ES1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Calcola $rk(A)$

- Cerco minore 3X3 con $\det \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot (1+3) + 2 \cdot (2) = -4 + 4 = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot (8+1) + 3 \cdot (1-4) = 9 - 9 = 0$$

- Cerco minore 2X2 con $\det \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$\boxed{\text{RANGO DI } A = 2}$$

$\boxed{ES1}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) determinare (se esiste), una soluzione $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ del sistema omogeneo $AX = 0$.

•

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 1x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = +x_3 - 2x_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -2x_3 + x_4 \\ x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x_3 + x_4 \\ x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -2x_3 + x_4$$

$$-2x_3 + x_4 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2x_3 + x_4 \\ x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = 2x_3$$

ES2

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2\lambda+1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Per quali λ ha rango 3.

$\boxed{\text{Mi conviene prendere i minori con meno } \lambda \text{ possibile.}}$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \lambda \cdot (4\lambda+3) - 1 \cdot (4-6) + 2 \cdot (-1+2\lambda) = 4\lambda^2 - \lambda$$

- Devo trovare dove $\lambda = 0$ e quindi dove $4\lambda^2 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$

- Devo controllare tutti gli altri minori con questi λ

$\lambda = 1$

$\lambda = 0$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 5$$

ES 3

Date $A, B \in M_n$ stabilire se le seguenti sono vere o false

a) Se A è invertibile, allora $\det > 0$

FALSO, una matrice è invertibile se $\det \neq 0$

b) Se A e B sono invertibili allora AB è invertibile

VERO, il teorema di Binet dice: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

c) Se $A^{13} = B$ e B è invertibile allora A è invertibile

VERO, sempre per Binet

$$\det(A^{13}) = \det(A) \cdot \det(A) \ldots$$

ES 4

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ tale che v_3 non sia multiplo di v_1 e v_2.

- $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ deve essere linearmente dipendente.
- Uso $v_3 = v_1 + v_2$, perché non è multiplo di v_1 e v_2 ma annulla comunque il det $\begin{bmatrix} 3 & 1 & \\ -1 & -1 & v_3 \\ 1 & 2 & \end{bmatrix}$
- $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \to A \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- $\det(A) = 0$

ES 4

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tale che v_1, v_2, v_3 siano una base e v_3 lunghezza di 10.

- Cerco un vettore di lunghezza 10

se $v_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ per trovare lunghezza 10 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 10$

quindi se $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ allora $\sqrt{0^2 + 0^2 + 10^2} = 10$

- Controllo che il tutto sia linearmente indipendente

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 10 \cdot (-4) = -40 \neq 0$$

$rk(A) =$ n° colonne quindi linearmente indipendente.
ed è quindi una base.