ES 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare se è invertibile e l'inversa

se $\det(A) \neq 0$ allora è invertibile $\rightarrow$ $\det(A) = 1 \cdot (3-6) = -3$

È invertibile, quindi cerco inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} R_3 \rightarrow -1 R_3 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3} R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 - \frac{2}{3} R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

b) Determinare se esiste la matrice $B \neq I_3$ e non nulla tale che $AB = BA$.

Basta prendere A^{-1}, $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

c) Dire se il sistema $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha soluzioni e determinale.

Essendo una matrice invertibile ammette una sola soluzione.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \; R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -1x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}}$$

ES 2

$\lambda \in R$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Calcolare rK(A) al variare di λ.

- Prendo un minore 3X3, Se det $\neq 0$ allora rK(A) = ordine di A.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (0 - \lambda^2) = -2\lambda^2$$

- Controllo per quali λ det $= 0$

$$-2\lambda^2 = 0$$
$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda = 0$$

$$\boxed{\text{Quando } \lambda \neq 0 \text{ il } rK(A) = 3}$$

- Nel caso il cui $\lambda = 0$ non possono esistere minori 2X2 con det $\neq 0$.

$$\boxed{\text{Quando } \lambda = 0 \text{ il } rK(A) = 1}$$

$\boxed{\text{ES 2}}$

$$\lambda \in R \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Discutere l'esistenza di soluzioni di $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ al variare $\lambda \in R$.

- Se $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Inverto } R_2 \text{ con } R_3 \text{ per ridurre a gradini}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{array}\right]$$

Per il teorema di rouche-capelli abbiamo ∞^1 soluzioni

- Se $\lambda = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Inverto } R_2 \text{ con } R_3 \text{ per ridurre a gradini}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Per il teorema di rouche-capelli abbiamo ∞^{4-2} soluzioni

- Se $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Per il teorema di rouche-capelli abbiamo $\emptyset$ soluzioni

ES 2

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Discutere le soluzioni di $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ al variare di λ e determinale.

- $\lambda = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Per il teorema di rauche-capelli abbiamo ∞^{4-2} soluzioni:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \\ -1x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

TODO

- $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Per il teorema di rauche-capelli abbiamo ∞^{4-2} soluzioni:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

TODO

• $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right]$$

Per il teorema di rouche-capelli abbiamo ∞^1 soluzioni

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \\ \lambda x_4 = 0 \\ \lambda - 1 x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

TODO

$\boxed{ES\ 3}$

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

a)