Definición 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con función de pesos $c : E \to \mathbb{N}$. Sea d la función de distancia inducida por f, que nos da la longitud de un camino mínimo entre un par de vértices.

Decimos que una arista $e = (v, w)$ es s-t *eficiente* cuando e pertenece a algún camino mínimo en G entre s y t.

♣

Lema 2 (Subestructura óptima de caminos mínimos)

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido pesado por una función $c : E \to \mathbb{R}$. Sean $s, t \in V$, y $P = s, u_1, u_2, \ldots, u_r, t$ un camino en G entre s y t, de longitud mínima entre todos los tales caminos. Sea $Q = u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j$ un sub-camino de P. Entonces Q es un camino mínimo entre u_i y u_j.

♡

Demostración. Podemos dividir a P en tres sub-caminos, que vamos a llamar $A = s \rightsquigarrow u_i$, $Q = u_i \rightsquigarrow u_j$, y $B = u_j \rightsquigarrow t$. Notar que cualquiera de estos puede ser trivial, es decir, tener cero aristas.

Vamos a notar la longitud de un camino X como $|X|$. Entonces, vemos que $|P| = |A| + |Q| + |B|$. Como P es un camino mínimo entre s y t, y d nos fa la longitud de un camino mínimo, tenemos que $|P| = d(s, t)$.

Queremos probar que $|Q| = d(u_i, u_j)$. Para probar que dos números son iguales, podemos probar que cada uno es mayor o igual que el otro.

1. Como $d(u_i, u_j)$ es la longitud del camino más corto entre u_i y u_j, y Q es *un* camino entre u_i y u_j, y , entonces $|Q| \geq d(u_i, u_j)$.
2. Sea Q' un camino mínimo entre u_i y u_j. Entonces $|Q'| = d(u_i, u_j)$. Consideremos P, pero reemplazando $u_i \rightsquigarrow u_j$ (es decir, Q) por Q'. Llamemos a este camino P'. Tenemos que $|P'| = |A| + |Q'| + |B|$. Como P es un camino mínimo entre s y t, y P' es *un* camino entre s y t, tenemos que $|P| \leq |P'|$. Con un poco de aritmética:

$$\begin{aligned} |P| &\leq |P'| \\ |A| + |Q| + |B| &\leq |A| + |Q'| + |B| \\ |Q| &\leq |A| + |Q'| + |B| - |A| - |B| \\ |Q| &\leq |Q'| \\ &= d(u_i, u_j) \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $|Q| \leq d(u_i, u_j)$.

Como vale que $|Q| \geq d(u_i, u_j)$, y $|Q| \leq d(u_i, u_j)$, tenemos que $|Q| = d(u_i, u_j)$, y por lo tanto Q es un camino mínimo entre u_i y u_j. □

Ejercicio 3

Probar que una arista $e = (v, w)$ es s-t eficiente sí y sólo sí $d(s, v) + c(v, w) + d(w, t) = d(s, t)$.

♠

Demostración. Para mostrar un sí y sólo sí, tenemos que mostrar la ida ($\Rightarrow$) y la vuelta ($\Leftarrow$).

- $\Rightarrow$) Sabemos que $e = (v, w)$ es s-t eficiente. Es decir, sabemos que existe en G un camino entre s y t, de mínima distancia entre todos los tales caminos, y que $e \in P$. Escribamos quién es P:

$$P = s, u_1, u_2, ..., u_k, v, w, u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_r, t$$

Para algunos $u_1, ..., u_r$ en V. Esto se divide en tres sub-caminos:
1. $A = s, u_2, u_2, ..., u_k, v$
2. $B = v, w$
3. $C = w, u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_r, t$

y tenemos que la longitud de P es la suma de las longitudes de estos sub-caminos, $|P| = |A| + |B| + |C|$. Usando el Lema 2, y que A y C son sub-caminos de un camino mínimo P, tenemos que A y C, son caminos mínimos entre s y v, y entre w y t, respectivamente.

Luego, por cómo definimos d, $|A| = d(s, v)$, y $|C| = d(w, t)$. Como B es sólo una arista, $v \to w$, tenemos que $|B| = c(v, w)$. Tenemos entonces que $|P| = |A| + |B| + |C| = d(s, v) + c(v, w) + d(w, t)$, que es lo que queríamos demostrar.

- $\Leftarrow$) Sabemos que $d(s, t) = d(s, v) + c(v, w) + d(w, t)$. Queremos ver que $e = (v, w)$ es s-t eficiente.

  Encontremos, entonces, un camino mínimo P, entre s y t, que incluya e.

  Como $d(s, v)$ es la mínima distancia entre todos los caminos entre s y v, sea A un tal camino mínimo entre s y v, con $|A| = d(s, v)$. De la misma manera, sea B un camino mínimo entre w y t, de longitud $|B| = d(w, t)$.

  Consideremos $P = A, B$, concatenando los caminos. Notamos que como v es el último vértice de A, y w es el primer vértice de B, tenemos que $(v, w) = e \in P$, y que $|P| = |A| + c(v, w) + |B|$. Por cómo construímos A y B, podemos reemplazar sus distancias en esta última ecuacion, obteniendo $|P| = d(s, v) + c(v, w) + d(w, t)$. Pero sabíamos que $d(s, v) + c(v, w) + d(w, t) = d(s, t)$. Luego, sabemos que $|P| = d(s, t)$, con P un camino entre s y t, y luego P es un camino mínimo entre s y t.

  Como P es un camino mínimo entre s y t, y $e \in P$, vemos que e pertenece a un camino mínimo entre s y t, y luego e es s-t eficiente, que es lo que queríamos demostrar.

$\square$