Enunciado

Dado un conjunto finito S de intervalos de $\mathbb{R}$ decimos que un conjunto $P \subset \mathbb{R}$ es *transversal a* S si para todo intervalo $[a, b] \in S$ existe un punto $p \in P$ tal que $a \leq p \leq b$. Consideremos el problema de, dado un conjunto S, encontrar un conjunto P transversal a S de menor tamaño. Para ello, dado $x \in \mathbb{R}$, llamemos $S_x = \{[a, b] \in S : a \leq x \leq b\}$ al conjunto de intervalos de S que son atravesados por el punto x.
Para resolver este problema se propone el siguiente esquema de estrategia greedy: se elegirá un punto $x \in \mathbb{R}$ que atraviese algunos intervalos S_x de S, y luego se hará recursión buscando un conjunto mínimo P transversal a $S \setminus S_x$, para luego devolver como respuesta final al conjunto $P \cup \{x\}$. Como caso base, cuando $S = \emptyset$, se devolverá el conjunto vacío.

Demostrar que si elegimos x de acuerdo a la regla $x = \min\{b \mid [a, b] \in S\}$, obtenemos un algoritmo que devuelve un conjunto transversal a S de tamaño mínimo.

Demostración

Vamos a demostrar esto como se demuestran todos los algoritmos greedy, por inducción. Sea entonces $\mathcal{I}$ el conjunto de conjuntos de intervalos en $\mathbb{R}$, y notemos por $2^{\mathbb{R}}$ al conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Llamemos entonces al algoritmo $A : \mathcal{I} \to 2^{\mathbb{R}}$. Dado un conjunto de intervalos $S \in \mathcal{I}$, decimos que A *es correcto* para S, cuando $A(S)$ es un conjunto transversal a S de tamaño mínimo entre todos los conjuntos transversales a S. La proposición que vamos a probar por inducción es:

> $P(n)$: Para todo conjunto de intervalos $S \in \mathcal{I}$, con $|S| \leq n$, A es correcto para S.

Como toda demostración por inducción, vamos a tener algunos casos base, y un paso inductivo. En este caso, nos basta con usar 0 como caso base.

- $P(0)$. Queremos probar que si tenemos un conjunto de intervalos S, con $|S| \leq 0$, entonces $P = A(S)$ es un conjunto transversal a S de tamaño mínimo entre todos los conjuntos transversales a S. Como $|S| \leq 0$, entonces $|S| = 0$, y $S = \emptyset$. Luego, $P = A(S) = A(\emptyset) = \emptyset$. Para ver que P es transversal a S, tenemos que er que para todo intervalo $[a, b] \in S$, existe un punto $p \in P$ tal que $a \leq p \leq b$. Como $S = \emptyset$, esto es un "para todo" de un conjunto vacío, y por lo tanto trivialmente cierto. Para ver que P tiene tamaño mínimo entre todos los conjuntos transversales a S, basta ver que P tiene tamaño cero, y no puede haber un conjunto X transversal a S de menor tamaño que P, puesto que X necesitaría tener un número negativo de elementos.

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Sabemos que A es correcto para todos los conjuntos de a lo sumo n intervalos, y queremos ver que es correcto para todos los conjuntos de a lo sumo $n+1$ intervalos. Sea S, entonces, un conjunto de $n+1$ intervalos. Por como definimos A, tenemos que si $P = A(S)$, entonces $P = \{x\} \cup A(S \setminus S_x)$, con $x = \min\{b \mid [a,b] \in S\}$. Sea $[a,b] \in S$ el conjunto de donde sale ese x, donde en particular, $x = b$. Como $a \leq x \leq b$, entonces $[a,b] \in S_x$, y luego $|S_x| > 0$.

  Como $|S_x| > 0$, entonces $|S \setminus S_x| < |S| = n+1$, y luego $|S \setminus S_x| \leq n$. Por hipótesis inductiva, A es correcto para $S \setminus S_x$, y si $A(S \setminus S_x)$ es transversal a $S \setminus S_x$, entonces $A(S) = \{x\} \cup A(S \setminus S_x)$ es transversal a S. Falta ver que $A(S)$ es de tamaño mínimo entre todos los conjuntos transversales de S.

  Como x no toca a nadie en $S \setminus S_x$, si $x \in A(S \setminus S_x)$, podríamos simplemente eliminarlo, obteniendo un conjunto transversal a $S \setminus S_x$ de menor tamaño, y eso no puede suceder porque A es correcto para $S \setminus S_x$. Luego sabemos que $x \notin A(S \setminus S_x)$, y luego $|A(S)| = |\{x\} \cup A(S \setminus S_x)| = 1 + |A(S \setminus S_x)|$.

  Sea Q una solución óptima para S. Es decir, Q es un conjunto transversal a S, con el mínimo tamaño entre todos los conjuntos transversales a S.

  Tenemos dos opciones:

  - $x \in Q$. Luego, $Q \setminus \{x\}$ es un conjunto transversal a $S \setminus S_x$. Como A es correcto para $S \setminus S_x$, y $Q \setminus \{x\}$ es transversal a $S \setminus S_x$, tenemos que $|A(S \setminus S_x)| \leq |Q \setminus \{x\}|$.
    Luego, $|A(S)| = |\{x\} \cup A(S \setminus S_x)| = 1 + |A(S \setminus S_x)| \leq 1 + |Q \setminus \{x\}| = |Q|$. Como Q es un conjunto transversal a S de mínimo tamaño entre todos los conjuntos transversales a S, y A es al menos tan pequeño como él, entonces A es correcto para S.

- $x \notin Q$. Como Q es transversal a S, y $[a, b] \in S$, existe un $q \in Q$ tal que $a \leq q \leq b$. Consideremos el conjunto de intervalos en S que q interseca, S_q. Tenemos que para todo $[a', b'] \in S_q$, $a' \leq q \leq b \leq b'$, puesto que b es el mínimo extremo derecho entre todos los intervalos en S. Luego, todos los intervalos que q interseca, b también interseca, y por lo tanto, $S_q \subseteq S_b = S_x$.
  Luego, como $Q \setminus \{q\}$ es transversal a $S \setminus S_q$, y $(S \setminus S_x) \subseteq (S \setminus S_q)$, tenemos que $Q \setminus \{q\}$ es transversal a $S \setminus S_x$. Por hipótesis inductiva, entonces,
  $|A(S \setminus S_x)| \leq |Q \setminus \{q\}|$, y por lo tanto
  $|A(S)| = |\{x\} \cup A(S \setminus S_x)| = 1 + A(S \setminus S_x)| \leq 1 + |Q \setminus \{q\}| = |Q|$, con Q un conjunto transversal a S de mínimo tamaño. Luego, A es correcto para S.

En ambos casos encontramos que A es correcto para S, que es lo que queríamos demostrar.