ES1

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire il numero di soluzioni di $AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ al variare di λ.

- Riduco a gradini per applicare il teorema rouche-capelli

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \lambda R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3+\lambda & 9-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3+\lambda & 9-\lambda^2 & 0 \end{array}\right]$$

Se $\lambda \neq -3$ e $\lambda \neq 1$ abbiamo ∞^{4-3} soluzioni

- Controllo cosa succede se $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{1}{2} R_2]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Se $\lambda = 1$ abbiamo ∞^{4-3} soluzioni

- Controllo cosa succede se $\lambda = -3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se $\lambda = -3$ abbiamo ∞^{4-2} soluzioni

ES1

$\lambda \in R \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) al variare di λ determinare (se esiste) un vettore dei termini noti $B \in R^3$ tale che il sistema $AX = B$ non abbia soluzioni.

- Nel caso in cui $\lambda = -3$, qualsiasi vettore che abbia un valore $\neq 0$ al terzo elemento, ci fa ottenere $rK(A|B) > rK(A)$ e quindi nessuna soluzione possibile.

esempio: $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$rK(A|B) > rK(A)$ e quindi per il teorema di rouché-capelli abbiamo $\emptyset$ sol

ES 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire se A è invertibile, in caso affermativo determinalo

- A è invertibile se $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = 1 \cdot (-4-2) + 1 \cdot (3-0) = -6+3 = -3$$

$\det(A) \neq 0$ quindi è invertibile.

- Trovo l'inversa

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b) Stabilire se esiste un vettore $x \in \mathbb{R}^3$ perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tale che $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right]$$