

1.2

$$P(X=1) = P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

$$P(Y=4) P(Y=4, X=1) + P(Y=4, X=4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(X=1 | Y=4) = \frac{P(X=1, Y=4)}{P(Y=4)} = \frac{1/6}{1/2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(Y=4 | X=1) = \frac{P(Y=4, X=1)}{P(X=1)} = \frac{1/6}{5/12} = \boxed{\frac{12}{30}}$$

Le variabili sono dipendenti perché $P(Y=4 | X=1) \neq P(Y=4)$

1.3

$$\begin{cases} 1/2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

CDF

da -1 a 0 \rightarrow $\int_{-1}^x \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{x+1}{2}}$

da 1 a 2 \rightarrow $\int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_1^x \frac{1}{2} dx = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2}}$

$$\begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

2.1

Se $H(X) = 3$ e $H(X,Y) = 4$ cosa si può dire di $H(Y)$

Potriamo sicuramente dire che $H(Y) \geq H(Y|X)$ e che $H(Y) + H(X) \geq H(X,Y)$, se le variabili sono indipendenti allora $H(Y) = H(Y|X)$ e $H(Y) + H(X) = H(X,Y)$ quindi $H(Y) = 1$

2.2

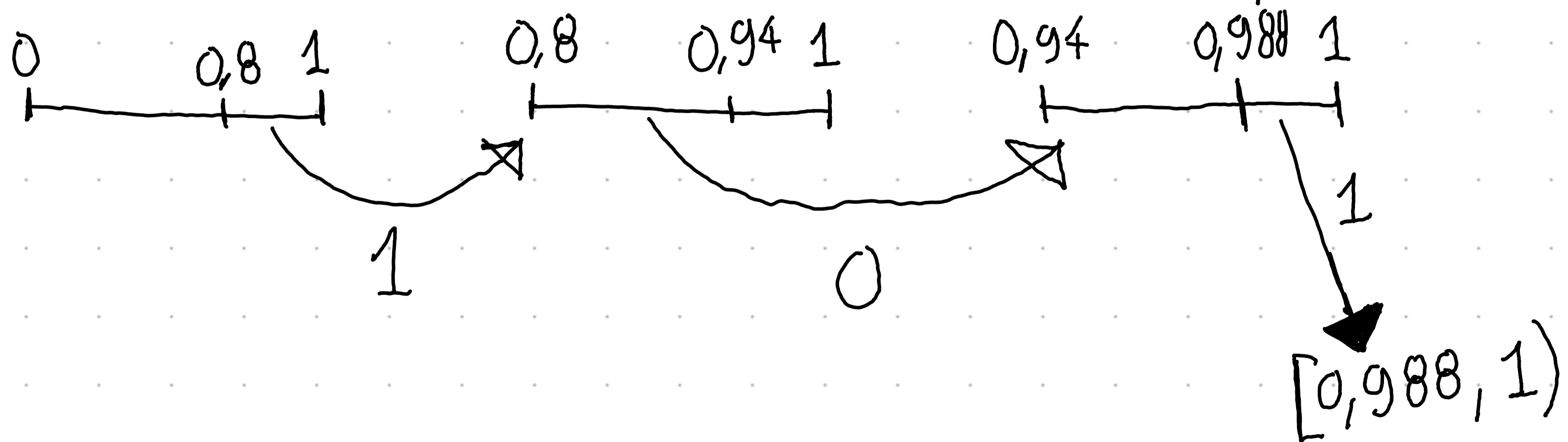
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Effatti per la diseguaglianza Kraft McMillan

$$\sum_i \frac{1}{2^{L_i}} = \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^4} = 1$$

2.3

Codifica aritmetica $p(0) = 0,8$, $p(1) = 0,2$ per 101.



2.4

3.1

Se $p = \uparrow(T)$ Verosimiglianza $p = 1/3$ e $p = 2/3$ di una moneta che lanciata 5 volte produce 2 testa e 3 croce.

0 = CROCE 1 = TESTA e non uccide 2T e 3C

$$\text{Verosimiglianza} = P^{0+0+0+1+1} \cdot (1-P)^{5-0-0-0-1-1}$$

$$\text{Verosimiglianza}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} = 0,032$$

$$\text{Verosimiglianza}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}^2 \cdot \frac{1}{3}^3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27} = 0,016$$

3.3

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a0,4 + 0,5 - a0,5 & a0,6 + 0,5 - a0,5 \\ 0,1a + 0,5 & a0,1 + 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,1a + 0,5 = a \\ -1,1a = -0,5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{5}{11} \\ 1-a = \frac{6}{11} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{ll} 5/11 & 6/11 \end{array} \right]$$