TODO: Fecha. Jueves, 13 de junio de 2024

Ejemplo de solución correcta del taller 2

Cálculo Vectorial

Profesor: Jacinto Eloy Puig Portal, jpuig@uniandes.edu.co.
Monitor: Federico Melo Barrero, f.melo@uniandes.edu.co.

Preámbulo

Las instrucciones referentes a la entrega del taller están escritas en Bloque Neón.

Bonos

- Se sumarán 0.5 puntos de bonificación a la nota del taller si su contenido está ordenado y puede leerse con facilidad.
- Se sumarán 0.5 puntos de bonificación a la nota del taller si no contiene errores léxicos, gramaticales ni faltas de ortografía.

La nota del taller puede exceder el 5.0.

Recomendaciones

No necesita hacer uso de herramientas que le ayuden a hacer matemáticas, ya sean calculadoras, aplicaciones, grandes modelos de lenguaje u otras. Le recomiendo que no lo haga

Recuerde incluir las unidades siempre que trate con magnitudes físicas.

1. Taller 1

Ejercicio 1. Corrección del taller 1

(1 punto) Corrija todos los errores que tuvo su grupo en el taller 1. Si no tuvo errores, omita este punto.

En este punto simplemente revisaré que se hayan corregido los errores y abordado los comentarios que dejé en su taller. Naturalmente, la corrección debe ser correcta, sobretodo teniendo en cuenta que el solucionario del taller 1 está en Bloque Neón desde el domingo 23 de junio.

2. Integrales dobles

Ejercicio 2. Integral doble en región de tipo 3

(1 punto) Calcule analíticamente la integral

$$\int_1^2 \int_0^{\log y} (y-1)\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

No utilice aproximaciones numéricas ni herramientas computacionales. No omita ningún paso en su solución.

Solución:

2.1. Cambiar el orden de integración

Antes de calcular una integral doble, siempre vale la pena inspeccionar la región sobre la que se integra, pues si la región resulta ser de tipo 3, se puede cambiar el orden de integración, lo cual puede facilitar o incluso posibilitar el cálculo de la integral. Para ello, es recomendable hacer un bosquejo de la región.

Sea D la región de integración y $f(x,y)$ el integrando, de forma que

$$\int_D f = \int_1^2 \int_0^{\ln y} (y-1)\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

La región D, expresada como región de tipo 2, es el conjunto

$$D = \{(x,y)|0 \leq x \leq \ln y \ \wedge \ 1 \leq y \leq 2\}.$$

Un bosquejo de la región se muestra en la figura 1.

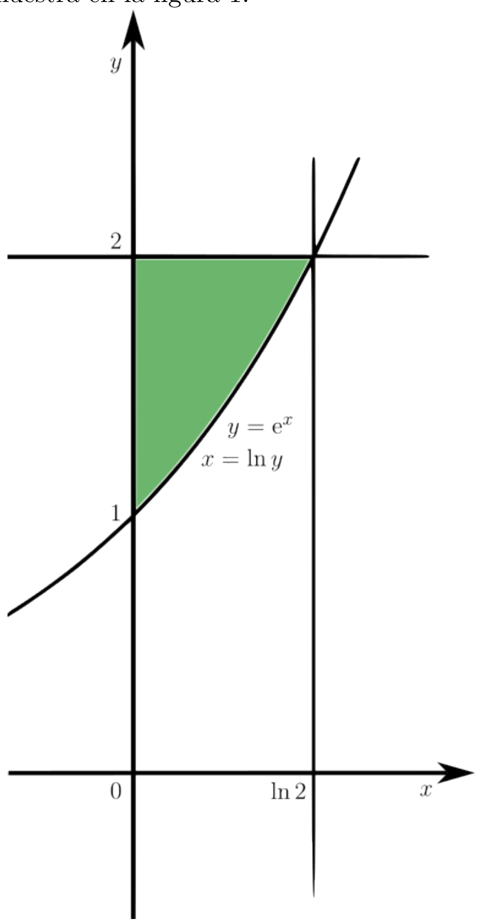

Figura 1: Región de integración D.

A partir del bosquejo, resulta evidente que D efectivamente es una región de tipo 3, pues también se puede expresar como región de tipo 1, delimitada por un intervalo numérico en el eje x y por curvas continuas en el eje y. Se expresa la curva $x = \ln y$ como $y = \mathrm{e}^x$, de forma que D se puede expresar como

$$D = \{(x,y)|0 \leq x \leq \ln 2 \ \wedge \ \mathrm{e}^x \leq y \leq 2\}.$$

Por lo tanto, la integral se puede reescribir como

$$\int_D f = \int_0^{\ln 2} \int_{e^x}^{2} (y-1)\sqrt{1+e^{2x}}\, dy\, dx.$$

A partir del proceso anterior, se tienen dos formas de expresar la misma integral. Ahora, se debe ponderar cuál forma es la más conveniente para calcular la integral. En la primera forma, la integral interna es

$$\int_0^{\ln y} \sqrt{1+e^{2x}}\, dx,$$

mientras que en la segunda forma, la integral interna es

$$\int_{e^x}^{2} (y-1)\, dy.$$

Resulta evidente que es mucho más sencillo calcular la integral en la segunda forma.

2.2. Calcular la integral doble

Con eso en mente, se procede a calcular la integral.

$$\begin{aligned}
\int_D f &= \int_0^{\ln 2} \int_{e^x}^{2} (y-1)\sqrt{1+e^{2x}}\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}} \left(\int_{e^x}^{2} (y-1)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}} \left(\int_{e^x}^{2} y\, dy - \int_{e^x}^{2} 1\, dy \right) dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}} \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{e^x}^{2} - 1(2-e^x) \right) dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(e^x)^2}{2} - 2 + e^x \right) dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}} \left(2 - \frac{e^{2x}}{2} - 2 + e^x \right) dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}} \left(e^x - \frac{e^{2x}}{2} \right) dx \\
&= \int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{1+e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{2}\sqrt{1+e^{2x}}\, dx \\
&= \int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{1+e^{2x}}\, dx - \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{2}\sqrt{1+e^{2x}}\, dx \\
&= I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

2.3. Calcular la integral I_1

Para evaluar I_1 tuve que utilizar tres técnicas de integración: primero, utilizo sustitución simple; luego, sustitución trigonométrica; por último, integración por partes. Además, para reemplazar los valores, me ayudo de un poco de trigonometría. Posiblemente exista un método más elegante o breve para evaluar esta integral, sin embargo, presento este, que utiliza técnicas básicas que vieron en el curso de Cálculo Integral.

Como primer paso para evaluar I_1, se realiza el cambio de variable $u = \mathrm{e}^x$, de forma que $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. Se deben modificar también los límites de integración: para el límite superior, se tiene $u = \mathrm{e}^{\ln 2} = 2$; para el límite inferior, se tiene $u = \mathrm{e}^0 = 1$. Por lo tanto,

$$I_1 = \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{1+u^2} \, \mathrm{d}u.$$

Lo anterior es una integral de una variable con una suma de cuadrados dentro de un radical. Ergo, es natural usar sustitución trigonométrica para resolverla. Se realiza el cambio de variable $u = \tan\theta$, de forma que $\mathrm{d}u = \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta$. Se deben modificar también los límites de integración: para el límite inferior, se tiene $\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$; para el límite superior, se tiene $\theta = \arctan 2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 \sqrt{1+u^2} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \sqrt{1+\tan^2\theta} \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \sqrt{\sec^2\theta} \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Para evaluar la integral de secante cúbica, una opción es expresarla como el producto $\sec^3\theta = \sec^2\theta \sec\theta$ y usar integración por partes. En pos de la simplicidad, se evaluará como integral indefinida. Recuérdese la fórmula de integración por partes,

$$\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u.$$

Se elige $u = \sec\theta$ y $\mathrm{d}v = \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta$, pensando en sacar provecho de que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \tan\theta = \sec^2\theta$. Se tiene entonces que $\mathrm{d}u = \sec\theta \tan\theta \, \mathrm{d}\theta$ y $v = \tan\theta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta &= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta \sec\theta \tan\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta \tan^2\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1) \, \mathrm{d}\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta - \sec\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta + \int \sec\theta \, \mathrm{d}\theta \\ 2\int \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta &= \sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta \, \mathrm{d}\theta \\ \int \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C. \end{aligned}$$

En ese último paso, la integral de $\sec\theta$ es conocida. Si no la recuerda, se calcula multiplicando el integrando por $\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$ para obtener una integral de la forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$. Con eso, se tiene el valor de la integral de secante cúbico, que se puede reemplazar en la integral I_1 para obtener su valor.

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \\
&= \frac{1}{2}\sec(\arctan 2)\tan(\arctan 2) + \frac{1}{2}\ln|\sec(\arctan 2)+\tan(\arctan 2)| \\
&\quad - \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}\right|
\end{aligned}
$$

Para calcular los valores, note que, por trigonometría:

- $\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$,
- $\tan\frac{\pi}{4} = 1$,
- $\sec(\arctan 2) = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$,
- $\tan(\arctan 2) = 2$.

Si no lo recuerda, puede hacer dos cosas: primero, dibujar un triángulo rectángulo con ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes y catetos de longitud 1, para percatarse de que la hipotenusa tendrá longitud $\sqrt{2}$; segundo, convencerse de que $\tan(\arctan x) = x$ y $\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$, lo cual se puede deducir manipulando cualquier triángulo rectángulo.

Reemplazando los valores anteriores en la expresión para I_1, se tiene que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot 2 + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{5}+2| - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+1| \\
&= \sqrt{5} + \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

2.4. Calcular la integral I_2

Para evaluar I_2, se realiza un cambio de variable similar al anterior, $u = \mathrm{e}^{2x}$. Así, $\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$, y los límites de integración se modifican de la siguiente manera: para el límite superior, se tiene $u = \mathrm{e}^{2\ln 2} = 4$; para el límite inferior, se tiene $u = \mathrm{e}^{2\cdot 0} = 1$. Por lo tanto,

$$
I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^4 \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u.
$$

Aunque esta integral se asemeja superficialmente a la anterior, note que la expresión dentro del radicando es una función lineal. Esto hace que integrarla sea muchísimo más fácil. Basta con la sustitución $v = 1+u$, de forma que $\mathrm{d}v = \mathrm{d}u$. Cambiar los límites de integración es trivial: para el límite inferior, se tiene $v = 1+1 = 2$; para el límite superior, se tiene $v = 1+4 = 5$. Así pues,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{4}\int_1^4 \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int_2^5 \sqrt{v}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_2^5 \\
&= \frac{1}{6}\left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right) \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}.
\end{aligned}
$$

2.5. Concluir

Finalmente, se reemplazan los valores de I_1 e I_2 en la expresión para la integral original, $I_1 - I_2$, para obtener el valor de la integral original.

$$\begin{aligned}\int_D f &= I_1 - I_2\\ &= \sqrt{5} + \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{2} - \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

3. Integrales triples

Ejercicio 3. Masa y centro de masa

(1 punto) Considere los paraboloides $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 6 + x^2 + y^2$. Suponga que R es el sólido cuya forma está dada por la región encerrada por esos paraboloides. Si R presenta una densidad uniforme de $8\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, indique cuál es la masa de R y cuál es la coordenada z de su centro de masa.

Solución:

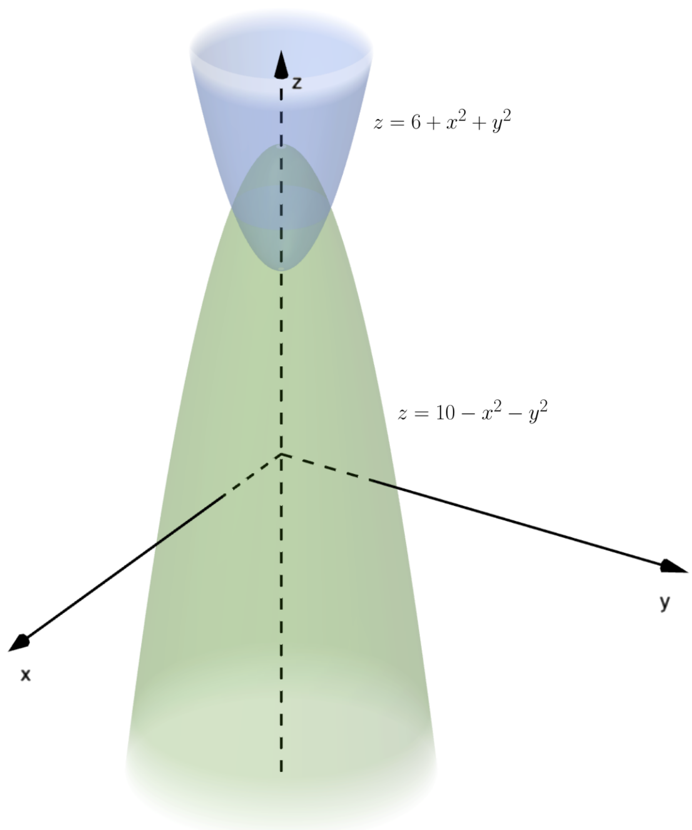

Figura 2: Región encerrada por los paraboloides $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 6 + x^2 + y^2$.

4. Integrales de línea

Ejercicio 4. Densidad lineal y masa de varilla metálica

(1 punto) Considere una varilla metálica de 5 metros. Suponga que la varilla no tiene densidad uniforme y que su densidad lineal está modelada por la función $\rho(x, y) = x^2 + 2y^2$, medida en $\mathrm{kg\,m^{-1}}$. Si la varilla está ubicada en el plano xy, de forma que toca los dos ejes y su centro geométrico es el punto $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, indique cuál es la masa de la varilla.

Solución:

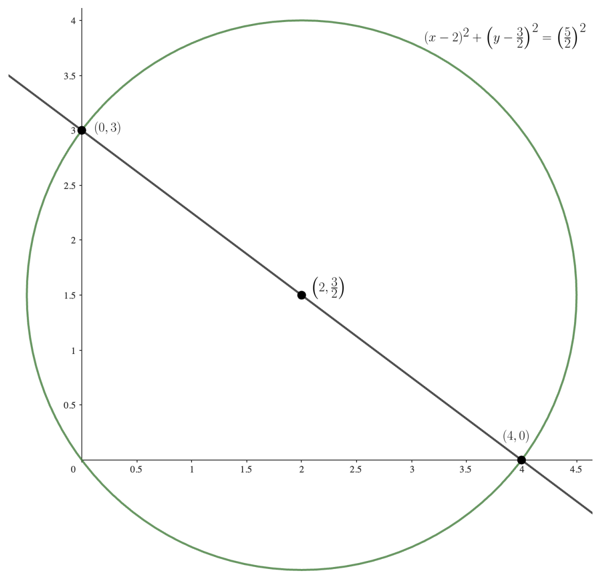

Figura 3: Varilla de 5 metros con centro geométrico en $(2, \frac{3}{2})$.

5. Integrales de superficie

Ejercicio 5. Área de helicoide

(1 punto) Considere la región R definida en coordenadas polares como

$$R = \{(\theta, r) \colon 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \wedge \ 0 \leq r \leq 1\}.$$

Halle el área de $\mathbf{F} \colon D \to \mathbb{R}^3$, que es la helicoide dada por

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = \theta. \end{cases}$$

Solución: