Politecnico di Torino
Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"

DISMA ECCELLENZA 2018·2022

Il teorema di Frobenius

Candidato:
Federico Riccardi

Relatore:
Prof. G. Manno

Laurea in Matematica per l'Ingegneria

Domanda iniziale

Consideriamo il seguente sistema in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La soluzione (non banale) è molto semplice: $f(x, y, z) = F(z)$ con F una qualsiasi funzione derivabile. La risoluzione di questo invece è molto meno immediata:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Nonostante ciò, una soluzione non banale è $f(x, y, z) = yze^{-x}$.

Se consideriamo infine questo sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

si dimostra che non ha soluzioni non costanti.
Possiamo quindi, in generale, chiederci quando un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_1^j(x)\frac{\partial f}{\partial x^j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} X_r^j(x)\frac{\partial f}{\partial x^j} = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non costanti.

Per rispondere a questa domanda possiamo tradurre il problema in linguaggio geometrico.

Notiamo infatti che ad ogni PDE corrisponde un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} X_i^j(x)\frac{\partial f}{\partial x^j} \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} X_i^j(x)\hat{e}_j, \quad i = 1, \dots, r$$

e quindi il sistema è, in un certo senso, un “insieme” di campi vettoriali.

Per proseguire su questa strada è necessario introdurre le strutture corrette su cui ambientare il problema, definire i campi vettoriali, cosa si intende per “insieme” di campi vettoriali e cos’è una soluzione in questo senso.

Capitolo 1 - Varietà differenziabili

L'ambiente migliore per formalizzare il problema è quello delle *varietà differenziabili* (più correttamente C^∞-differenziabili), ovvero delle varietà (cioè spazi localmente euclidei) in cui i cambi di coordinate fra le carte sono differenziabili.
Senza entrare nei dettagli, diciamo che le varietà differenziabili sono la struttura adatta da usare perché permettono di estendere gli strumenti dell'analisi a spazi non euclidei.

Capitolo 2 - Campi vettoriali

Sulle varietà differenziabili, grazie alla loro struttura, possiamo definire vettori e spazi tangenti.

Vettori tangenti

Data una varietà differenziabile M e un suo punto p, un **vettore tangente a** M **in** p è una funzione $v : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ lineare e che soddisfa la regola di Leibniz. L'insieme dei vettori tangenti in p è detto *spazio tangente a* M *in* p e si indica con T_pM.

Una volta definiti i vettori tangenti, la definizione di campo vettoriale segue in modo naturale:

Campo vettoriale

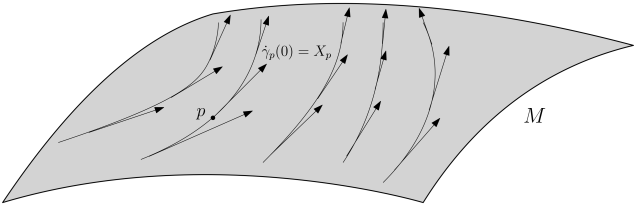
Un **campo vettoriale** su M è una funzione X che ad ogni punto $p \in M$ associa $X_p \in T_pM$.

Questa assegnazione deve essere in accordo con la struttura della varietà e quindi si richiede che sia differenziabile al variare del punto p.
Poiché i vettori tangenti agiscono sulle funzioni di $C^\infty(M)$ possiamo vedere i campi vettoriali come funzioni da $C^\infty(M)$ in sé ponendo

$$(Xf)(p) = X_p(f) \ \forall p \in M.$$

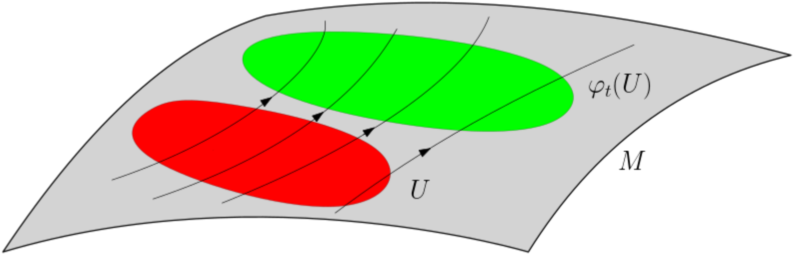
In questo senso, i campi vettoriali sono delle *derivazioni*.

Senza addentrarci nei dettagli, se abbiamo una curva su una varietà $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ possiamo, per ogni istante $t_0 \in I$, definire il vettore tangente alla curva in $\gamma(t_0)$, e lo indichiamo con $\dot{\gamma}(t_0)$, in analogia con quanto si fa nel caso di curve e superfici.
Se abbiamo un campo vettoriale X su M, una curva è detta **curva integrale di** X se $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \forall t \in I$. Si dimostra che, per ogni punto $p \in M$, esiste un un'unica curva integrale di X passante per p, che indichiamo con γ_p, tale che $\gamma_p(0) = p$.



Campo vettoriale con curve integrali

Possiamo, in un certo senso, “ribaltare” il modo di vedere le curve integrali. Consideriamo infatti la funzione $\varphi_t : M \to M$ che ad ogni punto p associa $\gamma_p(t)$. Questa è detta **flusso locale di X**.



Flusso locale

Capitolo 3 - Teorema di Frobenius

Arriviamo quindi al capitolo conclusivo. Prima di procedere diamo le seguenti definizioni.

Distribuzione

Una **distribuzione** r-**dimensionale** $\mathcal{D}$ su una varietà M è un'assegnazione di un sottospazio r-dimensionale $\mathcal{D}_p$ di T_pM. Diciamo che un campo X appartiene a $\mathcal{D}$ se $X_p \in \mathcal{D}_p \ \forall p \in M$.

Varietà integrale

Una sottovarietà N di M è una **varietà integrale** della distribuzione $\mathcal{D}$ se $T_pN = \mathcal{D}_p \ \forall p \in N$.

Distribuzione completamente integrabile

Una distribuzione $\mathcal{D}$ di dice **completamente integrabile** se ammette una varietà integrale per ogni $p \in M$.

Possiamo ora riformulare in modo geometrico e formale il quesito da cui siamo partiti, ovvero la ricerca di soluzioni non costanti del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} X_i^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j} = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Questo, infatti, non è altro che una distribuzione r-dimensionale e la ricerca di soluzione equivale alla ricerca delle sue varietà integrali. Per quanto accennato prima, una distribuzione 1-dimensionale (cioè un singolo campo) è sempre completamente integrabile e le sue varietà integrali sono le curve integrali.
Possiamo quindi chiederci: cosa accade nel caso di distribuzioni a più dimensioni? È vero che sono sempre completamente integrabili?
La risposta è: no.

Come derivazioni, i campi vettoriali possono essere composti. Diamo quindi la seguente definizione:

Bracket o commutatore di campi

Il **bracket** di due campi X, Y è:

$$[X, Y] := XY - YX, \quad f \in C^\infty(M) \mapsto X(Yf) - Y(Xf).$$

Si dimostra che il bracket di due campi vettoriali è ancora un campo vettoriale. Due campi tali che $[X, Y] = 0$ si dicono **commutativi**

Distribuzione involutiva

Una distribuzione $\mathcal{D}$ si dice **involutiva** se, dati due campi X, Y che appartengono a $\mathcal{D}$, anche il loro commutatore $[X, Y]$ sta in $\mathcal{D}$.

Notiamo che questa condizione, in generale, è molto semplice da verificare. Prendiamo ad esempio le distribuzioni degli esempi iniziali:

$$\mathcal{D}_1 = \langle \partial_x + y\partial_y, \partial_x + z\partial_z \rangle, \quad \mathcal{D}_2 = \langle \partial_x + z\partial_y, \partial_z \rangle.$$

(dove con $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ indichiamo che le distribuzioni sono generate da quei campi). Allora è abbastanza semplice vedere che la prima è involutiva mentre la seconda no:

$$\begin{aligned}[\partial_x + y\partial_y, \partial_x + z\partial_z] &= 0 \in \mathcal{D}_1\\ [\partial_x + z\partial_y, \partial_z] &= -\partial_y \notin \mathcal{D}_2.\end{aligned}$$

Teorema di Frobenius

Una distribuzione r-dimensionale $\mathcal{D}$ è completamente integrabile se e solo se è involutiva.

Il teorema permette quindi di verificare in modo molto semplice se una distribuzione è completamente integrabile o meno.
La dimostrazione del teorema (l'implicazione involutiva $\implies$ completamente integrabile) sfrutta tutto quello visto in precedenza:
se la distribuzione è involutiva si possono trovare dei campi commutativi che la generano. Questi hanno una proprietà geometrica molto importante, ovvero anche i loro flussi commutano. Componendo questi flussi otteniamo la funzione che ci dà la varietà integrale che è "costruita" come una sorta di ragnatela, seguendo le curve dei flussi.

Applichiamo il teorema a uno dei sistemi iniziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

la cui distribuzione associata $\mathcal{D}_1 = \langle \partial_x + y\partial_y, \partial_x + z\partial_z \rangle = \langle X, Y \rangle$ abbiamo visto essere involutiva. Il teorema di Frobenius quindi ci garantisce che essa è anche completamente integrabile. Le curve integrali dei due campi passanti per il punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sono:

$$\gamma_{p_0}^X(t) = (x_0 + t, y_0 e^t, z_0), \quad \gamma_{p_0}^Y(t) = (x_0 + t, y_0, z_0 e^t)$$

da cui è semplice ottenere i flussi. Componendo questi ultimi otteniamo l'espressione parametrica delle varietà integrali:

$$\varphi(u, v) = (\varphi_u^X \circ \varphi_v^Y)(x_0, y_0, z_0) = (x_0 + u + v, y_0 e^u, z_0 e^v).$$

Notiamo che, per tutti i punti della varietà passante per p_0 è costante la seguente quantità:

$$yze^{-x} = y_0 e^u z_0 e^v e^{-x_0 - u - v} = y_0 z_0 e^{-x_0} = k \in \mathbb{R}.$$

Questo ci dice che le varietà integrali sono le curve di livello delle funzioni della forma $F(yze^{-x})$ che sono le soluzioni (al variare delle funzioni F derivabili) del sistema.

Grazie per l'attenzione

Politecnico
di Torino

1859