Appunti di Analisi Numerica*

Giuseppe Profiti

23 ottobre 2006

1 Base dei polinomi di Bernstein

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x) \quad x \in [a, b]$$

La base è costruita sull'intervallo di interesse.

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(b-x)^{n-i}(x-a)^i}{(b-a)^n}$$

Esempio

$$\begin{aligned} p(x) &= 100 - x & (1) \\ &= -1 \cdot (x - 100) & (2) \\ &= b_0 B_{0,1}(x) + b_1 B_{1,1}(x) & (3) \end{aligned}$$

Le diverse rappresentazioni sono

- base delle potenze (1), $a_0 + a_1 x$ con $a_0 = 100, a_1 = -1$
- base delle potenze con centro (2), $c_0 + c_1(x - 100)$ con $c_0 = 0, c_1 = -1$
- base di Bernstein (3), da calcolare

$$B_{0,1}(x) = \binom{1}{0} \frac{(101-x)^{1-0}(x-100)^0}{(101-100)^1} = (101 - x)$$

$$B_{1,1}(x) = \binom{1}{1} \frac{(101-x)^{1-1}(x-100)^1}{(101-100)^1} = (x-100)$$

$$p(x) = b_0(101-x) + b_1(x-100)$$

Quindi $b_0 = 0$ e $b_1 = -1$.

La base centrata e quella di Bernstein sono diverse ma in questo caso capita che la rappresentazione coincida.

Errore inerente

$$E_{IN} = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3 = \frac{b_0}{p(x)}(101-x)\epsilon_1 + \underbrace{\frac{b_1}{p(x)}(x-100)}_{\cong 1}\epsilon_2 + \underbrace{\frac{x}{p(x)}p'(x)}_{*}\epsilon_3$$

* non dipende dalla rappresentazione, gli altri coef. sono dell'ordine di 1 come per la base delle potenze con centro.

La base di bernstein è interessante perché permette di intervenire anche sul cuoef. di ϵ_3.

1.1 Cambio di variabile

$$x \in [a,b] \rightarrow t \in [0,1]$$

$$t = \frac{x-a}{b-a} \qquad x = a + t(b-a)$$

A $p(x)$ sostituisco la x dalla formula precedente in modo da ottenere $q(t)$.

$q(t)$ è uguale a $p(x)$ ma traslato e scalato, per t e x che corrispondono $p(x) = q(t)$.

$q(t)$ è un polinomio con dei nuovi coef. che dovrò calcolare. In bernstein i coef restano uguali quindi evito gli eventuali errori di calcolo nel cambio di variabile.

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i \binom{n}{i} \frac{(b-x)^{n-i}(x-a)^i}{(b-a)^n} \qquad \text{cambio variabile} \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i \binom{n}{i} \frac{[b-a-t(b-a)]^{n-i}[a+t(b-a)-a]^i}{(b-a)^n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i \binom{n}{i} \frac{[(b-a)(1-t)]^{n-i}[t(b-a)]^i}{(b-a)^n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} b_i \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t) \qquad t \in [0,1]
\end{aligned}
$$

La base ha assorbito il cambio di variabile. La base di bernstein in [0,1] può simulare qualsiasi intervallo.

Esempio

$p(x) = b_0(101-x)+b_1(x-100) = b_0(1-t)+b_1(t-0) \qquad x \in [100,101], t \in [0,1]$

$$
E_{IN} = \underbrace{\frac{b_0}{p(x)}(101-x)\epsilon_1 + \frac{b_1}{p(x)}(x-100)}_{\text{questi sono uguali}}\epsilon_2 + \underbrace{\frac{x}{p(x)}p'(x)}_{*}\epsilon_3
$$

Vediamo come è cambiato * col cambio di variabile.

Prima era $x \in [100,101]$, ora $t \in [0,1]$. $p'(t) = (b-a)p'(x)$[1] resta uguale perché $(b-a) = (101-100) = 1$. $\frac{t}{p(t)}p'(t)$ sarà dell'ordine dell'unità.

Esempio (continuazione)

$$
p(t) = -t \quad t \in [0,1] \qquad b_0 = 0 \quad b_1 = -1
$$

Perturbazione su t (voglio vedere come il cambio di variabile influisce sull'errore, lasciando fermo il resto).

$$
t = 1 \qquad \bar{t} = 0.99 \qquad p(1) = -1 \qquad q(0.99) = 0.99
$$

$$
\left| \frac{p(1)-q(1)}{p(1)} \right| \cong 1 \cdot \frac{1}{100}
$$

Posso fare alcune operazioni in [0,1] senza il cambio di variabile: non ho il problema di calcolarlo (es. disegno del polinomio).

1.2 Proprietà dei polinomi di Bernstein

- $B_{i,n}(t) \geq 0 \qquad \forall i = 0,\dots,n \quad \forall t \in [0,1]$
- $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$

Il fatto che siano tutte positive è buono: si lavora con termini dello stesso segno e quindi si evitano casi di cancellazione numerica.

[1] $p'(t)$ diminuisce se allargo l'intervallo (cambia la pendenza della tangente)

Esempio

Con $n = 2$

$$\begin{aligned}
B_{0,2}(t) &= \binom{2}{0}(1-t)^{2-0}t^0 = (1-t)^2 \\
B_{1,2}(t) &= \binom{2}{1}(1-t)^{2-1}t^1 = 2(1-t)t \\
B_{2,2}(t) &= \binom{2}{2}(1-t)^{2-2}t^2 = t^2
\end{aligned}$$

La prima e l'ultima funzione base sono simmetriche rispetto al centro dell'intervallo.

La somma in qualsiasi punto è 1, si vede anche analiticamente: $B_{i,n}$ è la rappresentazione del binomio $[(1-t)+t]^n = 1$.

Dato che la somma è 1, $p(x)$ è una combinazione affine, essendo anche sempre positiva è una combinazione convessa. Da questo si deriva che

$$min b_i \leq p(x) \leq max b_i$$

Il segno dei b_i indica quante radici ci sono:

- se sono tutti positivi o tutti negativi non ci sono radici
- se alcuni sono positivi e altri negativi in base ai cambiamenti di segno posso trovare il numero di radici

1.3 Definizione ricorrente dei pol. di Bernstein

$$B_{i,n}(t) = t \cdot B_{i-1,n-1}(t) + (1-t) \cdot B_{i,n-1}(t)$$

Con $B_{0,0}(t) = 1$ e $B_{i,n} = 0 \; \forall i \notin 0, n$.

Un polinomio di grado n è una combinazione convessa di polinomi di grado n-1.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & B_{0,0} = 1 & & 0 & & & & \\
& \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\
0 & & B_{0,1} & & B_{1,1} & & 0 & & \\
& \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
& & B_{0,2} & & B_{1,2} & & B_{2,2} & & \\
& & \vdots & & & & & \ddots & \\
& & B_{0,n} & \dots & & & & & B_{n.n}
\end{array}$$

1.4 Algoritmo 1

Input: $b_0, \ldots, b_n, \bar{t}$, output: valutazione di $p(\bar{t})$

1. calcolo l'array di valori $[B_{0,n}(\bar{t}), \ldots, B_{n,n}(\bar{t})]$ Contiene l'ultima riga dello schema precedente.

2. $\sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(\bar{t})$

È stabile ma ha complessità $O(n^2)$

1.5 Algoritmo 2 (de Casteljeau)

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i [t \cdot B_{i-1,n-1}(t) + (1-t) B_{i,n-1}(t)] \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i t \cdot B_{i-1,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n} b_i (1-t) B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i t \cdot B_{i-1,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-t) B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} t \cdot B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-t) B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [b_{i+1} t + b_i (1-t)] \cdot B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{[1]} \cdot B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{[2]} \cdot B_{i,n-2}(t) \\
&= \vdots \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{[n]} \cdot B_{i,0}(t) \\
&= b_0^{[n]} = p(t)
\end{aligned}
$$

Input: $b_0, \ldots, b_n, \bar{t}$

Con uno schema simile al precedente, ma invertito, dagli n b_i possiamo ricavare gli n - 1 $b_i^{[1]}$ e così via fino a ottenere $b_0^{[n]} = p(\bar{t})$.

È l'algoritmo più stabile per la valutazione di polinomi base di bernstein.

1.6 Curve di Bezier

$$\underline{\mathcal{C}}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} X_i B_{i,n}(t) \\ \sum_{i=0}^{n} Y_i B_{i,n}(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

Che è uguale a $\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$ con $P_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$.

È un'applicazione nel piano, ogni coef è un punto che delimina una poligonale. Il numero di punti indica il grado: $P_0, \ldots, P_3$ per una cubica, in generale P_n indica un un grado $n-1$.

$\underline{\mathcal{C}}(0) = P_0 \qquad \underline{\mathcal{C}}(1) = P_n$