Cap. 1 – Regime di un sistema elettrico

1.1 INTRODUZIONE

- Continuo
- Periodico - sinusoidale
- In regime impulsivo distinguiamo:
  - durata
  - ampiezza
  - tempo di salita
  - tempo di discesa

Equazione integro differenziale di un circuito R, L C serie:

$$v(t) = Ri + L\,di/dt + 1/C \int_{\infty}^{t} i\,dt$$

oppure introducendo la trasformata di Laplace abbiamo:

$$v(p) = R.i(p) + pL.i(p) + i(p)/(pC)$$

ove v(p) e i(p) sono le trasformate secondo Laplace , Ltrasformate, di v(t) e i(t)

se siamo in regime sinusoidale $i(t) = Io\ sen(\omega t + \phi)$ si ha

$$V = RI + j\omega LI + I/(j\omega C) \text{ e}$$

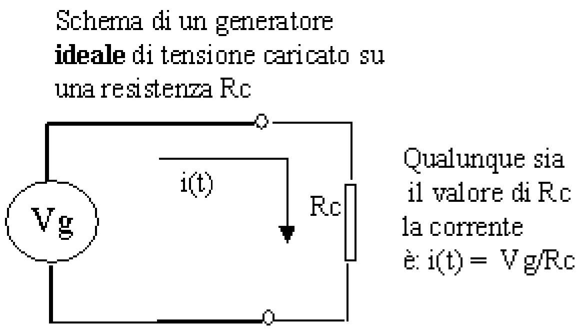
$I = I_0 e^{j\phi}$ e $V = V_0 e^{j\phi}$ (V e I sono numeri complessi)

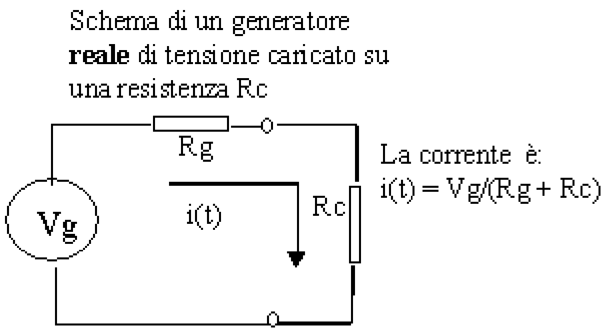
R, ωL e 1/(ωC) sono ohm,

RI, ωLI e I/(ωC) sono volt,

RC è un tempo.

Generatore ideale e reale di tensione:





Supponiamo che Vg(t) sia sinuosoidale e di avere un carico costituito da una resistenza R e un condensatore c in parallelo abbiamo:

$$Vg(t) = V_G \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

la corrente che attraversa il circuito è del tipo:

$ig(t) = I_G \text{ sen } (\omega t + \phi 1)$ con I_G = modulo del numero complesso

Ig = Vg/((Rg + (Rc.1/jωc)/(Rc + 1/jωC))

$$Ig = \frac{Vg}{Rg + \dfrac{Rc}{1 + j\omega Rc.C}}$$

ossia per $\omega = 0$ $I_G = V_G/(Rg + Rc)$ mentre per $\omega >> 1/(Rc.C)$ $I_G = V_G/Rg$ ossia il generatore è cortocircuitato all'uscita della sua impedenza Rg.: 1/Rc. C è chiamata anche la ω di taglio del circuito.

Se invece la tensione fornita dal generatore è la funzione gradino di ampiezza V_G :

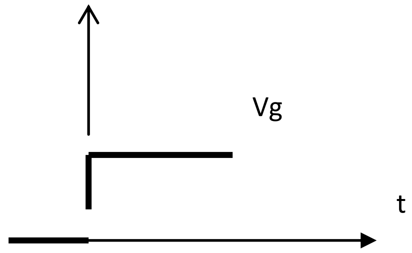
$Vg(t) = V_G 1(t)$ e supponiamo che il carico sia costituito solo da un condensatore come in figura:

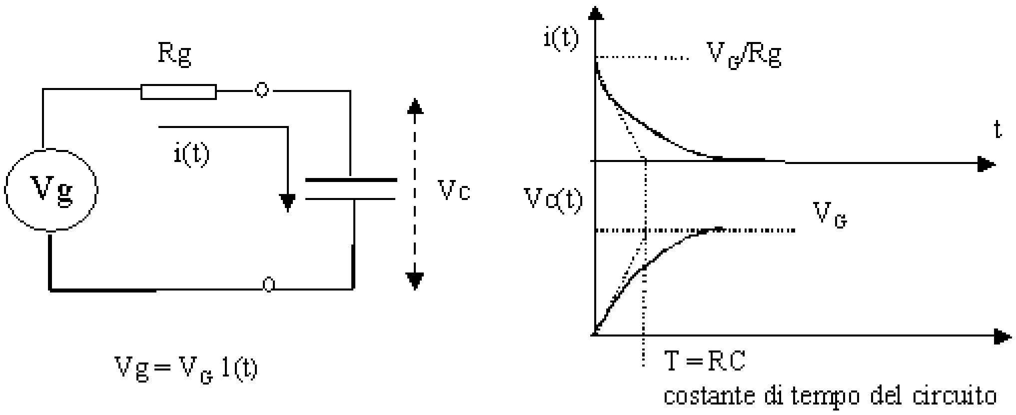
applicando la trasformata di Laplace la corrente che fornisce il generatore e:

$i_g(t) = (V_G / (Rg)\, e^{-t/RC} = (V_G / (Rg)\, e^{-t/T}$

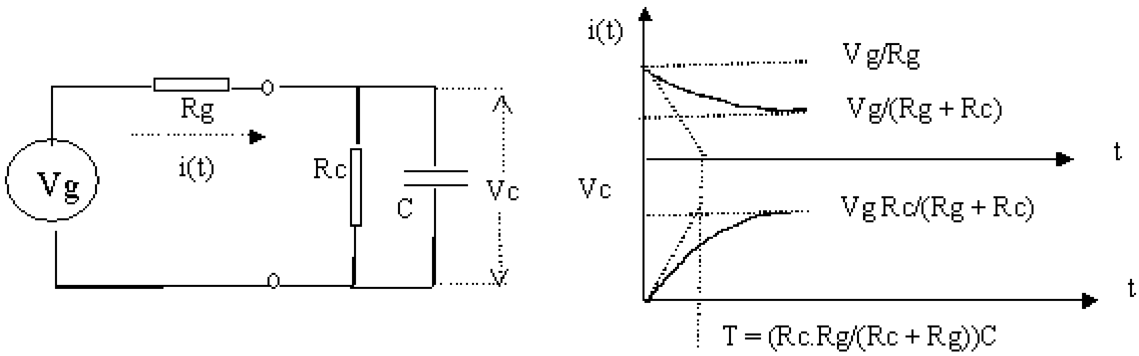
$Vc(t) = V_G\,(1- e^{-t/RC}) = V_G\,(1- e^{-t/T})$

con T =RC costante di tempo del circuito





Se avessimo avuto un carico R C parallelo la corrente all'istante iniziale sarebbe stata data da: Vg / (Rg) e a regime Vg / (Rg + Rc), mentre la tensione a regime sarebbe stata data da: Vg .Rc / (Rg + Rc) e la costante di tempo sarebbe T = C (Rg . Rc)/(Rg + Rc)



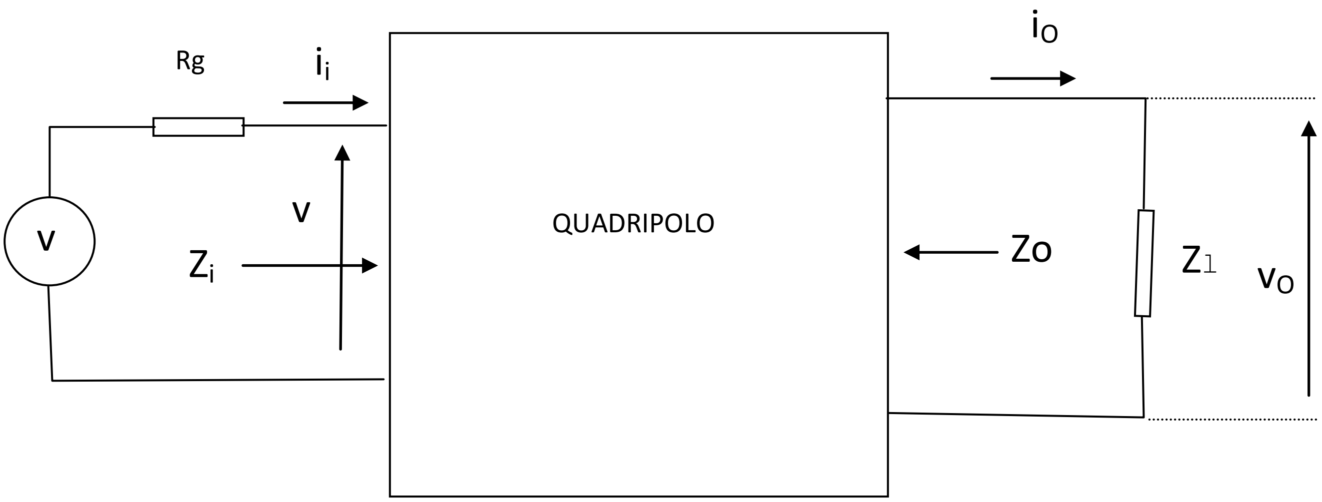
Ossia di fronte al transitorio per t = 0+ il condensatore si comporta come un corto circuito mentre a regime come un circuito aperto

1.2 I QUADRIPOLI

Distinguiamo le seguenti impedenze, vedi disegno:

- impedenza del generatore, Zg
- impedenza d'ingresso: Zi
- impedenza d'uscita: Zo
- impedenza di carico: Zl
- impedenza caratteristica: Z_0

Riportiamo nella figura seguente lo schema a blocchi di un quadripolo collegato da una parte a un generatore di tensione e dall'altra parte al carico:



Vg tensione del generatore

Rg resistenza del generatore

Vi tensione d'ingresso

Ii corrente d'ingresso

Zi impedenza d'ingresso

Zo impedenza d'uscita: vedi Thevenin

Z_l impedenza di carico

Vo tensione d'uscita

Io corrente d'uscita

Z_0 impedenza caratteristica.

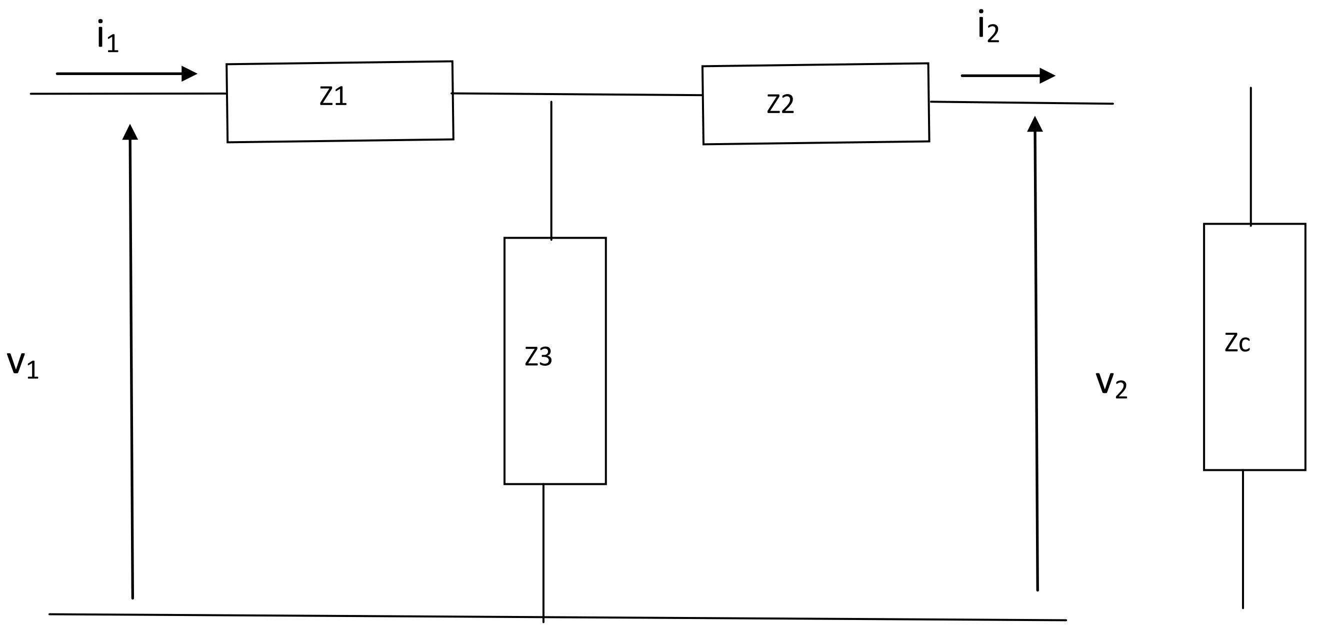
Un quadripolo può essere attivo, ad esempio un amplificatore, oppure passivo, costituito solo da R, L e C. Riportiamo ora le equazioni di un quadripolo passivo: chiamiamo V_1 e V_2 la tensione d'ingresso e d'uscita,analogamente per le correnti: I_1 e I_2. Supponiamo di essere in regime sinusoidale, abbiamo:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Essendo il quadripolo passivo abbiamo $Z_{21} = Z_{12}$. Disegniamo ora un quadripolo passivo con struttura a T costituito da tre impedenze: Z1, Z2 e Z3 e vediamo di calcolare le relazioni che legano l'ingresso alla uscita una volta che il quadripolo sia stato collegato alla impedenza di carico Zc.

Un quadripolo passivo può essere realizzato o riconducibile ad una struttura a T o Π, riportiamo nella figura che segue la struttura aT.



$$V_1 = Z1.I1 + Z3(I1- I2)$$

$$V_2 = Z2.I2 + Z3(I2-I1)$$

Da cui abbiamo:

$$V1 = (Z1+Z3)\ I1 – Z2.I2$$

$$V2 = -Z2I1 + (Z2 + Z3).I2$$

Ossia abbiamo Z11 = Z1 + Z3, Z12 = Z21 = - Z2, Z22 = Z2 + Z3. Come affermato prima Z12 =Z21 se il quadripolo è passivo. Se il quadripolo è simmetrico, ossia possiamo invertire l'ingresso con l'uscita abbiamo Z1 = Z2 il che porta a Z11 = Z22

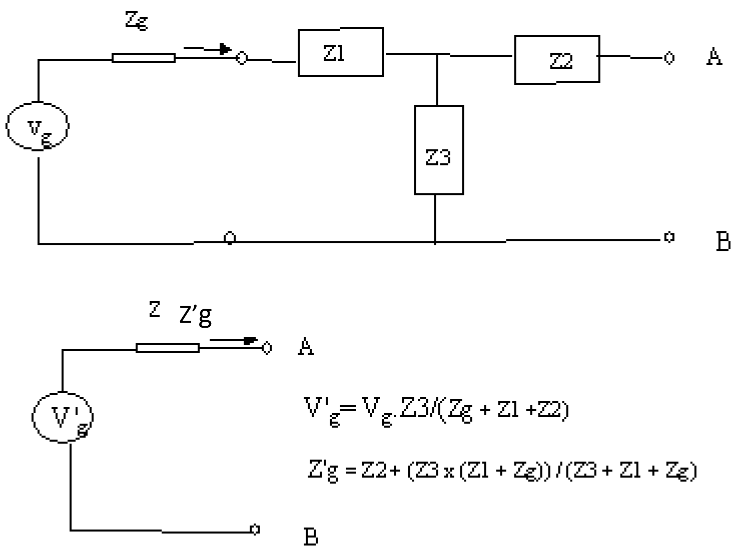
Il teorema di Thevenin

Nello studio delle reti logiche trova applicazione anche questo teorema, esso dice:

Data una rete anche complessa, sia attiva che passiva e presi due punti di questa rete ai quali si vuole applicare un carico e conoscere la tensione e la corrente che lo attraverserà possiamo sostituire alla rete un generatore di tensione che fornisca la tensione esistente fra questi due punti con in serie una impedenza uguale a quella che vede un eventuale generatore applicato a questi due punti una volta cortocircuitati i generatori di tensione ed aprendo i generatori di corrente.

L' applicazione alle reti logiche riguarda l'uscita delle porte le quali vengono collegate ad altre porte, a linee di trasmissione..: in genere questo teorema trova applicazione quando una rete logica viene collegata al suo utilizzatore.

Se ci feriamo al quadripolo della figura precedente abbiamo:



L'uscita di una rete logica è in genere una tensione uguale a zero o al valore della batteria con una resistenza in serie.

L’impedenza caratteristica

Supponiamo ora di collegare un carico, Zc., all’ uscita di un quadripolo e di volerne calcolare l’impedenza Zi d’ingresso ricorrendo alle impedenze che abbiamo in figura, supponiamo di avere un quadripolo simmetrico: Z1 = Z2, abbiamo:

$$Zi = Z1 + Z3 \text{ in parallelo a } Z1 + Zc = Z1 + Z3(Z1 + Zc)/(Z3 + Z1 + Zc)$$

Si definisce impedenza caratteristica Z_0 di un quadripolo quel particolare valore della impedenza di carico per cui l’impedenza d’ingresso è uguale a quella di carico, cioè:

$$Z_0 = V1/I1 = V2/I2$$

Tenuto conto che l’impedenza caratteristica è relativa al quadripolo calcoliamola ora in funzione dei suoi parametri Z. E’ sufficiente aggiungere alle due equazioni del quadripolo simmetrico che ora riportiamo in forma semplificata la relazione ai morsetti d’uscita:

$V1 = Z11.I1 + Z12.I2$ ove $Z11 = Z22 = Z1 + Z3 = Z2 + Z3$

$V2 = Z12I1 + Z11.I2$ $Z12 = - Z22$

$V2 = - Z_0.I2$

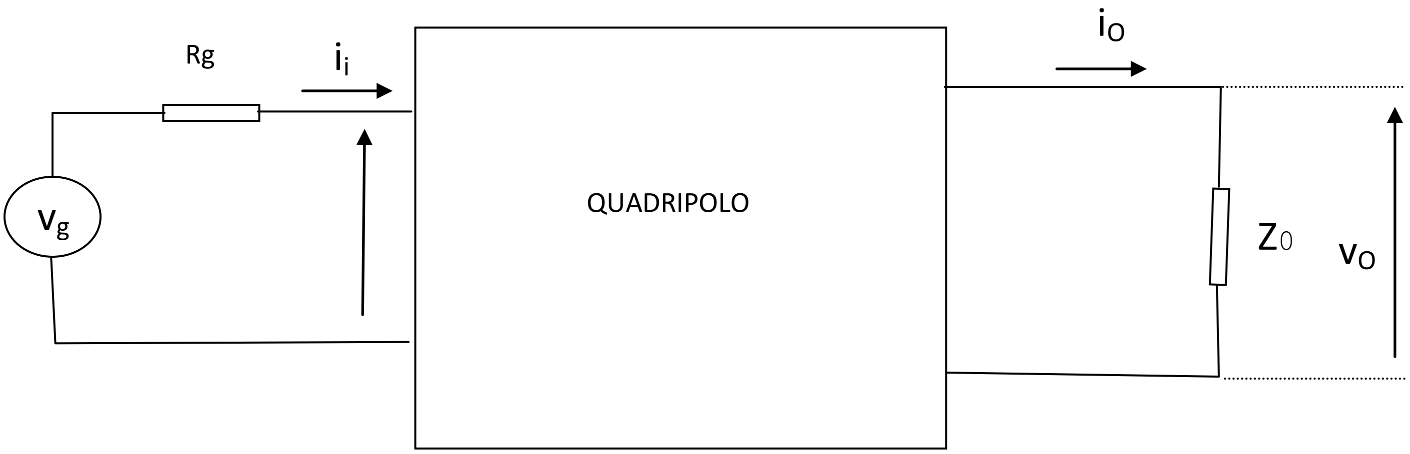
Da cui risolvendo il sistema si ottiene:

$$\mathbf{Z_0 = (Z11^2 - Z12^2)^{1/2} = V1/I1 = V2/I2}$$

Viene **definito quadripolo adattato**: un quadripolo chiuso sulla propria impedenza. In maniera analoga possiamo poi calcolare ***l’impedenza di uscita*** considerando l’ingresso chiuso sulla impedenza del generatore.

Attenuazione di un quadripolo

Nella maggioranza delle applicazioni i quadripoli passivi sono sempre adattati, ossia terminati sulla propria impedenza caratteristica. In queste condizioni lo studio del circuito si può fare senza utilizzare i parametri Z ma introducendo un nuovo parametro chiamato attenuazione: A(ο). L’attenuazione: A(ο) è un numero complesso il cui valore assoluto, sempre minore di uno, mi dice di quanto si è attenuata l’ ampiezza della tensione o della corrente fra uscita e ingresso e la cui fase fornisce la variazione della fase dell’ onda sinusoidale fra ingresso e uscita (tutte le affermazioni di questo paragrafo si riferiscono a regime sinusoidale). Abbiamo parlato di attenuazione della tensione o della corrente, perché in un quadripolo adattato è:



V1/I1 = V2/I2   da cui   V2/V1 = I2/I1

Ossia l' attenuazione in tensione è uguale alla attenuazione in corrente.

Supponiamo ora di avere un quadripolo passivo adattato, ossia chiuso sulla sua impedenza caratteristica, Z0 e comandato da un generatore di tensione sinusoidale, l'attenuazione è data dalla seguente relazione:

$$A(\omega) = e^{\gamma(\omega)} = e^{\alpha} e^{j\beta} = A(\omega).e^{j\beta} \text{ ove:}$$

$$\gamma = \gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\,\beta(\omega)$$

L'attenuazione di un quadripolo e come vedremo più avanti di una linea di trasmissione viene definita in db:

$$db = 20 \log A_0$$

Un quadripolo viene definito dalla sua impedenza caratteristica e dalla attenuazione (intesa come numero complesso).

Quadripolo adattato lato carico

e che la tensione del generatore Vg sia data da:

$$Vg = V_0 \, sen(\omega t + \phi)$$

Essendo il quadripolo adattato, supponiamo che l'impedenza caratteristica sia resistiva R0, la tensione d'ingresso sarà:

$$Vi = Vg.\, R_0/(Rg + R_0) = V_0\, R_0/(Rg + R_0).sen(\omega t + \phi)$$

Mentre la tensione d'uscita ai capi del carico R_0 sarà:

$$V_0 = V_i \cdot A(\omega) = V_0 \cdot R_0/(R_g + R_0) \cdot e^{\alpha} \mathrm{sen}(\omega t + \phi + \beta(\omega))$$

Ossia l'ampiezza della tensione in uscita risulta attenuato di e^{α} mentre la fase risulta aumentata di $\beta(\omega)$ rispetto al segnale d'ingresso.

Condizioni di non distorsione della forma d'onda

Uno dei problemi fondamentali che troviamo in elettronica sia analogica che digitale è quello della conservazione della forma d'onda ossia dell'andamento nel tempo della tensione e/o della corrente quando essa attraversa un quadripolo inteso in senso lato della parola. Vediamolo ora per il quadripolo passivo ma le stesse conclusioni varranno anche per le linee di trasmissione che è un particolare quadripolo passivo.

Condizione di non distorsione del segnale è che:

- l'attenuazione in ampiezza sia indipendente dalla frequenza $A_0 = e^{\alpha}$ = costante
- il ritardo in fase sia invece proporzionale alla frequenza: $\beta(\omega) = -\omega K$

Naturalmente ciò non può essere valido da frequenza zero a frequenza infinita ma è limitato dalla banda passante del segnale: ossia l'intervallo di frequenze in cui è decomponibile il segnale stesso. Il che equivale a dire che il nostro quadripolo deve comportarsi come un filtro passa basso non distorcente.

Vediamo di verificare quanto detto per un segnale composto da una fondamentale più una seconda armonica, sia Vi la tensione all'ingresso del quadripolo:

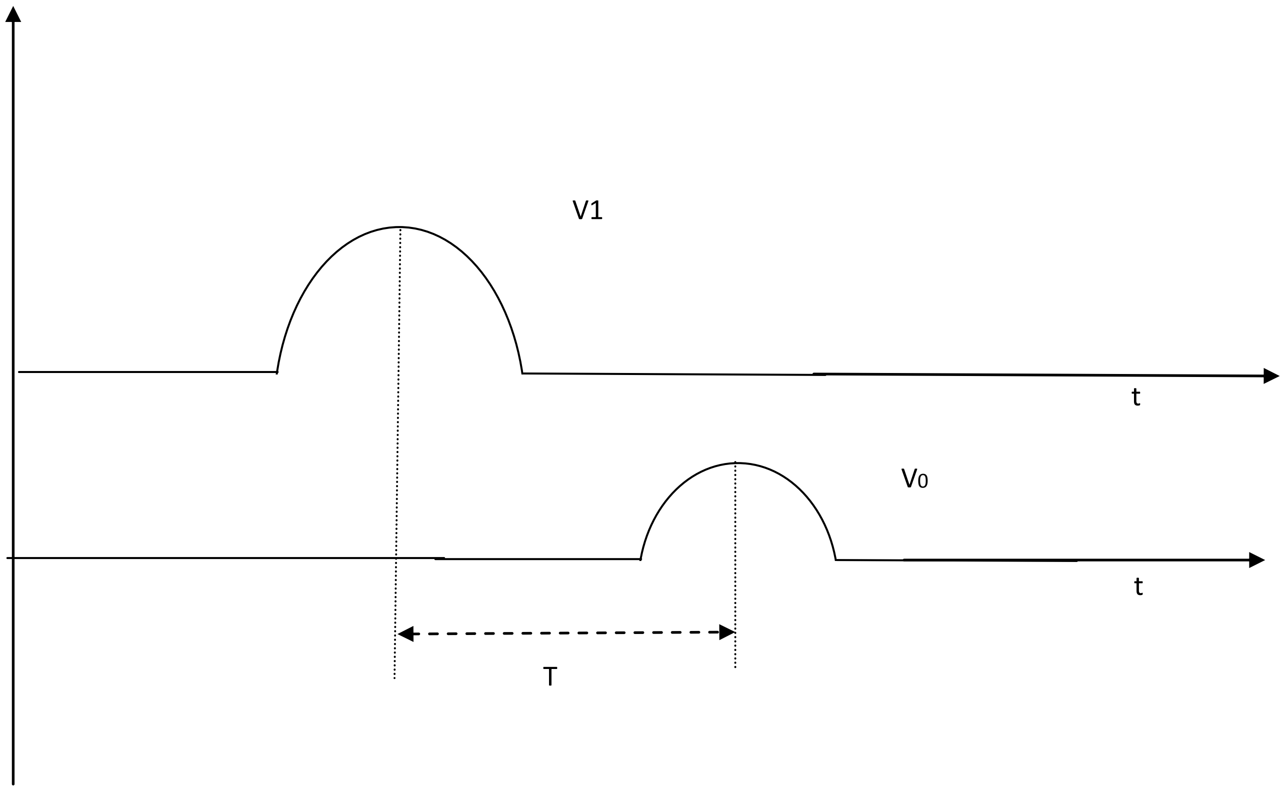
$$V_i = V_1 \mathrm{sen}(\omega t + \phi_1) + V_2 \mathrm{sen}(2\omega t + \phi_2)$$

e $e^{\alpha} = K$ (numero minore di 1) l'attenuazione, mentre il ritardo in fase sia dato da $\beta(\omega) = -\omega T$ con T costante. La tensione in uscita ai capi di R0 sarà:

$$V_i = V_1 K \mathrm{sen}(\omega t + \phi_1 - \omega T) + V_2 K \mathrm{sen}(2\omega t + \phi_2 - 2\omega T) =$$

$$= K(V_1 \mathrm{sen}(\omega(t - T) + \phi_1) + V_2 \mathrm{sen}(2\omega(t - T) + \phi_2)$$

ossia il segnale in uscita risulta attenuato (K<1) e ritardato nel tempo di T. E' fondamentale ricordare che il quadripolo deve essere chiuso sulla propria impedenza caratteristica per non avere distorsione del segnale. Ciò si applica sia per i segnali digitali che per quelli analogici: basti pensare a una distorsione di fase di un segnale video di un televisore. Nella prossima figura sono rappresentate una possibile forma d'onda che attraversa un quadripolo non distorcente per la propria banda passante:



Le linee di trasmissione

La trattazione che abbiamo fatto sui quadripoli è stata introduttiva alle linee di trasmissione.Dentro le apparecchiature elettroniche e fra una apparecchiatura e una altra ci troviamo sempre nelle condizioni di trasferire segnali il che viene fatto con opportuni linee o cavi siano essi bifilari che coassiale. Tanto per introdurre il problema se uno pensasse di collegare l' antenna televisiva al televisore con un cavo qualsiasi, se non ha fortuna, non vedrebbe niente perché il segnale verrebbe distorto.

Quando parliamo di trasferire un segnale dobbiamo tenere presente che, per evitare la sua distorsione:

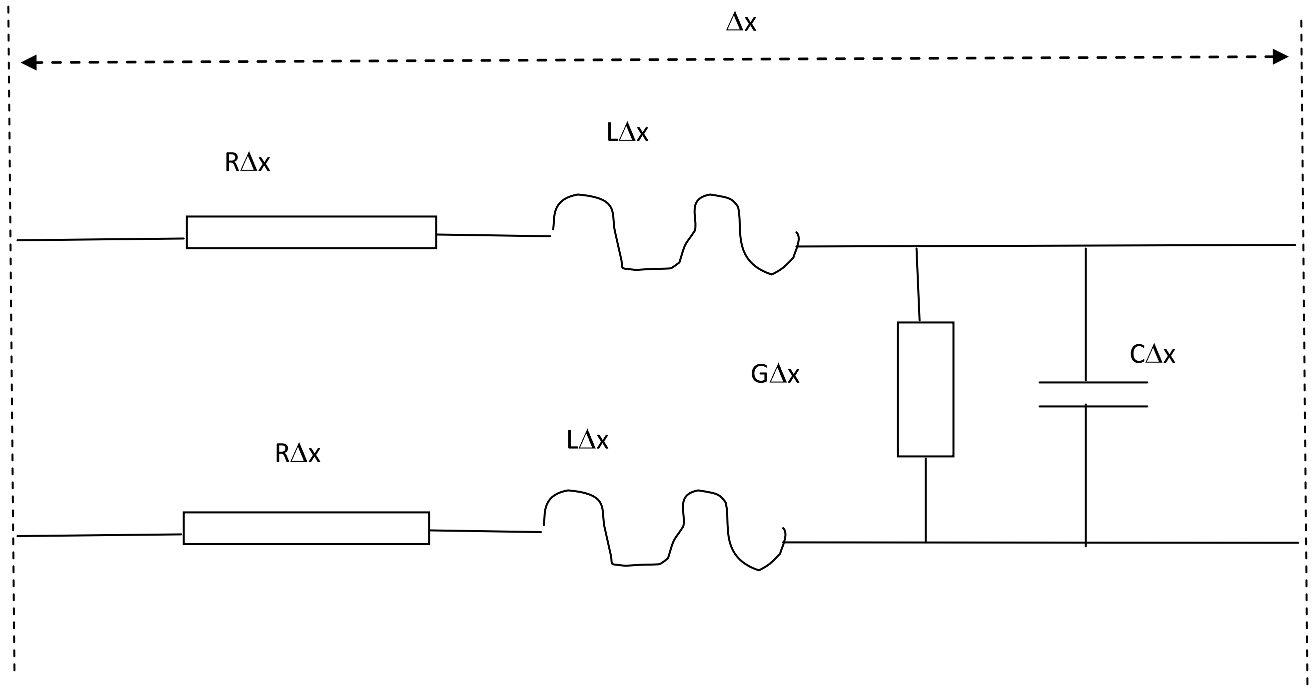
- la banda passante del collegamento deve essere almeno maggiore della massima frequenza del segnale che non deve essere distorto. Per un segnale digitale è richiesta una banda passante almeno 20 volte la frequenza del relativo clock ,

- il collegamento, per essere considerato una linea di trasmissione, deve essere lungo almeno quanto la lunghezza d'onda della massima frequenza del segnale stesso che si vuole trasmettere non distorta. In caso contrario bisogna considerare le sue capacità, resistenza e induttanza distribuite.

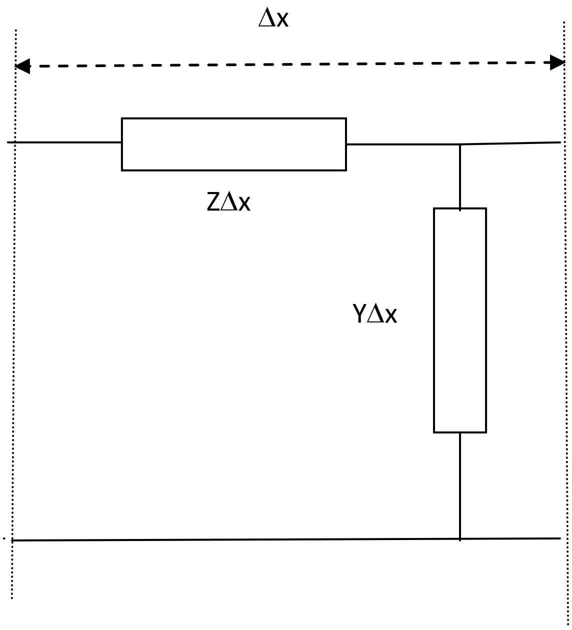
Avrete sentito parlare di cavi o linee di trasmissione a 50, 100..ohm: questo valore è l'impedenza caratteristica che il costruttore del cavo ha fatto, accanto a questo valore poi il costruttore vi fornisce la relativa banda passante, l' attenuazione e la velocità di trasmissione del segnale.

Naturalmente questi cavi o linee sono utilizzati nell'ambito delle relative frequenze non distorcenti, ossia con attenuazione costante e ritardo proporzionale alla frequenza, dovranno poi essere terminate sulla propria resistenza caratteristica se non vogliamo distorcere il segnale.

Vediamo ora brevemente e in maniera sommaria come si può progettare e quindi costruire una linea non distorcente, per fare ciò prendiamo un circuito equivalente di un elemento lungo Δx di una linea. Se la linea è bifilare noi abbiamo due fili separati da un dielettrico e chiamiamo R, L, C e G la loro resistenza. induttanza, capacità e conduttanza per unità di lunghezza. Avremo quindi una resistenza R Δx e una induttanza L Δx mentre fra i due fili possiamo considerare che vi è un effetto capacitivo C Δx e conduttivo G Δx; da cui abbiamo il seguente circuito equivalente:



Possiamo quindi parlare di impedenza Z e ammettenza Y parallelo per unità di lunghezza ed avere il seguente più semplice circuito equivalente:



Ove:

$Z\,\Delta x = (R + pL)\,\Delta x$

$Y\,\Delta x = (G + pC)\,\Delta x$

da cui possiamo scrivere le equazioni:

$\Delta V = - Z\,\Delta x\, I$

$\Delta I = - Y\,\Delta x\, V$

Da cui (in forma non molto corretta dal punto di vista dell'analisi matematica) abbiamo:

$dv/dx = - Zi$ Sono derivate parziali: v e i sono funzioni di x e t

$di/dx = - Yv$

ossia:

$\delta^2 v/\delta x^2 = ZY\,v$

$\delta^2 i/\delta x^2 = ZY\,i$

che vengono chiamate le ***equazioni dei telegrafisti***. L'origine del nome deriva dalla guerra di secessione negli USA: a quei tempi le diverse truppe a cavallo per comunicare fra di loro collegavano i diversi accampamenti con coppie di fili bifilari con i quali trasmettevano le reciproche informazioni via codice Morse. Si era notato che tale collegamento provvisorio non funzionava più, ossia non si riusciva a distinguere in ricezione la linea dal punto se il collegamento era superiore ad una certa distanza. Il problema venne affrontato da dei matematici che risolsero il sistema delle due equazioni differenziali precedenti: fu così possibile progettare ***linee non distorcenti quindi con attenuazione costante, ossia indipendente dalla frequenza, e ritardo proporzionale alla frequenza*** come abbiamo visto. A quei tempi la massima frequenza per cui la linea non doveva distorcere era molto bassa perchè il segnale era conseguenza di un tasto premuto da un uomo che chiudeva e apriva un circuito ! Oggi con clock dell'ordine di 100 MHz anche alcuni decimetri di collegamento devono essere considerati una linea di trasmissione e come tale progettata.

Definiamo γ ***costante o funzione di propagazione per unità di lunghezza***:

$$\gamma_0 = \sqrt{ZY}$$

Da cui otteniamo le equazioni dei telegrafisti nella loro forma finale:

$$d^2v/dx^2 - \gamma_0^2 v = 0$$

$$d^2i/dx^2 - \gamma_0^2 i = 0$$

abbiamo anche:

$$\gamma_0 = - \sqrt{ZY} = - \sqrt{(R + pL)(G + pC)} =$$

$$= \sqrt{\tau_0 \quad p^2 + p.(R/L + G/C) + R/L.G/C}$$

Dove:

$$\sqrt{\quad}$$

τ_0 è definito anche ***ritardo per unità di lunghezza***, ricordo che L e C sono induttanza e capacità per unità di lunghezza. e il prodotto LC ha le dimensioni di un tempo al quadrato. Si può dimostrare che l'impedenza caratteristica è data da:

$$Z_0 = \sqrt{Z/Y} = \sqrt{(R + pL)/(G + pC)}$$

Come si vede sia τ_0 sia Z_0 sono funzioni irrazionali di p ossia $j\omega$ quindi la linea risulterebbe distorcente se non fosse progettata e realizzata in maniera tale che

$$R/L = G/C$$

Sotto queste ipotesi abbiamo:

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = R_0$$

$$\gamma_0 = -\tau_0 (p + R/L) = -R/R_0 - p\tau_0$$

ove:

- R/R_0 è la costante α di attenuazione della linea per unità di lunghezza
- mentre è $\tau_0 = -\sqrt{LC}$
- il ritardo per unità di lunghezza, il suo inverso è la
- **velocità di propagazione** del segnale lungo la linea

un segnale sinusoidale verrà quindi:

- attenuato di $e^{-R/R0}$ per unità di lunghezza della linea
- e ritardato di τ_0 per unità di lunghezza della linea

Si può dimostrare che una linea costituita da due fili di diametro d e distanti fra di loro di r valore molto maggiore di d hanno capacità e induttanza data da:

$$C = \pi\varepsilon/(\log 2r/d)$$

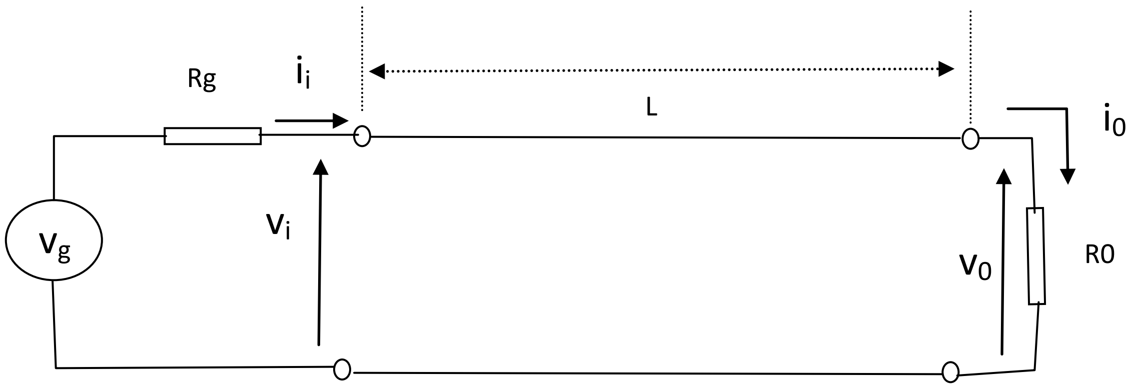
$$L = \mu/\pi.(\log 2r/d)$$

da cui si ricava la velocità di trasmissione del segnale e l'impedenza caratteristica:

$v = 1 / \tau = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/\sqrt{\varepsilon_r}$ $\qquad$ $R_0 = 1/\pi \,.\, \sqrt{\mu/\varepsilon} \,.\, \log(2r/d)$

Come si può vedere la velocità è quella della luce divisa per la costante dielettrica dell'isolante interposto. Da queste formule si possono progettare linee con impedenza caratteristica e attenuazione prefissata variando opportunamente d e r e scegliendo un opportuno dielettrico. Al crescere della frequenza aumenta la resistenza del conduttore per effetto pelle come pure gli altri parametri per cui la linea cessa di essere non distorcente: diventa praticamente un filtro passa basso. Vi sono oggi opportuni SW che permettono la progettazione di linee.

Supponiamo di avere una linea non distorcente collegata ad un generatore di tensione $v_g(t)$ il cui spettro sia nella banda passante della linea e chiusa sulla propria resistenza caratteristica come in figura.



Integrando le equazioni dei telegrafisti per questo circuito abbiamo per la tensione e la corrente in ingresso alla linea e ai capi del carico le seguenti relazioni:

$$v_i = v(0,t) = Rg/(Rg + R0)\ v_g(t)$$

$$i_i = i(0,t) = 1/(Rg + R0)\ v_g(t)$$

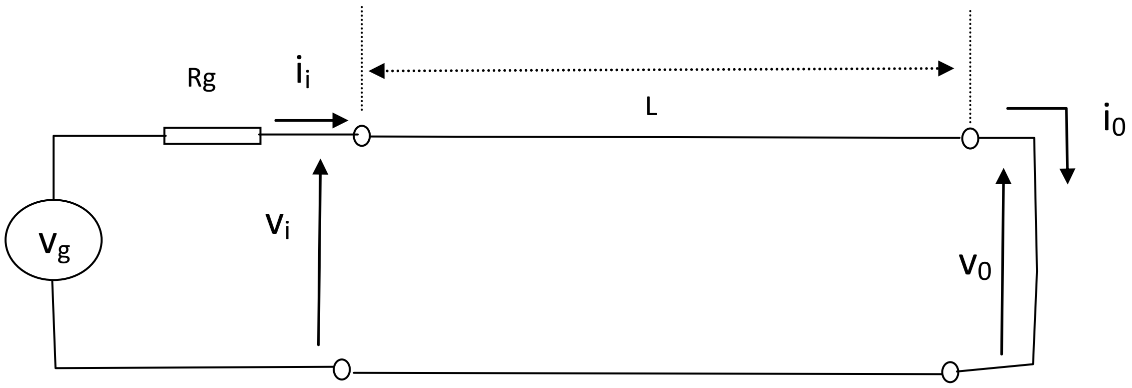
mentre ai capi del carico abbiamo:

$$v_0 = v(L,t) = Rg/(Rg + R0)\ e^{\alpha L}.v_g(t-\tau_0 L)$$

$$i_0 = i(L,t) = 1/(Rg + R0)\ e^{\alpha L}.v_g(t-\tau_0 L)$$

Ossia il segnale arriva ai capi del carico ritardato e attenuato..

Supponiamo ora di avere lo stesso circuito e che la linea sia adattata lato generatore mentre lato carico sia in corto circuito, vedi figura:



L'integrazione delle equazioni dei telegrafisti per un punto a distanza x porta alla seguente risoluzione, supponendo R_0 = Rg:

$$v(x,t) = \tfrac{1}{2}.(e^{\alpha x}.Vg\,(t-\tau_0 x) - e^{\alpha(2L-x)}.Vg\,(t - 2L\tau_0 x))$$

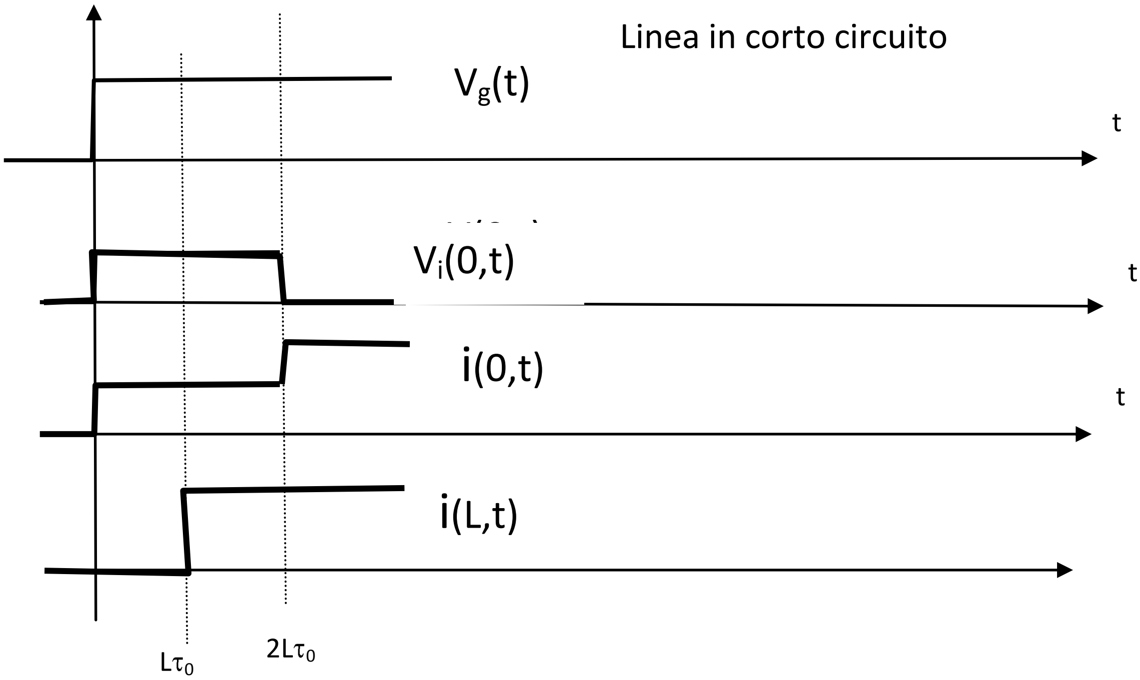
$$i(x,t) = 1/2R_0.(e^{\alpha x}.Vg\,(t-\tau_0 x) + e^{\alpha(2L-x)}.Vg\,(t - 2L\tau_0 x))$$

Ossia, causa il disadattamento di impedenza abbiamo una onda incidente e una onda riflessa dal carico:

- l'onda riflessa di tensione si sottrae all'onda incidente: dall'istante 0 al tempo $2L\tau_0$ abbiamo in ingresso Vg/2 che poi si riduce praticamente a 0 (dipende dalla lunghezza della linea) quando torna l'onda riflessa
- mentre la corrente d'ingresso praticamente raddoppia dopo $2L\tau_0$

Se invece di un corto circuito in uscita avessimo avuto un circuito aperto il discorso sarebbe stato duale: l'onda riflessa di corrente avrebbe avuto segno opposto non così per l'onda di tensione. Ossia il generatore si accorge del carico dopo il tempo $2L\tau_{0.}$

Riportiamo un grafico in funzione del tempo per linea in corto cortocircuito: il grafico è relativo all'ingresso e alla corrente d'ingresso e d'uscita, la tensione del generatore viene supposta essere la funzione gradino unitaria.



Quando colleghiamo una rete digitale a un carico o a una altra rete pure digitale tramite un collegamento ad esempio bifilare la domanda che ci poniamo è se questo collegamento si comporterà come una linea di trasmissione oppure come un quadripolo a costanti concentrate. Abbiamo due approcci:

<u>il primo riguard</u>a la massima frequenza del segnale che dobbiamo trasmettere indistorto: se il collegamento è più lungo della lunghezza d'onda di questo segnale tale collegamento deve essere progettato come linea di trasmissione. Abbiamo visto che la velocità di trasmissione è:

$$v = c/(\varepsilon_r.\mu_r)^{1/2}$$

Ove c è la velocità della luce, ε_r e μ_r sono la costante dielettrica e magnetica relativa, da cui la frequenza:

$f = v/\lambda$ con f la frequenza e λ la lunghezza d'onda, abbiamo:

f	λ in aria	λ in teflon	λ in bachelite
30 MHz	10 m	7 m	4,6 m
300 MHz	1 m	70 cm	46 cm
3 GHz	10 cm	7 cm	4.6 cm

per quanto riguarda v in funzione del dielettrico abbiamo:

	ε_r	v
teflon:	2,1	0,69 c con c velocità della luce
Bachelite:	4.7	0,46 c

Si può concludere che in una linea la velocità di propagazione del segnale è, in prima approssimazione, circa 2/3 quella della luce quindi ***un metro di collegamento introduce un ritardo di 5 ns in teflon*** **e 7 ns in bachelit*e.***

<u>Il secondo approccio</u> più immediato di quello relativo alla frequenza è considerare il tempo di salita del segnale digitale: se in questo intervallo di tempo il segnale non arriva alla fine del collegamento, il collegamento si comporta come una linea di trasmissione altrimenti deve essere trattato come un quadripolo a costanti concentrate.