Appunti di Analisi Numerica*

Giuseppe Profiti

27 settembre 2006

1 Argomenti del corso

- numeri finiti
- polinomi e interpolazione
- equazioni non lineari
- integrazione numerica
- algebra lineare

2 Numeri finiti

2.1 Numeri reali

Definizione 1 (di numero reale) *Definiamo un numero reale come*

$$\alpha = \pm m\beta^p$$

con m = *mantissa,* β = *base,* p = *esponente.*

$$m := \alpha_1\beta^{-1} + \alpha_2\beta^{-2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\beta^{-i}$$

con

$$0 \leq \alpha_i \leq \beta - 1 \;\; e \;\; \alpha_1 \neq 0$$

Esempi

- $\beta = 10 \quad \alpha_i \in \{0, \ldots, 9\}$
- $\beta = 2 \quad \alpha_i \in \{0, 2\}$

2.1.1 Modi di scrittura

1. Forma mista

$$\alpha = \begin{cases} \pm(0.00\ldots0\alpha_1\alpha_2\ldots)_\beta \text{ se } p \leq 0 \\ \pm(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p.\alpha_{p+1}\ldots)_\beta \text{ se } p > 0 \end{cases}$$

p zeri dopo il punto

2. Forma scientifica

$$\alpha = \pm 0.\alpha_1\alpha_2\ldots \times \beta^p$$

Esempi

Di seguito sono elencati un numero reale come da definizione, in forma mista e in forma scientifica.

$$\begin{aligned} \alpha &= +(3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3})_{10} \cdot 10^3 \\ \alpha &= 372 \quad \text{oppure} \quad \alpha = +372. \\ \alpha &= +0.372 \times 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi &= +(3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + \cdots)_{10} \cdot 10^1 \\ \pi &= +3.1415\ldots \\ \pi &= +0.31415\ldots \times 10^1 \end{aligned}$$

Nota: gli interi sono un caso particolare dei reali. Nel calcolatore si rappresentano in modo diverso e si usano in modo diverso.

2.2 Numeri finiti

I numeri finiti sono composti da un numero finito di cifre e sono finiti e numerabili. Nei calcolatori si usano numeri finiti che approssimano i reali (ad esempio π).

É neccessario poter approssimare a meno di una data tolleranza indipendentemente dalla scala.

Definizione 2 (di numero finito per troncamento) *Definiamo un numero finito, basato su un numero reale* $\alpha \in \Re$

$$fl(\alpha) = \begin{cases} 0 \cdot \beta^0 & se \quad \alpha = 0 \\ \pm m_t \beta^p & se \quad \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Definizione 3 (mantissa troncata) *Definiamo mantissa troncata composta da* t *cifre*

$$m_t := \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \beta^{-i} \quad con \quad \alpha_1 \neq 0$$

Se β è pari è possibile definire una mantissa arrotondata, che somma $\frac{\beta}{2}$ alla *(t+1)*-esima cifra e poi tronca alla t-esima cifra.

Esempio

$\alpha = 0.271826 \times 10^0 \qquad t = 5$

$$\begin{array}{l} 0.271826 + \\ \underline{0.000005} \\ 0.271831 \rightarrow 0.27183 \end{array}$$

Definizione 4 (di numero finito) *Formalmente:*

- *Troncamento*

$$fl_T(\alpha) = \pm(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \beta^{-i})\beta^p$$

- *Arrotondamento*

$$fl_A(\alpha) = fl_T\left(\left[\sum_{i=1}^{t+1} \alpha_i \beta^{-i} + \frac{\beta}{2}\beta^{-t-1}\right]\beta^p\right)$$

2.3 Intervalli reali e numeri finiti

Siano X e Y due numeri finiti consecutivi tali che $X \leq \alpha < Y$.

$$\begin{aligned} X &= \left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \beta^{-i}\right)\beta^p \qquad \text{il troncato di } \alpha \\ Y &= \left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \beta^{-i} + 1 \cdot \beta^{-t}\right)\beta^p \qquad \text{t-esima cifra incrementata di 1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
fl_T(\alpha) &= X \\
fl_A(\alpha) &= \begin{cases} X \text{ se } \alpha < \frac{X+Y}{2} \\ \\ Y \text{ se } \alpha \geq \frac{X+Y}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Esempio

Definizione 5 (insieme dei numeri finiti) *Definiamo l'insieme dei numeri finiti come $\mathcal{F}(\beta, t, \lambda, \omega)$, dove β è la base,* t *il numero di cifre del troncamento, $\lambda \leq p \leq \omega$ il range dell'esponente.*

Per avere un numero uguale di numeri positivi e numeri negativi si può prendere $\lambda = -\omega$.

2.4 Esercizi

1. Trovare il numero di elementi di $\mathcal{F}(\beta, t, \lambda, \omega)$
2. Determinare tutti i numeri di $\mathcal{F}(2, 3, -1, 2)$

2.4.1 Soluzioni

1. permutazioni delle cifre (tranne la prima che non può essere zero) per i possibili esponenti, più lo zero

$$2 \cdot (\beta - 1) \cdot \beta^{t-1} \cdot (\omega - \lambda + 1) + 1$$

2. Tutti i numeri finiti in base 2 composti da 3 cifre, con esponenti da -1 a 2.

$$
\begin{array}{cl}
0 & \times 2^0 \\
\pm.100 & \times 2^{-1} \\
\pm.101 & \times 2^{-1} \\
\pm.110 & \times 2^{-1} \\
\pm.111 & \times 2^{-1} \\
\pm.100 & \times 2^0 \\
\pm.101 & \times 2^0 \\
\pm.110 & \times 2^0 \\
\pm.111 & \times 2^0 \\
\pm.100 & \times 2^1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\pm.101 & \times 2^1 \\
\pm.110 & \times 2^1 \\
\pm.111 & \times 2^1 \\
\pm.100 & \times 2^2 \\
\pm.101 & \times 2^2 \\
\pm.110 & \times 2^2 \\
\pm.111 & \times 2^2
\end{array}
$$

Sono 33 elementi, ed in effetti dalla formula dell'esercizio 1 otteniamo

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (\beta - 1) \cdot \beta^{t-1} \cdot (\omega - \lambda + 1) + 1 &= \\
&= 2 \cdot (2 - 1) \cdot 2^{3-1} \cdot (2 + 1 + 1) + 1 \\
&= 2 \cdot 4 \cdot 4 + 1 = \mathbf{33}
\end{aligned}
$$