

Propagación de ondas en medios desordenados

Federico Lamagna

Director: Dr. Esteban Calzetta



Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Departamento de Física - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Octubre de 2016

Resumen

En la presente tesis se aplican las herramientas del grupo de renormalización funcional (FRG, por sus siglas en inglés) al problema de una onda escalar en un medio desordenado. Se parte de una ecuación de Helmholtz en un medio donde la velocidad de propagación es una función complicada de la posición, y una descripción estadística resulta apropiada. La ecuación es lineal, por lo que existe función de Green, y su valor medio responde a una ecuación de Dyson. Para resolver la ecuación de Dyson es necesario dar la autoenergía, que puede obtenerse perturbativamente.

En esta tesis se explora como alternativa a la expansión perturbativa el uso del FRG. Este método consiste en construir una secuencia de medios, parametrizada por una variable Λ llamada el “cutoff”, que comienza por un medio sin desorden cuando $\Lambda \rightarrow \infty$ y tiende al medio físico cuando $\Lambda \rightarrow 0$. Comparando medios correspondientes a valores próximos de Λ , es posible encontrar ecuaciones que determinan como varían las propiedades del medio, entre ellas la autoenergía.

Nos concentraremos en el cálculo de la autoenergía a impulso cero, con la cual se define una velocidad de propagación efectiva en el medio, a partir de la solución de una ecuación diferencial no lineal obtenida mediante el FRG. La misma se resuelve de forma aproximada, y de forma numérica. Estas soluciones se comparan con la solución perturbativa a dos loops, para una función de correlación de un medio compuesto por esferas idénticas distribuidas aleatoriamente sobre un fondo homogéneo, las esferas y el medio de fondo teniendo una diferencia fija en el índice de dispersión. Se encuentra en este caso una parte imaginaria de la autoenergía, que está vinculada a una distancia de decaimiento de la onda promedio. Las soluciones a la ecuación diferencial obtenida del FRG coinciden con la solución a dos loops, por lo que el FRG, bajo las aproximaciones adoptadas, se muestra como una alternativa a la expansión perturbativa de la autoenergía.

La vida y el mundo, como visión de un hombre cualquiera: Vivimos sobre piedras y barro, entre maderas con hojas verdes, devorando fragmentos del universo que nos incluye, entre fogatas, entre fluidos, combinando resonancias, protegiendo lo pasado y lo por venir, dolorosos, térmicos, rituales, soñando que soñamos, irritados, oliendo, palpando, entre personas, en un insaciable jardín que nuestra caída abolirá.

Visión de la física: Una opaca, una interminable extensión de protones y de electrones, irradiando en el vacío; o, tal vez (fantasma del universo), el conjunto de irradiaciones de una materia que no existe.

— Plan de evasión, Adolfo Bioy Casares (1945)

Índice general

1. Introducción	1
2. La ecuación de ondas	5
2.1. Ecuación de Helmholtz	5
2.2. La expansión perturbativa	7
2.3. Aproximaciones a la ecuación de Dyson	9
3. El formalismo funcional	13
3.1. El funcional generador	13
3.2. Propiedades derivadas del funcional generador	15
3.3. La acción efectiva	17
4. Renormalización	21
4.1. Idea fundamental	21
5. Renormalización Funcional	27
5.1. Introducción al FRG	27
5.2. Aplicación del FRG a la ecuación de ondas	31
6. Simplificaciones a la ecuación de flujo	45
6.1. Forma del cutoff	45
6.2. Ecuación para f	46
6.3. Solución aproximada	47
7. Comparación entre métodos	51
7.1. Modelo: Medio homogéneo con burbujas	51

7.2. Solución numérica de la ecuación diferencial	58
7.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial	60
7.4. Expansión perturbativa de Σ	62
7.5. Resultados	65
8. Conclusiones	73
A. Desarrollo Perturbativo de las Ecuaciones Diferenciales	75

Introducción

En la presente tesis se tratará el tema de la propagación de ondas en medios desordenados. En particular, se estudiará una ecuación de ondas escalar, la ecuación de Helmholtz en 3 dimensiones, en un medio donde la velocidad de propagación de la onda depende del punto en el espacio. Esta dependencia puede ser en principio complicada, y presentar variaciones muy fuertes ante pequeños desplazamientos en la posición. Es por esto que se recurre a una descripción estadística del medio, a través de la especificación de las funciones de correlación del campo $\epsilon(\mathbf{x})$, la inversa al cuadrado de la velocidad de propagación de la onda. Esta descripción estadística resulta más satisfactoria que una resolución exacta del problema, que además de imposible excepto en casos extremadamente simplificados (y que posiblemente no representan satisfactoriamente un sistema desordenado), tal resolución exacta suele resultar inservible ya que presentará la misma dependencia fuerte ante pequeñas variaciones del punto de origen de la onda, o el punto de observación. Por ejemplo, el índice de refracción para ondas de radio en la tropósfera difiere en menos de 10^{-6} de un valor medio cercano a la unidad, pero con fluctuaciones de una dependencia complicada con el tiempo y espacio, cambiando de signo en distancias del orden de 50m [Frisch, 1968]. En un estudio de transmisión de ondas en este medio, esta fluctuación del índice de refracción se traduce en fluctuaciones en la onda. Una descripción determinista es no solo imposible, sino que poco interesante ya que al variar el punto de emisión de la onda en una distancia del orden de 50m, esta forma exacta de la onda cambiará completamente. Este tipo de problema aparece en sistemas con muchos grados de libertad, donde una descripción completa del problema es de extrema complejidad, sin embargo cantidades promedio responden a ecuaciones más simples. Otros ejemplos de medios desordenados se encuentran en astrofísica, por ejemplo en la atmósfera solar al estudiar su espectro, o en materia condensada, como pueden ser sistemas electrónicos desordenados [Anderson, 1958], o en propagación de luz en medios turbios [Lozano et al., 2012].

Típicamente un problema de ondas en un medio desordenado puede ser lineal o no lineal; en el caso de la ecuación de Helmholtz el problema es lineal, por lo que existe una función de Green. Es en esta función de Green que concentraremos nuestros esfuerzos en esta tesis. Una forma usual de resolver un problema de esta índole es a través de una expansión perturbativa, con su correspondencia en diagramas de Feynman. La función de Green promediada sobre todas las configuraciones resuelve una ecuación de Dyson, donde el núcleo que aparece es el operador de masa o autoenergía Σ . Este operador se obtiene de una correspondiente expansión perturbativa. Investigaremos cómo en un problema donde la velocidad de fase es siempre real se pueden obtener, al promediar la función de Green, un medio “efectivo” donde existe una velocidad de fase con una parte imaginaria [Eckert, 2010]. Esto implica que la función de Green promedio presenta un decaimiento exponencial real, que se interpreta como la pérdida de energía de la onda coherente producto del desorden [Tourin et al., 2000]. Esta parte imaginaria ya se observa en la expansión

a 1 loop de Σ en diversos casos, como es el caso de ruido blanco [Knothe, 2012], o el de un medio formado por un fondo homogéneo con intrusiones esféricas sobre este fondo, los centros de las mismas distribuidos al azar [Franco and Calzetta, 2015].

El grupo de renormalización (RG) abarca un conjunto de métodos con los cuales se pueden analizar problemas de diversa complejidad. El concepto fundamental está en estudiar el cambio en un sistema físico al modificar la escala de distancias. La escala de distancias descriptas por la teoría se regula a través de un *cutoff*, o corte en el espectro de impulsos. De esta forma, un impulso máximo corresponde a una distancia mínima, y un impulso mínimo a una distancia máxima. Una variante del RG, llamada grupo de renormalización funcional (FRG), permite escribir ecuaciones diferenciales para funcionales generadores de la teoría física. Esto se hace a través de un cutoff infrarrojo: se calcula un funcional de la teoría (típicamente la acción efectiva) quitando del espectro los modos de longitud de onda larga. Luego, variando este cutoff se obtiene la llamada ecuación de flujo, una ecuación integro-diferencial funcional. Removiendo el cutoff (llevándolo a 0) se recupera el funcional completo de la teoría [Blaizot et al., 2006, Kopietz et al., 2009]. Debido a que es una ecuación exacta, es imposible resultados significativos sin hacer previamente alguna aproximación.

La idea fundamental del FRG está representada de forma sencilla en la figura (1.1) a continuación. En esta se observa una función a la que se removieron distintas partes de su espectro de frecuencias. En la primera, sólo contribuyen las frecuencias más altas, la imagen del medio contiene una mayor parte del espectro, pero está todavía incompleto, por último la tercera imagen contiene todo el espectro, se recupera la función original. El FRG da una ecuación diferencial que rige una evolución análoga pero para un funcional en vez de una función.

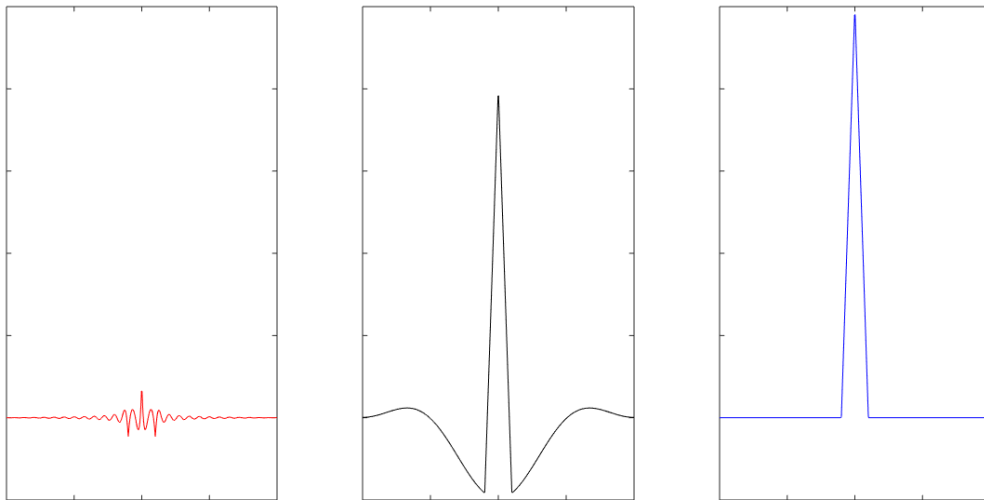


Figura 1.1: Proceso de renormalización ilustrado: Partiendo de una función, se trunca su espectro de frecuencias a partir de un valor mínimo. Del lado izquierdo, sólo están las frecuencias más altas. En el medio, el espectro es mayor, pero aún incompleto. Derecha: completando el espectro se recupera la función original.

El propósito de esta tesis es buscar la forma de obtener la función de Green promedio de la ecuación de ondas en el medio desordenado, basándose en los métodos del FRG. Se escribe la ecuación

de flujo para la acción efectiva, que describe su evolución con el cutoff infrarrojo Λ . Esta ecuación interpola entre una acción clásica en $\Lambda = \infty$ y la acción efectiva completa en $\Lambda = 0$. Para escribir una “acción clásica” para la ecuación de ondas se recurre al formalismo de integral de camino y de Martin-Siggia-Rose [Zanella and Calzetta, 2002, Kamenev, 2011, Calzetta and Hu, 2008]. Este formalismo permite escribir, a través de campos auxiliares, una funcional generadora de momentos de los campos como una integral funcional. La ecuación del FRG tiene la propiedad de ser exacta, aunque más allá de demostraciones teóricas no tiene utilidad en esta forma, y es necesario recurrir a aproximaciones para obtener alguna solución significativa. Una forma equivalente a la ecuación funcional es tener ecuaciones diferenciales para la totalidad de los vértices efectivos, esto es, una jerarquía infinita de ecuaciones diferenciales acopladas. Algunos esquemas de aproximación involucran un truncado de esta jerarquía de vértices, declarando que a partir de un cierto orden sean nulos. Esto cierra el sistema de ecuaciones diferenciales, aunque las mismas seguirán siendo no lineales y complicadas de resolver. Otro esquema de aproximación consiste en parametrizar la acción efectiva, y traducir la ecuación diferencial funcional a ecuaciones diferenciales para las constantes de acoplamiento de la acción efectiva.

Se terminó optando por una parametrización sencilla de la acción efectiva, que respeta las simetrías de la acción clásica. De la ecuación del FRG se obtienen dos ecuaciones diferenciales acopladas para dos parámetros de la acción efectiva, que son también los primeros coeficientes de una expansión en impulsos de la autoenergía. La autoenergía en impulso cero resulta una cantidad útil ya que a partir de ella se define la velocidad de fase efectiva. Es entonces esta autoenergía en impulso cero que se resuelve a través del FRG, tanto de una resolución numérica a las ecuaciones diferenciales, como a través de una resolución analítica aproximada. Finalmente, estas soluciones se comparan con lo que se obtiene de una expansión perturbativa de la autoenergía.

Estructura de la tesis

Los capítulos 2 y 3 presentan el marco teórico que concierne a la ecuación de Helmholtz en un medio aleatorio. En el capítulo 2 se parte de la ecuación diferencial, se define la función de Green, y luego de un promediado sobre las configuraciones del medio se arriba a la ecuación de Dyson para la función de Green promedio. A través de la ecuación de Dyson se define la autoenergía, que está vinculada a la velocidad de fase efectiva del medio. Se trata un desarrollo perturbativo de esta ecuación, para obtener la función de Green promedio y la autoenergía. Se define también una cantidad adimensional, el número de Reynolds generalizado, como medida de la importancia del desorden. Este parámetro además sirve para medir la calidad de una expansión perturbativa. El capítulo 3 se refiere al uso del formalismo funcional para definir una acción clásica, a partir de la cual se escribe un funcional generador de momentos de las distribuciones con una integral funcional. Mediante la transformada de Legendre se obtiene una acción efectiva, y de la cual es posible derivar la autoenergía.

En el capítulo 4 se hace una breve revisión de los conceptos de renormalización, describiendo las metodologías con que se aplican a distintas áreas de la física. Es en los métodos del grupo de renormalización funcional (FRG) que esta tesis está basada, y ese es el tema del capítulo 5. En este capítulo se trata primero un ejemplo sencillo para la obtención de la ecuación del FRG y se discuten en forma general esquemas de aproximación y truncado. Luego, aplicándolo a la acción clásica obtenida en el capítulo 3, escribimos la ecuación del FRG para la acción efectiva de la onda escalar en un medio desordenado, a valor fijo del cutoff Λ . Recurriendo a una parametrización de

esta acción efectiva, se reduce la ecuación diferencial funcional a un problema de dos ecuaciones diferenciales acopladas para dos parámetros de la autoenergía.

Si bien estas ecuaciones diferenciales constituyen una simplificación, siguen siendo de alta complejidad por ser ecuaciones acopladas y no lineales. En el capítulo 6 se tratan aproximaciones a estas ecuaciones diferenciales, con éstas y eliminando la no linealidad es posible encontrar una solución analítica. En el capítulo 7 se especifica la función de correlación de un medio de fondo homogéneo con esferas de distinta velocidad de propagación dispuestas al azar. De este medio se tiene la solución perturbativa a dos loops. Se desarrollan soluciones numéricas de la ecuación diferencial con la no linealidad, y soluciones analíticas aproximadas. Finalmente, se comparan las tres soluciones, para distintos valores del número de Reynolds generalizado. Esta comparación de las soluciones muestra que están en acorde, por lo que el método del FRG, con la parametrización de acción efectiva dada y aproximaciones resulta equivalente a la expansión perturbativa a dos loops de la autoenergía.

Finalmente, el capítulo 8 concluye la tesis, y se discuten otros caminos que se pueden explorar con los métodos descritos en este trabajo.

La ecuación de ondas

Como punto de partida consideraremos una onda escalar en un medio cuyas propiedades presentan dependencias muy complicadas en el espacio, y que entonces resulta conveniente describirlas mediante métodos estadísticos. Es decir, en vez de estar interesados en una solución exacta del problema para una dada configuración del medio (que además de complicada esta solución resulta poco representativa de una configuración distinta pero igualmente probable), estaremos interesados en un comportamiento promedio de la onda. Esto es, lo que surge de promediar las ondas resultantes de distintas configuraciones del medio. Nos concentraremos en el caso de una onda escalar, ya que resulta más clara la exposición. Magnitudes físicas que pueden ser descritas por campos escalares abundan, como por ejemplo la presión, densidad, temperatura, etc. Por otra parte, en el caso de ondas electromagnéticas, las mismas están descritas por un campo vectorial. La adaptación de las ecuaciones aquí tratadas al caso electromagnético resulta directa, y el formalismo que se obtiene es similar, con algunos efectos nuevos como la posibilidad de transferencia de energía entre distintos modos de vibración, debido a la presencia del medio. Referencias útiles en este capítulo son [Frisch, 1968, Eckert, 2010, Knothe, 2012]. Además, como guía y referencia fundamental se usó la tesis de Mariano Franco [Franco, 2014], capítulo 6.

2.1. Ecuación de Helmholtz

Consideremos la siguiente ecuación para una onda escalar ϕ armónica

$$[\Delta + \omega^2 \epsilon(\mathbf{x})] \phi(\mathbf{x}) = -j(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

donde $\epsilon(\mathbf{x}) = c^{-2}$, con c la velocidad de propagación de la onda en el medio. Trabajaremos con una onda “monocromática” pero en principio esta velocidad podría tener una dependencia con la frecuencia ω y uno luego debería reconstruir la onda completa a partir de su espectro $\phi(\mathbf{x}; \omega)$. ϵ es una variable estocástica real, que separaremos en su valor medio más fluctuaciones

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

Para una función $\epsilon(\mathbf{x})$ dada, es decir una *realización del ruido*, (2.1) es una ecuación lineal, por lo

que se define la función de Green del problema

$$G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta j(\mathbf{x}')} \quad (2.3)$$

de modo que la solución a la ecuación (2.1) se escribe como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d^3x' G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j(\mathbf{x}') \quad (2.4)$$

Ahora bien, como se trata de un medio desordenado, una descripción determinista del problema resulta inapropiada y no de mucha utilidad, ya que no se tendrá conocimiento de la forma específica del ruido. Es entonces que uno estará interesado en valores de expectación del problema. Uno de estos es el valor medio del campo (definiendo también $\phi = \Phi + \varphi$ valor medio más fluctuaciones)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \int d^3x' \langle G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle j(\mathbf{x}') \quad (2.5)$$

donde a su vez estaremos suponiendo que la fuente j está determinada, y no es una variable estocástica. De modo que nos interesará encontrar la ecuación para la función de Green promedio. Esto se puede hacer tomando valor de expectación a la ecuación para G_ϵ :

$$\begin{aligned} & \left\langle [\Delta + \omega^2 \epsilon(\mathbf{x})] G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right\rangle \\ & [\Delta + \omega^2 \bar{\epsilon}] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \omega^2 \langle \delta\epsilon G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde ahora se definirá la autoenergía Σ a través de la relación

$$\omega^2 \langle \delta\epsilon G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle = \int d^3y \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) G(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \equiv \Sigma \cdot G \quad (2.7)$$

Esto siempre es posible ya que se asume que G tiene inversa. Notando G_0 la función de Green *de vacío* a la correspondiente al operador diferencial $\Delta + \omega^2 \bar{\epsilon}$, se obtiene la siguiente ecuación

$$G = G_0 + G_0 \cdot \Sigma \cdot G \quad (2.8)$$

Esta ecuación recibe el nombre de Ecuación de Dyson.

Por otra parte, si se toma directamente el valor medio a la ecuación (2.1), se llega a

$$[\Delta + \omega^2 \bar{\epsilon}] \Phi(\mathbf{x}) + \omega^2 \langle \delta\epsilon(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \rangle = -j(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

que a su vez debe coincidir con lo que se obtiene de multiplicar ecuación (2.6) por la fuente j e integrar. Así se llega a la relación

$$\omega^2 \langle \delta\epsilon(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \int d^3x' \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi(\mathbf{x}') \quad (2.10)$$

Estando el interés en encontrar la función de Green promedio G , vemos que es necesario resolver la ecuación de Dyson, que a su vez requiere conocer la forma (exacta u aproximada) de la autoenergía Σ . Ahora veremos una forma de hacer esto recurriendo a una expansión perturbativa.

2.2. La expansión perturbativa

Partiendo de la ecuación para G_ϵ , se la multiplica por la función de Green de vacío, G_0 , para escribir

$$G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \int d^3y G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega^2 \delta\epsilon(\mathbf{y}) G_\epsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \quad (2.11)$$

que se puede resolver al menos formalmente por iteración, escribiendo

$$G_\epsilon = G_0 + G_0 \cdot \omega^2 \delta\epsilon G_0 + G_0 \cdot \omega^2 \delta\epsilon G_0 \cdot \omega^2 \delta\epsilon G_0 + \dots \quad (2.12)$$

Resulta útil asignar una expansión diagramática a esta expresión. La misma es

$$\text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \bullet \bullet \text{---} + \dots$$

donde las líneas representan funciones de Green de vacío G_0 , y cada punto en el gráfico corresponde a una inserción de $\omega^2 \delta\epsilon$, y una integración sobre todo el espacio.

Como nos interesa la función de Green promedio, G , necesitamos tomar el valor de expectación a la expansión (2.12). Al hacer esto, por linealidad, se toma el valor medio en cada término. Entonces lo que termina ocurriendo es que se reemplazan las n inserciones de $\delta\epsilon$ por un momento n -ésimo de la distribución de probabilidad de $\delta\epsilon$. Es decir, un término genérico tendrá la forma

$$I_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \omega^{2n} \int d^3x_1 \dots d^3x_n \underbrace{G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \dots G_0(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}')}_{n+1} \left\langle \underbrace{\delta\epsilon(\mathbf{x}_1) \dots \delta\epsilon(\mathbf{x}_n)}_n \right\rangle \quad (2.13)$$

De todos los momentos, se sabe que el primero, el valor medio de $\delta\epsilon$ se anula. Así que G se escribe como

$$G = G_0 + \sum_{n=2}^{\infty} I_n \quad (2.14)$$

En cuanto a la expansión en diagramas, sería cuestión de introducir un diagrama nuevo para cada momento de n puntos. Resulta más práctico hacer una expansión en cumulantes, a través de la

introducción de las funciones de correlación de p puntos $C_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$,

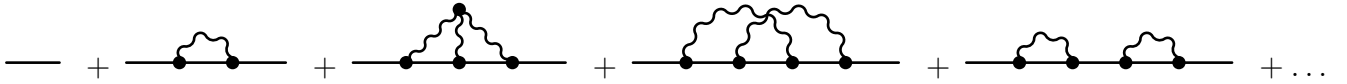
$$\begin{aligned}\langle \delta\epsilon(\mathbf{x}_1)\delta\epsilon(\mathbf{x}_2) \rangle &= C_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \langle \delta\epsilon(\mathbf{x}_1)\delta\epsilon(\mathbf{x}_2)\delta\epsilon(\mathbf{x}_3) \rangle &= C_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\ \langle \delta\epsilon(\mathbf{x}_1)\delta\epsilon(\mathbf{x}_2)\delta\epsilon(\mathbf{x}_3)\delta\epsilon(\mathbf{x}_4) \rangle &= C_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)C_2(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + C_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)C_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) \\ &\quad + C_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)C_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + C_4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)\end{aligned}\quad (2.15)$$

y de forma genérica

$$\langle \delta\epsilon(\mathbf{x}_1) \dots \delta\epsilon(\mathbf{x}_n) \rangle = \sum_{k \leq m, k+m=n} C_k(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}) C_m(\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_m}) \quad (2.16)$$

donde se suma sobre las particiones de $\{1, \dots, n\}$ en dos grupos de k y m elementos, con al menos dos elementos (el momento de orden 1 se anula). El caso Gaussiano se simplifica considerablemente, ya que el único cumulante no nulo es el de orden 2, que abreviaremos $C_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

En cuanto a la expansión diagramática, se introducen diagramas para los cumulantes, que serán líneas onduladas uniendo a los puntos. De esta forma, los primeros diagramas en la expansión de G son



Si, por otra parte, se expande perturbativamente la ecuación de Dyson, (2.8), se obtiene

$$G = G_0 + G_0 \cdot \Sigma \cdot G_0 + G_0 \cdot \Sigma \cdot G_0 \cdot \Sigma \cdot G_0 + \dots \quad (2.17)$$

que se puede expandir en diagramas, introduciendo un símbolo nuevo para representar la autoenergía. La expansión resulta



Ahora bien, vemos que esta expansión consiste en sucesivas inserciones de Σ , unidas por funciones de Green de vacío. Si uno esta última expansión la compara con la anterior, se puede ver que la autoenergía está compuesta de todos los diagramas que son irreducibles, sin patas externas, es decir que no es posible remover una línea de G_0 y formar diagramas menores. A modo de ejemplo, los primeros diagramas que forman a Σ son

$$\otimes = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \quad (2.18)$$

Por último, introduciendo un diagrama de doble línea para G , se representa de forma compacta la ecuación de Dyson como

$$\text{=====} = \text{-----} + \text{-----} \otimes \text{=====}$$

2.3. Aproximaciones a la ecuación de Dyson

Investiguemos posibles formas de aproximar la ecuación de Dyson. Vemos que si se da una forma a la autoenergía, se puede resolver la ecuación de Dyson, ya que

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma \quad \Rightarrow \quad G = [G_0^{-1} - \Sigma]^{-1} \quad (2.19)$$

Ahora bien, mirando la expansión perturbativa de la autoenergía, vemos que la forma más directa de aproximación corresponde a quedarse con el primer término de la expansión. Es decir,

$$\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \simeq \omega^4 C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.20)$$

Esto suele llamarse aproximación suave de primer orden, o aproximación bilocal. En este caso la expansión en diagramas de G resulta

$$\text{-----} + \text{-----} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{-----} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{-----} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Veremos que bajo esta aproximación, si el medio es invariante traslacional, es posible encontrar G . La simetría de traslación se traduce en la siguiente propiedad para la función de correlación

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.21)$$

Propiedad que existe siempre en la función de Green de vacío G_0 . La forma de esta función se puede encontrar transformando Fourier,

$$[\Delta + \omega^2 \bar{\epsilon}] G_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad [-p^2 + \omega^2 \bar{\epsilon}] \tilde{G}_0(p) = -1 \quad (2.22)$$

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{1}{p^2 - \omega^2 \bar{\epsilon}} \quad (2.23)$$

Antitransformando se obtiene la expresión en coordenadas, con la forma

$$G_0(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad k_0 \equiv \omega\sqrt{\bar{\epsilon}} \quad (2.24)$$

donde se eligió el signo correspondiente a la función de Green saliente.

La autoenergía hereda la misma simetría de traslación que la correlación, luego, transformando la ecuación de Dyson al espacio de momentos se obtiene

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = \tilde{G}_0(p) + \tilde{G}_0(p) \tilde{\Sigma}(\mathbf{p}) \tilde{G}(\mathbf{p}) \implies \tilde{G}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\tilde{G}_0^{-1}(p) - \tilde{\Sigma}(\mathbf{p})} \quad (2.25)$$

Ahora, bajo la aproximación bilocal, $\Sigma(\mathbf{x})$ es un producto de funciones, por lo que su transformada de Fourier será la convolución de las transformadas.

$$\tilde{\Sigma}(\mathbf{p}) = \omega^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{C}(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{k^2 - \omega^2\bar{\epsilon}} \quad (2.26)$$

integral que se puede hacer por residuos, agregando una parte imaginaria positiva $\omega^2\bar{\epsilon} \rightarrow \omega^2\bar{\epsilon} + i\eta$, y luego tomando el límite $\eta \rightarrow 0$.

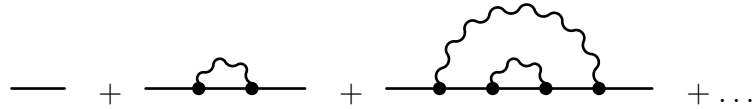
Una aproximación que le sigue en dificultad consiste en reemplazar en la autoenergía G_0 por G ,

$$\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \simeq \omega^4 C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.27)$$

y recibe el nombre de aproximación *no lineal*, ya que bajo esta aproximación, la ecuación de Dyson tiene la forma

$$G = G_0 + G_0 \cdot C G \cdot G \quad (2.28)$$

viéndose así la razón detrás del nombre. Esta ecuación, al ser iterada, se dará origen a todos los llamados *rainbow diagrams*, diagramas donde las líneas onduladas están anidadas. Por ejemplo, los primeros términos del desarrollo de G son



Finalmente veamos que si tomamos la solución general para G , sólo suponiendo la existencia de simetría traslacional (ecuación (2.25)), y aproximamos $\tilde{\Sigma}(\mathbf{p}) \rightarrow \tilde{\Sigma}(0)$, se obtiene una expresión sencilla para G :

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 - k^2}, \quad k^2 = k_0^2 + \tilde{\Sigma}(0) \equiv \epsilon_{\text{eff}} \omega^2 \quad (2.29)$$

Esto se puede hacer si la variación de $\tilde{\Sigma}(\mathbf{p})$ es pequeña, por ejemplo en la aproximación bilocal esto ocurriría si la longitud de correlación es pequeña comparada con la longitud de onda del problema.

Vemos entonces que esto define una velocidad de propagación efectiva para el problema. Además, si k tiene una parte imaginaria, la función de Green tendrá un decaimiento exponencial dado por esta parte imaginaria. Si $\tilde{\Sigma}(0) \ll k_0^2$, entonces se podrá aproximar la raíz cuadrada

$$k \simeq k_0 + \frac{\tilde{\Sigma}(0)}{2k_0} \quad (2.30)$$

De esta forma, se ve que $\text{Im}(k) \simeq \text{Im}\left(\frac{\tilde{\Sigma}(0)}{2k_0}\right)$. Esta cantidad es siempre positiva, ya que la parte imaginaria de la autoenergía resulta proporcional a la densidad de estados promedio, que es una cantidad positiva [Sheng, 2006]. Este decaimiento en la función de Green promedio, se interpreta como una absorción en el medio efectivo, aunque se deba a una pérdida debida al desorden, al momento de promediar. Es decir, de promediar medios donde la velocidad de fase es real en todo el espacio puede obtenerse un medio efectivo que presenta una velocidad de fase imaginaria, y por ende una onda que se desvanece en el medio [Depine and Dorado, 2009].

Validez de las aproximaciones

Partamos de la ecuación para $\phi(\mathbf{x})$, (2.1), pero adimensionalizándola. Como escala de longitudes, llamemos R a la longitud de correlación de la variable aleatoria. Es decir, que

$$C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg R \quad (2.31)$$

De esta manera, definiremos una coordenada adimensional a través de $\mathbf{x} \equiv R\mathbf{x}^*$. Luego, como escala para las fluctuaciones $\delta\epsilon$, tomaremos la correlación *en el origen*, de modo que $\delta\epsilon \equiv \sqrt{C(0)}\mu$, con μ una variable aleatoria, adimensional, y de orden 1. La ecuación de Helmholtz adimensionalizada resulta (ignoramos la fuente j)

$$[\Delta^* + \omega^2 R^2 \bar{\epsilon}] \phi(\mathbf{x}^*) + \omega^2 R^2 \sqrt{C(0)} \mu(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.32)$$

El número adimensional

$$Q \equiv \omega^2 R^2 \sqrt{C(0)} \quad (2.33)$$

recibe el nombre de *número de Reynolds generalizado*. Así como en dinámica de fluidos el número de Reynolds es una medida de la importancia de términos no lineales, en esta ecuación es una medida de la importancia del desorden. De esta forma, si se adimensionaliza la autoenergía Σ , se encuentra que los diagramas que conforman su expansión perturbativa están ordenados en potencias crecientes de Q . Analizando la ecuación de Dyson, como las dimensiones de G_0 y G son R^{-1} , y las integrales son en 3 dimensiones, se tiene que

$$[\Sigma(\mathbf{x})] = R^{-5} \quad (2.34)$$

entonces por ejemplo, la aproximación bilocal resulta, adimensionalizando todo

$$\Sigma_{BL}^*(\mathbf{x}^*) = \omega^4 R^4 C(0) C^*(\mathbf{x}^*) G_0^*(\mathbf{x}^*) \propto Q^2 \quad (2.35)$$

Y un diagrama general para Σ , de orden n , contendrá n inserciones de $\omega^2 \delta\epsilon$, $n - 1$ funciones de Green G_0 , y $n - 2$ integrales en todo el espacio. De modo que contribuirá de la siguiente manera

$$\left(\omega^2 \sqrt{C(0)} \right)^n R^{1-n} R^{3(n-2)} = R^{-5} \left(\omega^2 R^2 \sqrt{C(0)} \right)^n = R^{-5} Q^n \quad (2.36)$$

Vemos entonces que una condición necesaria para la validez de la aproximación bilocal, y para la expansión perturbativa en general, es $Q \ll 1$. Aún con esta condición, la serie podría diverger, ya que el número de diagramas puede aumentar rápidamente con n . Esto motiva la búsqueda de métodos de resolución del problema que no sean perturbativos.

El formalismo funcional

En este capítulo abordaremos a través de integrales funcionales la descripción del problema estocástico. Esto permite deducir algunas propiedades de la sección anterior pero recurriendo al lenguaje de las integrales de camino. El punto de partida está en considerar que el campo estocástico ϕ tendrá una distribución de probabilidad, y escribiendo un funcional generador se podrán derivar todos los momentos de la variable. Se usará el lenguaje de integrales funcionales o integrales de camino de Feynman, este formalismo está tratado en innumerables libros de teoría de campos, como pueden ser el libro de Feynman y Hibbs [Feynman and Hibbs, 1965], o el de Schulman [Schulman, 1981]. A su vez, el tratamiento de ecuaciones estocásticas mediante integrales funcionales, lo que recibe el nombre de formalismo de Martin-Siggia-Rose, está tratado en la bibliografía en [Calzetta and Hu, 2008, Kamenev, 2011]. Como referencia fundamental en este capítulo para la obtención de la acción clásica se siguió el trabajo [Franco and Calzetta, 2015].

3.1. El funcional generador

Comenzamos definiendo el funcional generador de momentos

$$e^{iW_\phi[J_\phi, J_\phi^*]} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* P[\phi, \phi^*] e^{i(J_\phi \cdot \phi + J_\phi^* \cdot \phi^*)} \quad (3.1)$$

abreviando $J \cdot \phi = \int d^3x J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})$. De esta forma, tomando derivadas funcionales respecto de J se generan los momentos del campo aleatorio ϕ . Ahora bien, el carácter estocástico de ϕ deriva de la variable aleatoria ϵ , que le atribuiremos una distribución de probabilidad $P_\epsilon[\epsilon]$. Notaremos $\phi[\epsilon, j]$ a una solución de la ecuación para un dado ruido y una fuente j , es decir,

$$[\Delta + \omega^2 \epsilon(\mathbf{x})] \phi[\epsilon, j](\mathbf{x}) = -j(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

La distribución de probabilidad para el campo ϕ se obtiene pesando cada una de estas soluciones con su correspondiente probabilidad

$$P[\phi, \phi^*] = \int \mathcal{D}\epsilon P_\epsilon[\epsilon] \delta(\phi - \phi[\epsilon, j]) \delta(\phi^* - \phi^*[\epsilon, j^*]) \quad (3.3)$$

Utilizando el análogo funcional a la propiedad de composición de la delta, definiendo el operador $\mathbf{D}_\epsilon = \Delta + \omega^2 \epsilon(\mathbf{x})$, se tiene

$$\delta(\mathbf{D}_\epsilon \phi + j) = \frac{\delta(\phi - \phi[\epsilon, j])}{\det(\mathbf{D}_\epsilon)} \quad (3.4)$$

con lo mismo válido para el campo ϕ y fuente j conjugados. El determinante en esta ecuación es el Jacobiano del cambio de funciones, y es un determinante funcional. No siempre es posible calcularlo de forma exacta, e incluso suelen ser cantidades divergentes. Es por esto que lo usual es convertirlo en una integral funcional, a través de la introducción de variables de Grassmann [Negele and Orland, 1998, Ramond, 2001], o *campos fantasmas* c y c^* , escribiendo

$$\det(\mathbf{D}_\epsilon) = \int \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c e^{i c^* \cdot \mathbf{D}_\epsilon \cdot c} \quad (3.5)$$

Estos campos son escalares complejos, pero anticonmutan entre sí, por lo violan la relación de spin-estadística. Por esta razón se dice que son campos no físicos, y no son más que una herramienta para el cálculo.

Por último, las deltas funcionales se puede también exponenciar introduciendo otro campo auxiliar, con lo que sería análogo a la transformada de Fourier funcional. Se tiene que

$$\delta(\mathbf{D}_\epsilon \phi + j) = \int \mathcal{D}\psi^* e^{i \psi^* \cdot [\mathbf{D}_\epsilon \phi + j]} \quad (3.6)$$

La densidad de probabilidad para el campo $\epsilon(\mathbf{x})$ se considerará Gaussiana, centrada alrededor de $\bar{\epsilon}$. Es decir,

$$P_\epsilon[\epsilon] = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 (\epsilon(\mathbf{x}_1) - \bar{\epsilon}) C^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) (\epsilon(\mathbf{x}_2) - \bar{\epsilon})\right) \quad (3.7)$$

Se pueden introducir más momentos en la distribución pero nos concentraremos en el caso Gaussiano por ser de mayor simpleza. De esta forma se puede escribir la funcional generadora como una integral de camino de una acción “clásica” de los campos $\mathcal{X}^\alpha = \{\epsilon, \phi, \psi^*, \phi^*, \psi, c^*, c, d^*, d\}$. Se introducirán además fuentes \mathcal{J}^α para los campos auxiliares, de modo que se pueda derivar momentos de todos los campos. Así, se escribe

$$e^{iW[\mathcal{J}^\alpha]} = \int \mathcal{D}\mathcal{X}^\alpha e^{i(S[\mathcal{X}^\alpha] + \mathcal{J}_\alpha \mathcal{X}^\alpha)} \quad (3.8)$$

(donde la expresión $\mathcal{J}_\alpha \mathcal{X}^\alpha$ tiene una suma, además de la integración, implícita), la acción “clásica” teniendo la siguiente forma

$$S[\mathcal{X}^\alpha] = \frac{i}{2} \delta\epsilon \cdot C^{-1} \cdot \delta\epsilon + \psi^* \cdot (\mathbf{D}_\epsilon \phi + j) + \psi \cdot (\mathbf{D}_\epsilon \phi^* + j^*) + c^* \cdot \mathbf{D}_\epsilon \cdot c + d^* \cdot \mathbf{D}_\epsilon \cdot d \quad (3.9)$$

Distinguiremos en nombre a los campos *de materia* $\{\phi, \psi^*, \phi^*, \psi\}$, campos fantasma $\{c^*, c, d^*, d\}$ y el campo aleatorio, ϵ . Lo que podemos observar es que los campos fantasma tienen la misma propagación que los campos de materia, y los mismos vértices con el campo ϵ . Entonces, en una expansión perturbativa del propagador $\langle \epsilon(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}) \rangle$, por cada loop de materia, habrá un correspon-

diente loop de campos fantasmas, que llevará el signo opuesto, por ser variables de Grassmann. Entonces, por ejemplo, el siguiente diagrama

$$(3.10)$$

será idénticamente cero. Lo mismo ocurre con los diagramas formados con ϕ^* , ψ , d y d^* . Es por esto que a todo orden en teoría de perturbaciones, no se verá afectada la correlación de las fluctuaciones del campo aleatorio

$$\langle \delta\epsilon(\mathbf{x})\delta\epsilon(\mathbf{x}') \rangle = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (3.11)$$

que es un resultado deseado ya que esta correlación no se podía ver modificada por la introducción de campos auxiliares.

3.2. Propiedades derivadas del funcional generador

Primero, vemos que si se anulan las fuentes externas $\mathcal{J}_\alpha = 0$, la integral de camino se reduce a la normalización de la distribución de probabilidad, por lo que se tiene que

$$e^{iW[\mathcal{J}^\alpha=0]} = \int \mathcal{D}\mathcal{X}^N e^{iS[\mathcal{X}^\alpha]} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* P[\phi, \phi^*] = 1 \quad (3.12)$$

Pero esta ecuación todavía tiene una dependencia funcional en las fuentes “clásicas” j y j^* , que están acopladas con los campos auxiliares ψ^* y ψ respectivamente. Derivando respecto de estas fuentes se obtiene

$$\frac{\delta e^{iW[0]}}{\delta j(\mathbf{x})} = 0 = \int \mathcal{D}\mathcal{X}^N i\psi^*(\mathbf{x}) e^{iS[\mathcal{X}^\alpha]} \Rightarrow \langle \psi^*(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\delta^2 e^{iW[0]}}{\delta j(\mathbf{x})\delta j(\mathbf{x}')} = 0 = - \int \mathcal{D}\mathcal{X}^N \psi^*(\mathbf{x})\psi^*(\mathbf{x}') e^{iS[\mathcal{X}^\alpha]} \Rightarrow \langle \psi^*(\mathbf{x})\psi^*(\mathbf{x}') \rangle = 0 \quad (3.14)$$

Similarmente se prueba $\langle \psi \rangle = 0$, y de manera general, que el producto de cualquier número de campos ψ y ψ^* tiene valor de expectación nulo.

De forma análoga a lo que ocurre con la correlación de las fluctuaciones $\delta\epsilon$, el valor medio de ϵ está determinado a través de su distribución de probabilidad, ya que diagramas de la forma

$$(3.15)$$

se cancelan, ocurriendo lo mismo a todo orden perturbativo. Entonces, partiendo del valor medio de ϵ , escrito a través de la integral de camino

$$\bar{\epsilon} = \int \mathcal{D}\mathcal{X}^N \epsilon(\mathbf{x}) e^{iS[\mathcal{X}^\alpha]} \quad (3.16)$$

Este valor medio es independiente de j y j^* , por lo que al derivar respecto de cualquiera de ellos, se obtendrá algo que es nulo. Por otra parte, ya vimos que derivar del lado de la integral funcional agrega inserciones del campo ψ^* o ψ respectivamente. De esta forma, se prueba que

$$0 = \langle \epsilon(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') \rangle = \langle \epsilon(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}') \rangle \quad (3.17)$$

Luego, partiendo de la definición de valor medio de ϕ , escrito como integral funcional

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\mathcal{X}^N \phi(\mathbf{x}) e^{iS[\mathcal{X}^\alpha]} \quad (3.18)$$

como este valor medio no depende de j^* , al derivar se obtiene que

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') \rangle = 0 \quad (3.19)$$

Y de manera completamente análoga se muestra que $\langle \phi^*(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}') \rangle = 0$

Para escribir la ecuación de movimiento, se parte de la siguiente propiedad de la integral funcional

$$\int \mathcal{D}\mathcal{X}^N \frac{\delta F[\mathcal{X}^\mu]}{\delta X^\alpha} = 0 \quad (3.20)$$

Entonces, tomando la siguiente derivada

$$\int \mathcal{D}\mathcal{X}^N \frac{\delta}{\delta \psi^*(\mathbf{x})} (e^{iS[\mathcal{X}^\alpha]}) = i \int \mathcal{D}\mathcal{X}^N (\mathbf{D}_\epsilon \phi(\mathbf{x}) + j(\mathbf{x})) e^{iS[\mathcal{X}^\alpha]} = 0 \quad (3.21)$$

se obtiene la ecuación de movimiento para el campo medio

$$[\Delta + \omega^2 \bar{\epsilon}] \Phi(\mathbf{x}) + \omega^2 \langle \delta \epsilon(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \rangle = -j(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

Finalmente, recordando que la función de Green promedio está dada por la siguiente derivada funcional

$$\langle G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle = \frac{\delta \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle}{\delta j(\mathbf{x}')} \quad (3.23)$$

se puede partir de la definición a través de la integral de camino para el campo medio (3.18), para obtener

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = i \langle \psi^*(\mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}) \rangle = i \langle \psi^*(\mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.24)$$

3.3. La acción efectiva

Otro funcional de gran interés es la acción efectiva, en nuestro caso nos concentraremos en la 1PI, o *one particle irreducible*. Esto quiere decir que su expansión en diagramas contendrá sólo diagramas que sean irreducibles, es decir que no se pueden desconectar al remover una línea de propagador. Como se vio en la sección anterior, el propagador $\langle \psi^* \varphi \rangle$ es la función de Green promedio. Al estar derivado del generador W , está formado de diagramas *conectados*. Pero, como vimos en el capítulo anterior, la autoenergía del problema está formada por diagramas irreducibles, no sólo conectados. En esta sección veremos cómo la autoenergía y la acción efectiva 1PI están relacionados.

Transformada de Legendre

Para definir el funcional Γ , que se llama acción efectiva, se parte de un funcional generador $W[\mathcal{J}^\alpha]$, se definen los campos medios como derivadas

$$\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}^\alpha(\mathbf{x})} \quad (3.25)$$

y luego se define un funcional Γ que pase a depender de los campos medios Φ^α , a través de una transformada de Legendre funcional

$$\Gamma[\Phi^\alpha] = \left[W[\mathcal{J}^\alpha] - \int d^3x \mathcal{J}^\mu(\mathbf{x}) \Phi_\mu(\mathbf{x}) \right] \Big|_{\mathcal{J}^\alpha / \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}^\alpha} = \Phi_\alpha} \quad (3.26)$$

Donde se evalúa el lado derecho en los valores de las fuentes \mathcal{J}^α tal que verifiquen la relación (3.25). Para ver que efectivamente este funcional genera diagramas irreducibles, se parte de la transformada inversa

$$W[\mathcal{J}^\alpha] = \left[\Gamma[\Phi^\alpha] + \int d^3x \mathcal{J}^\mu(\mathbf{x}) \Phi_\mu(\mathbf{x}) \right] \Big|_{\Phi^\alpha / \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi^\alpha} = -\mathcal{J}_\alpha} \quad (3.27)$$

Esta transformada de Legendre se puede capturar como el límite de fase estacionaria de la siguiente integral funcional

$$W[\mathcal{J}^\alpha] = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar}{i} \ln \left(\int \mathcal{D}\Phi^N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\Gamma[\Phi^\alpha] + \mathcal{J}_\mu \Phi^\mu \right] \right\} \right) \quad (3.28)$$

En este punto se reintrodujo \hbar , como parámetro para contar loops en la integral funcional. En el límite de fase estacionaria, cuando $\hbar \rightarrow 0$, las expansiones en diagramas de la integral funcional estarán compuestos de diagramas árbol, es decir sin loops. Los vértices de los diagramas estarán dados por el funcional $\Gamma[\Phi^\alpha]$. A su vez, el funcional W es el generador de diagramas conectados.

Entonces, todos los loops de la teoría quedan capturados dentro de los vértices efectivos. Es por esto que usualmente se dice que el funcional Γ contiene la parte cuántica de la teoría, mientras que la acción original S recibe el nombre de acción clásica [Jackiw, 1974].

Por ejemplo, consideremos los diagramas con dos patas externas. Una derivada segunda del funcional W es un propagador de la teoría. Por ejemplo, si las patas externas corresponden a las fuentes de ϕ y ψ^* , es la función de Green promedio de nuestro problema estocástico. Por otra parte, los diagramas a orden árbol incluirán vértices efectivos de dos patas, y propagadores de la teoría no interactuante.

The diagram shows a double horizontal line on the left, followed by an equals sign. To the right of the equals sign is a sum of diagrams: a single horizontal line, plus a horizontal line with a shaded circle in the middle, plus a horizontal line with two shaded circles in series, plus an ellipsis.

Esta expansión diagramática está vinculada con la ecuación de Dyson, y en efecto, el vértice $\Gamma^{(2)}$ con la autoenergía Σ definida en el capítulo anterior.

Otra forma de ver la relación entre la acción efectiva y la acción clásica está en multiplicar por i la ecuación (3.26) y exponenciar, utilizando la expresión para el funcional generador (3.8), [Calzetta and Hu, 2008]. Se obtiene ($\hbar = 1$ como antes)

$$e^{i\Gamma[\Phi^\alpha]} = \int \mathcal{D}\mathcal{X}^N e^{iS[\mathcal{X}^\alpha] + i\mathcal{J}^\mu(\mathcal{X}_\mu - \Phi_\mu)} \quad (3.29)$$

que como las integrales funcionales tienen simetría de traslación, se puede escribir como

$$e^{i\Gamma[\Phi^\alpha]} = \int \mathcal{D}\mathcal{Y}^N e^{iS[\Phi^\alpha + \mathcal{Y}^\alpha] + i\mathcal{J}^\mu \mathcal{Y}_\mu} \quad (3.30)$$

Ahora, si se expande $S[\Phi^\alpha + \mathcal{Y}^\alpha]$ como

$$S[\Phi^\alpha + \mathcal{Y}^\alpha] = S[\Phi^\alpha] + \left. \frac{\delta S}{\delta \mathcal{X}^\mu} \right|_{\mathcal{X}=\Phi} \mathcal{Y}^\mu + S_i[\mathcal{Y}^\alpha; \Phi^\alpha] \quad (3.31)$$

se obtiene

$$e^{i\Gamma[\Phi^\alpha]} = e^{iS[\Phi^\alpha]} \int \mathcal{D}\mathcal{Y}^N e^{iS_i[\mathcal{Y}^\alpha; \Phi^\alpha] + (S_{,\mu} + \mathcal{J}_\mu)\mathcal{Y}^\mu} \quad (3.32)$$

Entonces, expandiendo $\Gamma[\Phi^\alpha] = S[\Phi^\alpha] + \Gamma_i[\Phi^\alpha]$ y usando que $\mathcal{J}_\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi^\mu}$, se tiene que

$$e^{i\Gamma_i[\Phi^\alpha]} = \int \mathcal{D}\mathcal{Y}^N e^{iS_i[\mathcal{Y}^\alpha; \Phi^\alpha] - \Gamma_{i,\mu} \mathcal{Y}^\mu} \quad (3.33)$$

De esta forma, se observa que la acción efectiva es igual a la acción clásica más una corrección Γ_i , que tiene la forma de funcional generador para una teoría con una acción S_i que se obtiene de la acción original S desplazando los campos, y descartando términos constantes y lineales. Además,

este funcional generador debe estar evaluado en un valor preciso de fuente externa.

De la definición de transformada de Legendre, (3.26) se desprende una relación entre derivadas de Γ y W , que es

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi^\mu \delta \Phi^\nu} \frac{\delta^2 W}{\delta \mathcal{J}_\nu \delta \mathcal{J}_\sigma} = -\delta_\mu^\sigma \quad (3.34)$$

Es decir, el Hessiano de W y el de Γ son recíprocos. Como el Hessiano de W contiene a las funciones de Green de los campos, las derivadas segundas de la acción efectiva estarán vinculadas a la autoenergía. Es por esto que nos interesa la acción efectiva 1PI.

Renormalización

El concepto de renormalización es uno bastante amplio, ya que abarca un conjunto de métodos y conceptos aplicables a distintas áreas de la física, como teoría cuántica de campos, mecánica estadística, y fenómenos fuera del equilibrio. Esta diversidad en aplicaciones trae consigo una variedad en las formas de implementación de las ideas del grupo de renormalización. En este capítulo revisaremos algunos los conceptos de renormalización y formas de aplicarse. La idea fundamental detrás de la renormalización Wilsoniana está en la eliminación sucesiva de grados de libertad de una teoría, al calcular alguna función o funcional como puede ser la función de partición, o la funcional generatriz. [Kopietz et al., 2009, Delamotte, 2007].

4.1. Idea fundamental

Se parte de una teoría definida por un campo o conjunto de campos Φ que representa los grados de libertad de la misma. Estamos interesados en el cálculo de una cantidad como la función de partición del sistema, que permita derivar el comportamiento de los observables. Esta función se expresa como una integral funcional sobre estos grados de libertad

$$\mathcal{Z}(\mathbf{g}) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-H[\Phi;\mathbf{g}]} \quad (4.1)$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema, en el caso de estar calculando una función de partición de un sistema termodinámico, o puede representar la acción clásica en una teoría de campos. El vector $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots)$ representa los acoplamientos de la teoría. Φ representa los distintos grados de libertad, podría incluir distintos tipos de campos (por ejemplo, mezcla de bosones y fermiones, etc). El concepto básico está en hacer la integración sobre los grados de libertad de forma iterativa, separando los grados de libertad y haciendo la integración sobre un subconjunto de los mismos, y en cada paso calcular el cambio en el Hamiltoniano o acción del sistema. Cada paso del procedimiento de renormalización consiste en dos etapas: eliminación de modos y rescaleo.

Eliminación de modos

En esta primera etapa, se eliminan los grados de libertad que representan las fluctuaciones de corta distancia, es decir los modos de mayor número de onda \mathbf{k} . Suponiendo que los números de onda están contenidos en el intervalo $0 < |\mathbf{k}| < \Lambda_0$, estamos interesados en integrar o eliminar los que están contenidos en el intervalo $\Lambda < |\mathbf{k}| < \Lambda_0$. Dividiendo los grados de libertad en espacio de momentos en estos dos grupos, se tiene que

$$\Phi = \Phi_{<} + \Phi_{>} \quad (4.2)$$

donde $\Phi_{<}$ representa los modos con longitud de onda larga (o modos “lentos”, de menor frecuencia), y $\Phi_{>}$ los modos con longitud de onda corta (o modos “rápidos”). La división se puede hacer de forma abrupta, o de forma suave. En una división abrupta, se tiene

$$\begin{cases} \Phi_{<}(\mathbf{k}) = \Phi(\mathbf{k}) \Theta(\Lambda - k) \\ \Phi_{>}(\mathbf{k}) = \Phi(\mathbf{k}) \Theta(k - \Lambda) \end{cases} \quad (4.3)$$

Y la función de partición entonces se escribe como

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi_{<} \int \mathcal{D}\Phi_{>} e^{-H[\Phi_{<} + \Phi_{>}; \mathbf{g}]} \equiv \int \mathcal{D}\Phi_{<} e^{-H_{\Lambda}[\Phi_{<}; \mathbf{g}_{<}]} \quad (4.4)$$

Las constantes de acoplamiento $\mathbf{g}_{<}$ serán en general distintas de las originales. Tanto en valor numérico, como en cuáles son no-nulas. En general este paso no se puede hacer de forma exacta y es preciso recurrir a aproximaciones, por ejemplo, a una expansión perturbativa.

Rescaleo

En este segundo paso, se modifican los vectores de onda y los campos en el funcional $H_{\Lambda}[\Phi_{<}; \mathbf{g}_{<}]$ tal que tenga la misma forma que antes de la eliminación de modos. Para esto, se toma

$$\mathbf{k}' = \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \mathbf{k} \equiv b \mathbf{k} \quad (4.5)$$

Este parámetro adimensional b define el tamaño del paso de la transformación. El campo en el espacio de momentos se relaciona de la siguiente manera

$$\Phi_{<}(\mathbf{k}) = \zeta_b \Phi'(\mathbf{k}') \quad (4.6)$$

Existe una libertad para la elección de este factor ζ_b . Una forma común consiste en fijar el término cuadrático en el momento, es decir

$$\int_0^\Lambda d^d k c_< k^2 \Phi_<(\mathbf{k}) \Phi_<(-\mathbf{k}) = \int_0^{\Lambda_0} d^d k' c_< b^{-(d+2)} \zeta_b^2 \Phi'(\mathbf{k}') \Phi'(-\mathbf{k}') \quad (4.7)$$

Si, en el funcional original el factor es c_0 , entonces se elige ζ_b tal que

$$c_< b^{-(d+2)} \zeta_b^2 = c_0 \quad (4.8)$$

El paso de eliminación de modos, seguido del rescado, define un mapa entre los acoplamientos \mathbf{g} del modelo original con el funcional $H[\Phi; \mathbf{g}]$, y un conjunto de acoplamientos modificados \mathbf{g}' del funcional efectivo $H'[\Phi'; \mathbf{g}']$. Este mapa se nota

$$\mathbf{g}' = \mathcal{R}(b; \mathbf{g}) \quad (4.9)$$

que representa una transformación de renormalización. Esta transformación puede tener una dependencia complicada y en general no lineal de los acoplamientos, y depende también del paso b . Estas transformaciones forman un semigrupo, es decir obedecen una ley de composición (pero no tienen inversa en general). Dos transformaciones sucesivas de parámetros b_1 y b_2 son equivalentes a una única transformación con un parámetro $b_t = b_1 b_2$:

$$\mathcal{R}(b_1 b_2; \mathbf{g}) = \mathcal{R}(b_1; \mathcal{R}(b_2; \mathbf{g})) \quad (4.10)$$

El procedimiento entonces es iterativo, empezando de un acoplamiento inicial \mathbf{g} , se define una cadena de acoplamientos $\mathbf{g}^{(n)}$

$$\mathbf{g}^{(n)} = \mathcal{R}(b; \mathbf{g}^{(n-1)}) = \mathcal{R}(b^n; \mathbf{g}) \quad (4.11)$$

Como el factor $b > 1$, en el límite $n \rightarrow \infty$, el paso total de la transformación b^n diverge. Y esto corresponde a haber integrado todos los grados de libertad. De esta forma, el coeficiente independiente de los campos en el funcional, en este límite, corresponde a la densidad de energía del sistema. En la mayoría de los casos, sin embargo, un paso de la transformación de RG sólo se puede hacer aproximadamente, por lo que esta densidad de energía no sería exacta. De cualquier forma, se puede trabajar con aproximaciones a transformaciones del RG y obtener expresiones no perturbativas de precisión. En el ejemplo anterior la eliminación de modos se hizo en el espacio de momentos. Existen distintas formas de implementar este paso del RG:

(i) El espacio de momentos es particularmente útil cuando el problema tiene una simetría de traslación, y la teoría tiene una parte Gaussiana bien definida. En cuanto a la forma de separar los modos, en el ejemplo se usó un cutoff abrupto, con una función escalón. Es particularmente útil al trabajar con la aproximación a 1 loop, que es la primera corrección a la aproximación Gaussiana, que suele ser suficiente en problemas de materia condensada y de mecánica estadística. El problema de esta división abrupta es que más allá de la aproximación de 1 loop, las integrales se vuelven muy complejas, y surgen comportamientos no analíticos y no físicos. Es por esto que hay implementaciones en las que se suaviza la división de modos, en estos casos, las integraciones ya no se pueden hacer analíticamente y es necesario hacerlas numéricamente.

(ii) Otra forma de implementación del RG es en el espacio real, o de Migdal-Kadanoff. Por ejemplo, en sistemas de redes de spines, la implementación consiste en definir nuevos bloques de spines, y pasar del problema original a un problema con un Hamiltoniano efectivo, formado por spines efectivos en una red con un espaciado mayor. En el siguiente paso se redefinen las escalas de distancia para que el espaciado de la red sea igual al original. En una cadena de Ising 1-d con interacción de primeros vecinos, el procedimiento se puede hacer de forma exacta, y la forma del Hamiltoniano permanece invariante. Esto quiere decir, luego de la transformación sigue siendo el mismo el conjunto de constantes de acoplamiento no nulas, sólo cambiando de valor. En problemas de mayor dimensionalidad, el procedimiento genera nuevos acoplamientos definiendo interacciones de mayor rango entre spines. Por esto, no se puede escribir de forma exacta el procedimiento de RG y hay que recurrir a aproximaciones.

(iii) Si la eliminación de modos se hace en espacio de momentos, pero en una cáscara infinitesimal de momentos, es decir $\Lambda - d\Lambda < |\mathbf{k}| < \Lambda$, se puede escribir una ecuación diferencial funcional que describe la evolución exacta de algún funcional generador de la teoría. Ecuaciones de esta índole son llamadas de grupo de renormalización funcional, o FRG. La ecuación de Wegner y Houghton (1973) fue una de las primeras en ser derivadas de esta forma [Wegner and Houghton, 1973]. Esta ecuación diferencial funcional es equivalente a una jerarquía infinita de ecuaciones integro-diferenciales acopladas para funciones de correlación de la teoría. Como estas ecuaciones no pueden ser resueltas de forma exacta, aproximaciones son necesarias al momento de hacer algún cálculo. Un esquema de aproximación es por ejemplo el truncado de esta jerarquía hasta algún orden n , anulando las funciones de correlación de más de n puntos. Lo útil de estas ecuaciones de FRG es que a partir de aproximaciones simples pueden obtenerse resultados que presenten efectos no perturbativos. Existen ecuaciones de FRG alternativas a la ecuación de Wegner-Houghton, que se libran de algunos de los problemas inherentes en la misma. Una de las más reconocidas es la ecuación de Wetterich (1993), que es una ecuación de flujo para la acción efectiva de vértices irreducibles Γ [Wetterich, 1993].

Estas formas de aplicación del RG tienen su origen en áreas distintas de la física, ya sea teoría cuántica de campos, fenómenos críticos, etc. Es por esto que las interpretaciones de estos procedimientos son a menudo distintos. Por ejemplo, en teoría cuántica de campos el cutoff origina por una necesidad de regularizar integrales divergentes, y el concepto de renormalización aparece porque la física tiene que ser independiente del valor del cutoff, que fue impuesto de manera externa. Esto aparece en teoría de campos en forma de la ecuación de Callan-Symanzik [Duncan, 2012]. En fenómenos críticos, lo que ocurre es que hay una invariancia de escala en el punto crítico en una transición de fase. Como consecuencia de esto, los observables termodinámicos presentan un comportamiento como leyes de potencia. Nuevamente la invariancia de escala sugiere el uso del RG para calcular cantidades invariantes como son los exponentes críticos.

En los dos casos recién descriptos, el cutoff es del tipo ultravioleta: está relacionado con un impulso máximo, o una escala de distancias mínima. Este cutoff representa un verdadero corte: la física que se observa en el rango de energías está separada de la teoría microscópica final, por lo que nuestras teorías representan teorías efectivas, válidas por debajo de ese cutoff en impulsos. Ahora, esta es la primera diferencia con el método funcional. En el FRG, donde el cutoff es infrarrojo, el mismo surge como una herramienta para hacer la integración de los modos de forma iterativa, comenzando por los modos de longitud de onda larga. En este esquema, se introduce un cutoff Λ en impulsos que se moverá entre un Λ_{max} y 0 (donde ya se habrá terminado de integrar todos los modos del campo). Con la variación de este cutoff, se escribe una ecuación diferencial,

típicamente para la acción efectiva 1PI. La misma es una ecuación exacta, formal, que se resuelve dando condiciones iniciales sobre el funcional en $\Lambda = \Lambda_{max}$ (con la acción clásica de la teoría), y su solución en $\Lambda = 0$ es la acción efectiva completa.

La segunda diferencia está en las etapas de rescaleo y redefinición de los campos, éstas no aparecen en el FRG. En el RG Wilsoniano se hace un rescaleo para volver a llevar la forma de la acción a la anterior, y se cambian las definiciones de los campos para mantener alguna constante de acoplamiento fija, y de esta forma definir un mapa entre distintas teorías con distintas constantes de acoplamiento que sí cambian frente a un paso de renormalización. En el FRG las constantes de acoplamiento en la acción efectiva promedio (Λ no nulo) evolucionan automáticamente entre los valores iniciales mediante los cuales coinciden con la acción clásica en Λ_{max} , y los valores finales donde coinciden con la acción efectiva verdadera, en $\Lambda = 0$. Es por esto que aunque los distintos métodos de RG son todos similares en conceptos, a menudo su interpretación y aplicación son distintas. En esta tesis usaremos el método de FRG como herramienta para calcular la acción efectiva.

Renormalización Funcional

En este capítulo presentaremos un método para calcular la acción efectiva de una teoría de forma no perturbativa, basándonos en el grupo de renormalización funcional (FRG). En este, se modifica la acción clásica de la teoría introduciendo un parámetro Λ , llamado escala de cutoff, a través del cual se escribe una ecuación integro-diferencial funcional para la acción efectiva de la teoría modificada. Esta ecuación diferencial interpola entre la acción clásica y la acción efectiva de la teoría original. Primero introduciremos el método para una teoría con un único campo escalar, llegando a la ecuación integro-diferencial que debe obedecer la acción efectiva modificada (ecuación de Wetterich), y discutiremos las posibles aproximaciones que se pueden hacer para resolver la misma. Luego, aplicaremos el método al problema de una onda en un medio aleatorio, usando la acción clásica construida en el capítulo 3. Referencias útiles a lo largo del capítulo son [Kopietz et al., 2009, Delamotte, 2007, Blaizot et al., 2006].

5.1. Introducción al FRG

Consideraremos un campo escalar φ , cuya acción clásica está dada por

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \varphi(\mathbf{x}) G_0^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') + S_i[\varphi] \quad (5.1)$$

esto es una parte que se propaga libremente y una parte de interacción arbitraria. Acto seguido, se introduce un parámetro Λ , con el cual se va a modificar la acción, en particular la acción libre S_0 , cambiando el propagador $G_0 \rightarrow G_{0,\Lambda}$. Esta acción modificada la notaremos S_Λ . La modificación en el propagador deberá ser tal que se cumplan los siguientes límites

$$G_{0,\Lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda \rightarrow \infty \\ G_0 & \text{si } \Lambda = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Esta condición implica que al remover el cutoff Λ , se recupera la teoría original. Por otra parte, si el cutoff es más grande que todas las otras escalas intrínsecas del sistema, el propagador se “apaga”, de modo que los grados de libertad quedarán congelados. Esta escala suele introducirse en el espacio de momentos, de modo que divida a los modos de onda corta $p \gtrsim \Lambda$ que ya habrán sido integrados, de los modos de onda larga $p \lesssim \Lambda$, que aún hace falta integrar. Esto es porque

Λ actúa como una escala infrarroja en el espacio de momentos, suprimiendo la propagación de modos debajo de este parámetro. Esta identificación del parámetro Λ con una escala de momentos no es la única forma de implementar el FRG. Existen aplicaciones donde se lo identifica con una frecuencia, o incluso con una temperatura.

En cuanto a la forma de implementar este cutoff, se puede hacer con un factor multiplicativo, o con un contratérmino en la inversa del propagador. Esto es

$$G_{0,\Lambda} = H_\Lambda G_0 \quad (5.3)$$

$$\text{ó}$$

$$G_{0,\Lambda}^{-1} = G_0^{-1} - R_\Lambda \quad (5.4)$$

Estas dos prescripciones son equivalentes, y son dos alternativas para obtener lo mismo, pero dependiendo del problema en cuestión puede ser preferible un método por sobre el otro.

Si se elige un Λ que represente una escala de momentos, se tiene que, el propagador tiene la forma

$$\tilde{G}_{0,\Lambda} = H_\Lambda(p) \tilde{G}_0(\mathbf{p}) \quad (5.5)$$

con el factor multiplicativo tal que

$$H_\Lambda(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \ll \Lambda \\ 1 & \text{si } p \gg \Lambda \end{cases} \quad (5.6)$$

Entonces vemos que por ejemplo, la función escalón de Heavyside es una opción posible

$$H_\Lambda(\mathbf{p}) = \Theta(p - \Lambda) \quad (5.7)$$

Como alternativa se puede elegir una función suavizada en el intervalo de momentos cercano a p . Elegir un cutoff abrupto como el del escalón tiene ventajas, ya que ciertas integrales en momentos serán triviales, pero también puede traer problemas por haber elegido una función no analítica.

El objetivo de esta sección es obtener una ecuación para la evolución de la acción efectiva de esta teoría modificada, Γ_Λ . Para esto, se define primero el funcional generador de diagramas conectados de la teoría modificada, W_Λ

$$e^{iW_\Lambda[J]} = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{i(S_\Lambda[\varphi] + J \cdot \varphi)} \quad (5.8)$$

Acto seguido, se define el campo medio en un valor finito de la fuente, $\bar{\varphi} = \frac{\delta W_\Lambda}{\delta J}$, y la acción efectiva como la transformada de Legendre de W_Λ

$$\Gamma_\Lambda[\bar{\varphi}] = W_\Lambda[J] - J \cdot \bar{\varphi} \quad (5.9)$$

Y la relación entre derivadas segundas de W_Λ y Γ_Λ ,

$$\begin{aligned}\frac{\delta J(\mathbf{x})}{\delta J(\mathbf{x}')} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3y \frac{\delta J(\mathbf{x})}{\delta \bar{\varphi}(\mathbf{y})} \frac{\delta \bar{\varphi}(\mathbf{y})}{\delta J(\mathbf{x}')} \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= - \int d^3y \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}(\mathbf{y})} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(\mathbf{y}) \delta J(\mathbf{x}')} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Donde se deduce que sus derivadas segundas son inversas a menos de un signo, $W^{(2)} = -[\Gamma^{(2)}]^{-1}$. Ahora bien, de acuerdo a las condiciones impuestas sobre el propagador $G_{0,\Lambda}$, (5.2), esta acción efectiva tendrá dos valores límites según el valor de Λ . Si $\Lambda = 0$, la acción clásica modificada se reduce a la original, por lo que $\Gamma_{\Lambda=0}$ será la acción efectiva que buscamos. Por otra parte, si $\Lambda \rightarrow \infty$, se prueba que

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\Gamma_\Lambda [\bar{\varphi}] - S_{0,\Lambda} [\bar{\varphi}] \right) = S_i [\bar{\varphi}] \quad (5.11)$$

De modo que la condición inicial sobre Γ_Λ se pondrá en $\Lambda = \infty$, y se busca su valor en $\Lambda = 0$. Entonces, buscamos una ecuación diferencial que describa la evolución de Γ_Λ . Para esto, el punto de partida es observar la siguiente propiedad de la transformada de Legendre

$$\frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial \Lambda} = \frac{\partial W_\Lambda}{\partial \Lambda} \quad (5.12)$$

Lo que significa esto es que las variables que no están siendo cambiadas por la transformada mantienen el valor de las derivadas. El lado derecho de esta expresión se computa desde la integral de camino (5.8), observando que lo único que depende de Λ es el propagador libre $G_{0,\Lambda}$.

Se obtiene entonces que

$$\left. \frac{\partial W_\Lambda}{\partial \Lambda} \right|_J = \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' (\partial_\Lambda G_{0,\Lambda}^{-1})(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{-iW_\Lambda[J]} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}') e^{i(S_\Lambda[\varphi] + J \cdot \varphi)} \quad (5.13)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' (\partial_\Lambda G_{0,\Lambda}^{-1})(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \langle \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}') \rangle \quad (5.14)$$

Ahora, el valor de expectación $\langle \varphi \varphi' \rangle$ se puede escribir derivando dos veces la expresión (5.8). Se tiene

$$\langle \varphi \varphi' \rangle = -i \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J \delta J'} + \frac{\delta W_\Lambda}{\delta J} \frac{\delta W_\Lambda}{\delta J'} = -i \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J \delta J'} + \bar{\varphi} \bar{\varphi}' \quad (5.15)$$

Reemplazando esto en (5.14), se encuentra que la derivada de Γ_Λ respecto de Λ está dada por

$$\frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' (\partial_\Lambda G_{0,\Lambda}^{-1})(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left[-i \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(\mathbf{x}) \delta J(\mathbf{x}')} + \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}(\mathbf{x}') \right] \quad (5.16)$$

Por último, se usa la relación entre Hessianos de W_Λ y Γ_Λ , (5.10), para escribir

$$\partial_\Lambda \left(\Gamma_\Lambda - \frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot G_{0,\Lambda}^{-1} \cdot \bar{\varphi}' \right) = \frac{i}{2} \int d^3x d^3x' (\partial_\Lambda G_{0,\Lambda}^{-1})(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} \right]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (5.17)$$

Esta ecuación integro-diferencial es la que rige la evolución de la acción efectiva de la teoría modificada, que resolviéndola con la condición inicial $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (\Gamma_\Lambda - S_{0,\Lambda}) = S_i$, y evaluándola en $\Lambda = 0$ se obtiene la acción efectiva de la teoría original. Esta ecuación es en casi todos los casos imposible de resolver exactamente, por lo que hace falta recurrir a aproximaciones.

En esencia hay dos esquemas de aproximación distintos. Uno suele llamarse “expansión en derivadas”, y consiste en darle una forma determinada a la acción efectiva, en función de sucesivas potencias del gradiente del campo. Usualmente uno está interesado en algún comportamiento en un régimen de onda larga, por lo que se trunca esta expansión en los primeros términos. El otro esquema se llama “expansión en vértices”, y consiste en expandir a Γ_Λ en sus derivadas funcionales, o “vértices efectivos”, y así se obtiene una jerarquía de ecuaciones a partir de la ecuación (5.17). Estas ecuaciones para los vértices están acopladas de forma sucesiva, ya que hay una diferencia de 2 derivadas entre el lado derecho y el izquierdo, por la presencia de $\Gamma_\Lambda^{(2)}$. Es por esto que para resolver esto se termina recurriendo a un esquema de truncado, por ejemplo anulando todos los vértices efectivos a partir de un n ,

$$\Gamma_\Lambda^{(n+m)} = 0 \quad \forall m \quad (5.18)$$

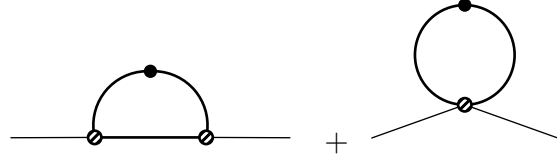
Otra propuesta de truncado de la jerarquía, llamada la *aproximación BMW* [Blaizot et al., 2006], consiste en cerrar la jerarquía manteniendo la dependencia de los vértices efectivos para un número finito de momentos, n . Para vértices con $n + 1, n + 2, \dots$ momentos externos, sólo se mantienen los primeros n y se anulan los demás. De esta forma, usando además que en el caso de campo uniforme ($\varphi(\mathbf{x}) = \bar{\varphi}$) se tiene la relación

$$\Gamma_\Lambda^{(n+1)}(p_1, \dots, p_n, 0) = \frac{\partial \Gamma_\Lambda^{(n)}}{\partial \bar{\varphi}}(p_1, \dots, p_n) \quad (5.19)$$

se puede cerrar la jerarquía infinita de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones acopladas. El orden más bajo de aproximación consiste en sólo mantener la dependencia en la función de dos puntos, $\Gamma_\Lambda^{(2)}(p_1, p_2)$. Primero, escribamos la ecuación para este vértice efectivo, tomando dos derivadas funcionales en la ecuación (5.17), y pasando al espacio de momentos:

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \left(\Gamma_\Lambda^{(2)}(p, -p) - \tilde{G}_{0,\Lambda}^{-1}(p) \right) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\partial_\Lambda \tilde{G}_{0,\Lambda}^{-1}(q) \right) \left[\Gamma_\Lambda^{(2)}(q) \right]^{-2} \\ &\times \left[2 \Gamma_\Lambda^{(3)}(p, q, -q - p) \left[\Gamma_\Lambda^{(2)}(p + q) \right]^{-1} \Gamma_\Lambda^{(3)}(-p, -q, p + q) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Gamma_\Lambda^{(4)}(p, -p, q, -q) \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

El lado derecho de la ecuación se suele representar diagramáticamente de la siguiente forma


(5.21)

Acá se observa como es la jerarquía de ecuaciones. La derivada $\partial_\Lambda \Gamma_\Lambda^{(2)}$ depende además de los vértices de 3 y 4 puntos. De la misma forma, un vértice de n puntos estará acoplado con los vértices de $n + 1$ y $n + 2$ puntos, y a su vez con el vértice de 2, a través del propagador. Esta es la jerarquía infinita que se busca truncar. La idea de la aproximación BMW está en que el impulso que circula por los loops, q , está controlado por el cutoff, y como los vértices efectivos son funciones analíticas de sus impulsos externos, se pueden evaluar estos en $q = 0$. De esta forma, estos vértices quedan “afuera” del loop, y a través de la relación (5.19) se expresan en función de derivadas parciales de $\Gamma_\Lambda^{(2)}$. Así se obtiene una única ecuación para el vértice de dos patas:

$$\partial_\Lambda \left(\Gamma_\Lambda^{(2)}(p) - \tilde{G}_{0,\Lambda}^{-1}(p) \right) = \frac{i}{2} \left[2 f(p, \Gamma_\Lambda^{(2)}) \left(\frac{\partial \Gamma_\Lambda^{(2)}}{\partial \varphi}(p) \right)^2 - \frac{1}{2} g(\Gamma_\Lambda^{(2)}) \frac{\partial^2 \Gamma_\Lambda^{(2)}}{\partial \varphi^2}(p) \right] \quad (5.22)$$

con las definiciones

$$f(p, \Gamma_\Lambda^{(2)}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\partial_\Lambda \tilde{G}_{0,\Lambda}^{-1}(q) \right) \left[\Gamma_\Lambda^{(2)}(q) \right]^{-2} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)}(p + q) \right]^{-1} \quad (5.23)$$

$$g(\Gamma_\Lambda^{(2)}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\partial_\Lambda \tilde{G}_{0,\Lambda}^{-1}(q) \right) \left[\Gamma_\Lambda^{(2)}(q) \right]^{-2} \quad (5.24)$$

Se ve que esta ecuación diferencial sigue siendo no lineal y de una complejidad elevada. Es por esto que en general una vez usado un esquema de aproximación, se recurre a métodos numéricos para la resolución.

5.2. Aplicación del FRG a la ecuación de ondas

En el capítulo 3 se vió una forma de derivar la ecuación de ondas a través de la definición de una acción clásica. Además, que a través de la acción efectiva de esta teoría se puede deducir la autoenergía. El objetivo de este trabajo es aplicar las ideas del FRG para calcular la acción efectiva, y posteriormente compararlo con un desarrollo perturbativo de la misma. Recordemos que se tiene una acción clásica dependiente de los campos $\mathcal{X}^\alpha = \{\epsilon, \phi, \psi^*, \phi^*, \psi, c^*, c, d^*, d\}$. Los 4 campos fantasma se pueden ignorar en la descripción, sujeto a la condición de que la función de dos puntos $\langle \delta\epsilon\delta\epsilon' \rangle$ *on shell* (al anular las fuentes) estará dada por la correlación original C . Se trabajará entonces con una acción de 5 campos $\{\epsilon, \phi, \psi^*, \phi^*, \psi\}$, abreviándolos como $\{\epsilon, \phi^a\}$.

El procedimiento de cutoff

Al momento de implementar el grupo de renormalización funcional a una teoría con n campos, una opción es modificar todos los propagadores libres con un cutoff Λ . Sin embargo, como en nuestra teoría no todos los campos tienen el mismo significado físico, optaremos por sólo modificar la correlación $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, reemplazándola por una función $C_\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. De esta forma, la variación del cutoff Λ puede interpretarse como una transformación únicamente sobre el medio, tal que la ecuación del FRG explore distintas teorías de medios desordenados cuya correlación se irá modificando con el parámetro Λ . Esta correlación modificada deberá cumplir

$$C_\Lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda \rightarrow \infty \\ C & \text{si } \Lambda = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Esto quiere decir, que se parte en $\Lambda = \infty$ con un medio homogéneo y sin fluctuaciones, y se va encendiendo el desorden hasta que en $\Lambda = 0$ la correlación tiene su forma original. Notaremos la acción clásica como

$$S_\Lambda[\epsilon, \phi^a] = S_{0,\Lambda}[\epsilon] + S_i[\epsilon, \phi^a] \quad (5.26)$$

$$S_{0,\Lambda}[\epsilon] = \frac{i}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 (\epsilon(\mathbf{x}_1) - \bar{\epsilon}) C_\Lambda^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) (\epsilon(\mathbf{x}_2) - \bar{\epsilon}) \quad (5.27)$$

Derivación de la ecuación de flujo para Γ_Λ

Para derivar la ecuación del FRG hace falta definir primero un funcional generador W_Λ . Este se hace de la misma forma que en el capítulo 3, a través de la integral funcional, pero ahora para la teoría modificada por Λ

$$e^{iW_\Lambda[J, J_a]} = \int \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\phi^n e^{i(S_{0,\Lambda}[\epsilon] + S_i[\epsilon, \phi^a] + S_J[\epsilon, \phi^a])} \quad (5.28)$$

notando a la parte de las fuentes como

$$S_J[\epsilon, \phi^a] = \int d^3x \left\{ J(\mathbf{x})\epsilon(\mathbf{x}) + J_b(\mathbf{x})\phi^b(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.29)$$

Luego, se definirán los campos medios en presencia de las fuentes,

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\delta W_\Lambda}{\delta J(\mathbf{x})} = e^{-iW_\Lambda} \int \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\phi^n \epsilon(\mathbf{x}) e^{i(S_\Lambda[\epsilon, \phi^b] + S_J[\epsilon, \phi^b])} \quad (5.30)$$

$$\Phi^a(\mathbf{x}) = \frac{\delta W_\Lambda}{\delta J_a(\mathbf{x})} = e^{-iW_\Lambda} \int \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\phi^n \phi^a(\mathbf{x}) e^{i(S_\Lambda[\epsilon, \phi^b] + S_J[\epsilon, \phi^b])} \quad (5.31)$$

que abreviaremos también como

$$\Phi^\alpha = (E, \Phi^a), \quad \alpha = (0, i) \quad (5.32)$$

Estos campos dependen implícitamente de Λ , pero se omite en la notación.

Se define ahora la acción efectiva de la teoría dada por S_Λ , a través de la transformada de Legendre del funcional generador,

$$\Gamma_\Lambda [E, \Phi^a] = W_\Lambda [J, J_a] - \int d^3x \left\{ J(\mathbf{x})E(\mathbf{x}) + J_b(\mathbf{x})\Phi^b(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.33)$$

Este funcional tendrá, como límites

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\Gamma_\Lambda [E, \Phi^a] - S_{0,\Lambda} [E] \right) = S_i [E, \Phi^a] \quad (5.34)$$

$$\Gamma_{\Lambda=0} [E, \Phi^a] = \Gamma [E, \Phi^a] \quad (5.35)$$

Lo que se buscará es escribir el análogo a la ecuación (5.17) pero para la teoría dada por la acción $S_\Lambda [\epsilon, \phi^a]$. El procedimiento es el mismo, se empieza por escribir la derivada respecto de Λ de Γ_Λ , que es igual a la derivada de W_Λ . La misma es

$$\partial_\Lambda W_\Lambda = \frac{i}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \left(\partial_\Lambda C_\Lambda^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right) e^{-iW_\Lambda} \int \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\phi^n \delta\epsilon(\mathbf{x}_1) \delta\epsilon(\mathbf{x}_2) e^{i(S_\Lambda + S_J)} \quad (5.36)$$

Y este valor medio se puede escribir a partir de la derivada segunda de W_Λ , notando que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(\mathbf{x}) \delta J(\mathbf{x}')} &= i \left[\langle \epsilon(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}') \rangle - E(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}') \right] \\ &= i \left[\langle \delta\epsilon(\mathbf{x}) \delta\epsilon(\mathbf{x}') \rangle - (E(\mathbf{x}) - \bar{\epsilon}) (E(\mathbf{x}') - \bar{\epsilon}) \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Esta derivada segunda no es igual a iC_Λ todavía, porque no está evaluada *on shell*. El problema está en que no sirve evaluar la ecuación en una configuración específica antes de derivar vértices efectivos con patas de los campos Φ^a , es preciso primero derivar y luego evaluar la expresión resultante *on shell*.

Una diferencia con el ejemplo de la sección anterior, es que en el mismo al ser un único campo, esta derivada segunda era la inversa del vértice de dos patas externas. En este caso, la relación que se deduce de la transformada de Legendre es

$$\int d^3y \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi_\alpha(\mathbf{x}) \delta \Phi^\beta(\mathbf{y})} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J_\beta(\mathbf{y}) \delta J^\gamma(\mathbf{x}')} = -\delta_\gamma^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (5.38)$$

Por lo que el elemento $\left[W_\Lambda^{(2)} \right]_{0,0}$ ya no es la inversa del elemento $\left[\Gamma_\Lambda^{(2)} \right]_{0,0}$ como pasaba al tener

un sólo campo. Usando la ecuación (5.37) en la (5.36), y que $\partial_\Lambda W_\Lambda = \partial_\Lambda \Gamma_\Lambda$, se obtiene

$$\partial_\Lambda (\Gamma_\Lambda [E, \Phi^a] - S_{0,\Lambda} [E]) = \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 (\partial_\Lambda C_\Lambda^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(\mathbf{x}_1) \delta J(\mathbf{x}_2)} \quad (5.39)$$

Ésta es la ecuación de flujo para la acción efectiva, y es la que intentaremos resolver, de forma aproximada, para $\Lambda = 0$. Así podremos obtener una aproximación a la acción efectiva, de donde por ejemplo se podrá derivar la autoenergía, y la función de Green promedio.

Aproximaciones a la ecuación de flujo

Lo que haremos para resolver la ecuación será dar una parametrización de la acción efectiva. Como se tiene que comparar con la acción clásica en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, reescribiremos la acción clásica del problema forma simétrica como

$$S_i[\epsilon, \phi^a] = \frac{1}{2} \int d^3x I_{ab} \left\{ \phi^a(\mathbf{x}) \Delta \phi^b(\mathbf{x}) + \omega^2 \epsilon(\mathbf{x}) \phi^a(\mathbf{x}) \phi^b(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.40)$$

con la matriz I de la forma

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Esta matriz lo que hace es acoplar los campos ϕ con ψ^* , y ϕ^* con ψ . Tiene la propiedad de ser idempotente, es decir, es su propia inversa $I^2 = 1$. Esto será útil más adelante. Como buscamos una acción efectiva que sea S_Λ en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, supondremos que tiene la siguiente forma

$$\Gamma_\Lambda = S_{0,\Lambda} [E] + \frac{1}{2} \int d^3x I_{ab} \left\{ \alpha_\Lambda[E; \mathbf{x}] \phi^a(\mathbf{x}) \Delta \phi^b(\mathbf{x}) + \omega^2 \epsilon_\Lambda[E; \mathbf{x}] \phi^a(\mathbf{x}) \phi^b(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.42)$$

Así, de la ecuación de flujo se deducirán dos ecuaciones para α_Λ y ϵ_Λ . Lo que es más, asumiremos que estos funcionales se pueden expandir de la siguiente forma

$$\begin{cases} \alpha_\Lambda[E; \mathbf{x}] = a_\Lambda(E(\mathbf{x})) + A_i^{(1)}(\Lambda, E(\mathbf{x})) \partial^i E(\mathbf{x}) + A_{ij}^{(2)}(\Lambda, E(\mathbf{x})) \partial^i E(\mathbf{x}) \partial^j E(\mathbf{x}) + \dots \\ \epsilon_\Lambda[E; \mathbf{x}] = f_\Lambda(E(\mathbf{x})) + F_i^{(1)}(\Lambda, E(\mathbf{x})) \partial^i E(\mathbf{x}) + F_{ij}^{(2)}(\Lambda, E(\mathbf{x})) \partial^i E(\mathbf{x}) \partial^j E(\mathbf{x}) + \dots \end{cases} \quad (5.43)$$

Es decir, se los considera locales y con una expansión en gradientes. El paso siguiente será aproximar sólo por el primer término. Como la acción efectiva tiene que respetar el límite (5.34), esto

impone las siguientes condiciones de contorno para estas funciones a_Λ y f_Λ

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \begin{cases} a_\Lambda(E) = 1 \\ f_\Lambda(E) = E \end{cases} \quad (5.44)$$

Como veremos más adelante, estas dos funciones están vinculadas con los primeros dos términos en la expansión de la autoenergía $\tilde{\Sigma}(p^2)$, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \tilde{\Sigma}(0) &= \omega^2 (f_\Lambda(\bar{\epsilon}) - \bar{\epsilon}) \Big|_{\Lambda=0} \\ \frac{d}{dp^2} \tilde{\Sigma}(0) &= 1 - a_\Lambda(\bar{\epsilon}) \Big|_{\Lambda=0} \end{cases} \quad (5.45)$$

Como se quiere calcular estas funciones en el límite $\Lambda = 0$, escribiremos la ecuación de flujo para el vértice efectivo de dos patas

$$\Gamma_{\Lambda,ef}^{(2)} = \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e \delta \Phi^f} \quad (5.46)$$

y de esta ecuación obtendremos las ecuaciones para a_Λ y f_Λ .

Para calcular este vértice, primero tomamos una derivada funcional

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x})} &= \frac{1}{2} \int d^3 x' I_{ab} \left\{ a_\Lambda(E(\mathbf{x}')) \left(\delta_e^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Delta \phi^b(\mathbf{x}') + \phi^a(\mathbf{x}') \delta_e^b \Delta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right) \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 f_\Lambda(E(\mathbf{x}')) \left(\delta_e^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \phi^b(\mathbf{x}') + \phi^a(\mathbf{x}') \delta_e^b \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

luego la segunda

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y})} &= \frac{1}{2} \int d^3 x' I_{ab} \left\{ a_\Lambda(E(\mathbf{x}')) \left(\delta_e^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_f^b \Delta \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_f^a \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}') \phi^b(\mathbf{x}') \delta_e^b \Delta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right) \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 f_\Lambda(E(\mathbf{x}')) \left(\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}') \right\} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Integrando las deltas y usando que $I_{ab} = I_{ba}$, se obtiene

$$\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y})} = I_{ef} \left\{ \frac{\Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{2} \left[a_\Lambda(E(\mathbf{x})) + a_\Lambda(E(\mathbf{y})) \right] + \omega^2 f_\Lambda(E(\mathbf{x})) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \quad (5.49)$$

Ahora habrá que derivar la ecuación de flujo (5.39) 2 veces respecto de los campos medios Φ^i , y evaluar en $\Phi^i = 0$ (pero en $E \neq 0$). Antes de esto, veremos que propiedades de simetría tienen los vértices efectivos que se puedan desprender de la forma de la acción S_Λ y de la acción efectiva Γ_Λ .

Simetrías de los vértices efectivos

Observando la acción clásica S_Λ en (5.40), vemos que existe una simetría si se hace la siguiente transformación

$$\begin{cases} \phi \rightarrow e^{i\mu}\phi, & \phi^* \rightarrow e^{-i\mu}\phi^* \\ \psi \rightarrow e^{i\mu}\psi, & \psi^* \rightarrow e^{-i\mu}\psi^* \end{cases} \quad (5.50)$$

Esta transformación se puede hacer infinitesimalmente, de la forma

$$\tilde{\phi}^a = \phi^a + i\mu Q_{a'}^a \phi^{a'} \quad (5.51)$$

con la matriz Q

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

y se ve que $\text{tr}(Q) = 0$, de modo que el determinante de la transformación es 1. Introduciendo este cambio en la integral de camino para el funcional generador, entonces

$$e^{iW[J, J_a]} = \int \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\tilde{\phi}^n e^{i(S_{0,\Lambda}[\epsilon] + S_i[\epsilon, \tilde{\phi}^a] + S_J[\epsilon, \tilde{\phi}^a])} \quad (5.53)$$

Como el Jacobiano de la transformación es 1,

$$e^{iW[J, J_a]} = \int \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\phi^n e^{i(S_{0,\Lambda}[\epsilon] + S_i[\epsilon, \phi^a] + J \cdot \epsilon + J_a \cdot \phi^a + i\mu J_a Q_{a'}^a \phi^{a'})} \quad (5.54)$$

Desarrollando a primer orden en μ del lado derecho de la igualdad, se llega a que

$$e^{iW[J, J_a]} = e^{iW[J, J_a]} - \mu J_a Q_{a'}^a \int \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\phi^n \phi^{a'} e^{i(S_{0,\Lambda}[\epsilon] + S_i[\epsilon, \phi^k] + J \cdot \epsilon + J_k \cdot \phi^k)} \quad (5.55)$$

Por lo que se deduce la siguiente propiedad

$$J_a Q_{a'}^a \Phi^{a'} = 0 \quad (5.56)$$

O, reescribiendo la fuente en términos de Γ_Λ ,

$$\frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^a} Q_{a'}^a \Phi^{a'} = 0 \quad (5.57)$$

Ahora, tomando n derivadas respecto de $\Phi^{i_1}, \dots, \Phi^{i_n}$, y evaluando en $\Phi^i = 0$, quedan n términos sumando que contienen vértices de n puntos:

$$\sum_k \frac{\delta^n \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^a \delta \Phi^{i_1} \dots (\delta \Phi^{i_k}) \dots \delta \Phi^{i_n}} Q_{i_k}^a = 0 \quad (5.58)$$

Donde el campo entre paréntesis queda excluido de la suma. Como la matriz $Q_{a'}^a$ es diagonal, sus elementos siendo 1 o -1 , $Q_a^a = (-1)^{q_a}$, se simplifica a

$$\frac{\delta^n \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^{i_1} \dots \delta \Phi^{i_n}} \sum_k^n (-1)^{q_{i_k}} = 0 \quad (5.59)$$

Entonces, se tienen distintos casos posibles para que esta suma de cero. Si n es impar, como es imposible sumar cero sumando 1 y -1 , la derivada se anulará. En cambio, si n es par, se puede anular, pero sólo si los índices que se derivan son tales que la suma se anula.

Por ejemplo, al anular los campos medios Φ^i , la matriz de derivadas segundas $\Gamma_\Lambda^{(2)}$ será diagonal por bloques, es decir, sólo serán no nulos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta E \delta E'} \\ \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^a \delta \Phi^b} \end{array} \right. \quad (5.60)$$

y como consecuencia de esto, también lo será la matriz de derivadas segundas de W_Λ .

En cuanto a las derivadas terceras, si se deriva una vez la ecuación (5.38) respecto de J^γ

$$W_{,\alpha\beta\gamma} \Gamma_{,\beta\delta} + W_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta J_\gamma} \Gamma_{,\beta\delta} = 0 \quad (5.61)$$

y usando que $-W^{(2)}$ es la inversa de $\Gamma^{(2)}$, se llega a que

$$W_{,\alpha\beta\gamma} = W_{,\alpha\alpha'} W_{,\beta\beta'} W_{,\gamma\gamma'} \Gamma_{,\alpha'\beta'\gamma'} \quad (5.62)$$

Entonces, si se anulan los campos medios de materia, $\Phi^i = 0$, como las derivadas segundas de W_Λ son diagonales por bloques, lo mismo valdrá para las derivadas terceras de W_Λ que para las de Γ_Λ . Es decir, sólo pueden ser no nulas las derivadas con dos índices de materia, o con ninguno. Resumiendo, sólo pueden ser no nulas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta^3 W_\Lambda}{\delta J \delta J' \delta J''} \\ \frac{\delta^3 W_\Lambda}{\delta J \delta J^i \delta J^k} \end{array} \right. \quad (5.63)$$

Respecto a mezclar derivadas de los campos y de las fuentes, es cuestión de hacer regla de la

cadena, por ejemplo

$$\frac{\delta}{\delta\Phi^e} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J^\alpha \delta J^\beta} = \frac{\delta J^\sigma}{\delta\Phi^e} \frac{\delta^3 W_\Lambda}{\delta J^\sigma \delta J^\alpha \delta J^\beta} = - \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta\Phi_\sigma \delta\Phi^e} \frac{\delta^3 W_\Lambda}{\delta J^\sigma \delta J^\alpha \delta J^\beta} \quad (5.64)$$

y que, al anular los campos medios, $\sigma \rightarrow i$, sólo puede ser índice de materia. Entonces, como del lado derecho, la derivada tercera tiene que respetar que un número par de sus índices deba ser de materia, α o β deberán serlo. Análogamente, si se toma una derivada más,

$$\frac{\delta^2}{\delta\Phi^f \delta\Phi^e} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J^\alpha \delta J^\beta} = \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta\Phi_\sigma \delta\Phi^e} \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta\Phi_\omega \delta\Phi^f} \frac{\delta^4 W_\Lambda}{\delta J^\omega \delta J^\sigma \delta J^\alpha \delta J^\beta} \quad (5.65)$$

ahora, al anular los campos medios, $\sigma \rightarrow i, \omega \rightarrow j$, de modo que, α y β deberán ser ambos índices latinos, o ambos cero.

Ecuación para la autoenergía

Como interesa la ecuación de flujo para el vértice de dos patas, hará falta calcular la siguiente derivada, que surge de derivar la ecuación (5.39)

$$\left. \frac{\delta^2}{\delta\Phi^e \delta\Phi^f} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J \delta J} \right|_{\Phi^a=0} \quad (5.66)$$

se tomará de partida la relación entre Hessianos (5.38). Abreviaremos las derivadas

$$W_{,\alpha\beta} \Gamma_{,\beta\omega} = -1 \quad (5.67)$$

Derivando este producto dos veces respecto de campos de materia, tendremos

$$W_{,\alpha\beta ef} \Gamma_{,\beta\omega} + W_{,\alpha\beta e} \Gamma_{,\beta\omega f} + W_{,\alpha\beta f} \Gamma_{,\beta\omega e} + W_{,\alpha\beta} \Gamma_{,\beta\omega ef} = 0 \quad (5.68)$$

donde hay que tener en cuenta que las derivadas terceras y cuartas de W son de carácter mezclado. Esta expresión se evalúa en $\Phi^i = 0$. Como se busca el término $W_{,00ef}$, lo que se hace es multiplicar por la inversa de $\Gamma_{,\beta\omega}$, que en el caso de campos medios cero, es diagonal por bloques. Entonces, sería $-W_{,00}$ el inverso de $\Gamma_{,00}$. De esta forma, se obtiene

$$W_{,00ef} = -W_{,00} (-W_{,0\beta e} \Gamma_{,\beta 0f} - W_{,0\beta f} \Gamma_{,\beta 0e} - W_{,0\beta} \Gamma_{,\beta 0ef}) \quad (5.69)$$

ahora se usan las relaciones (5.62) y (5.64), y que $W_{,0\beta} = W_{,00} \delta_{0\beta}$, se tiene

$$\begin{aligned} W_{,00ef} &= W_{,00} (-\Gamma_{,je} W_{,0ij} \Gamma_{,i0f} - \Gamma_{,if} W_{,0ji} \Gamma_{,j0e} + W_{,00} \Gamma_{,00ef}) \\ &= W_{,00} (-\Gamma_{,je} W_{,00} W_{,il} W_{,jk} \Gamma_{,0lk} \Gamma_{,i0f} - \Gamma_{,if} W_{,00} W_{,il} W_{,jk} \Gamma_{,0kl} \Gamma_{,j0e} + W_{,00} \Gamma_{,00ef}) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Por último, se usa que $-W_{kl}$ es el inverso de $\Gamma_{,ij}$,

$$W_{,00ef} = W_{,00} W_{,00} (2\Gamma_{,0ke} W_{,kl} \Gamma_{,0lf} + \Gamma_{,00ef}) \quad (5.71)$$

Que, en notación completa es

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y}) \delta J(\mathbf{x}_1) \delta J(\mathbf{x}_2)} \right|_{\Phi^a=0} &= \int d^3 x' d^3 x'' \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(\mathbf{x}_1) J(\mathbf{x}')} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(\mathbf{x}_2) J(\mathbf{x}'')} \times \\ &\left(\int d^3 y' d^3 y'' 2 \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta E(\mathbf{x}') \delta \Phi^k(\mathbf{y}') \delta \Phi^e(\mathbf{x})} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J^k(\mathbf{y}') J^l(\mathbf{y}'')} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta E(\mathbf{x}'') \delta \Phi^l(\mathbf{y}'') \delta \Phi^f(\mathbf{y})} \right. \\ &\left. + \frac{\delta^4 \Gamma_\Lambda}{\delta E(\mathbf{x}') \delta E(\mathbf{x}'') \delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y})} \right) \end{aligned} \quad (5.72)$$

Esto se inserta en la ecuación (5.39). Usando que $W_{,00} = iC_\Lambda$, y la relación

$$\int d^3 x_1 d^3 x_2 \partial_\Lambda C_\Lambda^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) C_\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}') C_\Lambda(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'') = -\partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \quad (5.73)$$

Se escribe la ecuación de flujo para el vértice de dos patas (se omitirán las integrales espaciales al repetir coordenadas)

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \left. \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y})} \right|_{\Phi^a=0} &= \frac{1}{2} \partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \left(\frac{\delta^4 \Gamma_\Lambda}{\delta E(\mathbf{x}') \delta E(\mathbf{y}') \delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y})} \right. \\ &\left. + 2 \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta E(\mathbf{x}') \delta \Phi^k(\mathbf{x}'') \delta \Phi^e(\mathbf{x})} \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J^k(\mathbf{x}'') J^l(\mathbf{y}'')} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta E(\mathbf{y}') \delta \Phi^l(\mathbf{y}'') \delta \Phi^f(\mathbf{y})} \right) \end{aligned} \quad (5.74)$$

Esta ecuación tiene una representación diagramática análoga a (5.21). Si se resuelve, en el límite $\Lambda = 0$ nos permitirá calcular la autoenergía, ya que, como la función de Green promedio del problema está dada por el valor medio (3.24), este valor medio se escribe a partir del funcional generador como

$$\frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J^1 \delta J^2} = i \langle \phi \psi^* \rangle = G \quad (5.75)$$

esto en el caso que los campos medios son cero. Entonces llamando primero a

$$G_{ab} = \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J^a \delta J^b} \quad (5.76)$$

se ve que, por la relación entre Hessianos de Γ_Λ y W_Λ ,

$$\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^a \delta \Phi^b} G_{bc} = -\delta_{ac} \quad (5.77)$$

La derivada segunda de Γ_Λ está vinculada a la autoenergía de la siguiente forma

$$\Gamma_{,ab} = -(G^{-1})_{ab} = \Sigma_{ab} - (G_0^{-1})_{ab} \quad (5.78)$$

Por lo que obtener $\Gamma_{,ab}$ es obtener la autoenergía, al restarle un propagador libre. Dada la parametrización de la acción efectiva en (5.42), se tiene que, en campo medio homogéneo $E(\mathbf{x}) = E$,

$$\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^a \delta \Phi^b} G_{bc} = I_{ab} \left(a_\Lambda(E) \Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \omega^2 f_\Lambda(E) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) G_{bc} = -\delta_{ac} \quad (5.79)$$

Como I_{ab} es su propia inversa, podemos definir $G_{ab} = I_{ab} g$, e integrando las deltas

$$\left(a_\Lambda(E) \Delta_x + \omega^2 f_\Lambda(E) \right) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.80)$$

Que, en el espacio de momentos, es

$$\left(-a_\Lambda(E) p^2 + \omega^2 f_\Lambda(E) \right) \tilde{g}(p) = -1 \quad (5.81)$$

y así llegamos a la función de Green en el espacio de momentos

$$\tilde{g}(p) = \left(a_\Lambda(E) p^2 - \omega^2 f_\Lambda(E) \right)^{-1} = \left(p^2 - \omega^2 E - \{ [1 - a_\Lambda(E)] p^2 + \omega^2 [f_\Lambda(E) - E] \} \right)^{-1} \quad (5.82)$$

de donde se observa que como $p^2 - \omega^2 E = G_0^{-1}$, y $E = \bar{\epsilon}$, esta ecuación se compara con (2.25). De esta forma se ven las relaciones (5.45).

Ecuaciones para a_Λ y f_Λ

De acuerdo con la parametrización de la acción efectiva que se dio en (5.42), de la ecuación de flujo para el vértice de dos patas (5.74) se derivarán las ecuaciones diferenciales para a_Λ y f_Λ . Estas ecuaciones, resueltas para $\Lambda = 0$, darán una forma aproximada de la autoenergía y de la función de Green promedio de la ecuación de ondas. Para esto, hace falta calcular los vértices de dos y de tres patas para la ecuación (5.74). Dada la forma del vértice de dos patas, (5.49), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y}) \delta E(\mathbf{x}')} &= \frac{I_{ef}}{2} \left\{ \nabla_x^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) a'_\Lambda(E(\mathbf{x}')) [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}')] \right. \\ &\quad \left. + 2\omega^2 f'_\Lambda(E(\mathbf{x})) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y}) \delta E(\mathbf{x}') \delta E(\mathbf{y}')} &= \frac{I_{ef}}{2} \left\{ \nabla_x^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) a''_\Lambda(E(\mathbf{x}')) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}')] \right. \\ &\quad \left. + 2 \omega^2 f''_\Lambda(E(\mathbf{x})) \delta(\mathbf{y}' - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Ahora, se reemplazan estas dos ecuaciones, junto con el vértice de dos patas, en (5.74). Se particulariza también en el caso de campo homogéneo, por lo que $a = a(\Lambda, E)$, $f = f(\Lambda, E)$. Además, se usará la definición de $G_{ab} \equiv I_{ab} g = W_{ab}$, y se definirán

$$\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y})} \equiv I_{ef} \gamma_\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.85)$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y}) \delta E(\mathbf{x}')} \equiv I_{ef} \gamma_\Lambda^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}') \quad (5.86)$$

$$\frac{\delta^4 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi^e(\mathbf{x}) \delta \Phi^f(\mathbf{y}) \delta E(\mathbf{x}') \delta E(\mathbf{y}')} \equiv I_{ef} \gamma_\Lambda^{(4)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}') \quad (5.87)$$

La ecuación de flujo se escribe como

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \gamma_\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I_{ef} &= \frac{1}{2} \partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \left(I_{ef} \gamma_\Lambda^{(4)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}') \right. \\ &\quad \left. + 2 I_{ek} \gamma_\Lambda^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}''; \mathbf{x}') I_{kl} g(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'') I_{lf} \gamma_\Lambda^{(3)}(\mathbf{y}'', \mathbf{y}; \mathbf{y}') \right) \end{aligned} \quad (5.88)$$

Luego, porque la matriz I es idempotente, el producto de 3 matrices es igual a ella misma. Entonces se factorizará de ambos lados de la ecuación, y quedará

$$\partial_\Lambda \gamma_\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \left(\gamma_\Lambda^{(4)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}') + 2 \gamma_\Lambda^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}''; \mathbf{x}') g(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'') \gamma_\Lambda^{(3)}(\mathbf{y}'', \mathbf{y}; \mathbf{y}') \right) \quad (5.89)$$

Y el primer término, si se integran las variables \mathbf{x}' e \mathbf{y}' , se obtiene

$$\begin{aligned} \int d^3 x' d^3 y' \frac{1}{2} \partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \gamma_\Lambda^{(4)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}') &= \frac{1}{2} \partial_\Lambda C_\Lambda(0) \frac{\partial^2}{\partial E^2} \gamma_\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\equiv \frac{\dot{C}_\Lambda(0)}{2} \partial_E^2 \gamma_\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.90)$$

Definimos el operador diferencial \hat{h} ,

$$\hat{h} = \frac{\partial}{\partial \Lambda} - \frac{\dot{C}_\Lambda(0)}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \quad (5.91)$$

h de *heat* por su similitud con la ecuación del calor. Esto permite abreviar aún más la ecuación de flujo a

$$\hat{h}\gamma_{\Lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{\Lambda} C_{\Lambda}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \gamma_{\Lambda}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}''; \mathbf{x}') g(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'') \gamma_{\Lambda}^{(3)}(\mathbf{y}'', \mathbf{y}; \mathbf{y}') \quad (5.92)$$

Ahora bien, el problema es cómo extraer dos ecuaciones, para a_{Λ} y f_{Λ} a partir de esta ecuación. Una forma está en aprovechar que hay una simetría de traslación que se desprende de suponer que el medio es homogéneo, entonces

$$\begin{cases} C_{\Lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{\Lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \gamma_{\Lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma_{\Lambda}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{cases} \quad (5.93)$$

Entonces se puede transformar Fourier la ecuación (5.92). Transformar el lado izquierdo de la ecuación es directo. El lado derecho es una cuenta un poco más extensa. Primero escribimos

$$\gamma_{\Lambda}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}''; \mathbf{x}') \gamma_{\Lambda}^{(3)}(\mathbf{y}'', \mathbf{y}; \mathbf{y}') = \begin{cases} a_{\Lambda}'^2 A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') + \\ \omega^2 a_{\Lambda}' f_{\Lambda}' B(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') + \\ \omega^4 f_{\Lambda}'^2 C(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') \end{cases} \quad (5.94)$$

Con las siguientes funciones ($\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, $\mathbf{Y} \equiv (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'')$)

$$A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{4} \Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \Delta_y \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}'') \left(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \delta(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \right) \left(\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}') + \delta(\mathbf{y}'' - \mathbf{y}') \right) \quad (5.95)$$

$$\begin{cases} B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} [B_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + B_0(\mathbf{Y}, \mathbf{X})] \\ B_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Delta_x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \left(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \right) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}'') \end{cases} \quad (5.96)$$

$$C(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}'') \quad (5.97)$$

Cada uno de estos términos va multiplicado por $g(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'') \partial_{\Lambda} C_{\Lambda}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$, y luego se integra en las variables primadas. Empezando por el más sencillo, el tercer término, se obtiene

$$\omega^4 f_{\Lambda}'^2 \partial_{\Lambda} C_{\Lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.98)$$

que como es un producto de funciones, la transformada de Fourier será la convolución de las transformadas. Definiendo la transformada de Fourier como

$$\tilde{F}(\mathbf{p}) = \int d^3u \, e^{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}} F(\mathbf{u}) \quad (5.99)$$

se transforma respecto de la variable relativa $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, para obtenerse

$$\omega^4 f'_\Lambda \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}) \quad (5.100)$$

El siguiente término, proporcional a $\omega^2 a'_\Lambda f'_\Lambda$, se compone de dos términos similares, que involucran a la función B_0 . Como $\gamma_\Lambda^{(2)}$ es par, $\gamma_\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}) = \gamma_\Lambda^{(2)}(-\mathbf{x})$, g también lo es, y C_Λ también lo es, pues es simétrico. De hecho luego se asumirá que C_Λ es invariante rotacional.

$$C_\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow C_\Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow C_\Lambda(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (5.101)$$

De esta forma, los dos términos, que involucran permutaciones de variables en B_0 , terminan siendo el mismo. Este término es

$$\begin{aligned} & \omega^2 a'_\Lambda f'_\Lambda \partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') g(\mathbf{x}'' - \mathbf{y}'') B_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ &= \omega^2 a'_\Lambda f'_\Lambda \left[\partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_x g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Delta_x (\partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right] \end{aligned} \quad (5.102)$$

Que, al transformar Fourier respecto de la variable relativa, se obtiene

$$- \omega^2 a'_\Lambda f'_\Lambda \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}) (q^2 + p^2) \quad (5.103)$$

Finalmente, el término proporcional a $a_\Lambda'^2$, es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} a_\Lambda'^2 A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') g(\mathbf{x}'' - \mathbf{y}'') = \frac{1}{4} a_\Lambda'^2 \left[\partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_x \Delta_y g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right. \\ & \quad + \Delta_x (C_\Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_y g(\mathbf{x} - \mathbf{y})) + \Delta_y (\partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_x g(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ & \quad \left. + \Delta_x \Delta_y (\partial_\Lambda C_\Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right] \end{aligned} \quad (5.104)$$

que al transformar Fourier toma la forma

$$\frac{1}{4} a_\Lambda'^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}) (q^4 + 2 q^2 p^2 + p^4) \quad (5.105)$$

Del lado izquierdo de la ecuación, la transformada de $\gamma_\Lambda^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ es

$$\tilde{\gamma}_\Lambda^{(2)} = -a_\Lambda p^2 + \omega^2 f_\Lambda \quad (5.106)$$

Con esto, se escribe la ecuación de flujo en espacio de momentos

$$\begin{aligned} -p^2 \hat{h} a_\Lambda + \omega^2 \hat{h} f_\Lambda &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}) \\ &\quad \times \left\{ \frac{a_\Lambda'^2}{4} (q^4 + 2 q^2 p^2 + p^4) - \omega^2 f'_\Lambda a'_\Lambda (p^2 + q^2) + \omega^4 f_\Lambda'^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.107)$$

Esta ecuación no es consistente para todos los valores de p . El lado izquierdo es cuadrático en p , mientras que el lado derecho no. Esto se debe a la naturaleza de las aproximaciones hechas, en particular que se eligió al parametrizar la acción efectiva. La forma de extraer ecuaciones para $a_\Lambda \equiv a(\Lambda, E)$ y $f_\Lambda \equiv f(\Lambda, E)$ es haciendo un desarrollo de Taylor hasta p^2 en el lado derecho de la ecuación. La ecuación para f_Λ es simplemente evaluar en $p = 0$,

$$\omega^2 \left[\frac{\partial}{\partial \Lambda} - \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \frac{\partial^2}{\partial E^2} \right] f(\Lambda, E) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q^2) \tilde{g}(q^2) \left\{ \frac{a'^2}{4} q^4 - \omega^2 f' a' q^2 + \omega^4 f'^2 \right\} \quad (5.108)$$

Donde, por isotropía, las transformadas \tilde{C}_Λ y \tilde{g} dependen del módulo del momento. Por esta misma isotropía, una convolución de dos funciones isótropas es también isótropa. Por esta razón, para obtener la ecuación diferencial para a_Λ , se deriva dos veces respecto de algún p_i , y se evalúa en $p = 0$. Se obtiene

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\partial}{\partial \Lambda} - \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \frac{\partial^2}{\partial E^2} \right] a(\Lambda, E) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{g}(q) \left\{ \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \left[\frac{a'^2}{2} q^2 - \omega^2 f' a' \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(p - q) \Big|_{p=0} \left[\frac{a'^2}{4} q^4 - \omega^2 f' a' q^2 + \omega^4 f'^2 \right] \right\} \quad (5.109) \end{aligned}$$

Éstas son las dos ecuaciones diferenciales que se obtienen al aplicar el grupo de renormalización funcional y dando una parametrización particular para la acción efectiva. Resolverlas en $\Lambda = 0$ permite obtener una aproximación a la autoenergía hasta cuadrática en el espacio de momentos.

Como estas ecuaciones no pueden ser resueltas de forma exacta, lo primero que se hizo fue una expansión perturbativa de las mismas, para comparar con un desarrollo perturbativo de la autoenergía como el del capítulo 2. Es decir, expandiendo las funciones a y f en “funciones de correlación” (por ejemplo asignando un peso a la función de correlación, $C_\Lambda \equiv \alpha C_\Lambda$, se expande en potencias de α), se obtienen ecuaciones diferenciales para cada orden de las funciones, $a^{(n)}$ y $f^{(n)}$. Estas ecuaciones diferenciales luego se compararon con lo que se obtiene si la expansión de la autoenergía se hace con una correlación que dependa del cutoff Λ , y se deriva esta expansión respecto de Λ . Este análisis se hizo hasta orden cuadrático, está presentado en el apéndice A. Se encontró que producto de las aproximaciones que se hicieron en el desarrollo de las ecuaciones de flujo (principalmente expandir la autoenergía hasta orden p^2), la expansión perturbativa de las ecuaciones diferenciales no capta toda la información de la autoenergía, un resultado que era de esperarse. Sin embargo, la principal ventaja de tener una ecuación de renormalización es captar el comportamiento no perturbativo del sistema, en este caso de la autoenergía. Por este motivo, en los siguientes capítulos estaremos enfocados en la resolución de las ecuaciones diferenciales, sin recurrir a una expansión perturbativa.

Simplificaciones a la ecuación de flujo

En este capítulo veremos de qué manera se puede abordar la solución a las ecuaciones diferenciales encontradas en el capítulo anterior. Nos concentraremos principalmente en la ecuación para f , es decir estamos interesados en el comportamiento de la autoenergía a impulso cero. En particular, en su parte imaginaria, ya que está relacionada con una distancia de decaimiento de la onda promedio. Como las ecuaciones del grupo de renormalización involucran una integral en un loop, lo primero que hace falta es decidir de qué manera se implementará el cutoff. En el capítulo siguiente se hará una resolución numérica de la ecuación diferencial para f , para un medio particular, y se lo comparará con la solución aproximada y con una solución perturbativa.

6.1. Forma del cutoff

La función de correlación original se asume que es isótropa, es decir que sólo depende de la distancia entre dos puntos, y no de la orientación de los mismos. Entonces, su transformada de Fourier será también isótropa, dependiente sólo de la magnitud del impulso. Para simplificar las integrales de los loops que aparecen en las ecuaciones diferenciales, se optará por un cutoff abrupto en el espacio de momentos, es decir

$$\tilde{C}_\Lambda(p) = \Theta(p - \Lambda) \tilde{C}(p) \quad (6.1)$$

De modo que, con este cutoff, se tiene

$$\partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(p) = -\delta(p - \Lambda) \tilde{C}(p) \quad (6.2)$$

Entonces por ejemplo la correlación en el límite de coincidencia es

$$\begin{aligned} C_\Lambda(0) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(p) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \, p^2 \Theta(p - \Lambda) \tilde{C}(p) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_\Lambda^\infty dp \, p^2 \tilde{C}(p) \end{aligned} \quad (6.3)$$

y su derivada es

$$\dot{C}_\Lambda(0) = -\frac{1}{2\pi^2} \Lambda^2 \tilde{C}(\Lambda) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(p) \quad (6.4)$$

De la misma forma, la integral del loop se hace exactamente gracias a la función delta

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(p) F(p) = -\frac{1}{2\pi^2} \Lambda^2 \tilde{C}(\Lambda) F(\Lambda) = \dot{C}_\Lambda(0) F(\Lambda) \quad (6.5)$$

Y así, la ecuación para f toma la forma

$$\omega^2 \left[\frac{\partial}{\partial \Lambda} - \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \frac{\partial^2}{\partial E^2} \right] f(\Lambda, E) = \dot{C}_\Lambda(0) \tilde{g}(\Lambda) \left\{ \frac{a'^2}{4} \Lambda^4 - \omega^2 f' a' \Lambda^2 + \omega^4 f'^2 \right\} \quad (6.6)$$

6.2. Ecuación para f

Lo que haremos a continuación será aproximar $a \sim 1$. Esto simplifica la ecuación a

$$\left[\frac{\partial}{\partial \Lambda} - \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \frac{\partial^2}{\partial E^2} \right] f(\Lambda, E) = \dot{C}_\Lambda(0) \tilde{g}(\Lambda) \omega^2 f'^2 = \dot{C}_\Lambda(0) \frac{1}{\Lambda^2 - \omega^2 f} \omega^2 f'^2 \quad (6.7)$$

La condición inicial de la ecuación está dada en $\Lambda \rightarrow \infty$, y se busca la solución en $\Lambda = 0$. Para no trabajar en un rango infinito de la variable Λ , se define una variable “temporal” t a través de

$$t \equiv \frac{C_\Lambda(0)}{C(0)} \quad (6.8)$$

Esta variable es tal que

$$t(\Lambda \rightarrow \infty) = 0, \quad t(\Lambda = 0) = 1 \quad (6.9)$$

De modo que mapea la condición inicial a $t = 0$, y el medio físico, completo a $t = 1$. Además,

$$\frac{dt}{d\Lambda} = \frac{\dot{C}_\Lambda(0)}{C(0)} \quad (6.10)$$

Por lo que, usando regla de la cadena en la derivada respecto de Λ , se puede eliminar $\dot{C}_\Lambda(0)$ de la ecuación, y se obtiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} C(0) \frac{\partial^2}{\partial E^2} \right] f(t, E) = C(0) \frac{1}{\Lambda(t)^2 - \omega^2 f} \omega^2 f'^2 \quad (6.11)$$

Acto seguido, se absorbe $C(0)$ a través del cambio de variable

$$e = \frac{E}{\sqrt{C(0)}} \quad (6.12)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial e^2} \right] f(t, e) = \frac{1}{\Lambda(t)^2 - \omega^2 f} \omega^2 f'^2 \quad (6.13)$$

La condición inicial, $f(\Lambda \rightarrow \infty, E) = E$, es ahora

$$f(t = 0, e) = \sqrt{C(0)} e \quad (6.14)$$

Finalmente, recordando en el capítulo 2 la discusión sobre el número de Reynolds generalizado, llamaremos R al rango de la correlación. El producto $R\Lambda \equiv X$ es una cantidad adimensional que mide el cociente entre la escala del cutoff y la escala de momentos de la correlación. Multiplicando de ambos lados la ecuación por $\omega^2 R^2$, y definiendo $F = \omega^2 R^2 f$, se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial e^2} \right] F(t, e) = \frac{1}{X(t)^2 - F} F'^2 \quad (6.15)$$

Donde ahora la condición inicial es

$$F(t = 0, e) = \left(\omega^2 R^2 \sqrt{C(0)} \right) e = Q e \quad (6.16)$$

con Q el número de Reynolds generalizado. La ecuación diferencial está adimensionalizada, y toda la información sobre el medio está contenida en $X(t)$, y en la condición inicial.

6.3. Solución aproximada

Ahora veremos una forma de resolver (6.15). En particular interesa la parte imaginaria de F , ya que como se dijo antes, la parte imaginaria de la autoenergía está vinculada a la absorción del medio. Y como la ecuación (6.15) tiene una singularidad, desarrollará una parte imaginaria no nula. Escribiremos

$$F(t, e) = P(t, e) + i\sigma(t, e) \quad (6.17)$$

La condición inicial es

$$P(t = 0, e) = Q e, \quad \sigma(t = 0, e) = 0 \quad (6.18)$$

Como $X(t \rightarrow 0) = \infty$, para valores pequeños de t se tiene que $X^2 \gg F$, entonces si escribimos

$$P(t, e) = Q e + \alpha(t) \quad (6.19)$$

se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) = \frac{Q^2}{X^2(t)} \quad (6.20)$$

Es decir, para pequeños valores de t ,

$$F(t \ll 1, e) = Q e + Q^2 \int_0^t \frac{dt'}{X^2(t')} \quad (6.21)$$

suponiendo también que la parte imaginaria no se desarrolla aún. Para la parte imaginaria, escribimos

$$\frac{1}{X^2 - F} = \frac{X^2 - F^*}{|X^2 - F|^2} = \frac{X^2 - P + i\sigma}{(X^2 - P)^2 + \sigma^2} \quad (6.22)$$

y

$$(F')^2 = (Q + i\sigma')^2 \quad (6.23)$$

Sin embargo, supondremos que $\sigma \ll 1$, que $\sigma' \ll 1$, y aproximaremos

$$(F')^2 \sim Q^2 \quad (6.24)$$

Entonces, la ecuación para $\sigma(t, e)$ es

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial e^2} \right] \sigma(t, e) = Q^2 \frac{\sigma}{(X^2 - P)^2 + \sigma^2} \quad (6.25)$$

El lado derecho de la ecuación, que es una campana de Cauchy, lo aproximaremos por una delta

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial e^2} \right] \sigma(t, e) = Q^2 \pi \delta(X^2(t) - P(t, e)) \quad (6.26)$$

Ahora, suponiendo que $P(t, e)$ mantiene la forma que tiene para $t \ll 1$, entonces

$$X^2(t) = Q e + Q^2 \int_0^t \frac{dt'}{X^2(t')} \quad \mapsto e = \frac{X^2(t)}{Q} - Q \int_0^t \frac{dt'}{X^2(t')} \equiv H(t) \quad (6.27)$$

De modo que la delta cambia a

$$\delta(X^2(t) - P(t, e)) = \frac{\delta(e - H(t))}{Q} \quad (6.28)$$

Llamaremos t^* al tiempo tal que, dado e ,

$$e = H(t^*) \quad (6.29)$$

que es el tiempo a partir del cual asumiremos se enciende la parte imaginaria de la solución. Es decir,

$$\sigma(t, e) = \begin{cases} 0 & t < t^* \\ \sigma(e) & t > t^* \end{cases} \quad (6.30)$$

integrando la ecuación diferencial entre $t = t^* - \epsilon$ y $t = t^* + \epsilon$, y tendiendo $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t^*-\epsilon}^{t^*+\epsilon} dt \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial e^2} \right] &= \int_{t^*-\epsilon}^{t^*+\epsilon} dt \pi Q \delta(e - H(t)) \\ \sigma(e) + \mathcal{O}(\epsilon) &= \int_{t^*-\epsilon}^{t^*+\epsilon} dt \frac{\pi Q}{|\dot{H}(t)|} \delta(t - t^*(e)) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Entonces se llega a la forma de $\sigma(t > t^*, e)$

$$\sigma(e) = \frac{\pi Q}{|\dot{H}(t^*(e))|} \quad (6.32)$$

Que, derivando $H(t)$,

$$\dot{H}(t) = \frac{2X\dot{X}}{Q} - \frac{Q}{X^2} \quad (6.33)$$

Se expresa como

$$\sigma(e) = \frac{\pi Q^2 X^2(t)}{|2X^2(t)\dot{X}(t) - Q^2|} \Bigg|_{t=t^*(e)} \quad (6.34)$$

Donde $t^*(e)$ se obtiene de invertir la relación

$$e(t^*) = H(t^*) = \frac{X^2(t^*)}{Q} - Q \int_0^{t^*} \frac{dt'}{X^2(t')} \quad (6.35)$$

Así se obtuvo una relación paramétrica para la parte imaginaria de F en $t = 1$. Se puede invertir el $t(X)$, y expresar la relación en términos de X

$$X(t) = R\Lambda(t), \quad t = \frac{C_\Lambda(0)}{C(0)} \quad (6.36)$$

Entonces, usando la relación (6.4) para el cutoff escalonado,

$$\frac{dt}{dX} = \frac{1}{R} \frac{dt}{d\Lambda} = \frac{1}{R} \frac{\dot{C}_\Lambda(0)}{C(0)} = -\frac{\Lambda^2}{2\pi^2 R} \frac{\tilde{C}(\Lambda)}{C(0)} \equiv -\frac{X^2}{2\pi^2 R^3} \frac{\tilde{C}(X)}{C(0)} \quad (6.37)$$

Escribiendo la inversa para obtener \dot{X} , y cambiando de variables la integral, se obtiene la relación paramétrica en términos de X

$$e(X) = \frac{X^2}{Q} - \frac{Q}{2\pi^2 R^3} \int_X^\infty dX' \frac{\tilde{C}(X')}{C(0)} \quad (6.38)$$

$$\sigma(e) = \frac{\pi Q^2 X^2 \tilde{C}(X)}{Q^2 \tilde{C}(X) + 4\pi^2 X R^3 C(0)} \quad (6.39)$$

Esta relación paramétrica permite evaluar la solución $\sigma(e)$, ya que para cada X se tiene un $e(X)$ y un $\sigma(X)$. Lo único que falta es especificar el medio, es decir, dar la forma de la correlación del medio, $\tilde{C}(X)$.

En este capítulo vimos que a partir de ciertas aproximaciones a la ecuación diferencial para f llegamos a una solución para la parte imaginaria en $\Lambda = 0$ ó $t = 1$. Y si bien no es posible de forma analítica invertir la primera relación para obtener $X(e)$, se puede generar esta solución de forma paramétrica. Lo que resta para hacer esto es dar la descripción del medio, es decir elegir una función de correlación para el mismo. En el siguiente capítulo daremos una función de correlación para un medio particular, y compararemos esta solución paramétrica, con una solución numérica de la ecuación diferencial para F sin aproximaciones subsiguientes, y finalmente con una solución a 2 loops de la autoenergía de forma perturbativa.

Comparación entre métodos

En este capítulo se harán dos cosas: primero, se particularizará el medio desordenado, es decir dando la función de correlación del mismo; luego, se estudiarán soluciones numéricas a la ecuación diferencial para la función $F(t, e)$, y se la comparará con la solución aproximada mostrada en el capítulo anterior. Finalmente, estos dos métodos se contrastarán con una resolución perturbativa de la autoenergía. Así, se observará si el grupo de renormalización funcional capta efectos no perturbativos, que no sean observados en una expansión en loops de la autoenergía. Observaremos cómo surge un medio efectivo de características absorbentes (parte imaginaria de Σ no nula) de un promediado sobre un medio aleatorio compuesto de partes no absorbentes [Depine and Dorado, 2009, Lozano et al., 2012]. Esta absorción denota una pérdida de energía de la parte coherente de la onda producto del desorden.

7.1. Modelo: Medio homogéneo con burbujas

En esta sección consideraremos un modelo simple para obtener una función de correlación [Franco and Calzetta, 2015]. El índice de dispersión al cuadrado, ϵ , tiene dos valores posibles. Hay un fondo homogéneo de valor constante ϵ_0 , y esferas de radio R con $\epsilon_0 + \Delta\epsilon$. Las esferas están distribuidas al azar, de forma independiente y uniforme, en un volumen V . Las esferas pueden intersectarse, pero en este caso ϵ no se suma, seguirá valiendo $\epsilon_0 + \Delta\epsilon$. Llamamos $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ a los centros de las esferas.

Definimos una función,

$$f_i(\mathbf{x}) = \Theta \left(1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^2}{R^2} \right) \equiv f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (7.1)$$

que toma el valor 1 en una región esférica de radio R alrededor del punto \mathbf{x}_i , y 0 fuera de la misma. A través de esta función se escribe el índice de dispersión al cuadrado

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_0 - \Delta\epsilon \sum_{k=1}^N (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) \quad (7.2)$$

Donde las sumas a cada orden $k \geq 2$ se encargan de compensar intersecciones de las esferas para que sólo haya dos valores posibles de ϵ . Para calcular el valor medio de esta cantidad, primero se

calcula

$$\langle f_i(\mathbf{x}) \rangle = \int d^3x_i \frac{1}{V} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{v}{V} \quad (7.3)$$

con $v = \frac{4\pi}{3} R^3$, el volumen de una esfera. Luego, como todos los centros son independientes,

$$\langle f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) \rangle = \left(\frac{v}{V} \right)^k \quad (7.4)$$

Entonces,

$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon(\mathbf{x}) \rangle = \epsilon_0 - \Delta\epsilon \sum_{k=1}^N (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\frac{v}{V} \right)^k \quad (7.5)$$

La suma $i_1 < \dots < i_k$ cuenta las formas posibles de elegir k índices entre N posibles, que es el combinatorio $\binom{N}{k}$. De esta forma

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} = \langle \epsilon(\mathbf{x}) \rangle &= \epsilon_0 - \Delta\epsilon \left\{ -1 + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\frac{-v}{V} \right)^k \right\} \\ &= \epsilon_0 - \Delta\epsilon \left[-1 + \left(1 - \frac{v}{V} \right)^N \right] \end{aligned} \quad (7.6)$$

La correlación de las fluctuaciones se escribe

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \delta\epsilon(\mathbf{x}) \delta\epsilon(\mathbf{x}') \rangle = \langle \epsilon(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}') \rangle - \bar{\epsilon}^2 \quad (7.7)$$

Para calcular $\langle \epsilon(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}') \rangle$, se multiplica la expresión (7.2) por sí misma, y se toma el valor medio

$$\begin{aligned} \langle \epsilon(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}') \rangle &= \epsilon_0^2 - \epsilon_0 \Delta\epsilon \sum_{k=1}^N (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left\{ \langle f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) \rangle + \langle f_{i_1}(\mathbf{x}') \dots f_{i_k}(\mathbf{x}') \rangle \right\} \\ &\quad + (\Delta\epsilon)^2 \sum_{k,k'=1}^N (-1)^{k+k'} \sum_{\{i_k\}, \{j_{k'}\}} \langle f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) f_{j_1}(\mathbf{x}') \dots f_{j_{k'}}(\mathbf{x}') \rangle \end{aligned} \quad (7.8)$$

El término proporcional a $\epsilon_0 \Delta\epsilon$ se calcula al igual que se hizo en el valor medio de $\epsilon(\mathbf{x})$. Para el término proporcional a $\Delta\epsilon^2$, hay que tener en cuenta que ahora sí puede haber índices repetidos, y aparecerán factores de la forma

$$\langle f_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}') \rangle \equiv \frac{v}{V} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (7.9)$$

Este valor medio no depende del índice que se repite, por lo que se tomó igual a 1. De esta forma, la cantidad

$$L_{k,k'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \langle f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) f_{j_1}(\mathbf{x}') \dots f_{j_{k'}}(\mathbf{x}') \rangle \quad (7.10)$$

Depende de cuántos índices están repetidos en los dos conjuntos (i_1, \dots, i_k) , $(j_1, \dots, j_{k'})$. Sea m

el número de índices que se repiten, entonces

$$L_{k,k'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\frac{v}{V}\right)^{k+k'-m} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^m \quad (7.11)$$

Para hacer las sumas sobre los índices i_k y $j_{k'}$ hay que contar qué cantidad de casos hay, dado k y k' , de que se repitan m índices tomados de un total de N índices posibles. Esto es el multinomio

$$\binom{N}{m, k-m, k'-m, N-(k+k'-m)} \equiv K_{(N,k',k,m)} \quad (7.12)$$

La suma sobre $i_1 < \dots < i_k$ y $j_1 < \dots < j_{k'}$ se convierte en una suma sobre m , los valores de m están restringidos tal que

$$\begin{cases} m \leq k & \wedge & m \leq k' \\ m \geq 0 & \wedge & m \geq k+k'-N \end{cases} \quad (7.13)$$

Es decir, m está acotado entre

$$m \in \left[\max(0, k+k'-N), \min(k, k') \right] \quad (7.14)$$

Con todo esto, el término de la correlación proporcional a $(\Delta\epsilon)^2$ es

$$\sum_{k=1, k'=1}^N (-1)^{k+k'} \sum_{i_k} \sum_{j_{k'}} L_{k,k'} = \sum_{k=1, k'=1}^N (-1)^{k+k'} \sum'_m K \left(\frac{v}{V}\right)^{k+k'-m} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^m \quad (7.15)$$

Para hacer esta suma, primero se suma y resta los términos con $k=0$, $k'=0$

$$1 - 2 \sum_{k=0} \binom{N}{k} \left(\frac{-v}{V}\right)^k + \sum_{k=0, k'=0}^N (-1)^{k+k'} \sum'_m K \left(\frac{v}{V}\right)^{k+k'-m} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^m \quad (7.16)$$

Luego, usando la suma binomial, el segundo término se escribe

$$1 - 2 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^N + \sum_{k=0, k'=0}^N (-1)^{k+k'} \sum'_m K \left(\frac{v}{V}\right)^{k+k'-m} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^m \quad (7.17)$$

Para la suma que resta, hay que notar que $K_{N,k,k',m}$ es un cuatrinomio, o un multinomio de 4 cantidades. Las 3 sumas que hay, con la suma de m restringida en el rango que está, es equivalente a una suma con 4 variables a, b, c, d , sujeta a la condición $a+b+c+d = N$, definiendo las variables

$$\begin{cases} a = k - m \\ b = k' - m \\ c = m \\ d = N - k + k' + m \end{cases} \quad (7.18)$$

Se tiene que

$$\sum_{a+b+c+d=N} \frac{N!}{a!b!c!d!} \left(\frac{-v}{V}\right)^a \left(\frac{-v}{V}\right)^b \left(\frac{v}{V}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\right)^c = \left(1 + \frac{v}{V}(\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - 2)\right)^N \quad (7.19)$$

Con todo esto, la correlación de las fluctuaciones se escribe

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \epsilon_0^2 - 2\epsilon_0\Delta\epsilon \left[-1 + \left(1 - \frac{v}{V}\right)^N\right] \\ &\quad + (\Delta\epsilon)^2 \left\{1 - 2\left(1 - \frac{v}{V}\right)^N + \left(1 + \frac{v}{V}(\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - 2)\right)^N\right\} - \bar{\epsilon}^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Reemplazando $\bar{\epsilon}$,

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -(\Delta\epsilon)^2 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{2N} + (\Delta\epsilon)^2 \left(1 + \frac{v}{V}(\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - 2)\right)^N \quad (7.21)$$

Como se está buscando un medio que tenga simetría traslacional, se tomará el límite en el que el volumen y el número de burbujas son infinitos, con la densidad de estas, constante

$$V \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{V} \equiv \rho \quad (7.22)$$

En este límite, se simplifican las expresiones del valor medio y la correlación

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 - \Delta\epsilon (e^{-\rho v} - 1) \quad (7.23)$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\Delta\epsilon)^2 e^{-2\rho v} (e^{\rho v \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} - 1) \quad (7.24)$$

Finalmente, se asumirá que la densidad es lo suficientemente pequeña $\rho \ll 1$, y se expandirán estas expresiones a primer orden en ρ

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} = \epsilon_0 + \Delta\epsilon \rho v \\ C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\Delta\epsilon)^2 \rho v \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \end{cases} \quad (7.25)$$

Falta expresar la función $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Recurriendo a la definición, esta es

$$\frac{v}{V}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}') \rangle = \int d^3y P(\mathbf{y}) \theta\left(1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{R^2}\right) \theta\left(1 - \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{y})^2}{R^2}\right) \quad (7.26)$$

Y como $P(\mathbf{y}) = V^{-1}$, vemos que $v\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ es el volumen de intersección de dos esferas de radio R centradas en \mathbf{x} y \mathbf{x}' . Además, se puede ver que depende sólo del módulo de la diferencia $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$,

a través de un cambio de variables se expresa la integral como

$$v\Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3u \, \theta\left(1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{u})^2}{R^2}\right) \theta\left(1 - \frac{u^2}{R^2}\right) \quad (7.27)$$

En esta expresión se puede ver la invariancia rotacional. Si se rota el vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, se puede también rotar la variable de integración, ya que el Jacobiano de una rotación es 1. Entonces, si se hace

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' \rightarrow \hat{T} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \mathbf{u} \rightarrow \hat{T} \cdot \mathbf{u} \quad (7.28)$$

siendo \hat{T} una rotación, se tendrá que además,

$$\begin{cases} [\hat{T} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{u})]^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{u})^2 \\ (\hat{T} \cdot \mathbf{u})^2 = u^2 \end{cases} \quad (7.29)$$

esto es, preserva la norma de los vectores. De esta forma se prueba que $\Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ es función del módulo de este vector. Por esta razón, su transformada de Fourier es una función también isótropa del impulso. Del cálculo explícito de esta función $\Omega(x)$ se obtiene

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} \left(2 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right) \left(\frac{x}{R} + 4\right) & \frac{x}{R} \leq 2 \\ 0 & \frac{x}{R} > 2 \end{cases} \quad (7.30)$$

Con esto, la función de correlación (7.25) tiene la forma de la figura (7.1)

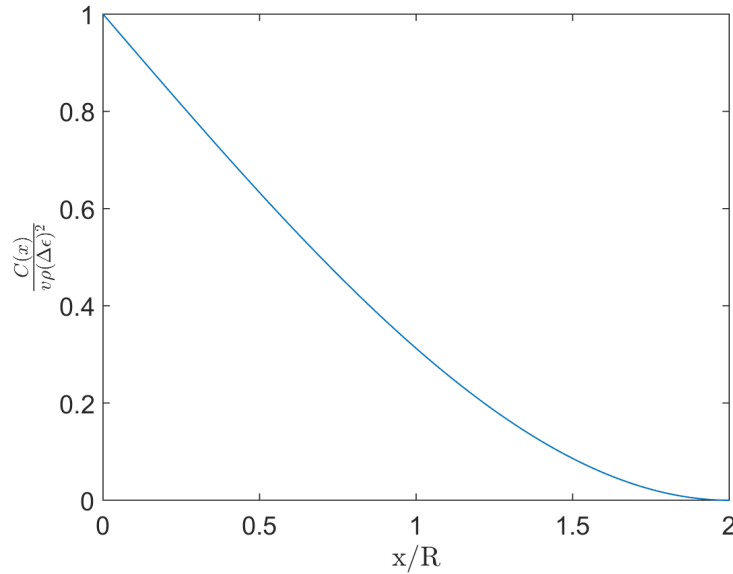


Figura 7.1: Función de correlación en el espacio de coordenadas. (Tanto la correlación como la distancia entre puntos están adimensionalizadas).

De la función y el gráfico se observa lo esperado: si la distancia entre las esferas es mayor o igual a 2 radios, la correlación es cero. Se observa claramente que el alcance de la correlación es del orden de R .

Como el cutoff se hará en el espacio de momentos, es necesario calcular la transformada de Fourier de esta función de correlación, que se puede calcular exactamente:

$$v\tilde{\Omega}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} v\Omega(\mathbf{x}) \quad (7.31)$$

$$= \int d^3u \theta\left(1 - \frac{u^2}{R^2}\right) \left\{ \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \theta\left(1 - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{u})^2}{R^2}\right) \right\} \quad (7.32)$$

$$= \left\{ \int d^3u e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}} \theta\left(1 - \frac{u^2}{R^2}\right) \right\} \left\{ \int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \theta\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \right\} \quad (7.33)$$

$$= \left[\int d^3u e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}} \theta\left(1 - \frac{u^2}{R^2}\right) \right]^2 \quad (7.34)$$

esta última integral se hace pasando a coordenadas esféricas. Se obtiene

$$v\tilde{\Omega}(k) = 16\pi^2 \left[\frac{\sin(kR)}{k^3} - \frac{R}{k^2} \cos(kR) \right]^2 \quad (7.35)$$

De esta forma, la función de correlación en espacio de momentos tiene la forma

$$\tilde{C}(kR) = 12\pi R^3 C(0) \left[\frac{\sin(kR) - kR \cos(kR)}{(kR)^3} \right]^2 \quad (7.36)$$

Y un gráfico de la misma se puede ver a continuación en la figura (7.2)

Se observa que esta función tiende rápidamente a cero, para $kR \geq 5$ es prácticamente cero. El medio que se consideró, formado por burbujas aleatoriamente distribuidas, no es un medio Gaussiano, sino que tiene cumulantes superiores. Lo que se hará, sin embargo, será considerar un medio Gaussiano, con una función de correlación igual a la de (7.25).

Siguiendo lo desarrollado en el capítulo anterior, se utiliza un cutoff escalonado en el espacio de momentos, de modo que la variable t resulta

$$t = \frac{C_\Lambda(0)}{C(0)} = \frac{1}{C(0)} \int_\Lambda^\infty dk \frac{k^2}{2\pi^2} (\Delta\epsilon)^2 \rho v\tilde{\Omega}(k) \quad (7.37)$$

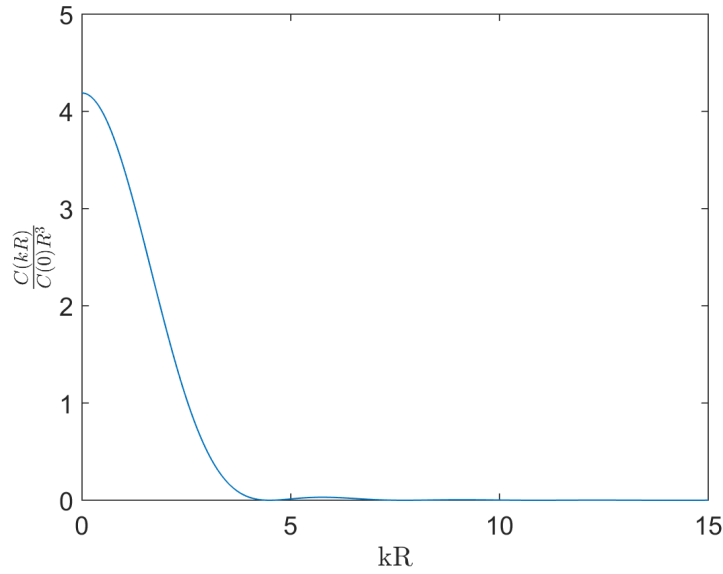


Figura 7.2: Función de correlación en el espacio de momentos (Tanto la correlación como la distancia entre puntos están adimensionalizadas).

Reemplazando la expresión de $\tilde{\Omega}$ (7.35), y que $C(0) = (\Delta\epsilon)^2 \rho v$, se tiene

$$t = \frac{8}{v} \int_{\Lambda}^{\infty} dk \frac{1}{k^4} [\sin(kR) - kR \cos(kR)]^2 \quad (7.38)$$

$$= \frac{8R^3}{\frac{4\pi R^3}{3}} \int_{\Lambda R}^{\infty} dx \frac{1}{x^4} [\sin(x) - x \cos(x)]^2 \quad (7.39)$$

$$= \frac{6}{\pi} \int_{\Lambda R}^{\infty} dx \frac{1}{x^4} [\sin(x) - x \cos(x)]^2 \quad (7.40)$$

Esta última integral se puede hacer en términos de la función seno integral. Recordando la definición $X \equiv \Lambda R$, y definiendo la función seno integral como

$$\text{sinI}(\alpha) \equiv \int_0^{\alpha} dt \frac{\sin(t)}{t} \quad (7.41)$$

$$t(X) = \frac{1}{\pi X^3} \left\{ 1 + 3X^2 - 2 \sin(2X) - \cos(2X) (1 + X^2) - 2X^3 \left(\text{sinI}(2X) - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (7.42)$$

Un gráfico de esta función se puede observar a continuación en la figura (7.3).

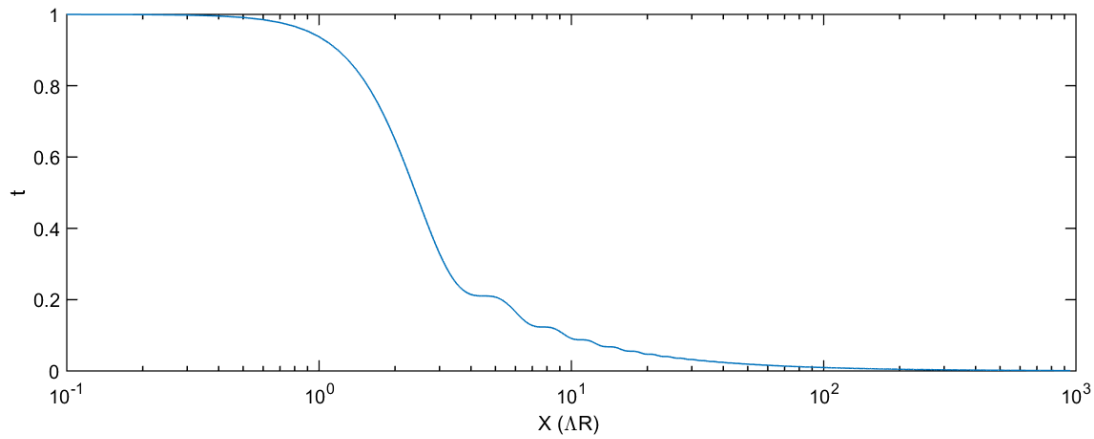


Figura 7.3: Forma de la función $t(X)$, el eje horizontal está en escala logarítmica.)

Se observa que el valor de esta función decae rápidamente hasta $X \sim 10$. Su comportamiento asintótico, para $X \rightarrow \infty$, está dominado por X^{-1} , ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin I(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. De esta forma, el término dominante es

$$t \sim \frac{3 - \cos(2X)}{\pi X} \sim \frac{3 \pm 1}{\pi X} \quad (7.43)$$

Esta función $t(X)$ se debe invertir para obtener la función $X(t)$, pero esta inversión no se puede hacer de forma analítica. Se optará por una resolución numérica de la ecuación (6.15), y se la comparará con la solución aproximada vista en el capítulo anterior, y con una solución iterativa a dos loops de la autoenergía.

7.2. Solución numérica de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial para la función $F = \omega^2 R^2 f$, es de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial e^2} = \mathcal{A} \left(\frac{\partial F}{\partial e}, F, t, e \right) \quad (7.44)$$

con el dominio $t \in [0, 1] \times e \in [0, \infty]$, y condiciones iniciales en $t = 0$,

$$F(t = 0, e) = Q e \quad (7.45)$$

En realidad, si bien por su significado físico la variable e debe ser positiva, la ecuación diferencial está definida para cualquier valor de e . Es por esto que se tomó un dominio $e \in [-\infty, \infty]$.

Estamos interesados en la solución a $t = 1$, en particular en soluciones cuya parte real no se modifique demasiado respecto de la inicial, y que desarrolle una parte imaginaria distinta de cero. La ecuación (7.44) está dentro de una familia de ecuaciones que se pueden resolver numéricamente en

Matlab, utilizando la función `pdepe`. Esta función resuelve a través de una discretización espacial, convirtiendo la ecuación en derivadas parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias para cada punto espacial. La clasificación de las variables t y e en “temporal” y “espacial” se debe a que se están dando condiciones iniciales en $t = 0$, y se busca la evolución hasta $t = 1$. La diferencia con el problema en cuestión es que la resolución numérica, al tener que discretizar, necesita un intervalo espacial finito. Es decir, $e \in [e_0, e_1]$. A su vez, el programa requiere condiciones de contorno en los extremos de este intervalo, para todo t . Se utilizaron las siguientes condiciones de contorno

$$\frac{\partial F}{\partial e}(t, e_0) = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial e}(t, e_1) = Q \quad (7.46)$$

Estas garantizan que la parte real no se deforme demasiado respecto de la condición inicial, y la parte imaginaria tenga condiciones de contorno tipo Neumann. Esta condición de contorno la podremos justificar más adelante al comparar con la solución aproximada de la ecuación.

Otra consideración que se tomó fue en el término no lineal en la ecuación (7.44). Como el mismo tiene una singularidad, y esto trae problemas numéricos al comienzo de la resolución, donde la parte imaginaria todavía no tomó un valor no nulo, entonces cuando $F(t^*, e) = X^2(t^*)$, este término diverge. Para eso, se le agregó una parte imaginaria finita al denominador.

$$\mathcal{A}\left(\frac{\partial F}{\partial e}, F, t, e\right) = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial e}\right)^2}{X^2(t) - F(t, e) - i\delta}, \quad \delta \ll 1 \quad (7.47)$$

Se consideraron distintos valores de δ , cada vez más pequeños, para ver que la solución en $t = 1$ fuera independiente del valor del mismo.

Como $X(t)$ sale de la inversa de (7.42), que no depende de ningún parámetro, la única dependencia con parámetros está metida en la condición inicial y en las condiciones de contorno, a través del valor de Q . Por esta razón se hicieron corridas con distintos Q , para después comparar con los métodos aproximado y perturbativo. Para obtener la función $X(t)$, lo que se hizo fue tomar un conjunto de puntos en el intervalo $[0, X_0]$, en ese intervalo armar una tabla de valores $\{t_i, X_i\}$ a partir de los cuales se interpoló $X(t)$, si t estaba contenido el intervalo $[t(X_0), 1]$. Para la cola de la función, se aproximó su dependencia por el término dominante, es decir $X(t) \sim \alpha t^{-1}$, y se eligió α tal que la función $X(t)$ así definida fuera continua, es decir, $X_0 = X(t_0) = \alpha t_0^{-1}$. De esta forma se obtuvo una función $X(t)$ computacionalmente eficiente, tomando alrededor de 1 ms en evaluar un punto. Mientras que si se busca la inversa a través de la búsqueda de ceros, es decir

$$X(t_0) = \{X / t(X) - t_0 = 0\} \quad (7.48)$$

Una aplicación de este estilo, usando la función `fzero` (que usa una combinación de bisección, secante, e interpolación inversa cuadrática) toma alrededor de $\sim 0,2s$ en evaluar un punto. La diferencia entre los dos métodos, en un valor de X , es alrededor de 2×10^{-4} en puntos interpolados, y del orden de 0,1 en puntos en la cola de $t(X)$. Como al resolver la ecuación diferencial el algoritmo necesita evaluar en una cantidad muy grande de tiempos t_i , se optó por la velocidad, por eso se eligió el método de interpolación para la inversa, que es más rápido en dos órdenes de magnitud.

Dependencia con el parámetro δ

Se hicieron distintas corridas para valores de δ desde 0,1 hasta 0,0005, para ver si las soluciones se vuelven independientes de este parámetro al hacerse más pequeño. Se encontró que efectivamente es el caso, y que desde $\delta \sim 0,01$ ya las soluciones están cada vez más próximas. Esto se observa en la figura (7.4) a continuación, que se hizo una corrida para $Q = 1$ para distintos valores de δ .

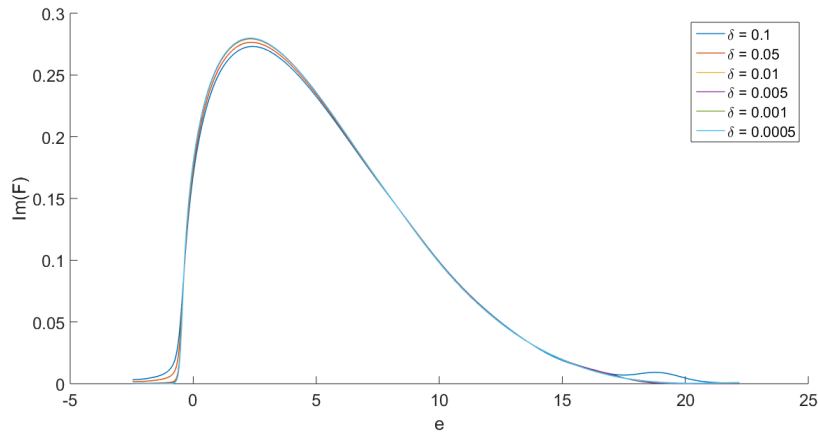


Figura 7.4: Parte imaginaria de F , a $t = 1$, para distintos valores del parámetro δ .

Asimismo, se encontró que cuanto más pequeño el valor de δ , el programa tarda más tiempo en resolver la ecuación. Lo que se observó además, es que la solución es altamente independiente del límite izquierdo del intervalo, e_0 . Esto se debe a que la ecuación es difusiva, y para valores de $e < 0$, la solución decae rápidamente a 0.

7.3. Solución aproximada de la ecuación diferencial

En el capítulo anterior se vio una forma de aproximar la parte no lineal de la ecuación diferencial, y se obtuvo una solución aproximada de la misma. Esta solución quedó expresada en términos de la función de correlación, es decir del tipo de medio desordenado que se está considerando. Partiendo de las dos ecuaciones que parametrizan esta solución, (6.38) y (6.39), ahora se especifica el medio, reemplazando (7.35). Entonces

$$\frac{\tilde{C}(X)}{R^3 C(0)} = \frac{12\pi (\sin X - X \cos X)^2}{X^6} \quad (7.49)$$

De esta forma, se tiene que la solución paramétrica está dada por

$$e = Q^{-1}X^2 - \frac{6Q}{\pi}J(X) \quad (7.50)$$

$$\sigma(e) = \frac{3Q^2X^2(\sin X - X \cos X)^2}{X^7 + \frac{3Q^2}{\pi}(\sin X - X \cos X)^2} \quad (7.51)$$

donde se usó la definición

$$J(X) = \int_X^\infty dY \frac{(\sin Y - Y \cos Y)^2}{Y^6} \quad (7.52)$$

Esto se puede integrar, para obtenerse

$$J(X) = X^{-5} \left\{ \frac{1}{10}(1 - \cos(2X)) - \frac{1}{5}X \sin(2X) + \frac{1}{30}X^2(\cos(2X) + 5) - \frac{1}{30}X^3 \sin(2X) - \frac{1}{15}X^4 \cos(2X) - \frac{2}{15}X^5 \left(\sin(2X) - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (7.53)$$

Un gráfico de esta función se observa a continuación en la figura (7.5).

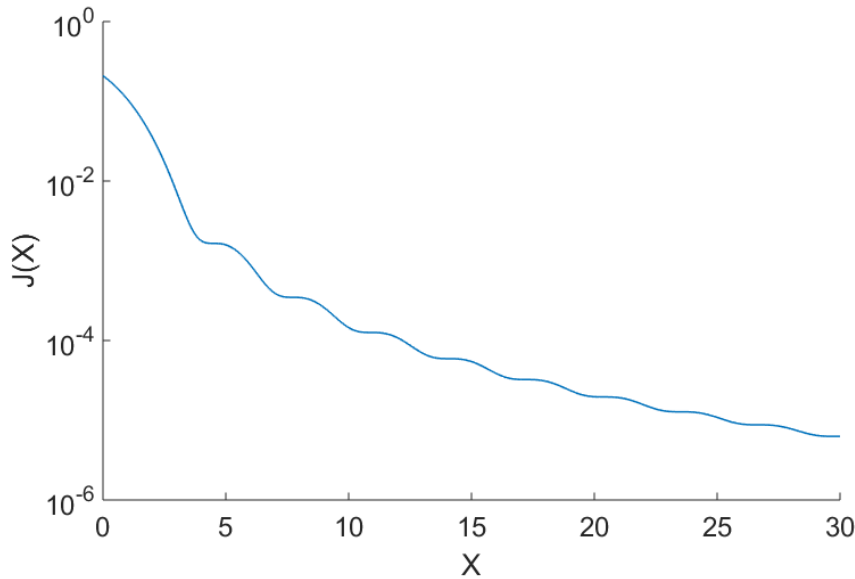


Figura 7.5: Gráfico de la función $J(X)$, en escala logarítmica para observar las fluctuaciones, que son suprimidas muy rápidamente por el factor X^{-5} .

En cuanto a la condición de contorno tipo Neumann, si se deriva la ecuación (7.51) respecto de e y se busca que se anule, se tiene que

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{d\sigma}{dX} \left(\frac{de}{dX} \right)^{-1} = 0 \quad (7.54)$$

Buscando primero donde se anula el primer factor, se tiene que

$$0 = X_0 (\sin(X_0) - X_0 \cos(X_0)) \quad (7.55)$$

Las soluciones de esto son

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_0 / \tan X_0 = X_0 \end{cases} \quad (7.56)$$

Y, para $X \geq 0$ la función $e(X)$ es monótona creciente, ya que

$$e'(X) = \frac{2X}{Q} + \frac{6Q}{\pi} \frac{(\sin X - X \cos X)^2}{X^6} \quad (7.57)$$

Entonces, cada uno de estos puntos X_0 tiene su correspondiente $e(X_0)$. Es decir, existen infinitos puntos donde se anula la derivada de $\sigma(e)$. El punto $X_0 = 0$ corresponde a $e(0) < 0$, ya que $J(0) = \pi/15$, entonces $e(0) = -\frac{2Q}{3}$. Las demás raíces de (7.56) se utilizaron al elegir el extremo derecho del intervalo $[e_0, e_1]$ para la solución numérica. Se eligieron las raíces de la forma $X_0^t / \tan X_0^t = X_0^t$, que además de la derivada, anulan la función $\sigma(X_0^t)$.

7.4. Expansión perturbativa de Σ

En esta sección consideraremos la expansión perturbativa usual de la autoenergía, para obtener así un punto de comparación con el método no perturbativo. Recordando lo desarrollado en el capítulo 2, se trabajará en la aproximación de la autoenergía a impulso cero, donde se define un ϵ_{eff} ,

$$\epsilon_{\text{eff}} = \bar{\epsilon} + \frac{\tilde{\Sigma}(0)}{\omega^2} \quad (7.58)$$

de esta manera, la función de Green promedio se escribe, en espacio de momentos, como

$$\tilde{G}(p) = (p^2 - \omega^2 \epsilon_{\text{eff}})^{-1} = (p^2 - k^2)^{-1} \quad (7.59)$$

Ahora, si uno expande la autoenergía a 1 loop, a través de la aproximación no lineal

$$\Sigma_{NL}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega^4 C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7.60)$$

Que en momento cero es

$$\tilde{\Sigma}_{NL}^{(1)}(0) = \omega^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{C}(q)}{q^2 - k^2} \quad (7.61)$$

Como $k^2 = \omega^2 \bar{\epsilon} + \tilde{\Sigma}(0)$, esto es una ecuación para la autoenergía. Consideraremos sólo las primeras dos contribuciones a la autoenergía en loops. La que sigue a la aproximación no lineal, es a dos

loops,

$$\Sigma_{NL}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega^8 C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C(\mathbf{y}', \mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}') G(\mathbf{y}', \mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \quad (7.62)$$

Que está representada por el siguiente diagrama



En impulso cero, es

$$\tilde{\Sigma}_{NL}^{(2)}(0) = \omega^8 \int \frac{d^3 q d^3 p}{(2\pi)^6} \tilde{C}(p) \tilde{C}(q) \tilde{G}(p) \tilde{G}(q) \tilde{G}(p+q) \quad (7.63)$$

Esta es nuevamente una ecuación para la autoenergía, ya que el lado derecho es función de ϵ_{eff} . Consideraremos que la autoenergía está compuesta sólo por estas dos contribuciones, entonces

$$\tilde{\Sigma}(0) = \tilde{\Sigma}_{NL}^{(1)}(0) + \tilde{\Sigma}_{NL}^{(2)}(0) \quad (7.64)$$

Y notamos las dos contribuciones al ϵ efectivo como

$$\epsilon_{\text{eff}} = \bar{\epsilon} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (7.65)$$

Reemplazando la función de correlación, se tiene entonces

$$\epsilon_1 = \omega^2 \Delta \epsilon^2 \rho \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{v \tilde{\Omega}(q)}{q^2 - \epsilon_{\text{eff}} \omega^2} \quad (7.66)$$

Del calculo explícito se obtiene [Franco and Calzetta, 2015]

$$\epsilon_1 = \frac{3}{2} \omega^2 R^2 \Delta \epsilon^2 \rho v \mathcal{G}(\omega R \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}) \quad (7.67)$$

Que, recordando la definición de $Q = \omega^2 R^2 \sqrt{C(0)}$, y $C(0) = \rho v \Delta \epsilon^2$, y que $F = \omega^2 R^2 f$, se tiene que

$$F_1 = \omega^2 R^2 \epsilon_1 = \frac{3}{2} Q^2 \mathcal{G}(\sqrt{Q} e + F_1 + F_2) \quad (7.68)$$

Con la función $\mathcal{G}(x)$ dada por

$$\mathcal{G}(x) = \frac{i}{x^5} \left[1 - e^{2ix} + x^2 (1 + e^{2ix}) + 2ix \left(\frac{x^2}{3} + e^{2ix} \right) \right] \quad (7.69)$$

Gráficos de esta función se pueden ver a continuación en las figuras (7.6,7.7)

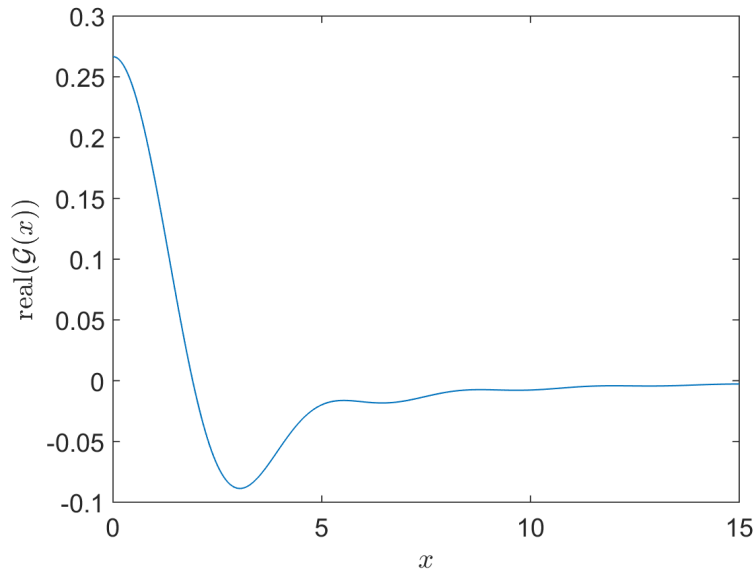


Figura 7.6: Gráfico de la parte real de $\mathcal{G}(x)$

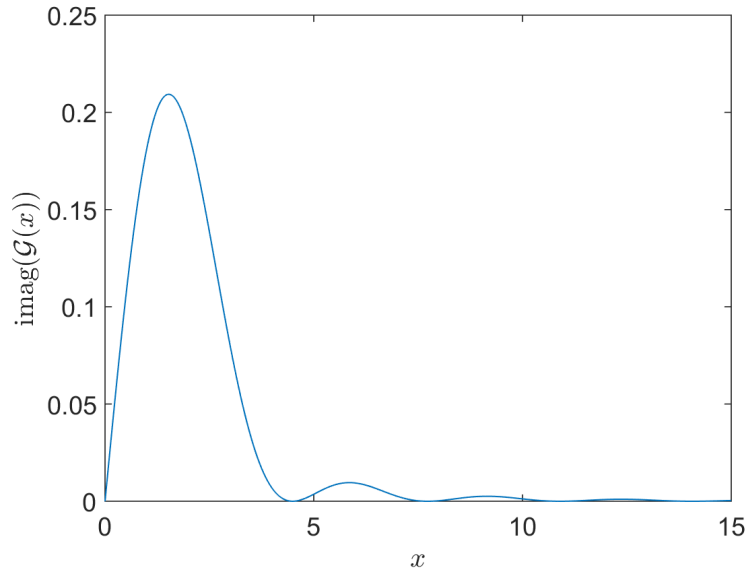


Figura 7.7: Gráfico de la parte imaginaria de $\mathcal{G}(x)$

La contribución a dos loops es

$$\epsilon_2 = \omega^6 \Delta \epsilon^2 \rho^2 \int \frac{d^3 q d^3 p}{(2\pi)^6} \frac{v\tilde{\Omega}(q)v\tilde{\Omega}(p)}{(p^2 - \epsilon_{\text{eff}}\omega^2)(q^2 - \epsilon_{\text{eff}}\omega^2) + ((\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 - \epsilon_{\text{eff}}\omega^2)} \quad (7.70)$$

Y el término dominante es

$$F_2 = \frac{Q^4}{9} \ln \left(\sqrt{Qe + F_1 + F_2} \right) \quad (7.71)$$

De modo que se tiene una ecuación del tipo

$$\mathcal{H}(F_1 + F_2, e) = 0 \quad (7.72)$$

La misma se resolvió numéricamente, buscando las raíces para cada valor de la variable e . Luego, tomando la parte imaginaria, se construyó

$$\sigma_{12}(e) = \text{Im} (F_1 + F_2) (e) \quad (7.73)$$

Que es la contribución hasta dos loops de la parte imaginaria de la autoenergía, rescaelada por $\omega^2 R^2$ (recordando $F(e) = \omega^2 R^2 f(E(e))$). Esto se hizo para distintos valores del parámetro Q , para luego comparar con lo obtenido de la ecuación diferencial del FRG.

7.5. Resultados

Para distintos valores de Q , se buscó la parte imaginaria de la solución de acuerdo al método numérico, al método paramétrico, y se comparó con la solución a dos loops perturbativa. Estos se pueden observar a continuación en las figuras (7.8-7.13).

Lo que se encontró para $Q \sim 1$ es que las soluciones difieren apreciablemente en el primer pico, que corresponde aproximadamente a $X \sim \pi/2$, entonces

$$e \sim \frac{1}{Q} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{6Q}{\pi} J \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (7.74)$$

Para valores de e mayores a este primer pico, las soluciones comienzan a pegarse. A su vez se encontró que las soluciones numéricas se vuelven más ruidosas cuanto más pequeño es el parámetro Q . Asimismo, a valores de Q cada vez más pequeños, las soluciones mediante los 3 métodos están cada vez más próximas entre sí.

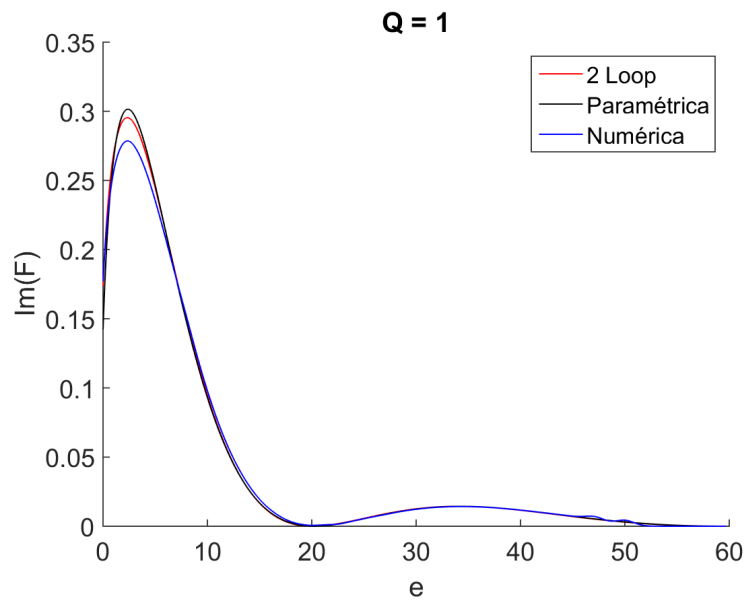


Figura 7.8: Comparación entre métodos, $Q=1$

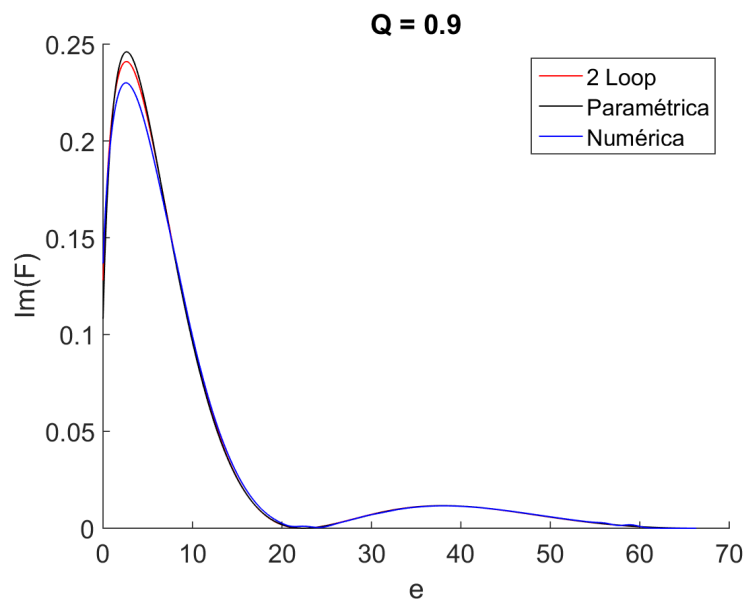


Figura 7.9: Comparación entre métodos, $Q=0.9$

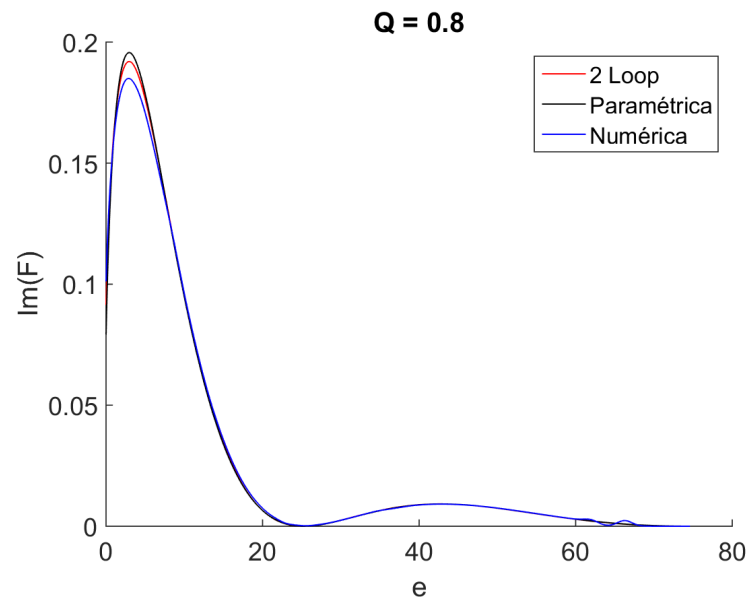


Figura 7.10: Comparación entre métodos, $Q=0.8$

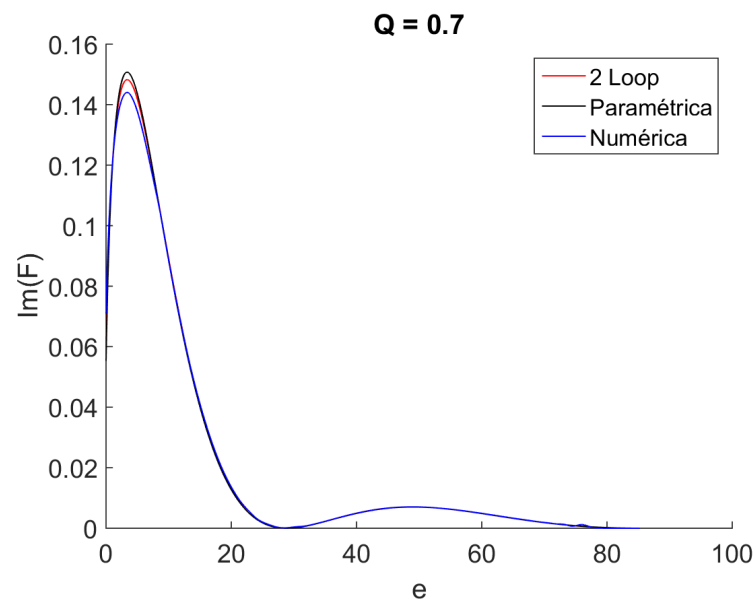


Figura 7.11: Comparación entre métodos, $Q=0.7$

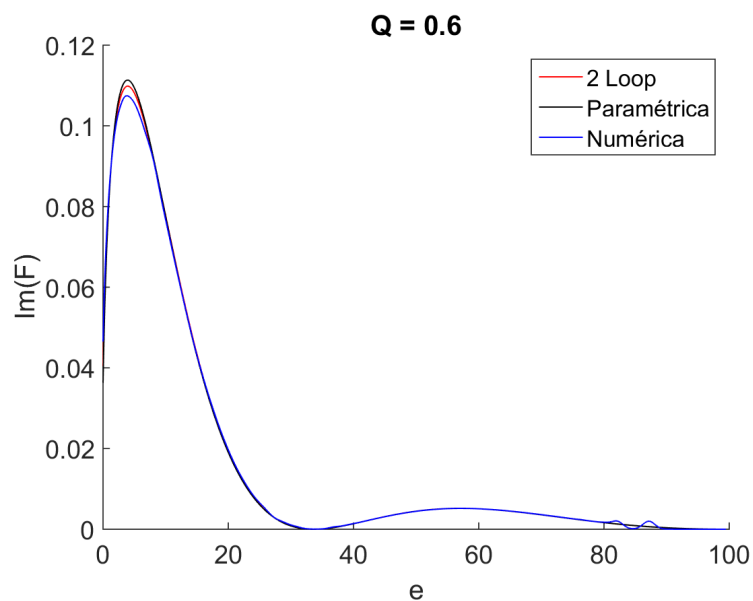


Figura 7.12: Comparación entre métodos, $Q=0.6$

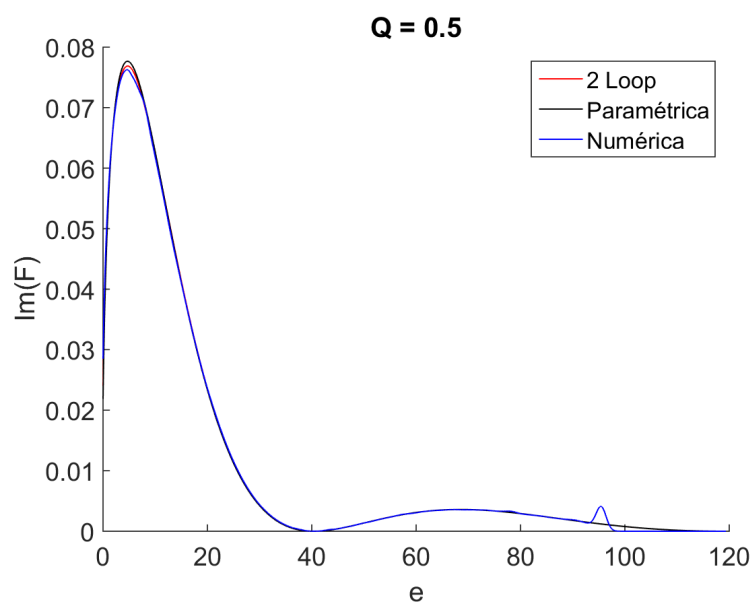


Figura 7.13: Comparación entre métodos, $Q=0.5$

Ordenada al origen

Se puede observar el valor de la ordenada al origen de la función, para cada método, y para distintos valores de Q en la figura (7.14) a continuación

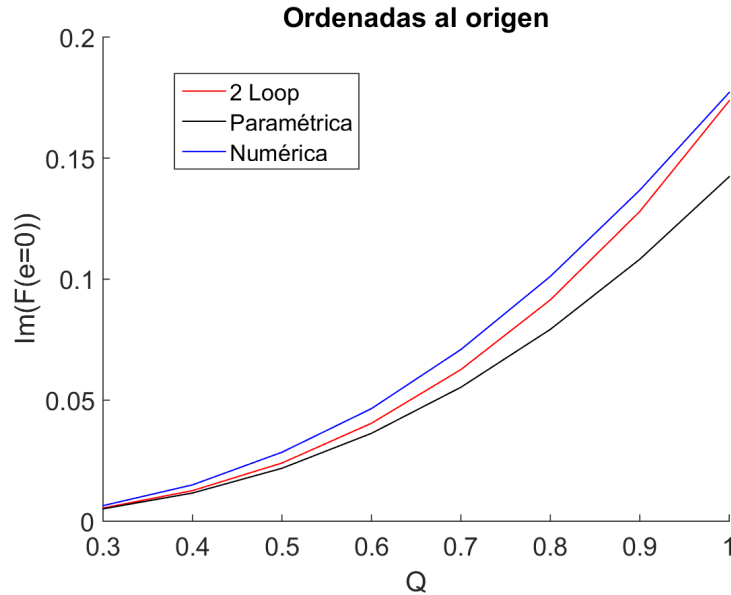


Figura 7.14: Comparación entre ordenadas al origen, para $Q=1$

Se puede ver que, de forma opuesta al primer máximo, en este caso la solución numérica tiene el valor mayor, y la paramétrica el menor valor. Las diferencias entre soluciones se hacen relativamente menores a medida que el parámetro Q se hace más pequeño.

Como $E = \epsilon_0 + \Delta\epsilon \rho v > 0$, el límite $e = 0$ corresponde a $C(0) \rightarrow \infty$. En ruido blanco, la correlación es de la forma $C(\mathbf{x}) = \eta \delta(\mathbf{x})$ y se da este límite. Vemos que se puede llevar la correlación (7.25) a ruido blanco a través de los siguientes límites

$$\begin{cases} \Delta\epsilon \rightarrow \infty \\ v \rightarrow 0 \\ v^2 (\Delta\epsilon)^2 \rightarrow \frac{\eta}{\rho} \end{cases} \quad (7.75)$$

Este es el límite en que las burbujas tienen un radio que tiende a cero, y el contraste entre el fondo homogéneo y las burbujas tiende a infinito, manteniendo el producto constante. Es fácil ver que estas prescripciones verifican el límite de ruido blanco, observando la transformada de Fourier de la correlación

$$\tilde{C}(k) = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)^2 (\Delta\epsilon)^2 9 \left[\frac{\sin(kR) - kR \cos(kR)}{(kR)^3} \right]^2 \quad (7.76)$$

La función entre corchetes tiene el límite $\frac{1}{3}$ cuando $kR \rightarrow 0$, por lo que con los límites conjuntos

$v \rightarrow 0$, $\Delta\epsilon \rightarrow \infty$, manteniendo el producto de ambos constante, se obtiene la correlación de ruido blanco:

$$\tilde{C}_B(k) = \eta, \quad C_B(\mathbf{x}) = \eta \delta(\mathbf{x}) \quad (7.77)$$

Y de esta forma se tiene que $C(0) = \infty$. El valor medio del campo toma la forma

$$E = \epsilon_0 + \sqrt{\rho\eta} \quad (7.78)$$

Es también interesante notar que, como la correlación en cero se comporta como $C(0) \sim \eta v^{-1}$, el parámetro $Q = \omega^2 R^2 \sqrt{C(0)}$ tendrá la siguiente dependencia

$$Q \sim \omega^2 R^2 \sqrt{\frac{\eta}{v}} \sim \sqrt{R} \rightarrow 0 \quad (7.79)$$

Ahora, recordando que $F(e) = \omega^2 R^2 f(E)$, con f la velocidad de propagación del medio efectivo, nos encontramos con un aparente problema ya que si el límite $e \rightarrow 0$ tiene un valor finito de $\text{Im}(F)$, y si este límite se consigue haciendo que $R \rightarrow 0$, se tiene que

$$\left. \text{Im}(f)(E) \right|_{\text{ruido blanco}} = \frac{1}{\omega^2 R^2} \text{Im}(F)(0) \rightarrow \infty \quad (R \rightarrow 0) \quad (7.80)$$

Pero como el problema de la onda escalar en un medio desordenado se puede resolver en el caso de ruido blanco [Eckert, 2010], entonces esta aparente divergencia se tiene que poder solucionar tomando el límite correctamente.

Por ejemplo, en el caso perturbativo a 1 loop, tenemos la ecuación (7.67),

$$\epsilon_1 = \frac{3}{2} \omega^2 R^2 \Delta\epsilon^2 \rho v \mathcal{G}(\omega R \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}) = \eta \omega^2 \frac{9}{8\pi R} \mathcal{G}(\omega R \sqrt{E + \epsilon_1}) \quad (7.81)$$

Tomando la parte imaginaria de la función $\mathcal{G}(x)$ para $x \rightarrow 0$, se tiene que

$$\text{Im}(\mathcal{G})(x) \sim \frac{2}{9}x + \mathcal{O}(x^2) \quad (7.82)$$

entonces, se tiene

$$\text{Im}(\epsilon_1) = \frac{\eta \omega^3}{4\pi} \sqrt{E + \epsilon_1} \quad (7.83)$$

Sin embargo resulta problemática la parte real de ϵ_1 , ya que $\text{Re}(\mathcal{G})(0)$ es finito, entonces $\text{Re}(\epsilon_1)$ resulta divergente. Esta divergencia es espuria, está vinculada con el límite de coincidencia de las función de Green por introducir ruido blanco. Estando interesados en la parte imaginaria del ϵ_{eff} , lo ignoraremos. Además, reemplazando $\epsilon_1 = 0$ del lado derecho de esta última ecuación (lo que corresponde a tomar en vez de la aproximación no lineal, la aproximación bilocal), tenemos que

$$\text{Im}(\epsilon_1) = \frac{\eta \omega^3}{4\pi} \sqrt{E} \quad (7.84)$$

Este resultado también se puede obtener de la solución a la ecuación diferencial. Recordando las ecuaciones en forma paramétrica, (7.50,7.51), y que $\text{Im}(f) = \omega^{-2}R^{-2}\sigma$,

$$\text{Im}(f) = \frac{\eta}{v\omega^2R^2} \frac{3\omega^4R^4X^2(\sin X - X\cos X)^2}{X^7 + \frac{3\omega^4R^4\eta}{v}(\sin X - X\cos X)^2} \quad (7.85)$$

y

$$X^2 = \omega^2R^2E + \frac{6}{\pi}J(X)\omega^4\eta\frac{R^4}{v} \quad (7.86)$$

Ahora, como estamos interesados en el límite $R \rightarrow 0$, para cualquier valor finito de Λ , $X = R\Lambda \ll 1$. Entonces se puede aproximar

$$\sin X - X\cos X \sim \frac{1}{3}X^3 \quad (7.87)$$

Además, aproximando

$$X^2 \sim \omega^2R^2E \quad (7.88)$$

Esto se puede hacer ya que el siguiente término contiene a la función $J(X)$ que tiene un valor finito en $X = 0$, y el término es de orden R^4 . Con esto, se obtiene

$$\text{Im}(f) = \frac{\eta\omega^4R^2}{3v} \frac{X}{1 + \frac{\eta\omega^4R^4}{3\pi vX}} = \frac{\eta\omega^3\sqrt{E}}{4\pi} \frac{1}{1 + \frac{\eta\omega^3}{4\pi^2\sqrt{E}}} \quad (7.89)$$

Resultado que coincide con el resultado a 1 loop, ecuación (7.84), a orden 1 en η .

Conclusiones

En la presente tesis se estudió la propagación de ondas en medios desordenados. En particular, se trabajó con una onda escalar en un medio cuyo índice de dispersión es una función de la posición, que se trata como una variable aleatoria. En el capítulo 2 se presentó el marco teórico de esta ecuación, la definición de cantidades como la función de Green promedio, la ecuación de Dyson, y la autoenergía. Una forma de resolver la ecuación de Dyson es mediante un desarrollo perturbativo de la misma. Sin embargo, este desarrollo perturbativo funciona para casos donde el desorden es “débil”, valores pequeños del número de Reynolds generalizado. El objetivo de esta tesis fue aplicar las herramientas del grupo de renormalización funcional (FRG) para el cálculo de la autoenergía, válido aún para cualquier valor del número de Reynolds. Para esto, en el capítulo 3 se presentó el formalismo funcional de Martin-Siggia-Rose, con el cual se puede derivar la ecuación de Helmholtz a partir de una integral funcional, definiendo una acción “clásica”. Esta acción clásica tiene asociada una acción efectiva, o acción 1PI, de la cual se deriva la autoenergía.

El FRG aporta una ecuación diferencial funcional exacta para calcular esta acción efectiva. En el capítulo 5 se introduce el FRG y se lo utiliza para escribir esta ecuación funcional, la cual es preciso aproximar de alguna manera para poder resolver en cualquier caso de interés. Se revisaron posibles esquemas de aproximación o truncado, y se optó por dar una parametrización a la acción efectiva. Esta parametrización es cuadrática en los campos de materia, con acoplamientos que dependen del campo aleatorio. Con esto, se pasó de la ecuación diferencial funcional a dos ecuaciones diferenciales, para los primeros dos términos del desarrollo de la autoenergía en potencias del impulso. Estas son ecuaciones acopladas y no lineales, por lo que una resolución exacta sigue sin ser posible. Para esto, en el capítulo 6 se consideró únicamente la autoenergía a impulso cero, ya que esto ya define la velocidad de fase efectiva del medio, y donde se pueden observar efectos de absorción en el mismo. Con esto se redujo a una única ecuación diferencial, aún no lineal. Aproximando el término no lineal, se obtuvo una ecuación tipo ecuación del calor con una fuente puntual, que puede ser resuelta.

Finalmente, en el capítulo 7 se especificó el medio desordenado en cuestión, eligiendo una correlación de dos puntos correspondiente a un medio compuesto de esferas de mayor índice de dispersión dispuestas al azar sobre un medio de fondo homogéneo. Se resolvió de forma numérica la ecuación no lineal completa para este medio, lo cual se comparó con la solución aproximada, y con un desarrollo perturbativo a dos loops de la autoenergía. Lo que se encontró es que para los distintos valores del número de Reynolds, las tres soluciones concuerdan. Cuanto menor es el valor del número de Reynolds generalizado, es mejor el acuerdo entre soluciones. De esta forma, se encontró que el método del FRG para el cálculo de la autoenergía, bajo las aproximaciones trabajadas en esta tesis, resulta equivalente a una expansión perturbativa a dos loops. Resta ver si trabajando con parametrizaciones menos restrictivas a la acción efectiva es posible resolver

las ecuaciones de flujo correspondientes y encontrar algún comportamiento no perturbativo en la autoenergía.

Por último, sería posible aplicar las herramientas del FRG a vértices mayores de la acción efectiva, por ejemplo al llamado operador de Intensidad, presente en la ecuación de Bethe-Salpeter para el promedio del producto de dos funciones de Green, que sirve para el cálculo de la intensidad promedio de la onda. Un problema que surge en la expansión perturbativa es que el operador de intensidad debe respetar la simetría de reciprocidad, y a su vez el operador de intensidad y la autoenergía tienen que cumplir una identidad de Ward para garantizar la conservación de la energía. Al realizar un truncado de las expansiones perturbativas, estas simetrías se pierden y deben ser fijadas a menudo de forma manual. Resta ver si una ventaja en la formulación FRG es la de preservar estas simetrías de forma automática.

En resumen, lo que se hizo en esta tesis fue explorar la utilización del grupo de renormalización funcional para calcular la función de Green promedio de una ecuación de ondas escalar en un medio desordenado. Se tomó este camino como alternativa a una expansión perturbativa para el cálculo de la autoenergía, y se encontró que bajo las aproximaciones con las que se trabajó en la ecuación de flujo, las soluciones a la ecuación diferencial para la autoenergía a impulso cero, tanto numéricas como aproximadas, coinciden con expandir a dos loops la autoenergía. De esta forma, el FRG se establece como alternativa a la serie perturbativa.

A

Desarrollo Perturbativo de las Ecuaciones Diferenciales

Al final del capítulo anterior se encontraron las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de las funciones $a(\Lambda, E)$ y $f(\Lambda, E)$. Lo que se buscará en este capítulo es comparar una expansión perturbativa de la autoenergía como se hizo en el capítulo 1, con una resolución perturbativa de estas ecuaciones diferenciales. Para esto, se pondrá un parámetro α explícitamente en las ecuaciones, que cuente la cantidad de funciones de correlación, a través del reemplazo

$$C_\Lambda \rightarrow \alpha C_\Lambda \quad (\text{A.1})$$

asimismo, se supondrá existen desarrollos en este parámetro para las funciones

$$\begin{cases} a(\Lambda, E) = a^{(0)}(\Lambda, E) + \alpha a^{(1)}(\Lambda, E) + \alpha^2 a^{(2)}(\Lambda, E) + \dots \\ f(\Lambda, E) = f^{(0)}(\Lambda, E) + \alpha f^{(1)}(\Lambda, E) + \alpha^2 f^{(2)}(\Lambda, E) + \dots \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Las ecuaciones diferenciales tienen la forma genérica

$$\partial_\Lambda f(\Lambda, E) = \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \partial_E^2 f(\Lambda, E) + X_f(a, f, a', f') \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_\Lambda a(\Lambda, E) = \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \partial_E^2 a(\Lambda, E) + X_a(a, f, a', f') \right) \quad (\text{A.4})$$

Con las funciones X_f y X_a dadas por

$$X_f = \frac{1}{\omega^2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q^2) \tilde{g}(q^2) \left\{ \frac{a'^2}{4} q^4 - \omega^2 f' a' q^2 + \omega^4 f'^2 \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} X_a = & - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{g}(q) \left\{ \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \left[\frac{a'^2}{2} q^2 - \omega^2 f' a' \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(p - q) \Big|_{p=0} \left[\frac{a'^2}{4} q^4 - \omega^2 f' a' q^2 + \omega^4 f'^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Un desarrollo perturbativo de las ecuaciones es entonces

$$\begin{cases} \partial_\Lambda f^{(0)}(\Lambda, E) = 0 \\ \partial_\Lambda f^{(n+1)}(\Lambda, E) = \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \partial_E^2 f^{(n)}(\Lambda, E) + X_f^{(n)}(a, f, a', f') \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{cases} \partial_\Lambda a^{(0)}(\Lambda, E) = 0 \\ \partial_\Lambda a^{(n+1)}(\Lambda, E) = \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \partial_E^2 a^{(n)}(\Lambda, E) + X_a^{(n)}(a, f, a', f') \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Donde las funciones X_a y X_f tienen su correspondiente desarrollo en potencias de α , a través de su dependencia con a y f . Por ejemplo, el propagador $\tilde{g}(q)$, se expande como

$$\tilde{g}(q^2) = \tilde{g}^{(0)}(q^2) + \alpha \tilde{g}^{(1)}(q^2) + \dots \quad (\text{A.9})$$

Que a su vez, como se conoce $\tilde{g}(q^2)$, es

$$\tilde{g}(q^2) = \frac{1}{aq^2 - \omega^2 f} = \frac{1}{a^{(0)}q^2 - \omega^2 f^{(0)}} + \alpha \frac{\omega^2 f^{(1)} - a^{(1)}q^2}{(a^{(0)}q^2 - \omega^2 f^{(0)})^2} + \dots \quad (\text{A.10})$$

De la forma de \tilde{g} se observa la relación entre la autoenergía y las funciones a y f :

$$\tilde{\Sigma}(p) = (1 - p^2) a(\Lambda, E) + \omega^2 (f(\Lambda, E) - E) \quad (\text{A.11})$$

Las condiciones iniciales se pondrán en las funciones de orden cero, es decir

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \begin{cases} f^{(0)}(\Lambda, E) = E \\ a^{(0)}(\Lambda, E) = 1 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Como las ecuaciones de orden cero dicen que las funciones de orden cero son constantes en Λ , las condiciones iniciales dan estas constantes. Es decir,

$$\begin{cases} f^{(0)}(\Lambda, E) = E \\ a^{(0)}(\Lambda, E) = 1 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Al insertar esto en la ecuación (A.11) se ve que verifica que la autoenergía a orden cero, es cero.

Las ecuaciones diferenciales a primer orden son

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda f^{(1)}(\Lambda, E) &= \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \partial_E^2 f^{(0)}(\Lambda, E) + X_f^{(0)}(a, f, a', f') \\ &= X_f(a^{(0)}, f^{(0)}, a^{(0)'}, f^{(0)'}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

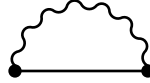
$$\partial_\Lambda a^{(1)}(\Lambda, E) = X_a(a^{(0)}, f^{(0)}, a^{(0)'}, f^{(0)'}) \quad (\text{A.15})$$

Que reemplazando las funciones de orden cero en X_a y X_f , es

$$\partial_\Lambda f^{(1)}(\Lambda, E) = \omega^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q^2) \tilde{g}^{(0)}(q^2) \quad (\text{A.16})$$

$$\partial_\Lambda a^{(1)}(\Lambda, E) = -\frac{\omega^4}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(p-q) \Big|_{p=0} \tilde{g}^{(0)}(q^2) \quad (\text{A.17})$$

Esto se compara con la expansión a primer orden de la autoenergía, dada por el siguiente diagrama



$$(\text{A.18})$$

Que en el capítulo 1 fue llamada aproximación *bilocal*. En la teoría modificada, con la correlación C_Λ , este diagrama se expresa como

$$\tilde{\Sigma}^{(1)} = \omega^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(p-q) \tilde{g}^{(0)}(q) \quad (\text{A.19})$$

El primer orden de la autoenergía, en términos de a y f , es

$$\tilde{\Sigma}^{(1)} = -a^{(1)}p^2 + \omega^2 f^{(1)} \quad (\text{A.20})$$

Por lo que se ve que las ecuaciones diferenciales a primer orden en la correlación captan la expansión en Taylor hasta p^2 de la misma. Esto se debe a que por la forma en que se parametrizó la acción efectiva, la dependencia de la autoenergía que se deriva de la misma es hasta cuadrática en impulso.

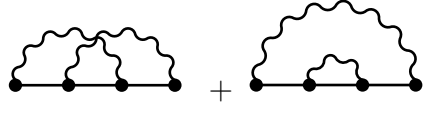
Para las ecuaciones diferenciales a segundo orden, hará falta expandir las funciones X_a y X_f a primer orden. Empezando por la ecuación diferencial de f ,

$$X_f^{(1)} = \frac{1}{\omega^2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q^2) \left\{ \tilde{g}^{(1)}(q^2) \omega^4 + \tilde{g}^{(0)}(q^2) \left(2\omega^4 f^{(1)'} - \omega^2 a^{(1)'} q^2 \right) \right\} \quad (\text{A.21})$$

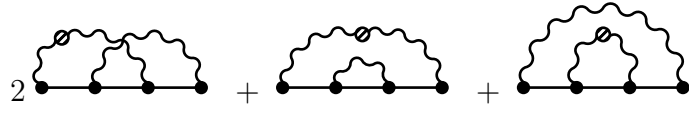
Y la ecuación diferencial toma la forma

$$\partial_\Lambda f^{(2)}(\Lambda, E) = \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) f^{(1)''} + X_f^{(1)} \quad (\text{A.22})$$

La expansión a 2 loops de la autoenergía está compuesta de dos diagramas


(A.23)

Esto se deriva respecto de Λ , y evalúa en impulso externo cero.


(A.24)

Donde la línea ondulada interrumpida por un círculo rayado representa a $\partial_\Lambda C_\Lambda$. La expresión completa es

$$\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2)}(0) = 2 \partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.a)}(0) + \partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.b)}(0) + \partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.c)}(0) \quad (\text{A.25})$$

$$2 \partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.a)}(0) = 2 \omega^8 \int \frac{d^3 q d^3 l}{(2\pi)^6} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \tilde{C}_\Lambda(l) \tilde{g}^{(0)}(q) \tilde{g}^{(0)}(l) \tilde{g}^{(0)}(q+l) \quad (\text{A.26})$$

$$\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.b)}(0) = \omega^8 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) [\tilde{g}^{(0)}(q)]^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \tilde{g}^{(0)}(q-l) \tilde{C}_\Lambda(l) \quad (\text{A.27})$$

$$\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.c)}(0) = \omega^8 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(q) [\tilde{g}^{(0)}(q)]^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \tilde{g}^{(0)}(q-l) \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(l) \quad (\text{A.28})$$

Esta expresión de $\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2)}(0)$ se debe comparar con $\omega^2 \partial_\Lambda f^{(2)}(\Lambda, E)$. Comenzando por el término en la ecuación diferencial que tiene la derivada segunda respecto de E ,

$$\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \omega^8 f^{(1)''} = \frac{\omega^2}{2} \left(\int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(l) \right) \left(\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(q) \tilde{g}^{(0)''}(q) \right) \quad (\text{A.29})$$

Derivando el propagador libre 2 veces

$$\tilde{g}^{(0)''}(q) = \left[(q^2 - \omega^2 E)^{-1} \right]'' = 2 \omega^4 [\tilde{g}^{(0)}(q)]^3 \quad (\text{A.30})$$

Por lo que

$$\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \omega^2 f^{(1)''} = \omega^8 \left(\int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(l) \right) \left(\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(q) [\tilde{g}^{(0)}(q)]^3 \right) \quad (\text{A.31})$$

Esto se compara con $\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.c)}(0)$. Las 2 integrales son en todos los momentos sin embargo a medida que $\Lambda \rightarrow 0$, el momento en el loop interior está dominado por Λ , entonces si se aproxima en el

propagador $\tilde{g}^{(0)}(q-l) \rightarrow \tilde{g}^{(0)}(q)$, se obtiene exactamente el término recién mencionado. Es decir

$$\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.c)}(0) \simeq \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0) \omega^2 f^{(1)''} \quad (\text{A.32})$$

El término $\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.b)}(0)$ se compara con el primer término de la ecuación diferencial que sale de $\omega^2 X_f^{(1)}$,

$$\omega^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \tilde{g}^{(1)}(q) \quad (\text{A.33})$$

El propagador a orden 1 se escribe en espacio de momentos como

$$\tilde{g}^{(1)}(q) = [\tilde{g}^{(0)}(q)]^2 \Sigma^{(1)}(q) \quad (\text{A.34})$$

La distinción está en que del desarrollo de la ecuación diferencial, $\Sigma^{(1)}(p)$ es en realidad $\hat{T}_2 \Sigma^{(1)}(p)$, es decir la expansión de Taylor cuadrática. En cambio, en el término $\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.b)}(0)$ no está truncada esta dependencia en impulsos. Por lo tanto, para que coincidan ambos términos nuevamente se debe recurrir a una aproximación de momentos pequeños, esta vez en el momento que circula en el loop exterior. De esta forma

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.b)}(0) &\simeq \omega^8 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) [\tilde{g}^{(0)}(q)]^2 \hat{T}_2(q) \left\{ \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \tilde{g}^{(0)}(q-l) \tilde{C}_\Lambda(l) \right\} \\ &\simeq \omega^8 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) [\tilde{g}^{(0)}(q)]^2 (-a^{(1)} q^2 + \omega^2 f^{(1)}) \\ &= \omega^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \tilde{g}^{(1)}(q) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Finalmente, el término $2\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.a)}(0)$ se compara con

$$2\omega^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \tilde{g}^{(0)}(q) \left(f^{(1)'} - \frac{q^2}{2\omega^2} a^{(1)'} \right) \quad (\text{A.36})$$

Partiendo de $2\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.a)}(0)$, si se expande el propagador $\tilde{g}^{(0)}(q+l)$ a orden cuadrático en q , se tiene que

$$\begin{aligned} 2\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2.a)}(0) &\simeq 2\omega^8 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \tilde{g}^{(0)}(q) \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(l) \tilde{g}^{(0)}(l) \\ &\quad \times \left(\tilde{g}^{(0)}(l) + q^i \partial_i \tilde{g}^{(0)}(l) + \frac{1}{2} q^i q^j \partial_i \partial_j \tilde{g}^{(0)}(l) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

De los 3 términos, el primero se observa que con la integral en l se tiene

$$w^4 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(l) [\tilde{g}^{(0)}(l)]^2 = f^{(1)'} \quad (\text{A.38})$$

con el que se forma el primer término en (A.36). Luego, el siguiente término se anula porque la integral en q involucra una función isótropa de q , y una función impar en q , y la integral es en todos los momentos. Es decir

$$\int d^3q F(q^2) q^i = 0 \quad (\text{A.39})$$

Con el tercer término, se tiene que

$$\int d^3q F(q^2) q^i q^j = \frac{1}{3} \delta^{ij} \int d^3q F(q^2) q^2 \quad (\text{A.40})$$

De modo que el término restante es

$$2\omega^8 \left(\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \partial_\Lambda \tilde{C}_\Lambda(q) \tilde{g}^{(0)}(q) q^2 \right) \left(\int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(l) \tilde{g}^{(0)}(l) \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial l_x^2} \tilde{g}^{(0)}(l) \right) \quad (\text{A.41})$$

Comparando esto con el segundo de los términos en (A.36), vemos que la integral en l se debe comparar con

$$-\frac{1}{2\omega^6} a^{(1)'} \quad (\text{A.42})$$

Reemplazando la forma de $a^{(1)}$, se tiene que

$$-\frac{1}{2\omega^6} a^{(1)'} = \frac{1}{4\omega^6} \frac{\partial}{\partial E} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \tilde{\Sigma}^{(1)}(p) \Big|_{p=0} \quad (\text{A.43})$$

Se pueden intercambiar las derivadas respecto de E y respecto de p_x , para tener

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\omega^6} a^{(1)'} &= \frac{1}{4\omega^6} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \left(\omega^4 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(l) \tilde{g}^{(0)'}(l-p) \right) \Big|_{p=0} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \left(\int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(l) [\tilde{g}^{(0)}(l-p)]^2 \right) \Big|_{p=0} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \tilde{C}_\Lambda(l) \left\{ \tilde{g}^{(0)}(l) \frac{\partial^2}{\partial l_x^2} \tilde{g}^{(0)}(l) + \left[\frac{\partial}{\partial l_x} \tilde{g}^{(0)}(l) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Que al compararlo con la integral en l que surge de aproximar a orden cuadrático en impulsos la expresión $2\partial_\Lambda \tilde{\Sigma}^{(2,a)}(0)$, se ve que hay un término que sobra, que tiene una derivada del propagador al cuadrado.

El análisis de la ecuación diferencial para $a^{(2)}$ es análogo al presentado para $f^{(2)}$. Vemos así que un desarrollo perturbativo de las ecuaciones diferenciales para las dos funciones a y f con que se parametrizó la acción efectiva difiere ya a 2 loops de lo que se obtiene de una expansión perturbativa de la acción efectiva. Esto se debe a que se truncó la dependencia en impulsos de la acción efectiva hasta p^2 . Sin embargo, una ventaja de la ecuación del grupo de renormalización es justamente su carácter no-perturbativo de la misma. Es por esto que nos concentraremos en resolver las ecuaciones diferenciales sin recurrir a un desarrollo perturbativo de las mismas.

Bibliografía

- [Anderson, 1958] Anderson, P. (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, (109).
- [Blaizot et al., 2006] Blaizot, Galain, M., and Wschebor (2006). A new method to solve the non perturbative renormalization group equations. *Phys. Lett. B*, (632).
- [Calzetta and Hu, 2008] Calzetta, E. A. and Hu, B. (2008). *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- [Delamotte, 2007] Delamotte, B. (2007). *An introduction to the nonperturbative renormalization group*. Lecture Notes in Physics, Volume 852, Springer.
- [Depine and Dorado, 2009] Depine, R. and Dorado, L. (2009). Modeling of disorder effects and optical extinction in three-dimensional photonic crystals. *Physical Review B*, (79).
- [Duncan, 2012] Duncan, A. (2012). *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory*. Oxford University Press.
- [Eckert, 2010] Eckert, F. (2010). *Transport of waves in Non-Linear Disordered Media*. Diplomathesis, Albert-LudwigsUniversitätFreiburg.
- [Feynman and Hibbs, 1965] Feynman, R. and Hibbs, A. (1965). *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill.
- [Franco, 2014] Franco, M. (2014). *Métodos de dispersión electromagnética aplicados a sistemas SAR*. Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires.
- [Franco and Calzetta, 2015] Franco, M. and Calzetta, E. (2015). Wave propagation in non-gaussian random media. *J. Phys. A*, (48).
- [Frisch, 1968] Frisch, U. (1968). Wave propagation in random media. *Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol. 1*.
- [Jackiw, 1974] Jackiw, R. (1974). Functional evaluation of the effective potential. *Physical Review D*, (9).
- [Kamenev, 2011] Kamenev, A. (2011). *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge University Press.

- [Knothe, 2012] Knothe, A. (2012). *Conservation of energy in coherent backscattering of light*. Bachelor thesis, Albert-LudwigsUniversitätFreiburg.
- [Kopietz et al., 2009] Kopietz, P., Bartosch, L., and Schütz, F. (2009). *Introduction to the Functional Renormalization Group*. Springer.
- [Lozano et al., 2012] Lozano, G., Míguez, H., Dorado, L., and Depine, R. (2012). Modeling the optical response of three-dimensional disordered structures using the korringa–kohn–rostocker method. *Optical Properties of Photonic Structures*.
- [Negele and Orland, 1998] Negele, J. and Orland, H. (1998). *Quantum Many-Particle Systems*. Westview.
- [Ramond, 2001] Ramond, P. (2001). *Field Theory: A Modern Primer*. Westview.
- [Schulman, 1981] Schulman, L. (1981). *Techniques and Applications of Path Integration*. Wiley & Sons.
- [Sheng, 2006] Sheng, P. (2006). *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*. Springer.
- [Tourin et al., 2000] Tourin, A., Fink, M., and Derode, A. (2000). Absence of diffusion in certain random lattices. *Waves in Random Media*, (10:4, R31-R60).
- [Wegner and Houghton, 1973] Wegner, F. and Houghton, A. (1973). Renormalization group equation for critical phenomena. *Physical Review A*, (Vol. 8).
- [Wetterich, 1993] Wetterich, C. (1993). Exact evolution equation for the effective potential. *Physics Letters B*, (301).
- [Zanella and Calzetta, 2002] Zanella, J. and Calzetta, E. (2002). Renormalization group and nonequilibrium action in stochastic field theory. *Physical Review E*, (66).