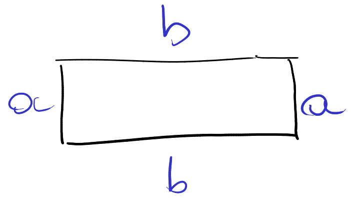
Optimización

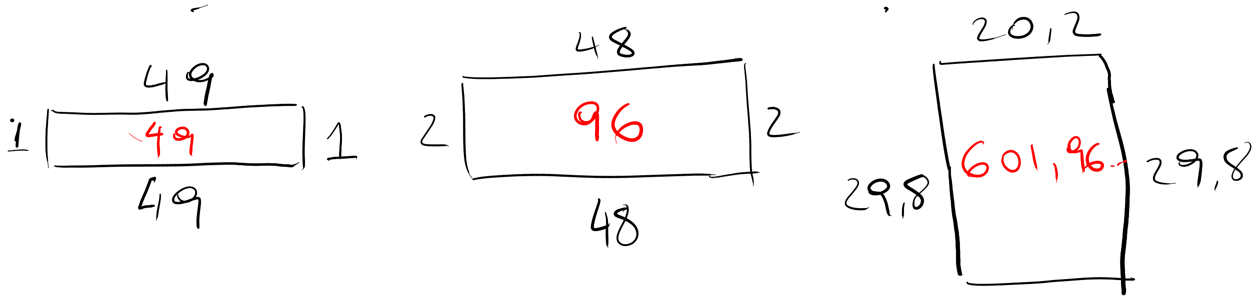
Recuerdo:



Perímetro $= 2a + 2b$

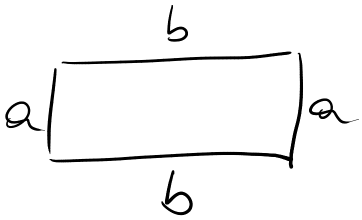
Área $= a \cdot b$

1) Entre los rectángulos de 100 cm de perímetro, ¿cuál es el de mayor área?



Obs: hay infinitos rectángulos con perímetro 100

Idea:



sé que $2a + 2b = 100$, es decir $a + b = 50$ con

$a, b \in [0; 50]$

$$\text{Área} = a \cdot b$$

El problema es equivalente a encontrar el $\boxed{\text{máxim}}$ de la función.

Como $b = 50 - a$ considero la función

$$\text{Área}(a) = a \cdot (50 - a) = 50a - a^2$$

$$\text{Dom}(\text{Área}) = [0, 50]$$

El problema original lo traduje al siguiente:

Si $\text{Área}: [0,50] \to \mathbb{R}$ $\quad \text{Área}(a) = 50a - a^2$

Encontrar el máximo absoluto.

Solución: La función $\text{Área}(a) = 50a - a^2$ es continua en $[0,50]$ y es derivable en $(0,50)$.

Como $[0,50]$ es cerrado y acotado por el teorema de Weirestrass, existe el máx absoluto que busco.

- Derivo, $\text{Área}'(a) = 50 - 2a$ $\quad \text{Dom}(\text{Área}') = (0,50)$
- Busco PC: • 0 y 50 (bordes)

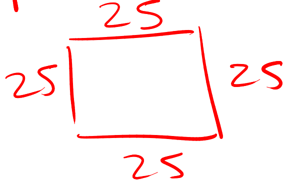
  • $50 - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 25}$

$\Rightarrow PC = \{0, 25, 50\}$.

$\text{Área}(0) = 0.(50-0) = 0$

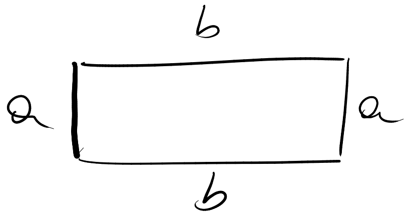
$\text{Área}(25) = 25(50-25) = 625$ → Máx ABS (Weierstrass)

$\text{Área}(50) = 50(50-50) = 0$

⇒ El rectángulo de perímetro 100 de mayor área es 

el cuadrado.

2) Entre los rectángulos de $100\,cm^2$ de área, ¿cuál es el de menor perímetro? ¿Existe uno de mayor perímetro?



$$\text{Area} = a \cdot b = 100 \Rightarrow b = \frac{100}{a}$$

$$\text{Perímetro} = 2a + 2b$$

Me armo la función perímetro

$$P(a) = 2a + 2 \cdot \underbrace{\frac{100}{a}}_{b} = 2a + \frac{200}{a}$$

¿$Dom(P)$? $(0, +\infty)$

Obj: encontrar (si existen) extremos absolutos de $P(a)$

Obs: NO puedo usar Weirstrass.

$P(a)$ es continua y derivable en $(0, +\infty)$.

⊕ Derivo: $P'(a) = (2a + 200a^{-1})' = 2 + 200(-1)a^{-2}$

$$= 2 - \frac{200}{a^2}$$

$$Dom(P') = (0, +\infty)$$

⊕ Busco PC:

↳ $Dom(P) = Dom(P') \Rightarrow$ NINGUNO

↳ $P'(a) = 0$

$$2 - \frac{200}{a^2} = 0 \iff 2 = \frac{200}{a^2}$$

$\Longleftrightarrow a^2 = 100$

$\Longleftrightarrow a = 10$ o $a = -10$

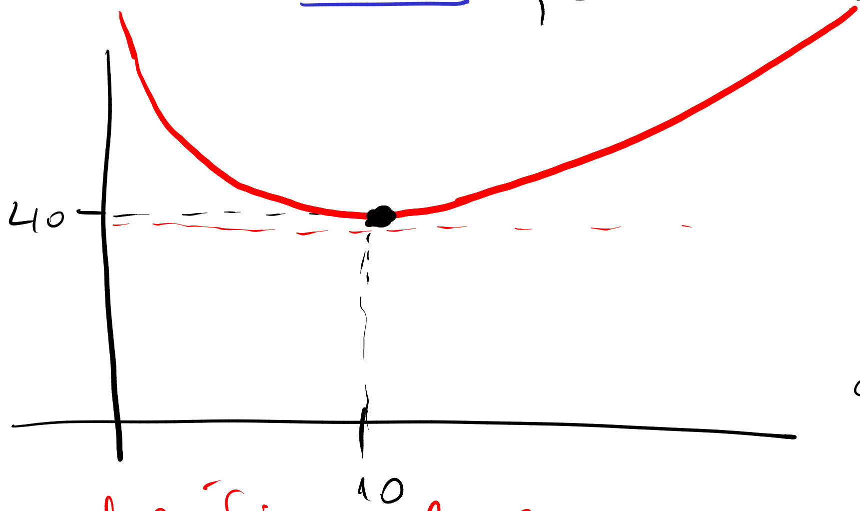
✓ $10 \in (0, +\infty)$ ✗ $-10 \notin (0, +\infty)$

$\Rightarrow PC = \{10\}$.

⊕ TABLA

	$(0, 10)$	10	$(10, +\infty)$	
P'	$P'(1) = 2 - \frac{200}{1^2}$ −	0	$P'(11) = 2 - \frac{200}{11^2}$ +	P' cont (CTB)
P	↘	MÍN	↗	

Hasta ahora sabemos que en $a = 10$ $P(a)$ tiene un mínimo local que vale $P(10) = 40$.



$$P(a) = 2a + \frac{200}{a}$$

$$\lim_{a \to 0^+} P(a) = +\infty$$

$$\lim_{a \to +\infty} P(a) = +\infty$$

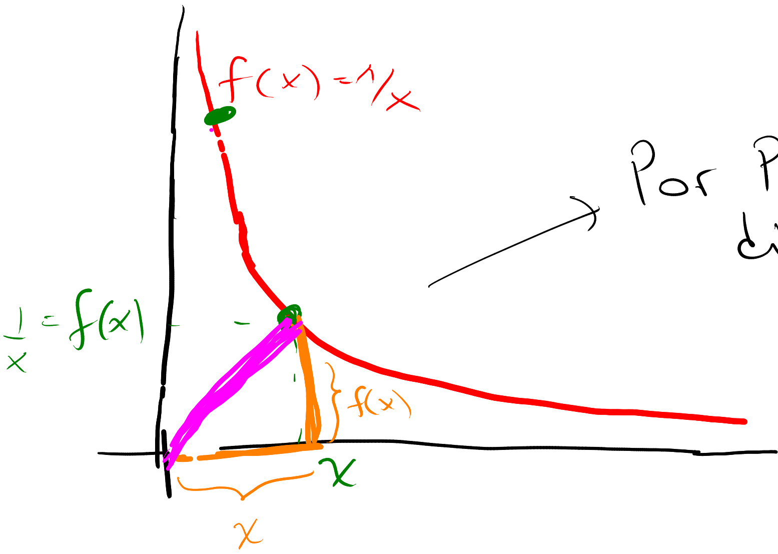
$\Rightarrow$ Con el gráfico el mínimo es global.

Entre los rectángulos de 100 cm^2 de área, el de menor perímetro es 10×10 el cuadrado

y No existe uno de perímetro máximo.

Intuición: No hay perímetro máximo porque puedo "achatar" tanto como quiera el rectángulo manteniendo el área.

3) Dada $f(x) = \frac{1}{x}$ con $x > 0$. ¿Cuál es el punto $(x; f(x))$ más cercano al origen?



Por Pitágoras la función distancia al origen es

$$d(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

Cont y deriv

quiero calcularle el mínimo absoluto.

$\boxed{\text{Dom } d(x) = (0, +\infty)}$

Como la función $\sqrt{\ }$ es creciente, el mínimo de $d(x)$ se alcanza en el mismo lugar que el mínimo de

$$\tilde{d}(x) = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

⊕ Derivo, $\tilde{d}'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$ $\quad$ $\text{Dom}(\tilde{d}') = (0, +\infty)$

④ Busco PC

$\to \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(f') \longrightarrow$ NINGUNO

$\to 2x - \dfrac{2}{x^3} = 0 \iff 2x = \dfrac{2}{x^3}$

$\iff 2x^4 = 2$

$\iff x^4 = 1$

$x = 1$ ✓ $1 \in (0, +\infty)$

$x = -1$ ✗ $-1 \in (0, +\infty)$

$\Longrightarrow PC = \{1\}$

$2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 1 - 16 = -15$

$2 \cdot 2 - \frac{2}{2^3} = 4 - \frac{1}{4}$

	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	MÍN LOCAL	$\nearrow$

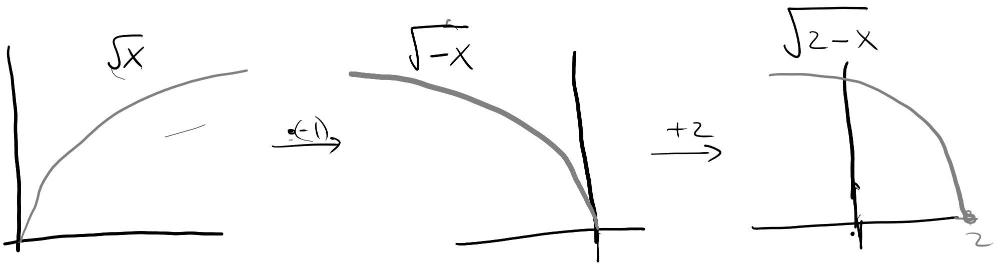
Como es el único PC $\Rightarrow$ MÍN GLOBAL

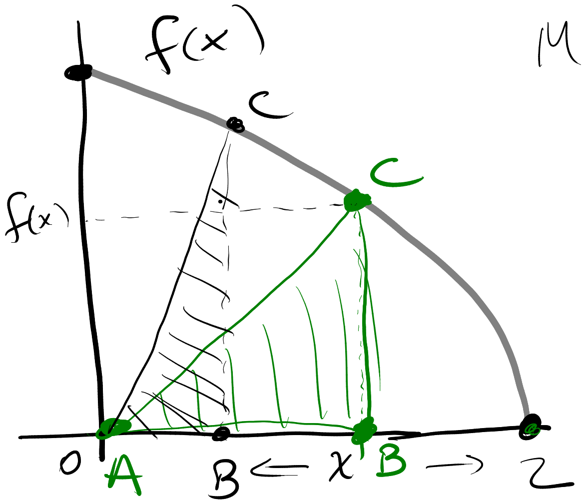
$\Longrightarrow$ EL PUNTO MÁS CERCANO AL ORIGEN ES $(1, f(1)) = (1, 1)$

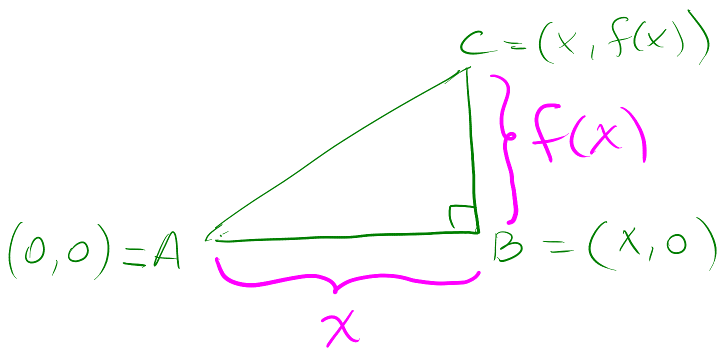
4) Sea $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2-x}$.

Entre los triángulos de vértices $\overbrace{(0,0)}^{A}$, $\underbrace{(x,0)}_{B}$ y $(\underbrace{x, f(x)}_{C})$, ¿cuál es el de área máxima?

Recuerdo: el área de un triángulo es $\frac{b.h}{2}$.







Me construyo la función

$$\text{Área}(x) = \frac{\overbrace{x}^{\text{base}} \cdot \overbrace{f(x)}^{\text{altura}}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Área}(x) = \dfrac{x\sqrt{2-x}}{2} \\ \text{Dom}(\text{Área}(x)) = [0,2] \\ \text{quiero calcularle el máximo absoluto.} \end{array} \right.$$

La función Área es cont en $[0,2]$, derivable en $(0,2)$ y como $[0,2]$ es cerrado y acotado, por Weierstrass existen máx y mín abs.

$$\text{Area}'(x) = \left(\frac{x\sqrt{2-x}}{2}\right)' = \left(\frac{x\cdot(2-x)^{1/2}}{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(1\cdot(2-x)^{1/2} + x\cdot\boxed{\frac{1}{2}(2-x)^{-1/2}\cdot(-1)}\right)$$

$$\left[(2-x)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}(2-x)^{-1/2}\cdot(-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-x} - \frac{x}{2\sqrt{2-x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2(2-x)-x}{2\sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{4-3x}{4\sqrt{2-x}}$$

$\text{Dom}\left(\text{Area}'(x)\right) = (0,2)$

Busco PC:

→ Dom Área vs Dom Área' → 0 y 2

$[0,2]$ $(0,2)$

→ $\dfrac{4-3x}{4\sqrt{2-x}} = 0 \iff 4-3x=0 \iff x=\dfrac{4}{3}$ ✓

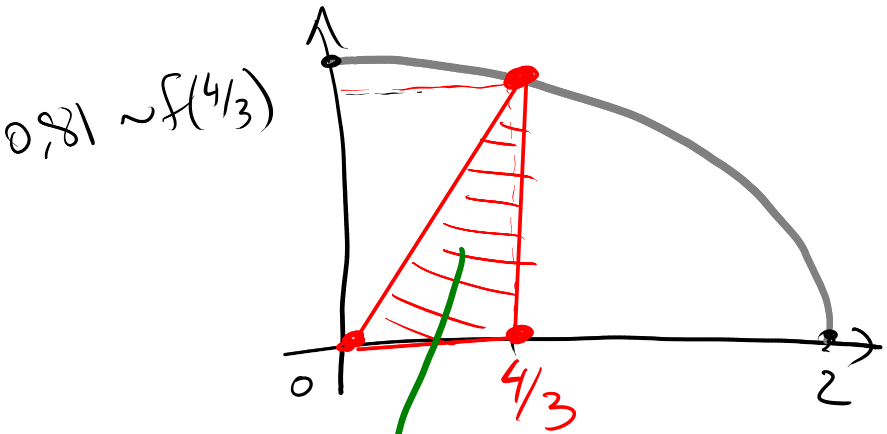
$\frac{4}{3} \in [0,2]$

$\Rightarrow PC = \left\{0, \frac{4}{3}, 2\right\}$.

$$\text{Área}(0) = \frac{0 \cdot \sqrt{2-0}}{2} = 0 \longrightarrow \text{MÍN ABS}$$

$$\text{Área}(4/3) = \frac{4/3 \cdot \sqrt{2-4/3}}{2} \sim 0{,}54 \longrightarrow \text{MÁX ABS}$$

$$\text{Área}(2) = \frac{2 \cdot \sqrt{2-2}}{2} = 0 \longrightarrow \text{MÍN ABS}$$



Rta: $A = (0,0)$
$B = (4/3, 0)$
$C = (4/3, \sim 0{,}81)$

triángulo de área máxima $(\sim 0{,}54)$