NUCLEO e IMMAGINE di Matrice

$A \in M_{mn}$ $\quad$ $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Nucleo $= \{x \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}$

Immagine $= \{y \in \mathbb{R}^m$ tale che $y = Ax\}$

- A è iniettiva se $\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \dim \mathrm{Ker} A = 0$

- A è surgettiva se $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m \to \dim \mathrm{Im}(A) = rK(A) = m$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

$$\dim \mathrm{Im}(A) = rK(A)$$

Ed emerge quindi che la somma della dimensione del nucleo e del rango è uguale al numero di colonne

$$n^\circ \text{ colonne} = \dim \mathrm{Kern}(A) + rK(A)$$

$\boxed{\text{COROLLARIO 1}}$ $\quad rK(A) = n \Leftrightarrow$ allora A iniettiva

$\boxed{\text{COROLLARIO 2}}$ $\quad m = n \Leftrightarrow$ A iniettiva e surgettiva

ISOMETRIE

Le isometrie sono funzioni che preservano le distanze.

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ A è isometria $\Leftrightarrow \forall v \in R^n \; |Av| = |v|$

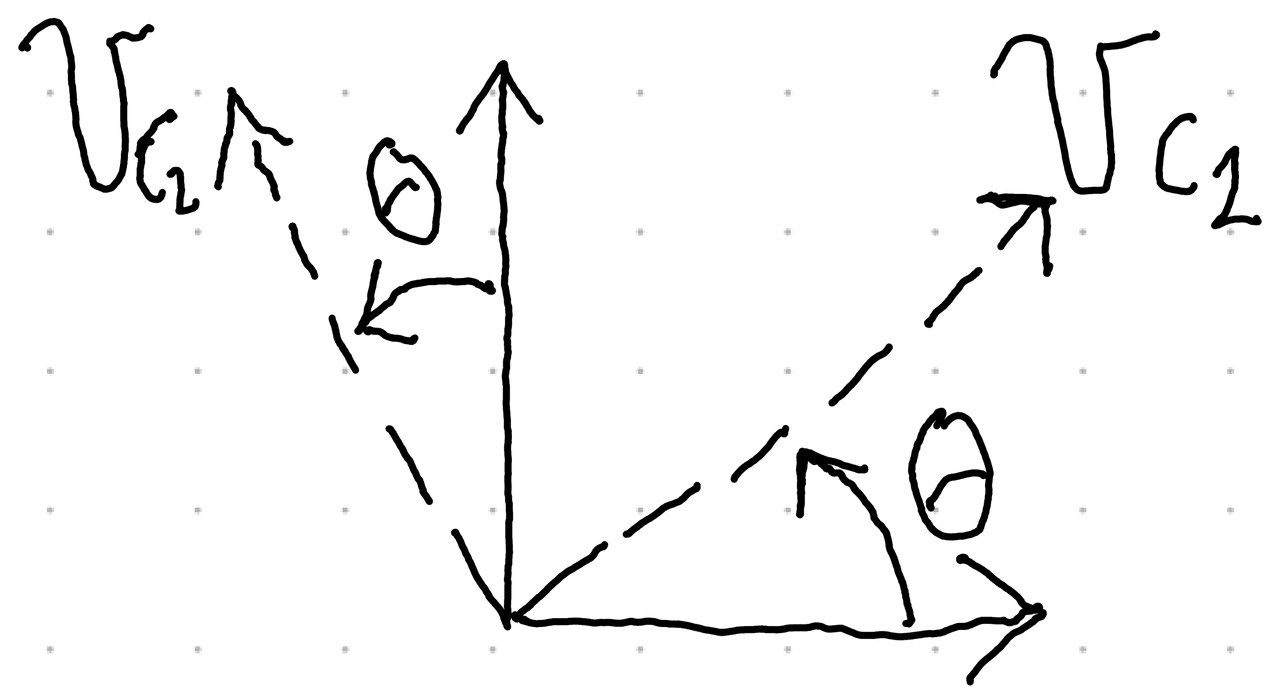
$\boxed{\text{TEOREMA}}$ A ortogonale $\Leftrightarrow$ A isometria

Se $A^{-1} = A^T$ e quindi $AA^T = I$

$\det(A) = \pm 1$

ROTAZIONI

• ROTAZIONI di $\mathbb{R}^2$



$$V_{C_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \quad V_{C_2} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE CHE È ORTOGONALE.

$$V \cdot V^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2+s^2 & cs-sc \\ cs-sc & s^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{c^2+s^2=1}$$

La rotazione inversa è quindi l'inversa della matrice (in questo caso è ortogonale e quindi è la trasposta).

$$R = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTAZIONI di GIVENS: ESEMPIO

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

VOGLIO AZZERARE
QUESTO ELEMENTO

$$G_1 = G_{(1,5)} = \begin{bmatrix} c & & & & -s \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ s & & & & c \end{bmatrix}$$

i j

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = -\frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$G_1 X = \begin{bmatrix} c & & & & -s \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ s & & & & c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i DIVENTA $\sqrt{x_i^2+x_j^2}$

j SI AZZERA

$$G_1 X = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VOGLIO AZZERARE
QUESTO ELEMENTO

$$G_2 = G_{(1,3)} = \begin{bmatrix} c & & -s & & \\ & 1 & & & \\ s & & c & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2+\sqrt{10}^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

$$s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2+\sqrt{10}^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

$$G_2 G_1 X = \begin{bmatrix} c & & -s & & \\ & 1 & & & \\ s & & c & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

...