

Matemática 3

PRÁCTICA 6: Estimación puntual.

1. Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población X , que cumple $E(X) = \mu$ y $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Sean

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Dos estimadores de μ . ¿Cuál es el mejor estimador de μ ? Explique su elección.

2. Sea X_1, X_2, \dots, X_7 una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2 . Considere los siguientes estimadores de μ :

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_7}{7},$$

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2},$$

$$\hat{\Theta}_3 = \frac{2X_1 - X_7 + X_3}{3}.$$

- a) ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?
 - b) Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.
 - c) ¿Cuál estimador es el “mejor”? ¿En qué sentido es mejor?
3. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de tamaño n .
 - a) Demuestre que \bar{X}^2 es un estimador sesgado de μ^2 .
 - b) Determine la magnitud del sesgo de este estimador.
 - c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño n de la muestra?
 4. El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días se observan: 2, 5, 3, 3, 7 desconexiones accidentales.
 - a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ . ¿El estimador es insesgado? ¿Es consistente?
 - b) Obtenga la estimación de λ a partir de la muestra dada.
 - c) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurran 3 o más desconexiones accidentales y encuentre la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.
 5. a) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una v.a. $B(1, p)$. Hallar un estimador de máxima verosimilitud (E.M.V.) de p .

- b) Se selecciona una muestra aleatoria de n chips fabricados por cierta compañía. Sea X el número entre los n que tienen defectos y $p = P(\text{el chip tiene defecto})$. Supongamos que solo se observa X (el número de chips con defectos).
- b_1) Si $n = 100$ y $x = 5$, ¿cuál es la estimación de p ?
- b_2) Si $n = 100$ y $x = 5$, ¿cuál es el E.M.V. de la probabilidad $(1 - p)^6$, de que ninguno de los siguientes 6 chips que se examinen tenga defectos?
6. Denotemos por X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y supongamos que la f.d.p. de X es:

$$f(x) = \begin{cases} (2\theta + 1)x^{2\theta} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{donde } \theta > -\frac{1}{2}.$$

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información:

0,92, 0,79, 0,90, 0,65, 0,86, 0,47, 0,73, 0,97, 0,94, 0,77

- a) Utilice el método de los momentos para obtener un estimador de θ y luego calcule la estimación para esta información.
- b) Obtenga el E.M.V. de θ y luego calcule la estimación para la información dada.
7. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$.
- a) Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de momentos. ¿Los estimadores son insesgados?
- b) Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de máxima verosimilitud. ¿Los estimadores son insesgados?
- c) Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg²):

392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375

Si se supone que la resistencia al corte está normalmente distribuida, estime la verdadera media de resistencia al corte y la desviación estándar usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.

- d) Estime la probabilidad de que la resistencia al corte de una soldadura al azar sea menor que 420.