# ANÁLISIS 66 - CLASE 26/08

## FUNCIÓN INVERSA: DOS PROPIEDADES

PRIMERO, ARMEMOS EL EJEMPLO.. CALCULEMOS LA FUNCIÓN INVERSA DE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3x + 1$.
(OBSERVEMOS QUE $f$ ES INVERSIBLE PORQUE ES UNA FUNCIÓN LINEAL CON PENDIENTE NO NULA).

CUENTAS:

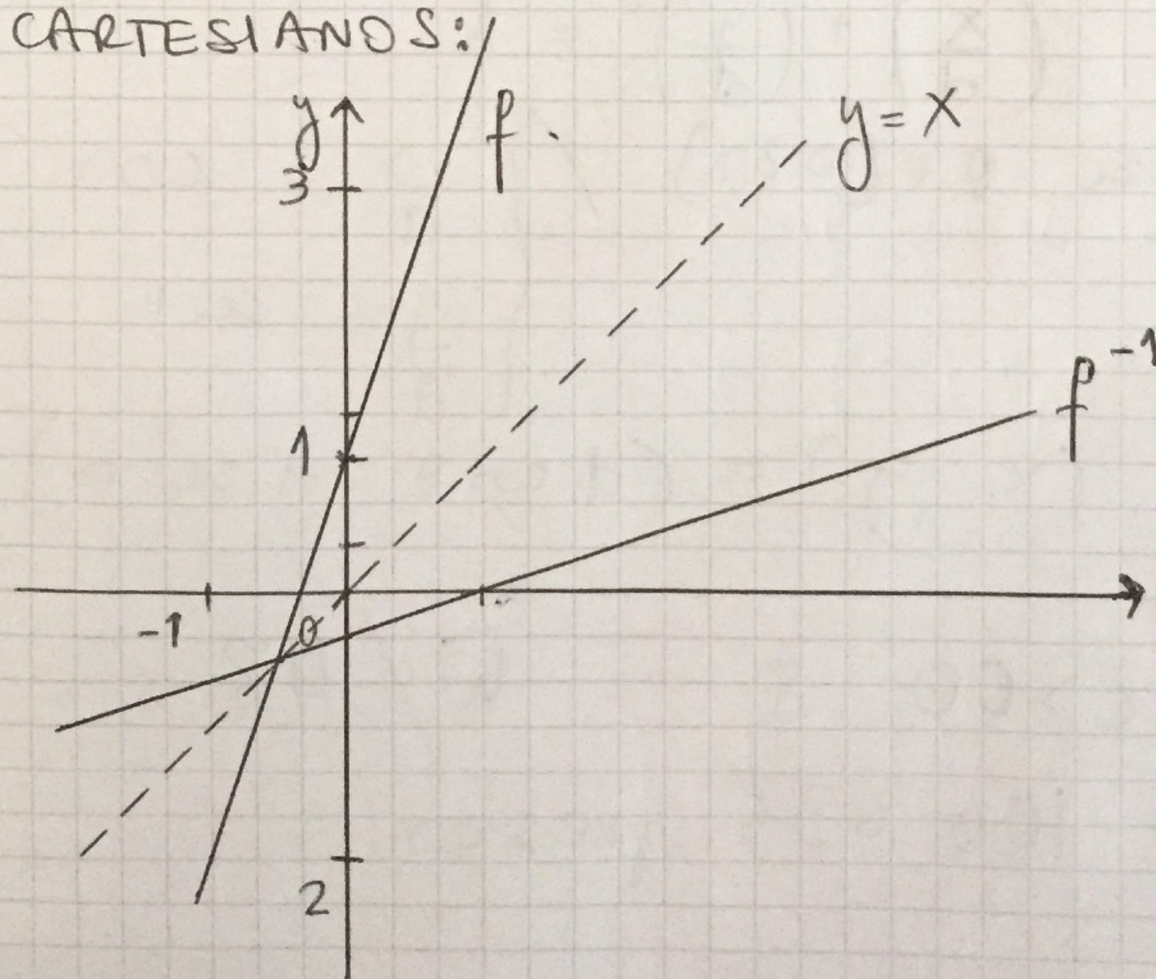
$$y = 3x + 1$$

$$y - 1 = 3x$$

$$\frac{y}{3} - \frac{1}{3} = \frac{y-1}{3} = x$$

$$\Longrightarrow \quad f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}.$$

AHORA GRAFIQUEMOS $f$ Y $f^{-1}$ EN UN MISMO PAR DE EJES CARTESIANOS:




OBSERVAMOS QUE LOS GRÁFICOS DE $f$ Y $f^{-1}$

SON SIMÉTRICOS RESPECTO DEL EJE DE ECUACIÓN $y=x$. ESTO SUCEDE, EN GENERAL, CON CUALQUIER FUNCIÓN $f$ Y SU INVERSA $f^{-1}$, Y SE PUEDE EXPLICAR POR LA SIGUIENTE CADENA DE EQUIVALENCIAS:

$(a, b)$ ES UN PUNTO DEL GRÁFICO DE $f$

$\iff f(a)=b$

$\iff f^{-1}(b)=a$

$\iff (b, a)$ ES UN PUNTO DEL GRÁFICO DE $f^{-1}$.

PROP 1. DADA $f$ UNA FUNCIÓN INVERSIBLE, LOS GRÁFICOS DE $f$ Y $f^{-1}$ SON SIMÉTRICOS RESPECTO DEL EJE DE ECUACIÓN $y=x$.

HAGAMOS UNA CUENTA CON LA FUNCIÓN DE NUESTRO EJEMPLO: CALCULEMOS LA COMPOSICIÓN DE $f$ CON $f^{-1}$, Y LA DE $f^{-1}$ CON $f$:

$$f\circ f^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)+1=$$

$$=3\frac{x}{3}-1+1=x. \quad //$$

$$f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(3x+1)=\frac{3x+1}{3}-\frac{1}{3}=$$

$$=3\frac{x}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=x \quad //.$$

RESULTA $f \circ f^{-1}(x) = x$ y $f^{-1} \circ f(x) = x$.
ESTO SUCEDE SIEMPRE. ANTES DE VER ESTO, DEFINIMOS LA FUNCIÓN IDENTIDAD.

<u>DEF</u>. DADO UN CONJUNTO $A$, LA FUNCIÓN IDENTIDAD EN $A$, $id_A$, ESTÁ DADA POR:

$$id_A : A \longrightarrow A \; / \; id_A(a) = a.$$

SEA $f : A \longrightarrow B$ UNA FUNCIÓN INVERSIBLE. LUEGO, $f^{-1} : B \longrightarrow A$. SABEMOS QUE $f(a) = b$ SI Y SÓLO SI $f^{-1}(b) = a$. ENTONCES:

$$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

y $f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a.$

$\Longrightarrow$ $f \circ f^{-1}(b) = b$ PARA CUALQUIER $b \in B$

y $f^{-1} \circ f(a) = a$ PARA CUALQUIER $a \in A$.

$\Longrightarrow$ $f \circ f^{-1} = id_B$ y $f^{-1} \circ f = id_A$.

<u>PROP 2</u>. SEA $f : A \longrightarrow B$ UNA FUNCIÓN INVERSIBLE. LUEGO:

$$f \circ f^{-1} = id_B \quad y \quad f^{-1} \circ f = id_A.$$

# FUNCIÓN EXPONENCIAL

**DEF:** DADO $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, LLAMAMOS FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE $a$ A LA FUNCIÓN DE LA FORMA:

$$f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = a^x .$$

**EJ:** $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x) = 3^x$.

**OBS:** SI $f$ ES UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

**DISCUSIÓN:** ¿POR QUÉ IMPONEMOS LAS CONDICIONES $a > 0$, $a \neq 1$ A LA BASE DE UNA EXPONENCIAL?

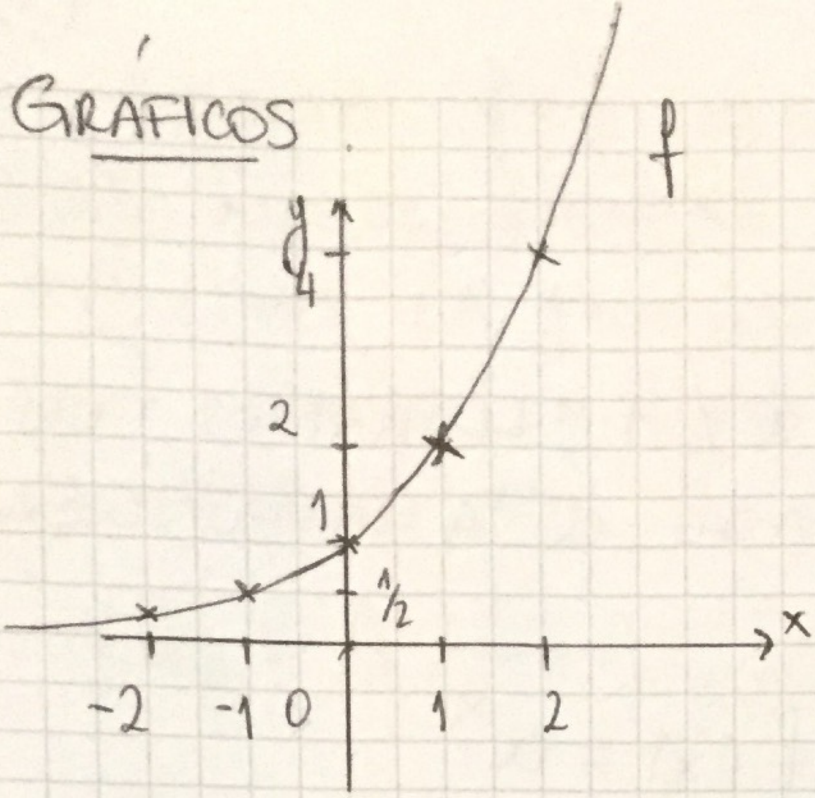
**EJEMPLOS.** $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

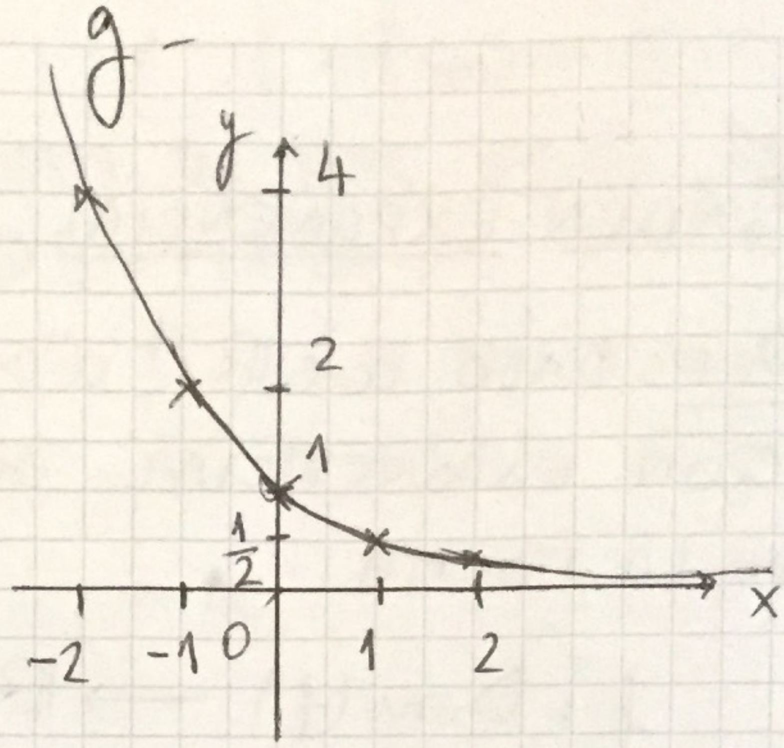
$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x .$$

TABLA DE VALORES:

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ | $4$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ |
| $0$ | $1$ | $1$ |
| $1$ | $2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $2$ | $4$ | $\frac{1}{4}$ |

GRÁFICOS




OBSERVAMOS:

- f ES CRECIENTE
- g ES DECRECIENTE
- $Im(f) = (0; +\infty)$
- $Im(g) = (0; +\infty)$

UN ~~CASO~~ CASO ESPECIAL

$$e \simeq 2{,}71828\ldots$$

NÚMERO DE EULER (YA VEREMOS SU DEFINICIÓN).

A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE $e$ SE LA SUELE LLAMAR F. EXPONENCIAL (A SECAS). COMO $2 < e < 3$, EL GRÁFICO DE $e^x$ ESTARÁ ENTRE LOS GRÁFICOS DE $2^x$ Y $3^x$ (LO VEMOS EN LA GRAFICADORA). ESTA FUNCIÓN TIENE UNA IMPORTANCIA SINGULAR, QUE SE VERÁ MÁS ADELANTE EN EL CURSO.

OBS: LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE a DEFINIDA $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = a^x$ NO ES INVERSIBLE, PUES NO ES BIYECTIVA. EN EFECTO, $f$ ES INYECTIVA, PERO NO SOBREYECTIVA (RECUERDO: UNA FUNCIÓN ES SOBREYECTIVA SI SU CODOMINIO E IMAGEN SON IGUALES; EN ESTE CASO, $Im(f) = (0, +\infty) \neq \mathbb{R}$).

PODEMOS CORRESTRINGIR EL CODOMINIO PARA OBTENER UNA (NUEVA) FUNCIÓN INVERSIBLE.

$$\underbrace{f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty) / f(x) = a^x}$$

¡ES INVERSIBLE! SU INVERSA SE LLAMA:

FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

DADO $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE a ES LA INVERSA DE LA EXPONENCIAL DE MISMA BASE. NOTAMOS $\log_a(x)$.

$$\log_a : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} / \log_a(x) = b$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$a^b = x.$$

OBS: $Dom(\log_a) = \mathbb{R}_{>0} = (0; +\infty)$.

Ej: $\log_2(8) = 3$, PUES $2^3 = 8$.

$\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$, PUES $3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\log_8(1) = 0$, PUES $8^0 = 1$.

SI EL LOGARITMO TIENE BASE 10, NOTAMOS $\log(x)$.

$\log(100) = 2$, PUES $10^2 = 100$.

SI EL LOGARITMO TIENE BASE $e$, NOTAMOS $\ln(x)$; SE LLAMA LOGARITMO NATURAL.

$\ln(e^{12}) = 12$, PUES $e^{12} = e^{12}$ (!)

LA PREGUNTA QUE NOS PROPONE $\log_a(x)$ ES:
¿A QUÉ POTENCIA DEBO ELEVAR LA BASE PARA QUE RESULTE EL ARGUMENTO?

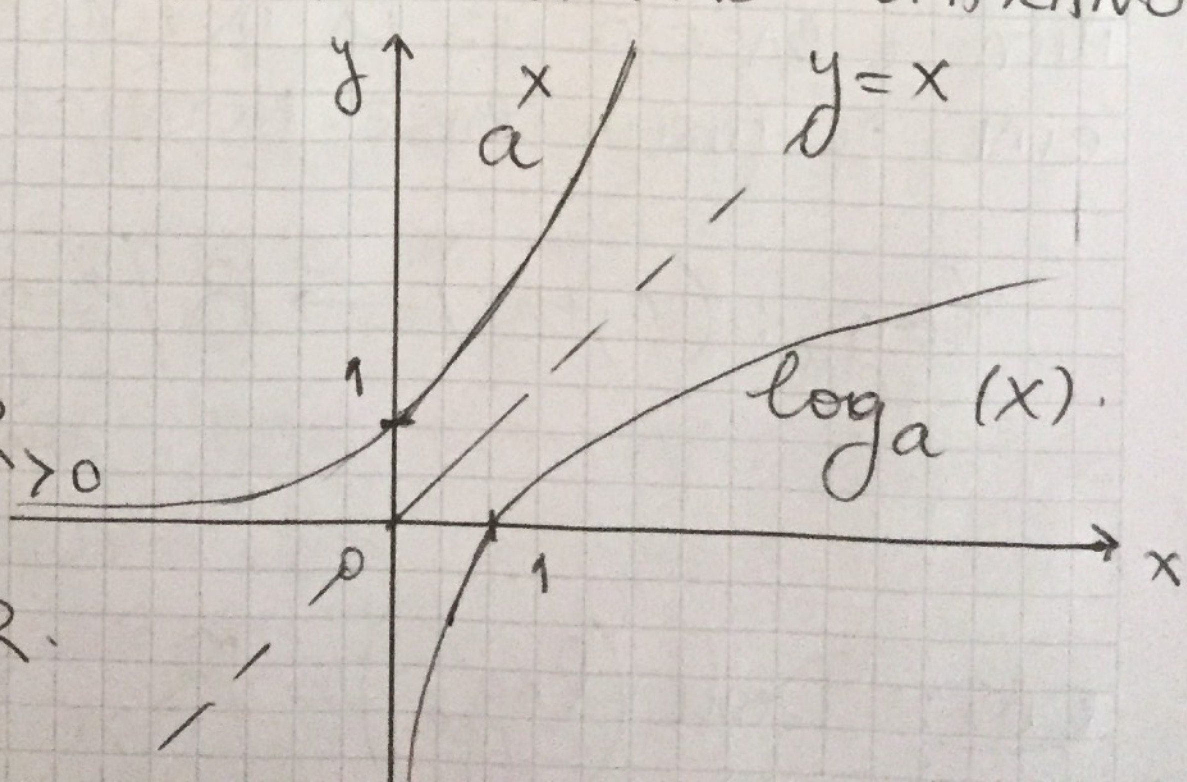
GRÁFICO POR LA PROP. 1 VISTA MÁS TEMPRANO:

Si $a > 1$:

(•) CRECIENTE

(•) $\mathrm{Dom}(\log_a) = \mathbb{R}_{>0}$

(•) $\mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$.

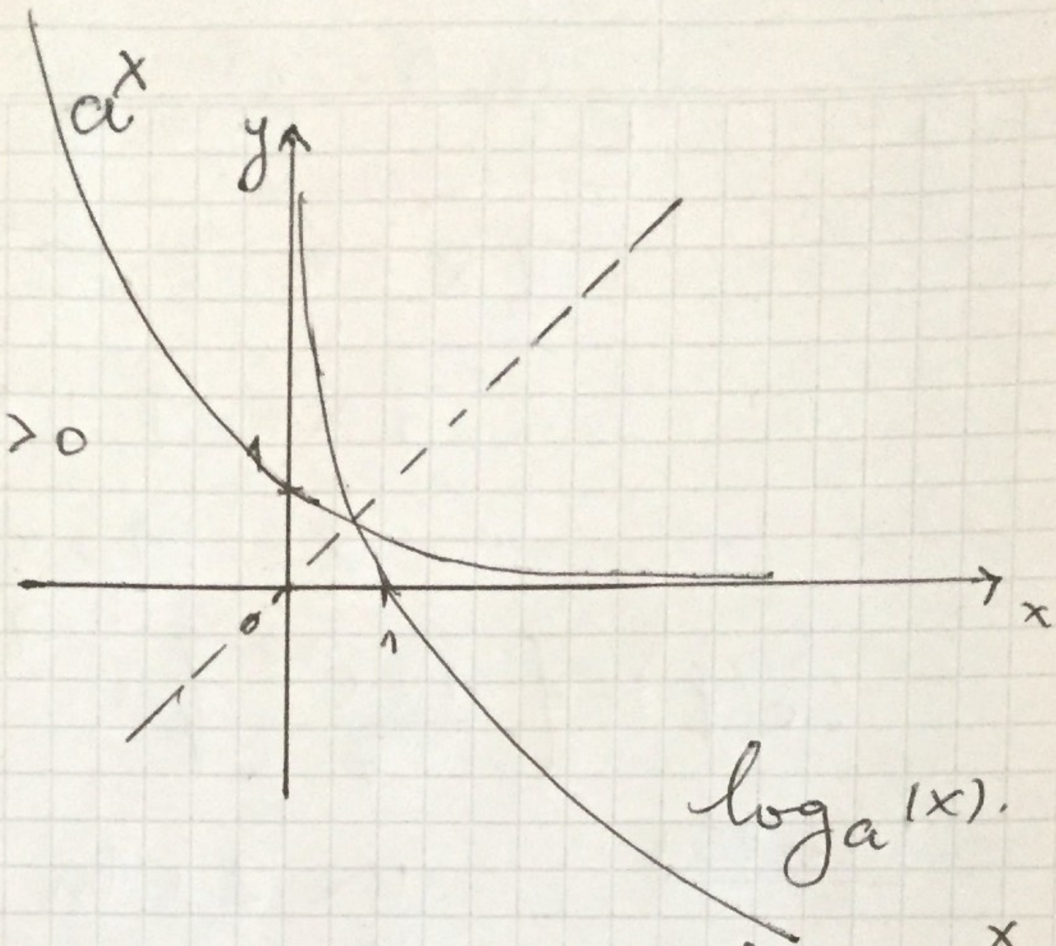


Si $0<a<1$:

(•) DECRECIENTE

(•) $Dom(\log_a) = \mathbb{R}_{>0}$

(•) $Im(\log_a) = \mathbb{R}$.




PROPIEDAD

LA PROP. 2 VISTA ANTES APLICADA A $f(x)=a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a(x)$:

$$\underbrace{a^{\log_a(x)} = x}_{} \quad y \quad \underbrace{\log_a(a^x) = x}_{}.$$

Ej 1: HALLAR $Dom(f)$, $Co(f)$ y $f^{-1}(x)$ PARA $f(x) = 2 + \ln(7x-1)$.

DOMINIO

$$7x - 1 > 0$$
$$7x > 1$$
$$\underbrace{x > \frac{1}{7}}_{}$$

$$Dom(f) = \left(\frac{1}{7}, +\infty\right).$$

CEROS

$$f(x) = 0$$
$$2 + \ln(7x-1) = 0$$

$$\ln(7x-1) = -2$$

$$\underbrace{e^{\ln(7x-1)}} = e^{-2}$$

$$7x - 1 = e^{-2}$$

$$7x = 1 + e^{-2}$$

$$x = \frac{1+e^{-2}}{7}.$$

$$C_0(f) = \left\{ \frac{1+e^{-2}}{7} \right\}.$$

<u>INVERSA</u>

$$y = 2 + \ln(7x-1)$$

$$y - 2 = \ln(7x-1)$$

$$e^{y-2} = e^{\ln(7x-1)}$$

$$e^{y-2} = 7x - 1$$

$$7x = e^{y-2} + 1$$

$$x = \frac{e^{y-2}+1}{7}.$$

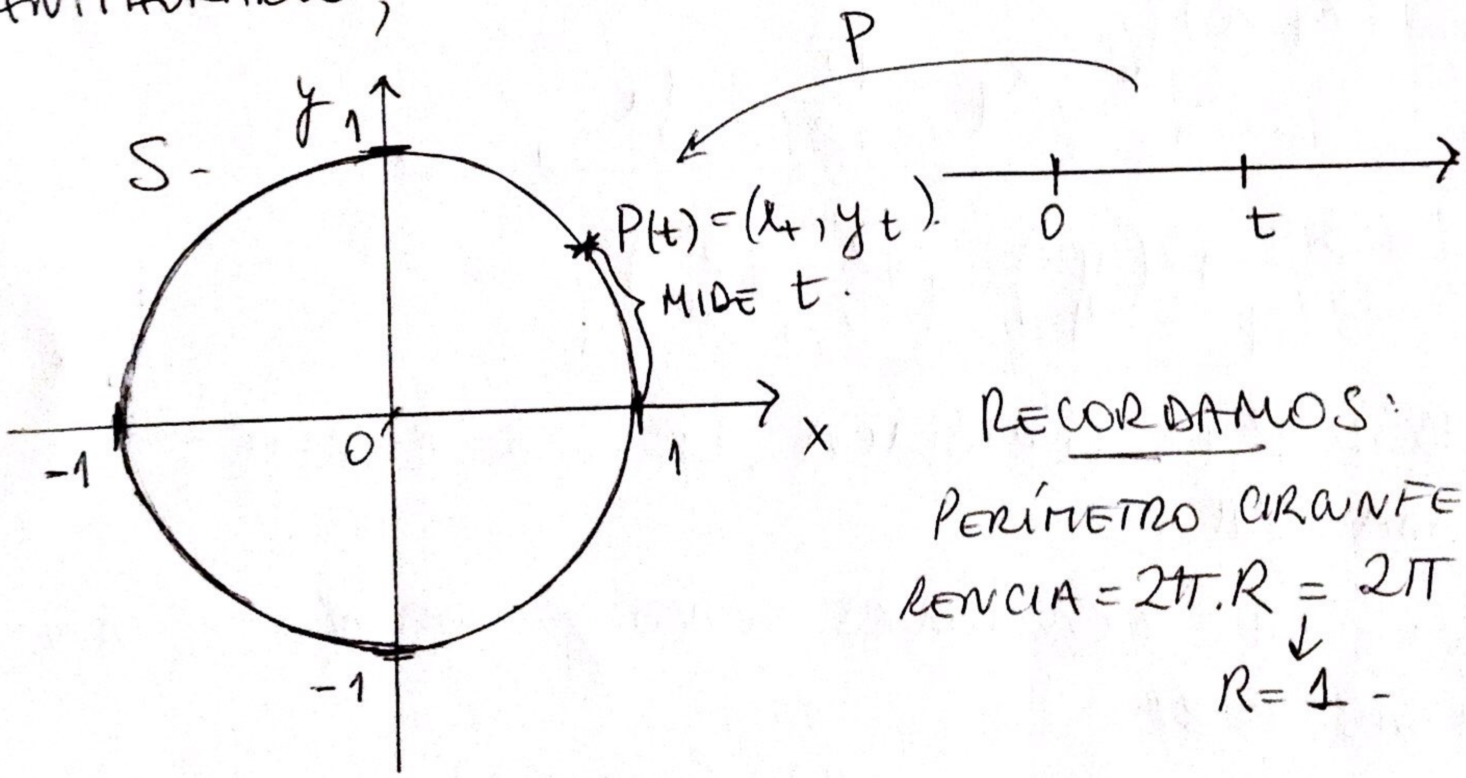
$$\longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{e^{x-2}+1}{7}.$$

$//$

# Funciones Trigonométricas

Vamos a definir las funciones seno y coseno prescindiendo de la idea de ángulo.

Consideremos la circunferencia $S$ de centro $C=(0,0)$ y radio $R=1$; a $S$ la llamaremos circunferencia trigonométrica. Definimos la siguiente función: $P:\mathbb{R} \longrightarrow S \,/\, P(t)=(x_t, y_t)$, donde $(x_t, y_t) \in S$ es tal que el arco de circunferencia $S$ comprendido entre los puntos $(1;0)$ y $(x_t, y_t)$ mide $t$. Si $t>0$, el arco se recorre en sentido antihorario; si $t<0$, en sentido horario.




Recordamos:

Perímetro circunferencia $= 2\pi . R = 2\pi$.

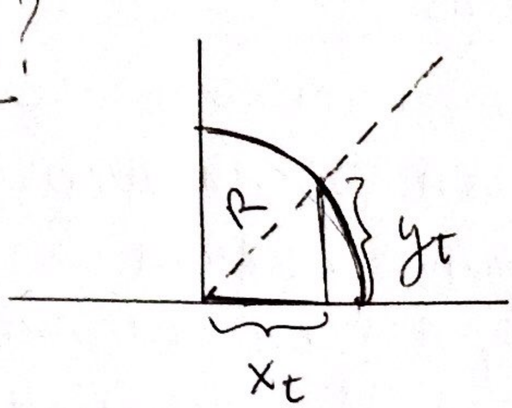
$R = 1$.

Ej: $P(2\pi) = (1,0)$ $\quad P(3\pi) = (-1,0)$ $\quad P\left(\frac{\pi}{4}\right) = (?,?)$

$P(\pi) = (-1,0)$ $\quad P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$ $\quad P(-\pi) = (-1,0)$

2) $P(0)=(1,0)$ $P(5\pi)=(-1,0)$ $P(7\pi)=(-1,0)$

¿ $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ?




PITÁGORAS:

$$y_t^2+x_t^2=R^2$$

$$y_t^2+x_t^2=1$$

PERO, $x_t=y_t$ !

$$\Longrightarrow \quad x_t^2+x_t^2=1$$

$$2x_t^2=1$$

$$x_t^2=\frac{1}{2}$$

$$|x_t|=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$(x_t>0)$

$$\underbrace{x_t=\frac{\sqrt{2}}{2}=y_t.}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{P\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

OBS: $P$ ES PERIÓDICA, i.e., SE REPITE CADA $2\pi$.

DEF: LAS FUNCIONES SENO Y COSENO ESTÁN DADAS POR:

$$\mathrm{sen}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \,/\, \mathrm{sen}(t)=y_t.$$

$$\cos:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \,/\, \cos(t)=x_t.$$

Ej: $\operatorname{sen}(2\pi) = 0 \quad \cos(2\pi) = 1 \quad (P(2\pi) = (1,0))$

$\operatorname{sen}(3\pi) = 0 \quad \cos(3\pi) = -1 \quad (P(3\pi) = (-1,0))$

$\operatorname{sen}(0) = 0 \quad \cos(0) = 1 \quad (P(0) = (1,0))$

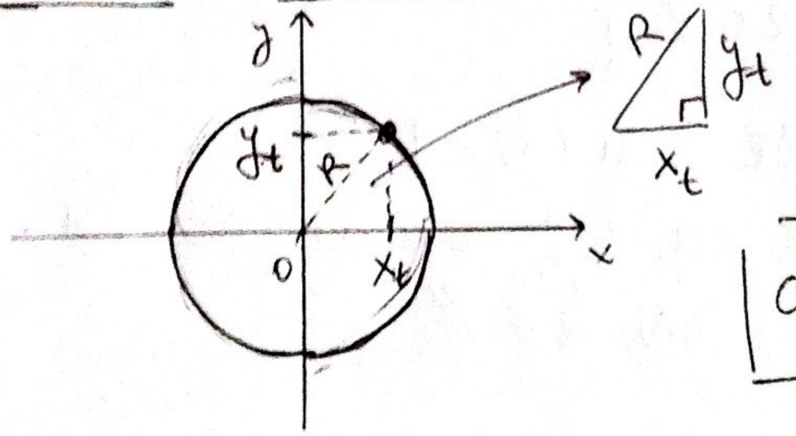
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \left(P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1)\right)$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \left(P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)\right)$

OBS: EL SENO Y EL COSENO HEREDAN LA PERIODICIDAD DE P.

IDENTIDAD PITAGÓRICA

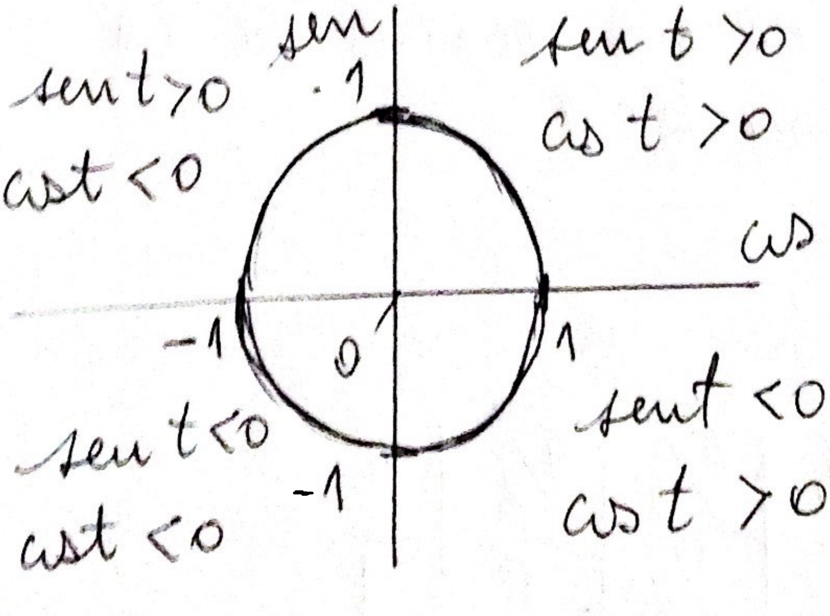



PITÁGORAS

$$x_t^2 + y_t^2 = R^2$$

$$\boxed{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1}$$

ANÁLISIS DEL SIGNO POR CUADRANTE




En $[0, 2\pi]$:

$C_+(\operatorname{sen}) = (0; \pi)$

$C_-(\operatorname{sen}) = (\pi; 2\pi)$

$C_+(\cos) = \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

$C_-(\cos) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

④ ESTUDIO DEL SENO

TABLA DE VALORES:

| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen}(x)$ | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ | $0$ |

A PARTIR DEL GRÁFICO, OBSERVAMOS:

① $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \mathbb{R}$

② $\operatorname{Im}(\operatorname{sen}) = [-1 ; 1]$ -

③ $\operatorname{sen}(x)$ ES CONTINUA.

④ $\operatorname{sen}(x)$ ES PERIÓDICA, CON PERÍODO $2\pi$.

⑤ $C_0 = \{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$.

⑥ MÁXIMOS: DONDE $\operatorname{sen}(x) = 1$.
SE ALCANZAN EN LOS PUNTOS DE LA FORMA $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, CON $k \in \mathbb{Z}$.

⑦ MÍNIMOS: DONDE $\operatorname{sen}(x) = -1$.
SE ALCANZAN EN LOS PUNTOS DE LA FORMA $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, CON $k \in \mathbb{Z}$ -

ESTUDIO DEL COSENO

TABLA DE VALORES:

| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ | $-1$ |

⑤ OBSERVAMOS:

① $Dom(\cos) = \mathbb{R}$    ③ $\cos(x)$ ES CONTINUA

② $Im(\cos) = [-1; 1]$.

④ $\cos(x)$ ES PERIÓDICA, CON PERÍODO $2\pi$.

⑤ $C_0 = \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

⑥ MÁXIMOS: DONDE $\cos(x) = 1$.

SE ALCANZAN EN LOS PUNTOS DE LA FORMA $2k\pi$, CON $k \in \mathbb{Z}$.

⑦ MÍNIMOS: DONDE $\cos(x) = -1$.

SE ALCANZAN EN LOS PUNTOS DE LA FORMA $\pi + 2k\pi$, CON $k \in \mathbb{Z}$.

NOTA USAR CALCULADORA EN MODO "RAD".

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

CONSIDEREMOS LA ECUACIÓN:

$$\operatorname{sen}(x) = a, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

PARA QUE HAYA SOLUCIÓN ES NECESARIO (Y SUFICIENTE) QUE $a \in Im(\operatorname{sen}) = [-1; 1]$.
EN EL CASO EN QUE $a \in [-1; 1]$, LA ECUACIÓN TIENE INFINITAS SOLUCIONES.

BUSCAMOS UNA FORMA GENERAL DE LA SOLUCIÓN

(6) SUPONGAMOS QUE CONOCEMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(x) = a = \operatorname{sen}(\alpha).$$

SE DEDUCE QUE:

$$x = \alpha + 2k\pi \quad , \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

ó

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad , \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

<u>NOTA</u>: EL PROBLEMA, ASÍ, SE REDUCE A ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN.

¿CÓMO? $\longrightarrow$ [TABLA + CIRCUNFERENCIA TRIGO].

<u>Ej 1)</u> $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

BUSCO EN TABLA UNA SOLUCIÓN PARTICULAR:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}(\alpha).$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$$

¿CUÁLES SON LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN EN EL INTERVALO $[0; 2\pi]$? PROBAMOS CON VALORES DE $k$, DE MANERA EXHAUSTIVA:

<u>$k=0$</u>: $x = \dfrac{\pi}{4}$ ✓ ; $x = \dfrac{3}{4}\pi$ ✓

$\underline{k=1}$ : $x = \frac{9}{4}\pi$ X ; $x = \frac{11}{4}\pi$ X (7)

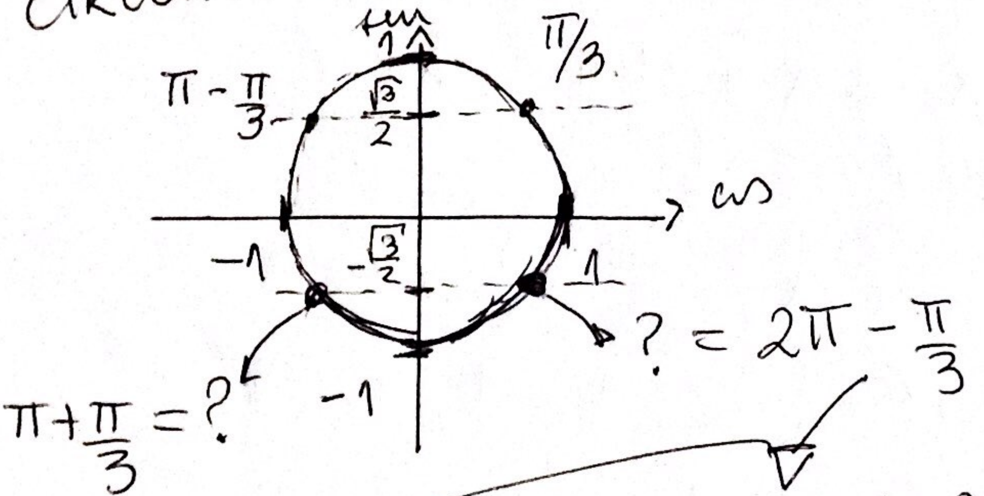
$\underline{k=-1}$: $x = -\frac{7}{4}\pi$ X ; $x = -\frac{5\pi}{4}$ X.

$\Rightarrow$ LAS SOLUCIONES EN $[0;2\pi]$ SON $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3}{4}\pi$.

Ej 2) SOLUCIONES EN $[-\pi, \pi]$ DE:

$$\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

BUSCO EN LA TABLA: NO HAY SOLUCIÓN INMEDIATA. PERO $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. RECURRO A LA CIRCUNF. TRIG.




DOS SOLUCIONES PARTICULARES. TOMAMOS CUALQUIERA.

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow \text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x = \pi - \frac{4}{3}\pi + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

(8)

SOLUCIONES EN $[-\pi, \pi]$:

$\underline{k=0}$ $\quad X = \frac{4}{3}\pi$ ✗ ; $x = -\frac{\pi}{3}$ ✓

$\underline{k=1}$ $\quad$ ——— ; $x = \frac{5}{3}\pi$ ✗

$\underline{k=-1}$ $\quad X = -\frac{2}{3}\pi$ ✓ ; $X = -\frac{7}{3}\pi$ ✗

$\Rightarrow$ SOLUCIONES EN $[-\pi, \pi]$ SON $X = -\frac{\pi}{3}$ Y

$X = -\frac{2}{3}\pi$.

DE FORMA ANÁLOGA, SE PUEDE LLEGAR AL SIGUIENTE RESULTADO:

SI $\alpha$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE $\cos(X) = a$, LA SOLUCIÓN GENERAL A LA ECUACIÓN ES: $X = \pm\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\underline{\text{Ej 3)}}$ RESOLVER EN $[0, 3\pi]$:

$$1 + 2\cos(2X) = 2.$$

$$2\cos(2X) = 2 - 1 = 1$$

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}.$$

SOLUCIÓN PARTICULAR DE $\cos(X) = \frac{1}{2}$: $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$\Longrightarrow$

$$2X = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$X = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

EN $[0, 3\pi] = \left[0 \, ; \frac{18}{6}\pi\right]$

$\underline{k=0}$ $\quad X = \frac{\pi}{6}$ ✓ $\; ; \; X = -\frac{\pi}{6}$ ✗

$\underline{k=-1}$ $\quad X = -\frac{5}{6}\pi$ ✗ $\; ; \; X = -\frac{7}{6}\pi$ ✗

$\underline{k=1}$ $\quad X = \frac{7}{6}\pi$ ✓ $\; ; \; X = \frac{5}{6}\pi$ ✓

$\underline{k=2}$ $\quad X = \frac{13}{6}\pi$ ✓ $\; ; \; X = \frac{11}{6}\pi$ ✓

$\underline{k=3}$ $\quad X = \frac{19}{6}\pi$ ✗ $\; ; \; X = \frac{17}{6}\pi$ ✓

$\underline{k=4}$ $\quad$ ——— $\; ; \; X = \frac{23}{6}\pi$ ✗

LAS SOLUCIONES EN $[0, 3\pi]$ SON:

$$\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \right\}$$