DETERMINANTE di una matrice

$\boxed{n=1}$ $A=[a_{11}] \rightarrow \det A = a_{11}$

$\boxed{n=2}$ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \det A = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}$

$$\boxed{n=3}\ \underbrace{A=\begin{bmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \overset{-}{a_{23}} \\ \overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{32}} & \overset{+}{a_{33}} \end{bmatrix} \rightarrow \det A = +a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\ldots}_{\text{SVILUPPO di LAPLACE rispetto la PRIMA COLONNA}}$$

- $\det(I) = 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\ldots = 1$
- $\det\begin{bmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{bmatrix} = x^n$
- $\det\begin{bmatrix} x_{11} & & & \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} x_{ii} = x_{11}\cdot x_{22}\cdot x_{33}\ldots x_{nn}$

- DETERMINANTE di MATRICE TRIANGOLARE

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

TRIAN. SUPERIORE

ESEMPIO: trovare il determinante

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det A = 2\cdot\det\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\cdot4-3\cdot3 = -1$$

TEOREMA di BINET

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

- Se A è invertibile $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$$AA^{-1} = I_n$$

$$\det(AA^{-1}) = 1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(A) \neq 0 \quad \text{AND} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

- $\boxed{\text{Se } A \text{ ha } \det \neq 0 \text{ allora anche la sua ridotta ha } \det \neq 0.}$

- IN QUALI CASI $\det = 0$?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4 \cdot 0 \underbrace{- 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{=0} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

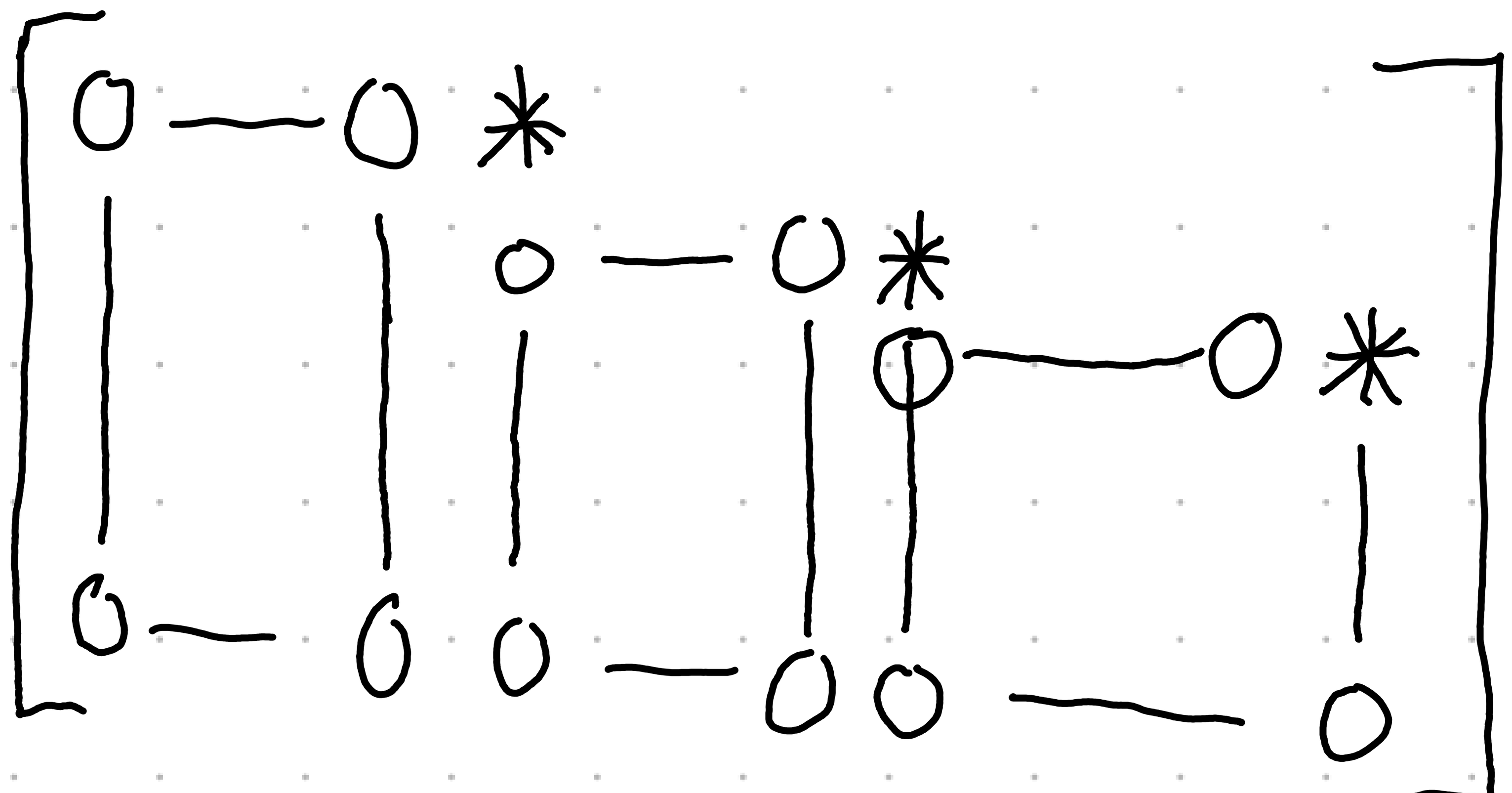
È NULLO IN QUESTI CASI:

- Una o più colonne nulle
- almeno due righe o colonne uguali
- almeno due righe o colonne sono proporzionali.

RANGO di una MATRICE

- Se $\det \neq 0$ il rango è l'ordine della matrice.
- Se $\det = 0$ il rango è l'ordine del minore più grande con $\det \neq 0$.
- Rango(A) viene solitamente scritto $rK(A)$.

RANGO DI UNA MATRICE A GRADINI

A = 

$p = \#$ pivot

$rK(A) \leq p$ e $rK(A) \geq p$

$\downarrow$

$\boxed{rK(A) = p}$

ESEMPIO:

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 2a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad rK \leq 2$$

- se $a \neq 0 \rightarrow rK(A) = p = 2$
- se $a = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

devo cercare un minore 2X2 con $\det \neq 0$.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

$\downarrow$

$$rK(A) = 2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO: Calcolare $rK(A)$ al variare di h

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2h & -2 \\ -3 & 2+2h & -1 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

- Cerco il determinante di A, perchè se $\det \neq 0$ allora $rK(A)=3$

$$\det(A) = h \cdot \det\begin{bmatrix} 2h & -2 \\ 2+2h & -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det\begin{bmatrix} -3 & 2h \\ -3 & 2+2h \end{bmatrix} = h \cdot (-2h+4+4h) + (-6-6h+6h)$$
$$= -2h^2+4h+4h^2-6$$
$$= \underbrace{2h^2+4h-6}$$

$$h^2+2h-3=0$$
$$(h-1)(h+3)=0$$
$$h=1 \quad h=-3$$

LO PONGO $=0$ PER TROVARE LE h IN CUI IL DET. È 0.

- $\boxed{\text{Quindi } \det \neq 0 \text{ e rango} = 3 \text{ solo se } h \neq 1 \text{ e } h \neq -3.}$

- Ora devo capire cosa succede al rango se $h=1$ e $h=3$
  - Visto che so già che in $h=1$ $\det = 0$, allora cerco subito un minore 2X2 e ne testo il det.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{cerco } 2\times2} \det\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4-0 = 4 \neq 0$$

$\boxed{\text{quindi se } h=1 \text{ allora } rK=2}$

  - Visto che so già che in $h=-3$ $\det = 0$, allora cerco subito un minore 2X2 e ne testo il det.

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & -2 \\ -3 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{cerco } 2\times2} \det\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4-0 = -4 \neq 0$$

$\boxed{\text{quindi se } h=-3 \text{ allora } rK=2}$