

ES1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare $\text{rk}(A)$

- Matrice non $n \times n$, quindi cerco minore 3×3 e testo se il suo $\det \neq 0$.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix} = -4 - 8 = -12 \neq 0 \text{ quindi } \text{rk}(A) = 3$$

b) determinare una soluzione di lunghezza $\sqrt{6}$ del sistema omogeneo $AX=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Per trovare la lunghezza del vettore $\begin{pmatrix} -x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ uso la formula $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = |v|$

$$\sqrt{(-x_3)^2 + (2x_3)^2 + (x_3)^2} = \sqrt{6}$$

$$(-x_3)^2 + (2x_3)^2 + (x_3)^2 = 6$$

$$x_3^2 + 4x_3^2 + x_3^2 = 6$$

$$6x_3^2 = 6$$

$$6x_3^2 = 6 \rightarrow x_3 = \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

ES 2

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Dire per quali λ la matrice A è invertibile.

• La matrice è invertibile se $\det \neq 0$

$$\det(A) = 1 \cdot (0+1) + 1 \cdot (0 - (\lambda - \lambda^2)) = 1 - \lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - \lambda + 1$$

• Cerco i λ dove $\det = 0$ e quindi non è invertibile

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$\lambda \notin \mathbb{R} \rightarrow$ la matrice è invertibile per qualsiasi λ

b) Esistono valori di λ per i quali $AX=B$ non ammette soluzioni?

Devo usare il teorema di Rouché-Capelli

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{1-\lambda} R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{1-\lambda} & \frac{\lambda}{1-\lambda} \end{array} \right]$$

Sicuramente non ammette soluzioni per $\frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{1-\lambda} = 0$

c) λ per il quale la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$ sia 3.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{(-\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (-1)^2} = 3$$

$$\sqrt{2\lambda^2 + 1} = 3$$

$$2\lambda^2 + 1 = 3^2$$

$$2\lambda^2 = 8 \quad \lambda = \pm 2$$

ES3

.