# Introduzione alla Teoria della Scelta Razionale

*Diego Lanzi*

Dipartimento di Scienze Economiche
Facoltà di Economia
Università degli Studi di Bologna

Lezioni del Corso di *Analisi Economica e Finanziaria*, Corso di Laurea in Economia delle Imprese Cooperative e delle Organizzazioni No Profit, Facoltà di Economia, Sede di Forlì, Anno Accademico 2001/2002

## 1 Prefazione

Questo ciclio di lezioni vuole fornire una breve introduzione all'analisi economica, ovvero allo studio del comportamento di attori economici, generalmente intesi (i.e. consumatori, lavoratori, imprese, elettori ecc...), tramite l'utilizzo di modelli formali di tipo logico-matematico.

Potremmo idealmente suddividere gli argomenti che verranno trattati in quattro parti tra loro interconnesse:

**Lezioni 1-3: Analisi delle Scelte Razionali** In questo blocco saranno introdotti una serie di modelli attraverso i quali verrà esaminato il problema della scelta razionale per un agente collocato in tre differenti contesti: condizioni di certezza, condizioni di certezza e interdipendenza strategica e condizioni di rischio.

**Lezioni 4-5: Scelte Collettive** analizzeremo come assumono decisioni comitati, assemblee composte da più soggetti che, individualmente, si comportano in modo razionale. Questo ci condurrà verso la disamina di alcune regole di voto e a una breve introduzione alla teoria delle scelte sociali.

**Lezioni 6-7-8: Analisi della Competizione** verranno valutati diversi paradigmi competitivi sia cercando di comprende come prendono decisioni ottimali imprese in concorrenza reciproca, sia valutando l'esito competitivo raggiunto da un mercato in termini di desiderabilità sociale.

**Lezioni 9-10 Analisi Finanziaria** Come sceglie l'investitore? Per poter dar risposta si dovranno analizzare i diversi strumenti ed attività finanziarie negoziate sul mercato per capirne le caratteristiche distintive come strumenti finanziari. Si passerà dunque ad analizzare come sceglia l'investitore razionale tra questo paniere di strumenti finanziari disponibili sul mercato("asset allocation").

# 2 Introduzione

Si possono riconscere due approcci alternativi, ma non esclusivi, all'analisi economica. Un approccio *normativo* ovvero lo studio di come soggetti economici si dovrebbero comportare se fossero perfettamente razionali e un approccio *positivo* mirato a dare spiegazione del comportamento effettivo, osservato, dei soggetti.

L'analisi economica di tipo normativo si focalizza su quello che dovrebbe essere il comportamento di un generico individuo data una *nozione normativa* di base, ovvero dato un certo criterio comportamentale, costitutia dalla nozione di *razionalità* Appare evidente come i risultati forniti da questo tipo di analisi si discostino il più delle volte da quanto potrebbe essere verificato in senso positivo. Questo sarà tanto più vero quanto i singoli soggetti economici non seguano, nelle transazioni economiche reali, linee d'azione dettate dal perfetto calcolo razionale, ma logiche di ragionevolezza, intuizioni o condotte dettate da un calcolo razionale limitato e imprefetto.

L'analisi normativa appare tuttavia a chi scrive utile ai fini della comprensione della realtà in quanto in grado di predire quello che sarebbe il comportamento perfettamente razionale, sapendo che, di fatto, questo comportamento sarà unicamente un'approssimazione del comportamento effettivo. Questo tenderà a convergere verso quello che sarà sancito attraverso l'analisi normativa tanto più i soggetti sono ben informati, hanno elevate abilità computazionali, cioè sono in grado di valutare con precisione le alternative loro disponibili„ tanto più il soggetto affina competenze e capacità.

Ma cosa rende spesso divergenti i risultati dell'analisi normativa da quelli dell'analisi positiva?

Ogni soggetto economico quando compie scelte o assume decisioni di vario genere, si trova collocato in una precisa realtà istituzionale inteso come contesto organizzativo, politico o sociale in cui si situa la scelta individuale. Tale contesto esercita spesso influenze di vario genere sul comportamento individuale (si pensi all'effetto moda nei consumi) che possono rendere preferibile un comportamento non perfettamente razionale a una condotta conforme ai precetti dell'analisi del comportamento razionale.

# 3 Decisioni e Razionalità

Distinguiamo almeno tre diversi contesti all'interno dei quali è possibile individuare scelte razionali:

- *Contesti decentrati* : un contesto decisionale si dice decentrato se si basa sull'anonimicità, sull'impersonalità delle relazioni fra i soggetti se, sostanzialmente, riproduce quelle che sono le caratteristiche tipiche di una relazione mercantile. In contesti di questo genere, la decisione ottimale è quella che dà maggiore soddisfazione individuale, ogni individuo si muove in modo autonomo, impersonale, anonimo e quindi l'obiettivo classicamente associabile al comportamento individuale è la massimizzazione di un qualcosa che dà soddisfazione, benessere o utilità.
- *Contesti a interdipendenza strategica*: sono caratterizzati da alta interdipendenza delle decisioni individuali ovvero, quella l'azione ottimale del singolo soggetto influisce ed influenzata dalle azioni degli altri (si ricordi la teoria dei giochi).
- *Contesti collettivi*: sono contesti in cui il comportamento individuale ha un impatto marginale quasi trascurabile sul risultato collettivo, cioè sul risultato che viene raggiunto dalla collettività nel suo complesso. In questi casi esistono solitamente.

Buchanan (1997) propone alcuni criteri attraverso i quali categorizzare le possibili decisioni di soggetti economici: *incidenza sul decisore delle decisioni assunte* (e.g. quando osserviamo la scelta individuale avremo dei contesti in cui le scelte del singolo avranno una incidenza prevalente su di sè, altri in cui le decisioni assunte non incidono direttamente o incidono solo in modo parziale sull'utilità, sul grado di benessere, sulla soddisfazione del soggetto stesso) e *responsabilità sull'esito finale* (esisteranno un certo tipo di decisioni in cui il soggetto è direttamente responsabile sull'esito finale, altre decisioni in cui la responsabilità sull'esito finale non sarà imputabile solo a quell'individuo, ma sarà generalmente imputabile ad altri fattori o a più soggetti). Incrociando questi due criteri di segmentazione delle decisioni individuali, otteniamo un mappa degli ambiti di decisione di un soggetto razionale.

| | |
|---|---|
| Scelte Individuali | Relazioni di Agezia |
| Scelte Strategiche | Scelte Collettive |

Righe e colonne della tabella sono entrambe contrassegnate dai termini ALTO e BASSO ad indicare che ci saranno certi ambiti di decisione in cui la scelta del soggetto di comportarsi in un determinato modo presenta un'elevata responsabilità dell'individuo sull'esito finale ed un'incidenza dell'esito finale direttamente sul benessere dell'individuo. Ci saranno poi dei contesti in cui la responsabilità personale sul risultato sarà bassa ma l'incidenza delle decisioni sarà elevata e così via.

Quando le decisioni assunte da un soggetto sono tali per cui gli effetti delle sue decisioni hanno direttamente una forte incidenza sul suo benessere, e queste decisioni comportano esiti direttamente imputabili alla sua responsabilità, siamo in un contesto di *scelta individuale*.

Laddove la responsabilità sul risultato sia elevata per il soggetto che assume decisioni, ma queste comportino scarsi effetti sul suo benessere parliamo di *relazioni di agenzia*[1].

Se l'incidenza delle decisioni sul benessere del decisore è elevata, ovvero scelte diverse possono indurre forti variazioni del benessere individuale, ma vi è una bassa responsabilità sull'esito finale raggiunto la scelta non è più un problema di scelta individuale, ma ci troviamo in un contesto di *scelte strategiche*. Una scelta strategica è una scelta a bassa responsabilità personale poichè l'esito finale non dipende soltanto dalle decisioni che assume il singolo soggetto, ma dalle reazioni degli altri individu a quella scelta.

Infine le *scelte collettive* dove la responsabilità dei singoli decisori sull'esito finale raggiunto dalla collettività è quasi nulla ed è molto bassa l'incidenza della scelta individuale sul benessere del decisore.

Tra le scelte individuali analizzeremo, seguendo la terminologia di Harsanyi (1997), tra:

- *Scelte in condizioni di certezza.* Una scelta si dice in condizioni di certezza, quando il decisore conosce perfettamente gli elementi tra cui deve scegliere, quando è in grado di leggere perfettamente il suo problema decisionale. Non ci sono elementi di rischio e di indeterminatezza.

- *Scelte in condizioni di rischio:* Le scelte in condizioni di rischio possono essere viste come scelte fra esiti non sono perfettamente certi, le cui probabilità sono tuttavia oggettivamente note al decisore[2].

In entrambi i casi, sia per le scelte in condizioni di certezza che per quelle in condizioni di rischio, il problema decisionale del soggetto verrà concepito come *statico*. Una scelta si dice statica quando lo scegliere una certa linea d'azione oggi non modifica, non preclude la possibilità di scelte diverse domani, quindi quando le decisioni sono temporalmente separate ed incapaci di influenzarsi.

Tra le scelte strategiche analizzaremo unicamente, tramite alcuni concetti di base della teoria dei giochi, contesti in cui l'interdipendenza strategica descrive interessi individuali in conflitto.

Come detto la nozione normativa di base sarà quella di razionalità. Il paradigma di razionalità comunemente utilizzato per l'analisi economica è quello

[1] Questo tipo di scelte non verranno analizzate nel corso delle presenti lezioni.

[2] Laddove le probabilità non siamo note, ma soggettive si parla di scelte in condizioni di incertezza.

della *razionalità strumentale* proposto originariamente da David Hume. Un soggetto, secondo l'impostazione humiana, è razionale laddove scelga mezzi efficienti per il raggiungimento di determinati obiettivi. Si capisce immediatamente che una nozione di questo tipo è detta strumentale perché afferisce ai soli mezzi del soggetto per raggiungere i propri fini e non discute i fini dell'individuo stabiliti dai suoi valori, dalle sue passioni. Questa nozione di razionalità nasconde, tuttavia ipotesi molto forti che è bene, pur non rinnegandole, evidenziare:

**Decidibilità** essere sempre in grado di decidere quale mezzo, tra tanti, è meglio utilizzare.

**Perfettibilità** L'individuo ha capacità computazionali non limitate e informazioni perfette sulle alternative tra cui è chiamato a scegliere.

**Asocialità** Nessun influsso sociologico è in grado di influenzare le scelte dell'individuo.

La razionalità strumentale così descritta, assume un doppio connotato a seconda che gli obiettivi del soggetto siano molteplici o meno. Immaginate che un soggetto abbia un unico obiettivo, ad es. scalare la montagna più alta d'Europa. In questo caso l'idea di razionalità strumentale dice che il soggetto sarà razionale nel momento in cui tenetà l'ascesa del Monte Bianco. La razionalità strumentale in questi contesti assume il connotato di *criterio di soddisfazione razionale*[3]. Nel momento in cui il soggetto possiede una pluralità di obiettivi, questi sarà tanto più razionale quanto più persegue e ottiene ciò che per lui ha maggior valore, ovvero ciò da lui maggiormente preferito. Il confronto tra esiti alternativi, coincidenti con scelte differenti, una volta eliminate le opzioni non accessibili al decisore, avverrà attraverso un concetto fondamentale nello studio delle decisioni individuali, quello di *preferenza individuale*.

# 4 Scelte in Condizioni di Certezza

Il concetto fondamentale che ci accompagna nell'analisi delle scelte individuali è il concetto di preferenza quindi definiamo cosa sia una relazione di preferenza.

Indichiamo un esito di scelta $x \in X \subseteq R^2_+$ dove $X$ indica l'insieme di esiti possibili. Immaginiamo che questi esiti siano ottenimenti di determinati elementi aventi un valore positivo per il soggetto (*goods)*.

*Definizione 1:* Una *relazione di preferenza* ($\succsim$) è una relazione binaria sull'insieme di esiti $X$ che consente il confronto, in termini di preferibilità tra $\forall x, y \in X$ del tipo $x \succsim y$ ovvero "$x$ è almeno tanto preferita quanto $y$.

Quando una relazione di preferenza fra due esiti ha questi connotati si chiama relazione di preferenza *debole* include la possibilità di indifferenza tra $x$ e $y$.

[3] Si veda in merito Harsanyi (1997).

Possiamo, conseguentemente, definire una relazione di preferenza forte ($\succ$) del tipo $x$ è maggiormente preferito a $y$, e una relazione di indifferenza ($\sim$)[4]

Se la scelta razionale è quella che è dettata da un calcolo preferenziale, l'idea di razionalità sarà, naturalmente, declinata attraverso due precise proprietà della relazione di preferenza.

*Definizione 2:* Una relazione di preferenza si dice *razionale* se sono verificate due condizioni:

i) **completezza**: $\forall x, y \in X$ è vero che $x \succsim y$ o $y \succeq x$ o entrambe

2) **transitività:** $\forall x, y, z \in X$ se $x \succsim y$ e $y \succsim z$ allora $x \succsim z$

Una relazione di preferenza si dice completa quando, rispetto a due esiti, il soggetto è sempre in grado di dire se x è preferito ad y, se y è preferito ad x o se i due sono indifferenti, cioè è sempre in grado di crearsi un *ordinamento* completo di preferenza tra le alternative. In questo modo eliminiamo la possibilità di preferenze incomplete, ovvero l'incapacità di un soggetto di fronte a due mezzi alternativi o a due esiti alternativi di stabilire quale tra i due è per lui preferibile.

.

Una relazione di preferenza si dice transitiva quando il soggetto riproduce in riferimento alla messa in rapporto di relazioni binarie rispetto a coppie di esiti un ragionamento sillogistico[5].

La razionalità della preferenza è estremamente importante per introdurre una funzione di soddisfazione delle preferenze individuali. Immaginiamo di avere un decisore che confronta due alternative; nel momento in cui questo soggetto, secondo un qualche criterio di preferibilità, dice "preferisco x ad y", questo significa che x gli dà più soddisfazione di y, ovvero x riesce meglio, e per questo è preferito, a far raggiungere, al soggetto i propri obiettivi.

Una relazione di preferenza razionale potrà essere sempre collegata ad una funzione di soddisfazione che associa un certo livello di soddisfazione delle preferenze individuali ad ogni esito possibile.

*Definizione 3:* Una *funzione di soddisfazione delle preferenze*, che indichiamo con $A$, associa ad ogni elemento dell'insieme delle alternative possibili $X$ un numero reale $R$ ovvero $A : X \rightarrow R$ tale che:

$$A(x) \geq A(y) \Leftrightarrow x \succsim y \tag{1}$$

Possiamo comprendere quanto sia essenziale la razionalità delle preferenze individuali grazie alla seguente:

*Proposizione 1:* La relazione di preferenza individuale ($\succsim$) è rappresenta da un funzione di soddisfazione delle preferenze ($A$) se e solo se $\succsim$ è razionale.

[4]Si noti che gli esiti potranno corrispondere a panieri di beni di consumo, panieri di input per la produzione, alternative di politica economica ecc... .

[5]Il ragionamento sillogistico è qualcosa del tipo "Socrate è un uomo. Gli uomini sono mortali. Quindi Socrate è mortale".

*Dimostrazione: per la completezza)* si considerino due alternative $x, y \in X$ e una funzione di soddisfazione che rappresenta una relazione di preferenza $\succsim$. Visto che $A$ associa ad ogni alternativa un numero reale abbiamo due possibilità: $A(x) \geq A(y)$ o $A(y) \geq A(x)$. Se $A(x) \geq A(y)$ allora per definizione $x \succsim y$. Analogo il ragionamento nel caso opposto. Dunque la relazione di preferenza è completa. *per la transitività)* Consideriamo $x, y, z \in X$ e immaginiamo che $A(x) \geq A(y)$ e $A(y) \geq A(z)$ allora $x \succsim y$ e $y \succsim z$. Tuttavia sarà sempre vero che $A(x) \geq A(z)$ poichè questi sono numeri reali. Dunque, $x \succsim z$ ovvero la relazione di preferenza è transitiva.

Attribuiamo alla relazione di preferenza altre tre caratteristiche[6].

*Definizione 4:* Una relazione di preferenza individuale $\succsim$ si dice:

*i) monotona* se dati $x, y \in X$ con $x \succeq y$ allora $x \succsim y$

*ii) continua* se data una sequenza di esiti $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ con $x^n \succsim y^n$ per qualsiasi $n$ e $x = \lim\limits_{n \to \infty} x^n$

e $y = \lim\limits_{n \to \infty} y^n$ allora $x \succsim y$

*iii) strettamente concessa* se dati tre esiti $x, y, z \in X$ e un numero $\alpha \in [0, 1]$ se $x \succsim z$ e $y \succsim z$ allora $\alpha x + (1 - \alpha) y \succ z$

Una relazione di preferenza si dice monotona se è vero che il soggetto preferisce maggiori ottenimenti a ottenimenti più scarsi[7]. La continuità ci assicura che laddove il decisore sia in grado di stabilire una preferenza rispetto a coppia di alternative, sarà in grado di creare un ordinamento preferenziale anche tra le stesse alternative marginalmente modificate.Infine, la convessità stretta indica una preferenza forte per la varietà.

*Lemma 1:* Se la nostra relazione di preferenza è strettamente monotona, strettamente convessa e continua, allora la funzione di soddisfazione delle preferenze sarà continua, strettamente crescente e strettamente concava.

## 4.1 Insiemi di Indifferenza e Vincoli alla Scelta

Laddove la relazione di preferenza soddisfi alcune proprietà fondamentali, espresse nella Definizione 4, possiamo rappresentare la funzione di soddisfazione delle preferenze del soggetto razionale come una funzione a più variabili, monotona crescente rispetto ai due elementi di scelta $(x_1; x_2)$ e strettamente concava (ovvero con un punto di massimo globale detto *bliss point)*

[Inserisci Figura 1]

Come sappiamo tale funzione rappresenta la *funzione obiettivo* del nostro decisore razionale. La massimizzazione della funzione obiettivo ci dice quanto il

[6] Per un approfondimento sul significato di ognuna di queste si vedano Kreps (1990) o Mas-Collel et al. (1995).

[7] Si ricorda che la monotonicità delle preferenze implica la loro monotonicità stretta. Si lascia al lettore, a titolo di esercizio la semplice dimostrazione.

soggetto è in grado di raggiungere i propri obiettivi sotto l'esistenza di determinati *vincoli*, ovvero fattori che rendono alcuni ottenimenti (ovvero combinazioni $(x_1; x_2)$) *accessibili* o meno.

Parafrasando P.A. Samuelson, il problema economico si sostanzia nella massimizzazione di una funzione obiettivo in presenza di un qualche vincolo. Nel nostro caso, il decisore razionale fronteggia un scelta economica nel senso di dover selezionare tra i vari esiti accessibili, quello più vicino possibile al punto di massima soddisfazione (i.e. bliss point ).

Al fine di rappresentare graficamente la funzione di soddisfazione del soggetto razionale introduciamo il concetto di *insieme di indifferenza*, ovvero l'insieme di tutte le alternative diverse da un ipotetico ottenimento $x$ che conferiscono al soggetto esattamente lo stesso livello di soddisfazione (ad es. curve di indifferenza del consumatore o isoquanti dell'impresa).

*Definizione 5:* Dato $x \in X$, si dice insieme di indifferenza di $x$, denotato con $I(x)$

$$I(x) = \{\forall y \in X | y \sim x\} \tag{2}$$

Geometricamente, in riferimento alla funzione di soddisfazione rappresentata in Fig.1 potremmo immaginare di fissare un certo livello di soddisfazione $\overline{A}$ . In corrispondenza di tale valore, otteniamo un insieme di combinazioni $(x_1; x_2)$ in grado di assicurare al decisore il conseguimento di quel livello di soddisfazione delle proprie preferenze. In altri termini, otteniamo per qualsiasi livello fissato di $A$ una linea di livello della funzione che rappresenta l'insieme di alternative tra loro indifferenti. Ogni funzione di soddisfazione a due variabili potrà dunque essere rappresentata graficamente tramite un insieme di linee di livello, in cui la più esterna indica un minor livello di soddisfazione delle preferenze individuali, la più interna alternative maggiormente vicine al massimo globale della funzione.

[Inserisci Figura 2]

Le proprietà di monotonicità e convessità della relazione di preferenza ci consentono tuttavia di demarcare in modo più preciso i diversi insiemi di indifferenza del nostro decisore. A tal fine, si consideri un sistema di assi cartesiani $(x_1; x_2)$ in cui rappresentiamo i diversi ottenimenti raggiungibili dal soggetto. Fissiamo un punto $x$, in corrispondenza del quale sarà possibile ripartire il piano in quattro regioni *(R1 , R2 , R3 , R4)*. Ora all'interno di questo piano dobbiamo trovare le alternative $y$ che sono indifferenti a $x$.

_Ogni alternativa $z \in R1$ è inferiore a x sia per entrambe le componenti. Quindi tutti i punti che appartenenti a R1 $x \succsim z$ per la monotonicità delle preferenze. Ogni punto collocato nella regione *R3* è preferito a $x$ ancora per la proprietà di monotonicità. Più controversi sono i due casi rimasti. Ogni

$w \in R2$ è preferibile a $x$ per la componente uno, ma meno preferita in riferimento alla seconda componente. Lo stesso possiamo dire, specularmente, per ogni alternativa $v \in R4$. In relazione a queste due porzioni di piano la proprietà di monotonicità delle preferenze non ci permette di trarre alcuna conclusione sulla preferibilità di $w$ e $v$ rispetto a $x$ . E' possibile tuttavia attendersi che l'insieme di indifferenza dell'alternativa $x$ , sia costituito da punti che si trovano proprio in queste due porzioni di piano.

In primo luogo dobbiamo affrontare la possibilità logica che l'insieme di indifferenza sia costituito da una porzione di piano, ovvero che la linea di livello che rappresenta l'insieme di indifferenza dell'alternativa $x$ abbia spessore. Questa possibilità è tuttavia esclusa dalla monotonicità delle preferenze. Se l'insieme di indifferenza fosse un porzione di piano sarebbe vero che in un intorno arbitrariamente piccolo di $x$ si potrebbe localizzare un'alternativa $k > x$ con $k \sim x$, due proposizione evidentemente in contraddizione reciproca data la nostra caratterizzazione di $\succsim$ . Possiamo dunque considerare l'insieme di indifferenza una linea detta *curva di indifferenza, decrescente (poichè deve passare per R2 e R4) e senza alcun spessore.*

In seconda istanza osseviamo come la proprietà di convessità delle preferenze impone che le curve di indifferenza siamo convesse rispetto all'origine. Se così non fosse, prese 3 alternative accessibili $x, y, z \in X$ se $x \succsim y$ , $y \succsim z$ allora per qualsiasi $\alpha \in [0, 1]$ una combinazione lineare $\alpha x + (1 - \alpha) y \precsim z$. In questo caso la curva di indifferenza sarebbe concava rispetto all'origine come mostrato dalla seguente figura.

[Inserisci Figura 3]

Assumendo la convessità di $\succsim$ escludiamo quindi che le curve di indifferenza abbiano una porzione concava (vedi Fig.4).

A questo punto siamo in grado di rappresentare la funzione di soddisfazione attraverso una serie di curve di indifferenza: più una curva si avvicina all'origine degli assi, più il grado di soddisfazione delle preferenze individuali sarà basso, mentre più la curva è lontana dall'origine degli assi più il decisore razionale sarà nelle vicinanze del punto di massima soddisfazione.

Sulla base della rappresentabilità delle preferenze tramite una funzione di soddisfazione, siamo in grado di giustificare analiticamente la pendenza negativa di ogni curva di indifferenza. Si consideri una funzione di soddisfazione delle preferenze data da $A = A(x_1, x_2)$, il differenziale totale della funzione sarà pari a:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 \tag{3}$$

qualsiasi variazione di $A$, sarà scomponibile nella variazione di $x_1$ pesata per l'impatto marginale di questa sul livello di soddisfazione dell'individuo, e nella variazione di $x_2$ pesata per il suo impatto marginale su $A$.

Per qualsiasi coppia di alternative appartenenti allo stesso insieme di indifferenza la variazione di soddisfazione è pari a zero, ovvero $\frac{\partial A}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2}dx_2 = 0$; da qui otteniamo che il luogo geometrico di punti tra loro indifferenti avrà pendenza pari a

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial A}{\partial x_1}}{\frac{\partial A}{\partial x_2}} \tag{4}$$

con $sign(\frac{\partial A}{\partial x_2}) = sign(\frac{\partial A}{\partial x_2}) > 0$ per ipotesi, e dunque $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$. Questo ci conferma la pendenza negativa della curva di indifferenza.

Introduciamo dunque un vincolo alle possibili scelte del decisore razionale. Questo ci permetterà di distinguere tra alternative *accessibili*, ovvero compatibili con il vincolo di scelta, e alternative inaccessibili.

*Definizione 6*: Un vincolo è una funzione assunta continua, differenziabile e convessa $v : X \to R_+$, tale che

$$v(x_1,x_2) \leq b$$

con $b \in R_+$.

Tale funzione definisce l'insieme di alternative accessibili $C$ come:

$$C = \{\forall x \in X | v(x_1, x_2) \leq b\} \tag{5}$$

L'insieme di alternative accessibili è rappresentato da una porzione di piano $(x_1, x_2)$ circoscritta da una frontiera necessariamente, data la definizione 6, concava o lineare[8]. Una semplice osservazione sulla relazione di preferenza individuale ci consente di concludere per la scelta di un putno appartenente alla suddetta frontiera, trasformando la scelta da un problema di ottimo con vincoli di disuguaglianza in una ottimizzazione con vincolo di uguaglianza. Secondo la funzione vincolo tutte le possibili combinazioni di $(x_1, x_2)$ devono essere tali che $v(x_1, x_2) \leq b$. Tuttavia per ogni $x$ per cui $v(x_1, x_2) < b$ esiste almeno una alternativa $x'$ tale che $v(x'_1, x'_2) = b$ con $x'_1 > x_1$ e $x'_2 > x_2$, ovvero un alternativa *dominante* in termini di ottenimenti. Dunque per la monotonicità di $\succsim$ sappiamo che $x' \succ x$. Il decisore razionale valuterà in termini di soddisfazione individuale ogni alternativa localizzata sulla frontiera dell'insieme $C$. Otteniamo dunque un insieme di alternative accessibili e dominanti:

[8] La convessità assicura la quasi-convessità di $v = v(x_1, x_2)$ e dunque linee di livello quasi-concave. La linearità di $v$ la linearità della frontiera. Per approfondimenti si veda Lambert (1985).

$$D = \{\forall x \in X | v(x_1, x_2) = b\} \tag{6}$$

E' bene notare come tale insieme altro non sia che una delle possibili linee di livello della funzione vincolo ottenibili facendo variare il valore del parametro vincolante $b$ (vedi figura 5).

Dato che abbiamo supposto $A$ strettamente concava e $v$ convessa, il problema decisionale di un soggetto in condizioni di certezza, ovvero:

$$\max_{x \in D} A(x) \tag{7}$$

è sintetizzabile graficamente come segue:

[Inserisci Figura 6]

I diversi livelli di soddisfazione del soggetto sono rappresentati attraverso una serie di curve di indifferenza, dove ad una linea di livello più alta corrisponde maggior soddisfazione. Il nostro soggetto avrà un insieme di alternative accessibili e dominanti delimitato dalla frontiera dell'insieme $C$ . L'alternativa scelta sarà quella in grado di ottimizzare il livello di soddisfazione nel rispetto del vincolo fronteggiato dal decisore, ovvero, graficamente, il punto di tangenza fra la frontiera dell'insieme di alternative accessibili e la curva di indifferenza più esterna. In questo modo il soggetto selezione tra le alternative accessibili e dominanti, quella da lui maggiormente preferita.

## 4.2 Scelte Ottimali

Possediamo ora tutti gli elementi per caratterizzare la scelta ottimale del nostro decisore in condizioni di certezza.

*Definizione 7:* Un'alternativa $x^*$ si dice *scelta ottimale* se è vero che, tra le alternative accessibili e dominanti, il livello di soddisfazione del soggetto in corrispondenza dell'alternativa ottimale è non minore del livello di soddisfazione del soggetto rispetto a qualsiasi altra alternativa. In simboli[9]:

$$A(x^*) \geq A(x) \;\; \forall x \in D \text{ con } x \neq x^*$$

In altri termini, il soggetto selezionerà uno degli elementi appartenenti all'insieme di alternative ottimali[10] definito come:

[9] Analogamente:

$$x^* = \arg\max_{x \in D} A(x)$$

[10] Si veda in merito Sen (1997).

$$B = \{\forall x \in D | x \succsim y \text{ per } \forall y \neq x\} \tag{8}$$

A questo punto ci si pongono due questioni piuttosto delicate: come possiamo affermare che esistano alternative ottimali per il soggetto? E ancora: visto che il soggetto dovrà scegliere una di queste possibilità, quando possiamo attenderci un unica alternativa ottimale verso cui propenderà la scelta ? La seguente proposizione ci fornisce una chiara risposta alle questioni suindicate.

*Proposizione 2:* Laddove $A$ sia continua e strettamente crescente e l'insieme $D$ limitato e chiuso, allora esisterà sempre una alternativa ottimale, ovvero $B = \{x\}$ con $x \in D$.

*Dimostrazione:* $A$ è continua e strettamente monotona per ipotesi. L'insieme $D$ è limitato poichè sarà vero che $x_k \leq \overline{x_k}$ per $k = 1, 2$ con $\overline{x}_k$ data dal valore $v\left(\underset{-k}{0}; \underset{k}{x_k}\right) = b$ per $k = 1, 2$. $D$ è chiuso poichè per qualsiasi $x \in D$ è possibile individuare un'alternativa $y$ in un intorno piccolo a piacere di $x$ tale che $y \notin D$. Dunque, per il teorema di Weierstrass $A$ possiederà almeno un punto di massimo in $D$. L'unicità di questo è assicurata dalla monotonicità stretta della funzione di soddisfazione delle preferenze[11].

Analiticamente, la scelta ottimale si determina tramite la massimizzazione di una funzione in grado di "applicare" il vincolo alla funzione di soddisfazione. Tale funzione è detta *Lagrangiana* ed è data da, introducendo una nuova variabile $\lambda \neq 0$ detta *moltiplicatore di lagrange:*

$$L(\lambda, x_1, x_2) = A(x_1, x_2) - \lambda [v(x_1, x_2) - b] \tag{9}$$

Nella figura seguente è mostrata, nel caso lineare, l'applicazione di vincolo alla funzione di soddisfazione. La scelta razionale del decisore sarà di selezionare il punto *M'*, ovvero il massimo della porzione di $A$ resa accessibile dal vincolo.

[Inserisci Figura 7]

La scelta ottimale sarà individuata dalle seguenti condizioni di massimo:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \tag{10}$$

[11] Per approfondimenti mirati si veda Mas-Collel et al. (1995).

La combinazione $(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)$ così ottenuta corrisponde alla nostra scelta ottimale poichè:

*i)* $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ ci indica come $v(x_1, x_2) = b$ ovvero ci dice che il nostro vincolo è soddisfatto nel punto di massimo della funzione lagrangiana

*ii)* $\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial A}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0$[12] per qualsiasi $k$ ci permette di individuare una precisa relazione tra $x_1$ e $x_2$.

*iii)* la condizione di reciproca uguaglianza tra le tre condizioni contenute nell'espressione (7) ci consente di determinare il punto di massimo della funzione $A$ che soddisfa il vincolo fronteggiato dal decisore.

Abbiamo dunque una procedura relativamente semplice che può essere utilizzata per prevedere scelte ottimali di decisori razionali in condizioni di certezza. Come è facile mostrare, il nostro quadro analitico è applicabile, *inter alia*, alle scelte di acquisto di un consumatore razionale, alle scelte produttive di un'impresa, alle scelte di un lavoratore in termini di tempo libero e consumo o alle scelte di un investitore razionale tra pacchetti di strumenti finanziari.

# 5 Scelte Ottimali in Contesti ad interdipendenza strategica

La crescente complessità della società moderna ha indotto molti scienziati sociali a ricercare nuovi strumenti che consentano loro, non solo di capire più a fondo, ma anche di rappresentare più fedelmente l'intricata rete di rapporti esistente tra diversi soggetti, facenti tutti parte del medesimo sistema. La consapevolezza di un grado di interdipendenza tra le decisioni dei singoli, più forte di quello dovuto all'appartenenza allo stesso ambiente o alla stessa istituzione, si è diffusa velocemente. I comportamenti individuali risultano spesso maggiormente comprensibili se intesi come interdipendenti, capaci di influenzarsi reciprocamente.

Il comportamento ottimale di un agente risulta essere quello che massimizza il suo benessere, date le sue possibilità, a loro volta determinate dalle azioni degli altri individui. L'interdipendenza diviene quindi più articolata: da un lato vi è l'agire strategico dei soggetti (cioè il fare una mossa solo dopo aver osservato le mosse o aver valutato le possibili risposte altrui), dall'altro il suo naturale risultato: l'evoluzione del-l'ambiente e delle istituzioni si muovono gli individui. La capacità di soggetti razionali di imparare dall'esperienza e di selezionare, al ripetersi dell'interazione, comportamenti efficienti li porta a ridisegnare periodicamente regole o convenzioni di comportamento. L'interazione strategica porta all'evoluzione delle "regole del gioco", che a sua volta modificava i caratteri dell'interazione.

La caratterizzazione di un'interazione strategica (gioco strategico) richiede una specificazione di:

[12] Assumiano che la funzione vincolo abbia sempre una derivata prima non nulla.

1. chi sono i giocatori - cioè i soggetti in interazione strategica -
2. quali sono le loro possibili azioni
3. quali sono i possibili esiti raggiungibili da un giocatore e in che modo questi sono valutati da soggettopayoff - cioè i pagamenti associati alle differenti soluzioni dell'interazione.

Dalla sua nascita nel 1947, *la teoria dei giochi*, ovvero quella branca della matematica che modella le interazioni strategiche, ha cercato di costruire strumenti per analizzare diverse tipologie di interazioni (ripetute, non-ripetute, a informazione perfetta o imperfetta ecc...). In quel che segue, faremo riferimento a una particolare tipologia di interazioni strategiche: *giochi non cooperativi, non competitivi e a perfetta informazione*. Ipotizzeremo dunque che all'interno di questa classe di giochi, ogni soggetto sia chiamato a scegliere una sola volta (*one-shot game*).

Un gioco si dice non cooperativo laddove le decisioni sono assunte su base individuale e non è possibile per i singoli giocatori accordarsi con altri gruppi di soggetti. Per contro, un gioco è cooperativo sono ammesse coalizioni tra individui. Un gioco si dice, invece, a perfetta informazione se i giocatori conoscono tutto dell'interazione strategica e, quindi, ogni giocatore conosce esattamente chi sono gli altri giocatori, quali sono le loro possibili strategie, nonchè i possibili esiti raggiungibili tramite l'interazione stessa. Infine, un gioco è non competitivo se quanto ottenuto da un giocatore non è necessariamente perso da altri.

## 5.1 Scelte a Confronto: comportamento strategico e comportamento competitivo

Per comportamento strategico, si intende una modalità comportamentale distinta dal generalmente detto modello competitivo. Decisioni competitive sono assunte da individui che agiscono in isolamento ricercando la massimizzazione della propria soddisfazione e assumendo come dati/parametri i comportamenti degli altri soggetti. I risultati raggiunti dipendono unicamente dalle scelte del decisore, data la condizione del contesto di scelta caratterizzata dai suddetti parametri. Laddove si parli di decisioni strategiche si considera il caso in cui la linea d'azione in grado di massimizzare la soddisfazione di un soggetto sia connessa al comportamento di altri individui che con lui interagiscono all'interno dello stesso contesto decisionale. L'approccio competitivo alle scelte individuali (ovvero quanto abbiamo chiamato scelte ottimali in condizioni di certezza) di fatto vede gli individui come tanti soggetti distinti che perseguono obiettivi individuali in modo totalmente indipendente; quando invece parliamo di scelte strategiche, questa indipendenza viene meno.

Cerchiamo di differenziare con maggior precisione l'approccio competitivo da quello strategico. Secondo l'approccio competitivo ognuno degli $N$ soggetti facenti parte di un dato sistema possiede un insieme di azioni possibili/accessibili $(\Lambda_i)_{i=1}^{N}$. Le scelte di ogni soggetto implicheranno un preciso risultato/ esito individuale. Una funzione di risultato $(g : \Lambda_i \longrightarrow X_i)$ collega le possibili azioni individuali agli esiti raggiungibili $(X_i)_{i=1}^{N}$. Una relazione di preferenza individuale sui possibili risultati, con i tratti che ne assicurino la rappresentabilità tramite una funzione di soddisfazione delle preferenze, è quanto consente al decisore razionale di individuare esiti ottimali e dunque azioni coerenti.

In questo contesto una linea d'azione $\alpha_i \in \Lambda_i$ è ottimale laddove:

$$\alpha_i = \underset{\alpha_i \in \Lambda_i}{\arg\max} A_i \left( g \left( \alpha_i \right) \right) \tag{11}$$

Quando si considerano scelte strategiche è necessario specificare, non solo le linee d'azione possibili per il nostro ipotetico soggetto i-esimo, ma l'insieme di azioni possibili di tutti gli altri soggetti coinvolti nell'interazione $(\Lambda_{-i})$. I risultati raggiunti da ogni giocatore saranno co-determinati dalle scelte effettuare da tutti i soggetti in interazione, ovvero $g : \Lambda_i \times \Lambda_{-i} \longrightarrow X_i$. Proprio nelle modalità in cui azioni individuali conducono verso un determinato eisto si celano le caratteristiche dell'interazione strategica. Laddove le preferenze individuali sui possibili esiti del gioco siano rappresentabili, potremmo dire che una linea d'azione è ottimale se:

$$\alpha_i = \underset{\alpha_i \in \Lambda_i}{\arg\max} A_i \left( g \left( \alpha_i, \alpha_{-i} \right) \right) \tag{12}$$

In contesti di interazione strategica, il decisore non sarà, dunque, in grado di selezionare individualmente, tramite la scelta, l'esito per lui ottimale, ma potrà unicamente optare per quella linea d'azione in grado, posto il possibile comportamento altrui, di condurre il gioco verso un esito preferibile.

## 5.2 Dinamiche Dominanti: L'Equilibrio di Nash

A questo punto ci è necessaria un definizione precisa di gioco strategico.

*Definizione 8:* Un *gioco strategico* $(G)$ *non cooperativo, non competitivo e a perfetta informazione* si caratterizza tramite:

- un insieme finito di giocatori $N$
- un insieme di strategie per ogni giocatore $S_i$ per $\forall i \in N$
- una relazione di preferenza $(\succsim_i)$ per $\forall i \in N$ sugli esiti del gioco $X = \underset{i \in N}{\times} S_i$

Una strategia specifica una precisa azione per ogni momento del gioco in cui un soggetto è chiamato a decidere. L'insieme di strategie di ogni giocatore coinciderà quindi, nel nostro caso in cui l'interazione prevede una sola scelta da parte di ogni giocatore coinvolto, con l'insieme di azioni possibili[13]. Laddove, quindi, le preferenze individuali siano rappresentabili, è possibile includere direttamente una funzione di soddisfazione $(A_i)_{i=1}^{N}$ o di payoff nella descrizione del gioco.

Come si avrà modo di verificare, numerose situazioni possono essere pensate come un'interazione strategica: dal voto espresso da un soggetto all'interno di un'assemblea, alle decisioni di imprese operanti in mercati non perfettamente concorrenziali, sino alle scelte di posizionamento politico di un partito. Nel caso più semplice di due giocatori e due strategie è possibile rappresentare un gioco tramite una tabella a doppia entrata del tipo

| | $D_2$ | $H_2$ |
|---|---|---|
| $D_1$ | $3,3$ | $1,4$ |
| $H_1$ | $4,1$ | $0,0$ |

**Fig. 8: Hawk e Dove**

in cui sono indicate, per ogni giocatore, le possibili strategie (in questo caso H: essere aggressivi e D: essere accomodanti) e i possibili esiti individuali raggiungibili (o payoff del gioco). I payoff del gioco riflettono un preciso ordinamento di preferenze sui risultati da parte di ogni soggetto, ovvero nel nostro esempio deve essere vero che $(H_1, D_2) \succsim_1 (D_1, D_2) \succsim_1 (H_1, H_2) \succsim_1 (D_1, H_2)$. In casi di questo genere, le scelte dei giocatori avvengono simultaneamente, ovvero nessuno è in grado, prima di scegliere una certa linea d'azione, di osservare le scelte altrui. In contesti di perfetta informazione, è tuttavia possibile che le scelte di alcuni soggetti avvengano in un diverso momento rispetto a quelle di altri, ovvero l'interazione strategica sia di tipo sequenziale. Ogni gioco sequenziale potrà dunque essere definito da un insieme di nodi decisionali, iniziali, intermedi e finali, in corrispondenza di quali è chiamato a decidere un soggetto diverso. Se nessun soggetto sceglie più di una volta, possiamo rappresentare le possibili strategie individuali come segmenti uscenti da un nodo decisionale e in grado di condurre verso un nodo successivo o finale. Ogni nodo finale, condurrà verso esiti differenti in termini di soddisfazione individuale. La seguente figura illustra un semplice gioco in forma estensiva e con perfetta informazione.

[Inserisci fig. 9]

Possiamo predire un determinato esito dell'interazione strategica ? O, in altri termini, è possibile individuare una soluzione di un gioco ? La risposta alla questione posta è affermativa, a patto che ci dotiamo di un *concetto di soluzione,* ovvero definiamo una precisa modalità tramite la quale i giocatori ricercano linee d'azione ottimali all'interno di contesti strategici. Il concetto di soluzione

[13] Per approfondimenti si veda Osborne e Rubinstein (1994).

più utilizzato in teoria dei giochi è quello proposto da J.Nash (1951). Secondo Nash le dinamiche dominanti tra decisori razionali operanti in contesti strategici sono distinguibili tramite l'intuitiva condizione di *risposta ottimale*: ogni soggetto ricerca quella linea d'azione che è preferibile da un'ottica individuale sulla base dei possibili comportamenti altrui. Se ognuno cerca di selezionare risposte ottimali ai comportamenti altrui, l'interazione strategica volgerà a un esito finale laddove ogni giocatore individui una linea d'azione dalla quale non è conveniente deviare date le azioni degli altri soggetti. Più precisamente:

*Definizione 9:* Un profilo di strategie $(s_i^*)_{i=1}^N$ è un equilibrio di Nash di $G$ se per $\forall i \in N$ è vero che:

$$A_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq A_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \text{ per } \forall s_i \in S_i$$

La nozione di equilibrio di Nash sottende dunque un'idea di non deviazione da un profilo di stategie, ovvero da un insieme di azioni che possono ritenersi reciprocamente una corrispondenza di risposte ottimali[14]. Il lettore potrà agevolmente verificare come, per il gioco in figura 8, tale corrispondenza di risposte ottimali si realizza in coincidenza della seconda e terza cella.

L'esistenza di un equilibrio di Nash è mostrata nel teorema omonimo, di cui forniamo una versione lievemente rimaneggiata.

*Proposizione 3 (Teorema di Nash):* Un equilibrio di Nash esiste per il gioco $G$ se:

**i** $S_i$ è un insieme non vuoto, convesso, limitato e chiuso

**ii** $A_i$ è continua e strettamente concava

*Dimostrazione:* Vedi Appendice

Da un punto di vista analitico, l'equilibrio di Nash potrà essere individuato, in un gioco a mosse simultanee, o tramite il riconoscimento di un profilo di strategie rispetto alle quali nessuno ha incentivo a deviare, o attraverso la determinazione delle risposte ottimali di ogni giocatore e la ricerca di una loro corrispondenza. Per giochi in forma estensiva, sarà invece necessario ricorrere a un procedura detta di *induzione a ritroso (backward induction)* per la quale l'equilibrio di Nash è determinato dalle possibili sequenze di risposte ottimali costruite indicando l'azione ottimale per l'ultimo giocatore chiamato a scegliere, quindi la risposta ottimale del penultimo soggetto e così via sino al giocatore che sceglie per primo. La seguente proposizione ci mostra come in questo modo

[14] In tal senso se noi introducessimo una *funzione di risposta ottimale* $b_i : S_{-i} \rightarrow S_i$ potremmo caratterizzare un equilibrio di Nash come quel profilo di strategie tale che per ogni soggetto $s_i^* \in b_i\left(s_{-i}^*\right)$.

sia sempre possibile deteminare un equilibrio di Nash in un gioco a mosse sequenziali.

*Proposizione 4 (Teorema di Zermelo):* In ogni gioco in forma estensiva con perfetta informazione, una procedura di induzione a ritroso determina gli equilibri di Nash.

*Dimostrazione:* Vedi Appendice

Viene lasciata a titolo di esercizio al lettore l'applicazione della procedura per il gioco in Fig.9.

## 5.3 Due Questioni Insidiose: Unicità e Stabilità dell'Equilibrio

Esistono numerosi problemi legati alla nozione di equilibrio appena introdotta. Innanzitutto, anche una volta definito un certo profilo di strategie come un equilibrio alla Nash, non è detto questo indichi un modo ovvio di giocare il gioco: l'idea che tutti i soggetti ragionino in termini di risposta ottimale può costituire un'assunzione piuttosto forte soprattutto in certi contesti. Non è infatti scontato che esista una conoscenza comune (*common knowledge*) circa il modo di comportarsi o su come utilizzare l'informazione, cosi come non è detto debba esistere un modo ovvio di giocare.

In secondo luogo anche se assumiamo che i soggetti si comportino alla Nash dovremmo giustificare tale caratterizzazione o attraverso forme di apprendimento adattivo dall'esperienza passata, o attraverso l'assimilazione da parte dei giocatori di norme di comportamento sociale che conducano a una razionalità come quella supposta. In alternativa, si potrà unicamente considerare tale comportamento come endemicamente contenuto nel tessuto sociale in cui i diversi soggetti si trovano ad interagire.

Infine anche se la soluzione di Nash fosse, e non lo è, l'unica ammissibile in contesti di interazione strategica, altre osservazioni e specificazioni sarebbero opportune. Perchè un equilibrio di Nash sia raggiungibile sono due assunzioni precise: l'esistenza di un numero finito di giocatori intelligenti e di un ben specificato *protocollo di contrattazione*[15].

Se infatti i soggetti non fossero assunti numericamente finiti vi sarebbe un problema di esplosione di interazioni strategiche, il che potrebbe rendere impossibile scorgere un equilibrio. Al pari, se gli individui non fossero razionali e intelligenti (cioè capaci di prevedere che gli altri si comporteranno esattamente come loro) l'interazione conterrebbe componenti stocastiche difficilmente controllabili.

Non meno importante è quindi l'assunzione di un protocollo di contrattazione, inteso come insieme di regole ed esiti dell'interazione, ben definito. Senza di esso non esisterebbe una chiara specificazione di come avviene il gioco

[15] In merito Kreps (1990b).

e ciò ci prospetterebbe uno spettro talmente ampio di possibili scenari da non permettere alcuna previsione sull'esito del gioco stesso. Non per nulla si ritiene cruciale definire con precisione i protocolli di contrattazione ottimali con riferimento a importanti problemi di interazione strategica in un contesti economici.

In second'ordine è necessario mostrare non solo l'esistenza ma anche l'unicità e la stabilità di un equilibrio perché questo rappresenti una completa e persistente descrizione dell'esito di un processo o di una interazione.

Precondizione importante perché un equilibrio di Nash sia unico è ovviamente che esista un modo ovvio di giocare il gioco e che questo automaticamente selezioni l'equilibrio. Sommariamente quattro possono essere le ragioni per cui vi potrebbe essere un modo ovvio di giocare:

1- possibilità di negoziare prima dell'inizio del gioco le possibili strategie se non l'esito del gioco stesso

2- esperienza diretta del gioco in questione

3- esperienza indiretta racchiusa in determinate convenzioni sociali

4- esistenza di punti focali[16], cioè esiti del gioco selezionati quasi automaticamente attraverso l'uso di regole e norme condivise

È ovvio come nel caso di negoziazione prima dell'inizio del gioco (caso 1) i giocatori selezionano un dato modo di giocare, il che il più delle volte conduce a un dato equilibrio.

L'esperienza diretta dipende invece dalla possibilità di apprendere dall'esperienza un dato modo di giocare. Se i giocatori hanno già condotto in passato lo stesso gioco, sapranno come comportarsi, cosa fare e quale sarà il comportamente effettivo del rivale. Questo li spingerà automaticamene a scegliere quella stategia che in passato ha portato loro maggiori vantaggi conducendoli all'equilibrio.

Simili possono essere le considerazioni riguardo alle convenzioni sociali. Una convenzione sociale ha tre caratteristiche ben precise: è abituale (nel senso che si ripete nel tempo regolarmente), è attesa (nel senso che gli individui si attendono che si verifichi), è autoreferenziale (nel senso che il suo ripetersi la afferma ulteriormente). Queste tre caratteristiche non solo indicano come giocare un gioco, ma spesso ne determinano la soluzione. Il gioco degli automobilisti che percorrono la medesima strada in senso opposto, potendo guidare o sulla destra o sulla sinistra (vedi fig. 10), avrebbe due equilibri di Nash in assenza di convenzioni sociali, ne possiede uno solo se esiste un codice della strada (tipico caso di convenzione sociale).

[Inserisci Fig. 10]

Infine, il caso dell'equilibrio di punto focale, cioè della soluzione del gioco selezionata attraverso un criterio focale, può essere chiarito attraverso il classico esempio di gioco in forma normale con molteplici equilibri alla Nash: *la battaglia*

[16] Si veda in merito Schelling (19).

*dei sessi (*Luce e Raiffa (1957)). L'idea di base è la seguente: marito e moglie devono decidere se recarsi alla partita o a teatro; la moglie preferisce il teatro e il marito la partita, tuttavia entrambi preferiscono stare insieme invece che separati, cosicché se uno sceglierà un'opzione l'altro non potrà che adeguarsi alla scelta. I payoffs sono quelli in figura 11:

[Inserisci Fig. 11]

Come il lettore potrà verificare, esistono due equilibri di Nash in corrispondenza della prima e della quarta celletta. Vi è quindi un problema di selezione dell'equilibrio, che risolveremo con il concetto di punto focale.

Se i giocatori non sono in grado di comunicare, è possibile che vi sia l'insorgenza spontanea di una soluzione legata all'esistenza di un principio organizzatore (chiamato principio focale) - ad esempio equità, buon senso, geografia, ordini di gerarchia ecc... - che spinge automaticamente i soggetti verso un unico punto di equilibrio. È ovvio come, in riferimento a questo criterio, grande importanza è rivestita dalla storia passata dei giocatori e dalla loro identità. Proprio nel caso della "battaglia dei sessi", l'equilibrio sarà o l'andare alla partita insieme o a teatro insieme a seconda di quale dei due soggetti potrà imporre le sue preferenza sulla base di un principio condiviso da entrambi. Se il principio condiviso da entrambi è di tipo sessista (la donna ha più diritti dell'uomo) vi sarà selezione automatica di un unico equilibrio del gioco (andare a teatro).

Veniamo dunque alla stabilità dell'equilibrio. Potremo dire che "*quando lo stato delle cose è tale che una variazione infinitamente piccola dello stato presente altererà soltanto di una quantità infinitamente piccola lo stato a un momento futuro, la condizione del sistema, che sia in riposo o in movimento, si dirà stabile; ma quando una variazione infinitamente piccola nello stato presente può causare una differenza finita in un tempo finito, la condizione del sistema è detta instabile*" (J. C. Maxwell). Questo ci fornisce una esauriente enunciazione del concetto di stabilità, ma, come si sarà notato, questa definizione è mutuata dalla fisica, vediamo ora di darne una più vicina alla scienza economica.

Lo stato di equilibrio di un sistema sociale è una situazione che genera messaggi/riscontri che non inducono gli agenti a modificare le teorie in cui credono e le politiche che perseguono; un equilibrio di Nash sarà stabile se non esiste alcun incentivo a modificare ex-post le proprie scelte (posto ovviamente che le caratteristiche morfologiche del gioco non mutino).

Il gioco in figura 12 mostra un equilibrio alla Nash instabile, poiché il giocatore uno potrebbe in un qualunque istante, mutare la propria scelta da $a$ in $b$ senza, per questo incorrere in perdite, allo scopo di diminuire il payoff dell'altro giocatore.

[Inserisci Fig. 12]

Potremmo quindi dire che se da un lato non è sempre detto che esista un modo ovvio di giocare un gioco, dall'altro non è sempre assicurato che quel modo ovvio di giocare conduca a un equilibrio unico e stabile.

## 6 Scelte in Condizioni di Rischio

Nella sezione 3 abbiamo caratterizzato scelte ottimali in condizioni di certezza. In che modo, tuttavia, possono essere descritte scelte di soggetti razionali tra insiemi di alternative rischiose, ovvero insiemi di ottenimenti in cui valore è dipendente dal verificarsi di un evento non certo ? [17]

Per tratteggiare un risposta al suindicato problema, definiamo come *lotteria* un insieme di possibili ottenimenti $(x_1, ..., x_M)$ ognuno dei quali potrà essere ottenuto dal deicore al verificarsi del rispettivo evento causale $(e_1, ..., e_2)$. Assumendo, per semplicità, che tali eventi siano tra loro mutualmente esclusivi, ovvero ipotizzando che sia possibile associare a ognuno un probabilità oggettiva, possiano rappresentare una lotteria come:

$$l = (x_1|e_1, ..., x_M|e_M) \tag{13}$$

Se gli eventi sono mutualmente esclusivi, utilizzando le probabilità associate a ciascun evento $(p_1, ..., p_M)$ possiamo determinare il valore atteso della lotteria, pari a:

$$E(l) = \sum_{i=1}^{M} p_i x_i \tag{14}$$

L'espressione (14) rappresenta il valore della lotteria per il nostro decisore razionale. Laddove questi fosse disposto, pur di partecipare alla lotteria, a sostenere costi maggiori del valore conferito ad essa il nostro individuo sarebbe *amante* del rischio; se parteciperebbe alla lotteria solo sostenendo costi minori di $E(l)$, il nostro decisore sarebbe *avverso* al rischio; altrimenti, *neutrale* al rischio. Se un soggetto fosse neutrale verso il rischio, innanzi a due lotterie alternative $l$ e $l'$ sceglierebbe semplicemente quella lotteria a cui è associato un valore più elevato. Tuttavia, molto spesso, gli individui sono amanti o avversi la rischio. In questi casi, è possibile che una piccola probabilità di conseguire un ottenimento altamente preferito dal soggetto può essere percepita come un'incredibile occasione o come un irragiungibile miraggio, ovvero che il nostro decisore conferisca un elevato valore (risp. ridotto) alla possibilità di raggiungere un elevato livello di soddisfazione delle proprie preferenze.

Il concetto utile per rappresentare preferenze differenti rispetto al rischio fu introdotto da Von Neumann e Morgenstern (VNM) (1947) e possiamo, nel nostro contesto, chiamarlo *soddisfazione attesa delle preferenze individuali.*

[17] Il presente paragrafo segue piuttosto pedissequamente quanto contento in Harsanyi (1997).

*Definizione 10:* Dato un insieme di lotterie $L$, una funzione di soddisfazione alla VNM (soddisfazione attesa) è una funzione $EA : L \longrightarrow R$ tale che

$$EA\left(l\right) = \sum_{i=1}^{M} p_i A\left(x_i\right)$$

dove $A$ è la funzione di soddisfazione delle preferenze del decisore rispetto ai diversi ottenimenti che compongono la lotteria.

Laddove le preferenze del decisore rispetto a diverse lotterie possiedano alcune proprietà di razionalità e coerenza, tali da renderle rappresentabili da un funzione di soddisfazione alla VNM,[18] è possibile mostrare la seguente:

*Proposizione 5:* Una lotteria è ottimale laddove massimizza la soddisfazione attesa del decisore, ovvero

$$l^* = \arg\max_{l \in L} EA\left(l\right)$$

*Dimostrazione:* Vedi Appendice

Soggetti avversi al rischio, possiederanno una soddisfazione attesa maggiore della soddisfazione associata al valore atteso della lotteria, l'opposto per soggetti avversi al rischio. Solo nel caso di nuetralità verso il rischio soddisfazione attesa e quella associata al valore atteso della lotteria coincidono; solo in questo caso, dunque il confronto dei valori attesi in termini di soddisfazione è una buon criterio di scelta razionale in condizioni di rischio. Innanzi a soggetti avversi o amanti del rischio, il comportamento ottimale in condizioni di rischio è sancito dalla massimizzazione dell'utilità attesa[19].

# 7 Scelte Collettive

Assai frequentemente decisori individualmente razionali partecipano alla determinazione di decisioni assunte da assemblee, organi di rappresentanza collettiva o comitati. Questi ultimi devono giungere alla definizione di una preferenza collettiva rispetto a possibili alternative, tramite un processo di sintesi delle preferenze dei propri membri.

Anche laddove ogni soggetto fosse in grado di selezionare su base individuale un'alternativa in grado di massimizzare la propria soddisfazione, è quindi

[18] In merito si vedano Kreps (1990a), Mas Collel et al. (1995).

[19] Savage (1954), Anscombe e Aumann (1963) e Harsanyi (1977) hanno estesa questa teoria al caso in cui le probabilità associate agli eventi siano soggettive, ovvero sconosciute. In questi casi si parla di *scelte in condizioni di incertezza.*

utile indagare sulle modalità tramite le quali un comitato di individui aggrega le preferenze individuali, confrontando diverse regole di decisione collettiva ed evidenziandone virtuosità e limiti.

In quanto segue vaglieremo sinteticamente alcune caratteristiche distintive di diverse procedure di decisione collettiva. Nel fare ciò terremo in considerazione due ambiti distinti di analisi[20]: *decisioni di comitato*, ovvero come un gruppo di soggetti può assumere una decisione comune tramite l'utilizzo di una ben specificata procedura di voto sulle diverse possibilità, e *giudizi sul benessere sociale*, ovvero valutazione delle alternative e selezione dell'esito collettivamente ottimale tramite la misurazione della soddisfazione collettiva associata alle diferenti opzioni di scelta.

## 7.1 Decisioni di Comitato: 1) Unanimità

Si consideri un insieme di individui chiamato a decidere collettivamente tra due alternative $x$ e $y$. Le preferenze dei membri del nostro ipotetico comitato $C$ sono pari a

$$\begin{array}{ccc} x & \succsim & {}_i y \\ x & \sim & {}_j y \\ y & \succsim & {}_k x \end{array}$$

una decisione collettiva dovrà essere assunta attraverso una regola di voto, in grado di selezionare un esito socialmente preferito, nel rispetto di alcuni principi, collettivamente accettati e riconosciuti, di aggregazione delle preferenze individuali. Si immagini che tale regola richieda il raggiungimento dell'*unanimità* relativamente alla desiderabilità sociale di una alternativa di scelta. La regola dell'unanimità è dunque semplice: sarà scelta l'alternativa preferita da tutti i membri che formano il comitato.

Il consenso unanime è, da un lato, particolarmente oneroso da raggiungere a causa degli elevati *costi di negoziazione* necessari per conciliare opinioni individuali spesso divergenti verso una netta preferenza collettiva per una delle possibili alternative. Dall'altro, tale regola può essere giudicata massimamente democratica in quanto conferisce ad ogni soggetto il *potere di veto*, ovvero la possbilità di bloccare ogni decisione collettiva laddove questa non selezioni un'alternativa individualmente ottimale.

La possibilità di ogni individuo di formare singolarmente un *insieme decisivo di soggetti* (*decisive set)*, ovvero quell'insieme di membri del comitato in grado di bloccare l'assunzione di una decisione se in contrasto che le preferenze individuali, solleva il noto paradosso della *tirannia dello status quo*: una regola

[20] Riconosciuti originariamente da Sen (1986). Si veda in merito Balducci, Candela e Scorcu (2000).

dell'unanimità tenderà a preservare lo stato attuale delle cose, a non spingere il comitato ad assumere alcuna decisione modificativa delle condizioni in cui giacciono i propri membri.

A fini illustrativi, si consideri $C = \{i, j, k\}$ e un insieme di possibili alternative $X$ composto dallo status quo $z$ e dagli stati alternativi $x, y$ . Gli ordinamenti individuali di preferenza rispetto alle tre possibilità, status quo incluso sono:

$$
\begin{array}{lcl}
x & \succsim & _i y \succsim_i z \\
x & \sim & _j y \succsim_j z \\
y & \succsim & _k x \succsim_k z
\end{array}
$$

Se venisse richiesto al comitato quali delle due opzioni selezionare tra x ed y secondo la regola dell'unanimità nessuna alternativa verrebbe selezionata perché$i$ e $j$ opterebbero per $x$ e $k$ per $y$, o in alternativa $k$ e j opterebbero per $y$e $i$ per$x$. Nessuna delle alternative viene accolta anche se sono generalmente preferibili da tutti i soggetti a quella che è la loro condizione attuale (status quo). La regola dell'unanimità si rivela dunque eccessivamente conservatrice.

C'è però un altro problema legato alla regola dell'unanimità, che potremmo indicare come *dipendenza dal percorso deliberativo.* Con tale espressione si intende la possibilità di influenzare l'esito di una procedura di voto all'unanimità manipolando l'ordine con cui si confrontano le alternative. Tale potere di fissare l'agenda deliberativa giace spesso nelle mani di quel soggetto che presiede un comitato.

Immaginate che fra i nostri tre soggetti, il soggetto $i$ sia il presidente del comitato, quindi sia colui che oltre a votare possiede anche la facoltà di stabilire l'ordine con quale sono confrontate, esaminate, e discusse le alternative all'interno del comitato. Se il soggetto $i$, sapendo che la regola in vigore è la regola dell'unanimità, invece di chiedere ai membri del comitato esprimersi rispetto ogni alternativa possibile, decida di confrontare l'alternativa$x$ con l'alternativa $z$, e dunque la vincente tra le due con l'opzione $y$. In questo caso, sarà vero che $x$ è preferita a $z$ da tutti i soggetti. Dunque $x$ sarà unanimamente scelta. L'indecidibilità si è ora traslata sul confronto tra $x$ e $y$, tuttavia si è verificato un cambiamento rispetto allo status quo. In più, la scelta collettiva corrisponde esattamente all'alternativa preferita dal soggetto $i$.

## 7.2 Decisioni di Comitato: 2) Pluralità

Una regola di voto alternativa è quella della *pluralità.* L'idea di fondo è nota: ogni individuo membro del comitato segnala quella che è l'opzione da lui preferita, in modo che l'alternativa che riceve il maggior numero di consensi è l'alternativa collettivamente scelta.

Un tratto immediatamente riconoscibile come positivo della regola della pluralità è che essa dovrebbe selezionare l'alternativa preferita dalla maggioranza relativa dei membri del comitato. Questa regola è dunque, da un lato più semplice e meno costosa della regola dell'unanimità, dall'altro in grado di garantire un livello minimale di democraticità nelle decisioni assunte, selezionando l'alternativa preferita da almeno una maggioranza semplice degli individui. Essa tuttavia può condurre verso diversi risultati altrettanto paradossali di quelli riferiti alla regola dell'unanimità.

Si consideri un comitato, formato da 21 individui, chiamato a decidere tra quattro alternative $\{a, b, c, d\}$ . Le preferenze individuali rispetto a questo sono:

| $n^o sogg.$ | 3 | 5 | 7 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $\succsim$ | $b$ | $c$ | $d$ | $b$ |
| $\succsim$ | $c$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $\succsim$ | $d$ | $d$ | $a$ | $a$ |

Sulla prima riga vi sono quattro gruppi di soggetti, divisi a seconda delle diverse preferenze individuali sulle alternative verticalmente ordinate dalle più preferite alle meno preferite. Indichiamo con $N$ il numero di perefernze accordate ad ogni alternativa. E' facile determinare come $N(a) = 8, N(b) = 7, N(c) = 6$ e $N(d) = 0$.

Una regola dell'unanimità non comporterebbe nessuna decisione, e per questo è possibile che il nostro comitato decida di degradare leggermente il livello di democraticità della regola di aggregazione delle scelte individuali in una preferenza collettiva, e utilizzare la regola della pluralità. In questo caso l'alternativa scelta sarebbe $a$ pur rappresentando l'alternativa peggiore per una maggioranza assoluta di membri del comitato (*tirannia della minoranza).*

Quindi in che modo si può cercare di ovviare a questo paradosso ?

Una possibilità è quella di confrontare coppie, invece di chiamare i soggetti ad esprimersi sulla totalità delle alternative, è possibile confrontare coppie di alternative, eliminando progressivamente quella alternativa che è stata dichiarata meno preferita dall'altra da una parte dei membri del mio comitato. Nel nostro esempio confrontando in modo sequenziale le alternative dalla $a$ alla $d$ , sarebbe selezionata l'alternativa $c$[21] più vicina all'alternativa mediamente preferita dai membri del comitato. Questo lieve emendamento alla regola della pluralità lascia tuttavia intravedere nuovamente la possibilità di manipolazione del percorso deliberativo[22].

[21] E' lasciato illustrare come una serie di confronti a coppie dall'alternativa $a$ alla $d$, porti alla selezione di $c$.

[22] Un alternativa attuabile è l'applicazione della cosidetta *regola di Borda.* Essa si sostanzia nel considerare una sequenza non decrescente di numeri interi $(s_0 \geq s_1 \geq ... \geq s_H)$ dove $H$ è il

A forme di tirannia della minoranza può invero condurre un pervasivo astensionismo dalle procedure di decisione collettiva. Cerchiamo di capire il perchè attraverso un altro semplice esempio.

Ipotizziamo che un comitato composto da 7 individui confronti due alternative $a$ e $b$, .i soggetti possono dichiararsi favorevoli ad $a$, favorevoli a $b$, o astenersi. Associamo un numero pari a +1 alla preferenza accodata ad $a$, un numero pari a -1 a una preferenza accordata a $b$, zero al caso di astensione. Immaginate che le espressioni di voto dei nostri sette soggetti sia pari a $(+1, +1, +1, 0, 0, -1, -1)$ . L'alternativa scelta sarebbe $a$ pur essendo indicata unicamente da un minoranza di soggetti. Tale minoranza potrà restringersi tanto più l'astensionismo è diffuso all'interno del comitato. Se infatti immaginate che due nuovi soggetti decidano di non votare, ovvero $(+1, +1, 0, 0, 0, 0, -1)$, l'alternativa $a$ sarà scelta pur essendo preferita da solo due membri di $C$.

Infine la regola della pluralità può in alcuni casi, alche laddove emendata in senso sequenziale, non condurre ad alcun chiara decisione collettiva. Il noto *paradosso di Condorcet* illustra tale possibilità. Si considerino i seguenti ordinamenti di preferenza individuale per tre soggetti che devono scegliere collettivamente tra tra alternative:

$$\begin{array}{rcl} a & \succsim & {}_i b \succsim_i c \\ c & \succsim & {}_j a \succsim_j b \\ b & \succsim & {}_k c \succsim_k a \end{array}$$

se confrontiamo $a$ e $b$ tra queste sarà preferita $a$, tra $b$ e $c$ l'alternativa $c$ e tra $c$ e $a$ la possibilità inizialmente scartata ($a$). La relazione di preferenza collettiva deducibile dall'applicazione della regola della pluralità è dunque *ciclica* ovvero incapace di selezionare una volta per tutte un'esito socialmente ottimale. Questo paradosso non si verificherà laddove le preferenze di tutti i soggetti verso le alternative confrontate siano *a un solo picco* (*single-peaked*), ovvero esista un ordine di alternative tali per cui se $a \succsim b$ e confrontiamo $a$ con una qualsiasi alternativa contenuta in un intorno destro dell'alternativa $b$, allora $a \succsim c$.[23] E' semplice capire, osservando la seguente figura, come, nel caso esposto originariamente da Condorcet, tale condizione non sia soddisfatta per il soggetto $j$

numero di alternative confrontare. Associando il numero più elevato all'alternativa maggiormente preferita, il secondo numero più elevato alla seconda alternativa maggiormente preferita e così via, nonchè sommando i punteggi ottenuti da ogni alternativa, possiamo individuare l'alternativa collettivamente preferita come quell'esito che ha ottenuto il punteggio più elevato.

[23] Il noto Teorema di Black mostra come sia possibile derivare una preferenza collettiva trasitiva da preferenze individuali a un solo picco. In merito si veda Kelly (1986) o Moulin (1999).

[Inserisci Figura 13]

Potremmo dunque lasciarci suggestionare dai numerosi esiti paradossali delle regole sin qui discusse. In entrambi i casi, tali esiti perversi sembrano porre una domanda precisa allo scienziato sociale: esiste una qualche regola di voto che possa ritenersi minimamente accettabile, sulla quale fondare scelte collettive ? O, in altri termini, è possibile ricavare una regola di voto che soddisfi alcune proprietà desiderabili per una regola di decisione collettiva ? Se sì, di che tipo ?

## 7.3 Decisioni di Comitato: 3) Approccio Assiomatico e Teorema di May

L'approccio assiomatico alle decisioni di comitato si fonda sulla definizione di una serie di proprietà che una qualsiasi regola di voto dovrebbe possedere per rispondere a minimali richieste di democraticità e utilizzabilità e sulla conseguente ricerca di regole in grado di soddisfare contestualmente le proprietà indicate. Prima di introdurre e discutere brevemente tali proprietà definiamo formalmente una regola di voto. Dato un insieme di soggetti $N = \{1, ..., n\}$ membri di un comitato le cui preferenze rispetto a un insieme di alternative selezionabili $X$ sono rappresentare da $(\succsim_1, ..., \succsim_n)$ diciamo:

*Definizione 11:* Una regola di voto $V$ associa a ogni profilo di preferenze individuali un elemento dell'insieme delle alternative $X$ ovvero $V : (\succsim_1, ..., \succsim_n) \rightarrow X$.

Alcune proprietà possono ritenersi desiderabili per qualsivoglia regola di voto: *i)* che sia in grado di indicare una decisione collettiva per qualsiasi siano le preferenze individuali rispetto alle alternative valutate, *ii)* che non valuti alcuni soggetti come più importanti di altri, ovvero valuti allo stesso modo le preferenze di ognuno degli $N$ votanti, *iii)* che non consideri chi vota cosa, ma unicamente il consenso raggiunto dalle diverse alternative, infine *iv)* che sia in grado di garantire che laddove un'alternativa scelta divenga maggiormente preferita all'interno del comitato, questa continui a essere indicata come decisione collettiva. Tali proprietà possono essere definite con maggior precisione.

*Anonimicità (A):* $V$ è *anonima* laddove sia simmetrica rispetto alle sue $n$ componenti

*Dominio non Ristretto (UD):* $V$ è a *dominio non ristretto* laddove selezioni un elemento di $X$ per qualsiasi profilo di preferenze individuali

*Neutralità (N):* Applicando una permutazione causale $\Pi$ alle preferenze dei diversi soggetti è vero che $V(\succsim_1, ..., \succsim_n) = V(\Pi(\succsim_1), ..., \Pi(\succsim_n))$

*Monotonicità (M):* Se $V(\succsim_1, ..., \succsim_n) = \{x\}$ con $x \in X$ e l'alternativa diviene maggiormente preferita da qualche soggetto senza essere meno preferita da altri, in corrispondenza del nuovo profilo di preferenze $\left(\succsim_1^{'}, ..., \succsim_n^{'}\right)$ è vero che $V\left(\succsim_1^{'}, ..., \succsim_n^{'}\right) = \{x\}$.

Quale regola di voto soddisfa le suddette proprietà ? La risposta ci è data dalla seguente:

*Proposizione 6 (Teorema di May):* Esiste un'unica regola di voto che soddisfa le proprietà $A, UD, N$ e $M$. Essa è la regola della pluralità, ovvero $V(\succsim_1, ..., \succsim_n) = \{x\}$ con $x \in X$ se e solo se $N(x) \geq N(y)$ per $\forall y \in X$ con $y \neq x$

*Dimostrazione:* Vedi Appendice

La regola della pluralità appare dunque l'unica regola di voto in grado di garantire che le proprietà suddette siano verificate. Laddove dunque si voglia utilizzare un regola di voto per assumere decisioni di comitato o si definiscono altre proprietà, parimenti accettabili e in grado di garantire democraticità e non arbitrarietà alla procedura di aggregazione delle preferenze individuali, e si ricerca una regola alternativa che le soddisfi, oppure si accetta la regola della pluralità, tenendo ben presente come essa sia uno strumento di decisione imperfetto. Conoscerne tuttavia i limiti dovrebbe consentire di ridurre al minimo la pervasività dei paradossi illustrati nella sezione precedente.

# 8 Giudizi sul Benessere Sociale

Una delle modalità tramite cui sono assunte decisioni collettive consiste nell'utilizzare regole di voto, ovvero procedure di aggregazione delle preferenze. individuali rispetto ai diversi esiti mirate alla selezione di un'alternativa sulla base di requisiti minimi di accettabilità collettiva sanciti dalla stessa regola di votazione. Ogni qualvolta tuttavia vengono valiate nuove possibilità, considerate nuove alternative è necessario che il comitato si esprima nuovamente. La regola di voto dovrà, in altri termini, nuovamente sancire l'alternativa collettivamente preferita. La necessaria ripetizione di procedure di voto innanzi a nuove alternative comporta tuttavia rilevanti costi amministrativi, tanto maggiori quanto più frequenti sono le occasioni in cui il comitato deve esprimersi e tanto più ampio è l'insieme di alternative da confrontare.

Al fine di ridurre i costi sociali di una decisione collettiva, alcuni scienziati sociali hanno proposto di utilizzare indici sintetici che consentano giudizi sul *benessere sociale* del mio comitato in corrispondenza delle diverse alternative. Invece di intraprendere costose e laboriose procedure di voto sarebbe, in altri termini, auspicabile identificare un qualche indice di benessere collettivo tramite il quale confrontare ogni alternativa e tramite cui selezionare l'opzione in grado di massimizzare il valore assunto da tale indice.

In quanto segue analizzeremo sotto quali condizioni sia possibile definire una funzione di soddisfazione sociale (o benessere sociale) ovvero una funzione in grado di dare precise indicazioni sul livello di soddisfazione delle preferenze individuali corrispondente a ogni alternativa sulla quale un comitato è chiamato ad esprimersi. Questo ci condurrà verso risultati di *possibilità* (ovvero casi in cui tale funzione può essere definita e utilizzata) e casi di *impossibilità*.

Nel prossimo paragrafo sarà invece caratterizzata una procedura di decisione collettiva fondata sulla stima diretta di costi e benefici associabili a ogni alternativa. Essa appare particolarmente utile laddove non sia possibile ottenere una funzione di soddisfazione collettiva.

## 8.1 Benessere Sociale: 1) Analisi Costi/Benefici Sociale.

Per utilizzare, nel confronto di due alternative $x, y \in X$, l'analisi C/B dobbiamo possedere una quantificazione del beneficio individuale associato ad ogni alternativa e dei relativi costi di implementazione. Si consideri dunque un comitato composto da $N$ soggetti.

Ogni individuo ottiene, al tempo $t$, da ognuna delle due alternative suindicate, un livello di beneficio pari a $b_i^t(k)$ per $k = x, y$. Il valore dei benefici sociali corrispondenti ad ogni alternativa sarà dunque pari a $B^t = \sum_i^N b_i^t(k)$. Se i costi relativi alle alternative sono pari a $C^t(k)$, possiamo concludere che:

$$x \succsim^S y \Leftrightarrow B^t(x) - C^t(x) \geq B^t(y) - C^t(y) \tag{15}$$

Laddove le due alternative conferiscano ai membri del comitato benefici differiti nel tempo e comportino costi collettivi anch'essi multiperiodali, sarà necessario emendare l'analisi tramite la valutazione del valore attuale di benefici e costi collettivi. A tal fine indichiamo con $i$ il tasso di attualizzazione, detto anche *tasso di sconto sociale*. Il valore attuale dei benefici collettivi sarà ora confrontato con il valore attuale dei costi. In questo caso sarà vero che:

$$x \succsim^S y \Leftrightarrow VAB^t(x) - VAC^t(x) \geq VAB^t(y) - VAC^t(y) \tag{16}$$

dove

$$\begin{aligned} VAB^t &= \sum_{s=0}^{M} \frac{B^{t+s}}{(1+i)^s} \\ VAC^t &= \sum_{r=0}^{R} \frac{C^{t+r}}{(1+i)^r} \end{aligned}$$

in cui $M$ e $R$ indicano l'ultimo periodo in cui si manifestano rispettivamente benefici e costi.

L'Analisi C/B pur rappresentando una procedura di decisione collettiva spesso agevolmente operazionalizzabile racchiude alcune questioni spesso controverse. Tra queste ricordiamo:

**i)** la possibile discrezionalità nella scelta del valore attribuibile al tasso di sconto sociale[24]

**ii)** la potenzialmente complicata quantificazione dei benefici individuali laddove non sia possibile ricorrere a prezzi di mercato o i benefici stessi siano di tipo simbolico o psicologico

**iii)** laddove si confrontino numerose alternative, una procedura di scelta di questo tipo obbligandoci ad una stima dei costi e dei benefici per tutte le alternative comporta ancora una volta rilevanti costi amministrativi.

## 8.2 Benessere Sociale: 2) Funzioni di Soddisfazione Collettiva

Al fine di non dover sostenere né macchinose procedure di votazione, né costose procedure di stima dei benefici, un comitato può utilizzare una *misura di benessere sociale*, definita coerentemente ad alcune priorità etico-politiche accettate dal comitato stesso, tramite la quale associare ad ogni alternativa un livello di soddisfazione collettivo e dunque costruirsi un ordinamento di preferenze sociali, complete e transitive, sulle diverse alternative. L'utilizzo di una misura di benessere sociale, meccanicamente applicabile a tutte le alternative consente di ridurre la minimo i costi amministrativi associati a procedure di aggregazione di preferenze individuali in preferenze collettive.

Ipotizziamo un comitato $C$ , composto da $N$ soggetti, chiamato a scegliere tra diverse alternative $x \in X$. Le preferenze individuali, supposte rappresentabili da una funzione di soddisfazione individuale, sono espresse da un vettore n-dimensionale $(A_1(x), ..., A_N(x))$. Associamo alcune desiderabili proprietà alla relazione di preferenza sociale $\succsim^C$che razionalizza le scelte assunte dal comitato.

**Rappresentabilità (R)** La relazione di preferenza sociale $\succsim^C$ è rappresentabile tramite una funzione di soddisfazione collettiva $A^* : X \to R$

**Criterio Paretiano di Ottimalità (PP)** Se $x$ è non inferiore nel senso di Pareto a $y$ allora sarà vero che $x \succsim^C y$

[24] Arrow e Lind (1970) sostengono ad esempio come $i < r$ con $r$ tasso di interesse di mercato data la neutralità verso il rischio di organi di decisione collettiva. Altri sostengono, invece, come considerare il tasso di interesse di mercato sia una possibilità da non escludere.

**Indifferenza Collettiva (I)** Laddove $A_i(x) = A_i(y)$ per $\forall i \in N$ e $x, y \in X$ allora $x \sim^C y$.

E' dunque possibile ricavare da preferenze individuali transitive e complete, una relazione di preferenza sociale rappresentabile tramite una funzione di soddisfazione collettiva che rispetti il principio di Pareto e non sovverta le preferenze individuali, nemmeno laddove queste spingano verso una condizione di indifferenza sociale ? La seguente proposizione di fornisce un risultato di possibilità.

*Proposizione 8 (Teorema di Samuelson-Bergson):* Date preferenze individuali rappresentabili, $\succsim^C$ soddisfa le proprietà *R, PP e I* se e solo se $A^*$ è definita come

$$A^*(x) = W(A_1(x), ..., A_N(x)) \tag{17}$$

con $W : R^N \to R$ trasformazione crescente dei livelli di soddisfazione individuali.

*Dimostrazione:* Vedi Appendice

In questo caso sarà possibile utilizzare la XXX per costruire un ordinamento completo e transitivo di preferenza sociale. Sarà infatti vero che:

$$x \succsim^C y \Leftrightarrow W(A_1(x), ..., A_N(x)) \geq W(A_1(y), ..., A_N(y))$$

E' evidentemente chiaro come la forma assunta dalla funzione $W$ è cruciale in quanto sintetizza precise opzioni etico-politiche dei membri del comitato introiettate nella forma funzionale utilizzata per ottenere una misura sintetica del benessere sociale. Funzioni di soddisfazione collettiva utilitaristiche $(A^*(x) = \sum_i A_i(x))$ o ralwsiane $(A^* = \min\{A_1, ...A_N\})$ conferendo, rispettivamente, peso identico a ogni soggetto indipendentemente dal livello di soddisfazione raggiunto o esclusiva attenzione ai maggiormente svantaggiati conducono evidentemente a decisioni collettive spesso divergenti[25].

## 8.3 Benessere Sociale: 3) Regole di Scelta Sociale

Fino a questo momento abbiamo ipotizzato che le preferenze individuali siano rappresentabili tramite funzioni di soddisfazione. Cosa accade se abbandoniamo tale ipotesi ? E' ancora possibile da un profilo di preferenze individuali $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$ ricavare una relazione di preferenza sociale che soddisfi alcune desiderabili proprietà ?

Per rispondere alle questioni poste è necessario introdurre la seguente:

[25] Per un approfondimento si vedano Sen (1987), Moulin (1999).

*Definizione 13:* Una *regola di scelta sociale* è una relazione funzionale $F$ tale che

$$\succsim^C = F\left(\succsim_1, ..., \succsim_N\right)$$

Arrow (1968) si interroga su quelle che dovrebbero essere le proprietà associabili a una relazione di preferenza collettiva definita direttamente in riferimento a preferenze individuali transitive e complete tramite una regola di scelta sociale. Esso individua quattro proprietà minimali attorno alle quale, lo stesso sostiene, è difficile non raccogliere consenso.

**Dominio non Ristretto (UD)** La regola di scelta sociale $F$ deve essere in grado di esprimere una preferenza sociale per ogni possibile profilo di preferenze individuali

**Decidibilità (D)** La relazione di preferenza sociale $\succsim^C$è decidibile (i.e. completa e transitiva)

**Principio di Pareto (PP)** Date due alternative qualsiasi $x, y \in X$ se $x \succsim_i y$ per $\forall i$ e $x \succ_i y$ per qualche $i$ allora $x \succsim^C y$

**Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti (IAI)** In riferimento a due alternative qualsiasi $x, y \in X$, $\succsim^C$ non è influenzata dalle rimenti alternative non direttamente confrontate

**Non Dittatorialità (ND)** $\nexists j \in N$ tale che se $x \succsim_j y$ allora $x \succsim^C y$

Il risultato di impossibilità a cui perviene è uno dei teoremi più noti all'interno delle scienze sociali in quanto evidenzia come ogni regola di scelta sociale conduca a un inevitabile conflitto tra le quattro proprietà suindicate. Tale conflitto diviene allarmante se ne viene data la seguente lettura: una regola di scelta sociale in grado di soddisfare il principio di Pareto, una condizione di dominio non ristretto, la discussa idea di IAI e di essere al contempo decidibile sarà necessariamente dittatoriale.

*Proposizione 9 (Teorema di Arrow):* In presenza di almeno tre alternative, non esiste alcuna regola di scelta sociale che soddisfi le proprietà *UD, D, PP, IAI e ND.*

*Dimostrazione:* Vedi Appendice

Numerosi contributi successivi al teorema di Arrow hanno cercato di mostrare sotto quali condizioni sia possibile giungere a risultati di possibilità o hanno costruito insiemi di proprietà differenti da quelle arrowiane e hanno evidenziato nuove impossibilità. Tra gli altri ricordiamo Sen (1970) - che indebolendo la condizione di transitività di $\succsim^C$ e introducendo una *funzione di* *scelta sociale*, ovvero una funzione in grado di associare a preferenze individuali un insieme di elementi scelti piuttosto che una relazione di preferenza sociale, ottiene un risultato di possibilità- e Gibbard (1969) che mostra come il semplice indebolimento della condizione di transitività conduca verso la costituzione di una coalizione di soggetti in grado di esercitare in gruppo scelte dittatoriali.

## 8.4 Benessere Sociale: 4)Manipolazione delle Preferenze

Consideriamo, infine, la possibilità che uno o più soggetti appartenenti al comitato rivelino preferenze distorte rispetto alle alternative al fine indurre la selezione di un esito individualmente preferito a quanto sarebbe scelto da un regola di decisione sociale. La manipolazione delle preferenze rivelate in sede di decisione collettiva chiama dunque in causa la possibilità di comportamenti strategici dei membri del comitato, i quali possono razionalmente avvedersi di come una dichiarazione non-veritiera delle proprie preferenze possa assicurare, poste le preferenze altrui sulle alternative, il conseguimento di un esito finale in grado di conferire agli stessi un maggior livello di benessere.

Un utile esempio di manipolazione delle preferenze rivelate in sede di decisione collettiva può essere costruito in riferimento all'utilizzo per assumere decisioni collettive di regole di voto. Immaginate che tre soggetti abbiamo i seguenti ordinamenti di preferenza rispetto alle tre alternative di seguito riportate: $A$ ammettere nel comitato Anna, $B$ ammettere nel comitato Bernardo e $N$, ovvero non ammettere alcun ulteriore individuo nel comitato.

$$\begin{aligned} A &\succsim_1 N \succsim_1 B \\ N &\succsim_2 A \succsim_2 B \\ B &\succsim_3 A \succsim_3 N \end{aligned}$$

Se la regola di decisione collettiva è la pluralità applicata sequenzialmente prima in riferimento alle alternative $A$ e $B$ e quindi tra la vincente e l'alternativa $N$ è immediato verificare come l'alternativa scelta dal comitato se ogni soggetto votasse sinceramente l'alternativa maggiormente preferita (dunque rivelasse correttamente il proprio ordinamento preferenziale) sarebbe $A$. Se tuttavia il soggetto 2 manipolasse le proprie preferenze dichiarando di preferire $B$ ad $A$ la regola di decisione collettiva selezionerebbe l'alternativa $N$, ovvero quanto massimizza il suo livello di soddisfazione delle preferenze effettive. In questo senso la manipolazione strategica delle preferenze rivelate consente al soggetto di distorcere a proprio favore la procedura di decisione collettiva.

Possiamo dunque definire formalmente quando una regola di scelta sociale risulti non essere manipolabile. Consideriamo un comitato composto da $N$

soggetti. Le preferenze individuali rispetto a un dato insieme di alternative sono pari a $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$. Ogni individuo potrà rivelare una preferenza distorta $\succsim_i^{'} \neq \succsim_i$.

*Definizione 14:* Una regola di scelta sociale è *non manipolabile* se è vero che

$$F(\succsim_1, ..., \succsim_N) \succsim_i F\left(\succsim_1, ..., \succsim_{i-1}, \succsim_i^{'}, \succsim_{i+1}, ..., \succsim_N\right) \text{ per } \forall i \in N$$

Regole di scelta sociale sono, in altri termini, non manipolabili laddove la scelta collettiva corrispondente alla rivelazione veritiera delle preferenze sia non meno preferita, da ogni soggetto facente parte del comitato, di ogni altra scelta collettiva conseguibile tramite la rivelazione distorta delle preferenze individuali. Se così non fosse ogni individuo avrebbe incentivo a dichiarare il falso, ovvero a manipolare a proprio favore le decisioni assunte dal comitato. Sembrerebbe dunque desiderabile richiedere che una regola di scelta sociale, oltre a soddisfare le condizioni espresse nel precedente paragrafo, sia non manipolabile stategicamente. Questo tuttavia ci conduce alla seguente:

*Proposizione 10 (Teorema di Gibbard-Satterthwaite):* In presenza di altemo tre alternative, ogni regola di scelta sociale $F$ che soddisfi *UN, PP,D e IAI* sarà dittatoriale o manipolabile.

*Dimostrazione:* Vedi Appendice

Gibbard (1973) e Satterthwaite (1975) mostrano dunque come esista un'ineliminabile conflitto, nell'assunzione di decisioni collettive tramite regole di scelta sociale che soddisfino le proprietà arrowiane, tra democraticità e non manipolabilità. Una regola non dittatoriale sarà sempre manipolabile da uno o più soggetti facenti parte del comitato, per contro una regola non manipolabile non potrà che essere dittatoriale.

# 9 Analisi della Competizione

Il mercato è quel luogo ideal-tipico all'interno del quale si sostanziano la maggior parte della relazioni interpersonali di scambio di beni e servizi. Esso è al contempo luogo di incontro di consumatori e imprese, luogo di opportunità per chi offre o domanda beni e servizi e luogo di comunicazione di prezzi e quantità[26]. Le ipotesi descrittive tramite le quali si caratterizzano le transazioni all'interno di mercati perfettamente concorrenziali, ovvero scambi volontari tra soggetti

[26] In merito Campiglio (2002).

price taker sia sul lato dell'offerta che sul lato della domanda, celano una precisa descrizione del comportamento individuale: i soggetti economici all'interno del mercato assumono decisioni in isolamento e in condizioni di certezza, massimizzando le rispettive funzioni obiettivo (utilità o profitti) nel rispetto di determinati vincoli (economici, tecnologici, di tempo ecc...). Molteplici comportamenti competitivi spingono il mercato verso l'equilibrio.

Nel prossimi paragrafi verrà rimossa, in riferimento ai soggetti che producono beni e servizi, l'ipotesi di comportamento perfettamente competitivo, ipotizzando, in modo maggiormente realistico, che le diverse imprese operanti all'interno di un mercato, opportunamente definito, riconoscano una dimensione di interdipendenza strategica nell'assunzione di decisioni individuali. Questo ci consentirà, al tempo stesso, di analizzare le modalità della competizione all'interno di contesti strategici e di giudicare gli effetti sul benessere sociale di differenti strutture di mercato non perfettamente concorrenziali.

A tal fine sarà necessario:

- caratterizzare una *configurazione di equilibrio efficiente*, ovvero un esito del gioco di mercato in grado di massimizzare il benessere sociale definito, tradizionalmente, come somma del surplus dei consumatori e dei profitti della imprese. Tale configurazione sarà utilizzata come riferimento nel valutare in termini di desiderabilità sociale gli equilibri di mercati imperfettamente competitivi
- stabilire criteri tramite i quali riconoscere, descrivere e delimitare il mercato rilevante
- descrivere, tramite l'ausilio di alcuni concetti di teoria dei giochi, la competizione all'interno di mercati non perfettamente concorrenziali e determinare i relativi equilibri di mercati ad alta interazione strategica tra i produttori

Per finalità espositive, si considererà un caso semplificato: la domanda di mercato è determinata dal comportamento ottimizzante di una molteplicità di consumatori *price taker*; sul lato dell'offerta, diverse imprese in reciproca interazione strategica competono utilizzando la medesima tecnologia di produzione a costi marginali constanti *(ipotesi di simmetria)* e producendo prodotti oggettivamente omogenei.

## 9.1 Configurazioni di Equilibrio Efficienti e Benessere Sociale

L'analisi di mercato porta inevitabilmente con sè sia valutazioni di carattere positivo (in che modo competono le imprese, qual'è l'esito di questa competizione sull'equilibrio ecc...), sia considerazioni di tipo normativo (quale è la struttura di mercato maggiormente desiderabile, quanto la forma attuale di un mercato si scosta da quella che massimizza il benessere sociale ecc...). Si consideri un mercato caratterizzato da un domanda lineare pari a $p = a - bQ$ e in cui operano $N$ imprese simmetriche ognuna distinta da una tecnologia rappresentata dalla seguente funzione di costo totale $CT_j = cq_j$ con $j = 1, ..., N$. Un equilibrio di mercato sarà efficiente laddove siano verificate condizioni di efficienza allocativa, di efficienze tecnologica e non operino all'interno dello stesso nè troppe, nè troppo poche imprese. Più precisamente:

*Definizione 12:* Una configurazione di equilibrio $\left(q_j^*, p^*, N^*\right)$ è *efficiente* se:

**i)** $q_j^* = \arg\min_{q_j} CM_j\left(q_J\right)$ per $\forall j \in N$ (*scala efficiente di produzione)*

**ii)** $Q^* = \sum_j q_j^*$ è tale che $a - bQ^* = p^* = C_j^{'} = CM_j^{\min}$ per $\forall j \in N$ (*marginal cost pricing*).

**iii)** $N^* = \frac{Q^*}{q_j^*}$ (*entrata ottimale*)

In corrispondenza di una configurazione di equilibrio efficiente la scala ottimale di produzione è stabilita dalla tecnologia utilizzata dalle imprese. La minimizzazione dei costi medi di produzione assicura l'utilizzo efficiente degli impianti, stabilisce l'offerta individuale di ogni produttore. Il prezzo di vendita del bene è pari a costo medio minimo e dunque al costo marginale di produzione; questo, come noto, assicura l'efficienza allocativa. La domanda di mercato fissa il numero delle imprese necessarie per soddisfare, data le condizioni (i)-(ii), le richieste del bene o servizio da parte dei consumatori. La figura seguente rappresenta graficamente una configurazione di equilibrio efficiente.

[Inserire Figura 14]

In presenza di costi totali lineari, e in assenza di rilevanti costi fissi, sarà vero che il costo marginale è pari al costo medio e al costo medio minimo; esso sarà altresì pari all'offerta di beni di lungo periodo, totalmente elastica dato il prezzo $p^*$, in un mercato perfettamente concorrenziale. E' dunque immediato verificare come un equilibrio di concorrenza perfetta $\left(\frac{a-c}{N^* b}; c; N^*\right)$, rappresentato in figura XXX, sarà, nel lungo periodo, una configurazione di equilibrio efficiente.

[Inserire Figura 15]

Ora, piuttosto semplicemente, possiamo mostrare, con l'ausilio della figura 16, la seguente:

*Proposizione 7:* Una configurazione di equilibrio efficiente $\left(\frac{a-c}{N^*b}; c; N^*\right)$ massimizza il benessere sociale

*Dimostrazione:* In corrispondenza di una configurazione di equilibrio efficiente la quantità prodotta sul mercato sarà pari a $Q^* = \frac{a-c}{b}$ e $p^* = c$. In questo caso sarà vero che $\Pi_j = 0$ per $\forall j \in N$ . Il surplus dei consumatori $S = \frac{(a-c)^2}{2b}$ coincide con il benessere sociale. Immaginiamo che sul mercato si scambi una quantità $Q_1 > Q^*$. Al fine di vendere le unità addizionali di prodotto, il prezzo di mercato dovrà scendere a $p_1 = a - bQ_1 < a - bQ^* = p^*$. In questo caso sarà vero che $\Delta S = \frac{(c-p_1)(Q^*+Q_1)}{2} > 0$ mentre $\Delta\Pi = (c - p_1) Q_1 < 0$. Ovvero che $\Delta W = \Delta S + \Delta\Pi < 0$ poichè $Q^* < Q_1$. Inversamente, supponendo che il livello di beni scambiato sul mercato sia pari a $Q_2 < Q^*$, sarà vero che $p_2 > p^*$ ovvero che $\Delta S = \frac{(p_2-c)(Q^*+Q_2)}{2} < 0$ e $\Delta\Pi = (p_2 - c) Q_2 > 0$. In questo caso è facile mostrare come $\Delta W < 0$.

Le due aree annerite rappresentano perdite di benessere sociale in corrispondenza di qualsiasi configurazione di equilibrio differente da quella efficiente. Esse sono imputabili, rispettivamente, all'esercizio di potere di mercato da parte delle imprese o a un eccesso di entrata nel mercato[27].

[Inserisci Figura 16]

## 9.2 Mercato Rilevante: Definizione e Descrizione

Al fine di comprendere gli effetti sul benessere sociale di forme di competizione strategica tra imprese è necessario definire cosa si intenda per *mercato rilevante,* delimitandone con maggior precisione possibile l'estensione e provvedendo una sintetica descrizione delle sue caratteristiche principali.

Come osserva Geroski (1997) all'interno dell'analisi economica convivono almeno tre definizione distinte di mercato. In prima istanza, si tende a riconoscere un mercato rilevante tramite l'utilizzo della **legge del prezzo unico**. Un *mercato di scambio* è quell'area all'interno della quale beni omogenei sono venduti da diversi produttori al medesimo prezzo. Operazioni di arbitraggio assicurano la convergenza verso un solo prezzo per il bene scambiato. Se così non fosse e

[27] In quanto segue verranno velocemente analizzato il caso in cui le imprese possiedano un qualche potere di mercato, ovvero non siano piccoli produttori che operano in modo atomistico ma soggetti di dimensioni medio-grandi in grado di riconoscere la loro capacità di influenzare l'esito di mercato attreverso i loro comportamenti descritti in senso strategico. Per una disamina del cosidetto eccesso di entrata si rinvia a Mankiw e Whinston (1986) e Suzumura e Kiyono (1987).

certe imprese vendessero il bene a un prezzo maggiore (minore) di quello fissato da altre all'interno dello stesso mercato, sarebbe possibile per alcuni soggetti produttori acquistare il bene a un prezzo maggiorato (ridotto), rivendendolo a un prezzo lievemente più basso (elevato) ottenendo profitti positivi. L'estensione merceologica di un mercato di scambio, ovvero la sensibilità della domanda per il bene in questione a variazione dei prezzi di altri beni almeno in parte ad esso sostituibili, è, tradizionalmente, determinata tramite l'elasticità incrociata di prezzo. Un livello particolarmente ridotto di questa indica netta separazione tra due mercati di scambio, un valore elevato, per contro, segnala possibili connesioni tra i due mercati.

Un mercato di scambio può tuttavia non coincidere con l'area territoriale effettivamente monopolizzabile da una o più imprese. A tal scopo, prevalementemente al fine di monitorare l'effettiva competitività di un mercato, è possibile utilizzare la nozione di *mercato antitrust*, ovvero la più piccola area geografica all'interno della quale alcune imprese possono attuare pratiche monopolistiche (i.e. aumenti non transitori del prezzo e riduzioni della quantità venduta) senza che qualche impresa rivale reagisca espandendo la quantità riversata sul mercato ((Scheffman e Spiller (1987)). Alcuni soggetti produttori, in particolare coloro che fronteggiano rilevanti vincoli di capacità produttiva, non potendo aumentare la propria produzione perlomeno nel breve periodo, non rientreranno dunque all'interno di un mercato antitrust pur essendo parte del relativo mercato di scambio. Sul lato dell'offerta conviveranno quindi diverse imprese in grado di reagire a istante monopolizzatrici o di agire collettivamente esercitando potere di mercato.

Laddove un mercato antitrust sia opportunamente segmentato, ovvero siano ridotte le possibilità di arbitraggio, e siano in esso diffuse forme di discriminazione di prezzo beni omogei potranno essere venduti a prezzi diversi.

Infine è possibile definire un mercato rilevante utilizzando un criterio multidimensionale (Markides (1997)). Ogni mercato è infatti caratterizzabile tramite:

- l'identificazione di persone e luoghi coinvolti nello scambio
- il riconoscimento di alcuni *bisogni* dei consumatori e di un insieme di beni aventi le *funzioni* adeguate per soddisfarli
- la specificazione delle condizioni di offerta dei beni stessi in termini di economie/diseconomie di scala, condizioni tecnologiche di produzione o sistemi di distribuzione

Specificando dunque estensione, collocazione e composizione del mercato, identificando alcuni bisogni che motivano l'acquisto e le tecnologie alternative in grado di generare beni, anche non omogenei, atti a rispondere a quei bisogni è possibile definire un mercato *strategico* come la più piccola area geografica all'interno della quale un'impresa può essere un competitore profittevole (Kay (1990)), traendo vantaggio da effettive opportunità di vendita. E' bene notare come un mercato strategico includa frequentemente imprese con caratteristiche tecnologiche differenti, produttrici di beni spesso differenziati, ma in grado di soddisfare specifiche richieste dei consumatori. Tipicamente dunque un mercato strategico comprede al suo interno sia mercati di scambio che mercati antitrust.

Al fine quindi di caratterizzare con precisione un mercato strategico sarà necessario raccogliere informazioni su:

**1.** Caratteristiche generali del mercato (i.e. livello di profittabilità attesa, sensibilità ambientale del mercato, potere contrattuale di fornitori e clienti) e fattori isituzionali di rilievo (i.e. barriere istituzionali all'entrata o all'uscita, regolamentazione vigente)

**2.** Struttura dimensione e segmentazione della domanda di mercato; ciclicità della stessa e del prodotto

**3.** Tecnologie disponibili, fattori critici di successo e intensità competitiva

Proprio l'intensità competitiva ci darà conto delle modalità secondo le quali si realizza la concorrenza di mercato. Laddove un mercato rilevante non si configuri come perfettamente competitivo sarà, invero, necessario possedere appropriati schemi concettuali in grado di spiegare come avvenga la competizione tra le parti e quali effetti questa sortisca sul benessere sociale.

## 9.3 Competizione Oligopolistica: Prezzi vs Quantità

In numerosi mercati reali le imprese non adottano un comportamento competitivo, assumendo come date le azioni delle rivali e dunque considerando conseguentemente determinato il prezzo di mercato, ma si avvedono della possibilità di influenzare con le proprie scelte produttive il prezzo di vendita del bene ed i comportamenti delle imprese concorrenti. In questi casi i mercati si dicono *oligopolistici* e i comportamenti delle imprese assumono i connotati di comportamenti di tipo strategico[28]. Possiamo dunque analizzare la competizione oligopolistica tramite l'utilizzo dei concetti esposti nella sezione 2, una volta specificato come si possa caratterizzare la concorrenza di mercato come un gioco strategico e una volta esplicitate le variabili strategiche sulle quali si gioca la competizione tra le parti.

Nel fare ciò consideriamo un mercato in cui operano $N$ imprese, caratterizzato dalla seguente funzione di domanda $p = a - bQ$ con $Q = \sum_j q_j$ e da

[28] Per approfondimenti sulla teoria dell'oligopolio si veda Vives (1998).

una tecnologia di produzione, simmetrica e a costi marginali costanti ($c$). Il prodotto è omogeneo, ovvero i beni prodotti dalle imprese non presentano rilevanti diversità merceologiche o funzionali. In questo caso, come il lettore potrà agevolmente mostrare, la configurazione di equilibrio efficiente sarà data da $P^* = c$ e $Q^* = \frac{a-c}{b}$.

### 9.3.1 Competere sulle Quantità: quasi-competitività e collusione

Laddove le imprese competano sulla quantità prodotta possiamo caratterizzare la concorrenza di mercato come un gioco strategico a $N$ giocatori, ognuno con un insieme di possibili azioni/strategie dato da $\forall q_j \in [0; \infty)$ e con una funzione di soddisfazione semplicemente pari al profitto conseguito $\pi_j = p(Q) q_j - cq_j$ per $\forall j \in N$. Ogni impresa selezionerà quel livello di produzione che massimizza il suo profitto, sulla base del livello di output prodotto dalle imprese concorrenti. In questo caso:

*Definizione 13:* Un equilibrio alla *Nash-Cournot* è un profilo di quantità $\left(q_1^{NC}, ..., q_N^{NC}\right)$ tale che per $\forall j \in N$

$$\pi_j \left(q_j^{NC}; q_{-j}^{NC}\right) \geq \pi_j \left(q_j; q_{-j}^{NC}\right) \text{ per } \forall q_j \neq q_j^{NC}$$

e $P^{NC} = a - b\left(\sum_j q_j^{NC}\right)$.

Ogni impresa, in altri termini, non ha incentivo a produrre una quantità differente da quella di equilibrio. Il prezzo di mercato è determinato dalla domanda di mercato. Ogni produttore selezionerà dunque le proprie risposte ottimali alle quantità prodotte dai rivali; in equilibrio si avrà corrispondenza tra risposte ottimali. Possiamo dunque mostrare la seguente:

*Proposizione 8:* Ogni equilibrio di Nash-Cournot sarà, in presenza di un numero finito di imprese concorrenti, una configurazione di equilibrio inefficiente.

*Dimostrazione:* Per ciascuna delle $N$ imprese il livello di quantità che massimizza i profitti si determina ponendo per $\forall j \in N$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} = a - 2bq_j - b\left(\sum_{i \neq j} q_i\right) - c = 0 \tag{18}$$

Poichè tutte le imprese sono identiche possiamo immaginare che in equilibrio esse producano la stessa quantità, ovvero che $q_1^{NC} = ... = q_N^{NC} = q^{NC}$. In questo modo otteniamo dalla (18) che, osservando come $\sum_{i \neq j} q_i = (N-1)q^{NC}$, $q^{NC} = \frac{a-c}{(N+1)}$[29] da cui

$$
\begin{aligned}
Q^{NC} &= Nq^{NC} = \left(\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{N}{N+1}\right) \qquad (19)\\
P^{NC} &= a - bQ^{NC} = \frac{a+Nc}{N+1}
\end{aligned}
$$

Sarà dunque vero che per $\forall N$ $P^{NC} > P^*$ e $Q^{NC} < Q^*$. Come illustrato dalla figura seguente, in ogni equilibrio alla Nash-Cournot il mercato non soddisferà il principio di *marginal cost pricing* inducendo una perdita di benessere sociale imputabile a inefficienze allocative[30].

[Inserire Figura 17]

Solo laddove il numero delle imprese sia enormemente elevato rispetto alle dimensioni del mercato, un equilibrio di Nash-Cournot potrà ritenersi socialmente efficiente. Per ovviare alle inefficienze allocative proprie di un mercato oligopolistico con competizione sulle quantità sarà dunque necessario allargare il numero di imprese concorrenti tramite opportuni flussi di entrata nel mercato.

*Corollario 1(Quasi-Competitività):* Ogni equilibrio di Nash-Cournot è una configurazione di equilibrio efficiente solo se $N \to \infty$

*Dimostrazione:* Molto semplicemente, i limiti per $N \to \infty$ delle espressioni contenute nella (19) sono rispettivamente pari a $P^* = c$, $Q^* = \frac{a-c}{b}$.

Per contro, la restrizione del numero di competitori, tramite la creazione di gruppi strategici, funzioni o acquisizioni o cartelli, indurrà un maggior grado di monopolizzazione del mercato, con una maggior perdita di benessere sociale. In termini più precisi:

*Corollario 2(Collusività):* La perdita di benessere associata a un equilibrio di Nash-Cournot è massima laddove $N = 1$

[29] La condizione $a > c$ ci assicura l'esistenza dell'equilibrio. La linearità della domanda e dei costi ci garantisce l'unicità. Per approfondimenti si veda Tirole (1988).

[30] L'utilizzo della condizione di simmetria ci ha permesso di non dover risolvere un sistema a $N$ equazioni e $N$ incognite. Se le imprese sono identiche rispetto a tecnologia utilizzata, organizzazione e bene prodotto, come nel nostro caso, possiamo ragionevolmente attenderci che queste si comporteranno nello stesso modo selezionando il medesimo livello di quantità di equilibrio.

*Dimostrazione:* Derivando le espressioni (19) per $N$ otteniamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q^{NC}}{\partial N} &= \left(\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{1}{(N+1)^2}\right) > 0 \\ \frac{\partial P^{NC}}{\partial N} &= -\frac{a-c}{(N+1)^2}\end{aligned}$$

Al diminuire del numero delle imprese, la quantità di riduce e il prezzo aumenta. Al crescere della collusione tra le imprese, l'inasprirsi di restrizioni nella quantità e aumenti di prezzo, attestano la maggior monopolizzazione del mercato aumentando la perdita di benessere sociale, ovvero accentuando inefficienze allocative. Prendendo il limite per $N \to 1$ delle espressioni (19) otteniamo esattamente quantità e prezzo di monopolio.

### 9.3.2 Competere nei Prezzi: Underpricing e Convergenza

Se le $N$ imprese competono strategicamente sui prezzi, il gioco competitivo rimarrà pressochè inalterato: gli insiemi di azioni/strategie saranno ora coincidenti con $\forall p_j \in [0;\infty)$ per ogni impresa e la funzione di profitto sarà pari a $\pi_j = (p_j - c)\, q_j$ . Laddove le imprese possiedano sufficiente capacità tecnologica per coprire l'intera domanda di mercato, data la simmetria tra i giocatori possiamo attenderci che in equilibrio ogni impresa fissi quel livello di prezzo che è risposta ottimale ai prezzi delle imprese rivali e che questo livello di prezzo sia esattamente lo stesso per ogni impresa.

*Definizione 14:* Un equilibrio alla Nash-Bertrand è un profilo di prezzi $\left(p_1^{NB}, ..., p_N^{NB}\right)$ tale che per $\forall j \in N$

$$\pi_j\left(p_j^{NC}; p_{-j}^{NC}\right) \geq \pi_j\left(p_j; p_{-j}^{NC}\right) \text{ per } \forall p_j \neq p_j^{NC}$$

con $Q^{NB} = \frac{a - \min\left\{p_1^{NB}, ..., p_N^{NB}\right\}}{b}$.

Solo le imprese che fissano il minor prezzo potranno spartirsi la domanda di mercato, tutti i produttori che fisseranno un prezzo più elevato semplicemente verranno esclusi dal mercato. L'ipotesi di sufficente capacità tecnologica, e dunque la possibilità da parte di un'impresa di ridurre il prezzo di vendita rispetto ai prezzi delle concorrenti e conquistare tutta la domanda (*underpricing)*, spinge i giocatori a selezionare tutti lo stesso livello di prezzo e dunque a spartirsi in modo equanime il mercato.

*Proposizione 9:* Ogni equilibrio alla Nash-Bertrand è sempre (i.e.per qualsiasi valore di $N$) una configurazione di equilibrio efficiente .

*Dimostrazione:* Procediamo escludendo la possibilità che in equilibrio i prezzi fissati dalle imprese siano tra loro diversi. Dato un profilo di prezzi di equilibrio si costruisca una sequenza ordinata di prezzi tale $p_1^{NB} > ... > p_N^{NB}$ se $p_N^{NB} > c$ l'impresa N-esima conquista tutta la domanda di mercato e le altre ottengono profitti nulli. Per ogni $j \neq N$ sarà dunque conveniente fissare un prezzo pari a $p_N^{NB}$ e ottenere un profitto di $\pi_j^{NB} = \left(p_N^{NB} - c\right)\left(\frac{a-p_N^{NB}}{bN}\right) > 0$. In equilibrio tutte le imprese fisseranno dunque un prezzo identico[31]. Potrebbe $p_1^{NB} = ... = p_N^{NB} = p^{NB} > c$ essere un equilibrio alla Nash-Bertrand ?

La risposta è negativa. Se infatti un'impresa fissasse un prezzo $p_j = p^{NB} - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ pari al più piccolo taglio nei prezzi consentito dalla moneta corrente, questa otterebbe l'intera domanda con un profitto pari a $\pi_j = (p_j - c)\left(\frac{a-p_j}{b}\right) > \pi_j^{NB}$. Solo laddove $p_1^{NB} = ... = p_N^{NB} = p^{NB} = c$ nessun giocatore avrà incentivo a fissare un prezzo minore poichè questo significherebbe produrre in predita. In corrispondenza di un equilibrio di Nash-Bertrand sarà dunque vero che $P^{NB} = P^* = c$ e che $Q^{NB} = Q^* = \frac{a-c}{b}$ per $\forall N$

La competizione nei prezzi conduce dunque verso una configurazione di equilibrio efficiente, garantendo efficienza allocativa, tecnologica e massimizzando il benessere sociale. In questo senso, ogni mercato in cui le imprese non riescano ad attenuare la competizione nei prezzi, tramite differenziazione del prodotto, pubblicità o altro, *convergerà* nel medio periodo verso un equilibrio perfettamente concorrenziale anche laddove le imprese sia numericamente ridotte.

# 10 Riferimenti Bibliografici


[**1** ] **Anscombe F.J., Aumann R.J.** (1963) "A Definition of Subjective Probability", *Annals of Mathematical Statistics*, 34

[**2** ] **Arrow K.** (1968) "*Social Choice and Individual Values*" (second edition), Wiley, New York; tr.it. "*Scelte Sociali e Valori Individuali*", Etas, Milano, 1977

[**3** ] **Balducci R., Candela G., Scorcu A.** (2000) "*Manuale di Politica Economica*", Carrocci, Milano

[**4** ] **Buchanan J.** (1997) "La Scelta Individuale nei Ruoli Decisionali" in Petroni e Viale (a cura di) "*Individuale e Collettivo*", Raffaello Cortina Editore, Milano

[**5** ] **Campiglio L.** (2002) "*Tredici Idee per Ragionare di Economia*", Il Mulino, Bologna


[31] Lo stesso ragionamento può essere replicato nel caso in cui i prezzi siano identici per diversi sottoinsiemi di imprese.

[**6** ] **Geroski P.** (1997) "Thinking Creatively about Markets", CEPR, Discussion Paper, n.1694

[**7** ] **Gibbard A.** (1973) "Manipulation of Voting Schemes: A General Result", *Econometrica*, 41

[**8** ] **Gibbard A.** (1969) XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

[**9** ] **Harsanyi J.C**. (1997) "Decisione e Razionalità" in Petroni e Viale op.cit.

[**10** ] **Harsanyi J.C.** (1977) "*Rational Behaviour and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situation*", Cambridge University Press, Cambridge; tr.it. "*Comportamento Razionale ed Equilibrio di Contrattazione*", Il Saggiatore, Milano, 1985

[**11** ] **Kay J.** (1990) "Identifying the Strategic Market", *Businness Strategy Review*, Spring

[**12** ] **Kelly J.S.** (1986) "*Social Choice Theory*", Springer-Verlag, Berlin

[**13** ] **Kreps D.M.** (1990) "*A Course in Microeconomics*", Harvester-Weatsheaf, New Jersey; tr.it "*Corso di Microeconomia*", Prentice Hall International/Il Mulino, 1993

[**14** ] **Kreps D.M.** (1990b) "*Game Theory and Economic Modelling*", Oxford University Press, Oxford; tr.it. "*Teoria dei Giochi e Modelli Economici*", Il Mulino, 1990

[**15** ] **Lambert P.J.** (1985) "*Advanced Mathematics for Economists*", Blackwell, London

[**16** ] **Mankiw N.G., Whinston M.D.** (1986) "Free Entry and Social Inefficiency", *Rand Journal of Economics*, 17

[**17** ] **Markides C.** (1997) "Strategic Innovation", *Sloan Management Review*, 38

[**18** ] **Mas Colell A., Whinston M.D., Green J.R.** (1995) "*Microeconomic Theory*", Oxford University Press, Oxford

[**19** ] **Moulin H.** (1999) "*Social Choice and Axiomatic Bargaining*", Springer-Verlag, Berlin

[**20** ] **Nash J.F.** (1951) "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics*, 54

[**21** ] **Osborne M.J., Rubinstein A.** (1994) "*A Course in Game Theory*", Mit Press, Cambridge, US

[**22** ] **Satterthwaite M.A.** (1975) "Strategy-Proofness and Arrow Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions", *Journal of Economic Theory*, 10

[**23** ] **Savage L.J.** (1954) "*Foundation of Statistics*", Wiley, New York

[**24** ] **Scheffman D., Spiller P.** (1987) "Geografic Market Definition under the US Department of Justice Merger Guidelines", *Journal of Law and Economics*, 30

[**25** ] **Schelling T.C.** (1960) "*The Strategy of Conflict*", Harvard University Press, Cambridge, US

[**26** ] **Sen A.K.** (1970) "*Collective Choice and Social Welfare*", Holden-Day, San Francisco; tr. it. in "*Scelta, Benessere ed Equità*", Il Mulino, 1986

[**27** ] **Sen A.K.** (1986) "Social Choice Theory" in Arrow e Intriligator (a cura di) "*Handbook of Mathematical Economics*", North Holland, Amsterdam

[**28** ] **Sen A.K.** (1997) "Maximisation and the Act of Choice", *Econometrica*, 23

[**29** ] **Suzumura K., Kiyono K.** (1987) "Entry Barriers and Economic Welfare", *Review of Economic Studies*, 54

[**30** ] **Tirole J.** (1988) "*A Theory of Industrial Organisation*", Mit Press, Cambridge US; tr. it. "*Teoria dell'Organizzazione Industriale*", Hoepli, 1989

[**31** ] **Vives X.** (1998) "*Oligopoly Pricing*", Mit Press, Cambridge, US

[**32** ] **Von Neumann J., Morgenstern O.** (1947) (second edition) "*Theory of Games and Economic Behaviour*", Wiley, New York