

AGM \Leftrightarrow Minimax

Proposición 1

Sea $T = (V, E)$ un árbol, y $u, v \in V$. Entonces existe un único camino en T entre u y v .

Demostración. Existe al menos un camino en T entre u y v porque T es un árbol, a fortiori conexo. Asumamos, por el contrario, que existen dos caminos $P, P' \subseteq T$, entre u y v , con $P \neq P'$. Van a tener algún prefijo y sufijo de vértices en común, al menos ambos empiezan con $c_1 = u$ y terminan con $d_f = v$. Sea k la longitud del prefijo en común, y f la longitud del sufijo en común. Escribimos:

$$P = [\{c_1, c_2\}, \dots, \{c_{k-1}, c_k\}, x_1, \dots, x_s, \{d_1, d_2\}, \dots, \{d_{f-1}, d_f\}]$$
$$P' = [\{c_1, c_2\}, \dots, \{c_{k-1}, c_k\}, y_1, \dots, y_t, \{d_1, d_2\}, \dots, \{d_{f-1}, d_f\}]$$

Como $x_1 \neq y_1$ y $x_s \neq y_t$, tenemos que $C = [c_k, x_1, \dots, x_s, d_1, y_t, \dots, y_1, c_k]$ es un circuito. Luego, C contiene al menos un ciclo. Esto no puede pasar, dado que $C \subseteq T$, y T siendo árbol no contiene ciclos.

Luego, no existen tales caminos distintos, y tenemos que existe un único tal camino. \square

Proposición 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo, $u, v \in V$, T un árbol generador de G , P el único camino en T de u a v , y $e \in P$ una arista. Entonces $T - e$ es un bosque con dos árboles T_1 y T_2 , con $u \in T_1$, $v \in T_2$.

Demostración. Que $T - e$ es un bosque sale de que T era un árbol, luego acíclico, y luego sacarle una arista sigue siendo acíclico. Por la Proposición 1, sabemos que en T había una única forma de llegar de u a v , y era P . Si sacamos $e \in P$ de T , ahora P no existe más en $T - e$, y luego u y v están desconectados. Luego e era una arista puente, y remover una arista puente de un grafo conexo deja dos componentes conexas.

Luego tenemos que $T - e$ es un grafo acíclico con dos componentes conexas, y luego es un bosque con dos árboles.

Si u y v estuvieran en la misma componente conexa, habría un camino P^* en $T - e$ que va de u a v , pero este camino existía ya con más razón en T (porque T' es subgrafo de T), y $P^* \neq P$, puesto que $e \in P$, $e \notin P^*$. Luego en T hay dos caminos distintos entre u y v , lo cual contradice la Proposición 1. Luego, u y v están uno en cada árbol de $T - e$. \square

Proposición 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo, (V_1, V_2) una partición de V , tal que $V = V_1 \cup V_2$, y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sean $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, y P un camino en G entre v_1 y v_2 . Entonces P tiene al menos una arista $e = \{u, w\}$ tal que $u \in V_1, w \in V_2$.

Demostración. Consideremos la lista de vértices de P :

$$P = [v_1 = x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = v_2]$$

Como $\{V_1, V_2\}$ particiona V , cada uno de los x_i está en V_1 o V_2 . Luego, consideremos a quién pertenece cada vértice. $x_1 = v_1 \in V_1$, y $x_k = v_2 \in V_2$. No puede pasar que $V(P) \subseteq V_1$, porque $v_2 \in V(P)$, y $v_2 \notin V_1$. Tampoco puede pasar que $V(P) \subseteq V_2$, porque $v_1 \in V(P)$, y $v_1 \notin V_2$. Luego, como

no pueden estar todos en V_1 ni todos en V_2 , y empezamos en V_1 , en algún momento tiene que haber una arista $\{x_i, x_{i+1}\}$, donde $x_i \in V_1$, y $x_{i+1} \in V_2$. \square

Definición 4

Sea $G = (V, E)$ un grafo pesado por $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, y X un conjunto de aristas. Notamos $C(X) = \sum_{e \in X} c(e)$ a la suma de los pesos de X . \clubsuit

Definición 5

Sean A y B conjuntos disjuntos. Se nota $A \sqcup B$ a la unión disjunta de A y B . Es decir, $A \sqcup B = A \cup B$, y además sabemos que A y B son disjuntos. \clubsuit

Definición 6

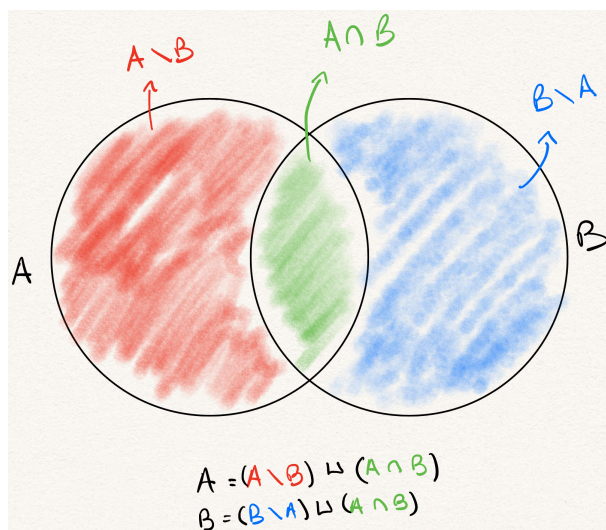
Sean A y B conjuntos. Notamos $\Delta(A, B) = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$ a la diferencia simétrica entre A y B . \clubsuit

Proposición 7

Sean A y B conjuntos de igual tamaño $|A| = |B|$. Entonces:

1. $|A \setminus B| = |B \setminus A|$.
2. $|\Delta(A, B)|$ es par.
3. Si $\Delta(A, B) \neq \emptyset$, entonces $(A \setminus B) \neq \emptyset$ y $(B \setminus A) \neq \emptyset$.

Demostración. Usemos esta imagen para recordar cómo funcionan las uniones e intersecciones.



Sabemos que $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$, y $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$. Llamando a $|A \setminus B| = \alpha$, $|B \setminus A| = \beta$, y $|A \cap B| = \gamma$, tenemos que $|A| = \alpha + \gamma$, y $|B| = \beta + \gamma$. Como $|A| = |B|$, tenemos que $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Luego, $\alpha = \beta$, es decir, $|A \setminus B| = |B \setminus A|$. Para el segundo punto, como $\Delta(A, B) = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$, tenemos que $|\Delta(A, B)| = |(A \setminus B)| + |(B \setminus A)| = \alpha + \beta = 2\alpha = 2\beta$, luego es par. Finalmente, si $\Delta(A, B) \neq \emptyset$, entonces $|\Delta(A, B)| = 2\alpha = 2\beta > 0$, luego $\alpha = \beta > 0$, y luego $(A \setminus B) \neq \emptyset$, como también $(B \setminus A) \neq \emptyset$. \square

Definición 8

Sea $G = (V, E)$ un grafo pesado por $c : E \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada camino p en G , definimos $c^*(p) = \max_{e \in p} \{c(e)\}$ como el peso de la arista más pesada en p .

Definición 9

Sea $G = (V, E)$ un grafo pesado por $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, y $u, v \in V$. Un camino p en G que va desde u a v se llama **minimax en G** si y sólo si para todo otro camino p' en G que va desde u a v , $c^*(p') \geq c^*(p)$. Es decir, p minimiza el peso de la arista más pesada, entre todos los caminos de u a v en G .

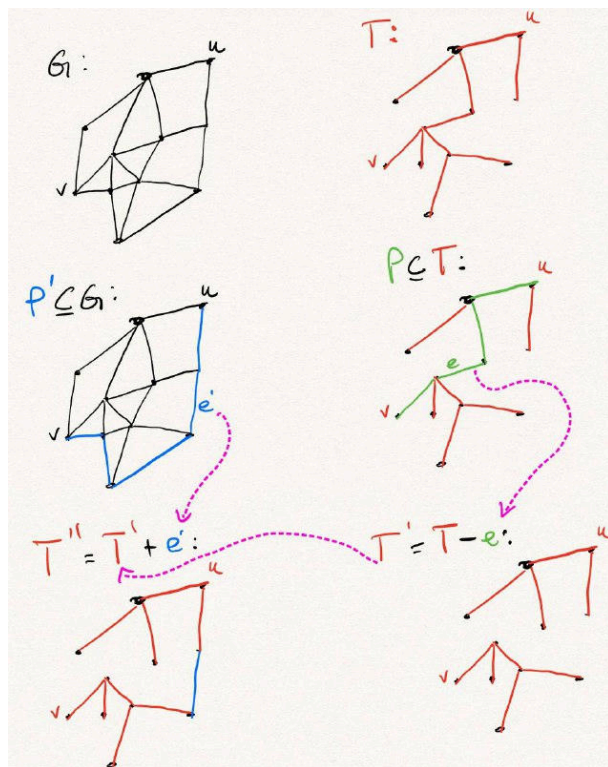
Definición 10

Sea $G = (V, E)$ un grafo pesado por $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, y T un árbol generador de G . Si para todo par de vértices u, v en V , el único camino en T es minimax en G , entonces T se conoce como un **árbol minimax**.

Proposición 11 (AGM \Rightarrow Minimax)

Sea $G = (V, E)$ un grafo pesado por $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, T un árbol generador mínimo de G , $u, v \in V$, y P el único camino en T desde u a v . Entonces P es minimax en G . Como corolario, T es un árbol minimax.

Demostración. En lo que sigue, pueden tener las siguientes imágenes para guiarse, si se pierden en la prosa o el álgebra.



Sea P' cualquier camino en G entre u y v . Queremos ver que $c^*(P) \leq c^*(P')$. Es decir, que la arista más pesada de P , es tan o más ligera que la arista más pesada de P' . Como corolario, vamos a tener que si P' es minimax, entonces P también lo es. Como P' es arbitrario entre u y v , vamos a poder elegirlo minimax, y tenemos que cualquier camino en un árbol generador mínimo entre u y v también va a ser minimax en G .

Asumamos que no es cierto, y que $c^*(P) > c^*(P')$. Luego, sea $e \in P$ una arista de máximo peso en P . Entonces tenemos que, para toda arista $e' \in P'$:

$$\begin{aligned} c(e) &= c^*(P) && \text{por definición de } c^*(P) \\ &> c^*(P') && \text{asumido} \\ &\geq c(e') && \text{por definición de } c^*(P') \end{aligned}$$

Es decir, todas las aristas de P' son estrictamente más ligeras que e .

Consideremos $T' = T - e$. Por la Proposición 2, T' es un bosque con dos árboles, y u y v están uno en cada una de las dos componentes conexas.

Como u y v están en componentes conexas distintas en T' , podemos particionar los vértices de T' en los vértices que están en una de las componentes, y los que están en la otra. Entonces, por la Proposición 3, existe una arista $e' \in P'$ que cruza las componentes conexas.

Consideremos $T'' = T' + e' = T - e + e'$. Como e' cruza las únicas dos componentes conexas que había en $T' = T - e$, tenemos que T'' es nuevamente un árbol. Como T'' es subgrafo de G , y tiene $|V|$ vértices, es un árbol generador de G . Ahora veamos la suma de pesos de T'' :

$$\begin{aligned} C(T'') &= C(T' + e') \\ &= C(T') + c(e') \\ &= C(T - e) + c(e') \\ &= C(T) - c(e) + c(e') \end{aligned}$$

Pero como sabíamos, $c(e) > c(e')$. Luego, $-c(e) + c(e') < 0$, y $C(T'') < C(T)$.

Tenemos que T'' es un árbol generador de G , con suma de pesos estrictamente menor que T , que era un árbol generador mínimo de G . Esto es absurdo, por definición de árbol generador mínimo.

Luego, no puede pasar que $c^*(P) > c^*(P')$, y tenemos que $c^*(P) \leq c^*(P')$, que es lo que queríamos demostrar. \square

Proposición 12 (Minimax \Rightarrow AGM)

Sea $G = (V, E)$ un grafo pesado por $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, T un árbol generador minimax de G . Entonces T es un árbol generador mínimo de G .

Demostración. Sea T' un árbol generador mínimo que minimiza $|\Delta(T, T')|$, entre todos los árboles generadores mínimos. Si $|\Delta(T, T')| = 0$, entonces $T = T'$ y T también es un árbol generador mínimo. Si no, $|\Delta(T, T')| > 0$, y por la Proposición 7, existe un $e' = \{u, v\} \in T' \setminus T$. Consideremos $T'' = T' - e'$. Por la Proposición 2, esto es un bosque con dos árboles T_A y T_B , con u en un árbol y v en el otro. Llamemos $A = V(T_A)$, $B = V(T_B)$, donde $V = A \sqcup B$ es una partición de V . Por la Proposición 1, en T existe un (único) camino P de u a v , y obviamente este camino existe en G , puesto que T es subgrafo de G . Por la Proposición 3, este camino tiene que cruzar al menos una vez la partición (A, B) . Sea $e \in P \subseteq T$ una tal arista que cruza. Vemos que $e \neq e'$, dado que $e' \in T' \setminus$

T , y $e \in T$. Vemos también que $e \notin T'$, puesto que si $e \in T'$, no hubieramos desconectado (A, B) al sacar e' de T' , dado que e seguiría en $T' - e'$, conectando A y B .

Como e cruza la partición (A, B) en T'' , conecta los dos árboles T_A y T_B , y tenemos que $T''' = T'' + e = T' - e' + e$ es un árbol. T''' también es generador porque $|T'''| = |T'|$ y T' es generador.

Como $e' = \{u, v\}$ es un camino en G entre u y v , y P es un camino en T de u a v con T minimax, tenemos que

$$\begin{aligned} c(e') &= c^*(e') && \text{por definición de } c^* \\ &\geq c^*(P) && \text{porque } T \text{ es minimax} \\ &\geq c(e) && \text{por definición de } c^*(P) \end{aligned}$$

Luego, $c(e) \leq c(e')$. Finalmente, T''' tiene peso $C(T''') = C(T') - c(e') + c(e) \leq C(T')$, con T' un árbol generador mínimo, y luego $C(T''') = C(T')$. Luego T''' es un árbol generador mínimo, con $|\Delta(T, T''')| = |\Delta(T, T')| - 2 < |\Delta(T, T')|$, porque al crear T''' , le sacamos a T' una arista e' que estaba en T' y no en T (reduciendo la diferencia simétrica en 1), y le pusimos una arista e que estaba en T y no en T' (nuevamente reduciendo la diferencia simétrica en 1). Pero T' minimizaba $|\Delta(T, T')|$, entonces no puedo haber llegado a este caso, y, tiene que haber sido el caso de la primer oración, donde $|\Delta(T, T')| = 0$, y luego T es un árbol generador mínimo. \square