Politecnico di Torino
Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"
DISMA
ECCELLENZA 2018·2022

Recent results on the norm of localization operators

Candidato:
Federico Riccardi

Relatore:
Prof. F. Nicola

Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Introduzione

- **Problema**: trattare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;

Introduzione

- **Problema**: trattare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;
- **Motivazioni**: analizzare il segnale ed estrarne informazioni rilevanti, filtrare componenti non desiderate;

Introduzione

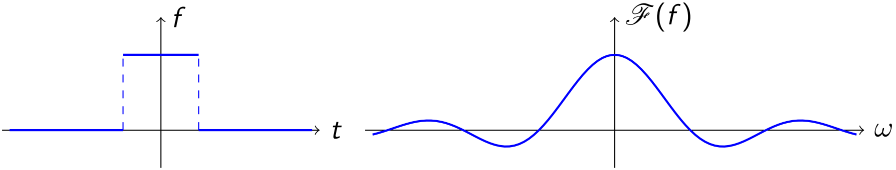
- **Problema**: trattare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;
- **Motivazioni**: analizzare il segnale ed estrarne informazioni rilevanti, filtrare componenti non desiderate;
- **Come fare**: trasformate, ad esempio la trasformata di Fourier $\mathscr{F}$, trasformate tempo-frequenza, come la short-time Fourier transform, operatori di localizzazione.

Introduzione

Principi di indeterminazione

L'obiettivo di localizzare un segnale si scontra con un limite fondamentale, ovvero i *principi di indeterminazione*. Esistono numerosi principi di indeterminazione, ognuno espressione del seguente concetto:

una funzione non può essere troppo concentrata sia in tempo che in frequenza.



Esempio di funzione ben concentrata in tempo con trasformata poco concentrata in frequenza.

Introduzione

Esempio: principio di indeterminazione di Heisenberg

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - b)^2 |\mathscr{F} f(\omega)|^2 \, d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Le funzioni che raggiungono l'uguaglianza sono solo le gaussiane.

Interpretazione: i due integrali si possono vedere come misure della concentrazione di f e $\mathscr{F} f$ vicino ai punti a e b, rispettivamente. Se una delle concentrazioni è "piccola", l'altra deve essere "grande".

Short-time Fourier transform

Definizione

La *short-time Fourier transform*, in breve *STFT*, è una trasformata tempo-frequenza. Prima di definirla, dobbiamo introdurre gli operatori di traslazione e modulazione. Dati $x, \omega \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t).$$

Short-time Fourier transform

Definizione

La *short-time Fourier transform*, in breve *STFT*, è una trasformata tempo-frequenza. Prima di definirla, dobbiamo introdurre gli operatori di traslazione e modulazione. Dati $x, \omega \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t).$$

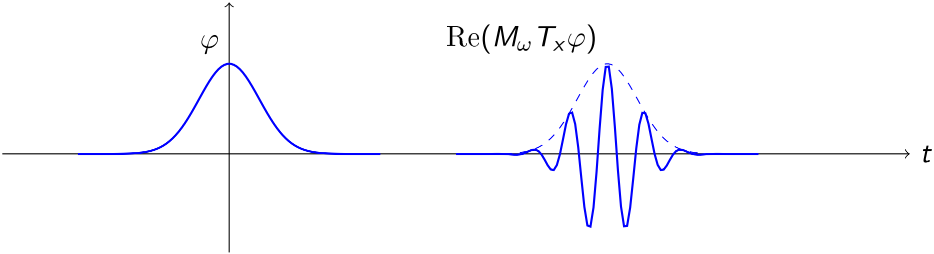
Short-time Fourier transfrom

La short-time Fourier transform di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ rispetto alla finestra $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ è data da:

$$\mathcal{V}_\phi f(x,\omega) = \langle f, M_\omega T_x \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\phi(t-x)} e^{-2\pi i \omega t}\, dt$$

Short-time Fourier transform

Finestra gaussiana



Per avere una buona risoluzione è necessario scegliere una finestra ben localizzata sia in tempo che in frequenza. Una scelta ottimale è quindi una finestra gaussiana normalizzata

$$\varphi(t) = 2^{1/4} e^{-\pi t^2}.$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa unitario:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa unitario:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R})$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa unitario:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa unitario:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto F\mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa unitario:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto F\mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto \mathcal{V}_\varphi^* F \mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R})$$

Operatore di localizzazione in tempo-frequenza - Daubechies 1988 [5]

Data una finestra $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, l'operatore di localizzazione in tempo-frequenza con finestra φ e peso F è definito da

$$L_{F,\varphi} := \mathcal{V}_\varphi^* F \mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

A seconda del peso scelto, il corrispondente operatore $L_{F,\varphi}$ avrà alcune proprietà:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

A seconda del peso scelto, il corrispondente operatore $L_{F,\varphi}$ avrà alcune proprietà:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

A seconda del peso scelto, il corrispondente operatore $L_{F,\varphi}$ avrà alcune proprietà:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;
- se $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore integrale di Hilbert-Schmidt e la sua norma di Hilbert-Schmidt è minore o uguale di $\|F\|_1$;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

A seconda del peso scelto, il corrispondente operatore $L_{F,\varphi}$ avrà alcune proprietà:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;
- se $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore integrale di Hilbert-Schmidt e la sua norma di Hilbert-Schmidt è minore o uguale di $\|F\|_1$;
- se $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ è un operatore di classe traccia;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

A seconda del peso scelto, il corrispondente operatore $L_{F,\varphi}$ avrà alcune proprietà:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;
- se $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore integrale di Hilbert-Schmidt e la sua norma di Hilbert-Schmidt è minore o uguale di $\|F\|_1$;
- se $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ è un operatore di classe traccia;
- se F è radialmente simmetrica, ovvero $F(x,\omega) = \mathcal{F}(r^2)$ con $r^2 = x^2 + \omega^2$, le autofunzioni di $L_{F,\varphi}$ sono le funzioni di Hermite e i corrispondenti autovalori sono dati da

$$\lambda_k = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}\left(\frac{s}{\pi}\right) s^k e^{-s}\, ds.$$

Risultati recenti

Disuguaglianza di Faber-Krahn per la STFT

Recentemente, il seguente risultato è stato ottenuto in [24].

Disuguaglianza di Faber-Krahn per la STFT

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ misurabile di misura finita si ha

$$\int_{\Omega} |\mathcal{V}_\varphi f(x,\omega)|^2 \, dx \, d\omega \leq (1 - e^{-|\Omega|}) \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{V}_\varphi f(x,\omega)|^2, \tag{1}$$

con uguaglianza se e solo se Ω è una palla di centro $(x_0, \omega_0) \in \mathbb{R}^2$ e f è una gaussiana traslata e modulata, ovvero $f = cM_{\omega_0} T_{x_0} \varphi$ con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Risultati recenti

Disuguaglianza di Faber-Krahn per la STFT

Questo risultato può essere riformulato in termini di norma di operatori di localizzazione con funzione indicatrice come peso. Infatti:

$$\int_\Omega |\mathcal{V}_\varphi f(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega = \langle \chi_\Omega \mathcal{V}_\varphi f, \mathcal{V}_\varphi f\rangle = \langle \mathcal{V}_\varphi^* \chi_\Omega \mathcal{V}_\varphi f, f\rangle = \langle L_{\Omega,\varphi} f, f\rangle.$$

Risultati recenti

Disuguaglianza di Faber-Krahn per la STFT

Questo risultato può essere riformulato in termini di norma di operatori di localizzazione con funzione indicatrice come peso. Infatti:

$$\int_\Omega |\mathcal{V}_\varphi f(x,\omega)|^2 \, dx \, d\omega = \langle \chi_\Omega \mathcal{V}_\varphi f, \mathcal{V}_\varphi f \rangle = \langle \mathcal{V}_\varphi^* \chi_\Omega \mathcal{V}_\varphi f, f \rangle = \langle L_{\Omega,\varphi} f, f \rangle.$$

Poiché $\mathcal{V}_\varphi$ è un'isometria, da (1) otteniamo:

$$\langle L_{\Omega,\varphi} f, f \rangle \le (1 - e^{-|\Omega|}) \|f\|_2^2.$$

Prendendo l'estremo superiore fra tutte le $f \in L^2(\mathbb{R})$ normalizzate si ottiene

$$\|L_{\Omega,\varphi}\| \le 1 - e^{|\Omega|},$$

con uguaglianza se e solo se Ω è una palla.

Risultati recenti

Stime ottimali sulla norma di $L_{F,\varphi}$: vincoli L^p e L^∞

Se immaginiamo quindi di fissare un limite s alla misura di Ω, quanto ottenuto ci dice che se $|\Omega| \leq s$ allora $\|L_{\Omega,\varphi}\| \leq 1 - e^{-s}$.

Risultati recenti

Stime ottimali sulla norma di $L_{F,\varphi}$: vincoli L^p e L^∞

Se immaginiamo quindi di fissare un limite s alla misura di Ω, quanto ottenuto ci dice che se $|\Omega| \leq s$ allora $\|L_{\Omega,\varphi}\| \leq 1 - e^{-s}$.
Anziché considerare solo funzioni indicatrici, si potrebbero prendere funzioni peso generiche F e tradurre il vincolo $|\Omega| \leq s$ in un vincolo sulla norma di F in qualche spazio di Lebesgue.

Risultati recenti

Stime ottimali sulla norma di $L_{F,\varphi}$: vincoli L^p e L^∞

Se immaginiamo quindi di fissare un limite s alla misura di Ω, quanto ottenuto ci dice che se $|\Omega| \leq s$ allora $\|L_{\Omega,\varphi}\| \leq 1 - e^{-s}$.
Anziché considerare solo funzioni indicatrici, si potrebbero prendere funzioni peso generiche F e tradurre il vincolo $|\Omega| \leq s$ in un vincolo sulla norma di F in qualche spazio di Lebesgue. In [25] è stato considerato il seguente problema:

$$\text{trovare } C > 0 \text{ tale che } \|L_{F,\varphi}\| \leq C \text{ per ogni } F \text{ che soddisfa}$$
$$\|F\|_\infty \leq A \text{ e } \|F\|_p \leq B,$$

dove $p \in [1, +\infty)$, $A \in (0, +\infty]$ e $B \in (0, +\infty)$.

Risultati recenti

Stime ottimali sulla norma di $L_{F,\varphi}$: vincoli L^p e L^q

Nella mia tesi ho considerato l'analogo problema con due vincoli di tipo L^p:

$$\text{trovare } C > 0 \text{ tale che } \|L_{F,\varphi}\| \leq C \text{ per ogni } F \text{ che soddisfa}$$
$$\|F\|_p \leq A \text{ e } \|F\|_q \leq B,$$

dove $p, q \in (1, +\infty)$, $A, B \in (0, +\infty)$.

Risultati recenti

Stime ottimali sulla norma di $L_{F,\varphi}$: vincoli L^p e L^q

Teorema

Esistono due costanti $c_1 < c_2$, che dipendono solo da p e q, tali per cui:

1. se $B/A \leq c_1$ o se $B/A \geq c_2$, rispettivamente il vincolo L^q e L^p sono superflui, quindi la costante C e le funzioni peso che raggiungono il massimo sono date dal caso con un solo vincolo. In particolare, queste sono gaussiane traslate.

Risultati recenti

Stime ottimali sulla norma di $L_{F,\varphi}$: vincoli L^p e L^q

Teorema

Esistono due costanti $c_1 < c_2$, che dipendono solo da p e q, tali per cui:

2. se $c_1 < B/A < c_2$ allora

$$\|L_{F,\varphi}\| \leq \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-u(t)}\right) dt, \tag{2}$$

dove $u(t) = \max\{-\log(\lambda_1 t^{p-1} + \lambda_2 t^{q-1}), 0\}$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sono univocamente determinati da

$$p \int_0^{+\infty} t^{p-1} u(t)\, dt = A^p, \quad q \int_0^{+\infty} t^{q-1} u(t)\, dt = B^q.$$

Infine, l'uguaglianza in (2) si ha se e solo se F è (a meno di traslazioni) radialmente simmetrica e ha u come funzione di distribuzione.

Risultati recenti

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Il primo passo viene suggerito da un Teorema presente in [25].

Teorema

Data $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ e indicando con $\mu(t) = |\{|F| > t\}|$ la funzione di distribuzione di $|F|$, si ha

$$\|L_{F,\varphi}\| \leq \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu(t)})\, dt,$$

con uguaglianza se e solo se F è (a meno di traslazioni) radialmente simmetrica.

Questo ci indica infatti che è necessario trovare stime sharp per il membro destro.

Risultati recenti

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Il problema variazionale per la funzione di distribuzione, dopo un'opportuna traduzione dei vincoli di integrabilità, è il seguente:

$$\sup_{v \in \mathcal{C}} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-v(t)})\, dt$$

dove $\mathcal{C}$ è l'insieme dell funzioni $v : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ decrescenti e che soddisfano i vincoli

$$p \int_0^{+\infty} t^{p-1} v(t)\, dt \le A^p, \quad q \int_0^{+\infty} t^{q-1} v(t)\, dt \le B^q.$$

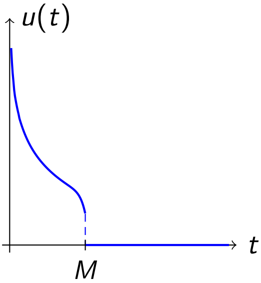
Risultati recenti

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Una volta dimostrata l'esistenza di soluzioni per il problema variazionale, si dimostra che le funzioni estremali sono della forma

$$u(t) = \begin{cases} -\log\left(\lambda_1 t^{p-1} + \lambda_2 t^{q-1}\right) & t \in (0, M) \\ 0 & t \in (M, +\infty) \end{cases}$$

per qualche $M > 0$ e dei moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.



Esempio di funzione estremale.

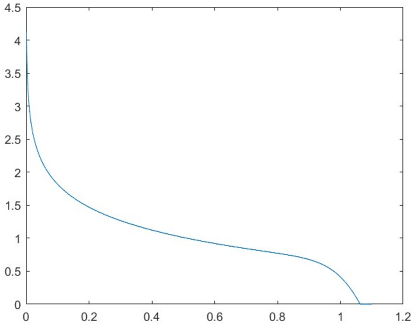
Risultati recenti

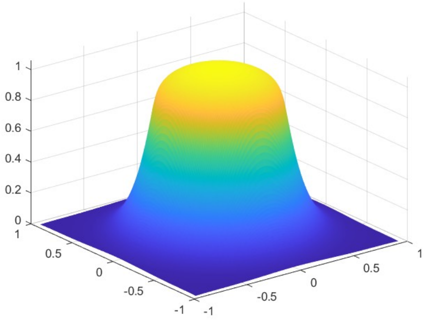
Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Gli ultimi step prevedono di dimostrare che gli estremali sono continui e che λ_1, λ_2 sono entrambi positivi e univocamente determinati dall'uguaglianza nei vincoli.

Risultati recenti

Esempio di funzione ottimale nel secondo regime





Esempio di funzione ottimale con $A = B = 1$, $p = 1.5$, $q = 20$. I corrispondenti moltiplicatori sono, approssimativamente, $\lambda_1 = 0.5144$ e $\lambda_2 = 0.1468$.

Bibliografia I

[1] J. Bell. *Trace class operators and Hilbert-Schmidt operators*. 2016.

[2] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.

[3] N. G. de Bruijn. "Uncertainty principles in Fourier analysis". In: *Inequalities (Proc. Sympos. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965)*. Academic Press, New York, 1967, pp. 57–71.

[4] J. B. Conway. *A course in functional analysis*. Vol. 96. Springer, 2019.

[5] I. Daubechies. "Time-frequency localization operators: a geometric phase space approach". In: *IEEE Transactions on Information Theory* 34.4 (1988), pp. 605–612.

[6] G. B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*. 122. Princeton university press, 1989.

Bibliografia II

[7] G. B. Folland and A. Sitaram. “The uncertainty principle: a mathematical survey”. In: *Journal of Fourier analysis and applications* 3 (1997), pp. 207–238.

[8] D. Gabor. “Theory of communication. Part 1: The analysis of information”. In: *Journal of the Institution of Electrical Engineers-part III: radio and communication engineering* 93.26 (1946), pp. 429–441.

[9] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*. Vol. 2. Springer, 2008.

[10] K. Gröchenig. *Foundations of time-frequency analysis*. Springer Science & Business Media, 2001.

[11] Littlewood J. E. Hardy G. H. and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1952.

[12] W. Heisenberg. “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”. In: *Zeitschrift für Physik* 43 (1927).

Bibliografia III

[13] M. W. Hirsch. *Differential topology*. Vol. 33. Springer Science & Business Media, 2012.

[14] H. Knutsen. “Norms and eigenvalues of time-frequency localization operators”.

[15] S. G. Krantz and H. R. Parks. *A primer of real analytic functions*. Springer Science & Business Media, 2002.

[16] S. G. Krantz and H. R. Parks. *Geometric integration theory*. Springer Science & Business Media, 2008.

[17] H. J. Landau and H. O. Pollak. “Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—II”. In: *Bell System Technical Journal* 40.1 (1961), pp. 65–84.

Bibliografia IV

[18] H. J. Landau and H. O. Pollak. "Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty—III: the dimension of the space of essentially time-and band-limited signals". In: *Bell System Technical Journal* 41.4 (1962), pp. 1295–1336.

[19] E. H. Lieb. "Proof of an entropy conjecture of Wehrl". In: *Communications in Mathematical Physics* 62.1 (1978), pp. 35–41.

[20] E. H. Lieb. "Integral bounds for radar ambiguity functions and Wigner distributions". In: *Journal of Mathematical Physics* 31.3 (1990), pp. 594–599.

[21] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Vol. 14. American Mathematical Soc., 2001.

[22] B. Mityagin. "The zero set of a real analytic function". In: *arXiv preprint arXiv:1512.07276* (2015).

Bibliografia V

[23] F. Nicola and L. Rodino. *Global pseudo-differential calculus on Euclidean spaces*. Vol. 4. Springer, 2010.

[24] F. Nicola and P. Tilli. "The Faber–Krahn inequality for the short-time Fourier transform". In: *Inventiones mathematicae* 230.1 (2022), pp. 1–30.

[25] F. Nicola and P. Tilli. "The norm of time-frequency localization operators". In: *Transactions of the American Mathematical Society (to appear)* (2022).

[26] M. Reed and B. Simon. *I: Functional analysis*. Vol. 1. Gulf Professional Publishing, 1980.

[27] H. L. Royden and P. Fitzpatrick. *Real analysis*. Vol. 32. Macmillan New York, 1988.

[28] W. Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*. Vol. 3. McGraw-hill New York, 1976.

Bibliografia VI

[29] A. Sard. "The measure of the critical values of differentiable maps". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 48 (1942), pp. 883–890.

[30] D. Slepian. "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—IV: extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions". In: *Bell System Technical Journal* 43.6 (1964), pp. 3009–3057.

[31] D. Slepian and H. O. Pollak. "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—I". In: *Bell System Technical Journal* 40.1 (1961), pp. 43–63.

[32] M. W. Wong. *Wavelet transforms and localization operators*. Vol. 136. Springer Science & Business Media, 2002.

[33] K. Zhu. *Analysis on Fock spaces*. Vol. 263. Springer Science & Business Media, 2012.

Grazie per l'attenzione

Politecnico
di Torino

1859