SISTEMI LINEARE

$$3x_1 + x_2 = 5$$
$$x_2 - x_1 = 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\boxed{Ax = b \Rightarrow x = A^{-1} b}$$

\# equazioni = \# righe di A

\# incognite = \# colonne di A

• ESEMPIO: Risoluzione trovando prima inversa (SI PUÒ FARE SOLO SE ESISTE L'INVERSA DELLA MATRICE)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -5x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + \frac{5}{3} R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{matrix} R_1 \to \frac{1}{3} R_1 \\ R_2 \to 3 R_2 \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_1 \to R_1 + \frac{1}{3} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$
$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 26 \end{cases}$$
$$x = A^{-1}b$$

• ESEMPIO: Risoluzione che non necessita della inversa.

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

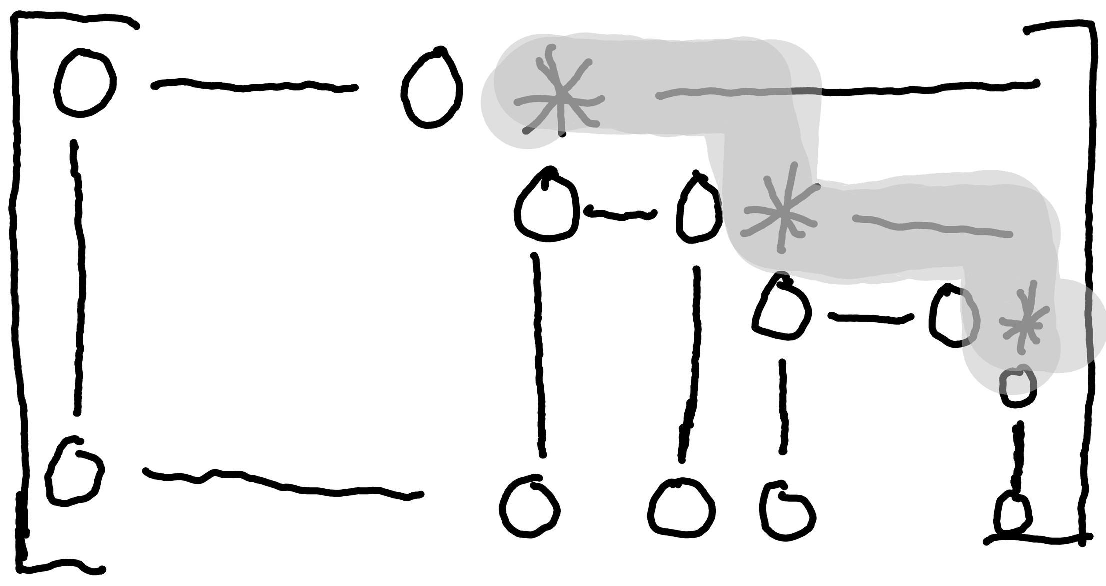
INVERTO R_4 con R_1
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_2 = R_3 - 3R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & +3 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_2 = R_3 - 3R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_4 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{2} - x_2 \\ x_3 = 1 - x_4 = \frac{3}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - x_2 \\ x_2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Si dice che il sistema ha ∞^1 soluzioni

RIDUZIONE DI GAUSS



$* = \text{PIVOT} \neq 0$

SOTTO E PRIMA DEI PIVOT SOLO 0.

• ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_3 + R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{R_2 - 9R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_3 + 2R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 18 & -3 \\ 0 & 0 & 35 & -56 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$B = \underbrace{P_3}_{R_3 + 2R_2} \underbrace{P_2}_{R_2 - 9R_1} \underbrace{P_1}_{R_3 + R_1} A$$

• Una matrice si dice <u>totalmente ridotta</u> se i pivot $= 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 18 & -3 \\ 0 & 0 & 15 & -56 \end{bmatrix}$$

• Una matrice è invertibile se la riduzione di Gauss porta alla matrice identità.

USANDO LA RID. DI GAUSS SI PUÒ ANCHE TROVARE L'INVERSA

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$R_2+\frac{1}{2}R_1=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

$$\Big\downarrow \text{RIDUZIONE TOTALE}$$

$$\frac{1}{2}R_1 \text{ AND } \frac{2}{9}R_2=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{array}\right]$$

$$\Big\downarrow$$

CERCO DI OTTENERE I COSÌ DA DIMOSTRARE CHE È INVERTIBILE, E TROVARE L'INVERSA

$$R_1-\frac{1}{2}R_2=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 8/18 & -1/9\\ 0 & 1 & 1/9 & 2/9\end{array}\right]$$

$\rightarrow$ INVERSA