ES2

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ nella forma } \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con rotazioni di Givens}$$

- Azzero il quarto elemento

$$G_1 = G_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & & -s \\ & & 1 & \\ & s & & c \end{bmatrix} \qquad c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = \frac{0}{\sqrt{4}} = 0$$

$$s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

$$G_1 x = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & & -s \\ & & 1 & \\ & s & & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ora azzero il primo elemento

$$G_2 = G_{(2,1)} = \begin{bmatrix} c & s & & \\ -s & c & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}}$$

$$s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$$

$$G_2 G_1 x = \begin{bmatrix} c & s & & \\ -s & c & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{8} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ES 3

$$g(x) = \alpha x + \beta$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-9	-3	-1	2	5	8

- Base per V_n

$$\{1, x\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ -9 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 84 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 84 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7\alpha = -7 & \alpha = -1 \\ 28\beta = 84 & \beta = 3 \end{cases}$$

ES4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Controllo se è diagonalizzabile**

$A \neq A^T$, quindi per il teorema spettrale potrebbe essere non diagonalizzabile.

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 1-\lambda \cdot (2\lambda+\lambda^2) = 2\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3$$
$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2+\lambda-2\lambda)$$

$$-\lambda(\lambda^2+\lambda-2) = 0$$
$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -2$$

Dal polinomio caratteristico emergono 3 autovali distinti la cui cardinalita è pari all'ordine della matrice, questa è condizione sufficente per affermare che la matrice è diagonalizzabile

$\rightarrow$

- **Autospazio di $\lambda = 1$**

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Autospazio di $\lambda = -2$**

$$A + 2\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} 3v_1 = -v_2 \\ 0 = 0 \\ 2v_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} v_1 = -\frac{v_2}{3} \\ 0 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} -\frac{v_2}{3} \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Autospazio di $\lambda = 0$**

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{cases} v_1 = -v_3 \\ v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Diagonalizzazione**

$A = X \cdot \Lambda \cdot X^{-1}$ dove Λ è la matrice avente gli autovalori λ precedentemente calcolati sulla diagonale principale.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X^{-1}}$$