

Appunti di Analisi Numerica*

Giuseppe Profiti

25 ottobre 2006

1 Applicazione di deCasteljeau a una curva di Bezier

$$\underline{C}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) \quad P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

Applichiamo deCast. alla componente x e poi alla y

$$P_i^{[j]} = t \cdot P_{i+1}^{[j-1]} + (1-t) \cdot P_i^{[j-1]} \quad P_i^{[0]} = P_i$$

(immagine mancante)

Considerando una poligonale di controllo composta da 4 punti, da P_0 a P_3 , $P_0^{[1]}$ sarà la combinazione convessa di P_0 e P_1 , quindi $P_0^{[1]}$ è sul segmento $\overline{P_0 P_1}$, $P_1^{[1]} \in \overline{P_1 P_2}$, $P_2^{[1]} \in \overline{P_2 P_3}$

$P_0^{[3]}$ è il valore della curva per il t dato. $P_0^{[0]} P_0^{[1]} P_0^{[2]} P_0^{[3]}$ sono i punti che definiscono la curva originale da P_0 a $P_0^{[3]}$.

$P_0^{[3]} P_1^{[2]} P_2^{[1]} P_3^{[0]}$ definiscono la curva da $P_0^{[3]}$ a P_3 .

Algoritmo di suddivisione: si suddivide la curva in due curve.

Posso modificare l'algoritmo di valutazione: uso $t = \frac{1}{2}$ e calcolo ricorsivamente a partire dai punti di controllo trovati per la sottocurva, mi fermo quando trovo un valore che dista da P_0 meno della precisione che ci interessa.

Esempio

$P_0 P_1 P_2 P_3$ punti della curva originale.

$Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 R_0 R_1 R_2 R_3$ le due sottocurve.

*Licenza Creative Commons by-sa-nc

$$\begin{aligned}
Q_0 &= P_0 \\
Q_1 &= \frac{P_0 + P_1}{2} \\
Q_2 &= \frac{Q_1}{2} + \frac{P_1 + P_2}{4} \\
Q_3 &= \frac{Q_2 + R_1}{2} \\
R_0 &= Q_3 \\
R_1 &= \frac{R_2}{2} + \frac{P_1 + P_2}{4} \\
R_2 &= \frac{P_2 + P_3}{2} \\
R_3 &= P_3
\end{aligned}$$

Si possono calcolare a partire da Q_0 e R_3 fino ad arrivare al centro (R_0 e Q_3).

Sono divisioni per 2 (shift) e addizioni, Q è in $[0, \frac{1}{2}]$ e R in $[\frac{1}{2}, 1]$ ma per le proprietà di cambio di variabile si può riapplicare deCast.

Inoltre ogni volta allarghiamo l'intervallo (cambiando variabile) e quindi è sempre più stabile.

Per i caratteri si distingue tra punti on e off: gli on sono sulla curva.

1.1 Interpretazione geometrica di b_i

$$Y = p(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(x)$$

1.1.1 Forma vettoriale

È possibile passare in forma vettoriale usando $x = t$ e $y = f(t)$.

Se ho y polinomio di bernst. posso scriverlo come una curva di bezier

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sum b_i B_{i,n}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_{i,n}(t) \\ y = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) \end{cases}$$

Esercizio

Dimostrare che

$$t = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_{i,n}(t) \quad t \in [0, 1]$$

Esempio

$$p(x) = 2 B_{0,2}(t) - 2 B_{1,2}(t) + 2 B_{2,2}(t) \quad t \in [0, 1]$$

Calcoliamo per $t = \frac{1}{4}$
(immagine mancante)

2 Formula ricorrente per la derivata di pol. base di Bernstein

$$B'_{i,n}(x) = n (B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x))$$

$$B''_{i,n}(x) = n (B'_{i-1,n-1}(x) - B'_{i,n-1}(x))$$

$$p'(x) = \sum_{i=0}^n b_i B'_{i,n}(x)$$

$$p'(x) = \sum_{i=0}^n b_i B'_{i,n}(x) = \dots = n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_{i,n-1}(x)$$

$$b'_i = n (b_{i+1} - b_i)$$

Per valutare, usando l'algoritmo 1, valuto da $B_{0,0}(\bar{x})$ fino a $B_{0,n-1}(\bar{x}) \dots B_{n-1,n-1}(\bar{x})$ da cui mi calcolo i $B'_{i,n}(\bar{x})$.

Per la derivata seconda mi fermo al passo precedente, e così via.

3 Antiderivata o primitiva

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i B_{i,n-1}(x)$$

$$p^{-1}(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(x)$$

$$d_i = n (b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$b_{i+1} = \frac{d_i}{n} + b_i$$

Non ho la formula per b_o ma l'antiderivata non è unica: posso scegliere B_0 come voglio, ad esempio 0.

4 Integrazione

$$\int_0^1 p(x) dx = [p^{-1}(x)]_0^1 = p^{-1}(1) - p^{-1}(0) = b_n - b_0$$

Una volta calcolato il b_n ho già l'integrale. (è il coef. della primitiva)

Esercizio

Provare/verificare che

$$\int_0^1 B_{i,n}(x) dx = \frac{1}{n+1} \quad \forall i$$

5 Interpolazione

Siano assegnate $n + 1$ osservazioni in corrispondenza di altrettanti punti distinti, cioè siano assegnati

$$(X_i, Y_i)_{i=0, \dots, n}$$

Assegnato uno spazio ϕ di funzioni da $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e assegnata una base di rappresentazione per queste funzioni, determinare $\varphi^*(x) \in \phi$ tale che $\varphi^*(X_i) = Y_i$ con $i = 0, \dots, n$.

$$\varphi^*(X) = \sum_{i=0}^n a_i^* \varphi_i(x)$$

Problematiche:

1. esiste una soluzione?
2. è unica?
3. è una buona funzione? (ricostruzione dei dati)

Come si valute (3): scelgo $f(x) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, estraggo dei valori $(x_i, f(x_i))_{i=0, \dots, n}$ e li uso come dati del problema $\varphi^*(x_i) = f(x_i)$ per stimare la bontà uso

$$|f(x) - \varphi^*(x)| < \epsilon \quad x \in [a, b]$$