• PRODOTTO TRA MATRICI

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

STESSO NUMERO

#Righe A·B

#Colonne A·B

• MATRICE INVERSA

A è invertibile se esiste B tale che:

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

B si denota come A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$$\boxed{\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I \\ 2 \cdot \frac{1}{2} &= 1 \end{aligned}}$$

• DETERMINANTE

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{12} - a_{21} a_{12}$$

$$\det \begin{bmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \overset{-}{a_{23}} \\ \overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{32}} & \overset{+}{a_{33}} \end{bmatrix} = +a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \ldots$$

Una matrice è invetibile se $\det \neq 0$.

• TEOREMA DI BINET

$$A^2 + A = A(A+I)$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

• RANGO

- Se $\det \neq 0$ il rango è l'ordine della matrice.
- Se $\det = 0$ il rango è l'ordine del minore più grande
- In ogni caso il rango coincide con il numero di pivot

• VETTORI

- Lunghezza: $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$
- Prodotto scalare: $v \cdot w = (v_1, v_2) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

$$v \cdot w = 0 \Leftrightarrow v \perp w$$

- I vettori sono lin. dipendenti se $[v\, w \,|\, 0]$ ha soluzioni diverse da $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi se ha $rk >$ n° di colonne.
- I vettori sono lin. indipendenti se $[v\, w \,|\, 0]$ ha come soluzione solo $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi se ha $rk =$ n° di colonne.

- Prodotto vettoriale: $v \wedge w =$
  (TROVO VETTORE LIN. IND)

$$\det \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_3 \\ -v_1 w_3 + v_3 w_1 \\ v_1 w_2 + v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

• TEOREMA di CRAMER (vale solo per M_{nn})

- Se M_{nn} allora $Ax = b$ ha $\emptyset$ o più soluzioni solo se $\det(M) = \emptyset$.
- Se M_{nn} allora $Ax = b$ ha un unica soluzione solo se $\det(M) \neq \emptyset$.

• TEOREMA RAUCHE - CAPELLI (vale sia per M_{mn} che per M_{nn}).

$Ax = b$ ammette soluzioni solo se $rK(A) = rK(A|B)$

In questo caso le soluzioni sono $\infty^{n - rK(A)}$

- Non ci sono soluzioni se $rK(A) < rK(A|B)$.
- Unica soluzione se $rK(A) = n \rightarrow \infty^{n - rK(A)} = \infty^0 = 1$
- ∞ soluzioni se $rK(A) = rK(A|B)$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}}$$