

ES 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare $r_K(A)$

• Cerco minore 3×3 con $\det \neq 0$ + - +

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot (9-7) + 1(0-2) = 2 - 2 = 0$$

quindi $r_K(A) = ?$

ES 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

b) determina, se esiste una soluzione $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & -9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -15 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_4 \\ x_2 = \frac{-x_3 + 5x_4}{2} \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} \frac{-x_3 + 5x_4}{2} - 3x_4 \\ \frac{-x_3 + 5x_4}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Se $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ allora sono perpendicolari.

$$\begin{pmatrix} \frac{-x_3 + 5x_4}{2} - 3x_4 \\ \frac{-x_3 + 5x_4}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-x_3 + 5x_4}{2} - 3x_4$$

Quando $\frac{-x_3 + 5x_4}{2} - 3x_4$ è uguale a 0, allora sono perpendicolari.

$$\frac{-x_3 + 5x_4}{2} - 3x_4 = 0 \quad 2 \cdot \frac{-x_3 + 5x_4}{2} - 2 \cdot 3x_4 = 0 \cdot 2$$

$$-x_3 + 5x_4 - 6x_4 = 0$$

$$\boxed{-x_3 = x_4}$$

ES2

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 3 \\ 1-\lambda & 3 & 1 & -5\lambda \\ 2 & 5+2\lambda & 3\lambda & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7-\lambda \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali λ la matrice ha rango 3.

- Devo trovare minore 3×3 con $\det \neq 0$.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -5\lambda \\ 5+2\lambda & 3\lambda & -9 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-9 + 15\lambda^2) + 3 \cdot (9\lambda - 5 - 2\lambda) \\ = 9 - 15\lambda^2 + 21\lambda - 15 = -15\lambda^2 + 21\lambda - 6$$

- Quando $-15\lambda^2 + 21\lambda - 6 = 0$ il $\det = 0$.

$$-5\lambda^2 + 7\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - (4 \cdot (-5) \cdot (-2)) = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-10} = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$$

Se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq \frac{2}{5}$ $\text{rk}(A) = 3$

- Controlla l'altro minore con $\lambda = \frac{2}{5}$, $\lambda = 1$

$$-\lambda = \frac{2}{5}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & -1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 3 & 1 \\ 2 & \frac{29}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} = 1 \cdot \left(\frac{12}{5} \cdot \frac{29}{5} + 2 \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{36}{5} + \frac{3}{5} \right) \neq 0$$

$$-\lambda = 1$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot (9 - 7) + 2 \cdot (-1) = 0$$

RANGO = 3 se $\lambda \neq 1$

ES2

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 3 \\ 1-\lambda & 3 & 1 & -5\lambda \\ 2 & 5+2\lambda & 3\lambda & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7-\lambda \end{pmatrix}$$

b) Stabilire per quali λ il sistema $Ax=B$ non ammette soluzioni

- Sfruttando rango - capelli cerca il caso in cui $\text{rk}(A|B) > \text{rk}(A)$
Sono sicuro che se il rango è 3, abbiamo ∞^1 soluzioni.
Sapendo che il rango di $A=3$ se $\lambda \neq 1$
- Controllo cosa succede se $\lambda=1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & -9 & 6 \end{array} \right] \quad R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$$

Se $\lambda=1$ non abbiamo soluzioni

ES 3

Dato $A \in M_n$ stabilire se le nelle seguenti situazioni la matrice A è invertibile.

a) $A^3 = I_n$

- La matrice identità è sempre invertibile perché ha $\det = 1$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1_{11} & & & \\ & 1_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1_{nn} \end{bmatrix} \quad \det(A^3) = 1_{11} \cdot 1_{22} \cdot \dots \cdot 1_{nn} = 1 \neq 0$$

b) $A^2 = 0$

- Le matrici che elevate a 2 fanno 0 sono dette nilpotenti e non sono mai invertibili

• Anche per Binet $\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A)$, sapendo che il det di 0 è 0:

$\det(A) \cdot \det(A) = 0$ può essere solo se $\det(A) = 0$ e quindi se A non è invertibile.

c) $A^2 + A = I$

- A non invertibile se $\det = 0$

- $\det I = 1$

$$0 + 0 \cdot 0 \neq 1$$

Non può mai essere non invertibile ed è quindi invertibile

ES4

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ per ognuna delle seguenti situazioni esibire un vettore v_3 che la raddisi.

a) v_1, v_2, v_3 sono una base di \mathbb{R}^3

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A) = -2 \neq 0$$

quindi $\text{rk}(A) = 3$, se $\text{rk} = n^{\text{o}}$ colonne allora è linearmente indipendente

b) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, ma v_3 non è multiplo scalare di v_1 e v_2 .

- Sapendo che $v_1 + v_2$ crea un vettore dipendente da entrambi allora $v_3 = v_1 + v_2$

- Dimostro che è realmente linearmente dipendente: se il rango di $A = [v_1 | v_2 | v_3]$ ≠ n^{o} colonne di A allora i linearmente dipendenti

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

