1.1

- Con ripetizioni: $10 \cdot 10 \cdot 10$
- Senza ripetizioni: $10 \cdot 9 \cdot 8$

1.2

$$P(Y=4) = P(X=1 \cap Y=4) + P(X=2 \cap Y=4) + P(X=3 \cap Y=4)$$
$$= \frac{5}{27} + \frac{5}{27} + \frac{1}{27} = \boxed{\frac{11}{27}}$$

$$P(X=1) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=1 \cap Y=3) + P(X=1 + Y=4)$$
$$= \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{5}{27} = \boxed{\frac{9}{27}}$$

$$P(X=1 | Y=4) = \frac{P(X=1 \cap Y=4)}{P(Y=4)} = \frac{5/27}{11/27} = \frac{5}{\cancel{27}} \cdot \frac{\cancel{27}}{11} = \boxed{\frac{5}{11}}$$

$$P(Y=4 | X=1) = \frac{P(Y=4 \cap X=1)}{P(X=1)} = \frac{5/27}{9/27} = \frac{5}{\cancel{27}} \cdot \frac{\cancel{27}}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

$P(Y=4 | X=1) \neq P(Y=4)$ quindi le variabili sono dipendenti.

$\boxed{1.3}$

Per quali valori α, $f(x) = \begin{cases} \alpha/2 & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{\alpha}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è una densità di probabilità?

- **Per trovare α pongo l'area dei due spazi a 1.**

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\alpha}{2} + \int_{1}^{2} \frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\alpha \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} + \alpha \int_{1}^{2} \frac{1}{2} = 1$$

$$\alpha \left(\frac{-1}{2} + \frac{2}{2} \right) + \alpha \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2} \right) = 1$$

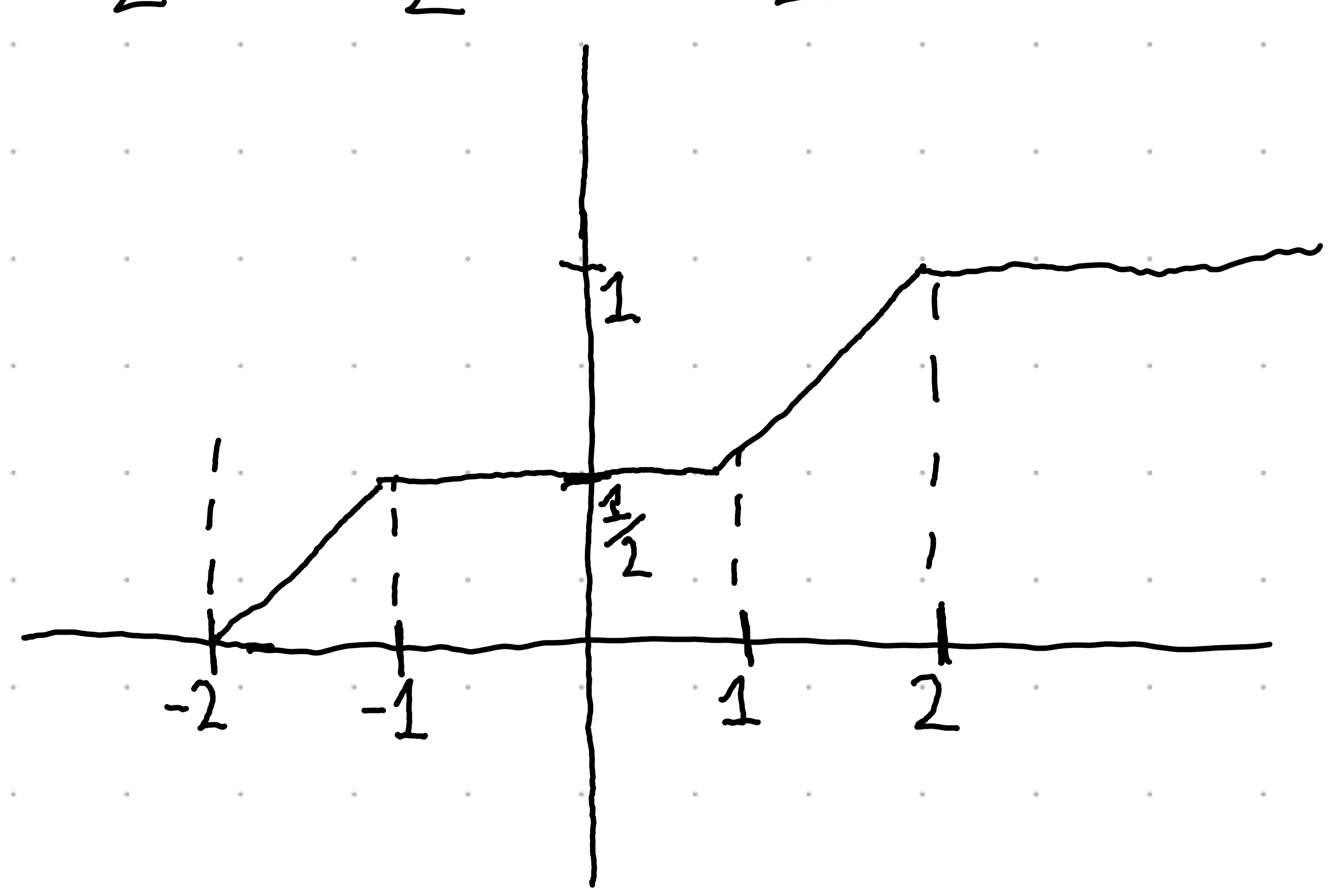
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 1 \qquad \boxed{\alpha = 1}$$

- **Calcolo e produco la C.D.F**

Da -2 a $-1 \rightarrow \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 1$

Da 1 a $2 \rightarrow \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}x$

$$\begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{1}{2}x & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



$\boxed{1.4}$

- **Dimostra che $E[aX+b] = aE[X]+b$**

$$E[aX+b] = \sum_x (aX+b)\cdot p(x)$$
$$= a\sum_x X\cdot P(X) + \sum_x b\cdot p(x)$$
$$= a\underbrace{\sum_x X\cdot p(X)}_{E[X]} + b\underbrace{\sum_x p(x)}_{1}$$
$$= aE[X]+b$$

- **Dimostra che $Var(aX+b) = a^2 Var(x)$**

$$Var(aX+b) = E[(ax+b)^2] - E[aX+b]^2$$
$$= E[ax^2+2abX+b^2] - (aE[X]+b)^2$$
$$= a^2E[x^2] + 2abE[x] + b^2 - (aE[x]+b)^2$$
$$= a^2\left(E[x^2] - E[x]^2\right)$$
$$= a^2 Var(x)$$

2.1

Se $H(X)=3$ e $H(X,Y)=5$ che cosa si può dire di $H(Y)$ e di $H(Y|X)$ in generale? e se X e Y fossero indipendenti?

• $\underline{H(Y|X)} = H(X,Y) - H(X) = 5-3=2$

• $\underline{H(Y)}$

Si può dire che nel caso in cui X e Y fossero indipendenti allora $H(X,Y) = H(X) \cdot H(Y)$ e quindi $H(Y) = \frac{5}{3}$.

Se sono dipendenti so che $H(X) \cdot H(Y) > H(X,Y)$

2.2

Può esistere una codifica univocamente decifrabile dove $L(a)=1$ $L(b)=2$ $L(c)=3$ $L(d)=4$ $L(e)=5$ $L(f)=6$?

Sì per la disuguaglianza di Kraft Mc-Millon, infatti

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \leq 1$$

$\boxed{2.3}$

$$y_1[5] = 1 + 1 + 0 = 0$$

$$y_2[5] = 1 + 1 = 0$$

$$y_3[5] = 1 + 0 = 0$$

$\boxed{2.4}$

3.1

Croce $= 0$ Testa $= 1$

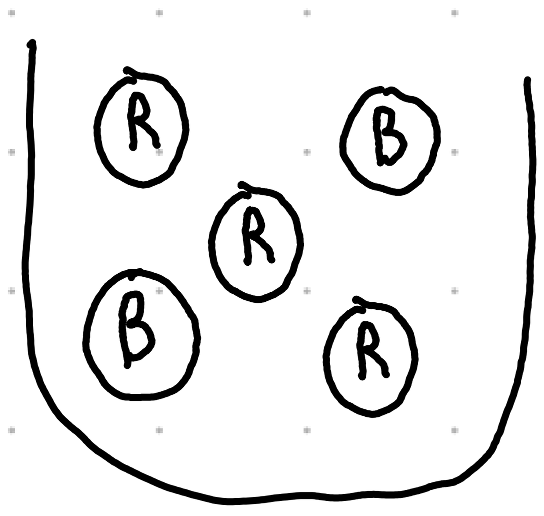
$$\text{Verosimiglianza} = p^{0+0+0+1} \cdot (1-p)^{4-0-0-0-1} = p^1 \cdot (1-p)^3$$

• <u>Verosimiglianza $\left(\frac{1}{3}\right)$</u> $= \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \boxed{\frac{8}{81}} = \boxed{0{,}098}$

• <u>Verosimiglianza $\left(\frac{2}{3}\right)$</u> $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} = \boxed{\frac{2}{81}} = \boxed{0{,}02469}$

È più verosimile $\frac{1}{3}$ rispetto ad $\frac{2}{3}$.

3.2



$P(T \mid \text{ESCE } R) = \frac{1}{8}$

$P(T \mid \text{ESCE } B) = \frac{1}{2}$

• <u>$P(T$</u> $) = P(T \mid \text{ESCE } R) \cdot P(\text{ESCE } R) + P(T \mid \text{ESCE } B) \cdot P(\text{ESCE } B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{11}{40}}$

• <u>$P(T_2 \mid T_1)$</u> $= P(T_2 \mid T_1 \text{ da } R) \cdot P(R \mid T_1) + P(T_2 \mid T_1 \text{ da } B) \cdot P(B \mid T_1) =$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{P(T_1 \mid R) \cdot P(R)}{P(T_1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(T_1 \mid B) \cdot P(B)}{P(T_1)}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5}}{11/40} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2 \cdot 2/5}{11/40} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{11} = \boxed{\frac{35}{88}}$$

3.3

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

- **Determinare distribuzione limite e quella stazionaria**

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4\alpha + 0,8 & 0,4\alpha + 0,2 \end{bmatrix}$$

- **Distribuzione stazionaria**

$$\begin{cases} -0,4\alpha + 0,8 = \alpha \\ 0,4\alpha + 0,2 = 1-\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} -1,4\alpha = -0,8 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{4}{7} \\ 1-\alpha = \frac{3}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

- **Distribuzione limite**

$$\begin{bmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$