$\boxed{\text{ES 1}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

a) Calcola il $rk(A)$

- Cerco un minore 3X3 con $\det \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot (+1+2) + 3 \cdot (-1+2) = -3+3 = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -9 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-9-1) + 1 \cdot (-18+3) - 1 \cdot (-2-3) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -9 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-18+3) + 3 \cdot (-2-3) = +15-15 = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot (+1+2) + 3 (-1+2) = 0$$

- Cerco un minore 2X2 con $\det \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -1+2 = 1$$

$$\boxed{rk(A) = 2}$$

$\boxed{\text{ES1}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

b) Stabilire se esiste una soluzione non nulla $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \perp$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ del sistema omogeneo $AX = 0$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -9 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0 \\ -X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = 4X_4 + X_3 \\ X_2 = 2X_3 + 3X_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 4X_4 + X_3 \\ 2X_3 + 3X_4 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 0\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4X_4 + X_3 \\ 2X_3 + 3X_4 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = 4X_4 + X_3 \to \begin{array}{r} 4X_4 + X_3 = 0 \\ X_3 = -4X_4 \end{array} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -5X_4 \\ -4X_4 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

$$(0\ 1\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5X_4 \\ -4X_4 \\ X_4 \end{pmatrix} = -5X_4 \to \begin{array}{r} -5X_4 = 0 \\ X_4 = 0 \end{array} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ES2}}$

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3\lambda \\ 1 & -1 & \lambda & -1 \\ 3 & -\lambda & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

a) Per quali λ la matrice ha rango 3.

- Cerco il det di un minore 3X3

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda \\ 3 & -\lambda & -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot (+1+2\lambda) + 3 \cdot (-\lambda+2) = -1-2\lambda-3\lambda+6 = \underline{-5\lambda+5}$$

- Quando $-5\lambda+5=0$ allora il det $=0$ e rango >3

$$-5\lambda+5=0$$
$$\lambda = 1$$

- Devo vedere se questo è vero per tutti i minori 3X3.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -9 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-9-1) + 1\,(-18+3) - 1 \cdot (-2-3) = 10 - 15 + 5 = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -1\,(+1+2) + 3 \cdot (-1+2) = -3+3 = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -9 \end{bmatrix} = -1\,(-18+3) + 3 \cdot (-2-3) = 15 - 15\ 0$$

$$\boxed{\text{Rango di } A = 3 \text{ se } \lambda \neq 1}$$

$\boxed{ES2}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3\lambda \\ 1 & -1 & \lambda & -1 \\ 3 & -\lambda & -1 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 3 \end{bmatrix}$

b) Per quali λ $AX = B$ non ammette soluzioni?

- Non ammette soluzioni se $rk(A|B) > rk(A)$, nei casi in cui $rk(A) = 3$ sono sicuro di avere soluzioni perché $rk(A|B) = 3$ e $rk(A) = 3$

- Riduco a gradini per trovare il rango di $A|B$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -9 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

- Il $rk(A|B) > rk(A)$ se $\lambda = 1$, e quindi per $\lambda = 1$ non ci sono sol

ES3

a) Se $A^2 \cdot B^2 = I$ allora A è invertibile

- quindi $B^2 = (A^2)^{-1}$ è sicuramente A^2 è invertibile ed il suo $\det \neq 0$ perché per Binet $\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A)$ ed è quindi ovvio che il $\det(A) \neq 0$ ed è quindi invertibile.

b) Se $A + B = 0$ allora almeno una tra A e B non è invertibile

- quindi $B = -A$ il $\det(-A)$ è $-\det(A)$ quindi o sono entrambe non invertibili perché formate da soli 0 oppure sono entrambe invertibili.

c) Se $AB = 0$ almeno una tra A e B non è invertibile.

- di 0 sappiamo che $\det = 0$.
- Quindi è vero perché per Binet $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ e se devono risultare 0 significa che almeno una dei due ha $\det = 0$ e non è invertibile.

ES4

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
Stabilire se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

a) v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$

- Per essere una base devono essere linearmente indipendenti.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Sono linearmente indipendenti se $rk(A) =$ n° colonne di A, quindi per quali λ i $\det \neq 0$?

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$
$$\underline{\lambda_1 = 0} \quad \underline{\lambda_2 = 1}$$

$\boxed{v_1, v_2 \text{ e } v_3 \text{ sono linearmente indipendenti se } \lambda \neq 0, \lambda \neq 1}$

ES 4

Dato $\lambda \in R$ e i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix} \in R^3$

Stabilire se esiste $\lambda \in R$ tale che:

b) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

- Per quello sopra se $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ allora linearmente dipendente

- $\lambda = 1$

$$X_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + X_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} X_2 = -X_3 \\ X_2 = -X_3 \\ X_1 = -X_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -X_3 \\ -X_3 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 0$

$$X_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + X_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + X_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 = 0 \\ X_2 = -2X_3 \\ X_1 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -2X_3 \\ X_3 \end{pmatrix}$$