

Índice

Aclaraciones Generales	2
Introducción	3
Situaciones de la vida real que se pueden modelar utilizando MAX-SAT	3
Algoritmo exacto para MAX-SAT	3
Algoritmo de fuerza bruta	3
Algoritmo de backtracking	4
Complejidad de algoritmos exactos	5
Heurística constructiva para MAX-SAT	7
Aproximación del resultado	8
Complejidad de la heurística constructiva	8
Heurística de búsqueda local para MAX-SAT	9
Detalles de implementación	10
Complejidad de la heurística de búsqueda local	10
Metaheurística de búsqueda tabú para MAX-SAT	11
Complejidad de la metaheurística de la búsqueda Tabú	13
Modificación de la metaheurística de la búsqueda Tabú	13
Filtro de componentes conexas	13
Análisis de resultados	13
Análisis de todos los algoritmos exactos y heurísticas	13
Análisis comparativos de las heurísticas constructiva, de búsqueda local y tabú	14
Análisis comparativos de variaciones de parámetros en búsqueda tabú y tabú modificada	16
Conclusiones	19
Apéndice 1: Bibliografía	20
Instrucciones para utilizar benchmarks.cpp	20

Aclaraciones Generales

- La implementación de todos los algoritmos se realizó en lenguaje C++.
- Para calcular los tiempos de ejecución de los algoritmos se utilizó la función `gettimeofday()`, que se encuentra en la librería `< sys/time.h >`. Dado que dicha función funciona solamente en sistemas operativos de tipo linux, se debe compilar con el flag `-DTIEMPOS` en este tipo de sistemas para poder hacer uso de las mismas.
- Para la realización de los gráficos se utilizó Qtiplot

Introducción

En el presente trabajo se buscó realizar diferentes aproximaciones a la resolución del problema MAX-SAT. El problema MAX-SAT es un problema de optimización proveniente del problema de decisión SAT.

El problema SAT se basa en decidir si un conjunto de cláusulas en forma normal conjuntiva, tiene alguna asignación de las variables que las componen, tal que la evaluación de todas las cláusulas sea verdadera con dicha asignación.

El problema SAT es un problema muy importante dentro del campo de la teoría de la complejidad, esto se debe a que SAT fue el primer problema que se identificó como NP-Completo. El Teorema de Cook demuestra que el algoritmo SAT pertenece a esta clase de algoritmos.

La importancia de este algoritmo no radica solamente en haber sido el primero en ser caracterizado como NP-Completo, se demostró que el problema SAT puede ser reducido al problema 3-SAT, que es básicamente el mismo problema pero en el cual todas las cláusulas tienen un máximo de 3 literales. Además de probar la reducción, se demostró que este problema también pertenece a la clase NP-Completo (A diferencia del problema 2-SAT, para el cual se conoce un algoritmo polinomial para resolverlo). Esta reducción del problema a 3-SAT es un resultado importante ya que luego para probar que otros problemas se encuentran también en esta clase se utilizaron reducciones a 3-SAT mostrando la equivalencia en cuanto a la complejidad de resolución.

Situaciones de la vida real que se pueden modelar utilizando MAX-SAT

Algoritmo exacto para MAX-SAT

Como su nombre lo indica, el algoritmo exacto para Max-Sat se encarga de resolver el problema exactamente, arrojando la asignación que valida la mayor cantidad de cláusulas posibles. Dado que no se conoce ningún algoritmo polinomial para resolver este problema, se implementaron 2 algoritmos de complejidad exponencial. Por un lado se implementó un algoritmo de fuerza bruta de simple implementación pero de muy baja eficiencia, en cuanto a tiempo de ejecución. Por otro lado se implementó un algoritmo exacto mediante backtracking para poder evitar visitar todas las asignaciones de las variables posibles.

Algoritmo de fuerza bruta

En este algoritmo la idea es muy simple, se generan absolutamente todas las asignaciones posibles que existen, siendo estas 2^v donde v es la cantidad de variables. Luego, por cada una de las asignaciones se verifica cuantas cláusulas valida, en el momento que una asignación supera el máximo de cláusulas hasta el momento, se actualiza la cantidad de cláusulas validadas, así como cual es la asignación que generó este máximo.

La idea de este algoritmo es tener una resolución muy simple del problema, es claro que el tiempo de ejecución va a ser muy malo ya que se revisan todas y cada una de las asignaciones posibles, y estas crecen en orden exponencial en

función de la cantidad de variables. Sin embargo, cabe destacar que el algoritmo provee una resolución exacta del problema y con baja probabilidad de errores dada la simpleza del mismo.

A continuación se presenta el pseudocódigo del mismo:

```

maxSatExacto(Vector clausulas, int variables)
vector asignacion
int max := 0
inicializar asignacion todos en falso
Para i = 1 hasta 2^variables
    int sat := 0
    Para j = 1 hasta tamano(clausulas)
        Si haceTrue(asignacion, clausulas[j])
            sat:= sat + 1
    fin si
fin para
si sat > max
    actualizar max
    actualizar asignacionMax
fin si
asignacion := siguiente(asignacion,i+1)
fin para
devolver asignacionMax, max

```

Lo que muestra el pseudocódigo anterior es como, por cada asignación posible, se mira cada clausula y si la función *haceTrue* devuelve true, entonces se suma 1 a la cantidad de satisfechas por esa asignación. Por último, se mira cual asignación es la que tiene más clausulas satisfechas.

La función *haceTrue* lo que hace es simplemente mirar toda la clausula pasada como parámetro y ver si algun literal esta asignado como verdadera, cuando encuentra uno deja de buscar y devuelve True. En caso contrario, si llega hasta el final de la clausula, devuelve False.

Por otro lado, la función *siguiente* se encarga de modificar para la asignación para probar con todas las posibles.

Algoritmo de backtracking

Luego de implementar un algoritmo exacto por fuerza bruta, se buscó implementar un algoritmo también exacto pero tratando de lograr un menor tiempo de ejecución. El algoritmo implementado es un algoritmo exacto basado en la técnica de backtracking para lograr mejores resultados (en cuanto a tiempo de ejecución), si bien en la siguiente sección se verá que la complejidad temporal es la misma para ambos algoritmos exactos, la técnica de backtracking provee de herramientas para no tener que consultar necesariamente por cada una de las asignaciones posibles, es en estas podas que este algoritmo mejora los tiempos de ejecución del anterior.

La idea de este algoritmo es la siguiente: se genera un arbol de asignaciones, donde cada nivel del arbol *i*, representa todas las asignaciones posibles desde la variable 1 hasta la variable *i*. Este arbol, es un arbol binario dado que se arranca

de la asignación nula y de allí se abren dos caminos, asignarle False a la variable 1, o asignarle True. Luego, cada rama se va bifurcando sucesivamente por cada variable nueva. Como se puede ver, en el peor caso que tengamos que recorrer todo el árbol la cantidad de asignaciones nuevamente está dada por 2^v al igual que en el algoritmo exacto.

Una vez que se tiene el árbol de backtracking lo que se hace es comenzar a recorrer el árbol en alguna dirección determinada. Cabe destacar que en el algoritmo implementado siempre se recorre primero la rama correspondiente a asignar falso a la variable y luego la otra.

La mejora del algoritmo radica en no recorrer todas las ramas posibles, esto se realiza de la siguiente manera: Al haber recorrido la primera rama del árbol llegando hasta una hoja, ya se tiene una mejor solución posible. Luego, cuando se está explorando una rama lo que se hace es fijarse si esa rama ya posee más cláusulas insatisfechas que la mejor solución hasta el momento. En caso afirmativo, la rama ya no sirve ya que no se podrá mejorar la solución y entonces se puede descartar todo el subárbol que pende de esa rama. Entonces se realiza el backtracking para ir por otro camino posible.

Las principales diferencias con el algoritmo de fuerza bruta son:

- La implementación es bastante más complicada ya que como se realiza backtracking, se debe guardar los estados intermedios de toda la rama que se está analizando para poder volver hacia atrás y tomar un nuevo camino. En el algoritmo exacto, cada asignación se contrasta con las cláusulas originales por lo que solo se deben guardar una vez todas las cláusulas.
- El tiempo de ejecución debería ser en la mayoría de los casos. Si bien el peor caso no cambiaría es importante destacar que las podas realizadas pueden traer grandes beneficios en cuanto al tiempo de ejecución. Si, por ejemplo, ya se tuviese una solución donde n cláusulas son insatisfechas y al asignar True a la variable 1, $n+1$ cláusulas se vuelven insatisfacibles entonces se podría podar toda una mitad del árbol.
- El algoritmo de fuerza bruta no puede ser influenciado por alguna heurística, mientras que el algoritmo con backtracking sí. Lo que se quiere notar con esto, es que por más que ya se tenga una solución con n cláusulas insatisfechas, el algoritmo por fuerza bruta tiene que probar todas las asignaciones posibles; mientras que el algoritmo de backtracking ya puede comenzar podando ramas que tengan más de n cláusulas insatisfechas.

A continuación se presenta el pseudocódigo del algoritmo exacto con backtracking:

pseudo de backtracking

Complejidad de algoritmos exactos

En primer lugar, se analizará la complejidad del algoritmo realizado por fuerza bruta.

El mismo presenta un ciclo que se realiza 2^v veces, dado que esa es la cantidad total de asignaciones diferentes, siendo v la cantidad de variables. Una vez dentro de este ciclo, encontramos otro ciclo que itera sobre la totalidad de las cláusulas, haciendo que este ciclo se realice c veces.

Luego, dentro de este ciclo se llama a la función `hacerTrue`. Esta función lo que hace es fijarse en todos los literales de la cláusula si se encuentra asignado como verdadero. Dado que el hecho de fijarse es $O(1)$, ya que es mirar un array, y dado que la cláusula como mucho tiene 2^v literales (todas las variables negadas y sin negar), se puede ver que esta función es $O(v)$.

Por último, las otras operaciones que se realizan dentro del ciclo principal tienen menor complejidad que lo mostrado anteriormente ya que son asignaciones que toman $O(1)$ o es la función siguiente que toma $O(v)$.

Por lo mostrado anteriormente resulta que la complejidad temporal del algoritmo es $O((2^v) * c * v)$. Como se puede ver, lo importante más allá de la complejidad exacta, es que este algoritmo es exponencial en función de la cantidad de variables. Cabe destacar que si bien se podrían encontrar algoritmos con mejor complejidad, esta no podría ser menor que exponencial en el caso que se quieran revisar todas las asignaciones posibles.

Complejidad del algoritmo exacto con backtracking:

Para realizar el cálculo de complejidad de este algoritmo tomaremos el peor caso posible. El mismo consiste en que ninguna rama sea podada y por lo tanto se tengan que revisar todos los nodos posibles del árbol. En este caso el ciclo principal que itera sobre todas las asignaciones posibles sería $O(2^v)$, ya que este es el orden de la cantidad de nodos del árbol.

Luego, hay que analizar cuáles son las operaciones que se realizan cada vez que el algoritmo se encuentra en un nuevo nodo. En primer lugar, se llama a la función `resolver`, la misma tiene un funcionamiento análogo al explicado en el algoritmo por fuerza bruta; se fija en cada cláusula si la misma se hizo verdadera, y cuenta las insatisfacibles, por lo que esta función toma $O(c * v)$ operaciones. Luego, lo que se hace es copiar todo el estado al siguiente nodo para que se pueda procesar, al realizar esto se copian varios parámetros. Sin embargo, el orden temporal de esta copia está dado por el orden que toma copiar todas las cláusulas, dado que los demás parámetros que se copian tienen menor orden espacial ya que son solamente vectores.

Se puede ver que copiar todo el estado toma $O(c * v)$ operaciones ya que lo que se hace es copiar absolutamente todas las cláusulas, donde cada una pueda tener hasta 2^v literales por lo justificado anteriormente.

Por último, resumiendo lo anteriormente explicado se puede ver que cuando se revisa un nodo se toma $O(c * v)$ operaciones, y en el peor caso hay que revisar $O(2^v)$ nodos; por lo que la complejidad total de este algoritmo es $O((2^v) * c * v)$.

Como se puede ver, la complejidad del algoritmo de backtracking no es mejor que el algoritmo exacto por fuerza bruta, sigue siendo exponencial. De hecho, se puede notar que en el peor caso posible, el algoritmo de backtracking es más lento que el algoritmo por fuerza bruta dado el overhead que produce copiar todo el estado al siguiente nodo del árbol para que se pueda procesar.

Sin embargo, en la mayoría de los casos, el algoritmo con backtracking presenta resultados temporalmente mejores que el algoritmo de fuerza bruta ya que se podan varias ramas haciendo que no se tenga que visitar todas las asignaciones posibles.

Cabe destacar que la ventaja temporal que gana el algoritmo de backtracking, genera una mayor complejidad espacial ya que en todo momento se debe tener todos los estados de los nodos de la rama que se está visitando para poder

caminar hacia atrás. Luego la complejidad espacial del algoritmo de fuerza bruta es $O(c*v)$ ya que se guardan una vez todas las clausulas, mientras que la complejidad espacial del algoritmo de backtracking es $O(c*v*v)$ ya que se guardan todas las clausulas una vez por cada nodo de la rama que se esta analizando, que a lo sumo tiene v nodos.

Heurística constructiva para MAX-SAT

En esta sección se explicará el uso de una heurística constructiva para resolver el problema.

La motivación principal de utilizar diferentes heurísticas para resolver el problema de Max-Sat es que, como se vio en la sección anterior, los algoritmos exactos conocidos son de orden exponencial por lo que solo se pueden correr con instancias relativamente pequeñas.

La idea entonces es realizar un algoritmo que no sea exacto, sino que arroje una solución aproximada, pero en un tiempo polinomial para poder correr instancias más grandes.

En esta primer aproximación, se realizó una heurística constructiva, esto quiere decir que se va construyendo una solución mediante algún criterio que se supone (y luego se verá que se puede demostrar) que es adecuado para obtener un buen resultado.

En este caso, la heurística constructiva seguirá una estrategia golosa para ir armando la solución. Lo que hace esta heurística es revisar todas las clausulas buscando cual es el literal que más se repite. Una vez encontrado dicho literal lo que se hace es asignar True a este literal y actualizar las clausulas en base a esta asignación.

Actualizar las clausulas consiste en dos tareas, en primer lugar se borran todas las clausulas que contenian este literal ya que ya fueron satisfechas mediante la asignación y se actualiza el contador de clausulas satisfechas. Por otro lado, en las clausulas restantes, se borra el literal negado ya que este no sirve para futuras elecciones porque al asignar True al literal elegido, el literal negado tendra necesariamente valor falso.

Luego de realizar esta actualización, se continua iterativamente con esta estrategia golosa hasta encontrar una asignación completa de las variables.

A continuación se muestra el pseudocódigo de la heurística constructiva:

```
Constructiva(Vector clausulas, int V)
Max := 0
Comenzar con asignacion vacia
mientras asignacion no este completa
    Tomar literal l que mas se repita
    Asignar True a l
    Para i de 1 hasta tamaño(clausulas)
        Si esta(l, clausula[i])
            borrar clausula[i]
            Max := Max + 1
    fin si
fin para
Para i de 1 hasta tamaño(clausulas)
```

```

        Si esta(-1, clausula[i])
            borrar(-1, clausula[i])
        fin si
    fin para
fin mientras
devolver asignacion y Max

```

Aproximación del resultado

Es importante destacar que a priori esta heurística podría arrojar resultados que no se acercasen al verdadero valor del problema. La heurística parece razonable ya que siempre se elige el literal que más cláusulas satisface, y luego se va iterando hasta que no queden más variables para asignar. Es importante destacar que si bien la heurística parece razonable se puede encontrar rápidamente casos en los cuales esta aproximación golosa no nos devuelva el resultado exacto. Dada estas observaciones, se buscó encontrar algún tipo de cota para el resultado entregado por la heurística, en función del verdadero resultado.

Dada esta heurística golosa, se puede ver que en realidad se trata de un algoritmo aproximado. Si se denota c_{max} como la cantidad máxima de cláusulas satisfactibles, c_h al resultado entregado por la heurística y m al mínimo número de literales contenido en cualquiera de las cláusulas, se cumple que¹:

$$c_h \geq \frac{m}{m+1} * c_{max} \quad (1)$$

Dada la ecuación anterior, se tiene una cota para el resultado que depende del mínimo número de literales en cualquier cláusula. Cabe destacar que en la implementación de esta heurística, y en los casos de prueba utilizados, no se hace ninguna mención particular a la cantidad mínima de literales de las cláusulas. En este caso, podemos acotar por el peor caso que sería tener cláusulas de un solo literal.

En dicho caso, la heurística utilizada sería un algoritmo $\frac{1}{2}$ -aproximado, es decir que el resultado arrojado jamás se encontrara por debajo de la mitad del valor real del problema. En el caso del que el mínimo número de cláusulas suba (lo que suele pasar en la práctica), la cota también se ajustará dando una mejor aproximación.

Complejidad de la heurística constructiva

La heurística elige de manera golosa el literal que más cláusulas satisface y lo hace verdadero. Esto se repite hasta que la asignación de las variables esté completa.

Para elegir el literal que más cláusulas satisface se mantiene, por cada literal, un conjunto con las cláusulas que haría verdaderas y que todavía no están satisfechas.

Al realizar cada elección se debe actualizar la estructura, eliminando cada una de las cláusulas satisfechas de los conjuntos en los que aparezcan. Como se tiene un conjunto por cada literal, se van a borrar las cláusulas satisfechas de v conjuntos, donde v es la cantidad de variables del problema. En el algoritmo se van a satisfacer a lo sumo c cláusulas. Por lo tanto a cada cláusula satisfecha se la

¹Cita Bibliográfica 1

va a borrar de v conjuntos, teniendo el borrado una complejidad en $O(\log(c))$, donde c es la cantidad de cláusulas del problema. Por lo tanto, mantener la estructura va a tener una complejidad en $O(c \times v \times \log(c))$.

El conjunto utilizado para guardar las cláusulas que haría verdaderas un literal está implementado en una estructura de árbol que garantiza inserción y borrado en $O(\log(e))$, donde e es la cantidad de elementos del conjunto.

Como se tiene que recorrer todas las variables en cada asignación para mantener la estructura, se puede llevar un registro de cuál es el literal que más cláusulas, entre las aún insatisfechas, haría verdaderas.

Luego, por todo lo explicado anteriormente, la complejidad temporal de la heurística constructiva es $O(c \times v \times \text{timeslog}(c))$.

Heurística de búsqueda local para MAX-SAT

La segunda heurística implementada fue la de búsqueda local. Como su nombre lo indica, lo que hace esta heurística es pararse sobre una solución y buscar localmente si se puede mover a otra solución *cercana* con más cláusulas satisfechas. Dada la explicación anterior, se desprende que entonces se debe definir que significa que dos soluciones cercanas. Teniendo una asignación posible, se define una vecindad de asignaciones mediante algún criterio que serán las asignaciones *cercanas* mencionadas anteriormente.

La idea principal de la heurística es empezar con alguna asignación posible y luego buscar en la vecindad de esta solución si existe alguna asignación que satisfaga mayor cantidad de variables, si existe esta nueva asignación, entonces se cambia la asignación máxima actual por esta nueva y se vuelve a realizar una búsqueda local, ahora con la vecindad de la nueva asignación.

Esta heurística finaliza cuando tenemos una asignación que es la mejor de todas entre ella y las asignaciones de su vecindad. Es decir, cuando se encuentra un mínimo local, la heurística para y devuelve la mejor asignación encontrada hasta el momento.

Es importante destacar que la heurística de búsqueda local necesita de una asignación inicial para comenzar a definir su vecindad y luego realizar la búsqueda. Como una primera aproximación se podría inicializar la heurística con cualquier asignación, por ejemplo todas las variables en falso, el problema es que para caso de prueba diferente el espacio de asignaciones tiene una forma diferente. Esto puede llevar a que si inicializamos en cualquier asignación, se encuentre rápidamente un máximo local que poco tenga que ver con la solución real del problema.

La solución que se utilizó para el problema explicado anteriormente es que la heurística de búsqueda local sea inicializada con el resultado proveniente de aplicar la heurística constructiva.

Es importante notar que la heurística de búsqueda local no tiene permitido moverse a una asignación que satisfaga una menor cantidad de cláusulas, por lo que se puede ver que el resultado arrojado por la búsqueda local es mejor o igual que el resultado de la heurística constructiva en el caso de que se inicialice el procedimiento con el resultado de la heurística constructiva.

De esta manera, reemplazando en la ecuación (1) (denotado c_{local} al resultado de la búsqueda local):

$$c_{local} \geq c_{constr} \geq \frac{m}{m+1} * c_{max} \quad (2)$$

Luego, dada la ecuación anterior y con una explicación análoga a la propuesta en la heurística constructiva, se puede ver que esta heurística (inicializada de esta manera) también se trata de un algoritmo $\frac{1}{2}$ -aproximado y, de la misma manera, a medida que el m va subiendo, la cota va mejorando.

Detalles de implementación

En primer lugar, es importante destacar como se definió la vecindad de una asignación, para tener bien definido a donde se va a realizar la búsqueda local dada una asignación. Se determinó que la vecindad de una asignación está dada por todas las asignaciones que solo distan en una variable. Es decir, las asignaciones que tienen todas las variables asignadas igual excepto por una.

Luego, se decidió crear una estructura que dada cada variable, se tiene listado en que cláusulas aparece y si el literal que aparece es la variable o su negación. Sumado a esto, se tiene listado por cada cláusula que literales tienen. Por otro lado, se tiene un vector de valores de verdad que indican los estados de las variables y un vector de enteros que indica por cada cláusula cuantos literales hacen verdadera la cláusula.

Dada esta estructura, se procede hacer la búsqueda local hasta caer en una solución inmejorable, respecto de la vecindad definida anteriormente. Es decir, se toma la asignación actual y se va modificando de a una variable y se actualizan las estructuras adecuadamente para ver si esta nueva configuración es mejor que la actual.

El pseudocódigo de la heurística de búsqueda local es:

```

BusquedaLocal(Vector clausulas, int V)
Max := HeuristicaConstructiva(clausulas, v)
asignacionMax := HeuristicaConstructiva(clausulas, v)
mientras cambie la asignacion
    asignacionMaxTemp := asignacionMax
    para toda asignacion_i en la vecindad de asignacionMax
        si asignacion_i satisface mas que asignacionMax
            asignacionMaxTemp := asignacion_i
        fin si
    fin para
    asignacionMax := asignacionMaxTemp
fin mientras
devolver asignacion y Max

```

Complejidad de la heurística de búsqueda local

El algoritmo consiste en elegir la variable que al cambiar su asignación más aumenta el número de cláusulas satisfechas. En caso de no existir ninguna variable que al cambiar su asignación aumente el número de cláusulas satisfechas, se termina, si no se vuelve a iterar.

Para identificar la variable a la que se le cambiará su asignación se mantiene por cada cláusula el número de literales que aparecen en la misma y que son

verdaderos con la asignación actual. Se denomina l_i al número de literales que aparecen en la cláusula i y que son verdaderos con la asignación actual. A su vez se mantiene para cada variable, una lista de las cláusulas en las que aparece un literal que la contenga y si el literal que la contiene es una negación.

Para saber cuál sería la variación de la cantidad de cláusulas satisfechas al cambiar el valor de una variable, se necesita saber cuántas cláusulas pasaron a ser verdaderas y cuántas ahora son falsas. Para eso, en cada cláusula en que aparece la variable se resta uno a l_i si la variable satisfacía un literal de la cláusula i , o se suma uno si ahora satisface un literal de la misma cláusula que era falso. Si l_i es cero antes del cambio y luego es distinto de cero, entonces antes era falsa la cláusula y el cambio la hizo verdadera, por el contrario, si l_i es distinto de cero antes del cambio y luego se hace cero, la cláusula i dejó de ser satisfecha luego del cambio. Llevando un registro de cuántas cláusulas cambiaron de estar satisfechas a insatisfechas y viceversa.

Por lo tanto, para obtener la variación del número de cláusulas satisfechas al cambiar una variable se realiza una cantidad de operaciones en $O(c)$, donde c es la cantidad de variables del problema. Como es necesario hacer esto para cada una de las variables, cada iteración tiene una complejidad en $O(v \times c)$.

La inicialización de la estructura se realiza en $O(v \times c)$ ya que es necesario recorrer todas las cláusulas, y en cada cláusulas la cantidad de literales está en $O(v)$. La inicialización consiste en, a medida que se recorren las cláusulas, por cada literal que aparece, agregar la cláusula que se está recorriendo a la lista de cláusulas en las que la variable contenida en el literal aparece. Si el literal es satisfecho por la asignación inicial, sumar uno a l_i , siendo i la cláusula que se está recorriendo.

La cantidad de iteraciones está acotada por la cantidad de cláusulas, ya que en cada iteración aumenta el número de cláusulas satisfechas. Por lo tanto el algoritmo tiene una complejidad en $O(v \times c^2)$.

Metaheurística de búsqueda tabú para MAX-SAT

La metaheurística de búsqueda tabú surge para mejorar la heurística de búsqueda local, ya que esta puede caer en máximos locales que estén muy lejos del máximo absoluto del problema.

Es por esto que la búsqueda tabú resulta de modificar la búsqueda local con la motivación de poder salir de asignaciones que resultan óptimas localmente; es decir, asignaciones que satisfacen una cantidad de cláusulas mayor o igual a las que satisface cualquier otra asignación en su vecindad.

La metaheurística de búsqueda tabú consiste básicamente en modificar el vecindario de cada asignación. Esto se realiza excluyendo asignaciones que fueron visitadas recientemente y relajando el criterio de parada de la búsqueda local, permitiendo que se continúe la búsqueda aún cuando la mejor asignación del vecindario no aumente la cantidad de cláusulas satisfechas.

Es importante destacar que la exclusión de las asignaciones visitadas más recientemente no es un detalle menor. Si no se hiciese esto se entraría en un ciclo entre el óptimo local y la mejor asignación de su vecindad, sin poder alejarnos de estas asignaciones, para buscar mejores soluciones.

Luego de lo explicado anteriormente, se denota que para poder separar las asignaciones visitadas recientemente se debe implementar algún tipo de memo-

ria. Una aproximación inicial sería guardar una lista de longitud acotada con las últimas asignaciones visitadas y excluir dichas asignaciones del vecindario que se considere. Se denominará lista Tabú a dicha lista.

En esta primera implementación presentada, ya se pueden encontrar varias sutilezas que resultan factores importantes para el desarrollo de la metaheurística. Por ejemplo, la longitud de la lista Tabú es acotada y la cota para la misma puede ser fija, pero también podría estar expresada en función de algún parámetro o incluso podría variar durante la ejecución. Algo similar ocurre con el criterio de parada; es común que esté expresado como una combinación de restricciones en la cantidad máxima de iteraciones y la cantidad de iteraciones desde la última asignación que mejoró la cantidad conocida de cláusulas satisfechas.

Si bien la primera aproximación indica que la lista Tabú sería una lista de asignaciones, es importante destacar que esta implementación resulta ineficiente, debido a que se debe recorrer toda la lista para saber si una asignación está o no. Esto resulta ineficiente además porque la comparación entre asignaciones es lenta, ya que es necesario comparar variable por variable para ver si se realmente coinciden.

Una alternativa que se encarga de resolver este último problema consiste en representar la vecindad de una asignación en término de movimientos que se puede realizar desde la asignación original a alguna otra de la vecindad. Si los movimientos que se consideran son reversibles, entonces se puede guardar en la lista Tabú los movimientos opuestos a los que se realizaron, evitando de esta manera entrar en el ciclo anteriormente mencionado. Se denominará movimientos Tabú a aquellos que se encuentra en esta nueva lista Tabú.

A partir de la modificación explicada anteriormente puede surgir un inconveniente. Podría ocurrir que un movimiento a una asignación que todavía no se visitó sea Tabú, y esta asignación podría incluso satisfacer más cláusulas que cualquier otra visitada con anterioridad. En casos como éste sería deseable ignorar la condición de Tabú del movimiento.

Es por lo explicado anteriormente que surge la función de aspiración. En este problema se decidió ignorar la condición de Tabú de un determinado movimiento aplicado a una asignación si la asignación resultante satisface más cláusulas que la mejor asignación visitada hasta el momento.

Implementación: Habiendo definido conceptualmente los componentes de la búsqueda Tabú, se pueden mencionar algunos detalles de la implementación.

En primer lugar, al igual que en la búsqueda local, la vecindad que se definió para cada asignación está compuesta por las asignaciones resultantes de cambiar el valor de exactamente una variable de la asignación original. Cada movimiento es el cambio de una variable, por lo tanto manteniendo un vector de enteros del tamaño de la cantidad de variables, se puede llevar un registro de cuál fue la última iteración en la se aplicó el movimiento i . De esta manera, se puede saber si un movimiento es Tabú con sólo ver si pasaron suficientes iteraciones desde la última iteración en la que fue usado, lo que resulta más eficiente que recorrer una lista con los movimientos.

(aca habria que ver de decir si es algo-aproximado)

Complejidad de la metaheurística de la búsqueda Tabú

ESCRIBIR ESTO BIEN!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Mismo que local, excepto que la cantidad de iteraciones máxima la pone uno, si no, es la cantidad de cláusulas por la cantidad de iteraciones entre maximos por c por v, que es la complejidad de la iteracion.

Modificación de la metaheurística de la búsqueda Tabú

Para finalizar con las heurísticas para resolver el problema de Max-Sat, se implemento una modificación a la metaheurística de búsqueda Tabú.

ESCRIBIR ESTO BIEN!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! Se generan asignaciones iniciales al azar, con probabilidad un medio para true en cada variable. Se ejecuta tabu con cada asignacion. Se devuelve el mejor resultado.

Filtro de componentes conexas

Análisis de resultados

Para analizar todos los algoritmos exactos y las heurísticas propuestas, se realizaron varios casos de prueba. Este análisis se encuentra dividido en 3 partes diferentes, cada una con un objetivo diferente, las mismas son:

- Análisis de todos los algoritmos exactos y heurísticas.
- Análisis comparativos de las heurísticas constructiva, de búsqueda local y de búsqueda tabú.
- Análisis comparativos de variaciones de parámetros en tabú y tabú modificada.

En todos los casos, los análisis se centraran en dos aspectos: Calidad de la solución encontrada y tiempo de ejecución requerido.

Para los diferentes análisis de resultados se utilizarón paquetes de prueba provenientes de *The Satisfiability Library*². Los mismos proveen de varios casos de prueba con diferentes números de clausulas y variables. Cabe destacar que en todos los paquetes utilizados todas las clausulas son satisfacibles por lo que el resultado exacto de Max-Sat es exactamente el número de clausulas presentes en el paquete.

Por otro lado, dado que estos paquetes presentan un formato diferente al formato requerido, se encuentra el archivo *benchmarks.cpp*. El mismo realiza la conversión del formato de los paquetes al formato requerido y corre todos los casos de prueba a la vez³

Análisis de todos los algoritmos exactos y heurísticas

En esta sección se presentará los resultados obtenidos al correr todos los algoritmos y heurísticas con los mismos casos de prueba.

²<http://people.cs.ubc.ca/~hoos/SATLIB/benchm.html>

³Para instrucciones sobre como utilizar el mismo ver apéndice 2

Esta sección no presenta demasiados resultados por dos motivos:

En primer lugar existe el problema de que para correr los casos de prueba con el algoritmo de fuerza bruta, se toma un tiempo considerable dado su naturaleza. Por otro lado, los casos presentados serán suficientes para mostrar las tendencias de los algoritmos exactos, mientras que un análisis más exhaustivo de las heurísticas se presentará en las secciones siguientes.

Para esta sección se utilizaron 5 casos de prueba de 20 variables y 91 cláusulas, todas satisfacibles. Dado que los diferentes algoritmos son varios, los resultados se presentan a modo de tabla.

Aca ponemos la tabla

Dada la tabla presentada anteriormente, se denotan varias observaciones:

1. Los resultados muestran como los algoritmos exactos devuelven 91 en todos los casos, funcionando correctamente; Mientras que las heurísticas no devuelven siempre los resultados exactos, como era de esperar.
2. Los tiempos de ejecución de los algoritmos exactos respecto de las heurísticas son considerablemente mayores: En el caso del algoritmo de fuerza bruta, se puede ver como el tiempo de ejecución es varios ordenes de magnitud más grande que los tiempos requeridos por las heurísticas.

En el caso del algoritmo con backtracking, se puede ver que el tiempo de ejecución es considerablemente peor que el tiempo de las heurísticas. Sin embargo, es bastante mejor que el tiempo del algoritmo de fuerza bruta.

Cabe destacar que, en estos casos, el tiempo de backtracking no es tan malo en comparación con las heurísticas. Se cree que esto se debe principalmente a que las 91 cláusulas son satisfacibles y el algoritmo de backtracking tiene peor rendimiento cuando la mayoría de las cláusulas no se satisfacen, ya que se le hace más complicado podar ramas.

3. Los casos presentados muestran como el filtro de componentes conexas no presenta una mejora en los tiempos de ejecución, si no que empeoran debido al tiempo que se pierde en las rutinas pertinentes a este filtro. Se cree que la razón para que suceda esto es que a medida que la cantidad de variables crece, cada vez es menos probable que las cláusulas no se relacionen entre sí, formando una sola componente conexa. Es por esto que para las secciones siguientes no se seguirán analizando las variantes con el filtro de componentes conexas.
4. Los casos presentados alcanzan para ver las diferencias, de eficiencia y temporales, que hay entre los algoritmos exactos y las heurísticas pero no son representativos para comparar las heurísticas entre sí. Esto se hará en las secciones siguientes.

Análisis comparativos de las heurísticas constructiva, de búsqueda local y tabú

En esta sección se realizará un análisis comparativo entre las diferentes heurísticas. Para hacer este análisis se utilizaron varios paquetes de prueba:

1. 1000 instancias con 50 variables y 218 cláusulas, todas satisfacibles.

2. 100 instancias con 75 variables y 235 clausulas, todas satisfacibles.
3. 1000 instancias con 100 variables y 430 clausulas, todas satisfacibles.
4. 100 instancias con 125 variables y 538 clausulas, todas satisfacibles.
5. 100 instancias con 150 variables y 645 clausulas, todas satisfacibles.
6. 100 instancias con 175 variables y 753 clausulas, todas satisfacibles.
7. 100 instancias con 200 variables y 860 clausulas, todas satisfacibles.
8. 100 instancias con 225 variables y 960 clausulas, todas satisfacibles.
9. 100 instancias con 250 variables y 1065 clausulas, todas satisfacibles.

Dado que la cantidad de pruebas corridas es muy grande como para presentar los resultados individuales de cada caso, se procedio a realizar el análisis de la siguiente manera: para cada una las heurísticas diferentes se considerará un *Número de eficiencia*, el mismo se realiza para cada uno de los paquetes por separado y se calcula mediante la cuenta

$$Eficiencia = \text{promediodeclausulas satisfechas} / \text{clausulas totales} \quad (3)$$

Es decir, se genera un número que indica porcentualmente cuantas clausulas en promedio satisfizo una heurística determinada para cada paquete.

En el siguiente gráfico se puede ver el desempeño de las heurísticas. El mismo presenta el número de eficiencia de la heurística en función de los paquetes de prueba.

Aca va el grafico 1.

Dado el gráfico presentado se pueden hacer varias observaciones:

- Las heurísticas muestran resultados esperados: En primer lugar, con la eficiencia más baja se encuentra la heurística constructiva (Se destaca que igualmente el comportamiento es muy bueno, superando el 97,5 porciento de clausulas satisfechas en promedio). En segundo lugar se encuentra la búsqueda local, lo cual es natural dado que la misma empieza desde la solución provista por la constructiva y luego la mejora. Por último, se puede ver que la metaheurística de búsqueda tabú es la más eficiente de la tres, dando un salto de calidad importante llegando casi al 99,5 porciento de clausulas satisfechas en promedio en todos los paquetes.
- Las 3 heurísticas poseen un comportamiento porcentual parecido en los 9 paquetes, mostrando que la eficiencia parece depender intrinsecamente de las elecciones hechas por las rutinas, y no por otros factores como la cantidad de variables o de clausulas.

A continuación se muestra el análisis de los tiempos de ejecución de cada una de las heurísticas para estos paquetes de casos de prueba.

Aca va el gráfico 2.

Como se puede ver en la figura 2, la heurística constructiva es la que menos tiempo de ejecución toma lo cual concuerda con lo esperado ya que las otras dos heurísticas comienzan con la solución de la constructiva. Luego, se encuentra la

heurística de búsqueda local y por último, con mayor tiempo de ejecución, se encuentra la búsqueda tabú.

Cabe destacar que la diferencia en los tiempos de ejecución entre la heurística constructiva y la búsqueda local no es muy grande, mientras que la diferencia con tabú si es bastante mayor. Esto indicaría que si bien la búsqueda local mejora los resultados de la heurística constructiva (como se ve en el gráfico 1), no toma mucho tiempo en hacerlo ya que rápidamente cae en un máximo local. Por otro lado, la búsqueda tabú si toma un tiempo mayor, porque aunque caiga en máximos locales, sigue buscando dada su naturaleza, es esta brecha en el tiempo de ejecución la que explica la clara diferencia en la eficiencia de tabú al realizar una búsqueda más exhaustiva.

La eficiencia superior que mostró la búsqueda tabú, motiva la siguiente sección de análisis realizada para hacer más hincapié en la eficiencia de esta metaheurística, así como la de su modificación implementada.

Análisis comparativos de variaciones de parámetros en búsqueda tabú y tabú modificada

En primer lugar, se destaca que el análisis de todos los casos siguientes se realizó de la misma manera que en la sección anterior; es decir, se utilizaron los mismos nueve paquetes de casos de prueba, y para resumir el desempeño se utilizó el mismo número de eficiencia presentado anteriormente.

Una vez realizadas dichas consideraciones, se procederá a realizar el análisis pertinente. Dicho análisis esta basado en las siguientes propiedades:

La metaheurística de búsqueda tabú posee tres parámetros que son modificables, los mismos son: Longitud de la lista tabú, Cantidad máxima de iteraciones y Cantidad máxima de iteraciones entre óptimos. Es por esto que lo se hará es analizar como varía la eficiencia y el tiempo de ejecución de la búsqueda tabú al modificar estos parámetros.

Por otro lado, la búsqueda tabú modificada presenta un parámetro más que es la cantidad de asignaciones con las que se trabaja, por lo que el último análisis presentado sera pertinente a la variación de este parámetro.

Longitud de la lista tabú

En primer lugar, se comenzará el análisis fijando los parámetros de cantidad de iteraciones, y se modificará la longitud de la lista tabú. La longitud de la lista tabú se varió entre $v/3$ y $v/9$, mientras que la cantidad máxima de iteraciones queda fija en $3*v$ y la cantidad máxima de iteraciones entre óptimos queda fija en $v/2$

A continuación, se puede ver el gráfico de la eficiencia en función de cada paquete.

Aca va el grafico 3.

Dado el gráfico de la figura 3, se puede ver como varía la eficiencia de la búsqueda tabú dependiendo de la longitud de la lista. La conclusión principal que se desprende de la visualización del gráfico es que las franjas centrales se encuentran por encima de las franjas laterales. Es decir, parecería ser que la metaheurística funciona de mejor manera cuando la longitud de la lista se

encuentra entre $v/5$, $v/6$ y $v/7$ y comienza a bajar su eficiencia a medida que la longitud se aleja de estos valores.

En el gráfico se denota que en los primeros paquetes $v/5$ parece ser la longitud más eficiente, mientras que en los últimos paquetes es $v/6$ la que aparece por encima de las demás. $v/7$ solo es la más eficiente en el 4to paquete, pero en todos los demás se encuentra cerca del máximo.

Es importante destacar que si bien se encuentran fluctuaciones y tendencias, todas las longitudes propuestas se encuentran en un margen muy chico, resultando todas muy eficientes.

Por último, se destaca que las tendencias vistas sobre la mejor longitud para la lista tabú se condice con los resultados encontrados en la bibliografía.⁴

A continuación, se presenta el gráfico de los tiempos de ejecución de la metaheurística al cambiar la longitud de la lista tabú.

Aca va el grafico 4.

Como se puede ver en el gráfico, no hay grandes fluctuaciones entre los tiempos de ejecución y se encuentra ninguna tendencia muy definida. (poner a que se debe esto, a que mirar si esta es $O(1)$ y no miras toda la lista tonces da igual?)

Cantidad máxima de iteraciones

En esta parte se analizará como varía la eficiencia y el tiempo de ejecución de la metaheurística, al cambiar el valor de la cantidad máxima de iteraciones permitidas. Por otro lado, la longitud de la lista tabú queda fija en $v/3$, mientras que la cantidad máxima de iteraciones entre óptimos queda fija en $v/2$.

A continuación, se presenta el gráfico de eficiencia en función de los paquetes de casos de prueba.

Aca va el grafico 5.

En el gráfico presentado anteriormente se pueden denotar dos cosas importantes:

- En primer lugar se puede ver que cuando el parámetro toma los valores $3*v$, $6*v$, $9*v$ y $12*v$ todas las eficiencias dan exactamente el mismo resultado. Esto se cree que se debe a que cuando el parámetro toma estos valores se hace obsoleto, ya que lo que debe estar sucediendo es que la cantidad máxima de iteraciones entre óptimos siempre poner una cota menor y nunca se llega a la cota que aquí esta variando.
- Por otro lado, se puede ver que cuando se baja mucho el parámetro ($v/4$), la metaheurística se degrada considerablemente ya que se impone una cota muy baja para la cantidad total de iteraciones.

Luego de ver como se comporta la búsqueda tabú al cambiar el parámetro del máximos de iteraciones, se presenta como se comporta la misma pero ahora en cuanto a tiempos de ejecución.

A continuación se puede ver el gráfico de tiempo de ejecución en función de los paquetes.

aca va el grafico 6.

⁴Citar el paper que habla de $v/6$

Lo que se puede ver en el gráfico anterior, es como los tiempos de ejecución se condice con los resultados de eficiencia obtenidos. Los valores correspondientes a $3*v$, $6*v$, $9*v$ y $12*v$ tardan todos el mismo tiempo, reforzando lo augurado anteriormente; es decir, que nunca se llega a esta cota si no que la cota de cantidad máxima de operaciones entre óptimos corta primero. Por otro lado, los valores correspondientes a $v/4$ son claramente menor a los demás mostrando el claro *tradeoff* natural, los tiempos de ejecución son mejores, pero al costo de tener menos eficiencia.

Cantidad máxima de iteraciones entre óptimos

En esta parte se verá como varía la eficiencia y los tiempos de ejecución cuando se modifica la cantidad máxima de iteraciones entre óptimos, mientras que la longitud de la lista tabú queda fija en $v/3$ y la cantidad máxima de iteraciones queda fija en $3*v$

A continuación se presenta el gráfico de eficiencia en función de los paquetes de casos de prueba:

aca va el grafico 7

Lo que se puede denotar en el gráfico anterior es una conclusión bastante natural. A medida que se va achicando la cota, y cada vez se permite menos iteraciones, la eficiencia va bajando ya que la rutina va teniendo menos iteraciones para encontrar los mejores valores. En el momento que la cota se sube considerablemente a $2*v$, la eficiencia crece.

A continuación se presenta el gráfico de los tiempos de ejecución para esta variación presentada.

aca va el grafico 8

En este gráfico se puede ver como los tiempos de ejecución se condice perfectamente con los resultados obtenidos en la eficiencia. A medida que la cota baja, también baja el tiempo de ejecución; y cuando la cota sube, el tiempo de ejecución también lo hace. Al igual que en la sección anterior, se puede como al variar este parámetro los tiempos de ejecución son peores si la eficiencia es mejor y viceversa.

Como conclusiones generales de la tres variaciones de parámetros hechas anteriormente se pueden destacar:

- La metaheurística tiende a comportarse de manera más eficiente cuando la longitud de la lista tabú se encuentra cerca de $v/5$ y $v/6$.
- En cuanto a los otros dos parámetros se puede ver que ambos parámetros terminan siendo una solución de compromiso. Es decir, si se relajan mucho y las cotas son muy altas la eficiencia aumenta pero también aumenta el tiempo de ejecución; mientras que si las cotas son bajas el tiempo de ejecución baja al costo de tener una menor eficiencia.

Análisis Tabú modificado

En el momento de análisis del comportamiento de la metaheurística de tabú modificada es importante notar que la misma posee 4 parámetros, los 3 primeros son los mismos que en tabú. El nuevo parámetro es la cantidad de asignaciones con la que se va a trabajar. Es por esto que para analizar este

tabú modificado se van a fijar los 3 parámetros que comparte con la búsqueda tabú original y se irá variando la cantidad de asignaciones.

En este análisis los parámetros serán fijados de la siguiente manera: La longitud de la lista tabú será $v/5$, la Cantidad máxima de iteraciones será v y la Cantidad máxima de iteraciones entre óptimos será $v/2$.

Por otro lado, la cantidad de asignaciones serán 1, 2, 5, 10 y 50. Es importante destacar que cuando la cantidad de asignaciones es 1, esta búsqueda es la misma que la tabú original. Esta será la manera para poder comparar el comportamiento de la búsqueda tabú modificada con la búsqueda tabú original.

A continuación se presenta el gráfico de eficiencia en función de los paquetes de casos de prueba:

Aca va el gráfico 9

Luego de presentar el anterior gráfico se puede concluir en que:

- La búsqueda tabú modificada presenta mejores resultados que la búsqueda tabú original.
- A medida que se aumentan la cantidad de asignaciones el desempeño mejora claramente (excepto en el primer paquete), llevando la eficiencia a niveles muy altos llegando a sobrepasar el 99,9 por ciento de cláusulas satisfechas.
- Si bien cuando las asignaciones suben la eficiencia también lo hace, se puede visualizar que a medida que las cláusulas y las variables totales crecen la eficiencia tiende a decrecer. Se cree que a medida que crece la cantidad de variables, la cantidad de asignaciones va quedando chica en relación a la cantidad total de asignaciones que existe que crece exponencialmente.
- Si bien lo mejor parece ser seguir incrementando la cantidad de asignaciones, es lógico creer que esto tendrá un impacto en el tiempo de ejecución que impondrá restricciones.

A continuación se presenta el gráfico de tiempos de ejecución al variar la cantidad de asignaciones:

Aca va el gráfico 10.

A partir del gráfico anterior se puede ver claramente como la conjetura realizada anteriormente parece plasmarse. Es decir, si bien subir la cantidad de asignaciones hace crecer la eficiencia de los resultados, también crece de manera abrupta el tiempo de ejecución requerido.

Es por esto que se puede concluir algo similar a lo concluido anteriormente con los parámetros de cantidad de iteraciones. Si bien variarlos puede traer mejores resultados, también tiene fuerte impacto en el tiempo de ejecución.

Cabe destacar como conclusión general de la búsqueda tabú modificada que esta generará resultados muy eficientes, muy cercanos a la solución exacta en la mayoría de los casos.

Conclusiones

Luego de realizar los análisis de resultados de todos los algoritmos y heurísticas implementadas se puede concluir varios puntos sobre este trabajo y también sobre mejoras que se podrían realizar en ampliaciones futuras de éste:

- La implementación de algoritmos exactos para este tipo de problemas no es viable ya que al ir creciendo el tamaño de las instancias de prueba, los tiempos de ejecución resultan inmanejables, siempre y cuando los mismos sean exponenciales. Aun así para trabajos futuros podría ser importante tratar de mejorar el algoritmo de backtracking, tomando como punto de partida las podas realizadas en este trabajo, pero generando otros criterios que ayuden a podar las ramas del árbol, para poder ahorrar tiempo de ejecución.
- Es importante poder generar otros tipos de filtros para todos los algoritmos y heurísticas propuestas. Sin embargo, en el caso del filtro de componentes conexas se pudo ver que este trabajo no fue fructífero, por lo que su implementación fue dejada en un segundo plano.
- Para trabajos futuros, se podría indagar más no solamente en las decisiones que las heurísticas toman sino también en las estructuras utilizadas para implementarlas, una mejora considerable en estas podría ser un punto importante a tener en cuenta.
- La metheurística de búsqueda tabú y posterior modificación presentaron resultados realmente eficientes, llegando a sobrepasar el 99,5 por ciento de cláusulas satisfechas en todos los casos. Es por esto que se cree que la principal conclusión de este trabajo es que en trabajos futuros, con mayor tiempo de desarrollo, se debería ahondar más en estas heurísticas, buscando nuevas modificaciones que resulten eficientes.

Apéndice 1: Bibliografía

- Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem

Apéndice 2: Instrucciones para utilizar benchmarks.cpp