ES4

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Controllo se A è diagonalizzabile.

$A = A^T$, quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 1-\lambda\,(\lambda^2+\lambda-6)$$

$$1-\lambda\,(\lambda^2+\lambda-6)$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -3 \quad \lambda_3 = 2$

- Autospazio di $\lambda = 1$

$$A - 1\lambda = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} -3v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Autospazio di $\lambda = -3$

$$A + 3\lambda = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} v_1 - 2v_2 = 0 \\ -2v_1 + 4v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ 4v_2 = 2v_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = v_1 \\ v_2 = \frac{v_1}{2} \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1/2 \\ \emptyset \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

• Autospazio di $\lambda=2$

$$A-2\lambda=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2-\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c}-4 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right] \quad \begin{cases}-4v_1=2v_2\\ 0=0\\ v_3=0\end{cases} \quad \begin{cases}v_1=-\frac{v_2}{2}\\ 0=0\\ v_3=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{v_2}{2}\\ v_2\\ 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

• Diagonalizzazione

$A=X\cdot\Lambda\cdot X^{-1}$ dove Λ è la matrice avente gli autovalori λ precedentemente calcolati sulla diagonale principale.

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{X}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}}_{\Lambda}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{X^{-1}}$$

$$\boxed{\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \qquad X=\begin{bmatrix}0 & 2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

Il primo deve essere > più grande del secondo e devono essere linearmente indipendenti.