Appunti di Analisi Numerica*

Giuseppe Profiti

16 ottobre 2006

1 Polinomi

1.1 Richiami sui polinomi

$$p : \Re \rightarrow \Re \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Con $a_i \in \Re$ assegnati. Se $a_n \neq 0$ il polinomio ha esattamente grado n.

$p(x) \in \mathcal{P}_n$ è uno spazio di funzioni di grado al più n (contiene tutti quelli di grado $\leq n$).

Si usano i polinomi perché possono essere calcolati esattamente sul calcolatore (sono composti soolo da addizioni e moltiplicazioni).

Teorema 1 (fondamentale dell'algebra) *Sia $p(x)$ un polinomio di grado $n > 1$. L'equazione algebrica $p(x) = 0$ ha almeno una radice reale o complessa.*

Corollario 1 *Ogni equazione algebrica di grado* n *ha esattamente* n *radici reali o complesse.*

Cioé

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

Con $x_1 \ldots x_k$ radici distinte e m_i molteplicità tale che $\sum m_i = n$

Teorema 2 (del resto) *Siano $a(x)$ e $b(x)$ polinomi con $b(x) \neq 0$[1] allora esistono e sono unici i polinomi $q(x)$ e $r(x)$ per cui*

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$$

Con $r(x) = 0$ o $r(x)$ di grado minore al grado di $b(x)$

[1] $b(x)$ non è il polinomio nullo: $\forall i \; a_i = 0$

1.2 Valutazione numerica di un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Algoritmo 1

Input: gli a_i e x_0 (punto in cui valutare il polinomio) Output: $p(x_0)$

```
s = 1
p = a[0]
per k = 1,...,n
    s = s*x0
    p = p+a[k]*s
```

Complessità $2n$ moltiplicazioni e n addizioni. Si può migliorare, anche dal punto di vista numerico.

Modifico $p(x)$ per ottenere un altro algoritmo:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\ &= a_0 + x(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}) \\ &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + a_n x^{n-2})) \\ &\vdots \\ &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x) \ldots) \end{aligned}$$

Complessità: n addizioni e n moltiplicazioni.

Algoritmo 2

```
p = a[n]
per k = n-1,...,0
    p = a[k] + p*x0
```

È il miglior algoritmo (metodo di Horner) anche dal punto di vista numerico (è più stabile).

1.3 Ruffini e teorema del resto

Dati $p(x) \quad x_0 \quad (x - x_0)$

$$p(x) = q(x)(x - x_0) + r(x)$$

$r(x)$ ha grado minore a quello di $(x - x_0)$, quindi è una costante.

$$p(x) = q(x)(x - x_0) + r$$

$$p(x_0) = q(x_0)(x_0 - x_0) + r = r$$

Trovando il resto della divisione ho la valutazione di $p(x_0)$: uso Ruffini.

1.3.1 Regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & & a_0 \\
x_0 & & x_0 \cdot b_n & x_0 \cdot b_{n-1} & \dots & \dots & & x_0 \cdot b_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & & r
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
b_n & \leftarrow & a_n \\
b_{n-1} & \leftarrow & a_{n-1} + x_0 b_n \\
b_{n-2} & \leftarrow & a_{n-2} + x_0 b_{n-1} \\
 & \vdots & \\
b_1 & \leftarrow & a_1 + x_0 b_2 \\
r & \leftarrow & a_0 + x_0 b_1
\end{array}$$

è come la formula di Horner ma b_i sono i coef del polinomio quoziente che nell'altro modo non avevo.

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i$$

Esempio

$p(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^4$ e $x_0 = 2$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\
2 & & 6 & 12 & 20 & 42 \\
\hline
 & 3 & 6 & 10 & 21 & 43
\end{array}$$

Quindi $p(2) = 43$.

1.3.2 Derivata

Ci interessa la derivata, ma non in forma analitica: vogliamo valutarla.

$$\begin{array}{rcl}
p(x) & = & q(x)(x - x_0) + r \\
p'(x) & = & q'(x)(x - x_0) + q(x) \\
p'(x_0) & = & q'(x_0)(x_0 - x_0) + q(x_0) = q(x_0)
\end{array}$$

Esempio (dal precedente)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 6 & 10 & 21 \\ 2 & & 6 & 24 & 68 \\ \hline & 3 & 12 & 34 & 89 \end{array}$$

Quindi $p'(2) = 89$.

Implementazione

```
p1 = 0
p = a[n]
per k = n-1,...,0
    p1 = p+x0 * p1
    p = a[k]+x0*p
```

$p(x) \leftarrow p$ e $p'(x_0) \leftarrow p1$. Fa le operazioni in parallelo: invece di calcolare prima p e poi la derivta, ricopia e calcola per colonne.

1.4 Valutazione di un polinomio: errore inerente

Esempio

$p(x) = 100 - x$ con $x \in [100, 101]$. $a_0 = 100 \quad a_1 = -1$.

Simuliamo un errore di perturbazione sull'input: modifichiamo a_1 di $\frac{1}{100}$.

$$q(x) = 100 - \left(1 - \frac{1}{100}\right) x = 100 - \frac{99}{100} x$$

$x = 101 \qquad p(101) = -1 \qquad q(101) = 0.01$

$$\left| \frac{q(101) - p(101)}{p(101)} \right| = \left| \frac{0.01 + 1}{-1} \right| = 1.01 = 101 \cdot \frac{1}{100}$$

Perturbando il coef l'errore esplode, è 101 volte più grande della perturbazione.

$x = 100.5 \qquad p(100.5) = -0.5 \qquad q(100.5) = 0.505$

$$\left| \frac{q(100.5) - p(100.5)}{p(100.5)} \right| = \left| \frac{0.01 + 1}{-1} \right| = 1.01 = 101 \cdot \frac{1}{100}$$

1.4.1 Valutazione dell'errore inerente

$f : \Re^3 \to \Re \quad f(a_0, a_1, x) = a_0 + a_1 x_0$

$$E_{IN} = \left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \simeq \sum_{i=1}^{n} c_1 \epsilon_i$$

$$\epsilon_i = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i} \qquad c_i = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$E_{IN} = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3$
ϵ_1 errore su a_0, ϵ_2 errore su a_1, ϵ_3 errore di x_0.

$$E_{IN} = \frac{a_0}{a_0 + a_1 x_0}\epsilon_1 + \frac{a_1}{a_0 + a_1 x_0} x_0 \epsilon_2 + \frac{x_0}{a_0 + a_1 x_0} a_1 \epsilon_3$$

Basta che uno dei termini sia grande per avere E_{IN} grande.

Esempio (sempre quello di prima)

$a_0 = 100 \quad a_1 = -1 \quad x_0 = 101$

$$E_{IN} = \frac{100}{100 - 101}\epsilon_1 + \frac{-1 \cdot 101}{100 - 101}\epsilon_2 - \frac{101}{100 - 101}\epsilon_3 = -100\epsilon_1 + 101\epsilon_2 + 101\epsilon_3$$

Sono tutti dell'ordine di 100. Nell'esempio precedente $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0$ e infatti l'errore è 101 volte l'errore sui dati. Anche perturbando gli altri ci sarebbe stato un errore grande. È un errore inerente, si può fare poco per eliminarlo.

Generalizzando

$$\begin{aligned} E_{IN} = E_{IN1} + E_{IN2} &= \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{p(x)} \frac{\partial p(x)}{\partial a_i} \epsilon_i + \frac{x}{p(x)} \frac{\partial p(x)}{\partial x} \epsilon_x \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i x_i}{p(x)} \epsilon_i + \frac{x}{p(x)} p'(x) \epsilon_x \end{aligned}$$

E_{IN1} dipende dalla rappresentazione, E_{IN2} invece no.

Se esistono differenti rappresentazioni del polinomio posso avere errori differenti in modo da modificare E_{IN1}

Quando scelgo la rappresentazione $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ sto usando la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \in \mathcal{P}_n$.

$\exists$ infinite basi di rappresentazione per cui

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \varphi_i(x) \quad \text{con base } \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\} \in \mathcal{P}_n$$

Esistono basi ben condizionate, tipicamente $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è mal condizionata soprattutto se devo valutare in $[a, b]$ lontano dall'origine (gli elementi della base sono tutti centrati nell'origine).

Proviamo ad esempio a prendere le funzioni base centrate nell'intervallo, quindi passo da $\{1, x\}$ a $\{1, (x - c)\}$ (base delle potenze con centro) per il nostro esempio $p(x) = 100 - x$, con $c = 100$.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x \\ &= b_0 + b_1(x - 100) \\ &= 0 + (-1)(x - 100) \end{aligned}$$

Perturbiamo b_1 di $\frac{1}{100}$

$$\begin{aligned} q(x) &= (-1 + \frac{1}{100})(x - 100) \\ &= -\frac{99}{100}(x - 100) \end{aligned}$$

$x = 101 \quad p(101) = -1 \quad q(101) = \frac{99}{100} = -0.99$

$$\left| \frac{q(101) - p(101)}{p(101)} \right| = \left| \frac{-0.99 + 1}{1} \right| = 0.01 = 1 \cdot \frac{1}{100}$$

$x = 100.5 \quad p(100.5) = -0.5 \quad q(100.5) = -\frac{99}{100} \cdot 0.5$

$$\left| \frac{q(100.5) - p(100.5)}{p(100.5)} \right| = \frac{0.005}{0.5} = 0.01 = 1 \cdot \frac{1}{100}$$

Ho un errore relativo dello stesso tipo della perturbazione sui dati $\frac{1}{100}$.

$$\begin{aligned} E_{IN} &= c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3 \\ &= \frac{b_0}{b_0 + b_1(x - 100)}\epsilon_1 + \frac{b_1}{b_0 + b_1(x - 100)}\epsilon_2 + \frac{x}{b_0 + b_1(x - 100)} b_1\epsilon_3 \end{aligned}$$

I coef sono dell'ordine di 1 quando x è nell'intervallo $[100, 101]$: centrando nell'intervallo di interesse si riduce di molto l'errore.