ES4

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

- **Controllo se A è diagonalizzabile**

$A=A^T$, quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile.

- **Suddivido la matrice A a blocchi ed estraggo le sottomatrici.**

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

- **A_1**

$$\det(A_1-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)^2-1=1-\lambda-\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2-2\lambda$$

$\lambda(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=2$

- **Autospazio di $\lambda=0$**

$$A_1-0I=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right] \quad \begin{cases}v_1-v_2=0\\ -v_1+v_2=0\end{cases} \begin{cases}v_1=v_2\\ v_2=v_1\end{cases} \quad \begin{bmatrix}v_1\\ v_1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

- **Autospazio di $\lambda=2$**

$$A_1-2I=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{array}\right] \quad \begin{cases}v_1=-v_2\\ v_2=\forall v_2\end{cases} \quad \begin{bmatrix}-v_2\\ v_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

quindi 0,2 sono autovalori di A con autovettori:

$$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

- A_2

$$\det(A_2-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-3-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(-3-\lambda)(2-\lambda)$$

$(-3-\lambda)(2-\lambda)=0$

$\lambda_1=-3 \quad \lambda=2$

- Autospazio di $\lambda=-3$

$A_2+3I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\end{array}\right] \quad \begin{cases}0=0\\ v_2=0\end{cases} \quad \begin{bmatrix}v_1\\ 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

- Autospazio di $\lambda=2$

$A_2-2I=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c}-5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \begin{cases}v_1=0\\ 0=0\end{cases} \quad \begin{bmatrix}0\\ v_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

quindi $-3,2$ sono autovalori di A con autovettori $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

- Diagonalizzazione

$A=X\cdot\Lambda\cdot X^{-1}$ dove Λ è la matrice avente gli autovalori λ precedentemente calcolati sulla diagonale principale.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- Converge col metodo delle potenze? a che autovalore e con quale velocità

  - Riordino gli autovalori: $3>2=2>0$, $3>2$ quindi rispettano la prima ipotesi, ed i loro autovettori sono linearmente indipendenti e quindi rispetta anche la seconda ipotesi.
  - Converge a -3 con velocità $\left|\frac{2}{3}\right|^K$