Appunti delle lezioni di Decisioni Strategiche ed Organizzative – A.A. 2007-08

Professore: Diego Lanzi

Autore: Andrea Angiolini angiolin@cs.unibo.it

Collaboratori: Carlo Loffredo e Nicola Tibiletti

Decisioni Strategiche e Organizzative

Diverse tipologie di scelte razionali

David Hume suggerisce la soluzione di razionalità (razionalità strumentale).
Calcolo razionale: uso ottimale di strumenti/mezzi/risorse ottimali per perseguire il fine (o gli obiettivi) del soggetto. L'individuo deve ottimizzare quegli strumenti/mezzi/risorse. Il fine secondo Hume è privo di razionalità perché originato dalle passioni individuali.

Scelte individuali

La responsabilità della scelta cade direttamente sul soggetto individuale e le sue decisioni hanno un'influenza pesante e diretta sul suo benessere personale.
Si assume che il soggetto operi all'interno di un contesto decentralizzato, cioè egli è libero e senza influenza di entità/strutture a lui superiori.
Un decisore che si trova di fronte diverse alternative, in isolamento/individualmente sceglie l'opzione più consona al perseguimento dei propri obiettivi.
Dobbiamo fare una distinzione tra ***principale***, che è il proprietario dell'azienda, e l'***agente***, che è il suo dipendente.

Scelte individuali in contesto di agenzia

Il decisore ha sempre piena indipendenza nelle scelte che fa, ma deve tenere conto in qualche modo che il principale ha degli interessi da perseguire e che le azioni intraprese dovrebbero perseguire il fine aziendale. Queste decisioni non hanno una riscontrabilità diretta sul benessere del decisore in quanto la responsabilità ricade sull'agenzia e non sul singolo agente che opera a suo nome. *Ad esempio: il manager (il decisore, agente) è legato al principale dagli obiettivi, ma gli spetta in modo esclusivo la scelta.*

Grado di certezza delle decisioni

Scelte in condizioni di certezza

Il nostro decisore è in grado di conoscere perfettamente le possibilità, con la certezza che queste si verificheranno sulla base della scelta effettuata. *Esempio: comprare la pasta al supermercato*.

Scelte in condizioni d'incertezza

Non si possiede la piena conoscenza e consapevolezza di tutti gli elementi che possono caratterizzare la scelta, quindi il calcolo razionale deve essere un calcolo probabilistico. Le alternative di scelta sono delle variabili casuali (o sono composte dalle stesse). *Esempio: un fondo azionario (non è composto da elementi certi, tangibili)*.

Scelte in condizioni di rischio: la probabilità associata agli eventi è oggettiva.

Scelte in condizioni d'incertezza: la probabilità associata agli eventi è soggettiva, cioè calcolata sulla base dell'esperienza dell'individuo. [vedi pagina 19]

In quello appena descritto il soggetto è in una situazione di asocialità molto elevata (quindi poco realistica). Una prima strada per porsi in una situazione più realistica è immaginare che le scelte individuali avvengono in contesti di interdipendenza strategica. Per portare la teoria delle scelte a livello sociale, è necessario mettere le scelte individuali in interdipendenza strategica, cioè mentre un'azienda persegue una scelta, deve anche tenere conto delle azioni e dei comportamenti altrui in modo tangibile e visibile. Comportamenti individuali diversi concausano.

Interdipendenza strategica

Quando i miei risultati non dipendono solo dalle mie scelte, ma anche da quelle dell'azienda "accanto" (concorrente). Quindi abbiamo elementi influenzati da scelte/strategie/comportamenti altrui. Teoria dei giochi.

Scelte strategiche

- di **norma cooperativa**: è consentito formare coalizioni e agire insieme senza danneggiarsi in modo cooperativo e vantaggioso per tutti. Abbiamo diverse formazioni: perfetta (*in cui tutti sanno tutto di tutti*)/imperfetta, completa/incompleta, simmetrica/asimmetrica; le scelte strategiche sono a formazione perfetta, completa e simmetrica.
- di **norma non cooperativa**: situazione in cui i soggetti non possono formare coalizione, quindi ogni agente agisce individualmente.

Scelte sociali

Esse influiscono sul benessere di altri individui (che non decidono) che non partecipano all'assemblea e di cui l'assemblea stessa è rappresentante. Probabilmente, quando un decisore opera una scelta sociale, il suo benessere viene leggermente (se non per nulla) toccato, mentre quello di terzi potrebbe esserlo in modo abbastanza influente. *Esempio: un membro del parlamento*. [vedi pagina 32]

1) **funzione di scelta**

   il soggetto sceglie in modo razionale in funzione di un obiettivo (quindi in funzione ottimale);

2) **concetto di preferenza**

   immaginare un qualche concetto psicologico del decisore nell'approccio di preferenza.

Tutti e due i punti seguono percorsi di spiegazione differenti, ma i risultati sono equivalenti. Possiamo quindi studiare un solo approccio.

Relazione di preferenza (relazione d'ordine)

Genera una struttura fra le alternative stesse.

$\succcurlyeq$ indica una relazione di preferenza del tipo "piace almeno tanto quanto...", dove l'affermazione va oltre ad una semplice interpretazione d'annunziana, quindi la decisione segue una relazione di preferenza caratterizzata da più variabili di scelta.

Se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora possiamo utilizzare una ***relazione di indifferenza***: $x \sim y$

Proprietà:

- **completezza**: nel momento in cui può essere applicato a tutte le coppie di elementi una relazione del tipo $\forall$ x,y $\in$ X, se $x \geq y$ o ($\vee$) $y \geq x$, cioè quando tutte le alternative possono essere confrontate; deve esserci una relazione per ogni coppia di possibili alternative; implica anche decidibilità. *Esempio: eliminazione del paradosso di Buridano ('300) – un asino muore perché non sa decidere fra due balle di fieno distinte da cui può trarre sostentamento*.
- **transitività**: coerenza sillogistica (mettere insieme due proposizioni logiche per determinare una terza proposizione coerente con le precedenti), nel momento in cui $\forall$ x,y,z $\in$ X, se $x \geq y$ e ($\wedge$) $y \geq z$, allora $x \geq z$.

Un **decisore** è detto **razionale** nel momento in cui utilizza le proprietà della completezza e della transitività. Arriviamo per deduzione (transitiva) che un individuo intransitivo è irrazionale.

- **monotonicità**: se $x \geq y$ (segno algebrico) allora $x \succcurlyeq y$ (segno di preferenza).

  $x = (x_1, x_2)$

  $y = (y_1, y_2)$

  Con $x_1 \geq y_1$ e $x_2 \geq y_2$ allora il nostro soggetto (invocando la monotonicità) può asserire che $x \succcurlyeq y$ (con segno di preferenza). Abbiamo due tipi di monotonicità:
  - forte: se $x_1 > y_1$ e $x_2 > y_2$
  - debole: se $x_1 = y_1$ e $x_2 \geq y_2$

  Possiamo immaginare che in alcuni casi questa regola non valga, ad esempio quando otteniamo un *bliss point*: la soddisfazione non sale al crescere delle alternative che fronteggia il soggetto (*punto di massima soddisfazione*).

  Si suppone, nella maggior parte dei casi, di avere preferenze monotone.
- **convessità**: delle preferenze (la utilizzeremo come sinonimo della convessità stretta).

  Nel momento in cui x,y,z $\in$ X,

  $\alpha \in (0,1)$ quindi escludiamo lo 0 e 1.

  Se $x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z$, allora $\alpha x (1+\alpha) y > z$ (*la combinazione lineare tra **x** e **y** è strettamente maggiore di **z***).

  $x = (x_1, x_2)$

  $y = (y_1, y_2)$

  $z = (z_1, z_2)$

z non può stare nell'area tratteggiata,
quindi al di sotto del segmento,
che è la combinazione lineare di ***x*** e ***y***

- **<u>continuità</u>**: ci serve per indicizzare il concetto di sequenza.

  $(x^n, y^n)_{n=1}^{\infty}$ se $x^n \geqslant y^n \quad \forall n$

  $x = \lim\limits_{n \to \infty} x^n \qquad y = \lim\limits_{n \to \infty} y^n$ allora $x \geqslant y$

  Non dobbiamo far riferimento alla continuità di una funzione (benché sia simile), ma ad una relazione di preferenza.

Se un ordinamento di preferenza soddisfa/rispetta tutte e cinque le caratteristiche è possibile dimostrare che può essere sempre rappresentato da una "*funzione di soddisfazione delle preferenze*".

$A: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant y \Leftrightarrow A(x) \geq A(y)$ (*che **x** non è peggio di **y***)

La funzione di soddisfazione delle preferenze ci dà una rappresentazione di quello che è l'ordinamento preferenziale del nostro soggetto.

$X \subseteq \mathbb{R}_+^2$

Dobbiamo tenere solo la posizione delle linee di livello convesse ed escludere quelle concave.
A questo punto, tutti i punti del grafico 2 ci assicurano la soddisfazione di A_0 e lo spostamento verso il centro ci indica un aumento del livello di soddisfazione del soggetto. Se ipoteticamente raggiungesse il centro perfetto si troverebbe di fronte un *bliss point*.
Le curve di livello equivalgono alle curve di indifferenza.
L'insieme delle alternative deve essere convesso.

$x \in X$

$I(x) = \{\forall\, y \in X \mid x \sim y\}$

Per la monotonicità $B > A$ e $A > C$
E ed ***F*** non possiamo confrontarli con ***A*** con la proprietà della monotonicità e non possiamo utilizzare nessun altra delle proprietà definite in precedenza.

C'è una potenziale indifferenza dipendente dall'indifferenza del soggetto.
Ogni linea di livello del nostro insieme A può essere vista come una linea d'indifferenza.

$A(x_1, x_2) = A$

(variazioni di A) $dA = \frac{\partial A}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} d x_2$ (somma delle variazione delle variabili indipendenti pesate)

$dA = 0$

$\frac{\partial A}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} d x_2 = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial x_2} d x_2 = -\frac{\partial A}{\partial x_1} d x_1 \qquad d x_2 = \frac{\partial A / \partial x_1}{\partial A / \partial x_2} d x_1$

$$\frac{d x_2}{d x_1} = -\frac{\partial A / \partial x_1}{\partial A / \partial x_2}$$

La riduzione da x_1^A ed x_1^E è compensata dall'aumento di x_2^A a x_2^E
Infatti ***A*** ed ***E*** sono sulla linea del livello d'indifferenza.

Possibilità:

- accessibili
- non accessibili

Nella funzione di vincolo $v(x_{1,} x_2) \leq b$ potremmo usare anche il segno = perché il nostro soggetto applicherà sempre delle scelte che gli daranno il massimo delle soddisfazioni restando dunque entro la soglia (*b*).
Di tutte le combinazioni di $x_1 x_2$ possiamo prendere quelle che non superano la soglia massima *b*. Quindi *X* assume possibilità accessibili e possibilità non accessibili.

$$B = \{\forall x \in X | v(x_{1,} x_2) \leq b\}$$ anche = sarebbe corretto

Il nostro soggetto vorrà massimizzare i valori possibili $MAX\ A(x_{1,} x_2)$

$s.v.$ $v(x_{1,} x_2) < b$ (se tutto ∈ B)

Abbiamo un problema di massimizzazione vincolata e lo risolviamo con la funzione lagrangiana: $= A(x_{1,} x_2) - \lambda [v(x_{1,} x_2) - b]$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial v}{\partial x_2} \qquad \lambda = \frac{\partial A / \partial x_2}{\partial v / \partial x_1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial A / \partial x_2}{\partial v / \partial x_2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

v deve essere continua e convessa rispetto a x_1 e x_2
la frontiera invece deve essere concava

I valori ottimali (x_1^* , x_2^*) tali che $\frac{\partial A / \partial x_1}{\partial A / \partial x_2} = \frac{\partial v / \partial x_1}{\partial v / \partial x_2}$

L'alternativa ottimale la otteniamo cercando la tangente alla funzione vincolo.

Teoria del consumatore

Se consideriamo il consumatore come un ***soggetto razionale*** vi sono delle alternative di scelta di panieri di consumo (rappresentabili tramite dei vettori). Semplifichiamo il paniere di consumo a solo due beni

$x = (x_1, x_2) \in X$

x = (x1 = cibo, x2 = abbigliamento) ∈ X

- ***paniere:*** quantità consumate del bene x_1 e del bene x_2 ;
- ***consumo dei beni****:* funzione di utilità (associazione di quantità ai singoli beni);
- ***funzione di utilità al consumo U** : X ∈ R+:* funzione di soddisfazione A considera-

ta *crescente, continua, transitiva*;

- ***curve di indifferenza al consumo**:* curve di livello.

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\partial A / \partial x_1}{\partial A / \partial x_2}$$

*Ponendo U =A in questa applicazione alla teoria del consumatore le derivate parziali di x1 e x2 rispetto a U rappresentano le due **utilità marginali** dei prodotti del paniere analizzato*

La ***funzione di vincol**o* in questo caso ha la seguente forma:

$V: (p_1 * x_1 + p_2 * x_2) \leq m$ *dove m è il **reddito spendibile** del consumatore e p è il prezzo che hanno i due beni*

Il vincolo quindi rappresenta la ***funzione di spesa*** del singolo individuo, vale a dire ***quanto i consumatori sono disposti a spendere in funzione del loro reddito***.
Sviluppando i calcoli come nell'esempio generico precedente e massimizzando l'utilità sotto vincolo di bilancio si ottiene la ***scelta ottima al consumo.***
La sommatoria di tutte le possibili scelte ottime di consumo può essere letta dagli imprenditori come la domanda totale di mercato per quel determinato bene o paniere di beni.

Il consumatore deve riuscire a massimizzare l'utilità del prodotto/i:
$max\,U(x_1, x_2)$ dove U è l'utilità e (x_1, x_2) è il nostro paniere di consumo.
Il vincolo mette in relazione la spesa che comporta per x_1 x_2 con il suo reddito.

Vincolo di bilancio ("*frontiera*"):

s.v. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$ dove x_1 , x_2 sono le quantità. Il problema di massimizzazione ci porta a sostituire una disuguaglianza con una uguaglianza.

La condizione di tangenza $\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$ ci indica la variazione della spesa. Nella formula u è l'utilità e $\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}$ è il ***saggio marginale di sostituzione edonica***: esprime un rapporto di sostituibilità dei due prodotti in termini di utilità.

La funzione (di forma moltiplicativa) di Cobb-Douglas

$$u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Si utilizza questa funzione perché è la più semplice dopo la lineare che non copre tutti i casi.

Ora, assumiamo come dati i prezzi dei beni ed il reddito del soggetto.

$$\begin{matrix}\beta=1 \\ \alpha=2\end{matrix} \quad \rightarrow \quad u=x_1^2 x_2 \qquad p_1=2 \quad , \quad p_2=4 \quad , \quad m=10$$

$$\left\{\begin{matrix} \max_{x_1,x_2} u=\max_{x_1,x_2} [x_1^2 * x_2] \\ s.v.\, 2x_1+4x_2=10 \end{matrix}\right\} = |SaggioMarginaleSostituzione_{x_1,x_2}| = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1} = \text{(facciamo l'uguaglianza con } \frac{p_1}{p_2}\text{)} = \frac{2}{4}$$, quindi

$x_1=4x_2$ è la **quantità ottimale**!

Se sostituiamo quello appena assunto nel vincolo di bilancio:

$$2(4x_2)+4x_2=10 \quad \rightarrow \quad 8x_2+4x_2=10 \quad \rightarrow \quad x_2=\frac{5}{6} \text{ e } x_1=4*\frac{5}{6}=\frac{10}{3}$$

x_1^E ed x_2^E sono esattamente le nostre quantità, che sono ottimali per i nostri beni.

La funzione di domanda Marshalliana (da Marshall)

$u=x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ vincolo di bilancio $p_1 x_1+p_2 x_2=m$

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}=\frac{p_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\beta x_2^{\beta-1} x_1^{\alpha}}=\frac{p_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}=\frac{p_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad x_2=\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1}{p_2} x_1$$

Se sostituiamo quello appena assunto nel vincolo di bilancio:

$$p_1 x_1+p_2[\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1}{p_2} x_1]=m \quad \rightarrow \quad p_1 x_1 \underbrace{[1+\frac{\beta}{\alpha}]}_{\alpha+\beta}=m \quad \rightarrow \quad x_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}*\frac{m}{p_1} \qquad x_2=\frac{\beta}{\alpha+\beta}*\frac{m}{p_2}$$

Abbiamo tenuto conto di variabili esogene (che possono assumere diversi valori) al problema (non endogene).

Se avessimo come valore dato *m* che indichiamo con m^* potremmo rappresentare le funzioni marshalliane sul piano cartesiano:

Se *m* cresce la curva di livello che rappresenta la funzione di domanda di un generico consumatore del bene p_1 , si trasla verso l'esterno. Viceversa se *m* cala.

Se supponiamo che tutti i soggetti sono dei *massimizzatori*, possiamo considerare il passo logico per arrivare alla funzione di domanda di mercato.

N numero degli individui $\qquad i=1,\ldots,N \qquad D_{x_1}^i$

$D_{x_1}=\sum_{i=1}^{N} D^i_{x_1}$ è una somma di funzioni, non di curve di livello!

Se i nostri consumatori non fossero price taker, non saremmo più legittimati a rappresentare la funzione di domanda come una somma di funzioni.

La funzione Engeliana (da Engel)

Le funzioni engeliane sono funzioni di domanda rispetto al reddito e non al prezzo. Quindi immaginiamo che $p = p^*$ (come prima per *m*) ed *m* non è più dato.

Tipi di beni consumabili

- **Beni normali**: la domanda cresce al crescere del reddito.
- **Beni inferiori**: una serie di beni di mercato destinati, e quindi consumati, da soggetti con un reddito basso. La domanda cala al crescere del reddito. *Esempio: le patate*

funzione engeliana
per i beni inferiori

- **Beni superiori**: esattamente l'opposto dei beni inferiori. Se il reddito cambia (cresce) la funzione lineare assume una concavità, tanto più il bene è superiore. La domanda cresce linearmente al crescere del reddito fino a un reddito soglia, oltre il quale la curva assume una concavità più spiccata tanto più è maggiore la superiorità del bene stesso *Esempio: i diamanti*.

Se il bene è inferiore la legge di domanda potrebbe non essere rispettata, quindi escludiamo i beni inferiori dalle prossime considerazioni.
Rappresentiamo (nuovamente) la scelta razionale di consumo:

p_1, p_2 m Δp_1

$p_1^1 > p_1$ Δx_1

$\frac{m}{p_1^1}$ è la variazione del prezzo di Δp_1

(–) $\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}$

L'effetto prezzo

Questo fenomeno è la modifica della quantità ottimale consumata dal nostro individuo. L'effetto prezzo deve essere sempre negativo (se consideriamo la classica legge della domanda).
Hicks illustra un metodo di scomposizione dell'effetto prezzo:

1. ***processo di sostituzione*** che avviene nel paniere.

   $$= \frac{\Delta x_1^{sost}}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^{redd}}{\Delta m} * \frac{\Delta m}{\Delta p_1}$$

   dove $\frac{\Delta x_1^{sost}}{\Delta p_1}$ è $\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}$, $\frac{\Delta x_1^{redd}}{\Delta m}$ è positivo (+) e $\frac{\Delta m}{\Delta p_1}$ negativo (–)

   se $\frac{\Delta x_1^{redd}}{\Delta m}$ fosse calcolato sulla base di un bene inferiore avremmo una violazione della legge di domanda.

2. ***effetto di reddito***: variazione della domanda del bene 1, in cui il nostro soggetto si ritrova relativamente più "ricco" e più "povero" in termini di potere d'acquisto del proprio reddito.

   Dipende dalle variazioni nel reddito **reale** dell'individuo.

Offerta e produzione dei beni

La teoria economica dominante della produzione vede l'imprenditore come un soggetto raziona-

le, quindi l'impianto analitico è simile a quello del consumo.
Ci si immagina che l'imprenditore debba fare due passi fondamentali:

- l'**approvvigionamento**: il nostro imprenditore deve decidere quali input produttivi acquistare, quindi la combinazione ottimale di input.
- **quantità** di ***produzione*** del bene.

Processo di conversione $\quad INPUT \quad \underbrace{\overset{in}{\ldots\rightarrow\ldots}}_{tecnologia} \quad OUTPUT$

Con tecnologia non intendiamo le macchine di produzione, ma una particolare combinazione degli input allo scopo di ottenere un determinato output. Essa viene vista come una "*black box*".
Introduciamo il concetto di ***funzione di produzione***: una qualche regola che associa a tutte le combinazioni possibili di input, un fattore di output.

$Y=f(z_1,z_2)$ dove Y è la quantità di prodotto

$$\begin{matrix} INPUT & \rightarrow & OUTPUT \\ z_1, z_2 & & Y \end{matrix}$$

$p'_{z_1}=\frac{\partial Y}{\partial z_1} \quad p'_{z_2}=\frac{\partial Y}{\partial z_2}$ dove p' è la produttività marginale degli input produttivi.

$PM_{z_1}=\frac{Y}{z_1} \quad PM_{z_2}=\frac{Y}{z_2}$ dove PM è la produttività media.

I fattori produttivi sono crescenti/decrescenti e variabili/costanti.

Funzione di produzione
Inizialmente la produttività è crescente, poi al di sopra di una soglia di utilizzo Y, ulteriori aumenti della quantità di z_1 z_2 rende la produttività via via decrescente.

Teoria di Eulero

Prendiamo un numero $\lambda>0$. La nostra funzione è a rendimenti tecnologici:

- costanti se $f(\lambda z_1,\lambda z_2)=\lambda f(z_1,z_2)$
- crescenti se $f(\lambda z_1,\lambda z_2)>\lambda f(z_1,z_2)$
- decrescenti se $f(\lambda z_1,\lambda z_2)<\lambda f(z_1,z_2)$

Il nostro imprenditore con i fattori di input vuole $\max\limits_{z_1,z_2} Y=f(z_1,z_2)$

$s.v. \quad w_1 z_1+w_2 z_2\leq C$ dove w sono i prezzi e C è il costo, cioè il reddito consumabile, il budget finanziario che l'imprenditore dedica all'acquisto di un fattore di input.

Per poter escludere il $<$ e semplificare la disuguaglianza in $w_1 z_1 + w_2 z_2 = C$, nel caso del consumatore parlavamo di "*non sazietà delle preferenze*", ora invece dobbiamo escludere la possibilità di ottenere produttività marginali negative. L'imprenditore tenderà a spendere tutto C per ottenere i maggiori ricavi possibili.

L'ipotesi è che $Y = f(z_1, z_2)$ è concava.
Le linee di livello sono strettamente convesse e rappresentano le curve di indifferenza della produzione (***isoquanti***).
Si escludono le porzioni concave per rappresentare solo quelle convesse.
La linea centrale che collega i punti E, F è il ***sentiero dell'espansione dell'impresa*** ed è legato alla funzione di costo.

In corrispondenza del punto E deve essere vero che $\dfrac{\partial Y / \partial z_1}{\partial Y / \partial z_2} = \dfrac{w_1}{w_2}$

$\dfrac{\partial Y / \partial z_1}{\partial Y / \partial z_2}$ è il ***saggio marginale di sostituzione tecnica*** $(SMST_{z_1, z_2})$

Immaginiamo che $Y = z_1^2, z_2$, allora se $Y = 20$ e $z_1 = 2$, $z_2 = 5$
invece se $Y = 20$ e $z_1 = 3$, $z_2 = 20/9$

La funzione di costo $C = C(\underset{(+)}{Y})$

Se C fosse dato riusciremmo a calcolare il massimo Y possibile, ma visto che non lo è, la quantità ottimale di Y è data dal costo e dai ricavi ottenibili sul mercato.
Arriviamo dunque alla ***funzione di profitto***: $\Pi = RT(Y) - CT(Y)$ dove $RT(Y)$ sono i ricavi totali di vendita e $CT(Y)$ i costi totali.
Possiamo scrivere questa funzione in diversi modi. Ad esempio, immaginando che il fattore di produzione sia uno solo con $Y = f(z)$ si potrebbe riscrivere: $\Pi = p \underset{f(z)}{Y} - wz$ dove p è il prezzo al quale il prodotto viene venduto sul mercato, Y la quantità venduta, w il costo di produzione unitario e z la quantità prodotta.

La linea centrale è la ***retta di isoprofitto*** o curva di profitto.
E è il livello ottimale di produzione.

Il nostro soggetto sarà interessato a massimizzare il proprio profitto:

1) $\max_{Y} \Pi = pY - wz$

$s.v.$ $Y = f(z)$ funzione di vincolo

Esplicitiamo la funzione per Y $\rightarrow$ $Y = \frac{\Pi}{p} + \frac{w}{p} z$

Se poi fissiamo Π (gli diamo un valore) $\rightarrow$ $\Pi = \Pi_0$ (*vedi grafico*).

La pendenza della retta di isoprofitto è $\frac{w}{p} = p_z'$

2) $\max_{z} (pf(z) - wz)$

$p f'(z) - w = 0$ $\rightarrow$ $f'(z) = \frac{w}{p}$ dove $f'(z)$ è la produttività marginale del fattore

$p P_z' = w$ dove w è il prezzo unitario dell'unità input.

$C(Y) = wz$ $\rightarrow$ $\frac{d\,C(y)}{d\,z} = w$

Possiamo dire $\begin{matrix} p P_z' = w \\ R' = C' \end{matrix}$ dove w è proprio C' e $p P_z' = w$ è R'

Quindi $R' = C'$ equivale a scrivere $\Pi = RT(Y) - CT(Y)$

R' Ricavi marginali C' Costi marginali

Un caso particolare lo abbiamo quando i rendimenti tecnologici sono costanti.

$\frac{d\,Y}{z} = 1$ o una qualsiasi altra costante

$p = w$ (dove l'impresa è price taker) $\Leftrightarrow$ $p = C'$

Come sono fatti i costi marginali e medi di produzione?

$C = C(Y)$ $\rightarrow$ $C = CF + CV(Y)$

Teoria della concorrenza perfetta

In microeconomia la domanda individuale determina l'offerta di mercato. La microeconomia è quella branca della teoria economica che studia il comportamento economico all'interno dei mercati.

La teoria della scelta razionale è nata attorno al 1840 e uno dei più grandi successi è stato quello di aver micro-economizzato la teoria della domanda e dell'offerta di Marshall. Egli aveva disegnato una funzione di domanda decrescente e una funzione di offerta crescente, che riportiamo come ***teoria intermedia della domanda e dell'offerta di mercato***: prezzi cari $\rightarrow$ maggiore produzione, prezzi bassi $\rightarrow$ maggiore consumo. [vedi pagina 17]

Consideriamo l'ipotesi che il consumatore ed il produttore siano price taker. In questo caso ci troviamo di fronte alla teoria della concorrenza perfetta.

Competizione "atomistica"

La prima ipotesi di concorrenza che avviene tra i soggetti price taker la possiamo vedere in senso "atomistico", cioè atomi tutti uguali che tendono a comportarsi nello stesso modo (sia sul lato della domanda che sul lato dell'offerta). *Esempio: uno sciame di api*.
In conclusione tutti gli imprenditori massimizzano gli stessi profitti di mercato sotto gli stessi vincoli tecnologici. Stessa cosa accade sul lato del consumo, dove tutti i consumatori hanno accesso agli stessi panieri.
Teniamo presente che queste ipotesi escludono una serie di comportamenti economici rilevanti. Ad esempio la possibilità che si formino gruppi, oppure che i soggetti assumano scelte strategiche.
La visione della competizione atomistica ci porta inevitabilmente a considerare un ***agente rappresentativo***: il soggetto di riferimento che prendiamo in considerazione, sapendo che tutti gli altri agiscono nello stesso modo. Per essere vera la visione di agente rappresentativo non ci possono essere differenze nelle possibilità, nelle opzioni di scelta.
Ribadiamo il concetto di "non realismo" espresso dalle nostre considerazioni: un soggetto sarà portato dal mercato ad avere atteggiamenti di competizione strategica.
In questi mercati (ipotetici) la concorrenza è espressa da un comportamento unanime dei soggetti. Inoltre i nostri "atomi" devono essere un discreto numero e le singole decisioni di consumo sono marginali rispetto al totale. *Ad esempio: uno sciame di api si dirige verso lo stesso prato fiorito, ma la dispersione di un soggetto non modifica i comportamenti del gruppo*.

Dopo aver effettuato tutte queste considerazioni torniamo a prendere in esame l'affermazione del mercato nel quale i consumatori ed i produttori sono price taking, quindi in regime di concorrenza perfetta.

Concorrenza perfetta

Condizioni di esistenza della concorrenza perfetta:

1) soggetti numerosi nel mercato;
2) scambio di beni omogenei, identici (stesse caratteristiche tecniche e merceologiche). La differenziazione del prodotto è immediatamente esclusa;
3) informazione completa, perfetta e simmetrica: "tutti devono sapere tutto di tutti";
4) libertà di entrata e uscita dal mercato. Escludiamo quindi i costi di entrata e uscita.
    - filosofico politica: darwinismo sociale → teoria suggerita da Herbert Spencer. Il meccanismo selettivo di natura darwiniana è applicabile a quello del settore economico;
    - tecnica:

Supponiamo di avere p_0 dato perché i nostri soggetti sono price taker.

S è il punto di minimo della funzione del costo marginale.

q_E è la quantità (offerta) che massimizza i profitti di tutti i produttori.

$$\Pi = RT(q) - CT(q)$$

$$\Pi_E = p_0 q_E - CT(q_E) \quad \rightarrow \quad = q_E(p_0 - CM_E)$$

Equilibrio concorrenziale di breve periodo

Cosa intendiamo per breve? Un lasso temporale nel quale i potenziali imprenditori non sono in grado di organizzarsi e quindi di entrare nel mercato.
Se il mercato è perfettamente concorrenziale, l'entrata di nuove imprese porta alla diminuzione dei prezzi fino al minimo raggiungibile (costo medio minimo $\underline{CM}$) senza la presenza di margini di profitto.

- $p^* | q = \underset{(p^* = C')}{argmax\, \Pi_i}$ con

  $i = 1.2.3 \ldots . N$

  p^* è il valore del prezzo
- $p^* > CM$
- $Q^S = \sum_{i=1}^{N} q_i = Q^D(p^*)$

Se ci troviamo nel punto S, allora siamo in un equilibrio di lungo periodo
Cosa succede se entrano nuove imprese?

- N cresce;
- q' cala se la domanda di mercato non varia, questo genererebbe esubero di offerte;
- se il mercato è perfettamente bilanciato, il prezzo arriverà da solo ad allinearsi ai costi marginali;
- finché l'aumento di N consente di mantenere i $p' > c'$ tutto va bene, ma se si arriva a una situazione in cui $p' = c'$ allora i margini di profitto si annullano.

Equilibrio concorrenziale di lungo periodo

Cosa intendiamo per lungo? Un lasso temporale che osserviamo in conseguenza all'entrata di nuovi imprenditori nel mercato, poiché hanno avuto a loro disposizione tempo sufficiente per organizzarsi.

$$(\tilde{p}, \tilde{N}) | \tilde{p} = C' = \underline{CM}$$

$$q_i = \underset{q_i}{argmax}\, \Pi_i \quad \rightarrow \quad \tilde{N} q_i = D(\tilde{p})$$

Teoria intermedia della domanda e dell'offerta di mercato (Marshall)

Il mercato è in equilibrio quando il prezzo che in esso viene praticato mette tutti d'accordo (domanda = offerta). È questa la situazione di ***market clearing***.
La forza del market clearing consiste nel formulare un tasso di interesse di equilibrio uguale per tutti (unico prezzo).
Supponiamo che sul mercato il tasso sia del 10%:

- chi si soddisfa di un rendimento minore è portato ad investire di più;
- chi vorrebbe un rendimento maggiore attende momenti migliori;
- chi era pronto a pagare tassi più alti verrà integralmente soddisfatto;
- chi poteva pagare solo tassi più bassi rimane in attesa.

Il market clearing presuppone quindi che qualcuno possa rimanere fuori dal mercato (in particolare gli operatori che non sono pronti per scambiare a quelle condizioni).

$\frac{dp}{dt}=\alpha[D_t(p)-S_t(p)]$ → processo di aggiustamento

La funzione di domanda dipende dal fattore endogeno p , ma anche da fattori esogeni come i redditi delle persone. Stessa cosa per la funzione di offerta.

Croce di Marshall ha l'utilità di:

- descrivere la situazione del mercato;
- prevedere il comportamento del mercato anche a fronte di alcune distorsioni dalla situazione di partenza (come entrata o uscita di nuovi concorrenti, grosse variazioni di costo di materie prime sul mercato, ecc.).

Scelte intertemporali

Iniziamo con l'inserire la variabile tempo in modo discreto e supporre che ci siano due istanti temporali (biperiodale). L'istante iniziale e il punto tra 1 e 2 sono ***istanti decisionali***, cioè il nostro soggetto può decidere all'inizio dell'istante 1, o all'inizio dell'istante 2.

Il nostro individuo è soggetto a patologie di incoerenza temporali: potrebbe prendere una decisione al tempo 1 e cambiare strada al tempo 2.
Se escludiamo che il nostro individuo sia incoerente temporalmente il problema diventa banale: se il soggetto viene definito coerente (coerenza temporale) in realtà il tempo della decisione diviene sostanzialmente inutile perché in qualsiasi momento il decisore prenderebbe la decisione migliore e ottimale per il contesto decisionale.

Criterio di capitalizzazione o di attualizzazione

Permette di comparare grandezze che si riferiscono a istanti temporali differenti.

- attualizzare: confrontare valori presenti con l'attuale valore di quelli futuri;
- capitalizzare: confrontare valori futuri con il valore futuro di quelli attuali.

$(\frac{1}{1+r})$ è il saggio di attualizzazione finanziaria

$(1+r)$ è il saggio di capitalizzazione finanziaria

Tasso di sconto intertemporale: valore soggettivo del nostro decisore, di una variabile futura attualizzata, quindi s non è più solo un tasso finanziario "in soldoni".
Se il tasso di sconto intertemporale è infinito l'attualizzazione è inutile perché il valore viene perso completamente.
Se il tasso di sconto intertemporale è uguale a 0 (o quasi), il consumare l'unità di valore oggi o domani non cambia nulla.
Se il tasso di sconto intertemporale è >1 il soggetto darà maggiore importanza al valore di un'unità nel futuro.

Supponiamo di avere due quantità di consumo C_1 , C_2 e due quantità di denaro m_1 , m_2 . Come utilizzerà le risorse il nostro individuo?

$C_1+(\frac{1}{1+r})C_2 = m_1+(\frac{1}{1+r})m_2$ dove $C_1+(\frac{1}{1+r})C_2$ è il valore della spesa per consumi di beni. Non abbiamo scritto $\leq$ perché assumiamo che il nostro individuo possieda preferenze monotone.

$u=u(C_{1,}C_2)$ è lo spazio cartesiano bidimensionale composto da due livelli di consumo.

Esso è uguale a $u(C_1)+\frac{1}{1+\rho}u(C_2)$, dove $\frac{1}{1+\rho}$ è il ***saggio o tasso di preferenza intertemporale*** e ρ viene detto ***tasso d'impazienza*** del soggetto. [vedi pagina 31]

$\frac{1}{1+s}\neq\frac{1}{1+\rho}$ il primo si riferisce all'attualizzazione di grandezze materiali ed il secondo alla nostra capacità di ottenere utilità.

Il nostro soggetto deve massimizzare la funzione di utilità che ottiene nei due periodi rispetto a C_1 C_2 , rispettando un vincolo di bilancio intertemporale.

$$\max_{C_1,C_2} u(C_1)+\frac{1}{1+\rho}u(C_2)$$

$$s.v. \quad C_1+\frac{1}{1+r}C_2=m_1\frac{1}{1+r}m_2$$

$$\frac{\partial u/\partial C_1}{\partial u/\partial C_2}=1+r$$

$$C_2=(1+r)\left[m_1\frac{1}{1+r}m_2\right]-(1+r)C_1$$

$$\frac{u'(C_1)}{\frac{1}{1+\rho}u'(C_2)}=1+r$$

$$\frac{u'(C_1^*)}{u'(C_2^*)}=\frac{1+r}{1+\rho}$$

<u>Teoria dell'utilità decrescente nel tempo</u>

Assumiamo che $r=\rho$, allora $u'(C_1^*)=u'(C_2^*)$ $\rightarrow$ $C_1^*=C_2^*$ [consumi costanti]

Invece se $\rho>r$, allora $1+\rho>1+r$ $\rightarrow$ $\frac{1+r}{1+\rho}<1$ $\rightarrow$ $u'(C_1^*)<u'(C_2^*)$ $\rightarrow$ $C_1^*>C_2^*$ [consumi crescenti]

Ancora, se $\rho<r$ il caso è simmetrico a quello precedente $C_1^*<C_2^*$ [consumi decrescenti]

Scelte in condizioni di rischio

Dette anche scelte rischiose, dobbiamo fare una distinzione importante: **rischio ≠ incertezza**
La differenza dipende dal metodo di valutazione delle probabilità. Nel rischio, il nostro soggetto

dispone di possibilità di scelta con probabilità oggettive (scelte aleatorie), il rischio sta nello scegliere tra lotterie diverse; le scelte in condizioni d'incertezza (stocastiche), hanno un grado d'incertezza maggiore perché il soggetto non ha un modello probabilistico di riferimento (scelte soggettive e psicologiche).
Introduciamo il concetto di ***lotteria*** l , come una serie di realizzazioni possibili di una variabile casuale. Date tante lotterie con tutte le possibili realizzazioni e tutte le possibilità legate alla realizzazione decido quale sia quella che mi da il grado di soddisfazione maggiore.

$$l_1=(x_1^1, x_2^1) \quad p_1^1, p_2^1$$

$$l_2=(x_1^2, x_2^2) \quad p_1^2, p_2^2$$

Funzione di utilità attesa $\underset{\text{expected utility}}{Eu} = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2)$

Il comportamento della funzione sarà influenzato dall'avversione/propensione al rischio del soggetto.
Valore atteso della lotteria $E(p) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ la media ponderata delle realizzazioni rispetto alle probabilità.

Esempio: $l_1=(\underset{10}{x_1^1}, \underset{11}{x_2^1}) \quad p_1^1, p_2^1 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad E(l_1) = \frac{1}{2}(10) + \frac{1}{2}(11) = 10{,}5$

$l_2=(\underset{1000}{x_1^2}, \underset{0}{x_2^2}) \quad \underset{1\%}{p_1^1}, \underset{99\%}{p_2^1} \quad \rightarrow \quad E(l_2) = 1000(0{,}01) + 0(0{,}99) = 10$

Confrontiamo $Eu(l)$ e $u(E(l))$ dove il secondo è l'utilità del valore atteso della lotteria:

- se $Eu(l) = u(E(l))$ → il soggetto è neutrale rispetto al rischio;
- se $Eu(l) > u(E(l))$ → il soggetto è in condizione di propensione al rischio;
- se $Eu(l) < u(E(l))$ → il soggetto è in condizione di avversione al rischio.

Se $u(x_1)=x_1$ e $u(x_2)=x_2$ il soggetto è neutrale rispetto al rischio.

La funzione di utilità sarà:

- concava in condizione di propensione;
- convessa in condizione di avversione;
- lineare se il soggetto è neutrale.

<u>Caso di soggetti atomistici</u>.

$\Lambda_i \ni \alpha_i \quad x_i \in X_i$

dove Λ_i è l'insieme delle azioni possibili e X_i l'insieme dei risultati.

$g : \Lambda_i \rightarrow X_i$

$\alpha_i^* = \underset{\alpha_i \in \Lambda_i}{argmax}\, A_i(g(\alpha_i))$

dove A_i è la funzione di utilità o di soddisfazione delle preferenze individuali e α_i^* è una particolare linea d'azione che dà al soggetto il massimo grado di utilità associata al risultato.

I risultati individuali dipendono sia dalle scelte individuali, che dai comportamenti altrui (interdipendenza strategica).

Caso di razionalità strategica.

$$g: \Lambda_i * \Lambda_{-i} \quad \rightarrow \quad X_i \quad \forall i \qquad\qquad \Lambda_1 * \ldots * \Lambda_n$$

$$\alpha_i^* = \underset{\alpha_i \in \Lambda_i}{argmax}\, A_i(g(\alpha_i, \alpha_{-i}))$$

dove α_{-i} è il comportamento effettivo messo in atto dagli altri individui con cui il soggetto è in interdipendenza strategica.
In questo caso il decisore non è influenzato da nulla, ma vi è una **consapevolezza** che vi sono altri agenti all'interno del proprio ambiente decisionale (o mercato) che potrebbero in qualche modo interferire con il proprio risultato

Teoria dei giochi

Nel 1944 Von Neumann e Morgenstein scrivono il primo libro sulla teoria dei giochi ("*Giochi e comportamento economico*"). Essi ritengono che il comportamento economico può essere visto all'interno dei giochi di società.
Analizzeremo solo giochi a somma nulla: un soggetto che vince e n-1 soggetti che perdono.
Interazione strategica di tipo simultaneo.
Gioco strategico: situazione di interdipendenza strategica.

Gioco strategico in forma estensiva: gioco descrivibile attraverso un grafo ad albero che rappresenta le mosse consecutive che i giocatori sono chiamati a fare in corrispondenza dell'interazione strategica.

Criterio del MINMAX

Il più famoso concetto di soluzione da loro (V.N. e M.) espresso è quello del criterio del MINMAX: i giocatori (avversi al rischio) durante l'interazione strategica vogliono minimizzare le massime perdite possibili.
J. Nash non era particolarmente soddisfatto del MINMAX perché pensava che fosse corretto con i giochi di società, ma non con i concetti di razionalità strategica ed economica.
Comunque Von Neumann e Morgenstein avevano assunto che ci fosse un criterio complementare al MINMAX che valesse nel caso in cui quest'ultimo non si potesse applicare.

Criterio di dominanza (complementare del MinMax)

Una strategia è dominante quando garantisce il valore massimo al payoff del gioco con la garanzia di risultati migliori indipendentemente dalle scelte degli avversari.

Cerchiamo di applicare i due criteri comportamentali appena descritti.
Abbiamo due giocatori A e B. L'interazione avviene una e una sola volta, è simultanea e non cooperativa.

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	2,1	10,0
	a_2	0,-1	2,-2

Dominanza: la strategia a_1 è strettamente dominante per A a prescindere dal risultato di B

la strategia b_1 è strettamente dominante per B a prescindere dal risultato di A

La coppia a_1 b_1 è chiamata ***equilibrio di strategie dominanti***.

Altro esempio

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	2,1	10,0
	a_2	0,-3	12,-2

Non esiste nessun criterio di dominanza per entrambi i giocatori. In questi casi i soggetti diventano avversi al rischio e quindi per V.N. e M. seguiranno il criterio del MINMAX.
MINMAX: la strategia a_1 minimizza le massime perdite per A

la strategia b_2 minimizza le massime perdite per B

La coppia a_1 b_2 è un equilibrio di MINMAX.

Potrebbe esserci anche il caso in cui una strategia che minimizza le massime perdite non esista:

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	2,1	10,1
	a_2	0,-3	12,-3

Questo caso ci dimostra come i due criteri comportamentali siano fondamentalmente incompleti. J.Nash nel 1951 pubblica un articolo nel quale si propone di individuare un criterio di comportamento che sia migliore della dominanza e del MINMAX. Il suo obiettivo è quello di dimostrare l'esistenza di un criterio comportamentale in cui ci sia sempre l'esistenza di una soluzione. Il ragionamento è il seguente: in assenza di strategie dominanti si viene a definire una dinamica dei criteri comportamentali che porta sempre ad una soluzione. Un giocatore suppone il comportamento dell'avversario e prende così una decisione.

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	2,1	10,0
	a_2	0,-2	12,-3

$A(+) \rightarrow B\, b_1 \rightarrow a_1$ $\quad\quad$ $B(+) \rightarrow A\, a_1 \rightarrow b_1$

$A(+) \rightarrow B\, b_2 \rightarrow a_2$ $\quad\quad$ $B(+) \rightarrow A\, a_2 \rightarrow b_1$

Vi è una corrispondenza strategica? b_1 a_1 è un equilibrio di Nash. Quando c'è un solo equilibrio di Nash non c'è mai deviazione da quella linea di strategia.

<u>Strategie pure</u>: linee di comportamento in cui la scelta è una sola e imprescindibile. (*Wikipedia: è una strategia che deterministicamente porta a massimizzare il proprio guadagno a prescindere dalle strategie scelte dagli avversari*). Per questo motivo non vi è una combinazione di strategie ottimali (abbiamo una sola strategia).

<u>Strategie miste</u>: modo di giocare randomizzato rispetto alle strategie esistenti.

		B	
		$b_1, (q)$	$b_2, (1-q)$
A	a_1 (p)	0,0	0,-1
	a_2 $(1-p)$	1,0	-1,2

Questo gioco non possiede un equilibrio di Nash in strategie pure e $(q), (1-q), (p), (1-p)$ sono le probabilità. E è il payoff atteso.

$$(1-p)q-(1-p)(1-q) \quad = \quad q-pq-q+q+p-pq \quad \rightarrow$$

$$EA_1 = 0(pq)+0(1-q)p+1(1-p)q-1(1-p)(1-q)$$

$$2(1-p)(1-q)-(1-q)p \quad = \quad 2-2q-2p+2pq-1+q \quad \rightarrow$$

$$EA_2 = 0(pq)-1(1-q)p+0(1-p)q+2(1-p)(1-q)$$

Quando il gioco è 2x2 (con probabilità complementari) il payoff atteso è lineare.
I soggetti sono razionali se massimizzano il payoff atteso rispetto a p e q .

$$\max_p EA_1 \rightarrow \frac{dEA_1}{dp} = 0 \qquad -q+1-q=0 \qquad q^* = \frac{1}{2}$$

$$\max_p EA_2 \rightarrow \frac{dEA_2}{dp} = 0 \qquad -2+2p+1=0 \qquad p^* = \frac{1}{2}$$

Un'altra lacuna dell'equilibrio di Nash è quella della ***molteplicità***.

Gioco: *battaglia dei sessi*, proposto da Rasmussen nel 1982.

		Mg	
		t	*p*
Ma	*t*	1,10	0,0
	p	0,0	10,1

Moglie e marito devono decidere se andare a teatro o alla partita. Assumiamo che i due si amino, perciò andranno insieme al teatro o alla partita.
tt e pp sono due equilibri di Nash in strategie pure. Gli altri, pt e tp sono equilibri in strategie miste perché sono identici.

Gioco: falco/colomba, proposto da Hahn nel 1986.

		B	
		D	*H*
A	*D*	3,3	1,4
	H	4,1	0,0

Due equilibri in strategie pure e uno in quelle miste. Conviene cooperare, ma non potendolo fare, in un gioco simultaneo saranno tutti e due aggressivi. Introduciamo la variabile tempo (giochi sequenziali). Per rappresentare il gioco estensivo dobbiamo utilizzare il grafo ad albero.
Nodi decisionali: punti del grafo nei quali il decisore è chiamato a prendere una decisione.

Zermelo introduce un concetto per individuare a ritroso gli equilibri Nash in un gioco estensivo (***induzione a ritroso***). Il soggetto A si attende delle precise risposte dal rivale: sceglierà quindi H .

Equilibrio perfetto (nei sottogiochi)

Proposto dal matematico tedesco Selten nel 1981, si propone di trovare una soluzione ad esempi di interazione strategica che non la hanno, raffinando così la teoria dell'equilibrio di Nash. Questa nuova teoria permette di individuare un sottoinsieme degli equilibri di Nash: ***equilibrio nei sottogiochi del gioco***.

Sottogioco: pezzo/frammento del gioco composto da una serie di interazioni.

- impropri: abbiamo due tipi di giochi impropri
  - il gioco stesso
  - le ultime diramazioni decisionali
- propri: insieme di nodi e legami che riusciamo a raggruppare partendo da un nodo decisionale, escluso il primo.

Per essere tali non ci devono essere elementi di sovrapposizione tra i diversi sottogiochi.
Ad esempio, nel gioco seguente vi sono 7(5) sottogiochi, composti da 5 impropri e 2 propri.

Gioco dell'entrante (della predazione)

		I	
		w	*nw*
E	*e*	-1,-1	5,5
	ne	0,10	0,10

In questo gioco abbiamo E che è l'azienda entrante nel mercato e I che è quella incombente. Le due imprese devono decidere, una se entrare o meno nel mercato e l'altra se fare guerra o meno.

Notiamo che nel caso di *ne* i payoff di *I* sono identici, quindi il gioco è “tronco”.
Abbiamo un problema di credibilità quando non abbiamo equilibri perfetti, infatti gli equilibri perfetti sono sempre anche perfettamente credibili.

Equilibri di Nash:

- nel gioco simultaneo: (0,10) equlibrio imperfetto e (5,5);
- nel gioco sequenziale: (5,5) è un equilibrio del sottogioco
  (0,10) è l'altro equilibrio di Nash

Gli equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi hanno la caratteristica di credibilità. Ad esempio: il dichiararsi bellicoso di *I* per spingere il soggetto *E* a non entrare non è credibile, perché dal momento che *E* sceglierà di entrare, *I* per forza opterà per la non belligeranza.
Esponiamo dunque i ***concetti di credibilità***:

- mossa strategica (≠ strategia, ≠ azione): è una mossa intrapresa prima che l'interazione strategica abbia luogo, con l'effetto di modificare i payoff del gioco (da Shelling). *Ad esempio: l'impresa I effettua un investimento consistente in un altro mercato in modo tale da cambiare i payoff* ***w (-1,-1), nw (10,-2)***. In questo modo rende credibile il guerreggiare nel caso di entrata di E.
- commitment: è un impegno vincolante e irreversibile. Esempio: *la FIAT che acquistò la Perrier con un obbligo di non rivendita delle azioni per 7 anni, impedendo così il*

tentativo di OPA che la Renault negli anni '90 stava attuando, facendo calare l'interesse a causa di una grossa quantità di soldi impegnati per 7 anni e inutilizzabili.

Un modo per risolvere il problema della molteplicità degli equilibri di Nash è rendere un'interazione strategica simultanea in una sequenziale.

- Informazione perfetta: i soggetti sono in grado di conoscere la posizione in cui si trovano o in cui dovrebbero essere nell'albero del gioco; un insieme di informazioni che sono due punti (nodi) di singolarità;
- Informazione imperfetta;
- Memoria perfetta: immaginiamo che il giocatore 1, dopo aver atteso la mossa del giocatore 2 scelga ancora (per la seconda volta) lungo l'interazione strategica sequenziale e si ricordi perfettamente le mosse e le scelte assunte in precedenza;
- Memoria imperfetta

Procedure di induzione

Di fronte ad un'interazione strategica sequenziale a memoria e informazione perfetta, uno dei modi per individuare l'equilibrio di Nash è la procedura di induzione ***a ritroso***. Quella alternativa è la procedura di induzione ***in avanti***. La prima è stata suggerita dal tedesco Zermelo: la procedura di induzione a ritroso seleziona sempre un equilibrio di Nash, o l'insieme degli equilibri; non è in grado di individuare gli equilibri nelle strategie miste, mentre se immaginiamo di avere strategie pure, riusciremo sempre ad individuarne.

Esempio di gioco più articolato rispetto a quello della predazione, con le seguenti caratteristiche: forma estensiva, non cooperativo, con *N* giocatori dove $N=1,2,3$, a informazione perfetta e completa.

In questo gioco è meno immediato individuare l'equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi.
Utilizziamo la teoria di Selten.

Ricordiamo che strategia ≠ azione. ***Strategia***: piano completo d'azione che ci dice le diverse mosse o azioni che il soggetto farà quando sarà chiamato a scegliere. ***Azione***: mossa strategica.

Per i giocatori 2 e 3 le strategie e le azioni coincidono, mentre per 1 sono differenti.

$$S_1=\{(B),(A,a),(A,b)\}$$

Se nel gioco in questione non ci fossero informazioni perfette e complete, gli equilibri di Nash potrebbero non coincidere analizzando il caso con due concetti differenti. Svolgiamo quindi un analisi con il concetto dell'***induzione a ritroso*** e con quello della ***perfezione nei sottogiochi***.

- Induzione a ritroso:

  Ragioniamo per il soggetto 2:

  Arrivati al soggetto 1 nel primo nodo decisionale, abbiamo un problema: egli non possiede un equilibrio stabile (equilibrio di Nash instabile).
  Il soggetto 3 quando sarà chiamato a scegliere, deciderà sempre per il sottogioco.
  L'equilibrio di Nash perfetto (unico, credibilmente raggiunto) dell'ultimo sottogioco, che a sua volta è l'intero gioco, è $(12,12,4)$ dato dalle scelte

  $$(A,G,b,y)$$

  Se i giocatori non riuscissero ad individuare un equilibrio di Nash in strategie pure, utilizzerebbero quelle miste. Quando questo si verifica, può succedere che l'induzione a ritroso non riesca ad ottenere l'equilibrio migliore.

- Perfezione nei sottogiochi:

  Immaginiamo che il soggetto che soffre di una deficienza informativa sia 2: incapace di distinguere la sua posizione nell'albero del gioco (*vedi tratteggio*).
  Quindi 2 non ragiona più sapendo di essere in un gioco sequenziale, bensì in uno simultaneo, applicando la razionalità del caso.

  In questa situazione di gioco imperfetta abbiamo 4 sottogiochi:

  $$SG_1(1,2),SG_1(1,2),SG_3(3,1,2),SG_1(1,3,1,2)$$

  Dobbiamo trovare gli equilibri di Nash vari sottogiochi. Iniziamo con i primi due che sono uguali:

I.

		2	
		$x, (q)$	$y, (1-q)$
1	A (p)	10,0	0,10
	B $(1-p)$	0,10	10,0

In questa situazione non ci sono equilibri di Nash, perciò immaginiamo che i soggetti randomizzino con $p=1/2$ e $q=1/2$. Essendo $p^*, q^*=1/2$ $\rightarrow$ $(5{,}5{,}5)$

$EP_1=10pq+10(1-p)(1-q)=5$

$NE=(SG_1(1{,}2))=\{(5{,}5{,}5)\}$

II.

		2	
		x	y
1	a	8,9	0,0
	b	0,0	12,12

Qui abbiamo due equilibri di Nash in strategie pure: $(8{,}9)$ e $(12{,}12)$

$NE=(SG_1(1{,}2))=\{(8{,}9{,}6),(12{,}12{,}4)\}$

III.

$NE=(SG_3(3{,}1{,}2))=UNE$

$$\Pi_1^A=\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}8+\frac{1}{2}12\right]=\frac{5}{2}+\frac{4}{2}+\frac{12}{2}=\frac{21}{2}$$

Essendo $\frac{21}{2}>6$ il soggetto sceglierà A

Come avevamo già illustrato, per combattere il fenomeno della molteplicità degli equilibri si rendeva il gioco sequenziale, ma come abbiamo appena dimostrato questo non è sufficiente.

Gioco 2Torri/Nettuno

		2	
		T	*N*
1	*T*	1,1	0,0
	N	0,0	5,5

In questo gioco due amici si devono incontrare e non si sono messi d'accordo sul luogo del ritrovo. Entrambi conoscono due grandi punti di ritrovo. Si devono trovare nello stesso posto alla stessa ora per trarne un'utilità, che è maggiore vicino a uno dei due punti.
Vi è una molteplicità ineliminabile, quindi dobbiamo aiutarci con un criterio aggiuntivo.

Criterio di Pareto

Una soluzione è pareto-ottimale se non è possibile, cambiando quelle soluzioni, migliorare il benessere di qualcuno senza modificare quello degli altri.
L'unico equilibrio di Nash pareto-efficiente che si dovrebbe osservare nell'esempio precedente è $N, N\ (5{,}5)$ perché massimizza il benessere dei soggetti.

Criterio del punto focale (Shelling)

Il punto focale dell'interazione strategica è l'equilibrio di Nash corrispondente al punto focale dei due individui. Riprendiamo l'esempio precedente, però assumendo che i soggetti si debbano incontrare per scambiarsi materiale illecito. Il principio focale è quello di incontrare l'altro nel luogo più sicuro e nascosto (meno frequentato) possibile. L'unico punto focale che massimizza il loro benessere è T, T (naturalmente con i payoff cambiati $T, T\ (10{,}10)$).
Dobbiamo immaginare che ci sia un motivo/principio che esula l'interazione strategica.

Criterio delle strategie razionalizzabili

Possiamo cercare di semplificare il gioco eliminando alcuni equilibri di Nash che non siano una risposta ottimale per l'uno o per l'altro individuo.

2

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	4,7	0,1
a_4	0,0	0,-2	0,0	10,-1

1

$2(+)\rightarrow b_1$	$1(+)\rightarrow a_3$
$1(+)\rightarrow a_3$	$2(+)\rightarrow b_3$
$2(+)\rightarrow b_3$	$1(+)\rightarrow a_3$
$2(+)\rightarrow b_2$	$1(+)\rightarrow a_2$
$1(+)\rightarrow a_2$	$2(+)\rightarrow b_2$
$2(+)\rightarrow b_4$	$1(+)\rightarrow a_4$
$1(+)\rightarrow a_4$	$2(+)\rightarrow b_1, b_3$

Gli unici due equilibri di Nash sono (a_2, b_2) e (a_3, b_3) .
Quando una strategia è razionalizzabile? Quando è risposta ottimale ad una possibile strategia dell'avversario.

I prossimi argomenti trattati saranno le strategie ripetute nel tempo.

Supergioco

Problema della collusione, tipo “dilemma del prigioniero”: *gioco della collusione*.

2

	x	X
x	2,2	0,3
X	3,0	1,1

1

Il mercato è occupato interamente da due imprese oligopolistiche. Esse possiedono altrettante strategie, x *e* X *, dove* x *è la scelta di immettere nel mercato poca quantità di prodotto e* X *è l'inverso (molta quantità).*

In questo gioco vi è un conflitto tra razionalità “individuale” e “collettiva”.
L'equilibrio di Nash è $(1,1)$, ma per il criterio di Pareto sarebbe $(2,2)$.
Colludere verso l'immissione nel mercato di una bassa quantità di prodotto aumenterebbe i profitti delle due imprese. Se il gioco diventa cooperativo i due soggetti sono incentivati a formare dei cartelli per convergere verso l'opzione $(2,2)$: convenienza della cooperazione.
Il *gioco della cooperazione* sociale è un altro modo per interpretare quello della collusione, dove x riflette un atteggiamento cooperativo e X uno non cooperativo.
Torniamo al gioco iniziale: c'è un incentivo a colludere e spesso, in casi di questo genere, vi è un incentivo anche a tradire le parti, cioè a “defezionare” (esempio: *l'Opec ha un problema di defezione*).
Se l'interazione strategica si ripete, quante volte avviene? Introduciamo la nozione di ***gioco ripetuto*** e quella di ***supergioco***.

Gioco ripetuto: si ripete nel tempo, ma nel tempo muta alcune delle sue caratteristiche.

Supergioco: un gioco ripetuto che è la replicazione di un gioco di base (quando si ripresentano le stesse strategie, gli stessi payoff).

Il primo a parlare di supergiochi è l'americano Axelrod, che nel 1984 scrive il libro “*l'evoluzione della cooperazione*”.
Dobbiamo fare due assunzioni particolari rispetto a quello che è l'atteggiamento dei due giocatori nel corso dell'interazione strategica:

- tasso d'impazienza: i giocatori soffrono di impazienza, cioè vogliono tutto subito, oppure ne soffrono con un tasso di impazienza ridotto; [vedi pagina 19]
- trigger strategy (*strategia del grilletto*): accettare la cooperazione a patto che l'altro non defezioni (come una pistola puntata alla tempia). Infrangere i patti comprometterebbe da parte del soggetto che punta la pistola la cooperazione futura.

T finito: entrambi i soggetti utilizzano la strategia del grilletto e ripetono l'interazione strategica un numero finito di volte. Ad ognuna di queste osserviamo diversi equilibri di Nash. Ad esempio nell'ultima interazione del gioco la strategia del grilletto non è più efficace, perché non essendoci interazioni successive nessuno verrà punito se “defeziona”: ci troveremo dunque in $(1,1)$. La penultima volta è altrettanto sicuro il verificarsi di una defezione, in quanto sapendo che nell'ultima i soggetti convergeranno in X , nessuno dei due avrà la possibilità di punire l'altro.
Nei T periodi si replica T volte l'equilibrio di Nash.
T infinito: Axelrod suggerisce il valore attuale del pagamento del gioco.
Assumiamo che i soggetti decidano di cooperare:

$$VA(A_i(x))=2+2d+2d^2+\ldots=2(1+d+d^2+d^3+\ldots)=\frac{2}{1-d} \quad \forall i \text{ generico giocatore}$$

Al crescere del livello di pazienza del giocatore, cresce il valore attuale del pagamento del gioco.
Dobbiamo ricordarci che resta la possibilità di collusione. Assumiamo che i soggetti decidano di cooperare con la strategia del grilletto e che uno dei due defezioni.

$$VA(A_i(X))=3+1d+1d^2+\ldots=3+d(1+d+d^2+d^3+\ldots)=3+\frac{d}{1-d} \quad \forall i$$

$$\left\{\begin{matrix} VA(A_i(x))\geq VA(A_i(X)) \\ \dfrac{2}{1-d}\geq 3+\dfrac{d}{1-d}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{d\geq\frac{1}{2}}$$

$d=0$ → soggetto assolutamente impaziente.
$d=1-\varepsilon$ → soggetto assolutamente paziente.

Critiche rivolte alla teoria razionale

Razionalità finalistica

La razionalità strumentale (Hume '750) si contrappone ad un'idea di opposta di razionalità proposta da Kant che prende il nome di razionalità finalistica: l'unica disposizione razionale è basata sui fini. I doveri determinano i fini compatibili, l'oggetto di scelta può essere determinato da molteplici obiettivi.
Non si parla più di soddisfazione delle preferenze, ma di determinazione delle preferenze. Incontriamo la razionalità finalistica quando assumiamo che i soggetti non siano dei puri ottimizzatori: individui con limitata capacità computazionale e con conflitti interiori.

Razionalità strumentale limitata

H. Simon negli anni '50-'60 suggerisce una teoria della scelta razionale strumentale (scelta basata sui mezzi) limitata: il comportamento soddisfacente è contrapposto al comportamento ottimizzante.
$x \in X$,
$\min_x L(\underline{x}-x)$ dove L è l'ipotetica funzione di perdita
La teoria di Simon si sposa perfettamente in ambito amministrativo (nelle società, in parlamento).
Contesto collettivo: nella teoria della scelta razionale il soggetto è visto come un individuo che opera in isolamento (nessuna deliberazione presa da un gruppo), ma nel 1951 Arrow suggerisce come applicare tale teoria nelle situazioni di scelta collettiva (***teoria della scelta sociale***).

Problema della scelta sociale (collettiva)

Le scelte sociali sono prese da gruppi di individui i quali esprimono preferenze individuali. Per essere un po' ripetitivi sono decisioni individuali che vengono aggregate.

$$\begin{matrix}\textit{input decisionali}\\ \textit{dei singoli individui}\end{matrix} \xrightarrow[\textit{trasformati}]{} \textit{decisione collettiva}$$

1. le decisioni devono essere ricondotte ad input individuali;
2. si possono trasformare input in output.

Per la Sociologia il "sociale" è diverso dal "collettivo". Il pensiero è influenzato dalla società in cui viene ideato.

Utilitarismo

Alla fine del 1700 ci si pone il problema della scelta collettiva è il più famoso pensatore, filosofo che ricordiamo è T. Bentham. Egli introduce una teoria chiamata utilitarismo che come criterio di scelta utilizza il massimo beneficio collettivo.

Principi che Bentham suggerisce:

1. ***conseguenzialismo***: nel momento in cui dobbiamo prendere delle decisioni, dobbiamo tener conto delle azioni che comporteranno quelle stesse scelte nei confronti della collettività.

   “*Il fine non giustifica le conseguenze*”
   (da una celebre frase di C. Beccaria: “*Il fine non giustifica i mezzi*”).

   Non importano le intenzioni, anche moralmente buone esse non sono legittime.
2. ***welfarismo***: le conseguenze devono essere considerate sul benessere che recano alla collettività.
   Il benessere di un gruppo viene sempre interpretato come la somma delle utilità individuali di tutti i membri di quella stessa collettività.
   $$W = f(u_1, \dots, u_N)$$
   Si valutano le conseguenze in termini di utilità.
3. prendere la funzione di utilità come una funzione ***separabile*** ed ***additiva***.
   $$W = \sum_{i=1}^{N} u_i$$
   Prendiamo le diverse opzioni x , y ed esaminiamo i diversi livelli di utilità:
   $$\begin{array}{cc} x & y \\ \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_x^2 \\ u_x^3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightarrow \quad \sum_1 u^i = 17$$
   $$\begin{array}{cc} x & y \\ \begin{pmatrix} u_y^1 \\ u_y^2 \\ u_y^3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightarrow \quad \sum_1 u^i = 18$$
   Il gruppo dovrebbe scegliere sempre y perché garantisce la massima felicità per il massimo numero (da Beccaria)

   Se $\sum_{i=1}^{N} u_x^i \geq \sum_{i=1}^{N} u_y^i \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x \geqslant^S y}$ con S che significa sociale.

Critiche all'utilitarismo

Concetto di utilità: il ragionamento di Bentham suppone che l'utilità sia comune a tutti i soggetti. Gli individui devono essere in grado di avere un'idea di utilità ed utilizzarla in modo aggregabile e sommabile tra di essi. Questa utilità viene definita ***utilità cardinale*** (il cardine è lo 0 della scala di misura): ammette un confronto tra diverse utilità (confronto interpersonale di utilità) e fu pesantemente criticata agli inizi del '900. Successivamente viene proposta una soluzione “migliorata” dell'utilità cardinale: ***utilità ordinalista*** (non tutti i soggetti hanno lo 0 di

riferimento) nella quale non esiste una scala di interpretazione dell'utilità.
Un'altra critica rivolta all'utilitarismo è quella dell'**utilità aggregata**: viene individuata l'utilità che restituisce la massima somma delle utilità stesse. In essa tendono ad avere maggior peso i soggetti che sono migliori produttori di utilità. Immaginiamo:

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_x^2 \\ u_x^3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & y \\ \begin{pmatrix} u_y^1 \\ u_y^2 \\ u_y^3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

In questo caso con il criterio di Beltham sulla funzione separabile ed additiva, siamo portati a scegliere per la prima alternativa, che rispetto alla seconda è massimamente iniqua, poiché quest'ultima è la preferenza collettiva migliore.
Concludiamo che coloro che sono abili creatori di utilità hanno maggior peso nella scelta.
Nell'ultimo esempio abbiamo un aperto conflitto tra utilità sociale e democraticità.
La prima ondata revisionale arriva nella seconda metà dell'ottocento, assieme all'utilità ordinalista emerge anche la teoria delle votazioni.

Utilitarismo ordinalista

Sostituire un'idea di utilità come cardine, in un'idea di utilità ordinalista (da V. Pareto): connettere il concetto di utilità al concetto di relazione d'ordine.
Questa teoria si basa su fondamenti proposti dal Circolo di Vienna nel Neo Positivismo Logico, cioè solo tutto quello che è misurabile o quantificabile ed è esistente, è considerato come scienza, tutto il resto è considerato forma di arte.
Dobbiamo considerare le conseguenze attraverso un criterio di preferenza, non di utilità.

$$x, y, z \in X$$

$$x \geqslant y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(y)$$

$$y \geqslant z \quad \Leftrightarrow \quad u(y) \geq u(z)$$

Funzione di utilità ordinale: rappresentazione funzionale dell'ordinamento delle preferenze.
Le preferenze sono individuali e psicologiche, quindi l'utilità è valutata con livelli di utilità coerenti con le preferenze dell'individuo.

Criterio di Pareto: valutazione ordinale di una serie di alternative possibili. $i = 1, \ldots, N$

$$x, y \in X$$

$$x \geqslant^p y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} u_i(X_i) > u_i(Y_i)\ per\, qualche\, i \\ u_i(X_i) \geq u_i(Y_i)\ \forall\, i \in N \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$ non sono confrontabili col criterio di Pareto

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$ sono confrontabili col criterio di Pareto

Analizzando il primo esempio si evince che il criterio di Pareto è incompleto perché non sem-

pre riusciamo a trovare la decisione ottimale in termini di utilità delle preferenze.
Pareto dice: "*è giusto accettare un grado di incertezza a patto che sia massimamente giusto*".
Il criterio di Pareto è perfettamente coerente con un'idea di decisioni prese all'***unanimità***, ma è insensibile alla disuguaglianza:

$$\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} \underset{media}{\rightarrow} \frac{8}{3} \qquad \begin{pmatrix}100\\2\\1\end{pmatrix} \underset{media}{\rightarrow} \frac{103}{3}$$

Questo criterio sembra suggerire l'impossibilità di compensazione di utilità.

Teoria delle votazioni

Il politologo francese Condorcet è il primo che parla di maggioranza.
Abbiamo due criteri con i quali fissare un quorum:

- ***maggioranza assoluta***: voto per un'alternativa da parte del 50% +1 dei soggetti aventi diritto di voto;
- ***maggioranza relativa***: voto per un'alternativa da parte del 50% +1 dei soggetti votanti. Questa maggioranza può emergere anche quando abbiamo diverse alternative e consideriamo la scelta che ottiene il maggior numero di voti rispetto alle altre.

Unanimità: scelta migliore collettivamente parlando (giustizia sociale), ma ogni soggetto possiede un diritto di veto (che causa immobilismo).

- Minimizza i costi sociali del dissenso; [costi esterni - vedi pagina 38]
- Rispetta sempre il criterio di Pareto;
- Particolarmente sensibile alla composizione del menù di scelta.

Nota: chi fisicamente compone il menù di scelta da presentare al comitato votante può influenzare anche in modo pesante il risultato delle votazioni, decidendo quali alternative porre a confronto nello stesso momento e quante e quali alternative raggruppare per una singola votazione.
Gli unici quorum legittimati sono il 100%, il 50% + 1, o la maggioranza relativa.
Per merito della "*scuola delle scelte pubbliche*" (scuola di pensiero nata e sviluppata nell'università di Chicago) abbiamo un'evoluzione della legittimazione dei quorum.

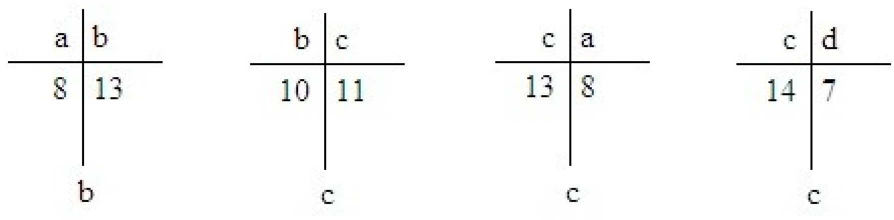
x, y, z opzioni

$$soggetti \begin{Bmatrix} i: & x \geqslant_i y \geqslant_i z \\ j: & y \geqslant_j x \geqslant_j z \\ k: & y \geqslant_k x \geqslant_k z \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} \textit{in questo caso non avremmo un consenso} \\ \textit{unanime , ma nel momento un cui eliminassimo} \\ \textit{l ' opzione x o y avremmo l ' unanimità} \end{matrix}$$

Tirannia delle minoranze: se si vota a gruppi (4 per esempio) e vi sono 2 minoranze concordi rispetto a un'alternativa, le minoranze vincerebbero con un minore numero di votanti rappresentativi per 2 voti a 0 se gli altri due gruppi che rappresenterebbero la maggioranza di votanti non si trovano concordi fra di loro su una singola alternativa.

Torneo di Condorcet: Cerchiamo di ridurre al minimo il problema della tirannia della minoranza. Confrontiamo le alternative a coppie e vediamo se ce n'è una che vince (quindi ottenendo il 50% +1 dei voti): questa alternativa viene chiamata ***vincitore di Condorcet***.

n°	3	5	7	6
⩾	a(4)	a(4)	b(4)	c(4)
⩾	b(3)	c(3)	d(3)	b(3)
⩾	c(2)	d(2)	c(2)	d(2)
⩾	d(1)	b(1)	a(1)	a(1)



C è il vincitore di Condorcet, perché ottiene la maggioranza assoluta nei confronti a coppie con tutte le altre alternative possibili.

Torneo ad albero: vengono create coppie di alternative possibili (quando sono pari). Quando esiste un vincitore di Condorcet qualsiasi torneo ad albero porta al vincitore di Condorcet.

Borda counting: attribuire ad ogni alternativa un punteggio. Il coefficiente di Borda è la somma dei punteggi di un'alternativa.

$B(a)=45 \quad \rightarrow \quad =(3*4)+(5*4)+(7*1)+(6*1)$

$B(b)=65$

$B(c)=59$

$B(d)=41$

Il principio di Condorcet si appella comunque alla legittimazione del voto, mentre il principio suggerito da Borda poggia sul concetto di "peso" individuale che i gruppi danno alle possibilità.

Paradosso di Condorcet: avviene nei casi in cui la maggioranza assoluta non si riesce ad ottenere (il torneo di Condorcet ed il Borda counting non hanno soluzione).

$$soggetti \left\{ \begin{matrix} i: & \overset{3}{x} \geqslant_i \overset{2}{y} \geqslant_i \overset{1}{z} \\ j: & \overset{3}{z} \geqslant_j \overset{2}{x} \geqslant_j \overset{1}{y} \\ k: & \overset{3}{y} \geqslant_k \overset{2}{z} \geqslant_k \overset{1}{x} \end{matrix} \right\}$$

Si genera una situazione intransitiva di voto ciclica.

$$Borda \left\{ \begin{matrix} x=6 \\ y=6 \\ z=6 \end{matrix} \right\}$$

Negli anni '60:

Nessun soggetto ha più di un picco (massimo globale).
Non deve esistere un soggetto che ha preferenze con due picchi (unimodali: un solo picco).
In assenza di funzioni unimodali dobbiamo rassegnarci al fatto di intransitività delle preferenze.
Il contributo di J. May è una pietra miliare per la regola di decisione collettiva. Viene usato un approccio assiomatico al problema della regola del voto.
L'unica regola che soddisfa tutti gli assiomi è la maggioranza relativa.

Vedere gli ordinamenti preferenziali come delle funzioni continue.

Condizione di unimodalità delle preferenze: non dobbiamo mai avere punti di salita partendo dal massimo globale e spostandoci a destra e a sinistra. In caso di unimodalità la maggioranza semplice permette sempre di ottenere un ordinamento completo, transitivo e ottimale delle decisioni. (questa conclusione viene raggiunta da Black ed è condizione necessaria e sufficiente).

Teorema di May

Questo teorema cerca di rispondere alla domanda: esiste una regola di voto che rispettando alcune proprietà soddisfa delle preferenze socialmente desiderabili?

N individui che possiedono ciascuno una relazione di preferenza.

$N(\geqslant_1, \ldots, \geqslant_N) \quad X \quad \geqslant_i \in P_i$

Ci si immagina che gli ordinamenti di preferenza siano completi e transitivi.

$$V: \; P_1 * \ldots * P_N \; \rightarrow \; X$$
$$(\geqslant_1, \ldots, \geqslant_N) \; \rightarrow \; x$$

1. ***Anonimicità*** (anonimia): non si tiene in considerazione l'identità del votante;
2. ***Neutralità***: nel momento in cui l'esito delle votazioni rimane inalterato nonostante venga modificata/scambiata una o più alternative di scelta dei soggetti (“chi vota cosa” è indifferente);
3. ***Dominio non ristretto***: una regola di voto che vale qualsiasi sia l'ordinamento preferenziale degli N soggetti;
4. ***Monotonicità***: nel momento in cui la regola di voto risponde alle variazioni delle preferenze.

May dimostrò che solo la maggioranza semplice riesce a soddisfare le proprietà sopraelencate.

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ x \end{array} \quad V(\geqslant_1, \ldots, \geqslant_N) = \{x\} \;\Leftrightarrow\; N(x) > N(y) \quad \forall\, y \neq x \;\in X$$

Black e May riabilitano dunque il concetto di maggioranza semplice.

Teoria positiva del voto

I due pensatori Buchanan e Tullock (entrambi di Chicago) propongono la prima teoria positiva del voto: in contesti differenti avremo regole di voto differenti (adattamento).
Questa teoria minimizza i costi associati al processo di decisione collettiva.

- ***Costi interni*** (della decisione collettiva rispetto al gruppo): costi di natura pratica, burocratica e amministrativa (anche di tempo e di energia dei votanti) che vengono effettuati per ottenere la decisione collettiva.
  Essi sono dunque costi dell'iter decisionale che tendono a salire quanto più cresce il quorum assegnato alla regola di voto.

- ***Costi esterni***: costi del dissenso sociale (della minoranza). Ad esempio: *gli emendamenti, scioperi, manifestazioni*.
- ***Costi totali di delibera***: $C = C_i + C_e$

La migliore regola di voto è quella che minimizza i costi totali di delibera (varia a seconda delle situazioni).

(*) valore del quorum che minimizza i costi totali di delibera: ***quorum ottimale***.

All'interno di questo concetto Arrow (1961) demolisce il concetto di maggioranza (prendere decisioni collettive sensate).

<u>Teorema del dittatore (di Arrow)</u>

Non ci può essere una regola di voto transitiva e completa se non con la presenza di un dittatore.
Arrow abbandona la funzione V (non definisce più la regola di voto come una funzione), ma utilizza una ***funzione di scelta sociale***: associa ad una serie di ordinamenti individuali un ordinamento preferenziale sociale.

$$N \qquad \geqslant_i \in P_i$$

$$\geqslant^S = F(\geqslant_1, \dots, \geqslant_N)$$

Assiomi di Arrow:

1. ***Dominio non ristretto***: (*preso da May*);
2. ***Indipendenza dalle alternative irrilevanti***: le alternative che non sono rilevanti per il problema non devono influenzare i decisori nel maturare la scelta;
3. ***Criterio di Pareto/unanimità***: se esiste un'alternativa unanime, allora quella deve essere l'alternativa sociale scelta;
4. ***Non dittatorialità***: nen deve esistere un soggetto che imponga come collettivo il proprio ordinamento di preferenza.

Esiste una regola di scelta sociale che rispetta le prime 3 regole di decisione: dittatorialità.
Per mantenere la non dittatorialità dovremmo abbandonare almeno una delle prime 3 regole.
Altrimenti, se consideriamo le decisioni come intransitive, la maggioranza semplice rispetta tutte le 4 regole. L'unico modo per rispettare le ultime 3 regole con decisioni transitive è considerare solo le preferenze unimodali (quindi con dominio ristretto).
L'intransitività porta al ciclo di voto di Condorcet.

Arrow impone altre due proprietà implicite:

- transitività dell'ordinamento sociale delle preferenze;
- ragiona in termini di funzione sociale dalla quale ottiene una relazione d'ordine sociale.

Corollario: Esiste una regola di scelta sociale che rispetta le prime 3 regole di decisione ed è solo la dittatorialità.

- Se si accetta l'intransitività allora la maggioranza semplice è ottimale (le preferenze sono sempre e solo unimodali, cioè al dominio ristretto e alla teoria di Black);
- Eliminando una delle condizioni di Arrow diventano pienamente ammissibili e motivati i teoremi di May e di Black visti come casi particolari della teria presentata da Arrow.

Teorema dell'oligarchia

Nel 1969 un economista americano, Antony Gibbard, propone un teorema chiamato "teorema dell'oligarchia", in cui cerca di chiarire dove si possa arrivare, seguendo il ragionamento di Arrow, considerando la decisione sociale quasi come una decisione transitiva. ***Quasi transitività***: alcune coppie non sono confrontabili e vi è un assenza di coerenza sillogistica. Quindi abbandoniamo la logica di comportamento transitivo di Arrow, mantenendone uno di "quasi transitività" (come $x \geqslant^S y$), assumendo che esiste sempre una funzione $f(x)$ di ***scelta sociale di tipo oligarchico***: un gruppo di individui (una coalizione) che riesce ad imporre la propria preferenza sociale sugli altri gruppi/singoli individui (essendo la coalizione più numerosa). Risultato: impossibilità di una scelta democratica, ma anche dittatoriale.
Questa teoria è anche denominata "***teoria dei gruppi di sezione***" ed indica la possibilità/impossibilità della teoria della scelta sociale.

Teorema dell'impossibilità di Sen

Nel 1971 un economista inglese, Sen (di origini indiane), pubblica un articolo in cui mostra un teorema sull'impossibilità denominato "teorema dell'impossibilità di Sen".
Apporta significative correzioni al teorema di Arrow:

- non ragionare in termini di funzione di scelta sociale, ma in termini di funzione di scelta collettiva.

  $\geqslant_i \in P_i$

  $f: (P_1 * ... * P_N) \rightarrow X$

  Le proprietà che deve rispettare la $f(x)$ sono:
  - dominio non ristretto;
  - alternative rilevanti;
  - norma del consenso (simile a Pareto): quando esaminiamo x e y . Se x è meglio di y (per il criterio di Pareto) allora x è preferibile a y .

Se non possiamo determinare una preferenza stretta utilizzando il criterio di Pareto la decisione sociale non è possibile.

Teorema dell'impossibilità liberale/paretiana

Nel 1973, Sen, critica il teorema proposto nel '71 sconvolgendo la comunità scientifica e ne mostra un altro denominato "teorema dell'impossibilità liberale/paretiana" che rispetta le seguenti proprietà:

- criterio paretiano: se esitono alternative pareto-ottimali allora la scelta sociale dovrebbe seguire quella linea di preferenza;
- la decisione collettiva deve rispettare la libertà del singolo (libertà individuale) crean-

do una condizione di "libertà minimale".

$$\forall i \in N \quad x, y \in X \quad se \;\; x \geqslant_i y \;\rightarrow\; x \geqslant^S y$$

Esempio: *due soggetti, uno puritano ed uno libertino, devono leggere il libro "L'amante di lady Chaterly".*

$$\begin{array}{ll} A & puritano \\ B & libertino \end{array} \qquad \begin{array}{l} x: \;\; A \text{ legge il libro} \\ y: \;\; B \text{ legge il libro} \\ z: \;\; \text{nessuno legge il libro} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A: \;\; z \geqslant x \geqslant y & z \geqslant^A x \;\rightarrow\; z \geqslant^S x & \\ B: \;\; x \geqslant y \geqslant z & y \geqslant^B z \;\rightarrow\; y \geqslant^S z & \underset{\text{conclusione transitiva}}{\rightarrow} \;\; y \geqslant^S x \end{array}$$

Secondo il criterio della libertà minimale dobbiamo prendere due coppie di alternative, che causano un conflitto insopportabile tra il criterio di Pareto e il concetto stesso di libertà minimale.

Riabilitare la cardinalità

Bergson e Samuelson dichiararono che è sempre possibile arrivare ad ottenere una funzione di benessere sociale completa e transitiva, nel caso in cui le preferenze sociali siano rappresentabili da funzioni di utilità cardinale (combinabili fra loro).

$$(\underset{u_1}{\geqslant_1}, \dots, \underset{u_N}{\geqslant_N}) \qquad W = f(u_1, \dots, u_N)$$

$$x \geqslant^S y \quad \Leftrightarrow \quad w(x) \geqslant^S w(y)$$

$N=2$

E è la scelta sociale ottimale

Principio di compensazione

Quando non è possibile rappresentare come funzione una relazione di preferenza usiamo il principio di compensazione.
L'altra possibilità è adottare una logica di compensazione originariamente proposta da J. Hicks che è complementare al criterio di Pareto.

$N=2$

Nell'area tratteggiata vi sono tutte le possibili combinazioni di utilità che portano con sé utilità paretiane.
B , D e C sono preferibili in modo paretiano ad A .
A ed E non sono confrontabili attraverso il criterio di Pareto.

Se $\alpha > \beta$, E è preferito da entrambi grazie ad una logica di compensazione sociale.
Bisogna individuare degli schemi compensazione sociale con la redistribuzione sociale. Ci sono istituti che lo fanno: i mercati sono luoghi che fungono da meccanismi di compensazione (che lo fanno in modo migliore).