AUTOVALORI e AUTOVETTORI

ESEMPIO:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Controllo se A è diagonalizzabile**

$A = A^T$, quindi per il teorema spettrale è diagonizzabile.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$

- **Autospazio di $\lambda = 1$**

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} v_1 = -v_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Autospazio di $\lambda = 3$**

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} v_1 = v_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Creo X**

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = X^{-1} A \cdot X \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{X^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

METODO DELLE POTENZE

Per essere convergente al metodo delle potenze deve rispettare le seguenti 2 ipotesi:

1) La matrice deve avere autovalori e i loro <u>moduli</u> devono essere ordinati in modo decrescente, dopo averli riordinati il primo deve essere maggiore al secondo:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

2) I corrispondenti autovettori devono essere linearmente indipendente

La velocità con il quale converge è $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^K$