

facciamo è rinunciare a verificare condizioni necessarie e sufficienti,e limitarci a condizioni più facilmente verificabili, ma che ci garantiscono comunque la convergenza. (condizione sufficiente, non necessaria): se esiste una norma spettrale indotta per cui $\|P\|<1$, il metodo iterativo è convergente.

Osservazioni:

- In ogni metodo iterativo è sempre necessario prevedere il numero massimo di iterazioni oltre il quale interrompere l'esecuzione. Serve come controllo nel caso in cui il numero di iterazioni diventi troppo grande.
- Se sappiamo che nella nostra matrice di iterazione $g(P) < 1$, abbiamo un'approssimazione, dato che il raggio spettrale non è più della matrice teorica, ma è della matrice in aritmetica finita. Quindi potremmo avere un calcolo errato in caso di sistemi malcondizionati.
- Questo tipo di metodi non ha problemi di stabilità, ad ogni passo abbiamo un vettore sempre meglio approssimato di quello precedente. Un metodo iterativo, rispetto ad uno diretto, è meno sensibile alla propagazione degli errori.
- Il costo computazionale ad ogni iterazione è dato da $O(n^2)$. Quindi dipende da quante iterazioni vengono effettuate e se effettivamente un'iterazione costa n^2 (in matrici sparse è $O(n)$). Questo ci avvantaggia rispetto ai metodi diretti, anche se esistono matrici sparse in cui conviene usare metodi diretti.

Troviamo una nuova scomposizione di A ottenuta da una diagonale, una triangolare inferiore e una triangolare superiore: $A=M\cdot N; A=D\cdot L\cdot U$
M deve essere invertibile, e semplice da invertire, quindi A deve avere tutti gli elementi della diagonale diversi da 0 (altrimenti M non è invertibile).

Metodo di Jacobi

$M=D; N=L\cdot U$. La matrice di iterazione è $I=D^{-1}(L\cdot U)$.

Durante i passi non possiamo mai perdere le informazioni sul vettore del passo precedente (metodo degli spostamenti simultanei).

Metodo di Gauss-Seidel

$M=D\cdot L; N=U$. La matrice di iterazione è $G=(D\cdot L)^{-1}\cdot U$.

Per calcolare il vettore al passo k-esimo, usiamo elemento dello stesso vettore calcolati precedentemente al passo k-esimo stesso. Possiamo usare un so vettore per implementare il metodo (metodo degli spostamenti successivi).

In generale è più veloce di Jacobi, anche se esistono dei controesempi.

Convergenza

Se A è a predominanza diagonale in senso stretto, allora i due metodi sono convergenti. L'elemento sulla diagonale è maggiore della somma degli altri elementi sulla stessa riga/colonna.

Autovalori e autovettori

Data una matrice $A \in R^{n \times n}$, viene definito autovalore di A un numero $\lambda \in C$ per cui $Ax=\lambda x (x \neq 0)$. Il vettore x è detto autovettore corrispondente a λ . L'insieme dei numeri λ che soddisfa la relazione si dice spettro di A. L'autovettore massimo in modulo tra tutti gli autovalori è chiamato raggio spettrale di A $[g(A)]$.

Per trovare gli autovalori di A si pone il determinante uguale a zero: $det(A-\lambda I)=0$. In questo modo si trova il polinomio caratteristico associato ad A che, posto uguale a 0, ci dà l'equazione caratteristica: $det(A-\lambda I)=a_0+a_1\lambda+...+a_n\lambda^n=0$. Le radici trovate risolvendo questa equazione, sono gli autovalori di A, quindi ho al massimo n autovalori. La traccia di A $[tr(A)]$ è la somma degli elementi della diagonale. Per ogni autovalore, si trova l'autovettore corrispondente risolvendo il sistema, sostituendo λ con l'autovalore trovato.

Un polinomio qualunque si può vedere come polinomio caratteristico di una certa matrice; matrici diverse possono avere lo stesso polinomio caratteristico, quindi queste matrici devono avere gli stessi autovalori.

Proprietà degli autovalori

Data una matrice diagonale o triangolare, gli autovalori sono gli elementi della diagonale. Si può trasformare la matrice data in un'altra matrice con gli stesso autovalori, fino ad arrivare ad una matrice simile alla prima, da cui posso ricavare banalmente gli autovalori.

Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Molteplicità algebrica

La molteplicità di un autovalore λ , come radice dell'equazione caratteristica, è indicata con $\sigma(\lambda)$ ed è detta molteplicità algebrica di λ .

Il massimo numeri di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti ad un λ , è detto molteplicità geometrica di λ e si indica con $\pi(\lambda)$. Se c'è una certa molteplicità algebrica, si possono trovare più autovettori per un autovalore ($\leq \sigma$).

Matrici simili

Due matrici A e B si dicono simili se esiste una matrice non singolare S per cui $A=SBS^{-1}$. Due matrici simili hanno gli stessi autovalori, con le stesse molteplicità algebriche o geometriche.

Matrici diagonalizzabili

Una matrice A simile ad una matrice diagonale D si dice diagonalizzabile. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti; la colonna della matrice S per cui $S^{-1}AS$ è diagonale sono gli autovettori di A.

Forma normale di Schur

Sia $A \in C^{n \times n}$ e siano λ_{α} i suoi autovalori. Allora esiste una matrice ortogonali/unitaria Q e una matrice triangolare superiore T tale che $A=QTQ^T$ con λ_{α} sulla diagonale di T. Se $A \in R^{n \times n}$ allora T è triangolare a blocchi.

Metodo: ricavare una successione di matrici simili che convergono a una diagonale o ad una triangolare.

Problema di condizionamento

Quando la matrice entra nella "macchina" viene approssimata, quindi i risultati possono essere diversi da quelli attesi. Il problema è molto o poco malcondizionato? Si osserva il numero di condizionamento: se è piccolo bene, se è grande non si sa per quale autovalore lo sia, in questo caso interverranno i singoli numeri di condizionamento per ogni autovalore.

Norma assoluta

Somma matriciale indotta che verifica $\|D\|=\max|d_{ij}|$ per ogni matrice diagonale.

Teorema di Bauer-Fike

Sia $A \in C^{n \times n}$ diagonalizzabile, quindi tale che $A=SDS^{-1}$, con D diagonale e S non singolare. Se $\delta A \in C^{n \times n}$ e ξ è un autovalore di $A+\delta A$, allora esiste almeno un autovalore λ di A tale che:

$$|\lambda - \xi| \leq \mu(S) = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$$

dove $\mu(S)$ è detta radice di condizionamento.

- Se μ è piccolo, il pmblema è malcondizionato
- Se μ è grande, c'è almeno un autovalore la cui ricerca è malcondizionata.
- Se S è ortogonale, allora $\mu(S) = 1$.

Una formula di quadratura risolve un problema di

- Integrazione numerica

La retta di regressione lineare:

- è soluzione di approssimazione dei dati (sperimentali) che hanno andamento lineare
- è sempre passante per il baricentro dei dati che si voglio approssimare
- è sempre una retta di approssimazione

Una matrice elementare di Gauss

- è triangolare bassa
- porta il vettore (4,7,4) nel vettore (4,0,0)

Basi polinomiali

- polinomio di Bernstein
- Funzioni monomiali
- Polinomi di Lagrange

A $\in R^{n \times n}$ è diagonalizzabile

- I suoi vettori sono linearmente indipendenti
- I suoi autovalori sono distinti

A $\in R^{n \times n}$ se gli autovalori di A sono distinti allora

- Vale $AS=SD$ con $S \in R^{n \times n}$ invertibile e $D \in R^{n \times n}$ diagonale
- Il raggio spettrale di A è nullo
- Gli autovettori di A sono linearmente indipendenti
- È diagonalizzabile

Il raggio spettrale di una matrice

- È il modulo dell'autovalore massimo
- Serve per determinare se in un metodo iterativo A è convergente o meno

Nella fattorizzazione QR di una matrice $A \in R^{n \times n}$ Q e R rappresentano rispettivamente

- Due matrici: la prima ortogonale, la seconda triangolare alta

E' usata per

- Risolvere un sistema lineare
- Calcolare gli autovettori di una matrice
- COSTO: $2/3 n^3$

Sia $A \in R^{n \times n}$ il polinomio caratteristico associato

- Consiste nel determinante di $(A^* SA)$
- È un polinomio a coefficienti reali di grado n

Il polinomio caratteristico della matrice A

- È di grado n
- Ha radici eventualmente complesse
- È a coefficienti reali

L'equazione caratteristica

- Ammette n radici

L'errore che si commette nell'approssimazione di INTEGRALE{a,b} f(x) con la formula dei trapezi semplice è

- $-(b-a)^3/12 \cdot f''(\xi)$

Il condizionamento di un problema dipende

- Dai dati del problema e dal problema stesso

Il criterio di arresto del metodo Newton-Rapson è corretto imporlo

- Sugli x_k
- Sui valori di f
- Sul numero di iterazioni

Per costruire i pesi ω_i di una formula di Newton-Cotes ad n+1 punti (o ascisse) si deve conoscere

- Il numero n

A n+1 punti o nodi sono

- Esatte per polinomi di grado n
- Esatte per polinomi di grado n+1 se pari

Possono

- Avere i punti i nodi equidistanti nell'intervallo
- Essere formula di quadratura interpolanti
- La formula di N-C si contraddistingue per
- Avere punti e nodi equidistanti nell'intervallo di integrazione
- Essere formula di quadratura interpolante
- Utilizzare le differenze divise

L'unità di arrotondamento U è uguale a

- il limite superiore dell'errore relativo nell'approssimazione di un numero reale con un numero finito
- un limite superiore all'errore relativo sul risultato di una approssimazione aritmetica finita
- il limite inferiore dell'errore relativo nell'approssimazione di un numero appartenente ad R
- il limite inferiore dell'errore relativo nelle operazioni

Il metodo di bisezione

- È derivabile con segni opposti
- Può essere usato per determinare gli zeri di una funzione
- Può essere usato per calcolare la radice quadrata di una funzione
- Si applica su funzioni continue

Converge quando la funzione è

- continua con segni discorsi degli estremi e c'è uno zero in mezzo al suo dominio
 - continua che assume valori di segno discorde estranei al dominio
 - continua con uno zero semplice interno al dominio
 - derivabile che assume valori di segno discorde estranei al dominio
- Si vuole calcolare la radice $f(x)=x^{-1}$ definita in [-1,3] con il metodo di bisezione e partendo da a0=-1, b0=-3, si arriva alla soluzione con
- Un'iterazione

Il metodo di Newton per determinare radici semplici

- Converge sotto opportune ipotesi
- È una retta a convergenza quadratica

L'iterazione funzionale corrisponde

- Al metodo di Newton
- Al metodo delle tangenti

Il metodo delle secanti

- Converge sotto opportune ipotesi
- Ha convergenza superlineare

Per valutare un polinomio e la sua derivata (prima) si usa

Ruffini-Horner

Per valutare numericamente un polinomio in un punto

- È necessario compiere "n" operazioni di moltiplicazione

Un problema d'interpolazione si risolve mediante

- Un sistema lineare
- Il sistema delle equazioni normali

Si può usare

- Newton
- Lagrange

Il sistema delle equazioni normali può risolvere

- Un problema di interpolazione
- Un problema di approssimazione

Intervengono in un problema

- Di ricerca di una retta di regressione lineare e interpolazione o approssimazione dei dati

Consiste nel

- Determinare il polinomio che passa per i dati

Converge

- All'aumentare dei punti di interpolazione nel polinomio di Chebishev

Nella soluzione di un sistema lineare con il metodo iterativo

- Gauss-Seidel ha lo stesso costo di Jacobi

Nel metodo iterativo

La matrice viene decomposta nella somma di 2 matrici usate per costruire la matrice d'iterazione

Sia dato un metodo iterativo che genera $\{x_k\}$ che converge ad una radice di $f \in C$

[a, b]. Il criterio di arresto del metodo è corretto imporlo

- Sugli x_k , sui valori della f e sul numero di iterazioni

I passi della formula di Simpson (semplece) sono

- 1/3 4/3 1/3

Simpson composto

- Non necessita di ulteriori suddivisioni
- Interpolare con Simpson INTEGRALE{a,b} a3x3+a2x2...
- Non è necessario suddividere l'intervallo

Data una matrice $A^{n \times n}$ la fattorizzazione LU di A esiste se

- I determinanti dei minori principali di A sono non nulli
- I determinanti dei minori principali di A di ordine da 1 fino ad n-1 sono non nulli
- COMPLESSITÀ: $1/3 n^3$

Una matrice elementare di Householder

- È ortogonale
- Porta il vettore (4,7,4) nel vettore (9,0,0)

Complessità del metodo di Householder

- $2/3 n^3$

La fattorizzazione di Gauss con pivotaggio parziale si applica per

- Risolvere un sistema lineare
- Calcolare il rango di una matrice

per calcolare il rango di una matrice

$x \oplus y = y \oplus x$

Nella fattorizzazione LU di Gauss il pilotaggio parziale è usato per

- Evitare overflow in L
- Aumentare la stabilità della fattorizzazione
- La stabilità dell'algoritmo per la fattorizzazione LU con scambio delle righe e perno massimo
- È in senso debole
- NON dipende dagli elementi di L
- Dipende dagli elementi di U

Nella soluzione di un sistema lineare con il metodo iterativo

- La convergenza dipende dal raggio spettrale della matrice d'iterazione

Errori

- Absoluto: $|\alpha - fl(\alpha)|$
- Relativo: $|\alpha - fl(\alpha)| / |\alpha|$
- Inerente: $|f(x)-f(x-)|/f(x-)$

La complessità dell'algoritmo di Horner è

- $O(n)$

Per la valutazione del polinomio di grado m in un punto

- m moltiplicazioni

Sia Θ un'operazione in aritmetica finita. Siano x e y due numeri finiti

- $x \Theta y = f(x \oplus y)$
- $x \otimes y = f(x) \otimes f(y)$

La cancellazione numerica

- Si ha nell'addizione
- A volte può essere evitata

La stabilità di un algoritmo

Dipende dall'algoritmo stesso

Siano A e B ed S $\in R^{n \times n}$ con S non singolare, A e B si dicono simili se:

- A=S^{-1}BS
- A=SBS^{-1}
- SA=BS
- Date A,S con S simmetrica (S=S^t) se
- SA=S+A
- AS+=AS

L'errore di interpolazione polinomiale della funzione (x, f(x)) si ha

- Dalla derivata n+1 esima della funzione

La funzione di Runge

- Evidenzia la non convergenza del polinomio interpolante

L'interpolazione polinomiale di una funzione regolare

- È convergente all'aumentare dei punti di interpolazione nel polinomio di Chebishev

Il polinomio di interpolazione nella forma di Newton è

- Il polinomio di grado minimo che passa per i dati

L'indice di condizionamento di una matrice A

- $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

- $\|A\| \approx \|A^{-1}\|$ è

- Soluzione del sistema Ax=b

La convergenza di un metodo iterativo per la soluzione di un sistema lineare

- Non dipende dal vettore iniziale x_0

Teorema di convergenza di Newton

- Esiste un intorno di r su cui converge
- Converge localmente ad r

Una matrice A $\in R^{n \times n}$ ammette

- Tre autovettori (e/o) tre autovalori
- Assegnati n+1 dati, il polinomio interpolante di grado

- $\leq n$ è unico
- $\geq n$ NON è unico

Le differenze divise di una funzione

- Sono utilizzate nella formula di Newton

Il coefficiente della potenza massima del polinomio interpolante la funzione

Polinomio di Lagrange

- $Li(X_i) \leq 0$
- $Li(X_j) = \{1 \text{ i=y} \mid 0 \text{ i} < \text{y} \}$

Il metodo di Gauss-Sheidel ha costo computazionale

- Più alto del metodo di Jacobi

Portare una matrice in forma di Hessemberg

- Serve per ridurre la complessità del calcolo degli autovalori

Una matrice di Hessemberg

- È sparsa ad elementi ≤ 0 nella triangolare superiore e nella prima sottodiagonale

La complessità computazionale per calcolare la fattorizzazione di A $\in R^{n \times n}$ in termini di sole moltiplicazioni è dell'ordine di

- $1/3 n^3$ per LU (normale o con pivotaggio parziale)

ZX=YZ con $\det(Z) \leq 0$

- È una similitudine

Ax=b fattorizzo A con Gauss pivot parziale PA=LU

- PAX=b è uguale a LUX=b

Ax=b sono uguali a LUX=Pb

VECCHIO

I nodi in una funzione spline sono i punti in cui è partizionato l'intervallo

La funzione bspline è detta normalizzata perché gode della proprietà della partizione dell'unità. Per definirla, si fa una partizione estesa.

Una curva di Bezier è una curva polinomia di Bernstein

L'algoritmo di Casteljau serve a valutare la curva di Bezier