VETTORI IN $\mathbb{R}^n$ o meglio in K^n

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- lunghezza: $|v| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$
- Proiezione ortogonale di v su w = $\frac{v \cdot w}{|w|^2}$

- **Somma**

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

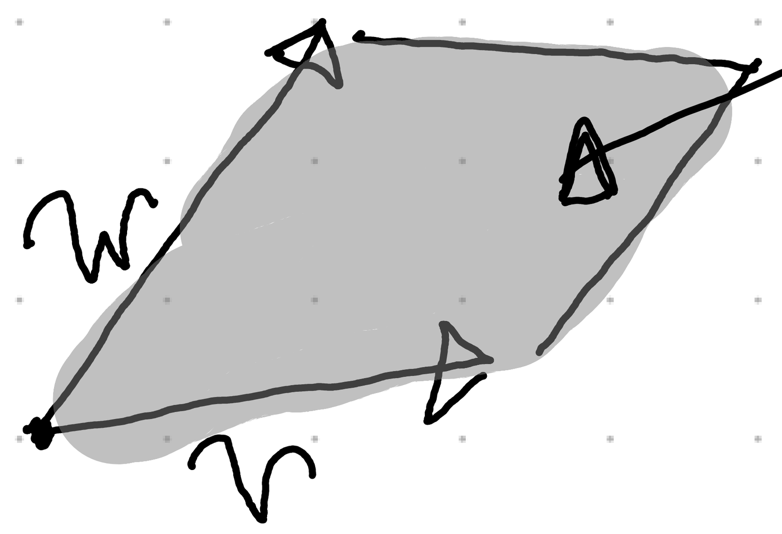
- **Prodotto per λ**

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

- **Prodotto scalare**

$$v \cdot w = v^T \cdot w = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$$

• PRODOTTO VETTORIALE



Ci permette di trovare l'aria

$$v \wedge w = \det \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_3 \\ -v_1 w_3 + v_3 w_1 \\ v_1 w_2 + v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

prodotto vettoriale

BASE

- I vettori $(v_1), (v_2) \ldots (v_n)$ sono linearmente dipendenti se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non nulli tale che: $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \emptyset$

ESEMPIO:

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti perché:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{la pongo a } \emptyset$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} \frac{3\lambda_3}{2} \\ -3\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- I vettori $(v_1), (v_2) \ldots (v_n)$ sono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti:

Se $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \emptyset$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = \emptyset$

ESEMPIO:

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 1\lambda_2 = 0 \\ 1\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\det A = -1 \neq 0 \xrightarrow{\text{CRAMER}} \exists! \text{ soluzione}: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \emptyset$$

- $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice $(v_1, \ldots, v_r) \in M_{nr}$ ha rango $= r$.

Se $r > n$ sempre linearmente dipendenti