ES4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Controllo se A è diagonalizzabile

$A = A^T$, quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile.

- Suddivido la matrice A a blocchi ed estraggo le sottomatrici.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- $A_1$

$$\det(A_1 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$\lambda(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$

- Autospazio di $\lambda = 0$

$$A_1 - 0I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Autospazio di $\lambda = 2$

$$A_1 - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} v_1 = -v_2 \\ v_2 = \forall v_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

quindi 0,2 sono autovalori di A con autovettori:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## • $A_2$

$$\det(A_2-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-3-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(-3-\lambda)(2-\lambda)$$

$$(-3-\lambda)(2-\lambda)=0$$

$\lambda_1=-3 \quad \lambda=2$

### • Autospazio di $\lambda=-3$

$$A_2+3I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\end{array}\right] \quad \begin{cases}0=0\\ v_2=0\end{cases} \quad \begin{bmatrix}v_1\\ 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

### • Autospazio di $\lambda=2$

$$A_2-2I=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c}-5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \begin{cases}v_1=0\\ 0=0\end{cases} \quad \begin{bmatrix}0\\ v_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

quindi $-3,2$ sono autovalori di $A$ con autovettori

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

## • Diagonalizzazione

$A=X\cdot\Lambda\cdot X^{-1}$ dove $\Lambda$ è la matrice avente gli autovalori $\lambda$ precedentemente calcolati sulla diagonale principale.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$