SISTEMI LINEARE

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} Ax = b \\ A^{-1} \cdot Ax = A^{-1}b \\ x = A^{-1}b \end{array} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$

\# equazioni = \# righe di A
\# incognite = \# colonne di A

• Teorema di Cramer

- Se M_{nn} allora $Ax = b$ ha $\emptyset$ o più soluzioni solo se $\det(M) = \emptyset$.
- Se M_{nn} allora $Ax = b$ ha un unica soluzione solo se $\det(M) \neq \emptyset$.

Questo significa anche che la matrice è invertibile.

quindi $x = A^{-1}b$ è l'unica soluzione

• Teorema Rauche - Capelli (vale sia per M_{mn} che per M_{nn}).

$Ax = b$ ammette soluzioni solo se $rK(A) = rK(A|B)$

In questo caso le soluzioni sono $\infty^{n - rK(A)}$

- Non ci sono soluzioni se $rK(A) < rK(A|B)$.
- Unica soluzione se $rK(A) = n \rightarrow \infty^{n-rK(A)} = \infty^0 = 1$
- ∞ soluzioni se $rK(A) = rK(A|B)$

ESEMPIO: discutere le soluzioni al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x + tz = 1 \\ 3x + ty - 2z = 2 \\ tx + 2z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & t \\ 3 & t & -2 \\ t & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Trovo il det. perché se $\det \neq 0$ allora ha una sola soluzione.

$$\det(A) = t \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{bmatrix} = t \cdot (4 - t^2) = 4t - t^3$$

$$t(4 - t^2) = 0$$

$$\boxed{t = 0} \qquad \begin{aligned} 4 - t^2 &= 0 \\ -t^2 &= -4 \\ t^2 &= 4 \\ \boxed{t = \pm 2} \end{aligned}$$

Se $t \neq 0$, $t \neq 2$, $t \neq -2$ allora ha 1 sola soluzione

- $t = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - \tfrac{3}{2}R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$rk(A) < rk(A|B)$, quindi $\emptyset$ soluzioni.

- $t = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - \tfrac{2}{3}R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{10}{3} & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rk(A) = rk(A|B)$, quindi ∞^1 soluzioni

- $t = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$rk(A) < rk(A|B)$, quindi $\emptyset$ soluzioni

• SISTEMA LINEARE OMOGENEO ($AX = \emptyset$)

Siamo sicuri del fatto che per $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ esiste almeno una soluzione nulla $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.