Politecnico di Torino
1859
Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"
DISMA

Recent results on the norm of localization operators

Candidato:
Federico Riccardi

Relatore:
Prof. Fabio Nicola

Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Introduzione

- **Problema**: elaborare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;

Introduzione

- **Problema**: elaborare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;

- **Motivazioni**: analizzare il segnale ed estrarne informazioni rilevanti, separare delle componenti, filtrare elementi non desiderati;

Introduzione

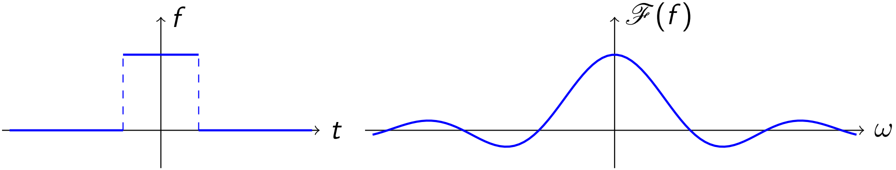
- **Problema**: elaborare un segnale, ad esempio una traccia audio, un'immagine, una misurazione di un sensore, ecc.;
- **Motivazioni**: analizzare il segnale ed estrarne informazioni rilevanti, separare delle componenti, filtrare elementi non desiderati;
- **Come fare**: trasformate, ad esempio la trasformata di Fourier $\mathscr{F}$, trasformate tempo-frequenza, come la short-time Fourier transform, filtri, operatori di localizzazione.

Introduzione

Principi di indeterminazione

L'obiettivo di localizzare un segnale si scontra con un limite fondamentale, ovvero i *principi di indeterminazione*. Esistono numerosi principi di indeterminazione, ognuno espressione del seguente concetto:

una funzione non può essere troppo concentrata sia in tempo che in frequenza.



Esempio di funzione ben concentrata in tempo con trasformata poco concentrata in frequenza.

Introduzione

Esempio: principio di indeterminazione di Heisenberg

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - b)^2 |\mathscr{F} f(\omega)|^2 \, d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi}. \tag{1}$$

Le funzioni che raggiungono l'uguaglianza sono solo le gaussiane del tipo $f(t) = \; c e^{2\pi i b t} e^{-\alpha (t-a)^2}$ con $c \in \mathbb{C}$ e $\alpha > 0$.

Interpretazione: i due integrali si possono vedere come misure della concentrazione di f e $\mathscr{F} f$ vicino ai punti a e b, rispettivamente. Se una delle concentrazioni è "piccola", l'altra deve essere "grande".

Short-time Fourier transform

Definizione

La *short-time Fourier transform*, in breve *STFT*, è una trasformata tempo-frequenza. Prima di definirla, dobbiamo introdurre gli operatori di traslazione e modulazione. Dati $x, \omega \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t).$$

Short-time Fourier transform

Definizione

La *short-time Fourier transform*, in breve *STFT*, è una trasformata tempo-frequenza. Prima di definirla, dobbiamo introdurre gli operatori di traslazione e modulazione. Dati $x, \omega \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t).$$

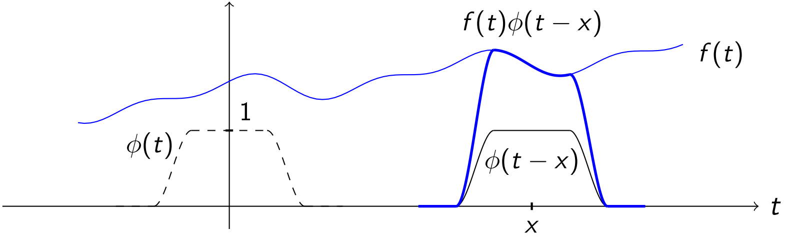
Short-time Fourier transfrom

La short-time Fourier transform di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ rispetto alla finestra $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ è data da:

$$\mathcal{V}_\phi f(x,\omega) = \langle f, M_\omega T_x \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\phi(t-x)} e^{-2\pi i \omega t}\, dt.$$

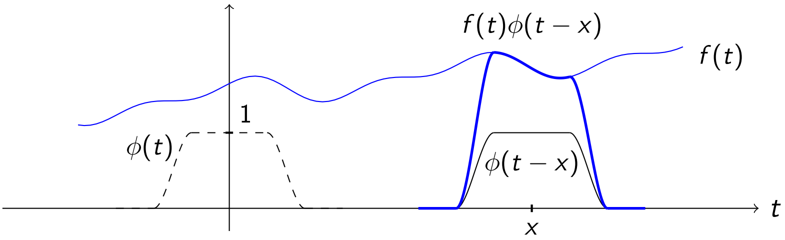
Short-time Fourier transform

Finestra gaussiana



Short-time Fourier transform

Finestra gaussiana



Per avere una buona risoluzione è necessario scegliere una finestra ben localizzata sia in tempo che in frequenza. Una scelta ottimale è quindi una finestra gaussiana normalizzata in L^2

$$\varphi(t) = 2^{1/4} e^{-\pi t^2}.$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa un'isometria e vale la seguente formula di inversione:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa un'isometria e vale la seguente formula di inversione:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R})$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa un'isometria e vale la seguente formula di inversione:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa un'isometria e vale la seguente formula di inversione:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto F\mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Definizione

Con la particolare scelta di finestra gaussiana normalizzata l'operatore $\mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ diventa un'isometria e vale la seguente formula di inversione:

$$\mathcal{V}_\varphi^* \mathcal{V}_\varphi = I_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Questo suggerisce come definire un operatore di localizzazione:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto F\mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto \mathcal{V}_\varphi^* F\mathcal{V}_\varphi f \in L^2(\mathbb{R})$$

Operatore di localizzazione in tempo-frequenza - Daubechies 1988

Data una finestra $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, l'operatore di localizzazione in tempo-frequenza con finestra φ e peso F è definito da

$$L_{F,\varphi} := \mathcal{V}_\varphi^* F \mathcal{V}_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

Le proprietà di $L_{F,\varphi}$ dipendono dalle caratteristiche della funzione peso F:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

Le proprietà di $L_{F,\varphi}$ dipendono dalle caratteristiche della funzione peso F:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

Le proprietà di $L_{F,\varphi}$ dipendono dalle caratteristiche della funzione peso F:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;
- se $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore integrale di Hilbert-Schmidt e la sua norma di Hilbert-Schmidt è minore o uguale di $\|F\|_2$;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

Le proprietà di $L_{F,\varphi}$ dipendono dalle caratteristiche della funzione peso F:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;
- se $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore integrale di Hilbert-Schmidt e la sua norma di Hilbert-Schmidt è minore o uguale di $\|F\|_2$;
- se $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore di classe traccia;

Operatori di localizzazione in tempo-frequenza

Proprietà

Le proprietà di $L_{F,\varphi}$ dipendono dalle caratteristiche della funzione peso F:

- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty]$ allora $L_{F,\varphi}$ è limitato e $\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_p$;
- se $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ allora $L_{F,\varphi}$ è compatto;
- se $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore integrale di Hilbert-Schmidt e la sua norma di Hilbert-Schmidt è minore o uguale di $\|F\|_2$;
- se $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ allora $L_{F,\varphi}$ è un operatore di classe traccia;
- se F è radialmente simmetrica, ovvero $F(x,\omega) = \mathcal{F}(r^2)$ con $r^2 = x^2 + \omega^2$, le autofunzioni di $L_{F,\varphi}$ sono le funzioni di Hermite e i corrispondenti autovalori sono dati da

$$\lambda_k = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}\left(\frac{s}{\pi}\right) s^k e^{-s}\, ds.$$

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Disuguaglianza di Lieb

Oltre alle proprietà appena elencate, è interessante studiare il problema di trovare delle stime sharp per la norma degli operatori di localizzazione.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Disuguaglianza di Lieb

Oltre alle proprietà appena elencate, è interessante studiare il problema di trovare delle stime sharp per la norma degli operatori di localizzazione.

Disuguaglianza di Lieb - Lieb 1978

Sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, per ogni $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ vale

$$\|L_{F,\varphi}\| \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|F\|_p, \tag{2}$$

con uguaglianza se e solo se F è una gaussiana (eventualmente traslata) del tipo $F(x,\omega) = ce^{-\frac{\pi}{p-1}(x^2+\omega^2)}$ con $c \in \mathbb{C}$.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Disuguaglianza di Faber-Krahn per la STFT

Alcuni risultati su questo problema sono stati ottenuti solo recentemente.

Disuguaglianza di Faber-Krahn per la STFT - Nicola e Tilli 2022

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile di misura finita. Allora, indicando con $L_{\Omega,\varphi}$ l'operatore di localizzazione con peso pari alla funzione indicatrice di Ω, si ha:

$$\|L_{\Omega,\varphi}\| \leq 1 - e^{-|\Omega|},$$

con uguaglianza se e solo se Ω è una palla.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Risultati recenti: $F \in L^p \cap L^\infty$

Grazie al risultato precedente è possibile trattare il caso in cui il peso F sia generico e non solo una funzione indicatrice. In questa direzione, in [Nicola e Tilli 2023] è stato studiato il seguente problema:

$$\text{trovare } C > 0 \text{ tale che } \|L_{F,\varphi}\| \leq C \text{ per ogni } F \text{ che soddisfa}$$
$$\|F\|_\infty \leq A \text{ e } \|F\|_p \leq B,$$

dove $p \in [1, +\infty)$, $A \in (0, +\infty]$ e $B \in (0, +\infty)$ (con la condizione aggiuntiva $A < +\infty$ se $p = 1$). Presentiamo il risultato nel caso $p > 1$.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Risultati recenti: $F \in L^p \cap L^\infty$

Teorema - Nicola e Tilli 2023

Sia $p \in (1, +\infty)$ e sia $F \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Allora:

1. se $\|F\|_p / \|F\|_\infty \leq (p-1)/p$ la stima (2) resta ottimale;

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Risultati recenti: $F \in L^p \cap L^\infty$

Teorema - Nicola e Tilli 2023

Sia $p \in (1, +\infty)$ e sia $F \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Allora:

1. se $\|F\|_p / \|F\|_\infty \leq (p-1)/p$ la stima (2) resta ottimale;
2. se $\|F\|_p / \|F\|_\infty > (p-1)/p$ allora

$$\|L_{F,\varphi}\| \leq \|F\|_\infty \left(1 - \frac{e^{(p-1)/p - (\|F\|_p / \|F\|_\infty)^p}}{p} \right),$$

con uguaglianza se e solo se F è (a meno di traslazioni) una *gaussiana troncata dall'alto*, ovvero della forma

$$F(x, \omega) = e^{i\theta} \min\{\lambda e^{-\frac{\pi}{p-1}(x^2+\omega^2)}, A\}.$$

per qualche $\lambda > A$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Risultati recenti: $F \in L^p \cap L^q$

Nella mia tesi ho considerato l'analogo problema con due vincoli di tipo L^p:

$$\text{trovare } C > 0 \text{ tale che } \|L_{F,\varphi}\| \leq C \text{ per ogni } F \text{ che soddisfa}$$
$$\|F\|_p \leq A \text{ e } \|F\|_q \leq B,$$

dove $p, q \in (1, +\infty)$, $A, B \in (0, +\infty)$.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Risultati recenti: $F \in L^p \cap L^q$

Teorema

Siano $p, q \in (1, +\infty)$ e sia $F \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^q(\mathbb{R}^2)$. Allora esistono due costanti

$$c_1 = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad c_2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

con $c_1 < c_2$, tali che:

1. se $\|F\|_q / \|F\|_p \leq c_1$ o se $\|F\|_q / \|F\|_p \geq c_2$, la stima (2) resta ottimale, con p e q rispettivamente.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Risultati recenti: $F \in L^p \cap L^q$

Teorema

2 se $c_1 < \|F\|_q/\|F\|_p < c_2$ allora

$$\|L_{F,\varphi}\| \leq T - \lambda_1 T^p/p - \lambda_2 T^q/q, \tag{3}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sono univocamente determinati da

$$p \int_0^{+\infty} t^{p-1} u(t)\, dt = A^p, \quad q \int_0^{+\infty} t^{q-1} u(t)\, dt = B^q,$$

con $u(t) = \max\{-\log(\lambda_1 t^{p-1} + \lambda_2 t^{q-1}), 0\}$ e $T > 0$ tale che $\lambda_1 T^{p-1} + \lambda_2 T^{q-1} = 1$. Infine, l'uguaglianza in (3) si ha se e solo se F è (a meno di traslazioni e moltiplicazione per un numero complesso di modulo 1) radialmente simmetrica e ha u come funzione di distribuzione.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Il primo passo viene suggerito da un teorema presente in [Nicola e Tilli 2023].

Teorema

Data $F \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in [1, +\infty)$ e indicando con $\mu(t) = |\{|F| > t\}|$ la funzione di distribuzione di $|F|$, si ha

$$\|L_{F,\varphi}\| \leq \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\mu(t)}\right) dt,$$

con uguaglianza se e solo se F è (a meno di traslazioni) radialmente simmetrica.

Questo ci indica che è necessario trovare stime sharp per il membro destro.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Il problema variazionale per la funzione di distribuzione, dopo un'opportuna traduzione dei vincoli di integrabilità, è il seguente:

$$\sup_{v \in \mathcal{C}} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-v(t)})\, dt$$

dove $\mathcal{C}$ è l'insieme dell funzioni $v : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ decrescenti e che soddisfano i vincoli

$$p \int_0^{+\infty} t^{p-1} v(t)\, dt \leq A^p, \quad q \int_0^{+\infty} t^{q-1} v(t)\, dt \leq B^q.$$

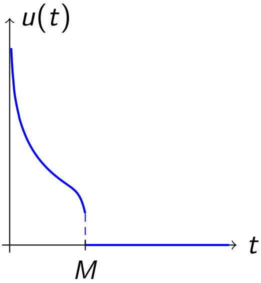
Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Una volta dimostrata l'esistenza di soluzioni per il problema variazionale, si dimostra che le funzioni estremali sono della forma

$$u(t) = \begin{cases} -\log\left(\lambda_1 t^{p-1} + \lambda_2 t^{q-1}\right) & t \in (0, M) \\ 0 & t \in (M, +\infty) \end{cases}$$

per qualche $M > 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.



Esempio di funzione estremale

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Gli ultimi step prevedono di dimostrare che gli estremali sono continui e che devono raggiungere l'uguaglianza nei vincoli. Questo permette poi di dimostrare che λ_1, λ_2 sono entrambi positivi e univocamente determinati.

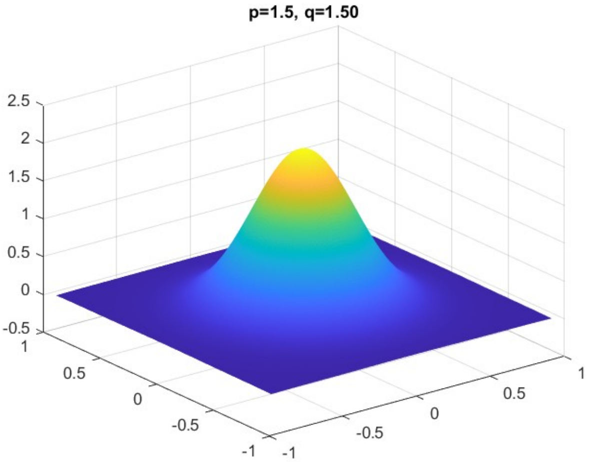
Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Idea della dimostrazione nel secondo regime

- Gli ultimi step prevedono di dimostrare che gli estremali sono continui e che devono raggiungere l'uguaglianza nei vincoli. Questo permette poi di dimostrare che λ_1, λ_2 sono entrambi positivi e univocamente determinati.
- Una volta determinata la funzione di distribuzione u ottimale, è semplice ricostruire F tramite riarrangiamento.

Stime sulla norma di operatori di localizzazione

Funzioni peso ottimali nel caso $A = B = 1$, $p = 1.5$, q variabile



Bibliografia

- I. Daubechies. “Time-frequency localization operators: a geometric phase space approach”. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 34.4 (1988), pp. 605–612.
- R. L. Frank. “Sharp inequalities for coherent states and their optimizers”. In: *Advanced Nonlinear Studies* 23.1 (2023), p. 20220050.
- A. Kulikov. “Functionals with extrema at reproducing kernels”. In: *Geometric and Functional Analysis* 32.4 (2022), pp. 938–949.
- E. H. Lieb. “Proof of an entropy conjecture of Wehrl”. In: *Communications in Mathematical Physics* 62.1 (1978), pp. 35–41.
- F. Nicola and P. Tilli. “The Faber–Krahn inequality for the short-time Fourier transform”. In: *Inventiones mathematicae* 230.1 (2022), pp. 1–30.
- F. Nicola and P. Tilli. “The norm of time-frequency localization operators”. In: *Transactions of the American Mathematical Society (to appear)* (2023).

Grazie per l'attenzione

1859

Politecnico
di Torino