# ES1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare $rK(A)$

- Matrice non $n \times n$, quindi cerco minore $3 \times 3$ e testo se il suo $\det \neq 0$.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix} = -4 - 8 = -12 \neq \text{ quindi } rK(A) = 3$$

b) determinare una soluzione di lunghezza $\sqrt{6}$ del sistema omogeneo $AX=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} -2X_1 - 1X_2 + 1X_4 = 0 \\ 1X_2 - 2X_3 - 1X_4 = 0 \\ -6X_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = -X_3 \\ X_2 = 2X_3 + X_4 \\ X_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -X_3 \\ 2X_3 \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Per trovare la lunghezza del vettore $\begin{pmatrix} -X_3 \\ 2X_3 \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ uso la formula $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots X_n^2} = |v|$

$$\sqrt{(-X_3)^2 + (2X_3)^2 + (X_3)^2} = \sqrt{6}$$

$$(-X_3)^2 + (2X_3)^2 + (X_3)^2 = 6$$

$$X_3^2 + 4X_3^2 + X_3^2 = 6$$

$$2X_3^2 + 4x^2 = 6$$

$$6X_3^2 = 6 \longrightarrow X_3 = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

# ES 2

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## a) Dire per quali $\lambda$ la matrice $A$ è invertibile.

- La matrice è invertibile se $\det \neq \emptyset$

$$\det(A) = 1 \cdot (0+1) + 1 \cdot (0-(\lambda-\lambda^2)) = 1 - \lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - \lambda + 1$$

- Cerco i $\lambda$ dove $\det = \emptyset$ e quindi non è invertibile

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$\lambda \notin \mathbb{R} \rightarrow$ la matrice è invertibile per qualsiasi $\lambda$

## b) Esistono valori di $\lambda$ per i quali $AX = B$ non ammette soluzioni?

Devo usare il teorema di rouche-capelli

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{1}{1-\lambda} R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2-\lambda+1}{1-\lambda} & \frac{\lambda}{1-\lambda} \end{array}\right]$$

Sicuramente non ammette soluzioni per $\frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{1-\lambda} = \emptyset$

## c) $\lambda$ per il quale la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$ sia 3.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{(-\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (-1)^2} = 3$$

$$\sqrt{2\lambda^2 + 1} = 3$$

$$2\lambda^2 + 1 = 3^2$$

$$2x^2 = 8 \qquad x = \pm 2$$

$\boxed{\text{ES3}}$