$\boxed{\text{ES 1}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare $rK(A)$

- Cerco minore 3×3 con. $\det \neq \emptyset$ $\quad + - +$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot (9-7) + 1(0-2) = 2-2 = \emptyset$$

quindi $rK(A) = ?$

$\boxed{\text{ES 1}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

b) determina, se esiste una soluzione $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$ perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 3X_4 = 0 \\ 3X_2 + X_3 - 5X_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = X_2 - 3X_4 \\ X_2 = \dfrac{-X_3 + 5X_4}{2} \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} \frac{-X_3+5X_4}{2} - 3X_4 \\ \frac{-X_3+5X_4}{2} \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

- Se $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ allora sono perpendicolari

$$\begin{pmatrix} \frac{-X_3+5X_4}{2} - 3X_4 \\ \frac{-X_3+5X_4}{2} \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-X_3+5X_4}{2} - 3X_4$$

- Quando $\frac{-X_3+5X_4}{2} - 3X_4$ è uguale a 0, allora sono perpendicolari.

$$\frac{-X_3+5X_4}{2} - 3X_4 = 0 \qquad 2 \cdot \frac{-X_3+5X_4}{2} - 2 \cdot 3X_4 = 0 \cdot 2$$

$$-X_3 + 5X_4 - 6X_4 = 0$$

$$\boxed{-X_3 = X_4}$$

$\boxed{ES2}$

$$\lambda \in R \quad A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 3 \\ 1-\lambda & 3 & 1 & -5\lambda \\ 2 & 5+2\lambda & 3\lambda & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7-\lambda \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali λ la matrice ha rango 3.

- Devo trovare minore 3X3 con det $\neq 0$.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -5\lambda \\ 5+2\lambda & 3\lambda & -9 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-9 + 15\lambda^2) + 3 \cdot (9\lambda - 5 - 2\lambda)$$

$$= 9 - 15\lambda^2 + 21\lambda - 15 = -15\lambda^2 + 21\lambda - 6$$

- Quando $15\lambda^2 + 21\lambda - 6$ è uguale a 0 il det $= 0$.

$$-5\lambda^2 + 7\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - (4 \cdot (-5) \cdot (-2)) = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm 3}{-10} = \begin{cases} 1 \\ \frac{2}{5} \end{cases}$$

Se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq \frac{2}{5}$ $rK(A) = 3$

- Controlla l'altro minore con $\lambda = \frac{2}{5}$, $\lambda = 1$

- $\lambda = \frac{2}{5}$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & -1 & 0 \\ 3/5 & 3 & 1 \\ 2 & \frac{29}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} = 1 \cdot \left(\frac{12}{5} \cdot \frac{29}{5} + 2 \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{36}{5} + \frac{3}{5} \right) \neq 0$$

- $\lambda = 1$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} = 1 (9 - 7) + 2 \cdot (-1) = 0$$

$\boxed{\text{RANGO} = 3 \text{ se } \lambda \neq 1}$

ES 2

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 3 \\ 1-\lambda & 3 & 1 & -5\lambda \\ 2 & 5+2\lambda & 3\lambda & -9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7-\lambda \end{pmatrix}$$

b) Stabilire per quali λ il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni

- Sfruttando rouché-capelli cerco il caso in cui $rk(A|B) > rk(A)$
  Sono sicuro che se il rango è 3, abbiamo ∞^1 soluzioni.
  Sapendo che il rango di $A = 3$ se $\lambda \neq 1$
- Controllo cosa cosa succede se $\lambda = 1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se $\lambda = 1$ non abbiamo soluzioni

ES 3

Dato $A \in M_n$ stabilire se le nelle seguenti situazioni la matrica A è invertibile.

a) $A^3 = I_n$

- La matrice identità è sempre invertibile perché ha $\det = 1$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1_{11} & & & \\ & 1_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det(A^3) = 1_{11} \cdot 1_{22} \cdot \ldots \cdot 1_{nn} = 1 \neq 0$$

b) $A^2 = 0$

- Le matrici che elevate a 2 fanno 0 sono dette nilpotenti e non sono mai invertibili
- Anche per Binet $\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A)$, sapendo che il det di 0 è 0:

  $\det(A) \cdot \det(A) = 0$ può essere solo se $\det(A) = 0$ e quindi se A non è invertibile.

c) $A^2 + A = I$

- A non invertibile se $\det = 0$
- $\det I = 1$

$$0 + 0 \cdot 0 \neq 1$$

non può mai essere non invetibile ed è quindi invertibile

ES4

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ per ognuna delle seguenti situazioni esibire un vettore v_3 che la soddisfi.

a) v_1, v_2, v_3 sono una base di R^3

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \det|A| = -2 \neq 0$$

quindi $rK(A) = 3$, se $rK =$ n° colonne allora è linearmente indipendente

b) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, ma v_3 non è multiplo scalare di v_1 e v_2.

- Sapendo che $v_1 + v_2$ crea un vettore dipendente da entrambi allora $v_3 = v_1 + v_2$
- Dimostro che è realmente linearmente dipendente: se il rango di $A = [v_1|v_2|v_3] \neq$ n° colonne di A allora è linearmente dipendente

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 0$$