1.1

Quanti gruppi da 3 persone possono formare 5 persone?

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

1.2

- $P(Y=5) = P(Y=5 \cap X=1) + P(Y=5 \cap X=2) + P(Y=5 \cap X=3) = \frac{5}{27} + \frac{5}{27} + \frac{1}{27} = \boxed{\frac{11}{27}}$
- $P(X=2) = P(X=2 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=4) + P(Y=2 \cap Y=5) = \frac{1}{27} + \frac{5}{27} + \frac{3}{27} = \boxed{\frac{9}{27}}$
- $P(X=2 \mid Y=5) = \frac{P(X=2 \cap Y=5)}{P(Y=5)} = \frac{5/27}{11/27} = \frac{5}{\cancel{27}} \cdot \frac{\cancel{27}}{11} = \boxed{\frac{5}{11}}$
- $P(Y=5 \mid X=2) = \frac{P(X=2 \cap Y=5)}{P(X=2)} = \frac{5/27}{9/27} = \frac{5}{\cancel{27}} \cdot \frac{\cancel{27}}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$
- $E[X] = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

$P(X=1) = \frac{1}{27} + \frac{5}{27} + \frac{3}{27} = \boxed{\frac{9}{27}}$

$P(X=3) = 1 - \left(P(X=1) + P(X=2)\right) = \boxed{\frac{9}{27}}$

$E[X] = \frac{9}{27} + \frac{18}{27} + \frac{27}{27} = \frac{54}{27} = \boxed{2}$

- $E[Y] = 2 \cdot P(Y=2) + 4 \cdot P(Y=4) + 5 \cdot P(Y=5)$

$P(Y=4) = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{5}{27} = \boxed{\frac{9}{27}}$

$P(Y=2) = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{3}{27} = \boxed{\frac{7}{27}}$

$E[Y] = \frac{14}{27} + \frac{36}{27} + \frac{55}{27} = \boxed{\frac{105}{27}}$

- $E[XY]$

$E[XY] = 2 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{5}{27} + 8 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{5}{27} + 15 \cdot \frac{1}{27} + 6 \cdot \frac{1}{9} + 12 \cdot \frac{5}{27} =$

- Le variabili casuali sono dipendeti perché:

$P(Y=5 \mid X=2) \neq P(Y=5)$

$\boxed{1.3}$

Per quali valori α, $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4} & -2\leq x\leq -1 \\ \frac{\alpha}{4} & 1\leq x\leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è una densità di probabilità?

- **Per trovare α pongo l'area dei due spazi a 1.**

$$\int_{-2}^{-1}\frac{3}{4}+\int_{2}^{1}\frac{\alpha}{4}=1$$

$$3\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)+\alpha\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right)=1$$

$$\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{4}=1$$

$$\alpha=1$$

- **C.D.F.**

Da -2 a -1 $\rightarrow$ $\int_{-2}^{x}\frac{3}{4}=3\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{4}\right)=\frac{3x}{4}+\frac{6}{4}=\boxed{\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}}$

Da 1 a 2 $\rightarrow$ $\int_{-2}^{-1}\frac{3}{4}+\int_{1}^{x}\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}}$

$$\begin{cases} 0 & x<-2 \\ \frac{3x}{4}+\frac{3}{2} & -2\leq x\leq -1 \\ \frac{3}{4} & -1<x<1 \\ \frac{1}{2}+x/4 & 1\leq x\leq 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

2.1

Se $H(X)=3$, $H(Y)=4$ e $H(X,Y)=5$ determina le entropie condizionate. Le variabili X e Y sono dipendenti o indipendenti?

- **$H(X|Y)$**

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1$$

- **$H(Y|X)$**

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 2$$

- **Le variabili X e Y sono dipendenti o indipendenti?**

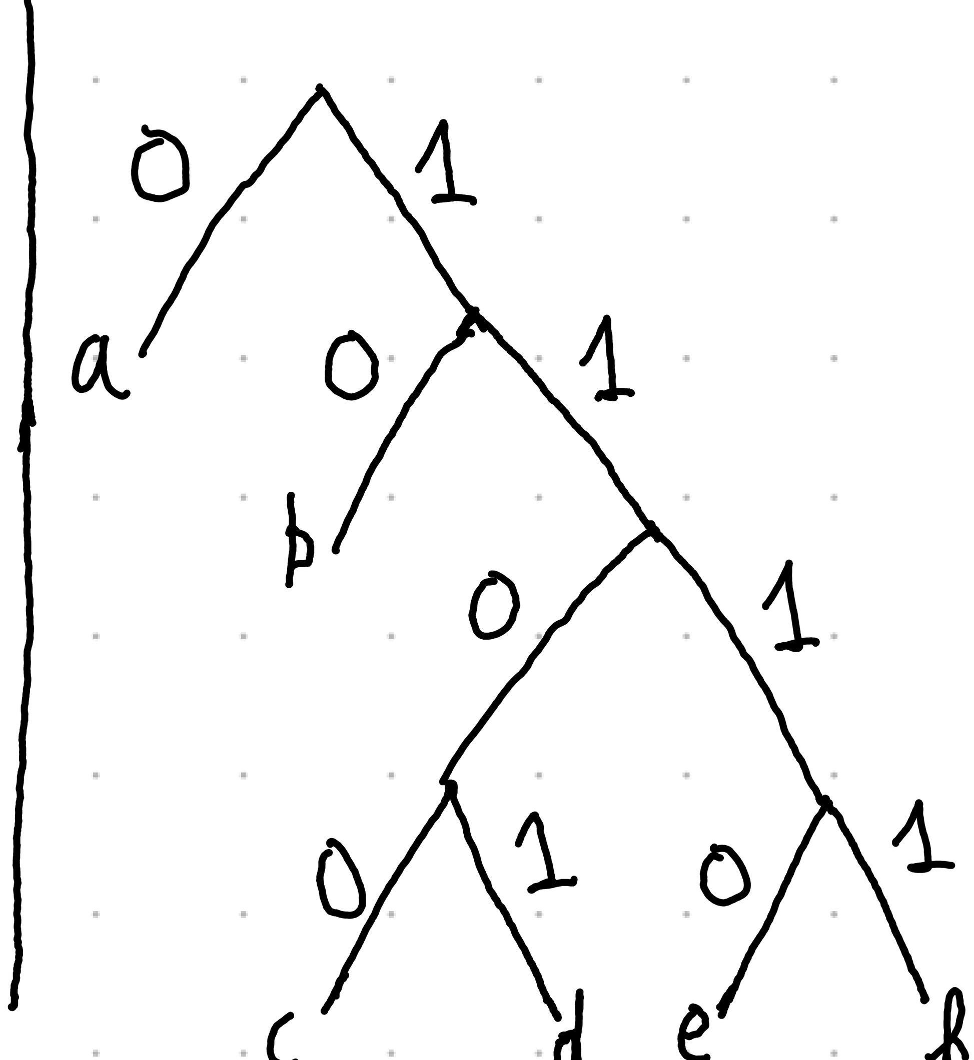
$H(Y|X) \neq H(Y)$ quindi le variabili sono dipendenti.

2.2

Produci la codifica di Huffman per un alfabeto a 6 simboli.

$$p(a)=\frac{2}{5} \quad p(b)=\frac{1}{5} \quad p(e)=p(c)=p(d)=p(f)=\frac{1}{10}$$

$p(a)=\frac{2}{5}$	$p(a)=\frac{2}{5}$	$p(a)=\frac{2}{5}$	$p(a)=\frac{2}{5}$	$p(e)+p(f)+p(c)+p(d)+p(b)=\frac{3}{5}$
$p(b)=\frac{1}{5}$	$p(b)=\frac{1}{5}$	$p(b)=\frac{1}{5}$	$p(e)+p(f)+p(c)+p(d)=\frac{2}{5}$	$p(a)=\frac{2}{5}$
$p(c)=\frac{1}{10}$	$p(e)+p(f)=\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{10}\,5}$	$p(e)+p(f)=\frac{1}{5}$	$p(b)=\frac{1}{5}$	
$p(d)=\frac{1}{10}$	$p(c)=\frac{1}{10}$	$p(c)+p(d)=\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{10}\,5}$		
$p(e)=\frac{1}{10}$	$p(d)=\frac{1}{10}$			
$p(f)=\frac{1}{10}$				



a = 0 b = 10 c = 100 d = 101 e = 1110 f = 1111

2.3

$$y_1[5] = 1 + 1 + 1 = 1$$

$$y_2[5] = 1 + 1 = 0$$

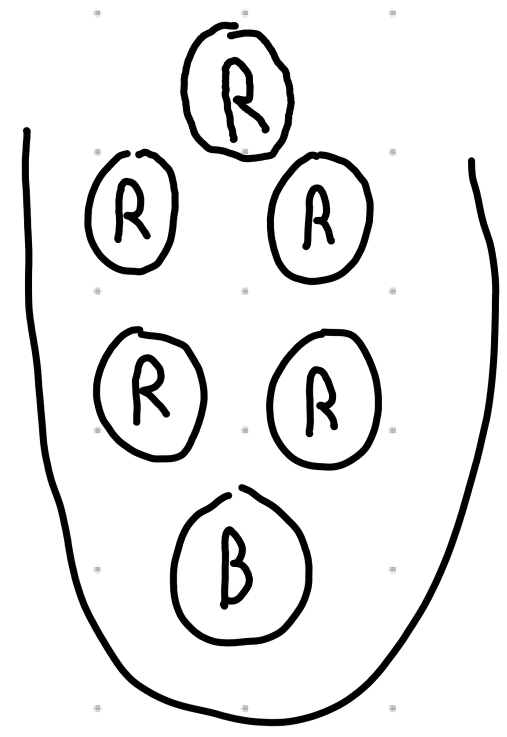
2.4

$C(a) = 10$

$C(b) = 1011$

non è istantaneo perché $C(a)$ è prefisso di $C(B)$, ma è univocamente decifrabile perché non si possono formare C^+ uguali

$\boxed{3.2}$



$P(T \mid \text{ESCE ROSSA}) = \frac{1}{10}$

$P(T \mid \text{ESCE BIANCA}) = \frac{1}{2}$

- **Probabilità di ottenere testa pescando a caso.**

$$P(T) = P(\text{Testa da rossa}) + P(\text{Testa da bianca})$$

$$= P(T \mid \text{ESCE ROSSA}) \cdot P(\text{ESCE ROSSA}) + P(T \mid \text{ESCE BIANCA}) \cdot P(\text{ESCE BIANCA})$$

$$= \frac{1}{{}_2\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{5}^{2}}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

- **Probabilità di ottenere croce al secondo lancio sapendo di aver ottenuto testa nel primo.**

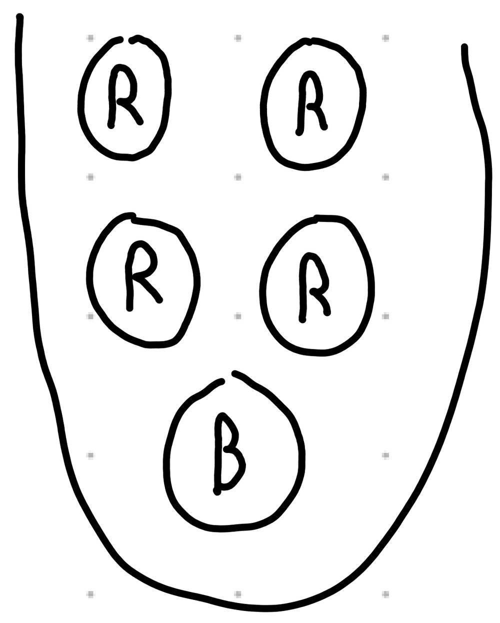
$A = (C \mid \text{USCITO TESTA AL PRIMO LANCIO})$

$P(A) = P$ $\quad$ $\text{ESCE ROSSA}) + P(A \mid \text{ESCE BIANCA}) \cdot P(\text{ESCE BIANCA})$

$+$

$\boxed{3.2}$

1/6/23



$P(T|\text{ESCE ROSSA}) = \frac{1}{4}$

$P(T|\text{ESCE BIANCA}) = \frac{1}{2}$

- Probabilità di ottenere testa pescando a caso.

$$P(T) = P(\text{Testa da rossa}) + P(\text{Testa da bianca})$$

$$= P(T|\text{ESCE ROSSA}) \cdot P(\text{ESCE ROSSA}) + P(T|\text{ESCE BIANCA}) \cdot P(\text{ESCE BIANCA})$$

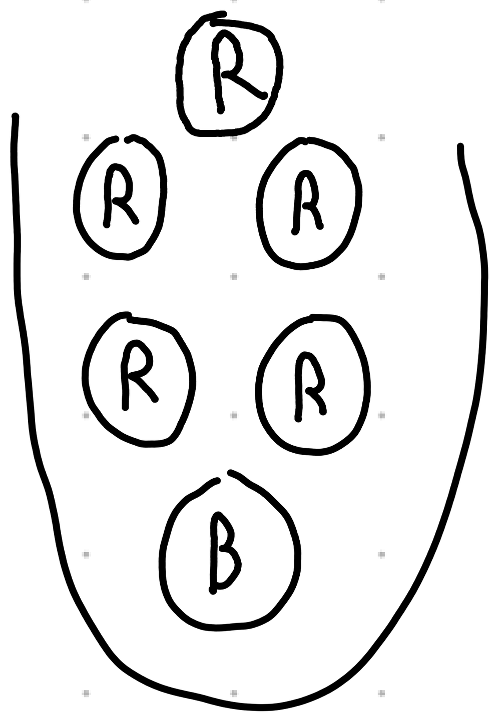
$$= \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

- Probabilità di ottenere croce al secondo lancio sapendo di aver ottenuto testa nel primo.

$$P(C_2|T_1) = \underbrace{P(C_2|T_1 \text{ da rossa})}_{\frac{3}{4}} \cdot \underbrace{P(T_1 \text{ da rossa}|C_2)} + P(C_2|T_1 \text{ da bianco}) \cdot P(T_1 \text{ da bianco})$$

$$P(T_1 \text{ da rossa}|C_2) = \qquad = \frac{\qquad}{} = 4/5$$

3.2



$$P(T \mid \text{ESCE ROSSA}) = \frac{1}{10}$$

$$P(T \mid \text{ESCE BIANCA}) = \frac{1}{2}$$

- <u>Probabilità di ottenere testa pescando a caso.</u>

$$P(T) = P(\text{Testa da rossa}) + P(\text{Testa da bianca})$$

$$= P(T \mid \text{ESCE ROSSA}) \cdot P(\text{ESCE ROSSA}) + P(T \mid \text{ESCE BIANCA}) \cdot P(\text{ESCE BIANCA})$$

$$= \frac{1}{\cancel{10}_{\,2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{\,1}}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

- <u>Probabilità di ottenere croce al secondo lancio sapendo di aver ottenuto testa nel primo.</u>

$$P(C_2 \mid T_1) = \underbrace{P(C_2 \mid T_1 \text{ da rossa})}_{\frac{9}{10}} \cdot \underbrace{P(\text{rossa} \mid T_1)} + \underbrace{P(C_2 \mid T_1 \text{ da bianca})}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(T_1 \text{ da bianca})}$$

$$\frac{P(T_1 \mid \text{rossa}) \cdot P(\text{rossa})}{P(T_1)} = \frac{\frac{1}{\cancel{10}_{\,2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{\,1}}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P(T_1 \mid \text{bianca}) \cdot P(\text{bianca})}{P(T_1)} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}$$

$$P(T_1 \text{ da rossa} \mid C_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{20} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{10}}$$