

**ES 1**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Calcola  $\text{rk}(A)$

• Cerco un minore  $3 \times 3$  con  $\det \neq 0$ .

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot (2-1) + 1 \cdot (1-1) + 0 = -1$$

quindi  $\text{rk}(A) = 3$

b) Determinare le soluzioni  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  del sistema lineare  $AX = 0$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Il sistema ha  $\infty^{3-2}$  soluzioni

$$\begin{cases} 1x + 1y - 1z = 0 \\ -1y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + z \\ y = +3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = +3z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$$

**ES2**

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Dire per quali  $\lambda \in \mathbb{R}$  la matrice  $A$  è invertibile

- La matrice è invertibile se  $\det \neq 0$

$$\det(A) = -1 \cdot (2 - 2\lambda) - 2(2\lambda + 2 - 4) = -2 + 2\lambda - 4\lambda + 4 = -2\lambda + 2$$

- Devo trovare  $\lambda$  in cui  $-2\lambda + 2 = 0$ , perché per questi  $\lambda$  non è invertibile

$$-2\lambda + 2 = 0$$

$$-2\lambda = -2$$

$$\lambda = 1$$

**Sempre invertibile se  $\lambda \neq 1$**

b) Esistono  $\lambda$  per i quali  $AX = B$  ammette infinite soluzioni, determinanti

- Per il teorema di Cramer, abbiamo  $>1$  soluzioni solo se  $\det = 0$   
l'unico caso in cui  $\det(A) = 0$  è  $\lambda = 1$
- Per  $\lambda = 1$  controllo quante soluzioni abbiamo.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 \leftrightarrow R_3 - R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 - \frac{5}{2}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Per il teorema di rank-capelli  $\infty^{3-2}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1 \\ \frac{5}{2}x_3 = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 1 \cdot (-1) = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**ES2**

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Determina i valori di  $\lambda$  per il quale  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ammette soluzioni non nulle.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\lambda \neq 1 \quad \exists! \text{ soluzione } \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

•  $\lambda = 1$