Appunti di Matematica Discreta - dispensa 2

Giuseppe Sollazzo

2 maggio 2002

Indice

Capitolo 1

Strutture algebriche fondamentali

1.1 Generalità

Possiamo definire alcune strutture fondamentali. Ad esempio, definiamo queste due operazioni:
$* : A \times B \longrightarrow A$
$\cdot : A \times B \longrightarrow A$
Si considera strutturato il codominio: $(A, *), (A, \cdot)$.
Si dice che A è una struttura su B o che A è una B-struttura.

Consideriamo un campo $\mathbf{K}$ dove $\mathbf{K}$ è uno degli insiemi $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_m$. Noi studieremo gli **spazi vettoriali** V, che sono dei gruppi abeliani che sono anche K-strutture.

1.1.1 Proprietà

Valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$
2. $\forall a, b \in \mathbf{K}, \forall v \in V : a(bv) = (ab)v$
3. $\forall a \in \mathbf{K}, \forall v_1, v_2 \in V : a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$
4. $\forall a, b \in \mathbf{K}, \forall v \in V : (a + b)v = av + bv$

1.2 Il gruppo $(\mathbf{K}^n, +)$

$\mathbf{K}^n$, per $n \geq 1$ intero, è l'insieme delle **n-ple** ordinate di elementi di $\mathbf{K}$ e quindi un suo elemento X è della forma $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ dove x_1 si chiama **prima componente**, x_i è la componente i-esima, x_n la componente n-esima.

1.2.1 Somma di n-ple

La somma di n-ple viene così definita:
$+ : \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^n$.
Quindi, date due n-ple $X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$, la n-pla somma è la seguente:
$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n + y_n)$

Vogliamo ora dimostrare che la struttura $(\mathbf{K}^n, +$ è un gruppo abeliano. Verifichiamo dunque se valgono le proprietà di un gruppo abeliano:

(i) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$: la dimostrazione è immediata perchè la somma si effettua componente per componente ottenendo $(x_i + y_i) + z_y = x_i + (y_i + z_i)$, dove le componenti appartengono a $\mathbf{K}$, dove vale la proprietà associativa.

(ii) $X + Y = Y + X$: per lo stesso motivo, anche questa proprietà è verificata

(iii) $\exists 0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$, elemento neutro tale che $X + 0 = X$: stesso discorso

(iv) esistenza dell'opposto: si tratta delle componenti cambiate di segno in quanto: $X + (-X) = 0$ (dimostrabile con lo stesso criterio)

1.2.2 Prodotto per scalari

Il prodotto per scalari è un'operazione così definita:
$\cdot : \mathbf{K} \times \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^n$. Il prodotto si ottiene moltiplicando per un intero, tutte le componenti della n-pla:
$aX = (ax_1, \ldots, ax_i, \ldots, ax_n)$. Anche in questo caso valgono le proprietà della moltiplicazione, e si nota che se $n = 1$, il prodotto in $\mathbf{K}^n$ equivale al prodotto in $\mathbf{K}$.

1.3 Potenza

Sia $(G, \cdot)$ un semigruppo e sia $a \in G$ un suo elemento, si chiama **potenza n-esima di a** l'elemento così definito:
$\forall n \in \mathbf{N} - 0$

$$a^n = \begin{cases} a^{n-1} \cdot a & \text{se } n > 0 \\ 1_G & \text{se } n = 0 \\ (a^{-1})^{-n} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Tutto questo in notazione moltiplicativa, invece in notazione additiva, considerando la struttura $(G, +)$ abbiamo la seguente definizione:
$\forall n \in \mathbf{N} - 0$

$$na = \begin{cases} (n-1) \cdot a + a & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ -n(-a) & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Valgono le seguenti propriet:
Se $(G, \cdot)$ è un gruppo (o $(G, +)$ un gruppo commutativo), e $a, b \in G$, si ha:

- $(a^n)^m = a^{nm}$ oppure $m(na) = (nm)a$
- $a^n a^m = a^{n+m}$ oppure $na + ma = (n+m)a$

Se $(G, \cdot)$ è un gruppo commutativo, o meglio $ab = ba$, allora:

- $a^m b^m = (ab)^m$ oppure $ma + mb = m(a+b)$

1.4 Il monoide $(A^A, \circ)$

Definiamo A^A l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \longrightarrow A$, e l'operazione di composizione di applicazioni $\circ : A^A \times A^A \longrightarrow A^A$.
La struttura $(A^A, \circ)$ è un monoide perchè l'operazione è associativa ed esiste l'elemento neutro rappresentato dall'applicazione identica, tale che $i_A(x) = x$. Ovviamente non vale la proprietà commutativa. Definite le due funzioni $f : A \longrightarrow A$ e $g : A \longrightarrow A$

Sapendo che $A \subset \mathbf{K}$, consideriamo $\mathbf{K}^A = \{f : A \longrightarrow \mathbf{K}\}$.
Consideriamo ora la struttura algebrica $(\mathbf{K}^A, +)$ e le due funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{K}$ e $g : A \longrightarrow \mathbf{K}$.
Allora valgono le seguenti proprietà di somma e prodotto di funzioni:

- $f + g : A \longrightarrow \mathbf{K}$ dove $\forall x \in A : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbf{K}$ dove $\forall x \in A : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

L'anello $(\mathbf{K}^A, +, \cdot)$ è un **anello commutativo con unità** in quanto è banalmente dimostrabile, derivando le operazioni dall'insieme A che la struttura $(\mathbf{K}^A, +)$ è un gruppo abeliano, mentre la struttura $(\mathbf{K}^A, \cdot)$ è un semigruppo.

Capitolo 2

Strutture geometriche

2.1 La retta e le operazioni ad essa associate

Data una retta r consideriamo l'insieme V =segmenti di r orientati aventi il primo estremo in comune.

L'addizione è così definita: $+ : V \times V \longrightarrow V$, e si scrive $OP + OQ = OR$. Cioè la somma dei segmenti OP e OQ è data dal segmento OR così definito:

1. se P e Q stanno in una stessa semiretta rispetto al punto O, allora $||OR|| = ||OP|| + ||OQ||$[1].
2. se P e Q stanno in semirette opposte rispetto al punto O allora
   (a) $||OP|| \geq ||OQ||$ allora R sta nella stessa semiretta di P e $||OR|| = ||OP|| - ||OQ||$.
   (b) $||OQ|| \geq ||OP||$ allora R sta nella stessa semiretta di Q e $||OR|| = ||OQ|| - ||OR||$.

La struttura $(V, +)$ è un gruppo abeliano.[2]

Il prodotto di un numero per un segmento è così definito: $\cdot : \mathbf{R} \times V \longrightarrow V$ in cui $\forall a \in \mathbf{R} : a \cdot OP = OR, ||OR|| = |a| \cdot ||OP||$ dove se $a \geq 0$ allora R è nella stessa semiretta di P, altrimenti è nella semiretta opposta.
Valgono le seguenti proprietà:

1. $1 \cdot OP = OP$
2. $a(bOP) = (ab)OP$
3. $(a + b)OP = aOP + bOP$
4. $a(OP + OA) = aOP + aOA$

La retta è uno **spazio vettoriale**.

[1] Il simbolo ||a|| indica la lunghezza del segmento a.
[2] La verifica delle prime tre proprietà è banale, mentre la verifica dell'associatività richiede l'esame dei vari casi.

2.2 Il piano

Consideriamo l'insieme di segmenti del piano invece che della retta. Allora le operazioni saranno definite in modo analogo.

L'operazione somma $+ : V \times V \longrightarrow V$ associa alla coppia (OP, OQ) di segmenti di V il segmento $OR = OP + OQ$ determinato come segue:

1. se i punti O, P, Q sono sulla stessa retta, allora OR si ottiene come nell'addizione in una retta
2. se i punti O, P, Q sono su rette diverse allora OR è dato dalla **regola del parallelogramma** ossia OR è la diagonale del parallelogramma di vertici consecutivi P, O, Q, R.

2.3 Spazi vettoriali

Consideriamo l'insieme $\mathbf{V}$, il campo $\mathbf{K}$ e le operazioni
somma $+ : \mathbf{V} times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ e
prodotto per scalari $\cdot : \mathbf{K} times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$.
$\mathbf{v}$ si definisce $\mathbf{K}$-spazio vettoriale se valgono le seguenti affermazioni:

(i) $(V, +)$ è un gruppo abeliano

(ii) Si hanno le seguenti proprietà:

  (a) $1 \cdot v = v, \forall v \in \mathbf{V}$
  (b) $a \cdot (b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot v, \forall v \in \mathbf{V}, \forall a, b \in \mathbf{K}$
  (c) $a \cdot (v_1 + v_2) = av_1 + av_2, \forall v_1, v_2 \in \mathbf{V}, \forall a \in \mathbf{K}$
  (d) $(a + b) \cdot v = av + bv, \forall v \in \mathbf{V}, \forall a, b \in \mathbf{K}$

2.3.1 Proprietà degli spazi vettoriali

Per gli spazi vettoriali valgono le seguenti proprietà:

1. Legge di annullamento: $a \cdot X = 0_V ssea = 0 \vee X = 0_V$[3]
   Dimostriamo che (i) se $a = 0$ allora $0 \cdot X = 0_V, \forall X \in \mathbf{V}$ e che (ii) se $X = 0$ allora $a \cdot 0_V = 0_V, \forall a \in \mathbf{K}$. Inoltre (iii) dimostriamo l'implicazione inversa:

   (i) Sviluppiamo l'uguaglianza: $0 \cdot X = (0 + 0) \cdot X = 0 \cdot X + 0 \cdot X$. Ottenuto questa uguaglianza, dato che in $(V, +)$ vale la proprietà commutativa, possiamo aggiungere o sottrarre ad entrambi i membri una stessa quantità ottenendo:
   $0 \cdot X - 0 \cdot X = (0 \cdot X + 0 \cdot X) - 0 \cdot X$ che, applicando la proprietà associativa al secondo membro, diventa: $0 \cdot X - 0 \cdot X = 0 \cdot X + (0 \cdot X - 0 \cdot X)$: abbiamo ad entrambi i membri due differenze di numeri opposti, che ci danno il risultato $0_V = 0 \cdot X + 0_V$[4].
   Per cui, $0_V = 0 \cdot X$ c.v.d

[3] Dove a è uno scalare (cioè un numero), X è un vettore, 0 è l'elemento neutro del campo $\mathbf{K}$ e 0_V è l'elemento neutro dello spazio vettoriale.

[4] In quanto essendo in uno spazio vettoriale $0 \cdot X - 0 \cdot X = 0_V$.

(ii) Sviluppiamo l'uguaglianza: $a \cdot 0_V = a \cdot (0_V + 0_V) = a \cdot 0_V + a \cdot 0_V$. Dalla teoria, sappiamo che esiste l'elemento $-(a \cdot 0_V)$ cioè l'opposto dell'elemento $a \cdot 0_V$.
Dunque, come nel caso precedente: $a \cdot 0_V - a \cdot 0_V = a \cdot 0_V + (a \cdot 0_V - a \cdot 0_V)$ e dunque $0_V = a \cdot 0_V$ c.v.d.

(iii) Dimostriamo quindi che $a \cdot X = 0_V \Rightarrow a = 0 \vee X = 0_V$.
Dunque speculiamo sul valore di a. Se sappiamo che $a = 0$ ovviamente ci fermiamo perchè non c'è nulla da dimostrare. Per cui supponiamo $a \neq 0$. Sappiamo che per $a \in \mathbf{K} \exists a^{-1} \in \mathbf{K}$.
Moltiplichiamo entrambi i membri per questo elemento, che è l'inverso di a: $a^{-1} \cdot (aX) = a^{-1} \cdot 0_V$ che per associatività diventa $(a^{-1}a)X = 0_V$ cioè $1X = 0_V$ che è possibile se e solo se $X = 0_V$ c.v.d.

2. $(-a)X = a(-X) = -(aX)$ e in particolare $(-1)X = -X$[5]
Dimostriamo (i) che $(-a)X + aX = 0_V$[6] e che analogamente $(ii) a(-X) + aX = 0_V$.

   (i) per la proprietà 4 $(-a)X + aX = (-a + a)X = 0X = 0_V$

   (ii) per la proprietà 3 $a(-X) + aX = a(-X + X) = a0_V = 0_V$

Esempi di spazi vettoriali

$\mathbf{K}^n$ è uno spazio vettoriale, come pure $\mathbf{K}^{m,n}$ cioè lo spazio delle matrici. $\mathbf{K}^A$ è uno spazio vettoriale chiamato spazio delle applicazioni. Altri spazi sono la retta, il piano, e $\mathbf{K}^K$.

2.4 Sottospazi

Supponiamo $W \subseteq \mathbf{V}$. Si dice che W è un **sottospazio** di $\mathbf{V}$ se è un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni di $\mathbf{V}$.

Teorema 1 *Sia* $\mathbf{V}$ *un* $\mathbf{K}$*-spazio vettoriale e* $W \neq \oslash$ *un sottoinsieme di* $\mathbf{V}$. *Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. W *è un sottospazio di* $\mathbf{V}$
2. *Si ha:*
   I) $\forall w, w' \in W \Rightarrow (w + w') \in W$
   II) $\forall a \in \mathbf{K}, \forall w \in W \Rightarrow (a \cdot w) \in W$
   III) $0_{\mathbf{V}} \in W$[7]
3. $\forall a, b \in \mathbf{K}, \forall w, w' \in W \Rightarrow (aw + bw') \in W$

In ongi spazio vettoriale ci sono almeno 2 sottospazi: 0 e lo spazio stesso, che sono due sottospazi impropri.

[5] Quindi il segno $-$ può essere interpretato come -1.
[6] Perchè (-a)X=-(aX)
[7] in realtà non servirebbe perchè deriva dalla II per a=0

Consideriamo ora $A \subseteq \mathbf{V}$ e $B \subseteq \mathbf{V}$. Si definisce $A + B$ l'insieme costituito da tutte le possibili somme di un elemento di A con un elemento di B: $A + B = v \in \mathbf{V} \mid \exists v_1 \in A, \exists v_2 \in B talichev = v_1 + v_2$. Se $A = x_0$ cioè è un solo vettore, allora basta scrivere $x_0 + B$.

2.4.1 Teoremi sui sottospazi

Teorema 1 *Sia* $\mathbf{V}$ *un* $\mathbf{K}$*-spazio vettoriale e siano* W_1, W_2 *due sottospazi. Si ha che:*

1. $W_1 \cup W_2$ *non è mai un sottospazio a meno che uno dei due non contenga l'altro.*

2. $W_1 \cap W_2$ *è sempre un sottospazio (male che vada, conterrà il vettore nullo) ed è il più grande sottospazio contenuto in emntrambi* W_1, W_2*.*

3. $W_1 + W_2$ *è sempre un sottospazio, anzi è il più piccolo sottospazio che contiene* W_1, W_2*.*[8]

Dimostrazione della proprietà 3.
Sfruttiamo la proprietá 3 dei sottospazio: Sia $W = W_1 + W_2$. Dimostriamo che W è un sottospazio (i) e che è il più piccolo.

$\forall a, b \in \mathbf{K}, \forall w, w' \in W \Rightarrow aw + bw' \in W$.
$w \in W$ significa che $\exists w_1 \in W_1, \exists w_2 \in W_2$ tali che $w_1 + w_2 = w$
$w' \in W$ significa che $\exists w_1' \in W_1, \exists w_2' \in W_2$ tali che $w_1' + w_2' = w'$
Dimostrare che $aw + bw' \in W$ significa quindi dimostrare che $\exists X_1 \in W_1, \exists X_2 \in W_2$ tali che $X_1 + X_2 = aw + bw'$.

Quindi $aw + bw' = a(w_1 + w_2) + b(w_1' + w_2') = aw_1 + bw_1' + aw_2 + bw_2'$ da cui i primi due termini sono $X_1 \in W_1$ mentre terzo e quarto termine sono $X_2 \in W_2$. Per cui, è stata dimostrata l'esistenza di $X_1 e X_2$ com'era richiesto.

Consideriamo ora $\mathbf{K}^{n,n>1}$ e W, l'insieme delle soluzioni dell'equazione di tipo $a_1x_1 + \cdots + a_ix_i + \cdots + a_nx_n = 0$. Tale equazione si chiama equazione di W. Dobbiamo dimostrare che W è un sottospazio. Se tutte le a_i sono uguali a 0, allora si ha un'identità per cui tutte le n-ple sono soluzioni. Altrimenti dobbiamo dimostrare che:

$$\forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in W$$

[8] Cioè ogni sottospazio che contiene entrambi i sottospazi, ne contiene necessariamente la somma.

$$\forall Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in W$$

Ecco la n-pla $\forall a, b \in \mathbf{K}$:

$$aY + bZ = \begin{pmatrix} ay_1 + bz_1 \\ \vdots \\ ay_i + bz_i \\ \vdots \\ ay_n + bz_n \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo :
$aY \in W \iff a_1y_1 + \cdots + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n$ e
$bZ \in W \iff b_1z_1 + \cdots + b_1z_1 + \cdots + b_nz_n$ dobbiamo verificare che valga la seguente implicazione:

$aY + bZ \in W \iff a_1(ay_1 + bz_1) + \cdots + a_i(ay_i + bz_i) + \cdots a_n(ay_n + bz_n) = 0$
che, mettendo in evidenza la a e la b diventa:
$a(a_1y_1 + \cdots + a_iy_i + \cdots + a_ny_n) + b(b_1z_1 + \cdots + b_iz_i + \cdots + b_nz_n)$ ma entrambi i termini tra parentesi sono, per ipotesi, uguali a 0, dunque:
$a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$ c.v.d.

Invece, se $n = 1$ siamo in $\mathbf{K}$ dunque non ci sono sottospazi propri per la proprietà II (comunque si prendano elementi $\neq 0$, ci sono tutti i numeri in $\mathbf{K}$).

Ovviamente possiamo avere più di un sottospazio: indichiamo così

$$\begin{cases} W_1 = a_{11}x_1 + \cdots \\ \vdots \\ W_j = a_{j1}x_1 + \cdots \\ \vdots \\ W_m = a_{m1}z_1 + \cdots \end{cases}$$

oppure, in forma matriciale, scrivendo $AX = 0$. Ogni soluzione di un sistema di equazioni lineari omogenee è un sottospazio.

$\mathbf{K}^{\mathbf{K}}$ è uno spazio vettoriale, mentre $\mathbf{K}[X]$ è un suo sottospazio che rappresenta l'insieme di tutti i polinomi nell'incognita X. Per indicare l'insieme dei polinomi di grado $\leq m$ si scrive $\mathbf{K}_m[X]$.
Se consideriamo una retta, essa non ha sottospazi proprio, infatti se consideriamo il sottospazio W e un punto $P \neq 0$, dove $P \in W$ allora W contiene tutti gli altri punti della retta.
Nel piano, l'unione di due rette non può essere un sottospazio in quanto non è inclusa l'origine e infatti la somma di due rette coincide con tutto il piano.

2.5 Varietà lineari

Fissiamo un vettore X_0 e un sottospazio W allora $\mathbf{V} = X_0 + W$ e $\mathbf{V}$ si chiama **varietà lineare**. Il sottospazio W viene invece denominato **sottospazio associato** alla varietà lineare. La definizione è equivalente se scritta così: $\mathbf{X}$ è una varietà lineare se $\exists w \in W$ tale che $\mathbf{X} = X_0 + W$, oppure $\mathbf{X}$ tale che $(\mathbf{X} - X_0) \in W$.

Enunciamo alcune proprietà che valgono per le varietà lineari:

1. $X_0 \in \mathbf{V}$ perchè $X_0 = X_0 + 0_{\mathbf{V}}$. I vettori del sottospazio $\notin \mathbf{V}$ eccetto un caso: $\mathbf{V} = X_0 + W, \mathbf{V} \equiv W \iff X_0 \in W$ cioè la varietà lineare coincide con W se X_0 è un vettore di W.
2. Supponiamo di avere $\mathbf{V} = X_0 + W$ e $\mathbf{V}' = X_1 + W$. Quando due varietà lineari hanno lo stesso sottospazio associato, allora:
   (i) Coincidono se e solo se $X_0 \in \mathbf{V}' \wedge X_1 \in \mathbf{V}$
   (ii) non hanno elementi in comune

2.5.1 Alcune definizioni sulle varietà lineari

a) Si chiama **sottovarietà** di $\mathbf{V}$ la varietà $\mathbf{V}'$ quando $\mathbf{V}' = X_1 + W' \wedge \mathbf{V} = X_0 + W$ e $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$.
Inoltre, $\mathbf{V}'$ è una sottovarietà se e solo se $X_1 \in \mathbf{V}$ e W' è un sottospazio di W.
Ogni varietà ha almeno u na sottovarietà: quella composta dai suoi vettori.

b) L'intersezioni di due varietà si dice **varietà intersezione** ed esiste a condizione che le due varietà abbiano almeno un punto in comune

c) Due varietà si dicono **parallele** se il sottospazio associato alla prima contiene il sottospazio associato alla secondo o viceversa

d) Due varietà si dicono **sghembe** se la loro intersezione è vuota e non sono parallele

e) Si dice **congiungente** di due varietà lineari la più piccola varietà lineare che le contiene entrambe

Esempi di varietà lineari

1. Le varietà lineari di una retta sono esclusivamente i punti e la retta stessa. Infatti ogni punto pu essere espresso come $P + O_{\mathbf{V}}$
2. Le varietà lineari di un piano sono esclusivemente i punti, le rette e il piano stesso. Questo perchè ogni punto può essere inteso come varietà intersezione di due rette, mentre ogni retta come varietà congiungente due punti.
3. Le varietà lineari dello spazio sono i punti, le rette, i piani e lo spazio stesso. Infatti, ogni punto è varietà intersezione di tre piani o due rette complanari, ogni retta è varietà intersezione di due piani o congiungente

due punti, ogni piano è varietà congiungente tre punti o una retta e un punto che non giace su essa o due rette complanari.

2.6 Spazi finitamente generati

2.6.1 Combinazione lineare

Sia V un **K**-spazio vettoriale con r vettori $v_1, \dots, v_i, \dots, v_r$. Allora $v \in V$ è **combinazione lineare** dei vettori se esistono r elementi $a_1, \dots, a_i, \dots, a_r$ tali che $v = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_r v_r$.

Per esempio, in $\mathbf{R}^3$ dati i due vettori $v_1(1, 2, 4)$ e $v_2(3, 1, 6)$ il vettore $v(5, 5, 14)$ è loro combinazione lineare in quanto $v = 2v_1 + v_2$.

Il **vettore nullo** è dato dalla **combinazione lineare nulla** ossia $0 = 0v_1 + \dots + 0v_i + \dots + 0v_r$, in cui tutte le a_i sono nulle.

2.6.2 Spazio delle combinazioni lineari Span

Consideriamo l'insieme di tutte le combinazioni lineari degli r vettori. Indichiamo tale spazio con il simbolo $Span(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)$. Oppure, per comodità, ponendo $E = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_r\}$ indichiamo tale spazio con $Span(E)$.

Teorema 1 *Sia V un* **K**-*spazio e sia $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)$ una r-pla di suoi vettori. Allora $Span(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)$ è sempre un sottospazio di V.*

Dimostrazione
$\forall v, v' \in Span(E), \forall a, b \in \mathbf{K} \Rightarrow av + bv' \in Span(E)$. Per cui possiamo scrivere:
$v = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_r v_r$ e
$v' = b_1 v_1 + \dots + b_i v_i + \dots + b_r v_r$. Dobbiamo quindi dimostrare che $\exists c_1, \dots, c_i, \dots, c_r$ tali che:
$av + bv' = a_1 v_1 + \dots + c_i v_i + \dots + c_r v_r$.

Ma questo si ha subito perchè:
$av = a \cdot a_1 v_1 + \dots + a \cdot a_i v_i + \dots + a \cdot a_r v_r$ e
$bv' = b \cdot b_1 v_1 + \dots + b \cdot b_i v_i + \dots + b \cdot b_r v_r$.
Per cui la loro somma è $av + bv' = (aa_1 + bb_1)v_1) + \dots + (aa_i + bb_i)v_i) + \dots + (aa_r + bb_r)v_r)$.

Abbiamo dunque trovato i valori che cercavamo: $c_i = (aa_i + bb_i)v_i)$ e quindi abbiamo dimostrato che l'insieme $Span(E)$ è un sottospazio.

2.7 Spazi finitamente generati

I vettori $v_1, \dots, v_i, \dots, v_r$ presi singolarmente si dicono **generatori dello spazio Span**, mentre l'insieme E si dice **insieme generatore**.

Può accadere che $V = Span(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)$. Allora si dice che lo spazio vettoriale V è **finitamente generato**.[9]

[9] Cioè esiste un numero finito di vettori che genera tale spazio.

Esempi di spazi finitamente generati

1. Il sottospazio $\{0\}$ è finitamente generato ed ha un solo generatore: 0.
2. La retta r è finitamente generata in quanto basta prendere $P \neq 0$ dato che ogni altri punto $Q = aP$.
3. Nel piano due punti P, Q che non sono sulla stessa retta generano tutto il piano.

Consideriamo ora lo spazio $\mathbf{K}^n, n > 1$. Le n-ple:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono l'insieme dei generatori dello spazio $\mathbf{K}^n$, dove ogni vettore X è dato dalla seguente relazione:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_i e_i + \cdots + x_n e_n$$

Esempi di spazi finitamente generati

1. Lo spazio delle applicazioni $\mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ non è finitamente generato.
2. Lo spazio dei polinomi in un'incognita non è finitamente generato perchè non esiste un numero finito di vettori.
3. Lo spazio $\mathbf{K}^{m,n} dellematrici \varepsilon_{ij} = (a_{rs})$ dove $a_{rs} = 0$ tranne che per $a_{ij} = 1$.

Gli spazi span sono importanti perchè tutti i sottospazi di V sono generati da un certo numero di vettori

2.7.1 Proprietà degli spazi finitamente generati (Teorema)

Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale e sia $E = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) \subseteq V$. Allora:

1. Lo spazio generato da E, $(Span(E))$, non dipende dall'ordine dei vettori.
2. $Span(E) = Span(E_1)$ dove E_1 è ottenuto da E togliendo il vettore nullo tutte le volte che compare in E.
3. $Span(E) = Span(E_1)$ dove $E_1 = \{b_1 v_1, \ldots, b_i v_i, \ldots, b_j v_j, \ldots, b_r v_r\}$ con $b_i \neq 0 \forall i = 1, \ldots, r$.

4. $Span(E) = Span(E_1)$ dove $E_1 = \{v_1, \ldots, v_i + av_j, \ldots, v_r\}$ cioè si lascia inalterato ogni vettore ad eccezione di v_i che viene espresso in termini di un'altro vettore v_j[10].

5. $Span(E) = Span(E_1)$ dove

$$E_1 = \left\{ v_1 + \sum_{h=2}^{r} a_h v_h, v_2 + \sum_{h=1, h\neq 2}^{r} a_h v_h, \ldots, v_i + \sum_{h=1, h\neq i}^{r} a_h v_h, \ldots, v_r + \sum_{h=1}^{r-1} a_h v_h \right\}$$

   dove ogni sommatoria rappresenta la combinazione lineare di tutti gli altri vettori.

2.7.2 Dipendenza e indipendeza lineare

Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale e siano i vettori $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r \in V$. Diremo che i vettori sono **linearmente indipendenti** se l'uguaglianza
$a_1v_1 + \cdots + a_iv_i + \cdots + a_rv_r = 0$ è vera se e solo se $a_1 = \cdots = a_i = \cdots = a_r = 0$, con $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_r \in \mathbf{K}$ cioè se il vettore nullo può essere ottenuto soltanto mediante la combinazione lineare nulla.
In caso contrario, cioè se i coefficienti a_i non tutti nulli producono comunque il vettore nullo, i vettori si dicono **linearmente dipendenti**[11].

Osservazioni

1. La dipendenza riguarda solitamente più vettori, cioè si dice che un vettore v è linearmente dipendente da r vettori $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r$.
   Un unico vettore v è sempre linearmente dipendente perchè se è nullo è sempre linearmente dipendente, altrimenti se non lo è esiste un coefficiente a che per la legge di annullamento restituisce il vettore nullo: $av = 0 \iff a = 0$.

2. Un vettore v è linearmente dipendente da r vettori se può essere espresso come combinazione lineare di tali vettori.

2.7.3 Insiemi di generatori - Teoremi - Il metodo degli scarti successivi

Un insieme $E \subset V$ si dice **libero** se i suoi vettori sono linearmente indipendenti, altrimenti si dice non libero.

Teorema 1 *Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale ed $E = v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r \subseteq V$. Allora si ha:*

1. *Il fatto che E sia libero o meno non dipende dall'ordine dei vettori.*

2. *Se $r = 1$, cioè se $E = \{v_1\}$ allora E è libero se e solo se $v_1 \neq 0$.*

3. *Se $v_i = 0 \in E$ allora E non è libero.*

---

[10] È importante perchè se $v_i + av_j = 0$, possiamo eliminarlo per la proprietà 2.

[11] In altre parole, il vettore nullo si ottiene **anche** (e non solo) da una combinazione lineare diversa da quella nulla. Ciò implica che si possa ottenere il vettore nullo con almeno due combinazioni lineari se i vettori sono linearmente dipendenti.

4. *Se $\exists v_j$ dipendente da tutti gli altri vettori, allora E non è libero.*

5. *Se E non è libero e se $a_1v_1 + \cdots + a_iv_i + \cdots + a_jv_j + a_rv_r = 0$ con $a_j \neq 0$ allora v_j è combinazione lineare degli altri, cioè è linearmente dipendente dagli altri.*

6. *Se E è libero allora ogni suo sottoinsieme non vuoto è libero.*

Dimostrazione

1. È ovvio dato che l'ordine non cambia il risultato nella combinazione lineare.

2. Se $v \neq 0$ risulta che $av = 0$ se e solo se $a = 0$, ossia si ha 0 solo con la combinazione lineare nulla.

3. Se $v_i = 0$ allora se prendiamo coefficienti a tutti uguali a 0, ad esclusione di $a_i = 1$, otteniamo $0v_1 + \cdots + \cdots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \cdots + 0v_r = 1 \cdot v_i = 0$ cioè otteniamo il vettore nullo con una combinazione lineare non nulla.[12]

4. Se v_j è dipendente, significa che posso scrivere $v_j = a_1v_1 + \cdots + a_iv_i + \cdots + a_r = 0$.

5. Dato che esiste l'inverso dell'elemento a_j possiamo moltiplicare ogni addendo per tale elemento ottenendo $v_j = -a_j^{-1}a_1v_1 - \cdots - a_j^{-1}a_iv_i - \cdots - a_j^{-1}a_rv_r$.

6. Prendiamo un sottoinsieme con un numero $h < r$ di elementi. Più precisamente prendiamo i primi h elementi di $E : E' = \{v_1, \ldots, v_r\}$. Se tali vettori fossero dipendendi, allora potremmo ottenere il vettore nullo con qualche $a_i \neq 0$, ma questo sarebbe assurdo in quanto si avrebbe $a_1v_1 + \cdots + a_iv_i + \cdots + a_hv_h + 0v_{h+1} + \cdots + 0v_r = 0$ quindi si otterrebbe il vettore nullo da una combinazione lineare diversa da quella nulla. Ma ciò non è possibile in quanto E è libero.

Il seguente teorema ci permette di dare una caratterizzazione degli insiemi liberi:

Teorema 1 *Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale e sia $E = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r\} \subseteq V$. Allora sono equivalenti:*

1. *E è libero.*

2. *v_1 è diverso da 0 e v_i non è combinazione lineare dei precedenti cioè $v_i \notin Span(v_1, \ldots, v_{i-1}) \forall i = 2, \ldots, r$.*

3. *Se $v \in Span(E)$ allora v si ottiene in modo unico come combinazione lineare di $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$.*

[12] Ad esempio, dato l'insieme $E = \{v_1, 0, w\}$ possiamo scrivere $0v_1 + 1 \cdot 0 + 0w = 0$.

Il metodo degli scarti successivi

Abbiamo l'insieme $E = \{v_1, \ldots, v_i \ldots, v_r\}$ tale che E genera lo spazio $Span(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$. Ci chiediamo se esista un insieme E' tale che:

1. E' è libero
2. $Span(E') = Span(E)$.

Il problema ammette varie soluzioni; infatti E' non è unico. Ci sono anche svariati metodi che portano alla soluzione di questo problema. Il metodo degli scarti successivi è un metodo abbastanza semplice che ci restituisce un insieme $E' \subset E$. Ecco i passi da seguire:

1. Sia E_1 ottenuto da E togliendo il vettore nullo tutte le volte che vi compare.
2. Se in $E' v_2$ risulta essere combinazione lineare di v_1 lo scartiamo, altrimenti lo lasciamo.
3. Se v_3 risulta essere combinazione lineare di v_2 e v_1 lo scartiamo, altrimenti lo lasciamo.
4. Iteriamo tale procedimento finchè non arriviamo all'ultimo vettore. Allora: se non abbiamo scartato alcun vettore, E_1 è l'insieme E' che cercavamo. Altrimenti se v_i è il primo vettore scartato, si ripete il procedimento a partire dall'elemento v_{i+1}.

Dobbiamo provare che E' gode delle due proprietà. Allora, siccome al passo 1 abbiamo applicato la proprietà che dice che uno spazio non cambia se dall'insieme dei generatori eliminiamo il vettore nullo. Al passo 2 invece possiamo applicare l'altra proprietà che dice che uno spazio non cambia se togliamo dallo spazio dei generatori quei vettori che sono combinazione lineare degli altri. Quindi $Span(E') = Span(E)$. Otteniamo però uno spazio che dipende dall'ordine, essendo ogni vettore combinazione lineare dei precedenti.

2.8 Basi e dimensione

Sia V uno spazio finitamente generato. Un sottoinsieme di vettori $B = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ si chiama **base** di V se:

1. B è libero.
2. $V = Span(B)$.

Teorema (di esistenza delle basi) 1 *Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora esiste una base di V.*

Dimostrazione
Se applichiamo il metodo degli scarti successivi ai vettori di E otteniamo un insieme libero che genera tutto lo spazio. Quindi è una base.

Teorema (del completamento di una base) 1 *Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale finitamente generato e sia $E = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r\}$ un insieme libero di vettori di V. Allora esiste una base B contenente E, cioè $E \subseteq B$.*

Dimostrazione

Sia $F = \{w_1, \dots, w_j, \dots, w_m\}$ un sistema di generatori. Ossia $Span(F) = V$. Allora $F' = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_r, w_1, \dots, w_j, \dots, w_m\}$. Allora se si applica a F' il metodo degli scarti successivi essendo E libero i suoi vettori non vengono scartati e quindi la base che si trova contiene E.

Teorema 1 *Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi. Tale numero si chiama **dimensione** e si indica con il simbolo $(dimV)$.*[13]

Teorema 1 *Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale finitamente generato e sia $(dimV) = n$. Sia inoltre $E = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_r\} \subseteq V$. Allora:*

1. *Se E è libero allora $r \leq n$. Inoltre $r = n$ se e solo se E è anche una base (ossia $Span(E) = V$).*

2. *Se $Span(E) = V$ allora $r \geq n$. Inoltre $r = n$ se e solo se E è una base (ossia E è libero).*

3. *Ogni sottospazio W di V è finitamente generato. Se $(dimW) = r$ allora $r \leq n$. Inoltre $r = n$ se e solo se $W = V$.*

Esempi di basi di spazi finitamente generati e dimensione

1. Consideriamo uno spazio $\mathbf{K}^n$. Tale spazio ha dimensione n. Sappiamo gi che l'insieme $E = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ con e_i vettore con tutte le componenti nulle eccetto la i-esima, è un sistema di generatori di $\mathbf{K}^n$. Tale insieme risulta essere una base, in quanto il vettore nullo viene ottenuto solo mediante la combinazione lineare nulla.

2. Nella retta una base è costituita da un segmento diverso dal segmento di lunghezza nulla.

3. Se consideriamo lo spazio dei polinomi di grado $\leq m$ e indichiamo tale spazio con $\mathbf{K}_m[X]$ notiamo che una base è costituita dai monomi di grado $<= m$ cioè $x^m, x^{m-1}, \dots, x, x^0 = 1$. Inoltre $dim(\mathbf{K}_m[X]) = m + 1$.

4. Se consideriamo lo spazio delle matrici $\mathbf{K}^{m,n}$, le basi sono date da quelle matrici denominate e_{ij} i cui elementi valgono sempre 0 ad eccezione dell'elemento $a_{ij} = 1$.)Inoltre, $dim(\mathbf{K}^{m,n}) = mn$.

2.8.1 La relazione di Grassmann (teorema)

Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Siano poi W_r e W_m due sottospazi rispettivamente di dimensione r e m. Definiamo inoltre i due spazi somma e intersezione: $W_i = W_m \cap W_r$ e $W_s = W_m + W_r$ rispettivamente di dimensione i e s. Allora vale la seguente relazione:
$s = r + m - i$ dove $s \leq m$ e $i \leq min\{m, r\}$.

[13] Per esempio, nella retta tutte le basi hanno un elemento, nel piano 2, nello spazio 3, ...

2.8.2 Componenti rispetto a una base

Sia V un **K**-spazio vettoriale e $B = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ una sua base. Allora qualunque vettore $x \in V$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base. Gli scalari che indicano la base sono anche denominati **componenti del vettore relative alla base**.

Quindi la scrittura $x = x_1v_1 + \ldots + x_iv_i + \ldots + x_nv_n$ può essere individuato dalla n-pla ordinata

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Con tale convenzione possiamo scrivere in maniera abbreviata anche la moltiplicazione di uno scalare per un vettore e la somma dei due vettori, considerando semplicemente la n-pla delle componenti del vettore. Con questa convenzione possiamo confondere lo spazio vettoriale di V di dimensione n con $\mathbf{K}^n$. In particolare, poichè è:
$v_1 = 1v_1 + \cdots + 0v_i + \cdots + 0v_n$
$\ldots$
$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$
$\ldots$
$v_n = 0v_1 + \cdots + 0v_i + \cdots + 1v_n$
si ha che i vettori $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n$ coincidono con dei vettori con elementi tutti nulli ma con componente i-esima uguale a 1.

2.8.3 La base canonica

Prima che si definisse $\mathbf{K}^n$ come **K**-spazio vettoriale, una scrittura del tipo $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ avva il significato di n-pla ordinata di elementi di **K**. Stesso significato anche per le n-ple che abbiamo definito come $(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n$ cioè, ad esempio, la n-pla $(1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$. Ora, avendo definito lo spazio vettoriale, sappiamo che le n-ple hanno il significato di componente dei vettori della base di $\mathbf{K}^n$ relativamente alla base che essi stessi determinano. Ovviamente il significato di un vettore rimane inalterato, ovvero i valori delle sue componenti non cambiano, se consideriamo come base le n-ple $(e_1^t, \ldots, e_i^t, \ldots, e_n^t)$. Ecco perchè tali n-ple vengono denominate **base canonica** di $\mathbf{K}^n$.

Esempi

1. Il vettore $x = (5, 7, 9)$ nei termini della base canonica $5e_1 + 7e_2 + 9e_3$ non cambia. Invece nei termini di una base $v_1 = (3, 2, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 0, 0)$ significa $5v_1 + 7v_2 + 9v_3$ corrispondendo quindi alla n-pla ordinata $(33, 17, 12)$.

2. Il vettore $x = (3, 4, 5, 6)$ nello spazio delle matrici $\mathbf{K}^{2,2}$ che ha come base $E = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ diventa la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}_3[X]$ con base $B = \{x^5, x^2, x, x^0\}$ il solito vettore $x = (3, 4, 6, 5)$ rappresenta il polinomio ordinato (secondo le potenze crescenti di x) $3x^3 + 4x_2 + 6x + 5$.

Teorema 1 *Sia V un $\mathbf{K}$-spazio vettoriale e B una sua base.*
Sia $E = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r\}$ e siano $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_r$ le r-ple associate ai vettori di E relativamente alla base B.
Allora E è libero se e solo se le r-ple $X_1, \ldots, X_r$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Se v_1, v_2 sono linearmente indipendenti possiamo ottenere il vettore nullo solo con la combinazione lineare nulla. Perciò otteniamo la n-pla nulla se e solo se sommiamo ogni elemento per lo 0.

2.8.4 Dimensione di una varietà lineare

Data una generica varietà lineare $\mathbf{V} = X_0 + W$ si definisce **dimensione della varietà lineare** la dimensione del sottospazio associato. Si ha cioè la relazione $dim\mathbf{V} = dimW$.
Scriveremo dunque $\mathbf{V}_m = X_0 + W_m$ intendendo con la lettera m al pedice, la dimensione della varietà e del sottospazio associato.

Ricordiamo a questo proposito che anche il sottospazio è una varietà lineare, e che in particolare se $X_0 = 0_V$ si ha che $\mathbf{V} = W$. Definita allora la relazione $dim\mathbf{V} = m$ abbiamo le seguenti definizioni:

1. se $m = 0$ allora la varietà $V_0 = X_0 + \{0\}$ si dice **punto**

2. se $m = 1$ allora la varietà $V_1 = X_0 + W_1$ si dice **retta**

3. se $m = 2$ allora la varietà $V_2 = X_0 + W_2$ si dice **piano**

4. se $m = 3$ allora la varietà $V_3 = X_0 + W_3$ si dice **spazio** [14]

5. se $m = n - 1$ allora la varietà $V_{n-1} = X_0 + W_{n-1}$ si dice **iperpiano** [15]

Viene spontaneo dire che le rette sono gli iperpiani del piano, i piani sono gli iperpiani dello spazio, e così via in modo tale da definire ogni sottovarietà di dimensione $m - 1$ come iperpiano della varietà di dimensione m. Ovviamente, ogni teorema che vale per gli iperpiani vale anche per le rette nei piani e per i piani nello spazio.

[14] anche se è meglio dire V_3
[15] dunque per $m \geq 4$

2.8.5 Varietà intersezione e congiungente

Date le due varietà $V_r = X_0 + W_r$ e $V_m = X_1 + W_m$. Allora possiamo definire le seguenti:

- La varietà **intersezione** $V_r \cap V_m \exists$ se e solo se $V_r \cap V_m \neq \oslash$. In tal caso, $V_i = Y + W_i$ dove $Y \in V_m \cap V_r$ e $W_i \in W_r \cap W_m$ per cui $dimV_i = i$.

- La varietà **congiungente** V_c è la più piccola varietà che contiene entrambe le varietà congiunte.[16] Allora $V_c = X_0 + Span(X_1 - X_0) + W_m + W_r$.
  Inoltre si dimostra che:

  1. se $V_r \cap V_m \neq \oslash$ allora $c = r + m - i$
  2. se $V_r \cap V_m = \oslash$ allora $c = r + m - i + 1$

  dove vale sempre la relazione $i \leq min\{r, m\}$ e $c \leq n$[17].

Teorema 1 *Sia V un* **K***-spazio vettoriale di dimensione n e siano V_{n-1}, V'_{n-1} due iperpiani di V.*
Allora V_{n-1}, V'_{n-1} non sono sghembi ossia o sono paralleli oppure si intersecano in una varietà di dimensione $n - 2$[18].

Dimostrazione. Dobbiamo considerare 2 casi:

1. Se $V_{n-1} \cap V'_{n-1} = \oslash$ allora consideriamo V_c che ha dimensione $c = r + m - i + 1 = n - 1 + n - 1 - i + 1 = 2n - i - 1$.
   Essendo $c \leq n$ dev'essere per forza $i \geq n - 1$. D'altra parte avevamo supposto $i \leq n-1$ essendo $i = min\{n-1, n-1\}$ per cui sarà necessariamente $i = n - 1$ poichè $W_i = W_{n-1} \cap W'_{n-1}$. Ciò significa che i due sottospazi sono lo stesso sottospazio e dunque gli iperpiani sono paralleli.

2. Se $V_{n-1} \cap V'_{n-1} \neq \oslash$ allora $i = n - 1 + n - 1 - i = 2n - i - 2 \leq n$, cioè $i \geq n - 2$ ma poichè $i \leq n - 1$ risulta essere $i = n - 1$ oppure $i = n - 2$ e dunque V_{n-2}. Allora $W_i = W_{n-1} = W'_{n-1}$: i duq iperpiani coincidono.

[16] Per esempio, la varietà congiungente due punti è una retta
[17] perchè lo spazio vettoriale contiene sicuramente entrambe le varietà
[18] Ad esempio, nello spazio 2 piani non sono mai sghembi: o sono paralleli o si intersecano; invece 2 rette nel piano o sono parallele o si intersecano in un punto

Capitolo 3

Matrici

Definiamo $A \in \mathbf{K}^{m,n}$ una matrice con m righe $R_1, \dots, R_i, \dots, R_m \in \mathbf{K}^{n}$[1] e n colonne $C_1, \dots, C_i, \dots, C_n \in \mathbf{K}^m$.
Notiamo che gli spazi generati da righe e colonne sono totalmente diversi, infatti le righe generano sottospazi di $\mathbf{K}^n$: $Span(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m) = R(A)$; le colonne invece generano sottospazi di $\mathbf{K}^m$:$Span(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m) = R(A)$.

Teorema 1 *Si ha che $dimR(A) = dimC(A)$. Tale dimensione è detta **caratteristica** o **rango** della matrice A e si indica con $\rho(A)$. Tale numero indica il massimo numero di righe e colonne linearmente indipendenti e risulta rispettare la seguente relazione: $\rho(A) \leq min\{m, n\}$.*

3.1 Matrice ridotta

Una matrice si dice **ridotta per righe** se in ogni riga R_i non nulla esiste un elemento non nullo a_{ij_i} tale che tutti gli elementi che sono sotto di esso sono nulli (cioè tale che tutti gli elementi $a_{ij}, j + h : \forall h = 0, 1, \dots\ m - isononulli$).
Una matrice si dice **ridotta per colonne** se in ogni colonna C_j non nulla esiste un elemento non nullo a_{ij_j} tale che tutti gli elementi che sono alla sua destra sono nulli (cioè tale che tutti gli elementi $a_{ij}, j + h : \forall h = 0, 1, \dots\ m - jsononulli$).

Teorema 1 *La caratteristica di una matrice $A = (a_{ij})$ ridotta per righe (o per colonne) è uguale al numero di righe (o di colonne) non nulle*

3.1.1 Ridurre una matrice

Sorge il problema della riduzione di una matrice. Come eseguire tale operazione? Prima di tutto definiamo l'operazione: ridurre una matrice $A \in \mathbf{K}^{m,n}$ per righe (o per colonne) significa trovare una matrice $A' \in \mathbf{K}^{m,n}$ che sia ridotta per righe (o per colonne) tale che $R(A) = R(A')$ (oppure $C(A) = C(A')$). Possiamo eseguire sulle matrici 3 operazioni fondamentali (su righe o su colonne):

1. scambiare tra loro 2 righe o 2 colonne: $R_i \longleftrightarrow R_j$ oppure $C_i \longleftrightarrow C_j$

[1]Attenzione: m righe in $\mathbf{K}^n$!!!

2. moltiplicare tutti gli elementi di una riga o di una colonna per un valore non nullo: $R_i \to aR_i, a \neq 0$ oppure $C_i \to aC_i, a \neq 0$

3. sostituire una riga (o una colonna) con una combinazione lineare ottenuta sommando alla riga (o alla colonna) un'altra riga (o colonna) moltiplicata per un valore: $R_i \to R_i + aR_j, i \neq j$ oppure $R_i \to C_i + aC_j, i \neq j$

Teorema 1 *Le operazioni fondamentali non cambiano $R(A)$ se eseguite su righe e $C(A)$ se eseguite su colonne*

(Dimostrazione). Questo succede perchè, per un vecchio teorema sugli spazi vettoriali, $R(A)$ non cambia con l'ordine, $R(A)$ non cambia per av_1 se $a \neq 0$, $R(A)$ non cambia per $v_1 = v_1 + av_2$.

Il teorema successivo ci permetterà di conoscere il procedimento di riduzione di una matrice.

Teorema 1 *Sia $A \in \mathbf{K}^{m,n}$. Allora esiste $A' \in \mathbf{K}^{m,n}$ ridotta per righe di A ed esiste $A'' \in \mathbf{K}^{m,n}$ ridotta per colonne di A.*

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia, dato l'algoritmo di riduzione di una matrice:

1. Sia R_i la prima riga non nulla di A e sia $a_{ij_i} \neq 0$. Sia A_1 la matrice ottenuta mediante le operazioni elementari eseguendo il seguente calcolo: $R_h \to R_h - \frac{a_{hj_i}}{a_{ij_i}} \cdot R_i \forall h = i+1, \ldots, m-i$

2. Vado al passo 1, ponendo A_1 al posto di A

Ovviamente le righe nulle sono quelle linearmente indipendenti.

3.1.2 Sottomatrice e orlata

Supponiamo di avere le due matrici $A \in \mathbf{K}^{m,n}, B \in \mathbf{K}^{p,q}$ con $p \leq m, q \leq n$. Allora si dice che B è **sottomatrice** di A se B si può pensare ottenuta da A prendendo gli elementi comuni a p righe e q colonne di A. Oppure possiamo anche dire, togliendo da A $m-p$ righe e $n-q$ colonne.

Sia allora $B \in \mathbf{K}^{p,p}$ una sottomatrice quadrata di A. Allora si chama **orlata** di B ogni matrice $C \in \mathbf{K}^{p+1,p+1}$ che sia sottomatrice di A e tale che B sia una sua sottomatrice.

3.2 Determinanti

Ora, prima di occuparci del determinante, richiamiamo alcune definizioni che torneranno utili.

Scriviamo il simbolo $\mathbf{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ l'insieme dei primi n numeri naturali. Definiamo **permutazione** di un insieme di questo genere un'applicazione biunivoca $p : \mathbf{N}_n \longrightarrow \mathbf{N}_n$. Una tale permutazione viene spesso indicata con la n-pla ordinata $i_1, i_2, \ldots, i_j, \ldots, i_n$ dove $p_j = i_j$ cioè i_j è il corrispondente del numero che indica il suo posto nella n-pla.

Allora data una permutazione sia $r \geq 0$ il numero di coppie di elementi i_j, i_h con $j < h$: la permutazione è di classe pari se r è pari; altrimenti è dispari.
Ricordiamo che:

1. Se in una permutazione si scambiano due elementi tra loro, si ottiene una permutazione di classe diversa.
2. Il numero di scambi che occorre fare in una permutazione per ottenere la permutazione principale (cioè quella ordinata) ha sempre la stessa parità della permutazione originaria.

Definiamo dunque cos'è il determinante. Data una matrice $A \in \mathbf{K}^{n,n}$ il determinante $\mid A \mid$ è il numero ottenuto come segue: $\sum(-1)^r a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{hj_h} \cdots a_{nj_n}$.
La sommma praticamente è estesa alle $n!$ permutazioni dei secondi indici e r indica la parità di questa permutazione.
Quindi il determinante è il numero che si ottiene facendo:

1. la somma algebrica di $n!$ addendi
2. ogni addendo ha n fattori
3. il primo fattore è nella prima riga, il secondo nella seconda riga, ..., l'ultimo nell'ultima riga
4. in ogni addendo c'è uno e un solo fattore di una riga e di una colonna
5. in due addendi diversi le relative permutazioni dei secondi indici sono diverse
6. ogni addendo è preso con il suo segno se la permutazione dei secondi indici è pari, altrimenti con il segno cambiato se la permutazione è dispari.

3.2.1 Proprietà del determinante

Enunciamo le seguenti proprietà:

1. Se invece di procedere per righe procediamo per colonne, il determinante ottenuto è lo stesso. Di conseguenza: a)tutte le proprietà che valgono per le righe valgono per le colonne, b) $\mid A \mid = \mid A^t \mid$.
2. Data una matrice triangolare, il suo determinante coincide con il prodotto degli elementi della diagonale principale
3. Se ina matrice sono nulli tutti gli elementi da una stessa parte della diagonale secondaria, allora $\mid A \mid = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$[2].
4. Se in una matrice una riga (o una colonna) è nulla, allora $\mid A \mid = 0$
5. Se si scambiano due righe (o due colonne) allora il determinante della nuova matrice cambia segno: $R_i \longleftrightarrow R_j : |A'| = -|A|$
6. Se si moltiplica una riga per un valore allora il determinate della nuova matrice si ottiene moltiplicando il vecchio determinante per il valore: $R_i \longrightarrow aR_i : |A'| = a|A|$.

[2] Il prodotto corrisponde al prodotto degli elementi della diagonale secondaria

7. Se due righe sono proporzionali, il determinante è nullo: $R_i = aR_j, i \neq j$: $|A| = 0$[3].
8. Se $R_i = R_i' + R_i''$ allora $|A| = |A'| + |A''|$
9. Se $R_i \longrightarrow R_i + aR_j$ allora $|A'| = |A|$[4].

[3]Infati se dividiamo la riga R_j per a, il determinante risulta diviso per a. Inoltre se scambiamo due righe otteniamo un determinante di segno opposto, e ciò porta a concludere che $|A| = -|A|$ e naturalmente ciò è possibile solo se il determinante è nullo

[4]Infatti, possiamo ricondurci alla proprietà 8 ottenendo $|A\prime| = |A| + 0$ (determinante della matrice ottenuta con $R_i'' = aR_j$