)=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(1)=0 & y \; g(1)=0 \\ f'(1)=1 & y \; g'(1)=1 \end{cases}$$

LA FUNCIÓN g (CUYO GRÁFICO ES LA RTg) ES TAL QUE $f(1)=g(1)$ y $f'(1)=g'(1)$.

PODRÍAMOS, ENTONCES, CONSTRUIR UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA $p(x)$ TAL QUE: $f(1)=p(1)$, $f'(1)=p'(1)$ Y $f''(1)=p''(1)$.

BUSCO $p(x)=ax^2+bx+c$.

$$\Longrightarrow p'(x)=2ax+b$$

$$\Longrightarrow p''(x)=2a.$$

ADEMÁS, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$ Y $f(1)=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=-1$. LUEGO:

$$\begin{cases} 0=f(1)=p(1)=a.1^2+b.1+c=a+b+c. \\ 1=f'(1)=p'(1)=2a.1+b=2a+b \\ -1=f''(1)=p''(1)=2a. \end{cases}$$

DE LA 3^a ECUACIÓN:

$$a = -\frac{1}{2}$$

EN LA 2ª ECUACIÓN: $1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b$

$$1 = -1 + b$$

$$2 = b$$

EN LA 1ª ECUACIÓN: $0 = -\frac{1}{2} + 2 + C$

$$C = -\frac{3}{2}$$

FINALMENTE:

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

APROXIMAMOS:

$$f(1,1) \simeq p(1,1) = -\frac{1}{2}(1,1)^2 + 2 \cdot (1,1) - \frac{3}{2}$$

$$= 0,095$$

¡MEJOR!

¿PODRÍAMOS BUSCAR UNA FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 3 QUE APROXIME A f DE ESTA MANERA ($f(1) = p(1)$, $f'(1) = p'(1)$, $f''(1) = p''(1)$, $f'''(1) = p'''(1)$)? ¿Y DE GRADO n? HACER ESTO ¿DARÁ MEJORES APROXIMACIONES?

POLINOMIO DE TAYLOR

SEA UNA FUNCIÓN f n VECES DERIVABLE EN $X = X_0$. EL POLINOMIO DE TAYLOR DE GRADO n ES EL POLINOMIO CUYAS PRIMERAS n DERIVADAS COINCIDEN CON LAS DE f (i.e., $f(x_0) = P(x_0)$, $f'(x_0) = P'(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0)$). ESTE POLINOMIO TIENE LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$P(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$$\left[P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \right].$$

RECORDAMOS: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (FACTORIAL DE n)

$0! = 1$

EJEMPLOS: CALCULAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES HASTA EL ORDEN INDICADO EN EL PUNTO DADO:

a) $f(x) = e^{3x}$, ORDEN 4, $x_0 = 0$.

b) $f(x) = \cos x$, ORDEN 4, $x_0 = \pi$.

c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 5}$, ORDEN 2, $x_0 = 2$.

d) $f(x) = 7x(x-3)^4$, ORDEN 3, $x_0 = 1$.

a. BUSCAMOS:

$$P_4(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}(x-0)^4$$

DERIVAMOS Y EVALUAMOS:

$f(0) = e^{3.0} = e^0 = 1$

$f'(x) = 3e^{3x} \longrightarrow f'(0) = 3.e^{3.0} = 3$

$f''(x) = 9e^{3x} \longrightarrow f''(0) = 9$

$f'''(x) = 27e^{3x} \longrightarrow f'''(0) = 27$

$f^{IV}(x) = 81e^{3x} \longrightarrow f^{IV}(0) = 81$

ENTONCES:

$$p_4(x) = \frac{1}{1} + \frac{3}{1}x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{6}x^3 + \frac{81}{24}x^4$$

$$p_4(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4$$

b. BUSCAMOS:

$$P_4(x) = \frac{f(\pi)}{0!} + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 +$$

$$+ \frac{f^{IV}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

DERIVAMOS Y EVALUAMOS.

$f(\pi) = \cos(\pi) = -1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \longrightarrow f'(\pi) = -\operatorname{sen}(\pi) = 0$ /

$f''(x) = -\cos x \longrightarrow f''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$ /

$f'''(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow f'''(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$ /

$f^{iv}(x) = \cos x \longrightarrow f^{iv}(\pi) = \cos(\pi) = -1$ /

ENTONCES:

$$p_4(x) = \frac{-1}{1} + \frac{0}{1}(x-\pi) + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \frac{0}{6}(x-\pi)^3 + \frac{-1}{24}(x-\pi)^4$$

$$p_4(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 \quad //$$

C- BUSCAMOS

$$p_2(x) = \frac{f(2)}{0!} + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2$$

DERIVAMOS Y EVALUAMOS:

$f(2) = \sqrt{2^3 - 2.2 + 5} = \sqrt{9} = 3$ /

$$f'(x) = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+5}} \longrightarrow f'(2) = \frac{3.4-2}{2.\sqrt{9}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad /$$

$$f''(x) = \frac{6x.2\sqrt{x^3-2x+5} - (3x^2-2)\frac{2.(3x^2-2)}{2\sqrt{x^3-2x+5}}}{4(x^3-2x+5)} =$$

$$= \frac{12x\sqrt{x^3-2x+5} - \frac{(3x^2-2)^2}{\sqrt{x^3-2x+5}}}{4(x^3-2x+5)}$$

$$\longrightarrow f''(2) = \frac{24.3 - \frac{100}{3}}{4.9} = \frac{29}{27} \quad /$$

ENTONCES:

$$p_2(x) = \frac{3}{1} + \frac{\frac{5}{3}}{1}(x-2) + \frac{\frac{29}{27}}{2}(x-2)^2$$

$$p_2(x) = 3 + \frac{5}{3}(x-2) + \frac{29}{54}(x-2)^2$$

d_ BUSCAMOS:

$$p_3(x) = \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

DERIVAMOS Y EVALUAMOS:

$$f(1) = 7.1(1-3)^4 = 7(-2)^4 = 112$$

$$f'(x) = 7(x-3)^4 + 28x(x-3)^3$$

$$\longrightarrow f'(1) = 112 + 28.(-8) = -112$$

$$f''(x) = 28(x-3)^3 + 28(x-3)^3 + 84x(x-3)^2$$

$$\longrightarrow f''(x) = 56(x-3)^3 + 84x(x-3)^2$$

$$\longrightarrow f''(1) = 56(-8) + 84.4 = -112$$

$$f'''(x) = 168(x-3)^2 + 84(x-3)^2 + 168x(x-3)$$

$$f'''(x) = 252(x-3)^2 + 168x(x-3)$$

$$\longrightarrow f'''(1) = 252.4 + 168.1(-2) = 672$$

ENTONCES:

$$p_3(x) = \frac{112}{1} + \frac{-112}{1}(x-1) + \frac{-112}{2}(x-1)^2 + \frac{672}{6}(x-1)^3$$

$$p_3(x) = 112 - 112(x-1) - 56(x-1)^2 + 112(x-1)^3$$

Ej 1) SEAN f Y g FUNCIONES CON TRES DERIVADAS CONTINUAS TALES QUE $f(2)=5$, $f'(2)=2$, $f''(2)=4$ Y EL POLINOMIO DE TAYLOR DE g DE ORDEN 2 EN $x_0=3$ ES $P(x)=\frac{3(x-3)^2}{2}+4(x-3)+2$. HALLAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN 2 EN $x_0=3$ DE $f\circ g$.

TENEMOS QUE SACAR INFO DE $P(x)$:

$$P(x)=\frac{3(x-3)^2}{2}+4(x-3)+2$$

$$\frac{g''(3)}{2!}=\frac{3}{2} \qquad \frac{g'(3)}{1!}=4 \qquad \frac{g(3)}{0!}=2$$

$$\frac{g''(3)}{2}=\frac{3}{2} \qquad g'(3)=4 \qquad g(3)=2$$

$$g''(3)=3$$

ARMAMOS EL POLINOMIO BUSCADO:

$$q(x)=\frac{f\circ g(3)}{0!}+\frac{f\circ g'(3)}{1!}(x-3)+\frac{f\circ g''(3)}{2!}(x-3)^2$$

DERIVAMOS Y EVALUAMOS:

$$f\circ g(3)=f(g(3))=f(2)=5$$

$$f\circ g'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x) \longrightarrow$$

$$f\circ g'(3)=f'(g(3))\,g'(3)=f'(2).4=2.4=8.$$

$$f\circ g''(x) = \left(f'(g(x))\, g'(x)\right)' = f''(g(x))\, g'(x)\, g'(x) +$$
$$+ f'(g(x)) . g''(x) . \Longrightarrow$$

$$f\circ g''(3) = f''(g(3)) g'(3) g'(3) + f'(g(3))\, g''(3) =$$
$$= f''(2) . 4 . 4 + f'(2) . 3 = 4 . 16 + 2 . 3 =$$
$$= 64 + 6 = 70.$$

FINALMENTE:

$$q(x) = \frac{5}{1} + \frac{8}{1}(x-3) + \frac{70}{2}(x-3)^2$$

$$q(x) = 5 + 8(x-3) + \frac{70}{2}(x-3)^2 .$$

Ej 2) SEA f UNA FUNCIÓN CUYO POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN 2 EN $X_0 = 0$ ES $q(x) = -12X^2 + 16X - 9$ Y TAL QUE $f'''(x) = \ln(x^4+1) + 34$. HALLAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN 2 DE $g(x) = \sqrt{f'(x)}$ EN $X_0 = 0$.

BUSCAMOS:

$$p(x) = \frac{g(0)}{0!} + \frac{g'(0)}{1!}(x-0) + \frac{g''(0)}{2!}(x-0)^2$$

SOBRE f SABEMOS:

$$f'''(x) = \ln(x^4+1) + 34 .$$

$$f(x) = -12x^2 + 16x - 9$$

$$= -12(x-0)^2 + 16(x-0) - 9$$

$$\frac{f''(0)}{2!} = -12 \qquad \frac{f'(0)}{1!} = 16 \qquad \frac{f(0)}{0!} = -9$$

$$f''(0) = -24 \qquad f'(0) = 16 \qquad f(0) = -9$$

DERIVAMOS Y EVALUAMOS:

$$g(0) = \sqrt{f'(0)} = \sqrt{16} = 4$$

$$g'(x) = \left[\left(f'(x)\right)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}\left(f'(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot f''(x) =$$

$$= \frac{f''(x)}{2\sqrt{f'(x)}}$$

$$\Longrightarrow g'(0) = \frac{f''(0)}{2\sqrt{f'(0)}} = \frac{-24}{2 \cdot 4} = -3$$

$$g''(x) = \frac{f'''(x)\, 2\sqrt{f'(x)} - f''(x) \cdot 2\, \frac{1}{2\sqrt{f'(x)}}\, f''(x)}{\left(2\sqrt{f'(x)}\right)^2}$$

$$= \frac{f'''(x)\, 2\sqrt{f'(x)} - \frac{f''(x)^2}{\sqrt{f'(x)}}}{4\, f'(x)}$$

$\Longrightarrow$

$$g''(0) = \frac{f'''(0)\, 2\sqrt{f'(0)} - \frac{f''(0)^2}{\sqrt{f'(0)}}}{4\, f'(0)} =$$

$$= \frac{34 \cdot 2 \cdot 4 - 144}{4 \cdot 16} = 2$$

ENTONCES:

$$p(x) = \frac{4}{1} + \frac{-3}{1}(x-0) + \frac{2}{2}(x-0)^2$$

$$p(x) = 4 - 3x + x^2$$

RESTO DE TAYLOR

LLAMAMOS RESTO DE ORDEN n A LA DIFERENCIA ENTRE LA FUNCIÓN Y SU POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN n.

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

EL RESTO ES, ESENCIALMENTE, EL ERROR QUE COMETEMOS AL APROXIMAR.

EXPRESIÓN DEL RESTO

SI f ES UNA FUNCIÓN CON $n+1$ DERIVADAS CONTINUAS, TENEMOS:

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}, \quad \text{DONDE}$$

ξ ESTÁ ENTRE x y x_0.

<u>PREGUNTA</u>. ¿PODEMOS ENCONTRAR EL RESTO DE MANERA EXACTA?

<u>Ej</u>. VOLVEMOS AL PROBLEMA DE LA APROXIMACIÓN DE $\ln(1,1)$. PARA $f(x) = \ln(x)$, ENCONTRAMOS $P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$, SU POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN 2 EN $x_0 = 1$ (¿ES LA ESCRITURA USUAL?). ESTO DIO LUGAR A LA APROXIMACIÓN $\ln(1,1) \simeq 0,095$. <u>ACOTEMOS</u> EL ERROR:

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3, \quad \text{CON } \xi \text{ ENTRE } x \text{ y } 1.$$

DERIVAMOS: $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

$$|R_2(1,1)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{6}(1,1-1)^3 \right| =$$

$$= \frac{(0,1)^3}{6}\left|\frac{2}{\xi^3}\right| = \frac{(0,1)^3}{3}\underbrace{\frac{1}{\xi^3}}_{?}$$

COMO ξ ESTÁ ENTRE 1 Y $1{,}1$, TENEMOS:

$$1 < \xi < 1{,}1 \Longrightarrow$$

$$1^3 < \xi^3 < (1{,}1)^3 \Longrightarrow$$

$$1 < \xi^3 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\xi^3} < \frac{1}{1} = 1.$$

ENTONCES:

$$|R_2(1{,}1)| = \frac{(0{,}1)^3}{3}\,\frac{1}{\xi^3} < \frac{(0{,}1)^3}{3} = \frac{1}{3000}$$

¿DE QUÉ ORDEN HAY QUE TOMAR EL POLINOMIO DE TAYLOR PARA QUE EL ERROR DE LA APROXIMACIÓN SEA MENOR A 10^{-8}?

NECESITAMOS LA DERIVADA n-ÉSIMA DE f.

$$f^{IV}(x) = \frac{-6}{x^4}, \quad f^{V}(x) = \frac{24}{x^5}; \quad f^{VI}(x) = \frac{-120}{x^6};$$

$$\dots \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

ENTONCES:

$$|R_n(1{,}1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1{,}1-1)^{n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+2}\, n!\,(0{,}1)^{n+1}}{\xi^{n+1}\,(n+1)!} \right|$$

$$= \frac{(0{,}1)^{n+1}}{\xi^{n+1}(n+1)} \underset{\text{Id. anterior}}{<} \frac{(0{,}1)^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{10^8} \Longleftrightarrow 10^8 < (n+1)10^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{n \geq 7}$$