ES 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Calcola $rk(A)$

- Cerco un minore 3X3 con $\det \neq 0$.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot (2-1) + 1 \cdot (1-1) + 0 = -1$$

quindi $rk(A) = 3$

b) Determinare le soluzioni $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ del sistema lineare $AX = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 8 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 8 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema ha ∞^{3-2} soluzioni

$$\begin{cases} 1X + 1Y - 1Z = 0 \\ -1Y + 3Z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = -Y + Z \\ Y = +3Z \end{cases} \quad \begin{cases} X = -2Z \\ Y = +3Z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -2Z \\ 3Z \\ Z \end{pmatrix}$$

$\boxed{ES2}$

$\lambda \in R \qquad A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) Dire per quali $\lambda \in R$ la matrice A è invertibile

- La matrice è invertibile se $\det \neq 0$

$$\det(A) = -1 \cdot (2-2\lambda) - 2(2\lambda+2-4) = -2+2\lambda-4\lambda+4 = -2\lambda+2$$

- Devo trovare λ in cui $-2\lambda+2=\emptyset$, perchè per questi λ non è invertibile

$$-2\lambda+2=0$$
$$-2\lambda=-2$$
$$\lambda=1$$

$\boxed{\text{Sempre invertibile se } \lambda \neq 1}$

b) Esistono λ per i quali $AX=B$ ammette infinite soluzioni, determinali

- Per il teorema di cramer, abbiamo >1 soluzioni solo se $\det = 0$ l'unico caso in cui $\det(A) = \emptyset$ è $\lambda = 1$
- Per $\lambda=1$ controllo quante soluzioni abbiamo.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] R_3 \to R_3 - \frac{5}{2}R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Per il teorema di rouchè-capelli ∞^{3-2}

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1 \\ \frac{5}{2}x_3 = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 1 \cdot (-1) = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ES 2

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) Determina i valori di λ per il quale $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette soluzioni non nulle.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda \neq 1 \quad \exists!$ soluzione t $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

- $\lambda = 1$