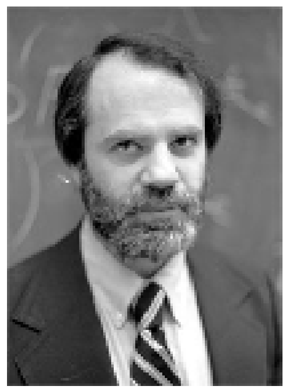
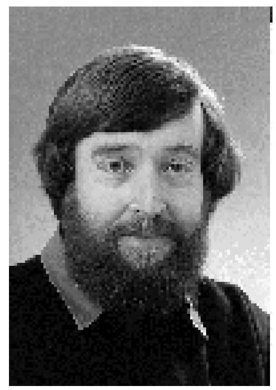
Logiche Modali Proposizionali

Corso di Logica (1)

a.a. 2005-2006

Prof.ssa Giovanna Corsi

Appunti redatti da
Wilmer Ricciotti - ricciott@cs.unibo.it
Francesco Spegni - spegni@cs.unibo.it
Alessia Tosi - verderba@yahoo.it

19 ottobre 2006

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Logiche modali proposizionali

Le *logiche modali proposizionali* che noi considereremo sono estensioni della logica classica proposizionale che assumiamo già nota. Lo studio delle logiche modali avverrà sotto due aspetti: *sintattico* e *semantico*.

1.1 Livello sintattico

1.1.1 Definizioni e dimostrazioni per induzione

Definizione 1.1. L'**alfabeto** di un linguaggio enunciativo modale $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ è costituito da:

- un insieme Φ al massimo numerabile di variabili enunciative: $p_0, p_1, p_2 \ldots$
- la costante logica 0-aria $\perp$,
- costanti logiche unarie $\neg$ e $\boxed{a}$, per ogni $a \in \mathcal{A}$, ove $\mathcal{A}$ è insieme non vuoto, al massimo numerabile, di indici ,
- costanti logiche binarie $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$
- le parentesi (,).

Definizione 1.2. Definizione induttiva dell'insieme $Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, delle formule ben formate di $\mathcal{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

1. $p_i \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}, \;\; i \in \mathbb{N}$,
2. $\perp \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$,
3. se $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ e $a \in \mathcal{A}$, allora $(\neg A)$, $(\boxed{a} A) \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$
4. se $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ e $B \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, allora $(A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B) \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$
5. nient'altro è in $Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Le prime due clausole stabiliscono quali sono gli elementi iniziali di $Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, le seconde due clausole stabiliscono le operazioni con le quali si ottengono nuovi elementi a partire da elementi già dati e l'ultima clausola esprime una condizione di chiusura.

Definizione 1.3.

$$
\begin{array}{rcl}
\top & \triangleq & \neg\bot \\
\langle a \rangle A & \triangleq & \neg\boxed{a}\neg A \\
A \leftrightarrow B & \triangleq & (A \to B) \wedge (B \to A).
\end{array}
$$

Dato un insieme X definito per induzione, possiamo *dimostrare* proprietà degli elementi di X facendo appello a *come* tali elementi sono stati costruiti.

Teorema 1.4 (Principio di induzione sulla costruzione delle formule)**.** *Sia ϕ una proprietà (espressa nel metalinguaggio). Allora $\phi[A]$ vale per ogni $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, se*

$\phi[p_i]$, per ogni $i \in \mathbb{N}$,

$\phi[\bot]$,

se $\phi[A]$, allora $\phi[(\neg A)]$ e $\phi[(\boxed{a}A)]$

se $\phi[A]$ e $\phi[B]$, allora $\phi[(A \vee B)]$, $\phi[(A \wedge B)]$ e $\phi[(A \to B)]$.

Dimostrazione.
Sia $X = \{A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}} : \phi(A)\}$. Banalmente $X \subseteq Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. X soddisfa tutte le condizioni della definizione 1.2, pertanto $Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}} \subseteq X$, quindi $X = Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. □

Chiameremo una applicazione del teorema appena enunciato, una *dimostrazione per induzione su A* o *sulla costruzione di A*.

Diamo ora un esempio banale di dimostrazione per induzione sulla costruzione di A. In pratica verificheremo solo le clausole della dimostrazione per induzione e lasciamo la conclusione al lettore.

Teorema 1.5. *Ogni formula ben formata ha un numero pari di parentesi.*

Dimostrazione.

1. Ogni atomo ha zero parentesi e zero è pari
2. $\bot$ ha zero parentesi e zero è pari.
3. Supponi che A abbia $2n$ parentesi, allora $(\neg A)$, $(\boxed{a}A)$ hanno $2n+2$, ovvero $2(n+1)$ parentesi.
4. Supponi che A abbia $2n$ parentesi e B abbia $2m$ parentesi, allora $(A \star B)$ ha $2(n+m+1)$ parentesi, ove $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

Per il teorema 1.4, ogni fbf ha un numero pari di parentesi. □

Dato un insieme X definito per induzione, possiamo *definire* funzioni sugli elementi di X facendo appello a come tali elementi sono stati costruiti. Siffatte funzioni sono dette *definite per ricorsione*. Seguono alcuni esempi.

Esempio 1. Definiamo la funzione $\pi[A]$ che computa quante sono le parentesi di A. Basta porre:

$\pi[p_i] = 0$, per ogni atomo p_i,

$\pi[\bot] = 0$,

$\pi[(\neg A)] = \pi[(\boxed{a}A)] = \pi[A] + 2$,

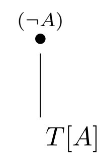
$\pi[(A \star B)] = \pi[A] + \pi[B] + 2.$

Esempio 2. Definiamo la funzione che ad ogni formula A associa il suo l'albero di formazione (*parsing tree*) $T[A]$.

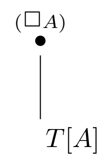
$T[p_i] = \bullet$, per ogni atomo p_i

$T[\bot] = \bullet$

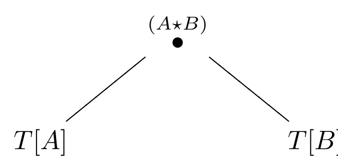
$T[(\neg A)] =$



$T[(\Box A)] =$



$T[(A \star B)] =$



Esempio 3. La *lunghezza* (*size*) di una formula A è così definita:

$\lg[p_i] = 0$, per ogni atomo p_i,

$\lg[\bot] = 0$,

$\lg[(\neg A)] = \lg[(\Box A)] = \lg[A] + 1$,

$\lg[(A \star B)] = \lg[A] + \lg[B] + 1.$

Esempio 4. La *profondità* (*height*) di una formula A è così definita:

$h[p_i] = 0$, per ogni atomo p_i,

$h[\bot] = 0$,

$h[(\neg A)] = h[(\Box A)] = h[A] + 1$,

$h[(A \star B)] = max[h(A), h(B)] + 1.$

Esempio 5. L'*insieme delle sottoformule* di una formula A è così definito:

$\mathrm{Sf}[p_i] = \{p_i\}$, per ogni atomo p_i,

$\mathrm{Sf}[\bot] = \{\bot\}$,

$\mathrm{Sf}[(\neg A)] = \mathrm{Sf}[A] \cup \{\neg A\}$,

$\mathrm{Sf}[(\Box A)] = \mathrm{Sf}[A] \cup \{(\Box A)\}$,

$\mathrm{Sf}[(A \star B)] = \mathrm{Sf}[A] \cup \mathrm{Sf}[B] \cup \{(A \star B)\}$.

Diciamo che B è *sottoformula* di A se $B \in \mathrm{Sf}(A)$.

Osservazione 1. Che questa definizione sia *matematicamente ben fondata* è garantito dalla teoria delle funzioni ricorsive.

L'introduzione delle funzioni lunghezza e profondità non è una mera illustrazione della "definizione per ricorsione": ci permette anche di dimostrare fatti sulle formule per mezzo del principio di induzione matematica. Infatti grazie alla nozione di lunghezza siamo in grado di suddividere tutte le formule in una successione infinita di insiemi di formule: l'insieme delle formule di lunghezza 0, l'insieme delle formule di lunghezza 1, l'insieme delle formule di lunghezza 2, ... Analogamente per la profondità.

Proposizione 1.6 (Principio di induzione sulla lunghezza delle formule)**.** *Sia ϕ una proprietà sulle formule ben formate (d'ora in avanti:* fbf*). Se:*

- *$\phi(B)$ vale per tutte le fbf B tali che $\mathrm{lg}(B) = 0$;*
- *supponendo che $\phi(B)$ valga per tutte le fbf B tali che $lg(B) < lg(A)$, segue che vale anche $\phi(A)$;*

allora $\phi(A)$ vale per ogni $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Proposizione 1.7 (Principio di induzione sulla profondità delle formule)**.** *Sia ϕ una proprietà sulle fbf. Se:*

- *$\phi(B)$ vale per tutte le fbf B tali che $h(B) = 0$;*
- *supponendo che $\phi(B)$ valga per tutte le fbf B tali che $h(B) < h(A)$, segue che vale anche $\phi(A)$;*

allora $\phi(A)$ vale per ogni $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Si può mostrare facilmente che il principio di induzione sulla costruzione di A ed il principio di induzione sulla profondità di A sono equivalenti (vedi [vD], p.13).

Convenzione notazionale sulle parentesi Per semplificare la notazione economizziamo sulle parentesi sulla base delle seguenti regole:

1. non scriviamo le parentesi più esterne
2. non scriviamo le parentesi nel caso di $\neg$ e di $\Box$
3. $\wedge$ e $\vee$ legano più fortemente di $\to$
4. $\neg$ e $\Box$ legano più fortemente di ogni altro connettivo.

Esempio 6.

$$\begin{array}{lll} \neg p \vee p & \text{sta per} & ((\neg p) \vee p) \\ \neg(\neg\neg\neg p \wedge \bot) & \text{sta per} & (\neg((\neg(\neg(\neg p))) \wedge \bot)) \\ p \vee q \to p & \text{sta per} & ((p \vee q) \to p) \end{array}$$

Definizione 1.8 (sostituzione uniforme)**.** Sia p una lettera enunciativa e D una formula. Definiamo per ricorsione l'operazione $A[^D/_p]$ (*sostituzione uniforme di p in D*):

$p[^D/_p] = D$

$q[^D/_p] = q$, se $q \neq p$

$\bot[^D/_p] = \bot$

$(\neg A)[^D/_p] = \neg(A[^D/_p])$,

$(\Box A)[^D/_p] = \Box(A[^D/_p])$,

$(A \star B)[^D/_p] = A[^D/_p] \star B[^D/_p]$.

$A[^D/_p]$ denota quindi la formula ottenuta per sostituzione uniforme da A, ove ogni occorrenza di p è stata sostituita con D.

1.2 Livello semantico

Iniziamo con l'introdurre la cosiddetta *semantica relazionale* (a volte detta anche *semantica dei mondi possibili)*, introdotta da Kripke nel 1959 e che si è dimostrata subito un modello naturale per *attribuire un significato* ai linguaggi modali.

Definizione 1.9. (struttura relazionale) Chiamiamo *struttura relazionale* una coppia del tipo:

$$\langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a\}_{a\in\mathcal{A}} \rangle$$

ove la prima componente è un insieme non vuoto, chiamato *universo dei mondi* $\mathcal{W}$, mentre la seconda componente è un insieme di *relazioni di accessibilità* (o più semplicemente: insieme di relazioni) $\mathscr{R}_a$, ove $a \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ è un insieme di indici, al massimo numerabile.

Se $w \in \mathcal{W}$ diciamo che w è un mondo dell'universo $\mathcal{W}$ o che w è un punto dell'universo (o spazio) $\mathcal{W}$.

Per ragioni storiche, chiameremo *frame* una struttura che contenga una sola relazione R, e la indicheremo come:

$$\langle \mathcal{W}, \mathscr{R} \rangle.$$

1.2.1 I modelli

Data una struttura $\langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a\}_{a\in\mathcal{A}} \rangle$, un modello basato su essa è una tripla:

$$\langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a\}_{a\in\mathcal{A}}, \mathcal{I} \rangle$$

ove $\mathcal{I}$ è una funzione di *interpretazione* che associa ad ogni variabile enunciativa un sottoinsieme di $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{I} : \Phi \to \mathscr{P}(\mathcal{W})$$

dove $\mathscr{P}$ è l'operatore che, dato un insieme, ritorna l'insieme delle sue parti (ovvero: l'insieme dei suoi sottoinsiemi possibili).

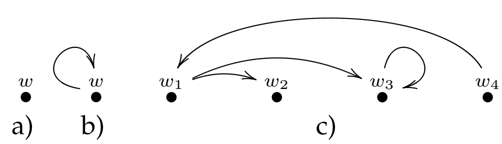


Figura 1.1: Tre semplici strutture relazionali d'esempio

Vediamo ora alcune strutture molto semplici. La prima è:

$$\mathcal{F} = \langle \{w\}, \emptyset \rangle,$$

graficamente rappresentata dalla Figura 1.1 (a). Il secondo caso è molto simile al primo, dove però la relazione $\mathscr{R}$ è *riflessiva*. Formalmente la struttura che abbiamo in mente è così descritta:

$$\mathcal{F} = \langle \{w\}, \{\langle w, w \rangle\} \rangle,$$

graficamente essa sarà rappresentata come in fig. 1.1 (b). Una terza struttura è quella rappresentata nella fig. 1.1 (c), ed è formalmente definita da:

$$\mathcal{F} = \langle \{w_1, w_2, w_3, w_4\}, \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_3, w_3 \rangle, \langle w_4, w_1 \rangle\} \rangle$$

1.2.2 Verità e validità

Esplicitiamo ora la semantica delle formule modali. Per indicare che un enunciato A è *vero* in un mondo w del modello $\mathcal{M}$, scriviamo

$$\mathcal{M} \vDash_w A.$$

Definizione 1.10. (verità in un mondo) La nozione di verità in un mondo è definita per induzione come segue:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \vDash_w p_i & sse & w \in I(p_i) \\
\mathcal{M} \nvDash_w \bot & sse & \\
\mathcal{M} \vDash_w \neg B & sse & \mathcal{M} \nvDash B \\
\mathcal{M} \vDash_w B_1 \wedge B_2 & sse & \mathcal{M} \vDash B_1 \text{ ed } \mathcal{M} \vDash_w B_2 \\
\mathcal{M} \vDash_w B_1 \vee B_2 & sse & \mathcal{M} \vDash B_1 \text{ oppure } \mathcal{M} \vDash_w B_2 \\
\mathcal{M} \vDash_w B_1 \Rightarrow B_2 & sse & \mathcal{M} \nvDash B_1 \text{ oppure } \mathcal{M} \vDash_w B_2 \\
\mathcal{M} \vDash_w \boxed{a} B & sse & \forall v \in \mathcal{W}.w \mathscr{R}_a\, v \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_v B]
\end{array}$$

Possiamo introdurre un ulteriore operatore modale, l'operatore di *possibilità*, da intendersi come segue:

$$\mathcal{M} \vDash_w \Diamond_a B \qquad sse \qquad \exists v \in W.wR_a v \text{ e } \mathcal{M} \vDash_v B]$$

Preferiamo però considerare, da qui in avanti, l'operatore di possibilità come derivabile da quello di necessità, e cioè:

$$\mathcal{M} \vDash_w \Diamond_a B \qquad sse \qquad \mathcal{M} \vDash_w \neg \boxed{a} \neg B$$

Definizione 1.11. (verità in un modello) Diciamo invece che *una formula A è vera in un modello $\mathcal{M}$* se e solo se essa è vera in ogni punto del modello stesso. Formalmente:

$$\mathcal{M} \vDash A \text{ sse } \forall w \in W[\mathcal{M} \vDash_w A].$$

Definizione 1.12. (validità) Infine, *una formula è valida su una struttura $\mathcal{F}$* se e solo se essa è vera in ciascun modello basato su di essa:

$$\mathcal{F} \vDash A \text{ sse } \forall \mathcal{M} \text{ basato su } \mathcal{F}\ [\mathcal{M} \vDash A].$$

Con l'espressione $\mathcal{F}$-modello indichiamo un modello basato su $\mathcal{F}$.

1.3 Formule sempre valide

Teorema 1.13. (formula di Kripke)

$$\mathcal{F} \vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Dimostrazione.
Esercizio. □

Teorema 1.14. (distributività di □ su ∧)

$$\mathcal{F} \vDash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$$

Dimostrazione.
Esercizio. □

Teorema 1.15. (distributività di $\Diamond$ su $\vee$)

$$\mathcal{F} \vDash \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$$

Dimostrazione.
Esercizio. □

1.4 Regole che conservano la validità

Facciamo vedere ora che le regole di Modus Ponens, Necessitazione e Sostituzione *conservano la validità* su una struttura. Cominciamo dalla prima.

Teorema 1.16. (MP conserva la validità) *In qualsiasi struttura relazionale $\mathcal{F}$, vale quanto segue:*

$$\frac{\mathcal{F} \vDash A \qquad \mathcal{F} \vDash A \to B}{\mathcal{F} \vDash B}\ (MP)$$

Dimostrazione.
È facile vedere, sulla base della definizione di verità delle formule implicative, che la regola del Modus Ponens *conserva la verità in un punto di un modello*:

$$\frac{\mathcal{M} \vDash_w A \qquad \mathcal{M} \vDash_w A \to B}{\mathcal{M} \vDash_w B}$$

Ne segue che per ogni $\mathcal{M}$

$$\frac{\mathcal{M} \vDash A \qquad \mathcal{M} \vDash A \to B}{\mathcal{M} \vDash B}$$

e per ogni $\mathcal{F}$

$$\frac{\mathcal{F} \vDash A \qquad \mathcal{F} \vDash A \to B}{\mathcal{F} \vDash B}$$

□

Teorema 1.17. (NEC conserva la validità) *In qualsiasi struttura relazionale $\mathcal{F}$ vale quanto segue:*

$$\frac{\mathcal{F} \vDash A}{\mathcal{F} \vDash \Box A}\ (NEC)$$

Dimostrazione.
È possibile dimostrare (*esercizio*) che NEC conserva la verità in un modello, ovvero per ogni $\mathcal{M}$ vale:

$$\frac{\mathcal{M} \vDash A}{\mathcal{M} \vDash \Box A}$$

Generalizzando, per ogni $\mathcal{F}$

$$\frac{\mathcal{F} \vDash A}{\mathcal{F} \vDash \Box A}$$

□

Osservazione 2. NEC non conserva la verità in un punto di un modello, infatti possiamo avere che $\mathcal{M} \vDash_w A$ e contemporaneamente $\mathcal{M} \nvDash_w \Box A$. Lasciamo come esercizio al lettore il trovare un modello che evidenzi questo.

Teorema 1.18. (la sostituzione uniforme conserva la validità) *In qualsiasi struttura relazionale $\mathcal{F}$ vale quanto segue:*

$$\frac{\mathcal{F} \models A}{\mathcal{F} \models A[{}^{B}/_{p}]},$$

Dimostrazione.
La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che si abbia

$$\mathcal{F} \models A \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \not\models A[{}^{B}/_{p}].$$

Questo equivale ad affermare le seguenti due cose:

$$\begin{array}{ll} \forall \mathcal{M}.\mathcal{M} \models A & (\dagger) \\ \exists \mathcal{M}.\exists w \in \mathcal{M}.\mathcal{M} \not\models_w A[{}^{B}/_{p}] & \end{array}$$

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathcal{W}$ così definito:

$$H_B = \{w \in \mathcal{W} : \mathcal{M} \models_w B\}.$$

Costruiamo ora il seguente $\mathcal{F}$-modello $\mathcal{M}^\star = \langle \mathcal{W}, \mathscr{R}, \mathcal{I}^\star \rangle$, ove:

$$\mathcal{I}^\star(q) = \begin{cases} \mathcal{I}(q) & \text{se } q \neq p \\ H_B & \text{se } q = p \end{cases}$$

È possibile dimostare (*esercizio*) che per ogni fbf D e per ogni w,

$$\mathcal{M} \models_w D[{}^{B}/_{p}] \quad \text{sse} \quad \mathcal{M}^\star \models_w D$$

Poiché per ipotesi $\mathcal{M} \not\models_w A[{}^{B}/_{p}]$, segue che $\mathcal{M}^\star \not\models_w A$. Questo è in contraddizione con quanto affermato in $(\dagger)$ perché $\mathcal{M}^\star$ è un modello di $\mathcal{F}$. □

Osservazione 3. La regola di sostituzione *non* conservi la verità in un modello (e quindi tanto meno in un mondo). Possiamo infatti avere che:

$$\mathcal{M} \models p \text{ e } \mathcal{M} \not\models p[p/q]$$

Anche in questo caso, lasciamo come esercizio al lettore il trovare un modello che evidenzi questo.

1.5 Esercizi

Esercizio 1.1. Completare le dimostrazioni dei seguenti Teoremi: 1.13, 1.14 e 1.15.

Esercizio 1.2. Completa la dimostrazione 1.4 e fornisci il contro-esempio come suggerito nell'osservazione 2.

Esercizio 1.3. Completa la dimostrazione 1.4 e fornisci il contro-esempio come suggerito nell'osservazione 3.

Capitolo 2

Corrispondenza

2.1 Corrispondenza e Validità

In questo capitolo ci chiediamo se una classe di strutture relazionali $\mathscr{H}$ opportunamente scelta *corrisponda* ad una formula modale, ovvero se per qualche fbf A, si abbia che

$$\mathbb{V}\mathcal{F}[\mathcal{F} \vDash A \text{ sse } \mathcal{F} \in \mathscr{H}]$$

La classe $\mathscr{H}$ può in molti casi lasciarsi descrivere da condizioni sulle relazioni di accessibilità, esempio

$$\mathscr{H} = \{\langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a\}_{a\in\mathcal{A}}\rangle : \mathscr{R}_a \text{ è riflessiva}\}$$

nel qual caso ci chiediamo se esiste qualche A per cui valga:

$$\mathbb{V}\mathcal{F}[\,\mathcal{F} \vDash A \text{ sse } \mathcal{F} \in \mathscr{H}\,]$$

Se ciò accade, potremo esprimere quanto sopra anche in questo modo:

$$\mathbb{V}\mathcal{F}[\mathcal{F} \vDash A \text{ sse } \mathcal{F} \rhd \forall x.x \mathscr{R} x]$$

Definizione 2.1. (corrispondenza) Generalizziamo quanto detto sopra per qualsiasi predicato $\mathcal{P}$ di nostro interesse. Se riusciamo a dimostrare che:

$$\mathbb{V}\mathcal{F}[\mathcal{F} \vDash A \text{ sse } \mathcal{F} \rhd \mathcal{P}\,]$$

diremo allora che A *corrisponde a* $\mathcal{P}$.

La proprietà $\mathcal{P}$ può essere una qualunque formula di un linguaggio del primo ordine con identità contenente simboli per le relazioni di accessibilità $\mathscr{R}_a$, $a \in \mathcal{A}$.

Definizione 2.2. (validità) Diciamo che A *è valida su* $\mathcal{P}$ se vale l'implicazione:

$$\mathbb{V}\mathcal{F}[\mathcal{F} \rhd \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{F} \vDash A]$$

2.2 Chiusura riflessiva e transitiva

Definizione 2.3. (elevamento a potenza di $\Box$) La definizione procede per induzione:

$$\boxed{a}^0 A = A$$
$$\boxed{a}^{n+1} A = \boxed{a}(\boxed{a}^n A)$$

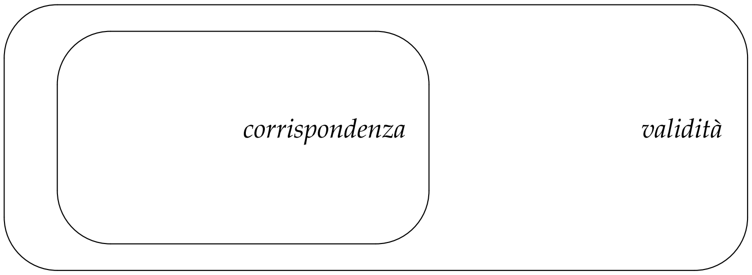


Figura 2.1: Corrispondenza e validità in breve

Definizione 2.4. (elevamento a potenza di $\Diamond$) Ancora induttivamente, definiamo:

$$\Diamond_a^0 A = A$$
$$\Diamond_a^{n+1} A = \Box_a(\Box_a^n A)$$

Definizione 2.5. (elevamento a potenza di $\mathscr{R}$) Sia data la relazione binaria $\mathscr{R}$. Definiamo:

$$\begin{array}{rcl} s\,\mathscr{R}^0\ t & \Leftrightarrow & s = t \\ s\,\mathscr{R}^{n+1}\ t & \Leftrightarrow & \exists z.s\,\mathscr{R}^n\ z \wedge z\,\mathscr{R}\ t \end{array}$$

Definizione 2.6. (chiusura riflessiva e transitiva di $\mathscr{R}$) Data una relazione binaria R, la relazione $R^\star$ resta così definita:

$$sR^\star t \Leftrightarrow \exists n.sR^n t$$

$R^\star$ è detta *chiusura riflessiva e transitiva* di R.

Lemma 2.7. *Sia $\mathscr{R}_1$ una relazione riflessiva e transitiva tale che $\mathscr{R}\subseteq\mathscr{R}_1$. Allora $\mathscr{R}^\star\subseteq\mathscr{R}_1$.*

Dimostrazione.
Dobbiamo mostrare che se $w\ \mathscr{R}^\star\ s$ allora $w\ \mathscr{R}_1\ s$. Sia $w\ \mathscr{R}^\star\ s$, allora per qualche n, $w\ \mathscr{R}^n\ s$. Per induzione su n, fai vedere che $w\ \mathscr{R}_1\ s$. (*esercizio*). □

Osservazione 4. Il lemma ci dice che $\mathscr{R}^\star$ è la più piccola relazione riflessiva e transitiva che estende $\mathscr{R}$.

Lemma 2.8.

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M} \vDash_w \Box_a^n B & \textit{sse} & \forall v \in W[\,wR_a^n v \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_v B] \\ \mathcal{M} \vDash_w \Diamond_a^n B & \textit{sse} & \forall v \in W[\,wR_a^n v \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_v B] \end{array}$$

Dimostrazione.
Esercizio. □

2.3 Teoremi di corrispondenza

Dimostreremo di seguito alcuni teoremi di corrispondenza fra proprietà strutturali note dall'algebra ed opportune formule modali. Per comodità, le definizioni circa le proprietà che andremo ad analizzare sono state riassunte in Appendice A.

Teorema 2.9. ***(riflessività)***

$$\mathcal{F} \vDash \Box_a B \to B \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \rhd \forall s.s\,\mathscr{R}_a\ s$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a} B & \text{(ipotesi)} \\ \forall t. s \mathscr{R}_a t : \mathcal{M} \vDash_t B & \\ \mathcal{M} \vDash_s B & \text{(poiché } s \mathscr{R}_a s) \\ \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a} B \to B & \\ \mathcal{F} \vDash \boxed{a} B \to B & \end{array}$$

$\Rightarrow$)

Procediamo per assurdo:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} \vDash \boxed{a} B \to B & \\ \exists s. \neg (s \mathscr{R}_a s) & (\dagger - \text{ipotesi assurda}) \end{array}$$

Consideriamo ora un $\mathcal{F}$-modello: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a \colon a \in \mathcal{A}\}, \mathcal{I}_s \rangle$, tale che:

$$\mathcal{I}_s(p) = \{t \in \mathcal{W} : s \mathscr{R}_a t\}.$$

Questo equivale a dire che:

$$\mathcal{M} \vDash_t p \text{ sse } s \mathscr{R}_a t \qquad (\star)$$

Allora

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a} p & \\ \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a} p \to p & \text{poiché } \mathcal{F} \vDash \boxed{a} B \to B \\ \mathcal{M} \vDash_s p & \text{per } MP \end{array}$$

Per ($\star$) dobbiamo concludere che $w \mathscr{R}_a w$, in contraddizione con ($\dagger$). Possiamo dunque concludere che $\forall w. w \mathscr{R}_a w$.

□

Teorema 2.10. (transitività)

$$\mathcal{F} \vDash \boxed{a} B \to \boxed{a}\boxed{a} B \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \rhd \forall s, t, u. s \mathscr{R}_a t \wedge t \mathscr{R}_a u \to s \mathscr{R}_a u$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)

$$\begin{array}{ll} \forall s, t, u. s \mathscr{R}_a t \wedge t \mathscr{R}_a u \to s \mathscr{R}_a u & \\ \mathcal{M}_s \vDash \boxed{a} B & \\ \mathcal{M} \vDash_t B & (\forall t. s \mathscr{R}_a t) \\ \mathcal{M} \vDash_u B & (\forall u. t \mathscr{R}_a u \Rightarrow s \mathscr{R}_a u) \\ \mathcal{M}_t \vDash \boxed{a} B & \\ \mathcal{M}_s \vDash \boxed{a}\boxed{a} B & \\ \mathcal{M}_s \vDash \boxed{a} B \to \boxed{a}\boxed{a} B & \\ \mathcal{F} \vDash \boxed{a} B \to \boxed{a}\boxed{a} B & \end{array}$$

$\Rightarrow$)

Procediamo per assurdo:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} \vDash \boxed{a} B \to \boxed{a}\boxed{a} B & \\ \exists s, t, u. s \mathscr{R}_a t \wedge t \mathscr{R}_a u \wedge \neg (s \mathscr{R} u) & (\dagger \text{ - ipotesi assurda}) \end{array}$$

Consideriamo ora un $\mathcal{F}$-modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a \colon a \in \mathcal{A}\}, \mathcal{I}_s \rangle$, tale che:

$$\mathcal{I}_s(p) = \{t \in \mathcal{W} : s \mathscr{R}_a t\}.$$

Questo equivale a dire che:

$$\mathcal{M} \vDash_t p \Leftrightarrow s \mathscr{R}_a t \qquad (\star)$$

Allora

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a}p & \\ \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a}p \to \boxed{a}\boxed{a}p & \text{poiché } \mathcal{F} \vDash \boxed{a}B \to \boxed{a}\boxed{a}B \\ \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a}\boxed{a}p & \text{per MP} \\ \mathcal{M} \vDash_t \boxed{a}p & (s \mathscr{R}_a t) \\ \mathcal{M} \vDash_u p & (t \mathscr{R}_a u) \end{array}$$

Per $(\star)$ segue che $s \mathscr{R}_a u$, in contraddizione con $(\dagger)$. Possiamo dunque concludere che $\mathcal{F}$ è transitiva.

□

Teorema 2.11. (serialità)

$$\mathcal{F} \vDash \boxed{a}B \to \langle a \rangle B \quad sse \quad \mathcal{F} \rhd \forall s \exists t. s \mathscr{R}_a t$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)

Esercizio.

$\Rightarrow$)

Procediamo per assurdo:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} \vDash \boxed{a}B \to \langle a \rangle B & \\ \exists s \forall t. \neg(s \mathscr{R}_a t) & (\dagger \text{ - ipotesi assurda}) \end{array}$$

Allora:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a}p \\ \mathcal{M} \vDash_s \boxed{a}p \to \langle a \rangle p \\ \mathcal{M} \vDash_s \langle a \rangle p \\ \exists t \in \mathcal{W}. s \mathscr{R} t \text{ e } \mathcal{M} \vDash_t A \end{array}$$

contrariamente a quanto affermato da $(\dagger)$. Possiamo dunque concludere che la struttura è seriale.

□

Teorema 2.12. (simmetria)

$$\mathcal{F} \vDash B \to \boxed{a}\langle a \rangle B \quad sse \quad \mathcal{F} \rhd \forall s, t. s \mathscr{R}_a t \Rightarrow t \mathscr{R}_a s$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)

Esercizio.

$\Rightarrow$)

Procediamo anche in questo caso per assurdo:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} \vDash B \to \boxed{a}\langle a \rangle B & \\ \exists s, t. s \mathscr{R}_a t \wedge t \mathscr{R}_a s & (\dagger \text{ - ipotesi assurda}) \end{array}$$

Consideriamo ora un $\mathcal{F}$-modello: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a : a \in \mathcal{A}\}, \mathcal{I}_s \rangle$, tale che:

$$\mathcal{I}_s(p) = \{t \in \mathcal{W} : s = t\}.$$

Questo equivale a dire che:

$$\mathcal{M} \vDash_t p \Leftrightarrow s = t \qquad (\star)$$

Allora:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M} \vDash_s p & \\ \mathcal{M} \vDash_s p \rightarrow \Box_a \Diamond_a p & \\ \mathcal{M} \vDash_s \Box_a \Diamond_a p & \text{per MP} \\ \forall t : s \mathscr{R}_a t . \mathcal{M} \vDash_t \Diamond_a p & \\ \exists u . t \mathscr{R}_a u \text{ e } \mathcal{M} \vDash_u p & \\ u = s & (\text{per } \star) \\ \forall t . s \mathscr{R}_a t \Rightarrow t \mathscr{R}_a s & \end{array}$$

Ma quest'ultima affermazione è in contraddizione con (†), per cui possiamo concludere che $\mathcal{F}$ è simmetrica.

□

Teorema 2.13. (euclidea)

$$\mathcal{F} \vDash \Diamond_a B \rightarrow \Box_a \Diamond_a B \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \rhd \forall s, t, u . s \mathscr{R}_a t \wedge s \mathscr{R}_a u \Rightarrow t \mathscr{R}_a u$$

Dimostrazione.

⇐)

Esercizio.

⇒)

Procediamo per assurdo:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} \vDash \Diamond_a B \rightarrow \Box_a \Diamond_a B & \\ \exists s, t, u . s \mathscr{R}_a t \wedge s \mathscr{R}_a u \wedge \neg (t \mathscr{R}_a u) & (\dagger \text{ - ipotesi assurda}) \end{array}$$

Costruiamo il "solito" (contro)modello su $\mathcal{F}$ ponendo:

$$\mathcal{I}_u = \{v : v = u\}$$

che equivale a dire:

$$\mathcal{M} \vDash_v p \Leftrightarrow v = u \qquad (\star)$$

Allora:

$$\begin{array}{ll} s \mathscr{R}_a u \wedge s \mathscr{R}_a t & \\ \mathcal{M} \vDash_s \Diamond_a p & \\ \mathcal{M} \vDash_s \Diamond_a p \rightarrow \Box_a \Diamond_a p & \\ \mathcal{M} \vDash_s \Box_a \Diamond_a p & \\ \mathcal{M} \vDash_t \Diamond_a p & \\ \exists v \in \mathcal{W} : t \mathscr{R}_a v \text{ e } \mathcal{M} \vDash_v p & \\ v = u & (\text{per } \star) \\ t \mathscr{R}_a u & \end{array}$$

Ma quest'ultima conclusione contraddice quanto affermato in (†). Possiamo dunque concludere che $\mathcal{F}$ è euclidea.

□

Teorema 2.14. (convergenza debole)

$$\begin{array}{l} \mathcal{F} \vDash \Diamond_a \Box_a B \rightarrow \Box_a \Diamond_a B \quad \textit{sse} \\ \qquad \mathcal{F} \rhd \forall s, t, u . s \mathscr{R}_a t \wedge s \mathscr{R} u \Rightarrow \exists v . t \mathscr{R}_a v \wedge u \mathscr{R}_a v \end{array}$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)
Esercizio.

$\Rightarrow$)
Procediamo per assurdo:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} \vDash \langle a\rangle[a]B \rightarrow [a]\langle a\rangle B & \\ \exists s,t,u.s \mathscr{R}_a\ t \wedge s \mathscr{R}_a\ u \wedge \forall v.\neg(t \mathscr{R}_a\ v \wedge u \mathscr{R}_a\ v) & (\dagger \text{ - ipotesi assurda}) \end{array}$$

Costruiamo il seguente (contro)modello su $\mathcal{F}$ in cui:

$$\mathcal{I}_v(p) = \{s : v \mathscr{R}_a\ s\}.$$

Questo equivale a dire che

$$\mathcal{M} \vDash_s p \Leftrightarrow v \mathscr{R}_a\ s \qquad (\star)$$

Allora:

$$\begin{array}{ll} s \mathscr{R}_a\ t \wedge s \mathscr{R}_a\ u & \\ \mathcal{M} \vDash_t [a]p & \\ \mathcal{M} \vDash_s \langle a\rangle[a]p & \\ \mathcal{M} \vDash_s \langle a\rangle[a]p \rightarrow [a]\langle a\rangle p & \\ \mathcal{M} \vDash_s [a]\langle a\rangle p & \\ \mathcal{M} \vDash_u \langle a\rangle p & \\ \exists v_1.u \mathscr{R}_a\ v_1 \wedge \mathcal{M} \vDash_{v_1} p & \\ \mathcal{M} \vDash_t \langle a\rangle p & \\ \exists v_2.t \mathscr{R}_a\ v_2 \wedge \mathcal{M} \vDash_{v_2} p & \\ v_1 = v_2 = v & (\text{per } \star) \\ u \mathscr{R}_a\ v \wedge t \mathscr{R}_a\ v & \end{array}$$

Quest'ultima affermazione, ancora una volta, contraddice ($\dagger$). Possiamo perciò concludere che $\mathcal{F}$ è debolmente convergente. □

Teorema 2.15. (connessione debole)

$$\mathcal{F} \vDash [a]([a]B \wedge B \rightarrow C) \vee [a]([a]C \wedge C \rightarrow B) \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \rhd \textit{connessione debole}$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)
Esercizio.

$\Rightarrow$)
Supponiamo che $\mathcal{F}$ non sia debolmente lineare. Allora

$$\exists w,v,z[w \mathscr{R}\ v \wedge w \mathscr{R}\ z \wedge \neg v \mathscr{R}\ z \wedge \neg z \mathscr{R}\ v \wedge z \neq v]$$

Costruiamo l'$\mathcal{F}$-modello $\mathcal{M}$ per cui

$$\begin{array}{l} \mathcal{I}(p) = \{t \in \mathcal{W} : v \mathscr{R}\ t \vee v = t\} \\ \mathcal{I}(q) = \{t \in \mathcal{W} : z \mathscr{R}\ t \vee z = t\} \end{array}$$

Allora per casi:

- Se $\mathcal{M} \vDash_w \Box(\Box p \wedge p \to q)$ allora
$$\mathcal{M} \vDash_v \Box p \wedge p \to q.$$
Valgono inoltre
$$\begin{array}{ll} \mathcal{M} \vDash_v p & (\text{perché } v \in \mathcal{I}(p)) \\ \mathcal{M} \vDash_v \Box p & (\text{perché } t \in \mathcal{I}(p) \text{ per ogni mondo } t \text{ relato a } v) \end{array}$$
Ma allora per MP ricaviamo
$$\mathcal{M} \vDash_v q$$
pertanto $z \mathscr{R} v \vee z = v$, contro le ipotesi.
- Se $\mathcal{M} \vDash \Box(\Box q \wedge q \to p)$, si procede simmetricamente al caso precedente, scambiando p e q.

□

Teorema 2.16. (funzionalità parziale)

$$\mathcal{F} \vDash \langle a \rangle B \to [a] B \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \rhd \forall s, t. s \mathscr{R}_a t \Rightarrow \exists! u. s \mathscr{R}_a u$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)
Esercizio.

$\Rightarrow$)
Supponiamo per assurdo che $\mathcal{F}$ non sia parzialmente funzionale. Allora

$$\exists w, v, u[w \mathscr{R} v \wedge w \mathscr{R} u \wedge v \neq u]$$

Poiché $\mathcal{F} \vDash \langle a \rangle B \to [a] B$, per ogni $\mathcal{F}$-modello $\mathcal{M}$ vale $\mathcal{M} \vDash_w \langle a \rangle B \to [a] B$.
Sia $\mathcal{I}(p) = \{v\}$. Allora

$$\begin{array}{lll} & \mathcal{M} \vDash_v p & \\ \Rightarrow & \mathcal{M} \vDash_w \langle a \rangle p & \\ \Rightarrow & \mathcal{M} \vDash_w [a] p & (\text{per } MP) \\ \Rightarrow & \mathcal{M} \vDash_u p & \end{array}$$

Ma allora $u \in \mathcal{I}(p)$, contro le ipotesi.

□

Teorema 2.17. (funzionalità)

$$\mathcal{F} \vDash \langle a \rangle B \leftrightarrow [a] B \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \rhd \forall s \exists! t. s \mathscr{R}_a t$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)
Esercizio.

$\Rightarrow$)
Supponiamo per assurdo che $\mathcal{F}$non sia funzionale. Allora per qualche w:

$$\neg \exists v (w \mathscr{R}_a v) \vee \exists u, v (u \neq v \wedge w \mathscr{R}_a u \wedge w \mathscr{R}_a v)$$

Per casi:

1. se $\neg\exists v(w \mathscr{R}_a\ v)$ allora per ogni $\mathcal{F}$-modello $\mathcal{M}$vale $\mathcal{M} \vDash_w [a]B$. Dalla formula data ricaviamo quindi $\mathcal{M} \vDash_w \langle a\rangle B$. Ma allora
$$\exists v(w \mathscr{R}_a\ v \wedge \mathcal{M} \vDash_v B)$$
il che contraddice l'ipotesi;
2. se $\exists u, v(u \neq v \wedge w \mathscr{R}_a\ u \wedge w \mathscr{R}_a\ v)$ si procede come nel caso della funzionalità parziale.

$\square$

Teorema 2.18. (proprietà di Sahlqvist)

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \vDash \langle a\rangle^m [a]^n B \rightarrow [a]^k \langle a\rangle^j B \quad \textit{sse} \\ &\quad \mathcal{F} \rhd s \mathscr{R}^m\ t \wedge s \mathscr{R}^k\ u \rightarrow \exists v. t \mathscr{R}^n\ v \wedge u \mathscr{R}^j\ v \end{aligned}$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)
Esercizio.

$\Rightarrow$)
Procediamo per assurdo:

$$\begin{aligned} &s \mathscr{R}_a^m\ t \wedge s \mathscr{R}_a^k\ u \\ &\forall v. \neg(t \mathscr{R}_a^n\ v \wedge u \mathscr{R}_a^j\ v) \quad (\dagger \text{ - ipotesi assurda}) \end{aligned}$$

Costruiamo il seguente $\mathcal{F}$-(contro)modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a\}_{a \in \mathcal{A}}, \mathcal{I}_t \rangle$, ponendo:

$$\mathcal{I}_t(p) = \{v : t \mathscr{R}_a^n\ v\}$$

Questo equivale a dire che:
$$\mathcal{M} \vDash_v p \Leftrightarrow t \mathscr{R}_a^n\ v \qquad (\star)$$

Allora
$$\begin{aligned} &\mathcal{M} \vDash_t [a]^n p \\ &\mathcal{M} \vDash_s \langle a\rangle^m [a]^n p \\ &\mathcal{M} \vDash_s \langle a\rangle^m [a]^n p \rightarrow [a]^k \langle a\rangle^j p \\ &\mathcal{M} \vDash_s [a]^k \langle a\rangle^j p \\ &\mathcal{M} \vDash_u \langle a\rangle^j p \\ &\exists v : u \mathscr{R}_a^j\ v \wedge \mathcal{M} \vDash_v p \\ &\exists v : u \mathscr{R}_a^j\ v \wedge t \mathscr{R}_a^n\ v \qquad (\text{per } \star) \end{aligned}$$

Ma questo contraddice quanto affermato in ($\dagger$), per cui possiamo concludere che $\mathcal{F}$ soddisfa la proprietà di Sahlqvist.

$\square$

Esercizio Si faccia vedere che tutte pe proprietà considerate in questo capitolo sono casi particolari della proprietà di Sahlqvist.

Teorema 2.19. (ordine dualmente ben fondato)

$$\mathcal{F} \vDash \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow \Box B \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \rhd \textit{dualmente ben fondato}$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$)
Esercizio.

Figura 2.2: Il sottomodello di riferimento

$\Rightarrow$)

Procediamo come al solito per assurdo.

$\mathcal{F} \vDash \Box(\Box B \to B) \to \Box B$
$\mathcal{F}$ non è dualmente ben fondata († - ipotesi assurda)

Se R_a non è dualmente ben fondata esiste una successione infinita crescente. Sia X l'insieme di tali elementi e sia $w \in X$ tale che wRv per ogni $v \in X, v \neq w$. Consideriamo il seguente modello in cui

$$\mathcal{I}_X(p) = \{v : v \notin X\}.$$

Equivale a dire:

$$v \notin X \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash_v p.$$

Si veda la Figura 2.2.

Poiché $\mathcal{M} \nvDash_w \Box p$ per definizione di I, segue che:

$$\mathcal{M} \nvDash_w \Box(\Box p \to p)$$
$$\mathcal{M} \vDash_w \Diamond(\Box p \wedge \neg p)$$
$$\exists x.w \mathscr{R}_a\, x \wedge \mathcal{M} \vDash_x \Box p \wedge \mathcal{M} \vDash_x \neg p$$

Per definizione di X (e per il fatto che $\mathcal{M} \vDash_x \neg p$), possiamo affermare che $x \in X$. Ma allora per tutti gli elementi $y \in X$ tali che xRy $\mathcal{M} \vDash_y \neg p$, in contraddizione col fatto che $\mathcal{M} \vDash_x \Box p$.

Adesso mostriamo invece che:

$$\mathcal{F} \vDash \Box(\Box p \to p) \to \Box p \implies \mathcal{F} \text{ è transitiva.}$$

Per farlo, definiamo un'interpretazione I *ad hoc*, come segue. Chiamiamo x un generico mondo in cui valga l'enunciato p, e prendiamo poi un secondo punto, che chiameremo a (**definito come?**). Sapendo che $R^\star$ denota la *chiusura riflessiva e transitiva di* R, relazioniamo i punti ad a come segue:

$$\mathcal{I}_a(p) = \{x : \forall y.x \mathscr{R}^\star\, y \to a \mathscr{R}\, y\}$$

Ovvero, per ogni x in cui valga l'enunciato p, stabiliamo che tutti i punti ad esso relati (direttamente o indirettamente) sono relati anche al punto a. Notiamo che l'interpretazione permette ad a di essere relato anche ad altri mondi.

Si dimostra quindi che $\vDash_a \Box(\Box p \to p)$ da cui $\vDash_a \Box p$ quindi $\vDash_b p$ per un generico b tale che aRb. Da questo deriviamo che b è uno degli x usati nella definizione del diagramma (perché in esso vale p). Ne consegue che bRc (**chi è c?**) quindi, per cui $\vDash_c p$ (**da cosa?**). Da ciò deriviamo che c è uno degli y relati ad x per cui (per costruzione) aRc.

$\Box$

2.4 Esercizi

Esercizio 2.1. Dimostrare le seguenti uguaglianze (suggerimento: procedere per induzione su n):

$$\boxed{a}^1 A = \boxed{a} A$$
$$\diamondsuit^1 A = \diamondsuit A$$
$$\boxed{a}^n(\boxed{a}^m A) = \boxed{a}^{n+m} A$$
$$\diamondsuit^n(\diamondsuit^m A) = \diamondsuit^{n+m} A$$

Esercizio 2.2. Dimostrare che:

$$\begin{aligned} s\,\mathscr{R}^1\,t &\quad\Leftrightarrow\quad s\,\mathscr{R}\,t \\ s\,\mathscr{R}^n\,t \wedge t\,\mathscr{R}^m\,y &\quad\Rightarrow\quad s\,\mathscr{R}^{n+m} \end{aligned}$$

Esercizio 2.3. Mostra che $\mathscr{R}^\star$ è riflessiva e transitiva. (Suggerimento: sfrutta l' esercizio 2.2)

Esercizio 2.4. Completa la dimostrazione del seguenti Lemmi : 2.7 e 2.8.

Esercizio 2.5. Completa le dimostrazioni dei teoremi di caratterizzazione: da Teorema 2.9 a Teorema 2.19

Capitolo 3

Manipolazione di modelli

Presentiamo sotto due tecniche per trasformare modelli o per metterli in relazione con altri che potremmo dire "simili". Queste due tecniche prendono il nome di *generazione di sottomodelli* e *p-morfismi* fra modelli.

3.1 Sottomodelli generati

Un sottomodello è una "restrizione" di un modello, creata ad-hoc per valutare la verità di una formula in un singolo punto t. Per fare questo, dunque, possiamo concentrare l'attenzione sui soli punti collegati al punto t cui siamo interessati attraverso una o più "salti" delle relazioni $\mathscr{R}_a$.

Definizione 3.1. (A-chiusura) Sia A un *insieme di indici di relazioni*, diciamo che un sottinsieme $X \subseteq \mathcal{W}$ è *A-chiuso* se soddisfa la seguente condizione:

$$u \in X \Rightarrow (\exists a \in A, v \in \mathcal{W}. u \mathrel{\mathscr{R}_a} v \Rightarrow v \in X)$$

Proposizione 3.2. *Sottolineiamo che l'intersezione di due insiemi A-chiusi è a sua volta un insieme A-chiuso.*

Definizione 3.3. (sottomodello generato) Dato un generico modello:

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \{\mathscr{R}_a\}_{a \in \mathcal{A}}, \mathcal{I} \rangle,$$

chiamiamo suo *sottomodello generato da t* il seguente modello:

$$\mathcal{M}^t = \langle \mathcal{W}^t, \{\mathscr{R}^t_a\}_{a \in A}, \mathcal{I}^t \rangle,$$

dove:

- $\mathcal{W}^t$ è il *più piccolo* sottoinsieme A-chiuso di $\mathcal{W}$ che contenga t;
- $\mathscr{R}^t_a = \mathscr{R}_a \cap (\mathcal{W}^t \times \mathcal{W}^t)$
- $\mathcal{I}^t(p) = \mathcal{I}(p) \cap \mathcal{W}^t$

Lemma 3.4. (del sottomodello generato) *Dati $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ e $s \in \mathcal{W}^t$, allora:*

$$\mathcal{M}^t \vDash_s A \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash_s A$$

Dimostrazione.
Esercizio. (Suggerimento: si proceda per induzione sulla struttura di A). □

Attraverso l'utilizzo di opportuni sottomodelli generati è possibile mostrare che le proprietà di *convergenza* e *linearità* non corrispondono ad alcuna formula modale.

3.2 P-morfismi

In questa sezione limitiamo la nostra discussione a strutture relazionali contenenti una sola relazione di accessibilità. Date due tali strutture relazionali, vogliamo definire una procedura per metterle a confronto sí da poter stabilire se e come viene conservata la validità delle formule in tali strutture.

Definizione 3.5. Date due strutture relazionali $\mathcal{F}_1 = \langle W_1, R \rangle$ e $\mathcal{F}_2 = \langle W_2, S \rangle$, chiamiamo *p-morfismo*[1] una funzione f che goda delle seguenti proprietà:

1. $f : W_1 \to W_2$
2. $\forall w, z \in W_1 [wRz \implies f(w)Sf(z)]$. Questa proprietà è descritta graficamente dalla Figura 3.1.

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "f"] & f(z) \\
w \arrow[u, "R"] \arrow[r, "f"] & f(w) \arrow[u, dotted, "S"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.1: La simmetria della condizione 2.

3. (back condition)
   $\forall w \in W_1, \forall y \in W_2 [f(w)Sy \implies \exists v \in W_1.[wRv \wedge f(v) = y]]$. Questa proprietà è descritta graficamente dalla Figura 3.2.

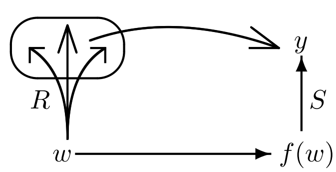


Figura 3.2: Back-condition

La condizione 3. dice che y è immagine sotto la funzione f di *almeno* un mondo relato a w. Ovviamente possono esserci altri mondi relati allo stesso w che *non vengono mappati* sull'elemento y del codominio, come possono esserci mondi di $\mathcal{W}_1$ non relati a w che vengono mappati su y.

Definizione 3.6. Un p-morfismo f è un *p-morfismo fra modelli* se vale anche la seguente condizione: dati i due modelli $\mathcal{M} =< W_1, R, I_1 >$ e $\mathcal{M}_2 =< \mathcal{W}_2, S, \mathcal{I}_2 >$,

[1] anziché p-morfismo, alcuni chiamano questa particolare funzione *morfismo limitato* (dall'inglese: bounded morphism)

4. $\forall w \in W[w \in I_1(p) \Leftrightarrow f(w) \in I_2(p)]$

Lemma 3.7. *Dati* $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathscr{R}_1, \mathcal{I}_1 \rangle$ *e* $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathscr{R}_2, \mathcal{I}_2 \rangle$ *ed un p-morfismo* $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$*, allora per ogni* $w \in \mathcal{W}_1$*, vale che:*

$$\mathcal{M}_1 \vDash_w A \quad \textit{sse} \quad \mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} A$$

Dimostrazione.
Procediamo per *induzione sulla costruzione della formula* A.

- $A = p$: è il caso banale perché deriva direttamente dalla condizione 4 del p-morfismo;
- . . . **(completare la dimostrazione, v. pag 11 libro Goldblatt)**

□

Osservazione 5. Quando il lemma vale *i due modelli conservano la verità punto per punto* e quindi li possiamo considerare a tutti gli effetti *indistinguibili*.

Osservazione 6. La condizione 4. è molto forte ed in genere l'esistenza di un p-morfismo fra due strutture *non* implica che possa essere esteso ad un p-morfismo fra modelli basati sulle strutture stesse.

Richiamiamo alla mente la definizione di funzione suriettiva, dall'algebra.

Definizione 3.8. (funzione suriettiva) Data una funzione $f : A \to B$, diciamo che essa è *suriettiva* se vale quanto segue:

$$\forall y \in B. \exists x \in A. f(x) = y$$

Definizione 3.9. (p-morfismo suriettivo) Dati i due modelli $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathscr{R}_1, \mathcal{I}_1 \rangle$ e $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathscr{R}_2, \mathcal{I}_2 \rangle$ ed un p-morfismo $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ fra loro, diciamo che f è suriettivo se la funzione $f : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$ su cui esso si basa è a sua volta suriettiva.

Definizione 3.10. (immagine p-morfa) Se $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ è un p-morfismo suriettivo tra due strutture, allora diremo che $\mathcal{F}_2$ *è un'immagine p-morfa di* $\mathcal{F}_1$.

Lemma 3.11. (lemma del p-morfismo suriettivo su modelli) *Dati due modelli ed un p-morfismo* $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *fra loro, se* f *è suriettivo vale che:*

$$\mathcal{M}_1 \vDash A \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \vDash A$$

Dimostrazione.
Esercizio. □

Lemma 3.12. (lemma del p-morfismo suriettivo su strutture) *Dati due modelli ed un p-morfismo* $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ *fra loro, se* f *è suriettivo vale che:*

$$\mathcal{F}_1 \vDash A \Rightarrow \mathcal{F}_2 \vDash A$$

Dimostrazione.
La dimostrazione procede per contrapposizione, ovvero mostriamo che:

$$\mathcal{F}_2 \nvDash A \Rightarrow \mathcal{F}_1 \nvDash A.$$

Vale che:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{F}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathscr{R}_2 \rangle & \\
\mathcal{F}_2 \nvDash A & \\
\exists t \in \mathcal{W}_2, \mathcal{M}_2 . \mathcal{M}_2 \nvDash_t A & (\mathcal{M}_2 \text{ è un } \mathcal{F}_2\text{-modello}) \\
\exists s \in \mathcal{W}_1 . t = f(s) & (f \text{ è suriettivo}) \\
\mathcal{M}_2 \nvDash_{f(s)} A & \\
\mathcal{M}_1 \nvDash_s A & (\text{per il lemma } 3.7)
\end{array}$$

□

Osservazione 7. Notiamo che passando dal livello dei modelli a quello delle strutture, passiamo da una equivalenza della verità ad una implicazione della validità. Quindi la struttura p-morfa ad $\mathcal{F}$ *conserva* tutto ciò che era valido su $\mathcal{F}$ (e, in genere rende valide altre formule).

3.3 Proprietà non esprimibili

Vedremo in questa sezione alcune proprietà che non sono esprimibili (ovvero che non sono caratterizzabili) per mezzo di formule modali. Per farlo utilizzeremo gli strumenti appena introdotti: i sottomodelli generati ed i p-morfismi.

Teorema 3.13. (la direzione non è esprimibile) *La seguente congettura è falsa: per qualche* $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$*,*

$$\mathcal{F} \models A \Rightarrow \mathcal{F} \rhd \textit{diretta}$$

Dimostrazione.
Chiamiamo RD la classe delle relazioni *dirette* e RDD la classe delle relazioni *debolmente dirette*. È ovvio che RD $\subseteq$ RDD. Inoltre, è possibile □

Teorema 3.14. (la connessione non è esprimibile) *a*

Dimostrazione.
d □

Teorema 3.15. (l'irriflessività non è esprimibile) *La seguente congettura è falsa:*

$$\textit{per qualche fbf } A,\ \mathcal{F} \models A \ \textit{ sse } \mathcal{F} \textit{ è irriflessiva}.$$

Dimostrazione.
R è irriflessiva $=_{df}$: $\forall x.\neg(xRx)$
Si consideri la struttura $\mathcal{F}_2 = \langle \{0\}, \{\langle 0, 0\rangle\}\rangle$ che è immagine p-morfa di $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ secondo la funzione $f(n) = 0$, per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$.

Verifichiamo che le tre proprietà dei p-morfismi siano soddisfatte:

- $f : \mathbb{N} \to \{0\}$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \Rightarrow f(n) \mathscr{R} f(m) \Leftrightarrow 0 \mathscr{R} 0$
- la *back-condition* vale, poiché banalmente

$$\frac{f(n)Ry}{\exists m.(n < m \wedge f(m) = y)}$$

La situazione è sintetizzata graficamente nella Figura 3.3.

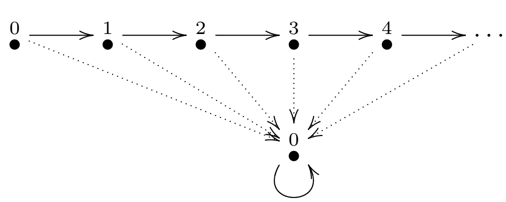


Figura 3.3: Un p-morfismo da $\mathbb{N}$ a $\{0\}$

Supponiamo che per qualche fbf A, $\mathcal{F} \models A$ sse $\mathcal{F}$ è irriflessiva. Ma $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ è irriflessiva, dunque $\langle \mathbb{N}, <\rangle \models A$, allora $\mathcal{F}_2 \models A$ (per l'esistenza del p-morfismo), per cui $\mathcal{F}_2$ sarebbe irriflessiva, in contraddizione con la definizione data di $\mathcal{F}_2$. Da qui l'assurdo. □

Mostriamo ora che anche la proprietà di antisimmetria *non è* esprimibile attraverso una formula modale.

Teorema 3.16. (l'antisimmetria non è esprimibile) *La seguente congettura è falsa: per qualche $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$:*

$$\mathcal{F} \vDash A \quad \textit{sse} \quad \mathcal{F} \textit{ è antisimmetrica.}$$

Dimostrazione.
Si consideri la struttura:

$$\mathcal{F}_2 = \langle \{a, b\}, \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\}\rangle,$$

che è immagine p-morfa della struttura $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ (la quale è antisimmetrica) attraverso la funzione seguente:

$$f(n) = \begin{cases} a, & \text{se } n \text{ è pari} \\ b, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Anche in questo caso si può verificare semplicemente (*esercizio*) come f soddisfi i tre criteri che definiscono un p-morfismo. Graficamente la situazione è descritta dalla Figura 3.4.
Supponiamo che per qualche fbf A, $\mathcal{F} \vDash A$ sse $\mathcal{F}$ è antisimmetrica. Ma $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ è antisimmetrica, dunque $\langle \mathbb{N}, <\rangle \vDash A$, allora $\mathcal{F}_2 \vDash A$ (per l'esistenza del p-morfismo), da cui deriviamo che $\mathcal{F}_2$ è antisimmetrica. Questo però contraddice la definizione data di $\mathcal{F}_2$ e genera l'assurdo che dimostra il teorema. □

Osservazione 8. Notiamo che nella Figura 3.4 non sono disegnate le frecce $n \to m$ dove n ed m differiscono di 2 o più. Tali frecce sono comunque da intendersi come presenti, e non rappresentate solo per non "sporcare" il diagramma.

Osservazione 9. Sempre nella Figura 3.4, notiamo che la freccia riflessiva $a \to a$ (risp. $b \to b$) in $\mathcal{F}_2$ è ancora necessaria, perché corrisponde alla freccia $n < m$ in $\mathcal{F}_1$ dove n ed m sono entrambi pari (risp. dispari).

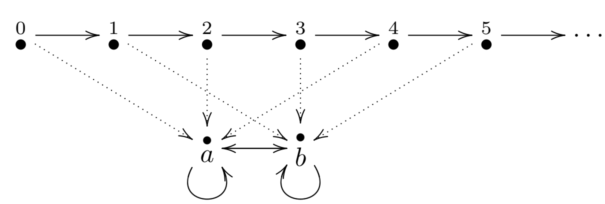


Figura 3.4: Un p-morfismo da $\mathbb{N}$ a $\{a, b\}$

Capitolo 4

Teoria della dimostrazione

4.1 Logiche modali normali

Definizione 4.1. 7.1 Si definisce *logica modale normale* in un linguaggio $\mathcal{L}_A^\Phi$ qualunque insieme L di formule tale che

- L contiene tutte le tautologie,
- L è chiuso rispetto al *modus ponens* (MP),
- L contiene le formule $K_a : \boxed{a}(A \to B) \to (\boxed{a}A \to \boxed{a}B)$ con $a \in \mathcal{A}$,
- L è chiuso rispetto alla regola di necessitazione $NEC : B \vdash \boxed{a}B$ con $a \in \mathcal{A}$.

La definizione di logica modale normale data sopra suggerisce immediatamente di formalizzare le dimostrazioni in sistemi deduttivi alla Hilbert. Si tratta quindi di adattare l'assiomatizzazione della logica proposizionale al caso delle logiche modali normali: sarà sufficiente aggiungere agli assiomi classici l'assioma K. Inoltre assumeremo come regola d'inferenza primitiva non soltanto il MP, ma anche la necessitazione NEC. In questo modo otteniamo l'assiomatizzazione della logica $\mathsf{K}_\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ll}
(1.1) & A \to (B \to A) \\
(1.2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(2.1) & A \wedge B \to A \\
(2.2) & A \wedge B \to B \\
(2.3) & (A \to B) \to (A \to C) \to (A \to B \wedge C) \\
(3.1) & A \to A \vee B \\
(3.2) & B \to A \vee B \\
(3.3) & (A \to B) \to (C \to B) \to (A \vee C \to B) \\
(4.1) & (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) \\
(4.2) & A \to (\neg A \to B) \\
(4.3) & \neg\neg A \to A \\
(5.1) & \bot \to (A \wedge \neg A) \\
(K_a) & \boxed{a}(A \to B) \to (\boxed{a}A \to \boxed{a}B) \text{ con } a \in \mathcal{A}
\end{array}$$

Definizione 4.2. **(L-deduzione)** Sia Γ un insieme di enunciati. Si scrive

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} B$$

e diciamo che *da* Γ *si deduce* B *in* L se e solo se B:

- appartiene a Γ; oppure
- è (una istanza di) un assioma di L; oppure

- è stata ottenuta partendo da due formule deducibili da Γ in L e applicando MP; oppure
- è stata ottenuta partendo da una formula deducibile da Γ in L e applicando NEC.

Definizione 4.3. (teorema) B è un *teorema* di L se e solo se $\vdash_{\mathsf{L}} B$, cioè se B si deduce dall'insieme vuoto in L.

Si mostra facilmente che l'insieme dei teoremi di $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$ è una logica modale normale: in particolare, si tratta della *più piccola* logica normale.

Osservazione 10. Nel seguito, con L si indicherà una qualunque logica nel linguaggio $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ che estenda $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$ (vale a dire: qualunque logica normale).

4.2 Insiemi massimali e consistenti

Definizione 4.4. (L-consistenza) Sia L una logica. Γ è un *insieme di formule* L*-inconsistente* se e solo se esistono enunciati $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$ tali che

$$\vdash_{\mathsf{L}} B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot$$

Γ è L-*consistente* se e solo se non è L-inconsistente.

Definizione 4.5. (insieme massimale) Un insieme Γ di formule di $Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ si dice *massimale* se e solo se per ogni enunciato B in $Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ si ha $B \in \Gamma$ oppure $\neg B \in \Gamma$.

Proposizione 4.6. *Si mostra facilmente (*esercizio*) che se Γ è L-consistente e massimale, allora*

- $B \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma \cup \{B\}$ *è L-inconsistente.*
- *se $\Gamma \subseteq \Delta$ e Δ è L-consistente, allora $\Gamma = \Delta$ (da cui l'uso dell'aggettivo "massimale").*
- $\mathsf{L} \subseteq \Gamma$
- $\bot \notin \Gamma$
- $\neg B \in \Gamma \Leftrightarrow B \notin \Gamma$
- $(B \to C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma \Rightarrow C \in \Gamma)$
- $(B \wedge C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma \text{ } e \text{ } C \in \Gamma)$
- $(B \vee C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma \textit{ oppure } C \in \Gamma)$
- $(B \leftrightarrow C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma \Leftrightarrow C \in \Gamma)$

Lemma 4.7. (di Lindenbaum) *Sia Γ un qualunque insieme L-consistente,*

$$\Gamma \subseteq \Delta,$$

dove Δ è un insieme L-consistente e massimale.

Dimostrazione.
Mostriamo *costruttivamente* che un tale insieme L-consistente e massimale esiste sempre, partendo da qualsiasi insieme L-consistente.

Si enumerano le formule di $Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi}$[1]

$$B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$$

Si costruisce induttivamente la seguente catena di insiemi di formule:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_0 & = & \Gamma \\ \Delta_{n+1} & = & \begin{cases} \Delta_n \cup \{B_n\} & \text{se questo è L-consistente} \\ \Delta_n \cup \{\neg B_n\} & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}$$

Si pone infine $\Delta = \bigcup\{\Delta_n : n \geq 0\}$. Mostriamo che ogni Δ_n è L-consistente. Per induzione su n:

[1] L'operazione è descritta da un algoritmo, pertanto non è richiesto l'assioma della scelta.

$n = 0$: $\Delta_0 = \Gamma$, e Γ è L-consistente per ipotesi

$n = k + 1$: se $\Delta_{k+1} = \Delta_k \cup \{B_k\}$, allora Δ_{k+1} è L-consistente per costruzione; se invece $\Delta_{k+1} = \Delta_k \cup \{\neg B_k\}$, allora per costruzione $\Delta_k \cup \{B_k\}$ non è L-consistente, quindi

$$\begin{array}{ll} \vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_j \wedge B_k \to \bot & \quad \textit{con } \{D_1, \ldots, D_j\} \subseteq \Delta_k \\ \vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_j \to (B_k \to \bot) & \end{array}$$

Se $\Delta_k \cup \{\neg B\}$ fosse L-inconsistente avremmo, per qualche $\{E_1, \ldots, E_i\} \subseteq \Delta_k$:

$$\begin{array}{l} \vdash_{\mathsf{L}} E_1 \wedge \ldots \wedge E_i \wedge \neg B_k \to \bot \\ \vdash_{\mathsf{L}} E_1 \wedge \ldots \wedge E_i \to (\neg B_k \to \bot) \\ \vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_j \wedge E_1 \wedge \ldots \wedge E_i \to [(B \to \bot) \wedge (\neg B \to \bot)] \\ \vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_j \wedge E_1 \wedge \ldots \wedge E_i \to ((B \vee \neg B) \to \bot) \\ \vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_j \wedge E_1 \wedge \ldots \wedge E_i \to \bot \end{array}$$

contrariamente al fatto che Δ_k è L-consistente per ipotesi induttiva.

Bisogna ora mostrare che Δ è L-consistente. Se non lo fosse, esisterebbero formule $\{D_1, \ldots, D_j\} \subseteq \Delta$ tali che $\vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_j \to \bot$. Siano $\Delta_{f(1)}, \ldots, \Delta_{f(j)}$ gli insiemi della catena tali che $D_1 \in \Delta_{f(1)}, \ldots, D_j \in \Delta_{f(j)}$. Sia $k = \max\{f(1), \ldots, f(j)\}$. Poiché $\Delta_k \supseteq \Delta_{f(i)}$ per ogni $i \leq j$, Δ_k è L-inconsistente contro quanto fatto vedere precedentemente.

Si mostra infine che Δ è massimale. Sia $B \in Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi}$. B occorrerà con un certo indice, diciamo k, nell'enumerazione delle formule data all'inizio. Dunque $B \in \Delta_{k+1}$ oppure $\neg B \in \Delta_{k+1}$. Ne segue che $B \in \Delta$ oppure $\neg B \in \Delta$. □

Corollario 4.8. *Per ogni formula A vale quanto segue:*

$$\vdash_{\mathsf{L}} A \Leftrightarrow \forall w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}, A \in w.$$

Dimostrazione.

- $\Leftarrow$)
  Si vede subito che se $\nvdash_{\mathsf{L}} A$ allora $\{\neg A\}$ è L-consistente, infatti se così non fosse avremmo

$$\begin{array}{rl} & \vdash_{\mathsf{L}} \neg A \to \bot \\ \Rightarrow & \vdash_{\mathsf{L}} \neg\neg A \\ \Rightarrow & \vdash_{\mathsf{L}} A \end{array}$$

  contro l'ipotesi che A non sia dimostrabile. Poiché $\{\neg A\}$ è L-consistente, per il lemma di Lindenbaum esiste un $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ tale che $\neg A \in w$, quindi $A \notin w$ perché Γ è L-consistente.

- $\Rightarrow$)
  Lo dimostriamo per induzione sulla forma di A:

  $\vdash_{\mathsf{L}} \top$: $\top \in w$;

  $\vdash_{\mathsf{L}} p$: ...

  $\vdash_{\mathsf{L}} B \wedge C$:

$$\begin{array}{ll} \vdash_{\mathsf{L}} B \text{ e } \vdash_{\mathsf{L}} C & \\ B \in w \text{ e } C \in w & \text{(ip. induttiva)} \\ B \wedge C \in w & \text{(Proposizione 4.6)} \end{array}$$

  ... *esercizio*

□

4.3 Il modello canonico

Definizione 4.9. (modello canonico) Il modello canonico di una logica L è indicato con:

$$\mathcal{M}^{\mathsf{L}} = \langle \mathcal{W}^{\mathsf{L}}, \mathscr{R}^{\mathsf{L}}, \mathcal{I}^{\mathsf{L}} \rangle,$$

dove:

- $\mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ è la classe di tutti gli insiemi Γ che siano sottinsiemi L-consistenti massimali di $Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi}$.
- $s \mathrel{\mathscr{R}^{\mathsf{L}}} t \Leftrightarrow (\forall \Box B \in s. \exists B \in t)$
- $\mathcal{I}^{\mathsf{L}}$ è tale che $\mathcal{I}^{\mathsf{L}}(p) = \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : p \in w\}$.

Lemma 4.10. (box-lemma)

$$\forall s, t \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}, C \in Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi}.(\Box C \in s \Leftrightarrow s \mathrel{\mathscr{R}_a^{\mathsf{L}}} t \Rightarrow C \in t)$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$)
Si può mostrare (*esercizio*) che deriva direttamente dalla definizione di $\mathscr{R}_a^{\mathsf{L}}$.

$\Leftarrow$)
Per contrapposizione: supponiamo che $\Box C \notin s$ e costruiamo un $t \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ tale che $C \notin t$. Poniamo

$$\Gamma = \{D \in Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi} : \Box D \in s\}$$

Mostriamo che $\Gamma \cup \{\neg C\}$ è L-consistente: se non lo fosse, esisterebbero formule $D_1, \ldots, D_n \in \Gamma$ tali che

$$\begin{array}{ll}
\vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_n \wedge \neg C \to \bot & \\
\vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_n \to (\neg C \to \bot) & \\
\vdash_{\mathsf{L}} D_1 \wedge \ldots \wedge D_n \to C & \\
\vdash_{\mathsf{L}} \Box D_1 \wedge \ldots \wedge \Box D_n \to \Box C & \\
\Box D_1, \ldots, \Box D_n \in s & \\
\Box C \in s & (s \text{ è massimale, per def. di modello canonico})
\end{array}$$

Quello che abbiamo derivato, però, contraddice l'ipotesi, da cui l'assurdo.

Per il lemma di Lindenbaum segue che esiste $t \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ tale che $\Gamma \cup \{\neg C\} \subseteq t$. Allora essendo anche $\Gamma \subseteq t$, si ha $s \mathrel{\mathscr{R}^{\mathsf{L}}} t$ ed essendo $\neg C \in t$, concludiamo che $C \notin t$, come desiderato.

□

Lemma 4.11. (diamond-lemma)

$$\forall s, t \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}. s \mathrel{\mathscr{R}^{\mathsf{L}}} t \Leftrightarrow \forall B \in t. \exists \Diamond B \in w$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$)
Supponiamo che $w \mathrel{\mathscr{R}^{\mathsf{L}}} v$ e $C \in v$: per il lemma fondamentale 4.14, $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_v C$ e quindi, per definizione (di modello canonico) $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w \Diamond C$. Ma allora, di nuovo per il lemma fondamentale, $\Diamond C \in w$, come richiesto.

$\Leftarrow$)

Per contrapposizione, dimostriamo che

$$\neg(w\mathscr{R}^{\mathsf{L}}v) \Rightarrow \exists C \in v : \Diamond C \notin w$$

Per definizione di $\mathscr{R}^{\mathsf{L}}$, se $\neg(w\ \mathscr{R}^{\mathsf{L}}\ v)$, esiste una formula B tale che $\Box B \in w$ e $B \notin v$. Essendo w e v massimali, segue che $\neg\Box B \notin w$ e $\neg B \in v$. Equivalentemente, $\Diamond\neg B \notin w$ e $\neg B \in v$. Ma allora $\neg B$ è proprio la proposizione C che cercavamo.

□

Osservazione 11. Notiamo quanto la formulazione del diamond-lemma sia simile alla definizione della relazione canonica (a parte la posizione invertita degli operatori modali).

Definizione 4.12. (valida, completa, determinata) Sia $\mathcal{H}$ una classe di frame o di modelli. Una logica L è *valida* su $\mathcal{H}$ se per ogni A:

$$\vdash_{\mathsf{L}} A \Rightarrow \mathcal{H} \models A.$$

Una logica L è *completa* rispetto a $\mathcal{H}$ se per ogni A:

$$\mathcal{H} \models A \Rightarrow \vdash_{\mathsf{L}} A.$$

L è *determinata* da $\mathcal{H}$ se è sia valida sia completa rispetto a $\mathcal{H}$, ossia:

$$\mathcal{H} \models A \Leftrightarrow \vdash_{\mathsf{L}} A.$$

Definizione 4.13. (strutture per la logica) Diciamo che la struttura $\mathcal{F}$ è una struttura per la logica L se e solo se L è valida su $\mathcal{F}$.

Vorremmo ora dimostrare che una logica L è determinata dal corrispondente modello canonico. Questo risultato è immediata conseguenza del seguente lemma.

Lemma 4.14. (fondamentale del modello canonico) *Per ogni $B \in Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ ed ogni $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}$:*

$$\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w B \Leftrightarrow B \in w$$

Dimostrazione.
Per induzione sulla costruzione di B.

$B \equiv p$: il lemma vale per la definizione di $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$.

$B \equiv \neg C$: $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w \neg C \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \not\models_w C \Leftrightarrow C \notin w \Leftrightarrow \neg C \in w$.

$B \equiv C \wedge D$: $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w C \wedge D \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w C$ e $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w D$. Per ipotesi induttiva, questo equivale a dire che $C \in w$ e $D \in w$: ma allora anche $C \wedge D \in w$, essendo w massimale.

$B \equiv C \vee D$: $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w C \vee D \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w C$ oppure $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w D$. Per ipotesi induttiva ciò equivale a dire che $C \in w$ oppure $D \in w$: ma allora anche $C \vee D \in w$, essendo w massimale.

$B \equiv C \rightarrow D$: $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w (C \rightarrow D) \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \not\models_w C$ oppure $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w D \Leftrightarrow C \notin w$ oppure $D \in w \Leftrightarrow (C \rightarrow D) \in w$

$B \equiv \Box C$: $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_w \Box C \Leftrightarrow \forall v : w\ \mathscr{R}^{\mathsf{L}}\ v, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \models_v C$. Per ipotesi induttiva, questo è equivalente a dire che $\forall v : w\ \mathscr{R}^{\mathsf{L}}\ v, C \in v$: ma allora, per il box-lemma (**??**), $\Box C \in w$.

□

Corollario 4.15. *Ogni logica* L *è determinata dal modello canonico, ossia per ogni* $A \in Fm^{\Phi}_{\mathcal{A}}$

$$\vdash_{\mathsf{L}} A \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash A.$$

Dimostrazione.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$\begin{array}{ll} \vdash_{\mathsf{L}} A & \\ A \in w & \text{(Corollario 4.8)} \\ \forall w. \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w A & \text{(Lemma 4.14)} \\ \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash A & \end{array}$$

□

Osservazione 12. Dal corollario segue che L è completa rispetto alla struttura $\mathcal{F}^{\mathsf{L}} = \langle \mathcal{W}^{\mathsf{L}}, \mathscr{R}^{\mathsf{L}} \rangle$, cioè

$$\mathcal{F}^{\mathsf{L}} \vDash A \Rightarrow \vdash_{\mathsf{L}} A$$

Ma L non è necessariamente valida rispetto a $\mathcal{F}^{\mathsf{L}}$: infatti nulla ci autorizza a dire che una proposizione vera sul modello canonico sia vera anche in tutti i modelli che condividono la struttura canonica.

Capitolo 5

Completezza

Abbiamo introdotto il concetto di completezza con la Definizione 4.12. In questo capitolo ci concentriamo su come possiamo dimostrare che alcune logiche sono complete rispetto a certe classi di strutture. Per farlo, inizieremo introducendo alcune definizioni che risulteranno utili. In un secondo momento delineiamo il metodo che utilizzeremo per condurre la maggior parte delle dimostrazioni. Infine presenteremo la carrellata dei teoremi di completezza.

5.1 Strumenti

Definizione 5.1. (logica canonica) Una logica L è canonica se la struttura relazionale $\mathcal{F}^{\mathsf{L}}$ sui cui è basato il modello canonico $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$ è una struttura per L, ovvero tale che

$$\vdash_{\mathsf{L}} A \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}^{\mathsf{L}} \models A$$

Se indichiamo con $\mathcal{C}_{\mathsf{L}}$ la classe delle strutture relazionali per L, ed inoltre L è canonica, allora L è determinata dalla classe $\mathcal{C}_{\mathsf{L}}$ delle strutture per L:

$$\mathcal{C}_{\mathsf{L}} \models A \qquad \Leftrightarrow \qquad \vdash_{L} A$$

Osservazione 13. Si noti che esistono logiche canoniche che non sono complete rispetto ad alcuna classe di strutture relazionali: in questo caso si ha che per qualche fbf A

$$\mathcal{C}_{\mathsf{L}} \models A \quad \text{e} \quad \nvdash_{\mathsf{L}} A$$

Definizione 5.2. Introduciamo qui due operatori insiemistici che utilizzeremo ampiamente in seguito. Per ciascun $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}$:

$$\Box^{-}(w) = \{B \in Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi} : \Box B \in w\}$$
$$\Diamond^{+}(w) = \{\Diamond B \in Fm_{\mathcal{A}}^{\Phi} : B \in w\}$$

Nelle dimostrazioni successive, potremo quindi dire che $w \mathscr{R}^{\mathsf{L}} v$ se e solo se $v \supseteq \Box^{-}(w)$ (per come abbiamo definito la relazione canonica nella Definizione 4.9) oppure, equivalentemente, se e solo se $w \supseteq \Diamond^{+}(v)$ (per il Lemma 4.11).

5.2 Metodo

Abbiamo dimostrato che una logica L è determinata dal corrispondente modello canonico (v. Corollario 4.15). Dunque tale logica è anche completa rispetto ad esso; tuttavia ciò che più ci interessa è dimostrare che una logica è completa rispetto a qualche *classe di strutture relazionali*, specificata da una determinata proprietà. Conoscendo le proprietà del modello canonico, possiamo ora seguire questo schema d'azione:

1. vogliamo dimostrare che $\mathcal{C} \models A \Rightarrow \vdash_{\mathsf{L}} A$;
2. per contrapposizione, mostriamo che $\nvdash_{\mathsf{L}} A \Rightarrow \mathcal{C} \not\models A$;
3. da $\nvdash_{\mathsf{L}} A$ ricaviamo $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \not\models A$ e quindi $\mathcal{F}^{\mathsf{L}} \not\models A$;
4. Cerchiamo di dimostrare che $\mathcal{F}^{\mathsf{L}} \in \mathcal{C}$;
5. $\mathcal{F}^{\mathsf{L}} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \not\models A$.

Pertanto per dimostrare la completezza di una logica rispetto a una certa classe di strutture, è sufficiente dimostrare che la struttura su cui è basato il modello canonico appartiene a quella classe (passo 4). Gli altri passi del metodo appena delineato, sono *garantiti veri* dalle proprietà già presentate del modello canonico.

Quanto appena detto dimostra il seguente teorema:

Teorema 5.3.

$$\mathcal{F}^{\mathsf{L}} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathsf{L} \text{ è completa}$$

o, equivalentemente:

$$\mathsf{L} \text{ è incompleta} \Rightarrow \mathcal{F}^{\mathsf{L}} \notin \mathcal{C}$$

5.3 Logiche

In questa sezione presentiamo gerarchicamente alcune logiche, mostrate nella Figura 5.1, e per ciascuna di esse ricaveremo un teorema di completezza rispetto ad opportune classi di strutture.

Teorema 5.4. *La logica* K *è completa rispetto alla classe delle strutture relazionali, ossia per qualunque* $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} \models A \Rightarrow \vdash_{\mathsf{K}} A.$$

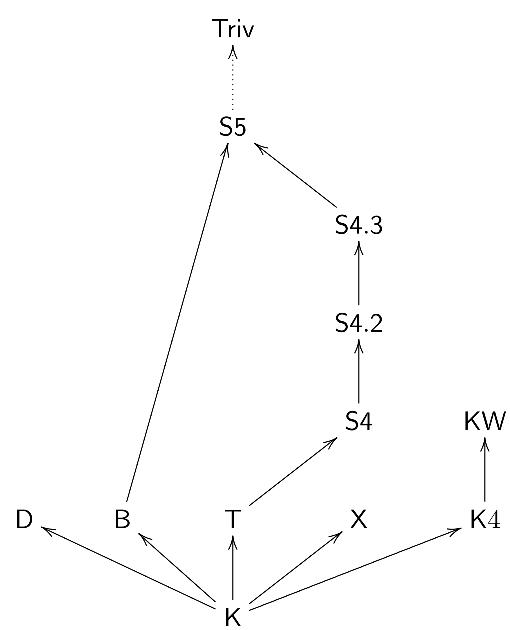


Figura 5.1: Una gerarchia delle logiche

Dimostrazione.
In questa dimostrazione *non* faremo uso del metodo presentato, ma mostreremo *per contrapposizione* come: $\nvdash_{\mathsf{K}} A \Rightarrow \mathcal{C} \nvDash A$.

$$\begin{array}{ll}
\nvdash_{\mathsf{K}} B & \\
\mathcal{M}^{\mathsf{K}} \nvDash B & \\
\mathcal{F}^{\mathsf{K}} \nvDash B & \\
\mathcal{C} \nvDash B & (\mathcal{F}^{\mathsf{K}} \text{ è una struttura relazionale})
\end{array}$$

□

Teorema 5.5. T *è completa rispetto alla classe delle strutture riflessive.*

Dimostrazione.
Procediamo nel modo canonico dimostrando che $\mathcal{M}^{\mathsf{T}}$ è riflessivo, ossia che $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{T}} \Rightarrow w \mathscr{R}_a^{\mathsf{T}} w$, o in altre parole che $\Box C \in w \Rightarrow C \in w$. Si ricordi l'assioma:

$$\mathbf{T}_a : \Box_a C \to C$$

Per ogni $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{T}}$, è vero quanto segue:

$$\begin{array}{ll}
\Box_a C \to C \in w & (w \text{ è massimale}) \\
\Box_a C \in w & (\text{ipotesi}) \\
C \in w & (w \text{ è massimale, e vale } \mathbf{T}) \\
\Box_a C \in w \Rightarrow C \in w & \\
w \mathscr{R}^{\mathsf{T}} w & (\text{def. di } \mathscr{R}_a^{\mathsf{T}})
\end{array}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 5.6. D *è completa rispetto alle strutture seriali.*

Dimostrazione.
Procediamo nel modo canonico: occorre mostrare che nel modello canonico di D, $\mathscr{R}^{\mathsf{D}}$ è seriale. Si ricordi l'assioma

$$\mathbf{D}_a : \Box_a A \to \Diamond_a A$$

Anzitutto notiamo che vale quanto segue, per ciascun $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{D}}$:

$$\begin{array}{ll}
\vdash_{\mathsf{D}} \top & (\text{def. di } w) \\
\vdash_{\mathsf{D}} \Box_a \top & (\text{NEC}) \\
\vdash_{\mathsf{D}} \Diamond_a \top & (\text{per } \mathbf{D}) \\
\forall w \in \mathcal{W}^{\mathsf{D}}. \Diamond_a \top \in w & (\dagger)
\end{array}$$

Ora prendiamo un qualunque $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{D}}$ e mostriamo che esiste un v ad esso relato. Evidentemente, dalla definizione di relazione canonica, è necessario che v sia un'estensione massimale di $\Box^-(w)$ (cfr. Definizione 4.9 e Definizione 5.2). A questo punto non ci rimane che mostrare che $\Box^-(w)$ è D-consistente, ed il Lemma di Lindenbaum ci garantirà che tale estensione *esiste*.

Procediamo per assurdo. Per qualunque $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{D}}$:

$$\begin{array}{ll}
\Box^-(w) \text{ è D-inconsistente} & (\text{ip. assurda}) \\
\exists A_1, \ldots, A_n \in \Box^-(w). \vdash_{\mathsf{D}} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to \bot & \\
\vdash_{\mathsf{D}} \Box_a (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to \bot) & (\text{NEC}) \\
\vdash_{\mathsf{D}} \Box_a (A \to B) \to \Box_a A \to \Box_a B & (\text{assioma K}) \\
\vdash_{\mathsf{D}} \Box_a (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to \Box_a \bot & \\
\Box_a (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to \Box_a \bot \in w & \\
A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \in w & (\text{per ipotesi e perché } w \text{ è cons. e mass.}) \\
\Box (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \in w & (w \text{ è cons. e mass.}) \\
\Box \bot \in w & (w \text{ è cons. e mass.})
\end{array}$$

Ma questo contraddice (†), da cui l'assurdo.

Riassumendo: $\Box^-(w)$ è D-consistente e per il Lemma di Lindenbaum esso può essere *esteso* ad un insieme v consistente e massimale (esistenza). Segue dalla definizione di $\mathscr{R}^{\mathsf{D}}$ che $w\ \mathscr{R}^{\mathsf{D}}_a\ v$. Pertanto, dato che ogni punto w del modello canonico ha un punto relato, il modello è seriale.

□

Teorema 5.7. X *è completa rispetto alle strutture debolmente dense.*

Dimostrazione.
Consideriamo la logica $\mathsf{X} = \mathsf{K} + \mathbf{X}$, dove

$$\mathbf{X} : \Box\Box A \to \Box A$$

Procediamo nel modo usuale, dimostrando cioè che il modello canonico è basato su una struttura debolmente densa. La relazione densa debole è così definita:

$$\forall w \forall v[w\ \mathscr{R}^{\mathsf{X}}\ v \to \exists z(w\ \mathscr{R}^{\mathsf{X}}\ z \wedge z\ \mathscr{R}^{\mathsf{X}}\ v)].$$

$$\begin{tikzcd} w \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & v \\ & z \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Figura 5.2: Relazione densa debole

Avendo supposto che $w\ \mathscr{R}^{\mathsf{X}}\ v$, mostriamo che esiste un mondo z che rispetti la suddetta formula e per farlo seguiamo la tecnica usata nel precedente teorema: z esiste, se e solo se vale che $z \supset eq\Box^-(w) \cup \Diamond^+(v)$. Ma se riusciamo a dimostrare che $\Box^-(w) \cup \Diamond^+(w)$ è X-consistente, allora dal Lemma di Lindenbaum deduciamo che $\exists z.z$ è consistente e massimale e $z \supseteq \{\Box^-(w) \cup \Diamond^+(w)$, il che concluderebbe la nostra dimostrazione.

Procediamo dunque per assurdo per dimostrare che $\Box^-(w) \cup \Diamond^+(w)$ è X-consistente. Supponiamo che non lo sia: allora

$$\vdash_{\mathsf{X}} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \Diamond C_1 \wedge \ldots \Diamond C_k \to \bot$$

dove $\Box A_1, \ldots, \Box A_n \in w$ e $C_1, \ldots, C_k \in v$. Possiamo derivare:

$$\begin{array}{ll}
\vdash_{\mathsf{X}} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \Diamond(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) \to \bot & \\
\vdash_{\mathsf{X}} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to \neg\Diamond(C_1 \wedge \ldots C_k) & \\
\vdash_{\mathsf{X}} \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \to \Box\neg\Diamond(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) & \\
\vdash_{\mathsf{X}} \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \to \Box\Box\neg(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) & \\
\Box A_1, \to, \Box A_n \in w & \\
\Box\Box\neg(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) \in w & \\
\Box\neg(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) \in w & \text{(per assioma } \mathbf{X}\text{)} \\
\neg(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) \in v & \text{(per ipotesi } w\ \mathscr{R}^{\mathsf{X}}\ v\text{)}
\end{array}$$

Ma questo contraddice l'ipotesi secondo cui $(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) \in v$, da cui l'assurdo.

$\Box^-(w) \cup \Diamond^+(v)$ è quindi X-consistente, pertanto prendendo come z una sua estensione massimale (la cui esistenza è garantita dal Lemma di Lindenbaum) otteniamo $w\ \mathscr{R}^{\mathsf{X}}\ z\ \mathscr{R}^{\mathsf{X}}\ v$, come richiesto. □

Teorema 5.8. $\mathsf{K4}$ *è completa rispetto alle strutture transitive.*

Dimostrazione.
Consideriamo la logica $\mathsf{K4} = \mathsf{K} + \mathbf{4}$, dove

$$\mathbf{4} : \Box A \to \Box\Box A.$$

Per dimostrare che K4 è completa rispetto alle strutture transitive, dimostriamo che $\mathcal{M}^{\mathsf{K4}}$ è basato su una struttura transitiva. Ogni punto di $\mathcal{M}^{\mathsf{K4}}$ contiene le istanze dell'assioma **4**. Pertanto, fissati $x, y, z \in \mathcal{W}^{\mathsf{K4}}$ tali che $x \mathscr{R}^{\mathsf{K4}} y$ e $y \mathscr{R}^{\mathsf{K4}} z$, si ha, per ogni A tale che $\Box A \in x$, anche $\Box\Box A \in x$. Allora $\Box A \in y$ e di conseguenza $A \in z$.

Avendo dimostrato che, qualunque sia A, se $\Box A \in x$ allora $A \in z$, e cioè che $z \supseteq \Box^-(x)$, segue che $x \mathscr{R}^{\mathsf{K4}} z$ come richiesto. □

Vedremo nella Sezione **??** che la logica K4 gode anche della *proprietà della struttura finita*.

Teorema 5.9. B *è completa rispetto alle strutture simmetriche.*

Dimostrazione.
Sia $\mathsf{B} = \mathsf{K} + \mathbf{B}$, dove $\mathbf{B}$ è lo schema di assioma così definito:

$$\mathbf{B} : A \to \Box\Diamond A.$$

Si tratta di dimostrare che il modello canonico $\mathcal{M}^{\mathsf{B}}$ è simmetrico. Come al solito, ogni istanza di $\mathbf{B}$ appartiene a ogni mondo del modello canonico: pertanto per ogni $w \in \mathcal{W}^{\mathsf{B}}$, se $A \in w$ allora anche $\Box\Diamond A \in w$ (essendo w B-consistente massimale).

Supponiamo che $w \mathscr{R}^{\mathsf{B}} v$ e che $A \in w$. Allora $\Box\Diamond A \in w$ e quindi $\Diamond A \in v$. Allora $v \supseteq \Diamond^+(w)$ e quindi $v \mathscr{R}^{\mathsf{B}} w$. Pertanto, poiché per ogni coppia di mondi relati in un verso vale anche la relazione in verso opposto, il modello è simmetrico, come richiesto. □

Teorema 5.10. S4 *è completa rispetto alle strutture riflessive e transitive.*

Dimostrazione.
La logica S4 è definita dai seguenti assiomi:

$$\begin{cases} \mathbf{T} : \Box A \to A \\ \mathbf{4} : \Box A \to \Box\Box A \end{cases}$$

Questi assiomi sono gli stessi delle logiche T e K4, pertanto il teorema segue direttamente dalla completezza di T rispetto alle strutture riflessive e di K4 rispetto alle strutture transitive. □

Teorema 5.11. S4.2 *è completa rispetto alle strutture riflessive, transitive e debolmente dirette.*

Dimostrazione.
Della logica S4.2 (nota talvolta col nome di logica G) sappiamo che essa è definita dai seguenti schemi di assiomi:

$$\begin{cases} \mathbf{T} : \Box A \to A \\ \mathbf{4} : \Box A \to \Box\Box A \\ \mathbf{G} : \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A \end{cases}$$

Avendo già trattato le proprietà riflessiva e transitiva all'interno di S4, ci sarà sufficiente mostrare che il modello canonico di S4.2 è debolmente diretto. La proprietà diretta debole (Figura 5.3) è così definita:

$$\forall s, t, u \exists v.(s \mathscr{R} t \land s \mathscr{R} u \to t \mathscr{R} v \land u \mathscr{R} b).$$

Avendo fissato s, t e u tali che $s \mathscr{R}^{\mathsf{S4.2}} t$ e $s \mathscr{R}^{\mathsf{S4.2}} u$, dimostriamo l'esistenza di v che soddisfi la condizione sopra. Questo equivale a dire che:

$$\Box^-(t) \cup \Box^-(u) \subseteq v$$

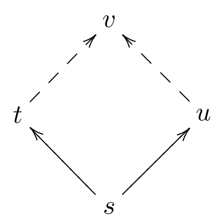


Figura 5.3: Relazione diretta debole

pertanto, analogamente alle logiche precedenti, si tratta di mostrare che $\Box^-(t) \cup \Box^-(u)$ è S4.2-consistente.

Anzitutto notiamo che è vero quanto segue:

$$\begin{array}{ll}
\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \in u & \text{(per definizione)} \\
\Diamond\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\Box B_n \in s & \\
\Box\Diamond B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Diamond B_n \in s & \text{(per assioma } \mathbf{G}\text{)} \\
\Diamond B_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond B_n \in t & (\ddagger)
\end{array}$$

Poi procediamo per assurdo:

$$\begin{array}{ll}
\Box^-(t) \cup \Box^-(u) \text{ è S4.2-inconsistente} & \text{(ip. assurda)} \\
\{A : \Box A \in t\} \cup \{B : \Box B \in u\} \text{ è S4.2-inconsistente} & \\
\vdash_{\mathsf{S4.2}} A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot & \\
\vdash_{\mathsf{S4.2}} A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \to \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) & \\
\vdash_{\mathsf{S4.2}} \Box(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to \Box\neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) & \\
\vdash_{\mathsf{S4.2}} \Box(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to \Box(\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n) & (\dagger)
\end{array}$$

Ma (†) contraddice (‡), perché *non può essere vero* che, per qualche i, $\mathcal{M}^{\mathsf{S4.2}} \vDash_t \Diamond B_i \wedge \Box\neg B_i$. Da cui l'assurdo che dimostra come l'insieme $\Box^-(t) \cup \Box^-(u)$ è S4.2-consistente, e da cui possiamo dedurre (come al solito per il Lemma di Lindenbaum) l'esistenza di v che soddisfa la proprietà diretta debole. $\Box$

Teorema 5.12. S4.3 *è completa rispetto alle strutture riflessive, transitive e debolmente connesse.*

Dimostrazione.
La logica S4.3 è definita dai seguenti assiomi:

$$\begin{cases}
\mathbf{T} : \Box A \to A \\
\mathbf{4} : \Box A \to \Box\Box A \\
\mathbf{L} : \Box(A \wedge \Box A \to B) \vee \Box(B \wedge \Box B \to A)
\end{cases}$$

Le dimostrazioni di completezza rispetto alle strutture *riflessive* e *transitive* sono in tutto e per tutto equivalenti a quelle date per le logiche T e K4. Perciò ci rimane da dimostrare solo che il modello canonico è debolmente connesso. La proprietà di connessione debole è così definita:

$$\forall wtv.(w \mathscr{R}\, t \wedge w \mathscr{R}\, v \to t \mathscr{R}\, v \vee t = v \vee v \mathscr{R}\, t).$$

Supponiamo per assurdo che il modello canonico non sia debolmente connesso: allora

$$\exists wtv.(w \mathscr{R}^{\mathsf{S4.3}}\, t \wedge w \mathscr{R}^{\mathsf{S4.3}}\, v \wedge \neg(t \mathscr{R}^{\mathsf{S4.3}}\, v) \wedge \neg(v \mathscr{R}^{\mathsf{S4.3}}\, t) \wedge t \neq v).$$

In altre parole:

$$\begin{array}{ll}
\exists B, \Box B \in t \text{ e } B \notin v & \\
\exists A, \Box A \in v \text{ e } A \notin t & (\dagger) \\
\exists C, C \notin t \text{ e } C \in v & (\ddagger)
\end{array}$$

Essendo $\Box A \in v$ non è difficile convincersi che $\Box(A \vee C) \in v$. Inoltre, poiché $C \in v$, anche $A \vee C \in v$ e quindi abbiamo:
$$\Box(A \vee C) \wedge (A \vee C) \in v.$$

D'altra parte, poiché $\neg C \notin v$ e $B \notin v$, si ha $\neg C \vee B \notin v$ e quindi:

$$\Box(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B) \notin v.$$

Ricordando infine che $w \mathscr{R}^{\mathsf{S4.3}} v$ otteniamo:

$$\Box(\Box(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B)) \notin w.$$

Istanziamo ora l'assioma **L** ponendo:

$$\begin{array}{rcl} A & \mapsto & A \vee C \\ B & \mapsto & \neg C \vee B. \end{array}$$

Otteniamo:

$$\Box(\Box(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B)) \vee \Box(\Box(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C)).$$

Allora per ogni mondo x:

$$\begin{array}{rl} & \Box(\Box(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B)) \in x \\ \text{oppure} & \Box(\Box(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \in x. \end{array}$$

Avendo dimostrato che la prima delle due formule non appartiene a w, ne segue che:

$$\begin{array}{rl} & \Box(\Box(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \in w \\ \Rightarrow & \Box(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C) \in t. \end{array}$$

Ora consideriamo t. Poiché $\neg C \in t$, anche $\neg C \vee B \in t$; d'altra parte, essendo $\Box B \in t$, è facile convincersi che anche $\Box(\neg C \vee B) \in t$. Quindi anche la loro congiunzione:

$$\Box(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \in t.$$

Per MP otteniamo allora:
$$\begin{array}{rl} & A \vee C \in t \\ \Rightarrow & A \in t \text{ oppure } C \in t. \end{array}$$

Ma in (†) e (‡) avevamo supposto $A \notin t$ e $C \notin t$, da cui l'assurdo. □

Teorema 5.13. S5 *è completa rispetto alle strutture riflessive, transitive e simmetriche.*

Dimostrazione.
La logica S5 è definita dagli assiomi:
$$\begin{cases} \mathbf{T} : \Box A \rightarrow A \\ \mathbf{4} : \Box A \rightarrow \Box\Box A \\ \mathbf{B} : A \rightarrow \Box\Diamond A \end{cases}$$

La dimostrazione del teorema segue direttamente da quelle delle logiche T,K4 e B. □

Le relazioni riflessive, transitive e simmetriche sono dette "relazioni di equivalenza" o "universali". Così come si può dimostrare che una relazione che sia transitiva ed euclidea è una relazione di equivalenza (*esercizio*), parallelamente si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 5.14. *La logica:*

$$\begin{cases} \mathbf{T} : \Box A \to A \\ \mathbf{4} : \Box A \to \Box\Box A \\ \mathbf{E} : \Diamond A \to \Box\Diamond A \end{cases}$$

è completa rispetto alla classe di strutture basate su relazioni di equivalenza.

Dimostrazione.
Esercizio □

Teorema 5.15. Triv *è completa rispetto alle strutture di punti isolati.*

Dimostrazione.
Sia $\mathsf{Triv} = \mathsf{K} + \mathbf{Triv}$, dove $\mathbf{Triv}$ è così definito:

$$\mathbf{Triv} : A \leftrightarrow \Box A.$$

Dobbiamo dimostrare che il modello canonico consiste di punti isolati, cioè che

$$\forall xy.x \mathscr{R}^{\mathsf{Triv}} y \leftrightarrow x = y.$$

$\Rightarrow$)
Supponiamo $x \mathscr{R}^{\mathsf{Triv}} y$.

$$\begin{array}{ll} A \in x & \\ \Box A \in x & \text{(per Triv)} \\ A \in y & \\ A \in x \Rightarrow A \in y & (\dagger) \\ y \supseteq x & \end{array}$$

Ora dimostriamo che è vero anche il contrario, $y \subseteq x$, ovvero $A \in y \Rightarrow A \in x$. Lo facciamo per assurdo: per qualche formula B,

$$\begin{array}{ll} B \in y \land B \notin x & \text{(ip. assurda)} \\ \neg B \in x & (x \text{ è massimale}) \\ \neg B \in y & (\text{per } \dagger) \\ y \supseteq \{B, \neg B\} & \end{array}$$

Ma ciò significa affermare che y non è consistente, da cui l'assurdo che prova il teorema.

$\Leftarrow$)
Dovremmo dimostrare che $x \mathscr{R}^{\mathsf{Triv}} x$ per ogni x, ma questo è immediato: notiamo infatti che da **Triv** si ricava subito $\Box A \to A$, che è l'assioma **T**. È sufficiente, quindi, ricondursi alla completezza di T rispetto alle strutture riflessive.

□

Osservazione 14. Esistono tutta una serie di logiche che estendono K senza l'assioma **T**: KB,Ky,KW (che vedremo nel Capitolo **??**) e infine Verum (che ha l'assioma $\Box A$, per ogni A). Verum è la logica dei mondi che non vedono niente, neanche se stessi. In una tale logica si dimostra $\Box\bot$.

5.4 Esercizi

Esercizio 5.1. Mostrare che i seguenti sono teoremi di $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{array}{l} \boxed{a}(A \land B) \leftrightarrow \boxed{a}A \land \boxed{a}B \\ \langle a \rangle(A \lor B) \leftrightarrow \langle a \rangle A \lor \langle a \rangle B \\ (\boxed{a}A \lor \boxed{a}B) \to \boxed{a}(A \lor B) \\ \langle a \rangle(A \land B) \to \langle a \rangle A \land \langle a \rangle B \end{array}$$

Esercizio 5.2. Si dimostri la validità delle proprietà mostrate nella Proposizione 4.6

Esercizio 5.3. Si completi la dimostrazione del Corollario 4.8.

Esercizio 5.4. Si completi la dimostrazione del Lemma 4.10.

Esercizio 5.5. Si dimostri che le relazioni transitive ed euclidee sono relazioni di equivalenza, e si completi la dimostrazione del Teorema 5.14.

Capitolo 6

Modelli finiti

Ogni modello canonico è infinito, nel senso che, per come è stato costruito, $\mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ contiene *infiniti elementi*. Questa caratteristica di $\mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ è collegata a quello che potremmo chiamare "difetto per eccesso" di $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$. Come scrive Goldblatt: *nel suo essere capace di falsificare ogni particolare non-teorema A, $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$ fornisce una buona dose di informazione superflua* (v. [Gol], p.31). Il valore di verità di una specifica fbf A in un mondo w di $\mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ è determinato unicamente dai *valori di verità* assunti dalle sole sottoformule di A stessa nel mondo w ed in quelli ad esso relati.

L'idea che sta dietro il concetto di filtrazione è quella di raggruppare in una stessa classe $X \subseteq \mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ tutti i punti che assegnano gli stessi valori di verità a tutte le sottoformule di A. In altre parole: in X "collassano" tutti quei mondi che danno gli stessi valori di verità a ciascuna formula, e che quindi sono *indistinguibili*. Questo processo porta alla costruzione di un nuovo modello, che è basato su quello canonico e quindi continua a falsificare A, ma a differenza di questo ha una struttura *finita*.

Come si può osservare il modello così ottenuto per filtrazione è altamente "specialistico", costruito *ad hoc* per un preciso non-teorema A. Ovviamente dall'unico modello canonico per L sono possibili infiniti modelli filtrati, uno per ciascuna fbf presa in considerazione.

Tipicamente utilizzeremo il modello filtrato per condurre dimostrazioni di completezza di alcune logiche nei confronti di strutture con determinate proprietà e che siano *finite*.

6.1 Filtrazione

Sia $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$ il modello canonico per L e sia B un arbitrario non-teorema di L. Ciò che il metodo delle filtrazioni ci permette di fare è costruire da $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$ un modello basato su una struttura relazionale finita in cui B è falsa.

Sia $\Gamma = \mathrm{Sf}(B)$ l'insieme delle sottoformule di B. Chiaramente Γ è finito ed è chiuso per sottoformule, in quanto

$$C \in \Gamma \ \wedge \ C' \in \mathrm{Sf}(C) \quad \Rightarrow \quad C' \in \Gamma$$

Definiamo ora una relazione di equivalenza $\sim_\Gamma$ tra mondi di $\mathcal{W}^{\mathsf{L}}$.

Definizione 6.1. (relazione di equivalenza) Siano $w, v \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}}$

$$w \sim_\Gamma v \quad \Leftrightarrow \quad w \cap \Gamma = v \cap \Gamma.$$

In altre parole

$$w \sim_\Gamma v \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \Gamma,\ (\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w B \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_v B).$$

Definizione 6.2. (classe di equivalenza) Sia

$$|w| \ = \ \{v \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : w \sim_\Gamma v\}$$

la classe di equivalenza di w rispetto a $\sim_\Gamma$.

$|w|$ comprende tutti quei mondi di $\mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ in cui ogni enunciato di Γ assume lo stesso valore di verità che riceve in w. Sottolineiamo ancora che per ogni $v, z \in |w|$ non c' è alcuna fbf $A \in \Gamma$ tale che

$$\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_v A \quad \wedge \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_z A.$$

Il risultato di questo processo è che $\mathcal{W}^{\mathsf{L}}$ viene ripartito in un certo numero di classi di equivalenza rispetto a $\sim_\Gamma$ disgiunte.

È importante osservare che se Γ è finito anche il numero delle classi di equivalenza è finito ed ha al massimo 2^n elementi, dove n è la cardinalità di Γ.

Ad esempio, supponiamo che Γ contenga tre elementi $\Gamma = \{p, q, p \wedge q\}$, allora $n = 3$ e le classi di equivalenza sono al massimo otto, ovvero:

$$\begin{aligned}
|x^1| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w q \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \wedge q\}\\
|x^2| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w q \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \wedge q\}\\
|x^3| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w q \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \wedge q\}\\
|x^4| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w q \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \wedge q\}\\
|x^5| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w q \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \wedge q\}\\
|x^6| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w q \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \wedge q\}\\
|x^7| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w q \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \wedge q\}\\
|x^8| &= \{w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} : \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \ e\, \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w q \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w p \wedge q\}
\end{aligned}$$

Osservazione 15. Sottolineiamo che di classi di equivalenza possono essercene meno di 2^n, come nel nostro esempio per cui non esiste un w in cui $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p$ e $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w q$ e $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \wedge q$.

Definizione 6.3. (il modello filtrato) Definiamo il modello $\mathcal{M}^\Gamma = \langle \mathcal{W}^\Gamma, \mathscr{R}^\Gamma, \mathcal{I}^\Gamma \rangle$:

- $\mathcal{W}^\Gamma = \{\, |w| : w \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}} \,\}$
  $\mathcal{W}^\Gamma$ è dunque finito poiché ogni suo membro è una classe di equivalenza.
- $\forall p \in \Gamma,\ \forall |w| \in \mathcal{W}^\Gamma$
  $$|w| \in \mathcal{I}^\Gamma(p) \quad \Leftrightarrow \quad w \in \mathcal{I}^{\mathsf{L}} \quad \Leftrightarrow \quad p \in w\,.$$
- $\mathscr{R}^\Gamma$ è *adeguata* (è una Γ-filtrazione di $\mathscr{R}^{\mathsf{L}}$) ovvero soddisfa le seguenti condizioni:
  - F1)
    $\forall |s|, |t| \in \mathcal{W}^\Gamma$
    $$s\, \mathscr{R}^{\mathsf{L}}\, t \quad \Rightarrow \quad |s|\, \mathscr{R}^\Gamma\, |t|$$
  - F2)
    $\forall |s|, |t| \in \mathcal{W}^\Gamma$
    $$|s|\, \mathscr{R}^\Gamma\, |t| \quad \Rightarrow \quad (\forall B \in \Gamma,\ \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Box B \ \Rightarrow\ \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_t B).$$

Osservazione 16. F1 corrisponde alle frecce che obbligatoriamente si devono mettere in $\mathcal{M}^\Gamma$. F2, invece, rappresenta il limite massimo di frecce inseribili nel modello filtrato. Difatti in $\mathcal{M}^\Gamma$ non possiamo aggiungere frecce da un mondo $|s|$ a un mondo $|t|$ se nel modello originario $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$ esiste una fbf B, t.c. $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Box B$ e $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_t B$.

Introduciamo di seguito due filtrazionie, che chiamiamo rispettivamente *minima* e *massima*.

La *minima filtrazione* è così definita:

$$s\, \mathscr{R}^{\mathsf{L}}\, t \quad \Leftrightarrow \quad |s|\, \mathscr{R}^\Gamma\, |v|$$

Verifichiamo che essa soddisfi le proprietà F1 ed F2. Anzitutto constatiamo che F1 è data da $\Rightarrow$. Mostriamo dunque che F2 è implicata da $\Leftarrow$.

Dimostrazione.

$$\begin{array}{ll}
|s| \mathscr{R}^{\Gamma} |t| & \text{(per ip.)} \\
\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Box B & \\
s \mathscr{R}^{\mathsf{L}} t \text{ e } \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Box B & \\
\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_t B & \\
|s| \mathscr{R}^{\Gamma} |t| \Rightarrow (\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Box B \Rightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_t B) &
\end{array}$$

Che verifica proprio la condizione F2. □

Introduciamo invece sotto quella che chiamiamo la *massima filtrazione*:

$$|s| \mathscr{R}^{\Gamma} |t| \Leftrightarrow (\forall \Box B \in \Gamma,\ \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Box B \ \Rightarrow\ \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_t B)$$

Notiamo come F2 coincida con $\Rightarrow$. Mostriamo quindi che F1 è implicata da $\Leftarrow$.
Dimostrazione.

$$\begin{array}{ll}
s \mathscr{R}^{\mathsf{L}} t & \text{(ipotesi)} \\
\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Box B & \\
\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_t B & \\
\forall B . \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_s \Rightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_t B & \\
|s| \mathscr{R}^{\Gamma} |t| &
\end{array}$$

□

Teorema 6.4. (lemma della filtrazione) *Sia $\mathcal{M}^{\Gamma} = \langle \mathcal{W}^{\Gamma}, \mathscr{R}^{\Gamma}, \mathcal{I}^{\Gamma} \rangle$ una Γ-filtrazione di $\mathcal{W}^{\mathsf{L}} = \langle \mathcal{W}^{\mathsf{L}}, \mathscr{R}^{\mathsf{L}}, \mathcal{I}^{\mathsf{L}} \rangle$. Per ciascuna formula $B \in \Gamma$ e per ogni mondo w del modello canonico, allora*

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}^{\Gamma} \vDash_{|w|} B & \Leftrightarrow & \mathcal{W}^{\mathsf{L}} \vDash_w B. \\
& \Leftrightarrow & B \in w.
\end{array}$$

Dimostrazione.
Procediamo per induzione sulla lunghezza di B:
(i) $B = p$

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}^{\Gamma} \vDash_{|w|} p & \Leftrightarrow & \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \vDash_w p \\
\text{per definizione } \mathcal{I}^{\Gamma}: & &
\end{array}$$

(ii) $B = \Box C$
Dimostriamo che

$$\mathcal{M}^{\Gamma} \nvDash_{|w|} \Box C \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w \Box C.$$

(ii.i) $\Rightarrow$

Supponiamo	$\exists |w| \in \mathcal{W}^{\Gamma},\ \mathcal{M}^{\Gamma} \nvDash_{|w|} \Box C.$
	$\exists |v| \in \mathcal{W}^{\Gamma},\ |w| \mathscr{R}^{\Gamma} |v| \quad \& \quad \mathcal{M}^{\Gamma} \nvDash_{|v|} C$
per ipotesi di induzione	$\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_v C$
pertanto	$\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w \Box C$ grazie a F2

*[1]

(ii.ii) $\Leftarrow$

Supponiamo	$\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_w \Box C$
	$\exists v \in \mathcal{W}^{\mathsf{L}},\ w \mathscr{R}^{\mathsf{L}} v \quad \& \quad \mathcal{M}^{\mathsf{L}} \nvDash_v C$
per ipotesi di induzione	$\mathcal{M}^{\Gamma} \nvDash_{|v|} C$
quindi	$\mathcal{M}^{\Gamma} \nvDash_{|w|} \Box C$ grazie a F1

*[2]. □

[1] $\mathscr{R}^{\Gamma}$ è una filtrazione, $|w| \mathscr{R}^{\Gamma} |v|$ e $\nvDash_v C$, quindi non può essere $\vDash_w \Box C$.
[2] Abbiamo $w \mathscr{R}^{\mathsf{L}} v$ e $v \in |v|$, dunque per F1 $|w| \mathscr{R}^{\Gamma} |v|$

Corollario 6.5. *Segue dal Lemma della Filtrazione che*
$\forall A \in \Gamma$

$$\mathcal{M}^{\mathsf{L}} \not\models A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}^{\Gamma} \not\models A.$$

Sia $\mathscr{R}^{\mathsf{L}}$ la relazione di accessibilità tra mondi in un modello $\mathcal{M}^{\mathsf{L}} = \langle \mathcal{W}^{\mathsf{L}}, \mathscr{R}^{\mathsf{L}}, \mathcal{I}^{\mathsf{L}} \rangle$. Sia $\mathcal{M}^{\Gamma} = \langle \mathcal{W}^{\Gamma}, \mathscr{R}^{\Gamma}, \mathcal{I}^{\Gamma} \rangle$ il modello ottenuto da $\mathcal{M}^{\mathsf{L}}$ per Γ-filtrazione. Vale il lemma seguente:

Lemma 6.6.

$$\begin{array}{llllll} \mathscr{R}^{\mathsf{L}} & \grave{e} & \textit{riflessiva} & \Rightarrow \mathscr{R}^{\Gamma} & \grave{e} & \textit{riflessiva.} \\ & & \textit{seriale} & & & \textit{seriale} \\ & & \textit{connessa} & & & \textit{connessa} \\ & & \textit{diretta} & & & \textit{diretta.} \end{array}$$

Dimostrazione.
Esercizio. □

6.2 Proprietà del Modello Finito

?? Quando si parla di *modello finito* (risp. struttura finita), ci riferiamo ad un modello (risp. struttura) il cui universo sia composto da un numero finito di elementi. Da cui deriviamo che anche la relazione corrispondente è formata da un numero finito di coppie. Osserviamo comunque che la relazione potrebbe continuare a formare catene infinitamente lunghe di mondi fra loro relati (si pensi ad una struttura con un ciclo).

Definizione 6.7. (proprietà della struttura finita) Diciamo che una logica gode della *proprietà della struttura finita* se e solo se essa è determinata da una qualche classe di *strutture finite*. Formalmente:

$$\nvdash_{\mathsf{L}} A \Rightarrow \exists \mathcal{F}.\mathcal{F} \models \mathsf{L} \text{ e } \mathcal{F} \not\models A \text{ e } \mathcal{F} \text{ è finita}$$

Definizione 6.8. (proprietà della struttura finita forte) Diciamo che una logica gode della *proprietà della struttura finita forte* se e solo se vale quanto segue:

$$\nvdash_{\mathsf{L}} A \Rightarrow \exists \mathcal{F}.\mathcal{F} \models \mathsf{L} \text{ e } \mathcal{F} \not\models A \text{ e } |\mathcal{W}| \leq g(n)$$

Diciamo che una logica L è *decidibile* se, per ciascuna fbf A, è possibile verificare attraverso una procedura algoritmica e in tempo finito se vale $\vdash_{\mathsf{L}} A$ oppure $\vdash_{\mathsf{L}} \neg A$.

Vale il seguente teorema:

Teorema 6.9. *Se una logica è* finitamente assiomatizzabile *e gode della* proprietà della struttura finita forte*, allora essa è anche* decidibile*.*

Un esempio di logica che gode della proprietà della struttura finita è la logica K4. Sappiamo già dal Teorema 7.1 che essa è completa rispetto alla classe dei modelli transitivi. Ora vogliamo dimostrare che K4 è caratterizzata anche dalle strutture transitive e che godono della *proprietà della struttura finita*.

Anzitutto introduciamo una Γ-filtrazione transitiva, come quella indotta dalla relazione così definita:

$$|w| \mathscr{R}^{\Gamma} |v| \Leftrightarrow \\ \forall \Box B \in \Gamma. \mathcal{M}^{\mathsf{K4}} \models_w \Box B \Rightarrow \mathcal{M}^{\mathsf{K4}} \models_v \Box B \wedge B$$

La dimostrazione che $\mathscr{R}^{\Gamma}$ è transitiva e che soddisfa le proprietà F1 ed F2 viene lasciata come *esercizio*.

6.3 Esercizi

Esercizio 6.1. Si completi la dimostrazione del Lemma 6.6

Esercizio 6.2. Si dimostri che la filtrazione presentata alla fine di questo capitolo è ben definita e transitiva

Capitolo 7

KW

Prendiamo in considerazione, in questo capitolo, una particolare logica modale chiamata KW e sulle relazioni che la legano all'aritmetica di Peano, PA. Questo legame è stato per prima indagato da Gödel e Löb, i quali proposero di interpretare una formula del tipo $\Box A$ come "A è dimostrabile in PA.

7.1 La logica KW

È possibile avere una logica caratterizzata dagli ordini stretti (irriflessivi, transitivi e finiti)? Sì, è la logica KW, assiomatizzata come:

$$\mathsf{K} + \mathbf{W} : \Box(\Box A \to A) \to \Box A.$$

Teorema 7.1. *Sia $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathscr{R} \rangle$ una struttura per* KW. *Allora $\mathscr{R}$ è transitiva.*

Dimostrazione.
Consideriamo la seguente formula:

$$B \to ((\Box B \wedge \Box\Box B) \to (B \wedge \Box B))$$

Essa è un'istanza della seguente tautologia (non modale):

$$D \to (B \wedge C) \to (D \wedge B)$$

dove:

$$B = \Box A$$
$$C = \Box\Box A$$

e dunque tale formula vale in KW (cfr. Definizione). Inoltre possiamo mostrare che dall'assioma **W** possiamo derivare quanto segue:

$$\mathsf{KW} \vdash B \to ((\Box B \wedge \Box\Box B) \to (B \wedge \Box B))$$
$$\mathsf{KW} \vdash B \to (\Box(B \wedge \Box B) \to (B \wedge \Box B))$$
$$\mathsf{KW} \vdash \Box B \to \Box(\Box(B \wedge \Box B) \to (B \wedge \Box B))$$

Utilizzando l'assioma **W** (istanziato con $A = (B \wedge \Box B)$) abbiamo:

$$\mathsf{KW} \vdash \Box A \to \Box(A \wedge \Box A)$$
$$\mathsf{KW} \vdash \Box A \to \Box A \wedge \Box\Box A$$
$$\mathsf{KW} \vdash \Box A \to \Box\Box A$$

ed abbiamo già visto dal Teorema che questa formula corrisponde alle strutture transitive. $\Box$

Osservazione 17. Una qualsiasi struttura che contenga un mondo riflessivo può falsificare $\mathbf{W}$. Poiché il modello canonico di KW ha un punto riflessivo, quella canonica non è una struttura per KW. Similmente, una qualunque struttura che contenga una catena infinita ascendente falsifica $\mathbf{W}$ in qualche punto.

7.2 PA

Per comprendere il significato assunto dalla logica KW, analizziamo alcuni concetti di PA.

Anzitutto, definiamo il vocabolario di PA come il seguente insieme di simboli: $\mathbb{L}^= = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, (,)\} \cup \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \cup \{0, succ, +, \cdot\}$. A partire da esso è possibile definire i concetti sintattici enumerati sotto, e che già ben conosciamo:

- simolo logico
- variabile
- parentesi
- costante individuale
- parola del linguaggio
- termine chiuso
- termine aperto
- formula ben formata

Successivamente possiamo definire concetti teorici di PA, quali:

- assiomi logici
- assiomi dell'aritmetica
- derivazione
- teorema

che pure assumiamo noti in questa rapida trattazione.

Quello che Gödel vuol fare è *trasformare concetti teorici in frasi del linguaggio oggetto della aritmetica*, ovvero in frasi manipolabili dal linguaggio dell'aritmetica stesso, secondo le regole definite dalla sintassi. E lo fa associando in maniera *biunivoca* ciascun concetto teorico ad una parola dell'aritmetica, ovvero ad un numero.

Tale associazione può essere descritta intuitivamente dalle seguenti regole:

- assegno un numero dispari differente a ciascun simbolo del vocabolario $\mathcal{L}^= \{x_0, x_1, \dots\}$;
- assegno un numero pari (maggiore di 2) a tutte le variabili del linguaggio $\{x_0, x_1, \dots\}$;
- traduco una formula composta dalla successione di simboli $s_1 s_2 \dots s_n$ in questo modo:

  $$\ulcorner s_1 s_2 \dots s_n \urcorner = 2 \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i^{\ulcorner s_i \urcorner},$$

  dove p_i denota l'i-esimo numero primo, mentre $\ulcorner s_i \urcorner$ la traduzione dell'i-esimo simbolo della formula. Questa procedura sfrutta l'*unicità* della fattorizzazione di un numero naturale per garantire che a ciascun numero naturale corrisponda una e una sola formula (ben formata o meno);

- traduco una dimostrazione composta dalla successione di formule $A_1, \ldots, A_n$ in questo modo:

$$\ulcorner A_1, \ldots, A_n \urcorner = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i^{\ulcorner A_i \urcorner}$$

La procedura presentata prende il nome di *Gödelizzazione* (o anche *aritmetizzazione*) dell'aritmetica.

A questo punto è possibile definire la procedura Teor(n) che si occupa di decidere se il numero n corrisponde ad una dimostrazione valida in PA.

Inoltre, per il teorema del punto fisso di Tarski (**controllare!!!**), vale che, per ogni logica PA:

$$\exists G t.c. \vdash_{PA} G \leftrightarrow \neg \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)$$

dal quale si può derivare sia che:

$$\vdash_{PA} (G \leftrightarrow \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \wedge \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)) \rightarrow \bot,$$

sia che:

$$\vdash_{PA} (G \leftrightarrow \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \wedge \neg \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)) \rightarrow \bot.$$

In altre parole, se assumiamo che la formula G è teorema (rispettivamente, è non teorema) della aritmetica di Peano, rendiamo il sistema formale inconsistente. Dobbiamo quindi concludere che vale questo teorema (noto col nome di *teorema di incompletezza di Gödel*): un sistema formale "sufficientemente espressivo" è *inconsistente* o *incompleto*.

Anzitutto precisiamo che "sufficientemente espressivo" equivale a dire che esso è in grado di esprimere i propri concetti teorici nel proprio linguaggio oggetto e il predicato logico Teor(X). Seconda cosa: qui il concetto di *incompletezza* è di natura esclusivamente sintattica. Con essa si intende un'incapacità di rappresentare con formule del linguaggio alcune verità che nel modello di riferimento comunque ci sono. Però, quando parliamo di *modello di riferimento* intendiamo una singola struttura ed un singolo modello basato su tale struttura: esso prende il nome di *interpretazione standard*.

Descrivere cosa si intende con interpretazione standard, che differenze passano fra esse e ARIT, e parlare del rapporto di inclusione stretta ARIT $\subsetneq$ interpretazione standard (per il rapporto di incompletezza, appunto)

7.3 Completezza di KW

7.3.1 Definizioni

Definizione 7.2 (grado modale)**.** Il grado modale di una formula A è definito come segue:

- se A è un atomo p, allora il suo grado è 0;
- se A è del tipo $\Box B$ e il grado di B è n, allora il grado di A è $n + 1$;
- se A è un'altra formula complessa, il grado di A è pari al grado massimo delle sue sottoformule.

Definizione 7.3 (modello canonico di grado m)**.** Sia $Fm^{\Phi}(m)$ il sottoinsieme delle formule di Fm^{Φ} aventi grado non superiore a m. Il modello canonico di grado m di una logica L è la tripla $\mathcal{M}_m^{\mathsf{L}} = \langle \mathcal{W}_m^{\mathsf{L}}, \mathscr{R}_m^{\mathsf{L}}, \mathcal{I}_m^{\mathsf{L}} \rangle$ così definita:

- $\mathcal{W}_m^{\mathsf{L}}$ è la classe degli insiemi KW-consistenti massimali delle formule di $Fm^{\Phi}(m)$;
- $\mathscr{R}_m^{\mathsf{L}}$ è una relazione binaria tale che $w \ \mathscr{R}_m^{\mathsf{L}} \ v$ se e solo se per qualunque formula $\Box B \in w$ si ha $B \in v$ e $\Box B \in v$, e inoltre esiste C tale che $\Box C \notin w$ e $\Box C \in v$;
- $\mathcal{I}_m^{\mathsf{L}}$ è tale che $\mathcal{I}_m^{\mathsf{L}}(p) = w \in \mathcal{W}_m^{\mathsf{L}} : p \in w$.

7.3.2 Dimostrazione

Lemma 7.4. *Per ogni fbf* $B \in Fm^{\Phi}(m)$ *ed ogni* $w \in \mathcal{W}_m^{\mathsf{KW}}$

$$\mathcal{M}_m^{\mathsf{KW}} \vDash_w B \Leftrightarrow B \in w$$

Dimostrazione.
La dimostrazione è analoga a quella del lemma fondamentale del modello canonico, pertanto trattiamo soltanto il caso in cui B è del tipo $\Box C$. Per casi:

$\Box C \in x$: ovvio, dalla definizione di $\mathcal{M}_m^{\mathsf{KW}}$.

$\Box C \notin x$: mostriamo che per qualche $y \in \mathcal{W}_m^{\mathsf{KW}}$, $C \notin y$ e $x \mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}} y$. Si ponga:

$$\Gamma = A : \Box A \in x \cup \Box A : \Box A \in x.$$

Se la y che cerchiamo non esistesse, allora $\Gamma \cup \{\neg C, \Box C\}$ sarebbe KW-inconsistente (altrimenti potremmo prendere una sua qualunque estensione massimale come y e dedurre $x \mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}} y$, cadendo nell'assurdo). Per come è definito Γ, questo significa che esistono formule $\Box D_1, \ldots, \Box D_n, \Box E_1, \ldots, \Box E_k \in x$ tali che $\{D_1, \ldots, D_n, \Box E_1, \ldots, \Box E_k, \neg C, \Box C\}$ è KW-inconsistente. Pertanto

$$\begin{aligned}
&\vdash_{\mathsf{KW}} (D_1 \wedge \ldots \wedge D_n \wedge \Box E_1 \wedge \ldots \wedge \Box E_k) \to (\Box C \to C)\\
&\vdash_{\mathsf{KW}} \Box(D_1 \wedge \ldots \wedge D_n \wedge \Box E_1 \wedge \ldots \wedge \Box E_k) \to \Box(\Box C \to C)\\
&\vdash_{\mathsf{KW}} (\Box D_1 \wedge \ldots \wedge \Box D_n \wedge \Box\Box E_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box E_k) \to \Box(\Box C \to C)
\end{aligned}$$

e poiché KWinclude l'assioma **4**, *a fortiori*:

$$\vdash_{\mathsf{KW}} (\Box D_1 \wedge \ldots \wedge \Box D_n \wedge \Box E_1 \wedge \ldots \wedge \Box E_k) \to \Box(\Box C \to C)$$

e usando infine **W**:

$$\vdash_{\mathsf{KW}} (\Box D_1 \wedge \ldots \wedge \Box D_n \wedge \Box E_1 \wedge \ldots \wedge \Box E_k) \to \Box C$$

Ma siccome $\Box D_1, \ldots, \Box D_n, \Box E_1, \ldots, \Box E_k \in x$, dev'essere anche $\Box C \in x$, il che contraddice l'ipotesi.

□

Teorema 7.5. KW *è completo rispetto agli ordini parziali stretti finiti.*

Dimostrazione.
Sia A un qualunque non-teorema di KW, ed m il suo grado modale. Per il lemma 7.4 A è falsa in qualche mondo del modello $\mathcal{M}_m^{\mathsf{L}}$. Ma questo modello è un ordine parziale stretto finito, infatti:

- $\mathcal{W}_m^{\mathsf{KW}}$ ha dimensione finita (per l'accorgimento di aver considerato solo formule di grado non superiore a m);
- $\mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}}$ è irriflessiva perché, se valesse $x \mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}} x$ per qualche x, dalla definizione di $\mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}}$ seguirebbe che $\Box B \in x$ e $\Box B \notin x$ per qualche B, il che è assurdo;
- $\mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}}$ è transitiva perché se $x \mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}} y$ e $y \mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}} z$, se $\Box A \in x$ si ha (per la definizione di $\mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}}$) $\Box A \in y$ e quindi $\Box A \in z$ e $A \in z$. Inoltre presa una formula $\Box B$ tale che $\Box B \notin x$ e $\Box B \in y$ si deve avere $\Box B \in z$. Quindi valgono tutte le condizioni affinché si abbia anche $x \mathscr{R}_m^{\mathsf{KW}} z$.

□

Appendice A

Relazioni ed ordini

A.1 Relazioni

Riassumiamo con la tabella sottostante le principali proprietà che possono essere proprie di una generica relazione algebrica $\mathscr{R}$ binaria.

Nome proprietà	**Definizione**
Riflessiva	$\forall s.s \mathscr{R} s$
Transitiva	$\forall s,t,u.s \mathscr{R} t \wedge t \mathscr{R} u \rightarrow s \mathscr{R} u$
Serialità	$\forall s.\exists t.s \mathscr{R} t$
Simmetrica	$\forall s,t.s \mathscr{R} t \rightarrow t \mathscr{R} s$
Euclidea	$\forall s,t,u.s \mathscr{R} t \wedge s \mathscr{R} u \rightarrow t \mathscr{R} u$
Diretta debole (Convergente debole)	$\forall s,t,u.s \mathscr{R} t \wedge s \mathscr{R} u \rightarrow \exists v.t \mathscr{R} v \wedge u \mathscr{R} v$
Connessione debole (Linearità debole)	$\forall s,t,u.s \mathscr{R} t \wedge s \mathscr{R} u \rightarrow (t \mathscr{R} u) \vee (u \mathscr{R} t) \vee (t = u)$
Connessione	$\forall s,t.(s \mathscr{R} t) \vee (t \mathscr{R} s) \vee (s = t)$
Funzionalità parziale	$\forall s,t.s \mathscr{R} t \rightarrow \exists! s \mathscr{R} s$
Funzionalità	$\forall s.\exists! t.s \mathscr{R} t$
Sahlqvist	$\forall s,t,u.s \mathscr{R}^m t \wedge s \mathscr{R}^k u \rightarrow \exists v.t \mathscr{R}^n v \wedge u \mathscr{R}^j v$
Limitata inferiormente	$\exists s.\forall t.s \mathscr{R}^\star t$
Limitata superiormente	$\exists s.\forall t.t \mathscr{R}^\star s$

Tabella A.1: Le comuni proprietà di una relazione

A.2 Ordini

Riassumiamo le proprietà più comuni di cui possono godere delle relazioni d'ordine.

Riassumiamo queste stesse proprietà con la Figura A.1.

Osservazione 18. Se $\mathscr{R}$ è transitiva e irriflessiva allora è antisimmetrica. In presenza della transitività, asimmetria e irriflessività sono equivalenti.

Nome ordine	**Proprietà che soddisfa**
Ordine	transitiva antisimmetrica
Ordine parziale	transitiva antisimmetrica riflessiva
Ordine parziale stretto	transitiva antisimmetrica irriflessiva
Ordine totale	transitiva antisimmetrica riflessiva connessa
Ordine totale stretto	transitiva antisimmetrica irriflessiva connessa
Ordine ben fondato	ordine parziale stretto limitato inferiormente
Ordine buono	ordine totale stretto limitato inferiormente
Ordine dualmente ben fondato	ordine stretto limitato superiormente

Tabella A.2: Una topologia degli ordinamenti

A.3 Induzione transfinita

Sia dato un insieme W bene ordinato dalla relazione $<$ e sia $\mathcal{P}$ una proprietà.
Principio di induzione transfinita:

$$\frac{\forall y.[(\forall x.(x < y \rightarrow \mathcal{P}(x)) \rightarrow \mathcal{P}(y))]}{\forall z.\mathcal{P}(z)}$$

Esempio di buon ordinamento
Nella Figura A.2 vediamo la rappresentazione di un insieme definibile in questo modo:

$$2 \times \mathbb{N} = \mathbb{N} \uplus \mathbb{N},$$

dove $2 = \{0, 1\}$ e $\uplus$ è l'operatore di *unione disgiunta* fra insiemi. L'insieme $2 \times \mathbb{N}$ appare dunque così:

$$2 \times \mathbb{N} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \dots, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \dots\}.$$

Su questo insieme definiamo la relazione d'ordine $<'$ come segue:

- $\langle i, n\rangle <' \langle i, m\rangle \Leftrightarrow n < m$, e
- $\forall n, m.\langle 0, n\rangle <' \langle 1, m\rangle$.

Vediamo che $<'$ è un buon ordinamento. Su un insieme così definito non potremmo usare il classico principio di induzione matematica perché l'elemento $\omega = \langle 1, 0\rangle$ non è successore di alcun altro elemento. In questo caso, dunque, il *principio di induzione transfinita* enunciato sopra si rivela uno strumento indispensabile per la dimostrazione di teoremi.

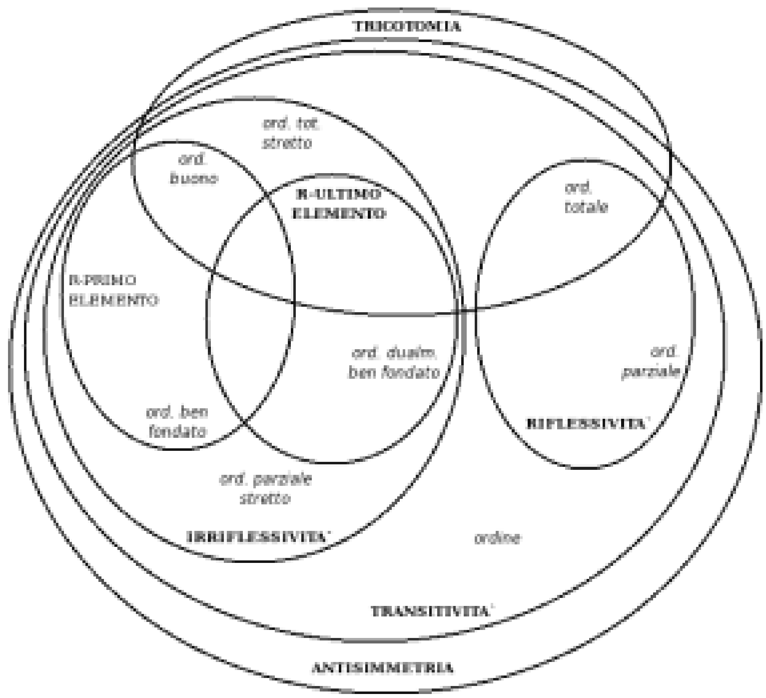


Figura A.1: Proprietà e relazioni d'ordine - una topologia riassuntiva

$$\overset{\bullet}{0} \longrightarrow \overset{\bullet}{1} \longrightarrow \overset{\bullet}{2} \longrightarrow \overset{\bullet}{3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{\bullet}{0'} \longrightarrow \overset{\bullet}{1'} \longrightarrow \overset{\bullet}{2'} \longrightarrow \overset{\bullet}{3'} \longrightarrow \cdots$$

Figura A.2: L'insieme $2 \times \mathbb{N}$

Appendice B

Mappe concettuali

Vogliamo presentare, in quest'appendice, alcune mappe che ci sembrano utili per lo studio degli argomenti presentati in questi appunti. In particolar modo esse permettono di *visualizzare* le interrelazioni fra i diversi concetti introdotti.

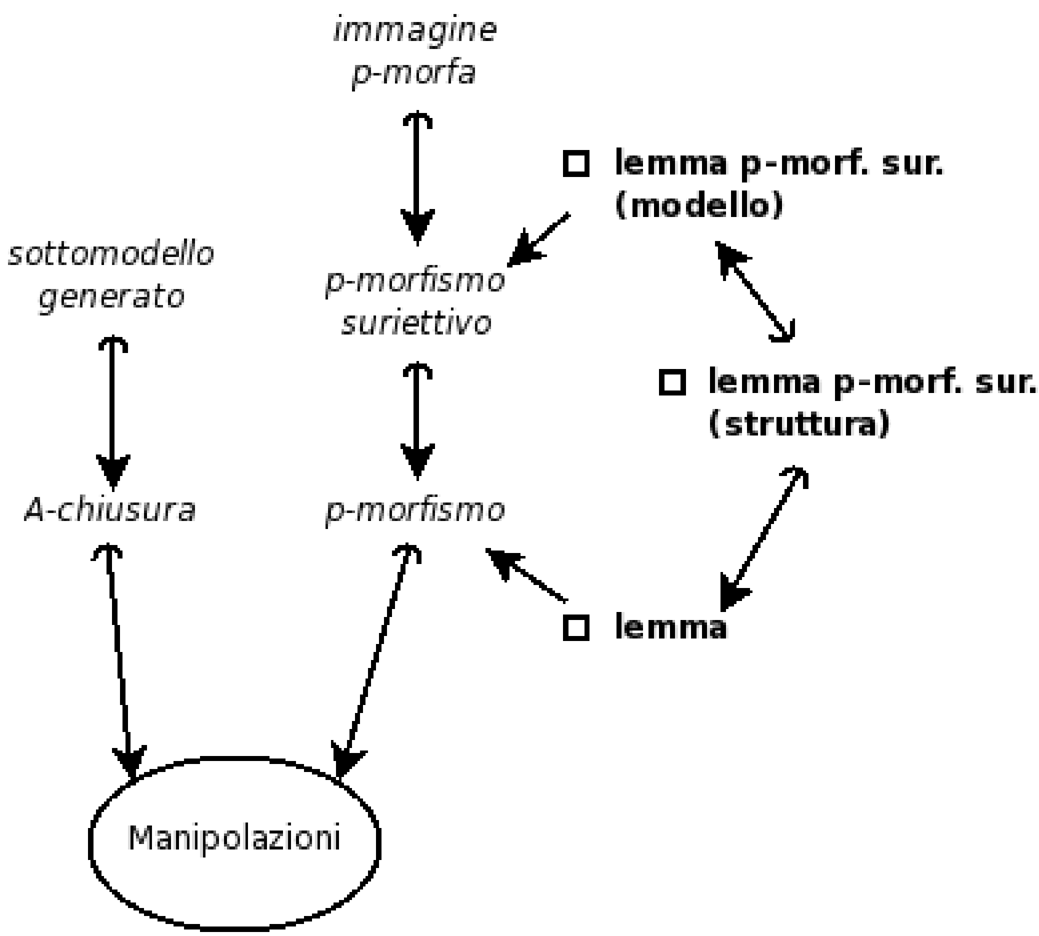


Figura B.1: Manipolazioni di modelli

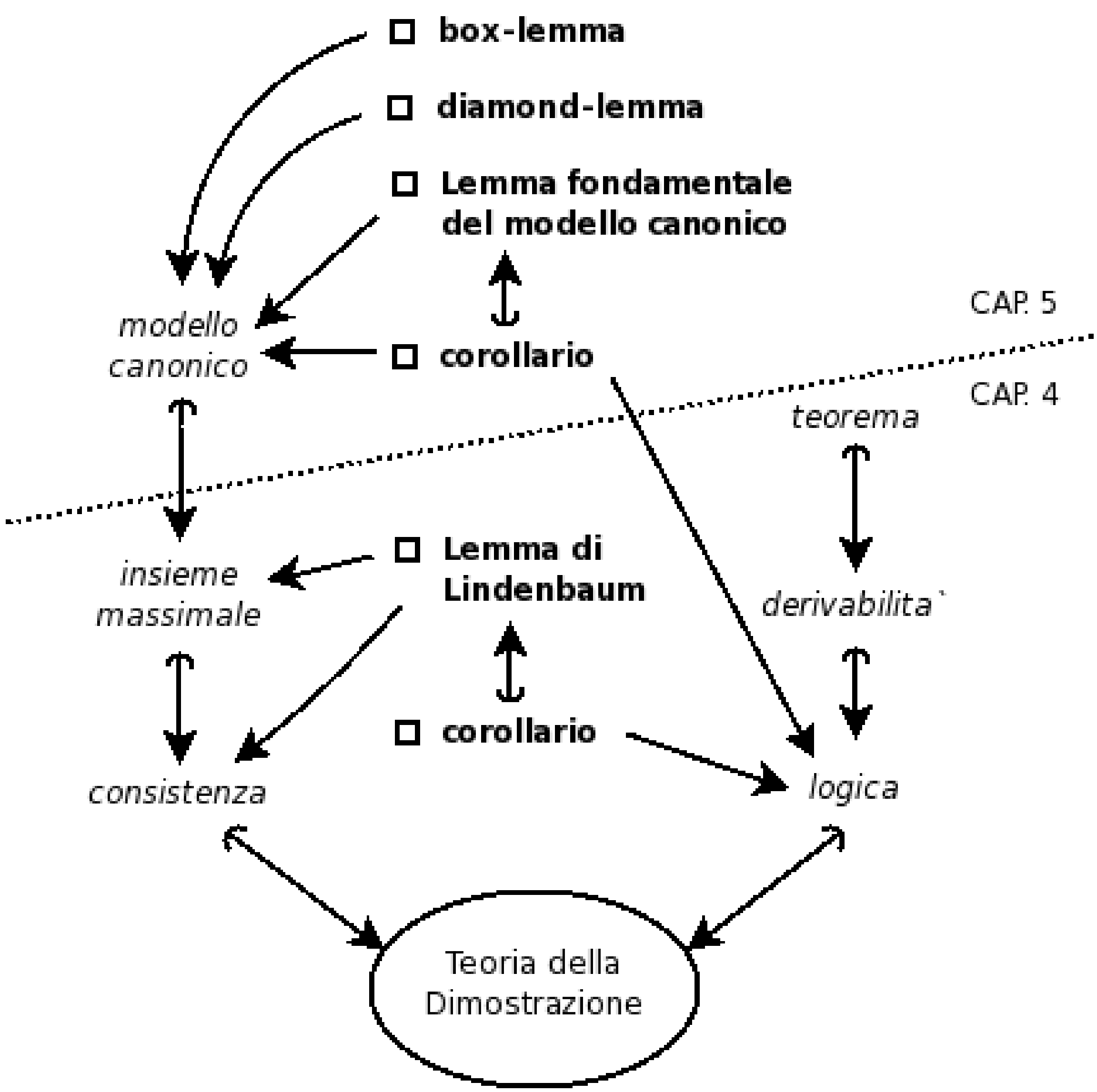


Figura B.2: Teoria della dimostrazione e modello canonico

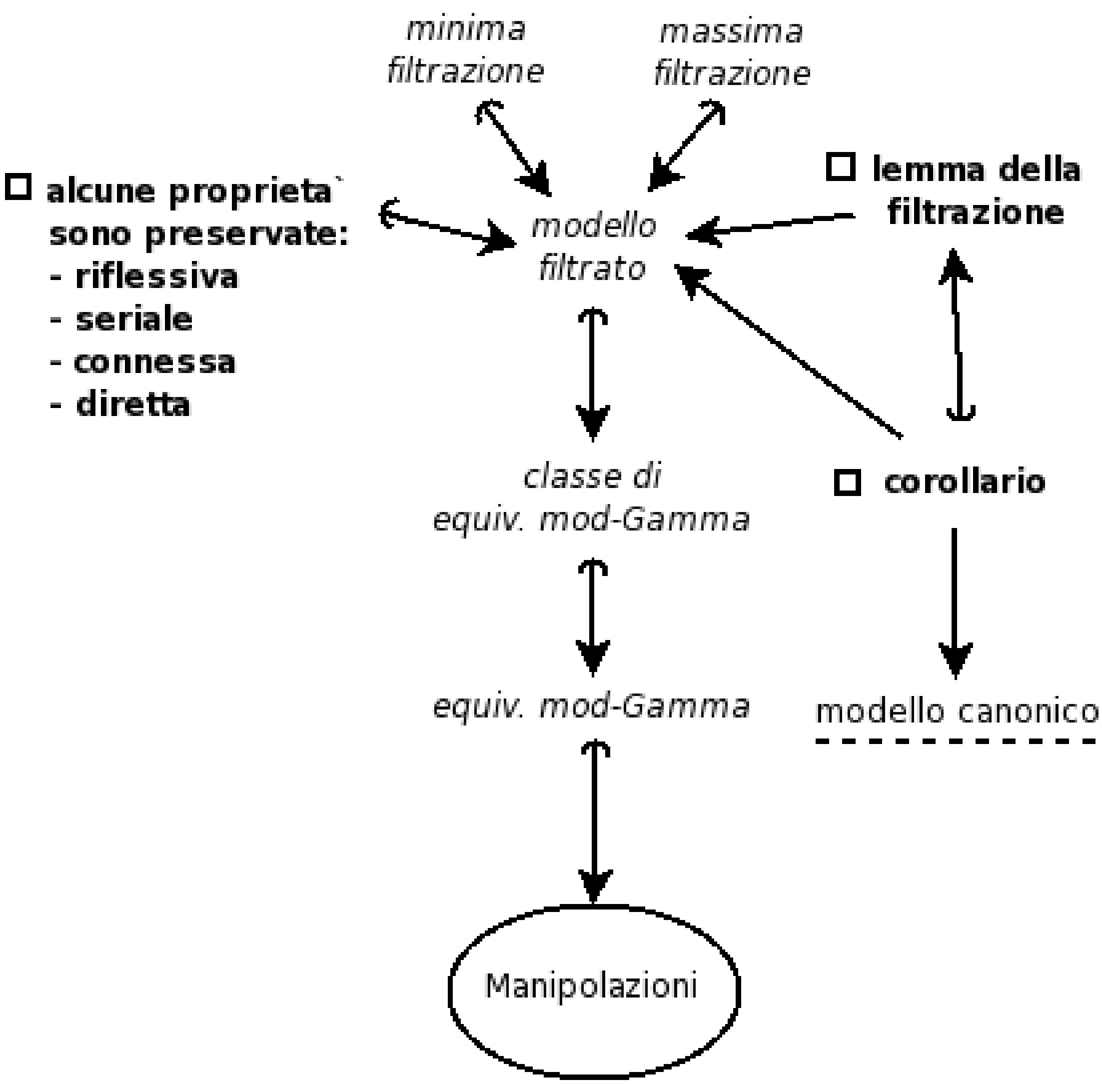


Figura B.3: Filtrazioni

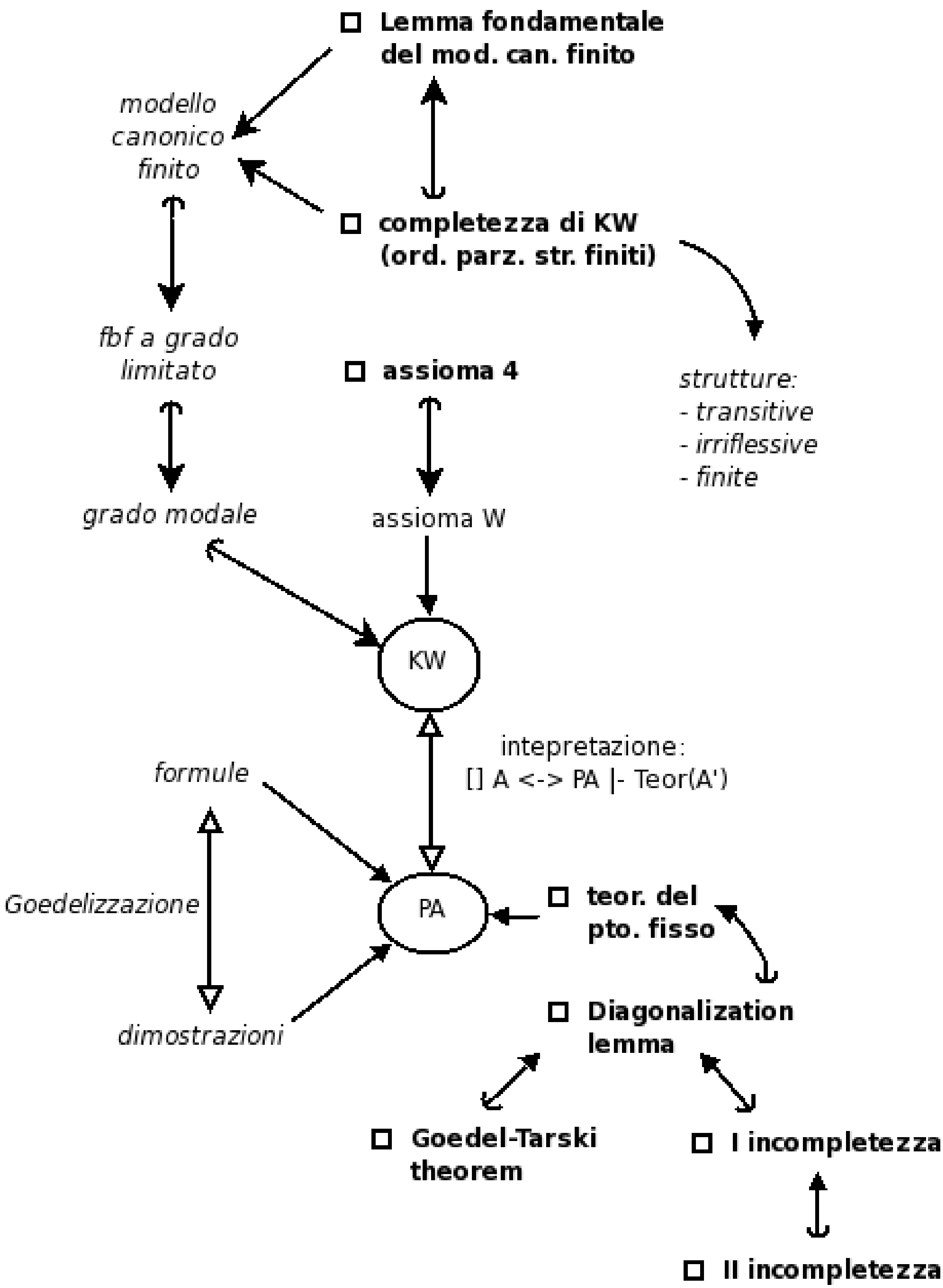


Figura B.4: KW e PA

Appendice C

Licenza

A chiusura di queste note, vorremmo sottolineare alcuni principi a cui teniamo:

- chi ha in mano queste note è libero di riprodurre e distribuire, in pubblico e non, questi contenuti. In toto, o solamente in parte;
- chi ha in mano queste note è libero di modificarle al fine di correggere refusi, ampliare la quantità di argomenti trattati; in poche parole di migliorarla;

purché:

- non si dimentichi di citare la paternità dei contributi, dalla loro origine fino ad includere tutte le modifiche che saranno apposte;
- non si faccia un uso commerciale di questi contenuti (né degli originali né delle aggiunte) senza un'esplicita e previa autorizzazione da parte degli autori;
-

Per la lettura del testo di licenza integrale, rimandiamo al seguente link:
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode`
Per futuri aggiornamenti ai contenuti di queste note, ci si può riferire a questo sito internet:
`http://spegni.web.cs.unibo.it/cgi-bin/index.php?modload=unibo`

Bibliografia

[Gol] Robert Goldblatt. *Logics of Time and Computation*. CSLI - Center for the Study of Language and Information.

[Smo85] C. Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic*. Springer-Verlag, 1985.

[vD] D. van Dalen. *Logic and Structure*.