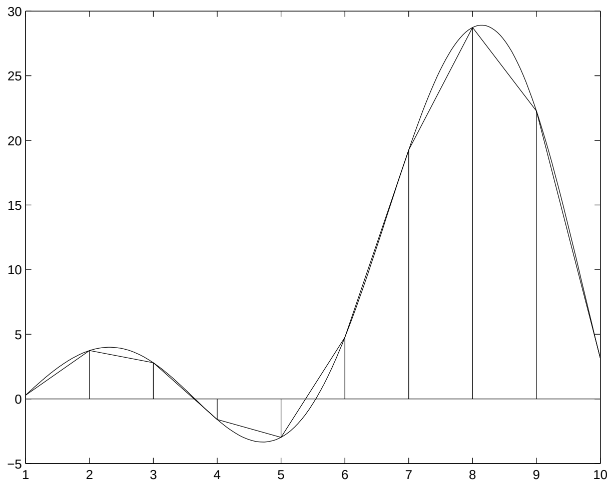
ARGOMENTI DEL CORSO CALCOLO NUMERICO

A.A. 2009/10



Integrazione Numerica

Giulio Casciola

(novembre 2003, rivista e corretta ottobre 2009)

Indice

Capitolo 1

Integrazione Numerica

L'integrazione numerica o quadratura numerica consiste nel calcolare un valore approssimato di
$$\int_a^b f(x)dx.$$
Ovviamente il problema sorge quando l'integrazione non può essere eseguita esattamente (non si può trovare una funzione primitiva come per esempio nel caso di $\int_a^b e^{-x^2}dx$ o $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$) o quando la funzione integranda è nota soltanto in un numero finito di punti. Ancora, anche se è nota una funzione primitiva, il calcolo può essere così costoso che è preferibile utilizzare un metodo numerico per determinarne un'approssimazione.
I metodi che vedremo consistono nell'approssimare la funzione integranda mediante polinomi o polinomi a tratti che risultano facilmente integrabili.

1.1 Formule di quadratura di Newton-Cotes

Nella sua formulazione più generale una **formula di quadratura** esprime un'approssimazione di un integrale come una combinazione lineare di valori della funzione integranda, cioè:

$$\sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i).$$

Le formule di quadratura di Newton-Cotes si ottengono considerando $n+1$ punti equidistanti nell'intervallo chiuso $[a,b]$ dati da:

$$x_i = a + ih \quad i = 0,\ldots,n \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad \text{per} \quad n > 0,$$

e approssimando la funzione integranda $f(x)$ mediante il polinomio interpolante $p \in \mathbf{P}_n$, cioè di al più grado n, dei punti $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, \dots, n$. Sarà:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + R_T \simeq \int_a^b p(x)dx.$$

Dal teorema che dà l'errore dell'interpolazione polinomiale si ha che l'errore di troncamento R_T è dato da:

$$R_T = \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} dx.$$

Se l'integrale richiesto viene approssimato dall'integrale di un polinomio di interpolazione di grado n, si ottiene una formula che è esatta per tutti i polinomi di grado minore od uguale ad n.
È facile mostrare che tale approsimazione è una formula di quadratura, cioè è esprimibile come una combinazione lineare dei valori $f(x_i)$ $i = 0, \dots, n$ della funzione. Per vedere questo, pensiamo $p(x)$ nella forma di Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_{i,n}(x)$$

dove gli $L_{i,n}(x)$ sono i polinomi di Lagrange di grado n sui punti x_i. Si ottiene

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_{i,n}(x)dx = \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i). \tag{1.1}$$

Cioè i coefficienti W_i possono essere calcolati per integrazione dei polinomi $L_{i,n}(x)$.
Un modo alternativo per determinare i coefficienti W_i è quello dei 'coefficienti incogniti'. Qui i coefficienti sono determinati richiedendo che R_T sia uguale a zero per le funzioni

$$f(x) = x^k \quad k = 0, \dots, n.$$

Queste richieste portano ad un sistema lineare di $n + 1$ equazioni nelle $n + 1$ incognite W_i.
Procediamo all'integrazione dei polinomi $L_{i,n}(x)$ $i = 0, \dots, n$. Effettuiamo un cambio di variabile di integrazione da $x \in [a, b]$ a $t \in [0, n]$ mediante la $x = a + ht$ con $h = \dfrac{b - a}{n}$.

$$\int_a^b L_{i,n}(x)dx = \int_a^b \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

$$= h\int_0^n \prod_{j=0,i\neq j}^{n} \frac{a+ht-a-hj}{a+hi-a-hj}dt$$

$$= h\int_0^n \prod_{j=0,i\neq j}^{n} \frac{t-j}{i-j}dt$$

Allora:

$$\int_a^b p(x)dx = h\sum_{i=0}^{n} f(x_i)w_i$$

avendo posto

$$w_i = \int_0^n \prod_{j=0,i\neq j}^{n} \frac{t-j}{i-j}dt; \tag{1.2}$$

e i W_i della 1.1 sono dati dagli $h \cdot w_i$ per $i = 0, \ldots, n$.
Si osservi che i coefficienti o pesi w_i dipendono solamente da n ed in particolare non dipendono dalla funzione $f(x)$ che deve essere integrata, e nemmeno dagli estremi a e b di integrazione.
Le formule di Newton-Cotes più comunemente usate sono quelle per $n = 1$ (formula dei Trapezi) ed $n = 2$ (formula di Simpson); nelle prossime sezioni deriveremo queste formule.

1.1.1 Formula dei Trapezi

Si procede al calcolo dei w_i per $i = 0, 1$ (caso $n = 1$) dalla 1.2.

$$w_0 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1}dt = \int_0^1 (1-t)dt = \left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$w_1 = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0}dt = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Allora

$$\int_a^b p_1(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$$

e quindi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + R_T.$$

La $f(x)$ è approssimata da una retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; cioè l'integrale è approssimato dall'area del trapezio rappresentato in Fig.1.1

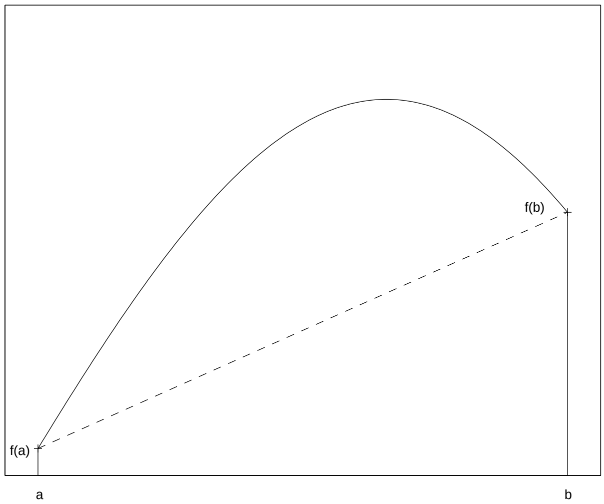


Figura 1.1: Interpolazione lineare per formula dei trapezi.

1.1.2 Formula di Simpson

Si procede al calcolo dei w_i per $i = 0, 1, 2$ (caso $n = 2$) dalla 1.2.

$$w_0 = \int_0^2 \frac{t-1}{0-1}\frac{t-2}{0-2}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2-3t+2)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t\right]_0^2 =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4\right] = \frac{1}{3};$$

$$w_1 = \int_0^2 \frac{t-0}{1-0}\frac{t-2}{1-2}dt = -\int_0^2 (t^2-2t)dt = -\left[\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = -\left[\frac{8}{3} - 4\right] = \frac{4}{3};$$

$$w_2 = \int_0^2 \frac{t-0}{2-0}\frac{t-1}{2-1}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2-t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right] = \frac{1}{3};$$

e quindi

$$\int_a^b p_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

cioè

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R_T.$$

La $f(x)$ è approssimata da una parabola passante per $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ e $(b, f(b))$ (vedi Fig 1.2).

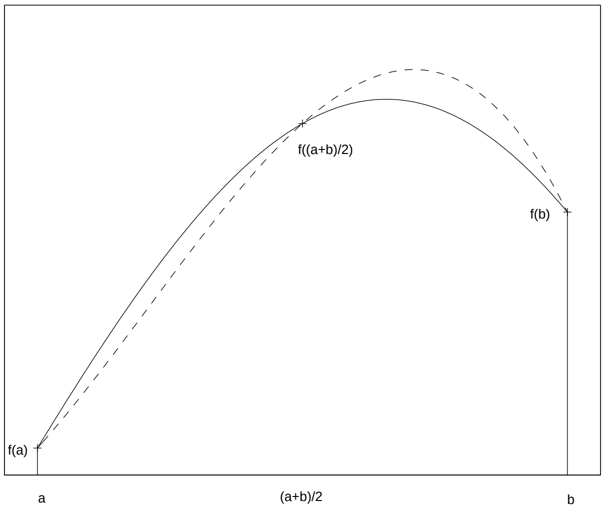


Figura 1.2: Interpolazione quadratica per formula di Simpson.

1.2 Errore di Integrazione

Teorema 1.1 *Si considerino le formule di Newton-Cotes viste; allora se n è dispari ed $f(x) \in C^{n+1}_{[a,b]}$, si ha:*

$$R_T = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)dt; \tag{1.3}$$

se n è pari ed $f(x) \in C^{n+2}_{[a,b]}$, si ha:

$$R_T = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)dt. \tag{1.4}$$

Osservazione 1.1 *Si noti che quando n è pari il grado di precisione è $n+1$ sebbene il polinomio interpolante sia di grado al più n, infatti se $f(x)$ è un polinomio di grado $n+1$ sarà $f^{n+2}(x) = 0$. Nel caso di n dispari il teorema dice che il grado di precisione è solamente n. Come conseguenza, se n è pari e si vuole aumentare il grado di precisione di uno, questo si può ottenere aggiungendo almeno due punti di interpolazione.*

1.2.1 Formula dei Trapezi

Nel caso $n = 1$ sarà:

$$R_T = \frac{h^3 f^{(2)}(\eta)}{2} \int_0^1 t(t-1)dt$$

dove $h = b - a$; si ha:

$$\int_0^1 t(t-1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

e quindi

$$R_T = -\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\eta).$$

1.2.2 Formula di Simpson

Nel caso $n = 2$ sarà:

$$R_T = \frac{h^5 f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt$$

dove $h = \frac{b-a}{2}$; si ha:

$$\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt = \int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{32}{5} - 12 + \frac{16}{3}\right] = -\frac{4}{15}h^5$$

e quindi

$$R_T = -\frac{1}{90}h^5 f^4(\eta).$$

Questa espressione dell'errore mostra come la formula di Simpson (così come tutte quelle con n pari) sia esatta non solo per polinomi di secondo grado, come ci si aspeterebbe, ma anche per polinomi cubici.

Osservazione 1.2 *Se con s si indica il denominatore comune per i coefficienti frazionari w_i, e indichiamo con $\sigma_i := sw_i$ $i = 0, \ldots, n$ i conseguenti numeri interi, allora la formula di Newton-Cotes si può riscrivere come:*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{ns}\sum_{i=0}^{n}\sigma_i f(x_i).$$

La seguente Tab.1.1 riporta le formule di Newton-Cotes per $n = 1, \ldots, 8$; si osservi che $\sigma_i \equiv \sigma_{n-i}$ per $i = 0, \ldots, n/2$. Per $n \geq 8$ alcuni coefficienti σ_i diventano negativi e aumentano in modulo. Questo fatto, che rende instabile la formula dal punto di vista della propagazione degli errori (cancellazione numerica), insieme alla considerazione che l'aumento del grado di precisione non significa necessariamente la convergenza della formula di quadratura all'integrale quando la funzione non è polinomiale, rende interessanti le formule di Newton-Cotes soltanto per $n \leq 7$.

n	σ_i	ns	Errore	Nome
1	1 ...	2	$-\frac{1}{12}h^3f^{(2)}(\eta)$	Trapezi
2	1 4 ...	6	$-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(\eta)$	Simpson
3	1 3 ...	8	$-\frac{3}{80}h^5f^{(4)}(\eta)$	3/8
4	7 32 12 ...	90	$-\frac{8}{945}h^7f^{(6)}(\eta)$	Milne
5	19 75 50 ...	288	$\cdots h^7f^{(6)}(\eta)$	
6	41 216 27 272 ...	840	$\cdots h^9f^{(8)}(\eta)$	Weddle
7	751 3577 1323 2989 ...	17280	$\cdots h^9f^{(8)}(\eta)$	
8	989 5888 -928 10496 -4540 ...	28350	$\cdots h^{11}f^{(10)}(\eta)$	

Tabella 1.1: Formule Newton-Cotes per $n = 1, \ldots, 8$.

1.3 Formule Composte

Le formule composte consistono nel cosiderare dei polinomi a tratti come funzioni approsimanti della funzione integranda nell'intervallo $[a, b]$. In pratica tale intervallo viene suddiviso in sottointervalli, in generale di uguale ampiezza, $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \ldots, m-1$, e su ciasuno di essi si applica una formula di quadratura di grado basso.

1.3.1 Formula dei Trapezi

Se si usa la formula dei trapezi sul sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$ si ottiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\eta_i)$$

con $h = x_{i+1} - x_i$ e $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$. L'errore è detto **errore locale di troncamento.**
Per l'intero intervallo $[a, b]$ si ottiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$= h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2}f(x_m)\right) + R_T$$

(vedi Fig.1.3). L'errore globale di troncamento R_T è la somma degli errori locali. Si noti che $b - a = mh$, e perciò

$$R_T = -\frac{b-a}{12}h^2 \frac{\sum_{i=0}^{m-1} f^{(2)}(\eta_i)}{m}.$$

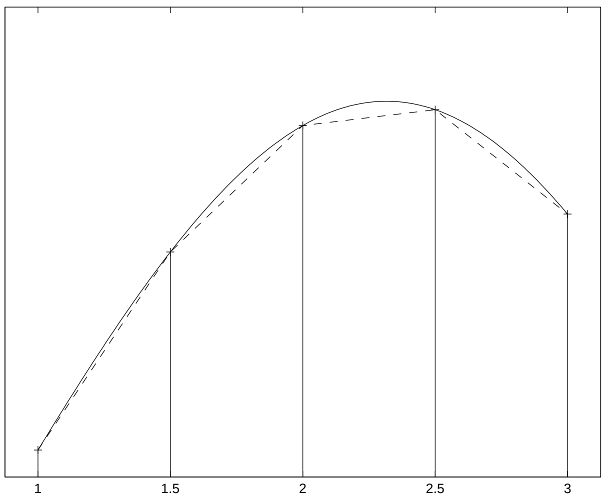


Figura 1.3: Interpolazione lineare a tratti per formula composta dei trapezi.

Se $f^{(2)}$ è continua in $]a,b[$, allora esiste un η in questo intervallo, tale che

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f^{(2)}(\eta_i) = f^{(2)}(\eta).$$

Da cui l'errore di troncamento globale per la formula dei trapezi composta è

$$R_T = -\frac{b-a}{12}h^2 f^{(2)}(\eta); \tag{1.5}$$

in particolare si osservi che vale

$$\lim_{h\to 0} R_T = 0.$$

Perciò più fine è la suddivisione dell'intervallo e migliore risulta l'approssimazione dell'integrale.

Esempio 1.1 *Si vuole determinare il passo h da utilizzare nella formula dei trapezi composta, affinché l'$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ sia approssimato alla tolleranza 0.5×10^{-3}. Si considera la formula 1.5 per l'errore di integrazione dei trapezi composta e si cerca un limite superiore per la $f^{(2)}$ in $[a,b]$; nel caso specifico sarà:*

$$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Allora

$$\max_{0\leq x\leq 1} f^{(2)}(x) = f^{(2)}(0) = 2$$

e ricordando che $h = \frac{b-a}{m} = \frac{1}{m}$ *si ha:*

$$\left| \frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\eta) \right| \leq \frac{1}{12} h^2 2 = \frac{1}{6m^2} \leq 0.5 \times 10^{-3}$$

da cui

$$m^2 \geq \frac{1}{3} \times 10^3 \quad \textit{e quindi} \quad m \geq 18.25.$$

Segue che per approssimare l'integrale dato alla tolleranza fissata è sufficiente usare $m = 19$*, cioè il più piccolo intero che soddisfa* $m \geq 18.25$.

1.3.2 Formula di Simpson

Se $m = 2k$, cioè l'intervallo $[a, b]$ è suddiviso in un numero pari di sottointervalli, allora l'integrale in ogni sottointervallo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ può essere calcolato con la formula di Simpson:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta_i)$$

con $h = x_{2i+2} - x_{2i}$ e $x_{2i} \leq \eta_i \leq x_{2i+2}$.
Per l'intero intervallo $[a, b]$ si ottiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)] + R_T$$

(vedi Fig.1.4), dove

$$R_T = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{k-1} f^{(4)}(\eta_i).$$

Per le stesse argomentazioni usate per la formula dei trapezi, questo si può scrivere

$$R_T = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

dove $\eta \in]a, b[$ con $f^{(4)}$ continua in $[a, b]$.

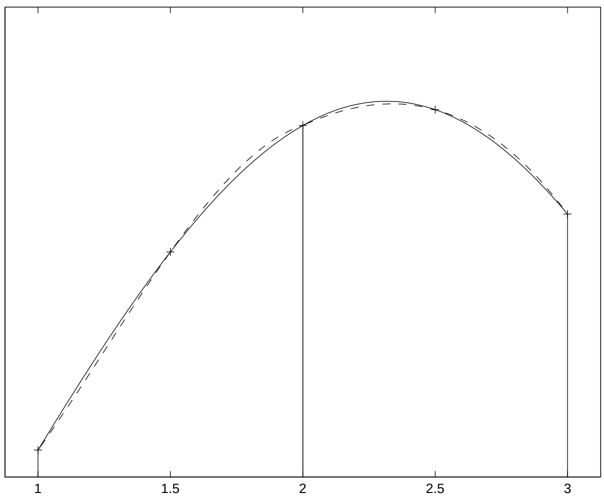


Figura 1.4: Interpolazione quadratica a tratti per formula composta di Simpson.

1.4 Metodi Adattivi

Nelle applicazioni pratiche, chi è interessato a calcolare numericamente l'integrale di una funzione, solitamente ha la necessità che l'approssimazione sia contenuta in una tolleranza fissata; cioè se indichiamo con I_A l'integrale approssimato con una formula di quadratura e con tol la tolleranza fissata, l'utente vuole che

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_A \right| \leq tol.$$

A meno di casi particolari, come quello dell'esempio, quanto visto fino ad ora non permette di soddisfare tale richiesta. Per fare ciò è necessario un criterio per determinare una stima dell'errore di integrazione; ci sono due tipi di approcci: non adattivo e adattivo. In un approccio non adattivo i punti in cui si valuta la funzione $f(x)$ sono scelti senza tener conto del comportamento della $f(x)$; in questo caso può accadere che se la funzione ha un comportamento oscillante in una parte dell'intervallo d'integrazione, questo comporti un numero elevato di punti su tutto l'intervallo, anche dove la funzione ha un comportamento lineare. Invece in un approccio adattivo il numero di punti viene scelto in base al comportamento della funzione. Si suddivide l'intervallo di integrazione in sottointervalli e si applica ricorsivamente a questi una formula di quadratura, sfruttando un stima di arresto. La funzione integranda viene così valutata in pochi punti

nei sottointervalli in cui ha un andamento regolare e in tanti punti negli intervalli dove sono presenti irregolarità.
Nella prossima sezione vedremo una tecnica nota come estrapolazione di Richardson che deriva da un risultato più generale da cui si può estrarre una stima per l'errore di integrazione.

1.4.1 Estrapolazione di Richardson

Con **estrapolazione di Richardson** ci si riferisce ad una tecnica generale che permette di ottenere dall'applicazione di due formule di integrazione composte con passi rispettivamente h ed $\frac{h}{2}$ un valore di approssimazione per l'integrale, più preciso dei due precedenti. Vediamo questa tecnica sia nel caso dei trapezi composti che nel caso di Simpson composto al fine di progettare poi una formula di integrazione adattiva.

1.4.2 Caso Trapezi

Teorema 1.2 *Si indichi con $T(h)$ la formula dei trapezi composta con $h = \frac{b-a}{m}$; allora vale*

$$\int_a^b f(x)dx - T(h) = \frac{h^2}{12}(f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a)) - \frac{h^4}{720}(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) +$$

$$\frac{h^6}{30240}(f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) + \cdots + c_{2k}h^{2k}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + O(h^{2k+2})$$

nelle ipotesi che la f sia derivabile in $[a, b]$ almeno $2k + 2$ volte.

Corollario 1.1 *Assumendo che la $f(x)$ sia derivabile almeno 4 volte su $[a, b]$, si ha:*

$$\int_a^b f(x)dx - T(h/2) \simeq \frac{T(h/2) - T(h)}{3} + O(h^4).$$

dim.
dal teorema si ha:

$$\int_a^b f(x)dx - T(h) = c_2 h^2 + O(h^4)$$

e se il passo usato è $h/2$

$$\int_a^b f(x)dx - T(h/2) = c_2(h/2)^2 + O(h^4)$$

e questo in quanto il coefficiente c_2 è indipendente da h. Eliminando il termine in h^2 fra le due equazioni, si ottiene:

$$4\left(\int_a^b f(x)dx - T(h/2)\right) = \int_a^b f(x)dx - T(h) + O(h^4)$$

da cui

$$3\left(\int_a^b f(x)dx - T(h/2)\right) = T(h/2) - T(h) + O(h^4)$$

e quindi ciò che si voleva provare.

Osservazione 1.3 *Dal Corollario si può ricavare una formula che fornisce un'approssimazione dell'integrale del quarto ordine, cioè*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3} + O(h^4).$$

Questo metodo di eliminare la potenza più bassa di h nello sviluppo dell'errore, usando due differenti passi h ed $h/2$, è noto come estrapolazione di Richardson. Il metodo è attraente, perché, una volta calcolato $T(h)$ e $T(h/2)$, si può ottenere l'approssimazione di ordine superiore ad un extra costo inesistente.

Esempio 1.2 *Si stima l'$\int_0^1 e^{\sin x}dx$ usando la formula composta dei trapezi con $h = 1, 0.5, 0.25$. La stima viene poi migliorata mediante estrapolazione di Richardson. Il valore esatto dell'integrale è 1.63186961.*

h	$T(h)$	$Estrap.$	$\lvert \int_a^b f dx - T(h) \rvert$	$\lvert \int_a^b f dx - Estrap. \rvert$
1	1.65988841		0.0280188	
0.5	1.63751735	1.63006033	0.0056477	0.0018093
0.25	1.63321154	1.63177627	0.0013419	0.0000934

Tabella 1.2: Esempio di estrapolazione di Richardson

Osservazione 1.4 *Il Corollario fornisce una stima del termine principale dell'errore e quindi fornisce un metodo pratico per raggiungere l'obiettivo che ci si è posti. Si può progettare un metodo iterativo in cui si dimezza il passo fino a che*

$$\left|\frac{T(h/2) - T(h)}{3}\right| \leq tol;$$

quando questo si verifica, per il Corollario, sarà anche

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(h/2)\right| \leq tol.$$

Questo metodo iterativo può essere applicato in modo adattivo. Si rimanda la descrizione di un tale metodo al paragrafo successivo.

1.4.3 Caso Simpson

A differenza del caso trapezi, qui non esiste un teorema che possa essere utilizzato per sapere l'ordine dello schema che si ottiene applicando alle formule di Simpson composte l'estrapolazione di Richardson.
Sia $h = (b-a)/2$, allora si calcoli un Simpson con passo h ($S(h)$) e un Simpson composto con passo $h/2 = (b-a)/4$ ($S(h/2)$ o analogamente due Simpson semplici con passo $h/2$); avremo

$$\int_a^b f(x)dx = S(h) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in]a,b[$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= S(h/2) - \frac{b-a}{180}(h/2)^4 f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in]a,b[\\ &= S(h/2) - \frac{1}{16}\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nelle ipotesi che $f^{(4)}(\xi) \simeq f^{(4)}(\eta)$ si può procedere ad eliminare il termine h^4 fra le due equazioni, ottenendo

$$S(h) - S(h/2) \simeq \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)(1 - \frac{1}{16})$$

da cui

$$\frac{1}{15}[S(h) - S(h/2)] \simeq \frac{1}{16}\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$$

e sostituendo questa nella 1.6 si ottiene

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\simeq S(h/2) - \frac{1}{15}[S(h/2) - S(h)] \\ &= \frac{1}{15}[16 \cdot S(h/2) - S(h)] \end{aligned} \tag{1.7}$$

che è una nuova formula che fornisce un'approssimazione dell'integrale di ordine superiore. Dalla prima relazione 1.7 si ottiene

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S(h/2)\right| \simeq \left|\frac{1}{15}[S(h/2) - S(h)]\right| \tag{1.8}$$

e quindi la possibilità di innescare un procedimento iterativo in cui si dimezza il passo fino a che

$$\left|\frac{1}{15}[S(h/2) - S(h)]\right| \leq tol;$$

quando ciò si verifica sarà anche

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S(h/2)\right| \leq tol.$$

Si può ora procedere alla progettazione di un metodo adattivo.

1.4.4 Metodo di Simpson adattivo

L'utente di una routine che implementa un metodo adattivo specifica l'intervallo $[a, b]$, fornisce una routine per la valutazione di $f(x)$ per $x \in [a, b]$ e sceglie una tolleranza *tol*. La routine tenta di calcolare un valore approssimato I_A così che:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_A\right| \leq tol.$$

La routine può determinare che la richiesta tolleranza non sia ottenibile nei limiti definiti di massimo numero di livelli di ricorsione e ritornare la miglior approssimazione da lei fornibile. Per quel che riguarda l'efficienza di una routine di questo tipo, è noto che il costo maggiore di calcolo consiste nella valutazione della funzione integranda $f(x)$.
Durante l'esecuzione, ogni intervallo viene determinato per bisezione di un intervallo ottenuto precedentemente durante il calcolo. Il numero effettivo di sottointervalli, così come la loro posizione e ampiezza, dipende dalla funzione $f(x)$ e dalla tolleranza *tol*. Lo schema più classico applica due differenti formule di quadratura ad ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$, per esempio la formula di Simpson semplice ($S(h_i)$ con $h_i = x_{i+1} - x_i$) e la formula di Simpson composta con $m = 4$ ($S(h_i/2)$)(che equivale a due Simpson semplici applicati rispettivamente a $[x_i, x_i+h_i/2]$ e $[x_i+h_i/2, x_{i+1}]$). Entrambe $S(h_i)$ ed $S(h_i/2)$ sono approssimazioni per

$$I_{Ai} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

L'idea base del metodo adattivo è utilizzare le due approssimazioni per ottenere una stima dell'errore di integrazione (stima 1.8). Se la tolleranza è raggiunta, $S(h_i/2)$ o una combinazione delle due approssimazioni

(estrapolazione di Richardson) viene presa come valore dell'integrale su quell'intervallo. Se la tolleranza non è raggiunta, il sottointervallo viene suddiviso a metà e il processo viene ripetuto su ognuno dei sottointervalli più piccoli.
Per ridurre il numero totale di valutazioni della funzione integranda, solitamente si organizza che le due formule utilizzate richiedano valori della funzione in punti comuni; per esempio, con la formula di Simpson, $S(h_i/2)$ richiede cinque valori della funzione, tre dei quali sono anche usati in $S(h_i)$. Come conseguenza, processare un nuovo sottointervallo richiede solo due nuove valutazioni di funzione.

La Fig.1.5 mostra gli intervalli considerati, e i valori della funzione nei loro estremi, nell'applicare il metodo di Simpson adattivo alla funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \sin x + 2x - 4 \quad x \in [0, 20]$$

richiedendo una tolleranza 1.0×10^{-6}; il valore determinato è 294.872 ed è stato ottenuto effettuando 361 valutazioni della $f(x)$.

La Fig.1.6 mostra gli intervalli considerati e i valori della funzione nei

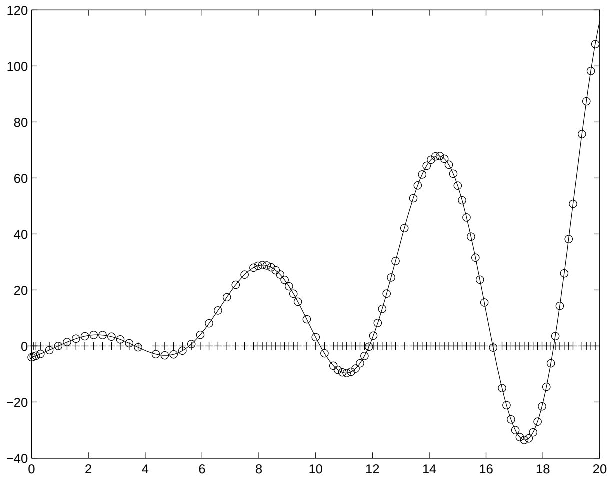


Figura 1.5: Simpson adattivo: 361 valutazioni di funzione.

loro estremi, nell'applicare il metodo di Simpson adattivo alla funzione

$$f(x) = \frac{32}{1 + 1024x^2} \quad x \in [0, 4]$$

richiedendo una tolleranza 1.0×10^{-6}; il valore determinato è 1.563 ed è stato ottenuto effettuando 93 valutazioni della $f(x)$. Si noti che in ogni

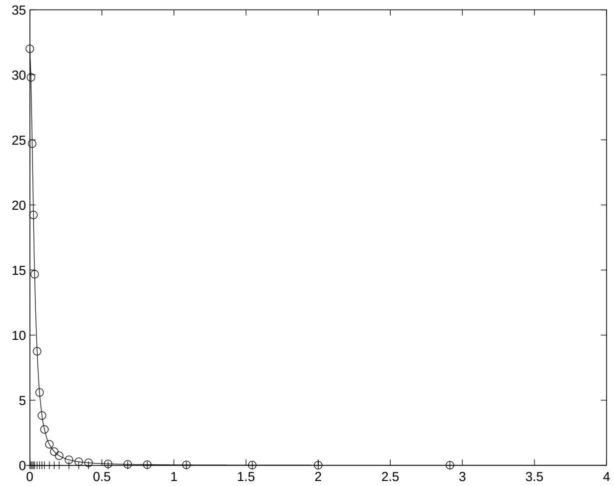


Figura 1.6: Simpson adattivo: 93 valutazioni di funzione.

intervallo in cui si è raggiunta la tolleranza la funzione è stata valutata 3 volte oltre ai due estremi.
Per tali elaborazioni si è utilizzata la function **quad** presente nel sistema MATLAB 6.5.1.

1.5 Applicazione: lunghezza di una curva

Sia data una curva di Bézier $\mathbf{C}(t)$ con $t \in [0, 1]$. Siamo interessati a determinare la lunghezza di tale curva e a progettare curve di lunghezza assegnata mantenendo la stessa forma.
È noto che la lunghezza di una curva in questa forma è espressa da

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|\mathbf{C}'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \end{aligned}$$

con $x(t)$ ed $y(t)$ le componenti della $\mathbf{C}(t)$ e $x'(t)$ ed $y'(t)$ le componenti della $\mathbf{C}'(t)$. Infatti l'infinitesimo di curva sarà dato da $\delta\mathbf{C}(t)$ che approssimeremo con $\mathbf{C}'(t)\delta t$ e la cui lunghezza sarà $\|\mathbf{C}'(t)\|\delta t$.
Per calcolare tale lunghezza sarà necessario utilizzare una formula di integrazione numerica e se si desidera l'approssimazione con una certa tolleranza si può utilizzare il metodo di Simpson adattivo.
Supponiamo di aver progettato la curva $\mathbf{C}(t)$ e di aver stimato che la sua

lunghezza è L_C. Siamo interessati ad una curva $\mathbf{G}(t)$ con la stessa forma della $\mathbf{C}(t)$, ma di lunghezza fissata L_G. A tal fine si noti che se la curva $\mathbf{C}(t)$ viene scalata di un fattore s la sua lunghezza viene scalata dello stesso fattore; infatti sia

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} s \cdot x(t) \\ s \cdot y(t) \end{pmatrix}$$

la curva $\mathbf{C}(t)$ scalata del fattore s, allora sarà

$$L_G = \int_0^1 \sqrt{[s \cdot x'(t)]^2 + [s \cdot y'(t)]^2} dt = s \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = sL_C.$$

Segue che assegnata la lunghezza L_G sarà sufficiente calcolare $s := L_G/L_C$ e scalare la curva $\mathbf{C}(t)$ per tale fattore ottenendo una curva $\mathbf{G}(t)$ della forma della $\mathbf{C}(t)$ e di lunghezza desiderata. La Fig1.7 mostra una curva polinomiale cubica a tratti C^1 ottenuta per interpolazione; la curva tratteggiata è stata ottenuta per scala dalla precedente, rispetto all'origine degli assi, affinché avesse lunghezza 2.

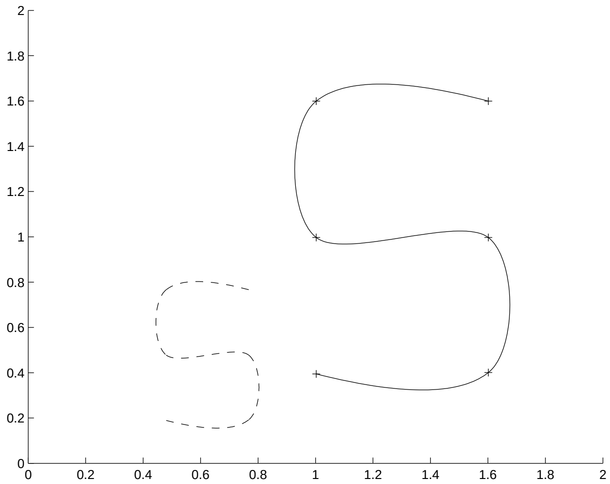


Figura 1.7: Lunghezza di una curva: la curva tratteggiata è stata scalata rispetto all'origine degli assi per avere lunghezza 2.

1.6 Applicazione: area di una curva

Sia data una curva di Bézier $\mathbf{C}(t)$ con $t \in [0, 1]$. Siamo interessati a determinare l'area che tale curva sottende con l'origine degli assi (se la curva è chiusa questo equivale all'area della regione che resta definita dalla curva) e a progettare curve di area assegnata mantenendo la stessa forma. È noto che l'area di una curva in questa forma è espressa da

$$A = \pm\frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{C}(t) \times \mathbf{C}'(t)dt$$

$$= \pm\frac{1}{2}\int_0^1 [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt$$

con $x(t)$ ed $y(t)$ le componenti della $\mathbf{C}(t)$ e $x'(t)$ ed $y'(t)$ le componenti della $\mathbf{C}'(t)$. Il segno di quest'area è positivo se la curva è parametrizzata in senso antiorario nel piano xy.
L'infinitesimo di area sotteso dalla curva sarà dato da $\frac{1}{2}[\mathbf{C}(t)\times\mathbf{C}'(t)]\delta t$. Per calcolare tale area sarà necessario utilizzare una formula di integrazione numerica e se si desidera l'approssimazione con una certa tolleranza si può utilizzare il metodo di Simpson adattivo, ma si può anche osservare che la funzione integranda, a differenza del caso della lunghezza della curva, è una funzione polinomiale. Se per esempio la curva fosse una cubica, allora la funzione integranda sarebbe un polinomio di grado 5 e potrebbe essere integrata in modo esatto, a meno di errori di approsimazione numerica, usando una formula di Newton-Cotes con $n = 4$.
Supponiamo di aver progettato la curva $\mathbf{C}(t)$ e di aver stimato che la sua area è A_C. Siamo interessati ad una curva $\mathbf{G}(t)$ con la stessa forma della $\mathbf{C}(t)$, ma di area fissata A_G. A tal fine si noti che se la curva $\mathbf{C}(t)$ viene scalata di un fattore s la sua area viene scalata dello stesso fattore al quadrato; infatti sia

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} s \cdot x(t) \\ s \cdot y(t) \end{pmatrix}$$

la curva $\mathbf{C}(t)$ scalata del fattore s, allora sarà

$$A_G = \int_0^1 [s^2x(t)y'(t) - s^2x'(t)y(t)]dt = s^2\int_0^1 [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt = s^2A_C.$$

Segue che assegnata l'area A_G sarà sufficiente calcolare $s := \sqrt{A_G/A_C}$ e scalare la curva $\mathbf{C}(t)$ per tale fattore ottenendo una curva $\mathbf{G}(t)$ della forma della $\mathbf{C}(t)$ e di area desiderata. La Fig.1.8 mostra una curva chiusa polinomiale cubica a tratti C^1 ottenuta per interpolazione; la curva tratteggiata è stata ottenuta per scala dalla precedente, rispetto al baricentro dei punti di interpolazione, affinché avesse area unitaria.

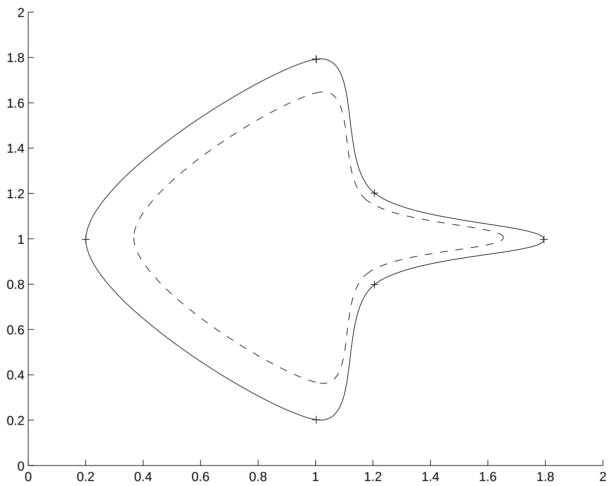


Figura 1.8: Area di una curva: la curva tratteggiata è stata scalata per avere area 1.

Elenco delle figure

Bibliografia

[BBCM92] R. Bevilacqua, D. Bini, M. Capovani, O. Menchi. *Metodi Numerici*. Zanichelli, 1992.

[FaPr87] I. D. Faux, M. J. Pratt. *Computational Geometry for Design and Manufacture*. John Wiley & Sons, 1987.