

NUCLEO & IMMAGINE di Matrice

$A \in M_{mn}$

$A: R^n \rightarrow R^m$

Nucleo = $\{x \in R^n \text{ tale che } Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Immagine = $\{y \in R^m \text{ tale che } y = Ax\}$

- A è iniettiva se $\text{Ker}(A) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\} \rightarrow \dim \text{Ker } A = 0$
- A è surgettiva se $\text{Im}(A) = R^m \rightarrow \dim \text{Im } A = \text{rk}(A) = m$

TEOREMA

$$\dim \text{Im}(A) = \text{rk}(A)$$

Ed emerge quindi che la somma della dimensione del nucleo e del rango è uguale al numero di colonne

$$n^{\circ} \text{ colonne} = \dim \text{Ker}(A) + \text{rk}(A)$$

COROLLARIO 1

$$\text{rk}(A) = n \Leftrightarrow \text{allora } A \text{ iniettiva}$$

COROLLARIO 2

$$n = m \Leftrightarrow A \text{ iniettiva e surgettiva}$$

ISOMETRIE

Le isometrie sono funzioni che preservano le distanze.

DEFINIZIONE

$A \text{ è isometria} \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n |Av| = |v|$

TEOREMA

$A \text{ ortogonale} \Leftrightarrow A \text{ isometria}$

Se $A^{-1} = A^T$ e quindi $AA^T = I$

$$\det(A) = \pm 1$$

ROTAZIONI

• ROTAZIONI di \mathbb{R}^2



$$v_{G_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$v_{G_2} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE CHE È ORTOGONALE.

$$V \cdot V^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1}$$

La rotazione inversa è quindi l'inversa della matrice (in questo caso è ortogonale e quindi è la trasposta).

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTAZIONI di GIVENS: ESEMPIO

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

VOGLIO AZZERARE
QUESTO ELEMENTO

$$G_1 = G_{(1,5)} = \begin{bmatrix} C & & -S \\ 1 & 1 & 1 \\ S & & C \end{bmatrix} \quad C = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$S = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = -\frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

i j

$$G_1 X = \begin{bmatrix} C & & -S \\ 1 & 1 & 1 \\ S & & C \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i DIVENTA $\sqrt{x_i^2 + x_j^2}$
 j SI AZZERA

$$G_1 X = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{VOGLIO AZZERARE QUESTO ELEMENTO}$$

$$G_2 = G_{(1,3)} = \begin{bmatrix} C & & -S \\ S & 1 & 1 \\ & 1 & C \end{bmatrix} \quad C = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2 + \sqrt{10}^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

$$S = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2 + \sqrt{10}^2}} = -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

$$G_2 G_1 X = \begin{bmatrix} C & & -S \\ S & 1 & 1 \\ & 1 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

...

