$\boxed{\text{ES 1}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare $rk(A)$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -1(1+3) + 2(2) = -4 + 4 = \emptyset$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1(6+1) + 3(+1-4) = 7 - 9 = -2$$

$$rk(A) = 3$$

$\boxed{\text{ES1}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Esiste una soluzione non nulla $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ del sistema $AX = \emptyset$

- Cerco la soluzione di $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_3 = x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dopo aver trovato la soluzione, devo verificare se è perpendicolare con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per farlo devo moltiplicarlo con la soluzione perché $\boxed{v \cdot w = 0 = \perp}$

$$(1\ 0\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = -2x_3$$

$$\begin{array}{l} -2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \to \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unica soluzione $\perp$ esistente è nulla

ES2

$$\lambda \in \mathbb{R},\ A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dire per quali λ il rango è 3.

- Il rango è 3 quando un minore 3×3 $\det \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(-\lambda^2+2) - 1 = \underline{-\lambda^3+2\lambda-1}$$

Porre questo a $\emptyset$ è molto complicato → Controllo l'altro min

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & 0 \end{bmatrix} = -1\cdot(-\lambda) + 1\,(-\lambda^2+2) = \boxed{-\lambda^2-\lambda+2}$$

- Sappiamo che il $\det \neq 0$ quando $-\lambda^2-\lambda+2 \neq 0$, trovo le λ per il quale il $\det = 0$.

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

$$\lambda=1 \quad \lambda=-2$$

- Visto che non siamo riusciti a studiare l'altro minore dobbiamo vedere cosa succede se $\lambda=1$ e $\lambda=-2$, nel minore non studiato.

- $\lambda=1$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot(-1+2) + 1\cdot(-1) = 1-1=0$$

SE $\lambda=1$ IL RANGO <3

- $\lambda=-2$

$$\det \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = -2\cdot(4+2) + 1\cdot(-1) = -12-1=-13$$

SE $\lambda=-2$ IL RANGO RESTA 3

$\boxed{\text{• RANGO} = 3 \text{ SE } \lambda \neq 1}$

ES2

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Per quali valori di λ $AX = B$ non ammette soluzioni

- Devo usare rouché-capelli nei casi in cui è possibile che il rango di A sia diverso da 3, perché se $rK(A) = rK(A|B)$ abbiamo sempre soluzioni. $\left(\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right] = \emptyset \text{ SOLUZIONI} \right)$

- $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{rK(A|B) > rK(A) \text{ quindi } \emptyset \text{ soluzioni se } \lambda = 1}$$

ES 3

$A, B \in M_n$ Stabilire se vero o falso.

a) Se $AB = A$ allora $AB^2 = A$

- L'unico caso in cui $AB = A$ è se $B = I$, sapendo che $I^2 = I$

b) Se $A^2 = B^2$ allora o $A = B$ oppure $A = -B$

- $A = B$ non è sicuro, basta pensare alle matrici nilpotenti

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \text{ ma } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- La stessa cosa vale per $A = -B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 \text{ ma } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Se $A^2 + A = B$ e B è invertibile allora A è invertibile

- $A(A + I) = B$

$\det(A) \cdot \det(A + I) = \det(B)$

ES 4

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in R^3$$

a) Trovare $v_3 \in R$ tale che $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = R^3$

- Devo trovare un v_3 che renda $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ linearmente indipendente

Sapendo che $v_1 \wedge v_2 = \perp a \, v_1$ e $\perp v_2$ (SLIDE 108)

$$v_3 = v_1 \wedge v_2$$

$$v_1 \wedge v_2 =$$

- Oppure è facilmente intuibile che $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ va bene.

perchè il rango di $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ è 3 ($rK = n°$ di colonne).

$\boxed{\text{ES } 4}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

b) v_3 tale che $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\langle v_1, v_3 \rangle$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\langle v_2, v_3 \rangle$

$$\begin{cases} 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$