Politecnico di Torino
Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"

DISMA ECCELLENZA 2018·2022

Recent results on the norm of localization operators

Candidato:
Federico Riccardi

Relatore:
Prof. F. Nicola

Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Introduzione

Problema: trattare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;

Introduzione

Problema: trattare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;

Motivazioni: analizzare il segnale ed estrarne informazioni rilevanti, filtrare componenti non desiderate, rilevare frequenze più energetiche;

Introduzione

Problema: trattare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;

Motivazioni: analizzare il segnale ed estrarne informazioni rilevanti, filtrare componenti non desiderate, rilevare frequenze più energetiche;

Obiettivo: localizzare il segnale in modo da concentrare il più possibile le informazioni;

Introduzione

Problema: trattare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;

Motivazioni: analizzare il segnale ed estrarne informazioni rilevanti, filtrare componenti non desiderate, rilevare frequenze più energetiche;

Obiettivo: localizzare il segnale in modo da concentrare il più possibile le informazioni;

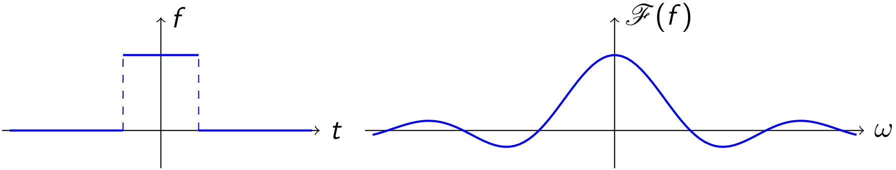
Come fare: trasformate, ad esempio la trasformata di Fourier $\mathscr{F}$, trasformate tempo-frequenza, come la short-time Fourier transform, operatori di localizzazione.

Introduzione

Principi di indeterminazione

L'obiettivo di localizzare un segnale si scontra con un limite fondamentale, ovvero i *principi di indeterminazione*, il cui messaggio principale è:

una funzione non può essere troppo concentrata sia in tempo che in frequenza.



Esempio di funzione ben concentrata in tempo con trasformata poco concentrata in frequenza.

Introduzione

Esempio: principio di indeterminazione di Heisenberg

Theorem

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega-b)^2 |\mathscr{F} f(\omega)|^2\, d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Le funzioni che raggiungono l'uguaglianza sono solo le gaussiane.

Introduzione

Esempio: principio di indeterminazione di Heisenberg

Theorem

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega-b)^2 |\mathscr{F} f(\omega)|^2 \, d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Le funzioni che raggiungono l'uguaglianza sono solo le gaussiane.

Interpretazione: i due integrali si possono vedere come misure della concentrazione di f e $\mathscr{F} f$ vicino ai punti a e b, rispettivamente. Se una delle concentrazioni è "piccola", l'altra deve essere "grande".

Short-time Fourier transform

La *short-time Fourier transform*, in breve *STFT*, è una trasformata tempo frequenza. Prima di definirla, dobbiamo introdurre gli operatori di traslazione e modulazione. Dati $x, \omega \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$T_x f(t) = f(t - x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t).$$

Short-time Fourier transform

La *short-time Fourier transform*, in breve *STFT*, è una trasformata tempo frequenza. Prima di definirla, dobbiamo introdurre gli operatori di traslazione e modulazione. Dati $x, \omega \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t).$$

La short-time Fourier transform di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ rispetto alla finestra $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ è data da:

$$\mathcal{V}_\phi f(x,\omega) = \langle f, M_\omega T_x \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\phi(t-x)} e^{-2\pi i \omega t} \, dt$$

Short-time Fourier transform

La *short-time Fourier transform*, in breve *STFT*, è una trasformata tempo frequenza. Prima di definirla, dobbiamo introdurre gli operatori di traslazione e modulazione. Dati $x, \omega \in \mathbb{R}$ abbiamo:

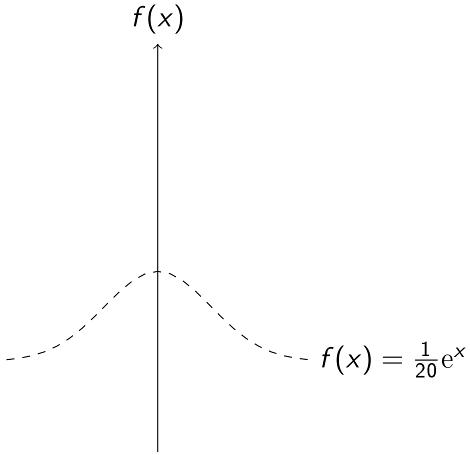
$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t).$$

La short-time Fourier transform di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ rispetto alla finestra $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ è data da:

$$\mathcal{V}_\phi f(x,\omega) = \langle f, M_\omega T_x \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi(t-x)} e^{-2\pi i \omega t} \, dt$$

Per avere una buona risoluzione, bisogna scegliere una finestra ben concentrata sia in tempo che in frequenza. Per questo, ci concentriamo sulla STFT con finestra gaussiana normalizzata $\varphi(t) = 2^{1/4} e^{-\pi t^2}$.

Short-time Fourier transform


$f(x)$
$f(x) = \frac{1}{20}\mathrm{e}^{x}$

contenuto...

contenuto...

contenuto...

Grazie per l'attenzione

Politecnico
di Torino

1859