$\boxed{1.1}$

Possibili combinazioni di 4 cifre di un lucchetto?

- Con ripetizioni: $10 \cdot 10 \cdot 10$
- Senza ripetizioni: $10 \cdot 9 \cdot 8$

$\boxed{1.2}$

- $P(X=3|Y=3) = \dfrac{P(X=3 \cap Y=3)}{P(Y=3)}$

$$P(Y=3) = P(Y=3 \cap X=1) + P(Y=3 \cap X=2) + P(Y=3 \cap X=3) = \frac{2}{27} + \frac{3}{27} + \frac{4}{27} = \frac{9}{27}$$

$$P(X=3|Y=3) = \frac{4/27}{9/27} = \frac{4}{\cancel{27}} \cdot \frac{\cancel{27}}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

- $P(Y=3|X=3) = \dfrac{P(X=3 \cap Y=3)}{P(X=3)}$

$$P(X=3) = P(X=3 \cap Y=3) + P(X=3 \cap Y=4) + P(X=3 \cap Y=2) = \frac{2}{27} + \frac{3}{27} + \frac{4}{27} = \frac{9}{27}$$

$$P(Y=3|X=3) = \frac{4/27}{9/27} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

- $E[X/Y]$

- Le variabili casuali sono dipendenti perché $P(Y=3|X=3) \neq P(Y=3)$

$\boxed{1.3}$

Per quali valori α, $f(x)=\begin{cases}\alpha x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ è una densità di probabilità?

• <u>Per trovare α pongo l'area dello spazio a 1.</u>

$$\int_0^1 \alpha x = 1$$

$$\frac{\alpha(1)^2}{2} - 0 = 1$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1$$

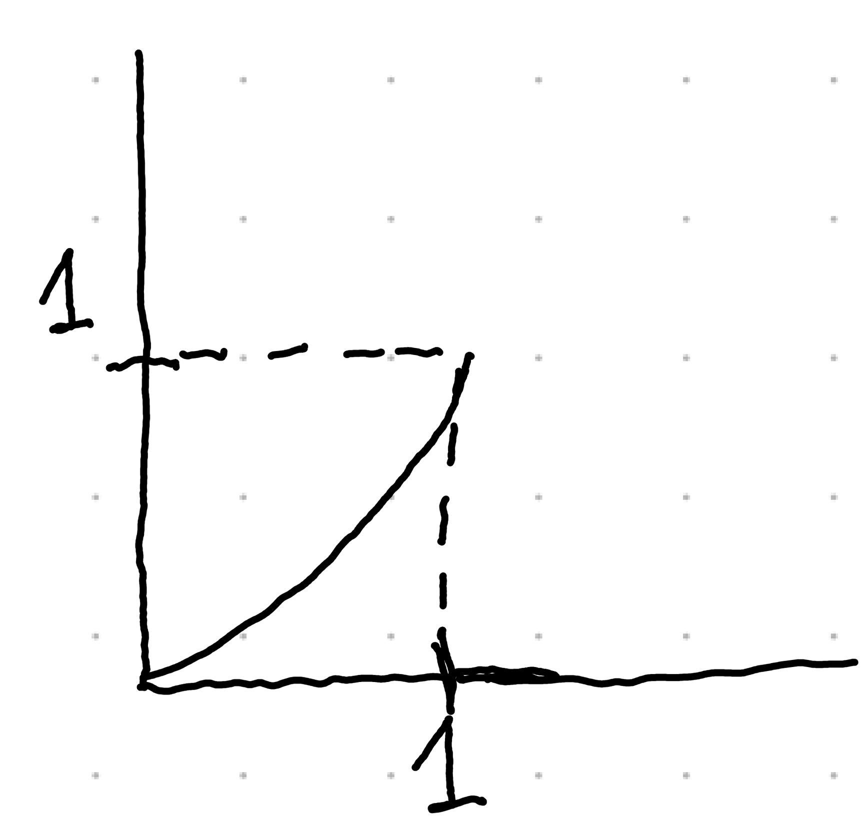
$$\alpha = 2$$

$$\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

• <u>C.F.D</u>

Da 0 a 1 $\rightarrow 2\int_0^x x = 2\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) = x^2$

$$\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$$



$\boxed{2.1}$

$H(X) = 2 \quad H(Y) = 3 \qquad H(X,Y) = A$

- $A = 4$

$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 4 - 3 = 1$

$H(Y|X) = H(Y,X) - H(X) = 4 - 2 = 2$

X e Y sono dipendenti

- $A = 5$

$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 5 - 3 = 2$

$H(Y|X) = H(Y,X) - H(X) = 5 - 2 = 3$

X e Y sono indipendenti.

$\boxed{2.2}$

$p(h) = \frac{11}{20}$

$p(b) = \frac{3}{20}$

$p(d) = \frac{3}{10}$

$p(a) = \frac{1}{20}$

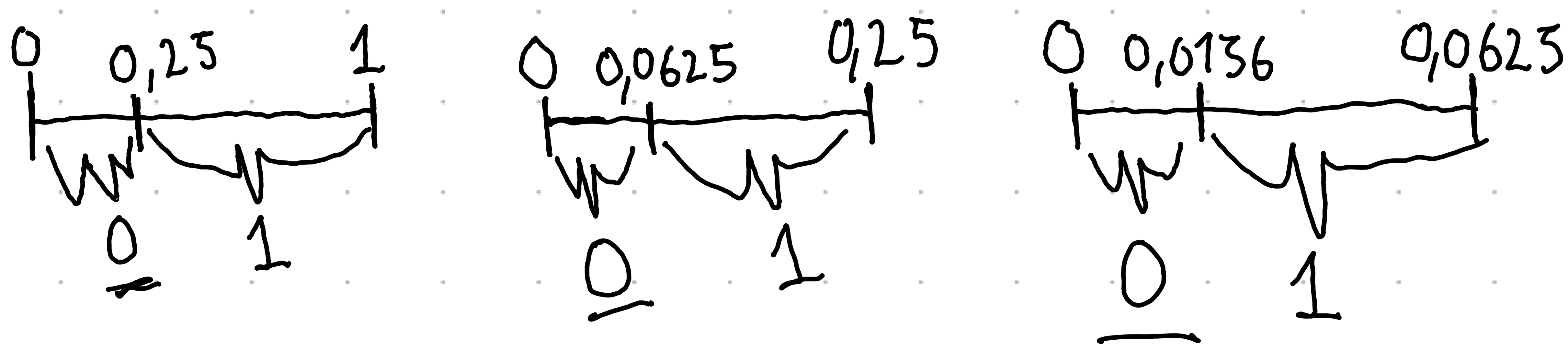
$p(c) = \frac{1}{20}$

$p(e) = \frac{1}{20}$

2.3

Se $p(0) = 1/4$ e $p(1) = 3/4$ quali sono le triplette di bit associate al sottointervallo più breve? più lungo?

- **PIÙ BREVE**



→ 000

- **PIÙ LUNGO**

111

2.4

3.1

Se p è la probabilità di ottenere croce, calcola la verosimiglianza di $p = 1/4$ e $p = 1/3$ per una moneta che lanciata 4 volte, produce 3 teste e 1 croce.

- **Verosimiglianza $p(X_i|P)$**

3 Teste
1 Croce $\longrightarrow X_1 = T, X_2 = T, X_3 = T, X_4 = C$

testa = $\emptyset$
croce = 1

Verosimiglianza $p(X_i|P) = p^{\sum x_1} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i} = p^{0+0+0+1} \cdot (1-p)^{4-0-0-0-1} = \underline{p^1 \cdot (1-p)^3}$

- **$p = 1/4$**

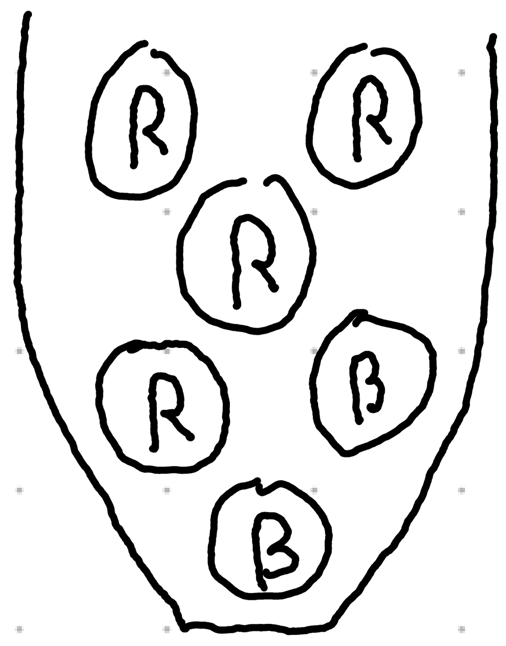
Verosimiglianza $\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{64} \simeq 0.155$

- **$p = 1/3$**

Verosimiglianza $\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} \simeq 0.09$

$\boxed{\text{Quindi è più verosimile } p = \frac{1}{4}\text{, perché } 0.155 > 0.09.}$

3.2



$$P(T \mid \text{ESCE ROSSA}) = \frac{1}{8}$$

$$P(T \mid \text{ESCE BIANCA}) = \frac{1}{2}$$

- Probabilità di ottenere testa pescando a caso.

$$P(T) = P(\text{Testa da rossa}) + P(\text{Testa da bianca})$$

$$= P(T \mid \text{ESCE ROSSA}) \cdot P(\text{ESCE ROSSA}) + P(T \mid \text{ESCE BIANCA}) \cdot P(\text{ESCE BIANCA})$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}_{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{6} + \frac{1}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{3}{12}}$$

- Probabilità di ottenere testa con due lanci con una moneta pescata a caso

$$P(\text{DUE VOLTE DI FILA TESTA}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \frac{4}{6}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{6} + \frac{1}{\cancel{64}_{16}} \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{96} = \boxed{\frac{9}{96}}$$

3.3

Determinare la distribuzione limite e quella stazionaria per la matrice di transizione $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$.

$$\pi = \pi P \rightarrow (\alpha \quad 1-\alpha) = (\alpha \quad 1-\alpha) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix} = [0{,}5 - 0{,}5\alpha \quad 0{,}5 + 0{,}5\alpha]$$

$$\begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\alpha = \alpha \\ 0{,}5 + 0{,}5\alpha = 1 - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}5 = 1{,}5\alpha \\ 0{,}5 + 0{,}5\alpha = 1 - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0{,}\overline{333} \\ 1 - \alpha = 0{,}\overline{666} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}\overline{333} & 0{,}\overline{666} \\ 0{,}\overline{333} & 0{,}\overline{666} \end{bmatrix}$$