Concetti base dell'analisi numerica

Numeri finiti

Un numero finito è un'approssimazione di un numero reale memorizzabile in un certo spazio di memoria (sottoinsieme dei numeri reali). Con i calcolatori si lavora con approssimazione.

Forme di rappresentazione: forma mista (cifre esplicitate); forma scientifica (le cifre solo dopo la zero – punto radice).

Tecniche di Approssimazione



Arrotondamento $fl_a(\alpha) = fl_t\left(\sum_{i=1}^{t+1} \alpha_i \beta^{-i} + \frac{\beta}{2} \beta^{-t-1}\right) \bullet \beta^p$

Se α è a sinistra del punto medio, allora sarà uguale al troncato, se è a destra o è esattamente il punto medio, sarà il numero immediatamente successivo

Insieme di numeri finiti

Insterne of numer initi $P(\beta, I, \lambda, \omega)$ dove $\lambda \leq p \leq \omega[t$ cifre significative, in base β]
I numeri finiti non sono equidistanti lungo l'asse reale, sono più densi vicino a 0. Sono equidistanti solo tra due potenze della stessa base.

- Firror di underflow (p< \hat{k}): numero reale troppo piccolo rispetto a quello che possiamo rappresentare (si può rimediare con p=0).

 Firror di overflow (p> \hat{k}): numero troppo grande.

 H-lesima cifra diversa da 0

- Si deve determinare un numero finito che sia una buona rappresentazione Memorizzazione di numeri finiti

 "" " " C. Semo: 1 → P. Feronente: R+1 → L-1: mantissa

Array til E bit - 0. Segno, 1 7K. Esponente, K+1 7E-1. mantissa											
0	1				R	R+1					L-1
La mantissa vuole gli ultimi bit: se non ho abbastanza cifre metto degli zeri default											
Il segno positivo si indica con 0.											

Standard IEEE

Glanuatu IEEE $a_0.a_1a_2a_3...a_{c-1}$ (il punto radice è dopo la prima cifra!). Siccome siamo in binario, a_0 è per forza =1, quindi non viene memorizzato.

- Formati
 Basic
 Basic
 Exten

Formati

Basic single 32 bit (1 segno, 8 esponente, 23 mantissa)

Basic double 64 bit (1 segno, 11 esponente, 52 mantissa)

Extended single N/A (1 segno, almeno 11 esponente, almeno 32 mantissa)

Extended double N/A (1 segno, almeno 15 esponente, almeno 63 mantissa)

Numeri speciali: NaN (Not a Number, che non riesco a rappresentare); Inf (infitito, in caso di overflow)

$$fl_a(\alpha) = \begin{cases} x & \alpha < \frac{x+y}{2} \\ pari(x, y) & \alpha = \frac{x+y}{2} \\ y & \alpha > \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Errori

$$\left| \frac{\alpha - fl(\alpha)}{\alpha} \right| \leq \frac{1}{2} \beta^{p-1}$$

$|\alpha - fl(\alpha)| < \beta^{p-t}$ Unità di arrotondamento

$$u = \begin{cases} \beta^{1-t} & per & troncamento \\ \frac{1}{2}\beta^{1-t} & per & arrotondamento \end{cases} < err.relativo$$

Limite superiore (errore maggiore) che posso commettere nell'approssimazione di un numero reale con un numero finito in un contesto relativo

Il più piccolo numero finito positivo tale che $fl(\mu+1)>1$; con l'arrotondamento pari $fl(\mu+1)=1$.

Cambiamenti di base

Numero di cifre necessarie: t*log₈0

Aritmetica finita

Le operazioni non sono chiuse: il risultato di un'operazione va approssimato ogni

Le operazioni non sono chiuse: il risultato di un'operazione va approssimato ogni volta, col rischio di commettere grandi errori. $a \oplus b = f \|(a+b)\| = (a+b)(1\pm b) \qquad |e| < \mu$ μ non è quindi solo la precisione di macchina ma anche la precisione dei risultati delle operazioni. La proprietà associativa non vale! Per fare le somme parziali si fa la somma come se fossero numeri reali, poi calcola il float sul risultato.

Analisi degli errori

Analisi in avanti: si confronta il risultato fl(x + y) con il risultato vero

Anatism in avanit. Si cominctia in Tisantao f(k+1) form in Isaniao veico dell' operazione (errore relativo $<\mu$). Analisi all'indictro: si interpreta il risultato come l'addizione tra due dati che non sono originali ma sono perturbati; f(k+1) = (k+1) + (k+1) + (k+1) + (k+1) + (k+1) + (k+1). Gli errori ℓ vanno valutati e la perturbazione accettabile è al massimo μ (k|< μ).

errori e vanno valutat e la perturoazione accettante e at massimo pi ces sp. Cancellazione numerica (addizione)

Si ha quando due numeri hanno valori assoluti quasi uguali ma sono opposti di segno. L'errore è molto più grande di pi. Quando arrotondo perdo delle cifre che l'addizione fa risaltare molto.

Moltiplicazione e divisione non sono pericolose per l'approssimazione, addizioni e sottrazioni solo in casi di cancellazione numerica (che a volte si può evitare).

[x = corrispondente float di x] Il risultato ideale è f(x), che è l'obiettivo di un algoritmo stabile

argoritmio statone.

Errore algoritmico: differenza tra il risultato in aritmetica finita e quello ideale
Errore inerente: problema della sensibilità del problema, problema mal
condizionato, perturbazioni sui dati.

L'errore algoritmico si può tentare di correggere cercando un algoritmo più stabile; l'errore inerente è inevitabile.

Condizionamento del problema: come è sensibile alla perturbazione dei dati Stabilità dell'algoritmo: come cambia visto che siamo in aritmetica finita

Staolina dell' algoritmo: come cambia visto che stamo in arimetica initia
$$ETot = \frac{|\psi(\widehat{x}) - f(x)|}{f(x)} \qquad EIn = \frac{|f(\widehat{x}) - f(x)|}{f(x)} \qquad EAlg = \frac{|\psi(\widehat{x}) - f(\widehat{x})|}{f(\widehat{x})}$$
 Esaminando l'errore finale, se si riesce a distinguere tra EIN e EALG è possibile stabilire se conviene cercare un algoritmo più stabile o se non ne vale la pena.

Numero di condizione
Numero che indica il condizionamento del problema. Ed perturbazione su un dato

$NC = \frac{EIn}{Ed}$ $Ed = \begin{vmatrix} \tilde{x} - x \\ x \end{vmatrix}$ $NC = \begin{vmatrix} x \\ f(x) \end{vmatrix}$

Se la funzione è continua. C(f,x) = Condizionamento del

$$\lim_{h \to 0} NC = \left| \frac{x}{f(x)} \bullet f''(x) \right| = C(f, x)$$

problema che dipende dalla f e dalla x (condizionamento di f nel punto x)

Interpolazione polinomiale
Problema di approssimare funzioni polinomiale avendo alcuni dei valori che assume la funzione in certi punti del dominio.
Se ho una funzione polinomiale complessa e la voglio approssimare con una funzione più semplice, assegno n+1 osservazioni in corrispondenza di n+1 punti distinti e trovare la funzione che passa per quei punti. Ogni classe di funzioni per essere utilizzata su un calcolatore deve essere ricondotta ad una forma polinomiale.

Polinomi

I polinomi sono funzioni computazionali; sono continui e sono continue anche le derivate; se ne può trovare derivata, primitiva, zeri (radici).

terryate, se ne poo tovate Gerryata, primitiva, zeri (tante). **Teorema di Weierstrass**Data una funzione continua in un intervallo [a,b] è possibile trovare un polinomio che approssimi f(x) ad una tolleranza prefissata ε .

Valutazione numerica di un polinomio Meno operazioni si fanno, meno possibilità c'è di avere errori (algoritmi con complessità minore sono più stabili). Lo schema di Horner può essere utilizzato per valutare un polinomio con n

addizioni e n moltiplicazioni (invece che 2n moltiplicazioni e n addizioni); questo metodo può anche essere usato per calcolare la derivata di un polinomio. (= schema di Ruffini)

Analisi degli errori dell'interpolazione

Si può porre rimedio a Eln grande? Non sempre: ci si può riuscire, a volte, riformulando il problema in maniera diversa. Inoltre, se avessi dei dati rappresentabili su una macchina NON avrei errore inerente per definizione.

Base di Bernstein

Base ottimale per la rappresentazione dei polinomi, ed è strettamente legata all'intervallo di interesse.

Metodi per l'interpolazione

metodi per i interpolazione
Il problema di interpolare i dati assegnati con una funzione polinomiale consiste nel
determinare i coefficienti del polinomio; l'interpolazione può essere utilizzata per
approssimare una funzione continua in un intervallo.

Stima dell'errore

Errore analitico: l'errore che mi porta il modello che sto utilizzando per ricostruire f; l'errore che commetto utilizzando la funzione interpolata \(\psi\) invece di f; se la funzione è esattamente un polinomio è nullo

tunzione e esattamente un polinomio e nullo. **Esistenza di un polinomio interpolante**Dati n+1 punti x_0, y con i=0,...,n con x, distinti, esiste ed è unico il polinomio $p \in P_n$ (spazio dei polinomi di grado n) che verifica le condizioni p(x)=y.

Sistema lineare con n+1 incognite.

La matrice di **Vandermonde** non è buona come metodo per trovare un polinomio interpolante, ne perché à mulcondizionata, una priceola parturbazione sui dati produce interpolante.

interpolante, perché è malcondizionata, una piccola perturbazione sui dati produce coefficienti polinomiali sbagliati.

Forma di Lagrange
Scomporre il problema in *n* problemi elementari in modo da renderlo più semplice. Il polinomio interpolante è

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Polinomi elementari di Lagrange

$$L_{i}(x_{j}) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} L_{i} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_{i}) / \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_{i} - x_{j})$$

Costo. O(11) Differenza divisa
Differenza divisa di ordine $nf[x_0,x_1,...,x_n]$ il coefficiente di x^n del polinomio interpolante; è il coefficiente della potenza massima.

Forma di Newton

Forma di Newton

Utilizzando le differenze divise, si ottiene la f.d.N. per l'interpolazione composta
dalla somma delle basi di Newton (o basi con n centri); le differenze divise sono i
coefficienti di queste basi. Con questo polinomio siamo più vicini alla forma stabile:

la base ha n centri nell'intervallo (a.b)

se si riesce a trovare una formula facile e stabile per calcolare le differenze
divise, il gioco è fatto.

Inoltre, se voglio aggiungere un punto di interpolazione posso farlo senza perdere il
lavoro precedente (interpolazione adattiva).

Formula ricorrento ne le differenze divise.

ravvo preceente (unterpotazione adattiva).

Formula ricorrente per le differenze divise

Per calcolare una differenza divisa di ordine k, esiste una formula ricorrente. Si
calcola il polinomio di Newrin, trovando le differenze divise rispetto ad ogni punto.
Si può ottimizzare l'algoritmo usando lo schema di Horner.
Costo: O(n'/2)

Costo: O(1/12) Se si cambia l'ordine delle osservazione, il polinomio che si ottiene è lo stesso anche se numericamente diverso

se numericamente diverso.

La differenza divisa di *n* elementi coincide sempre con la differenza divisa di una qualsiasi permutazione degli stessi elementi.

Newton vs. Lagrange
Nonostante Newton abbia un costo pari alla metà di quello di Lagrange, i due
metodi sono egualmente validi. La preferenza si basa sulla stabilità del metodo:
l'unica possibilità è di provarli entrambi per vedere quale dei due si avvicina di più alla funzione da interpolare, e da' quindi errore minore. Funzione di Runge
Aumentando i punti di osservazione, il polinomio interpolante converge alla funzione originale? In realtà non è così. Ad esempio, con la funzione di Runge

 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in [-5,5]$ Vediamo che il polinomio interpolante non converge alla funzione, ma oscilla (soprattutto vicino ai limiti dell'intervallo di osservazione).

(sopratutto vicino ai limiti dell'intervallo di osservazione). **Errore di interpolazione** R(x)=f(x)-p(x). È di tipo analitico. L'errore di interpolazione può essere portato a 0 con la derivata nulla, che si avrebbe con polinomi di grado n. **Convergenza con Chebishev**Sia f(x) almeno C' in [a,b] (continua e con derivata). Siano x_i gli zeri del polinomio

di Chebyshev di grado n+1, allora c'è convergenza del polinomio interpolante. Cioè, se si scelgono in maniera opportuna i punti di osservazione, il polinomio interpolante converge alla funzione, quindi l'errore va a 0.

Per utilizzare questo metodo bisogna poter valutare questi punti.

Tecniche alternative all'interpolazione
A volte non ha senso usare l'interpolazione (eg. con molti dati).

Minimi quadrati

I dati non si interpolano, ma sono approssimati (si cerca di andare il più vicino Nei casi in cui si capisce a priori l'andamento dei dati si cerca la funzione che meglio li approssima (che minimizza lo scarto quadrato).

megtio ii approssima (che minimizza lo scarto quadrato). Equazioni normali

Sono n+1 equazioni in n+1 incognite. Risolvendo il sistema delle eq. norm. si ha la soluzione del problema di minino (che coincide con la funzione di migliore approssimazione). La matrice G è una matrice simmetrica non singolare. Il sistema ha una sola soluzione.

(Caso polinomiale) Per trovare la retta di regressione lineare non occorre risolvere sistemi; in caso di funzioni non lineari, la soluzione passa attraverso la risoluzione del sistema.

del sistema

Spline
Funzioni di tipo polinomiale, scavalcano l'inflessibilità e risolvono automatici
il problema della convergenza del polinomio alla funzione da interpolare
(convergono comunque).

Integrazione numerica

integrazione numerica
Questo problema non è sempre risolvibile analiticamente, quindi una soluzion
numerica è in molti casi la sola strada possibile.

Formule di quadratura interpolante

Formule di quadratura interpolante
Si interpola la funzione f, quindi si integra la f interpolata, assumendo l'integrale
ottenuto come approssimazione dell'integrale della funzione di partenza.
Base di funzioni cardinali per cui =1 se i=j, =0 se i<>j.
Formule di quadratura di Newton-Cotes
Usano come funzioni cardinali i polinomi di Lagrange e assumo che i punti nell'intervallo [a,b] siano equidistanti.
I coefficienti non dipendono né dalla funzione integrando n dall'intervallo di integrazione, ma solo dal numero dei punti che decido di scegliere per approssimare f(formule generali).
Formula di tranezi

Formula di tranezi

Formula di tranezi.

Formula del trapezi
Graficamente, significa trovare l'area sottesa della retta che interpola i due punti.
Ordine di grandezza simile all'integrale esatto.

Formula di Simpson
Graficamente, significa trovare l'area sottesa dalla parabola che interpola i tre punti. Più corretta dei trapezi.

Più corretta dei trapezi.

Errore di integrazione

È di tipo analitico. Deriva dal fatto che stiamo approssimando un oggetto con un altro oggetto che non è uguale analiticamente.

Se si integra un polinomio di grado 1 con i trapezi o di grado 2 con Simpson, non c'è errore analitico.

Nota: Se si approssima un polinomio di grado 3 con una formula di Simpson si ottiene un polinomio di grado 2 che è l'integrale esatto del polinomio; quindi, visto che l'errore è lo stesso, conviene usare la formula di grado inferiore, perché

composta meno calcoli. In generale, conviene usare formule di NC di grado pari. Composta meno carcon: in generate, conviene usas e romine un roc ul graco pari. Usando i trapezi, se la derivata seconda è nulla, l'approssimazione è esatta (i polinomi lineari hanno sempre derivata seconda nulla). Con Simpson, se la derivata quarta è nulla, non c'è errore (i polinomi di grado 2 e 3 hanno derivata quarta nulla).

чрав не пипа, поп с е errore (1 polinomi di grado 2 e 3 hanno derivata quarta nulla)
Formule di quadratura composte
Sono formule di quadratura di NC applicate in m sottointervalli in cui è stato diviso
l'intervallo [a,b]. I sottointervalli possono essere di ampiezza diversa, ma noi
supporremmo di avere intervalli della stessa ampiezza. Questo per contenere
l'errore, dato che esso dipende da h.

Formula composta dei trapezi È data dalla somma delle formule dei trapezi applicata in tutti gli intervalli. Si può ridurre l'errore a piacere, aumentando il numero di intervalli su cui si opera.

Formula composta di Simpson
Si deve dividere l'intervallo in un numero pari di sottointervalli m=2k.

Formule di quadratura composte adattive

Approccio top-down, risolve il problema pratico di contenere l'errore entro una certa tolleranza (risolto con la condizione di poter maggiorare la derivata seconda della funzione nell'intervallo). Si applica una formula sull'intervallo (a,b) (c,s) il risultato non soddisfa, si divide l'intervallo e si riapplicano le formule nei sottointervalli.

non soutissa, si divide i intervanto e si riappinciano le fortinue nei sottoninei van Estrapolazione di Richardson

Permette numericamente di avere una stima dell'errore in una delle formule di quadratura. Trova un limite superiore dell'errore, non teorico, ma numerico.

Equazioni non lineari
Trovare gli zeri di una funzione tipicamente continua ma non lineare. Solitamente si
definisce l'intervallo di interesse. Metodi globali (partono da un intervallo, trovano
tutte le radici) o locali (partono da un approssimazione alla radice, trovano una sola

Velocità di convergenza

Venocia di Convergenzia: p. Fattore di convergenzia: p, p=1,0 <math>p=1 auperlineare, p=1,0 <math>p=1 aublineare; p>1,1 superlineare. Se la convergenza è lineare, si guadagna un bit ad ogni iterazione, se è quadratica, i bit di precisione raddoppiano ad ogni iterazione.

Metodo di bisezione

Metodo di bisezione
Globale, iterativo, f deve avere gli estremi di segno opposto.
Si considera il punto medio dell'intervallo, dividendolo in due sottointervalli uguali.
Si tiene l'intervallo che ha lo zero della funzione e si scarta l'altro. Si itera il procedimento fino ad arrivare ad un intervallo che approssima sempre di più la radice della funzione.
Non si può raggiungere la radice ad una tolleranza qualsiasi, si deve tener conto che siamo nell'insieme dei numeri finiti: se la radice è un numero finito, la tolleranza può essere (z. lattimenti, si potrà arrivare al numero finito immediatamente precedente o successivo.
Il test di arresto deve controllare che la tolleranza non sia minore della differenza tra due numeri consecutivi (rischio di loop infinito).
Limite: trova una sola radice.
Metodo di Newton

Metodo di Newton

Metodo di Newton Locale, iterativo. Lo scopo del metodo è di trovare un'approssimazione migliore. Converge se non ci sono punti di flesso. Ordine di convergenza: 2, quadratico (dipende) Test di arresto ideale: $|\langle kx, *y \rangle x^*| = \mu$ $\varepsilon > \mu$ Limite: se non riesce ad applicare la derivata prima della funzione, non si può usare.

Metodo delle secanti Locale, iterativo. Si può utilizzare anche senza calcolare la derivata prima

Locale, terativo. Si puo utilizzare anche senza catcolare la derivata prima. Si parte da due punti, calcolando la secante fra questi, e osservando in che punto si annulla. La secante ha la stessa funzione della tangente nel metodo di Newton. Se la secante si annulla nel punto dive si annulla la funzione, allora il procedimento termina. Altrimenti calcolo la funzione in quel punto, e itero il metodo. Analogo a Newton (ragionamento uguale), ma al posto della tangente abbiamo la secente.

Teorema di convergenza del metodo di Newton

 $f(x^*)=0$ $f'(x^*)\neq 0$ $f''(x^*)\neq 0$ f''(x) continua L'ordine di convergenza è tra lineare e quadratico. Algebra lineare numerica

Determinante Regola di Cramer: sistema con soluzione analitica, ben precisa, troppo costosa. Sviluppo di Laplace: costo (n-1)n!

Fattorizzazione LU

Fattorizzazione LU

La matrice Ax=b ha una sola soluzione se $det(A)\ne 0$.

Fattoriziamo A in due matrici LU di forma speciale: L (lower) triangolare inferiore,

Fattorizzamo A in due matrici LU di forma speciale: L (lower) triangolare inferiore, U (upper) triangolare superiore. Data una fattorizzazione LU di A otteniamo la soluzione con un costo di O(n²) (metodo diretto, non iterativo). Per ottenere L si utilizza la sostituzione in avanti, per ottenere U all'indietro. Osservazione: Se la matrice è triangolare il determinante è il prodotto degli elementi della diagonale.

uena ungonan. Se i minori principali di ordine k di A per k=1,...,n-1 sono $\neq 0$, allora esiste una fattorizzazione LU di A (i minori principali di ordine k sono i determinanti delle matrici $k \times k$, devono essere tutti diversi da 0 fino a quello di ordine k-1 affinché la

matrice sia fattorizzabile) Per ottenere le matrici LU si costruiscono matrici elementari di Gauss. Costo O(n³). Costo computazionale di LU: 1/3*n³

Matrice inversa

Matrice inversa Per troware la matrice inversa basta risolvere n sistemi lineari, usando la matrice identità l. Risolviamo n sistemi lineari che tra di loro hanno la stessa matrice dei coefficienti (si cambiano solo i termini noti). Basta una sola fattorizzazione della matrice, con costo n', poi si risolve il sistema. Una matrice di permutazione è una matrice che fa opportuni scambi tra le righe di A e si costruisce mentre si fattorizza.

Stabilità numerica di LU Mostra quando la soluzione ni Mostra quando la soluzione numerica si discosta dalla corrispondente soluzione aritmetica esatta. Se esistono delle costanti a e b indipendenti dagli elementi e dall'ordine di A tali che $|l_j|S = l_j|S = l_j|S$

Condizionamento del problema della soluzione di sistemi lineari Soluzione: vettore. Distanza: norma vettoriale (?). Norma matriciale: è una funzione da $R^{\text{eva}} \rightarrow R$ che deve soddisfare le seguenti Notina intanciale: e una funzione da A PA cia e over sodicistare le seguenti proprietà: Illò 0, Illà+BllSllAHIBII (disuguaglianza triangolare), llotAll=llodi «Illall. Se l'indice di condizionamento è piccolo, ho l'errore sui risultato uguale all'errore sui dati; altrimenti ci sarà pericolo di risultati sballati (problema mal condizionato)

Fattorizzazione QR

Q: Matrice triangolare superiore (simile a U); R: matrice ortogonale (inversa uguale alla trasposta). Per costruirla, la matrice non deve essere singolare: si costruisce per "passi" attraverso le matrici elementari di Householder (ortogonali per definizioni, passi autherisor in matrix ceriminal in Honoscined (striggonal per terminopale), simmetriche). [Prodotto di matrici ortogonali è sempre una matrice ortogonale]. Per risolvere un sistema lineare è non dover mai costruire fisicamente la matrice Q (costo n prodotti per n^4). Costo totale: $2/3*n^3$ (maggiore di LU: il vantaggio non sta (costo n prodotti per n). Costo totale: 2/3-in (maggiore di LU: il vantaggio non sta nella complessià ma nella stabilità numericalo, più piccolo di LU, quindi è molto più stabile; è applicabile senza dover fare ipotesi su di A; si può applicare a matrici rettangolari (in maniera un po' diversa). Aiuta anche a risolvere sistemi sovradimensionati; le matrici elementari di Householder non sono le sole utilizzabili; a meno di un fattore di scala, è unica.

Metodi diretti/iterativi Metodi diretti: În un numero finito di passi troviamo la soluzione del sistema. Metodi stabili in senso debole. Il problema è la complessità, se le matrici sono grandi, un metodo diretto inizia a costare troppo. Inoltre se avessi una matrice grandi, un metodo diretto mizia a costare troppo. Inoltre se avessi una matrice o sparsa, cióe una matrice di dimensione n che ha n elementi non nulli. Se fosse piena avrebbe n² elementi non nulli, mentre sparsa ha O(n) elementi non nulli. Se applico un metodo diretto ad una matrice sparsa, già dopo il primo passo gli elementi nulli diventano non nulli. La matrice diventa piena, e dal secondo passo l'algoritmo costerebbe n³ che con n grande è troppo. Nasce perciò una classe di metodi che sfrutta la sparsià, non genera mai elementi non nulli da elementi nulli. Metodi iterativi: Si applica a sistemi di grandi dimensioni e a matrici sparse.

Metodi iterativi

Metodi iterativi Raggio spettrale: autovalore di modulo massimo. Metodo iterativo: A non singolare; decomposizione nella forma A=M-N, M non singolare. $Ax=b \rightarrow (M-N)x=b \rightarrow Mx-Nx=b \rightarrow Mx=Nx+b \rightarrow x=M^{T}Nx+M^{T}b$ $P=M^{T}Nx$ matrice di iterazione del metodo; $q=M^{T}b$ Converge se e solo se g(P) < I. Se vogliamo costruire un metodo sappiamo come fare, ma verificare che il raggio spettrale sia < I è un problema non banale. Ciò che

facciamo è rinunciare a verificare condizioni necessarie e sufficienti,e limitarci a condizioni più facilmente verificabili, ma che ci garantiscono comunque la convergenza. (condizione sufficiente, non necessaria): se esiste una norma spettrale indotta per cui ||P||<1, il metodo iterativo è convergente.

- In ogni metodo iterativo è sempre necessario prevedere il numero massimo di
- In ogni metodo iterativo è sempre necessario prevedere il numero massimo di iterazioni oltre il quale interrompere l'esccuzione. Serve come controllo nel caso in cui il numero di iterazioni diventi troppo grande. Se sappiamo che nella nostra matrice di iterazione g(P) < 1, abbiamo un'approssimazione, dato che il raggio spettrale non è più della matrice teorica, ma è della matrice i aritmetica finita. Quindi potremmo avere un calcolo errato in caso di sistemi malcondizionati. Quindi potremmo avere un calcolo errato in caso di sistemi malcondizionati di quello precedente. Un metodo iterativo, rispetto ad uno diretto, è meno sensibile alla propagazione degli errori. Il costo computazionale ad ogni iterazione è dato da $O(n^2)$. Quindi dipende da quante iterazioni vengono effettuate e se effettivamente un'iterazione costa n' (in matrici sparse è O(n)). Questo ci avvantaggia rispetto ai metodi diretti, anche se esistono matrici sparse in cui conviene usare metodi diretti,

Troviamo una nuova scomposizione di A ottenuta da una diagonale, una triangolare inferiore e una triangolare superiore: $A=M\cdot N$; $A=D\cdot L\cdot U$ M deve essere invertibile, e semplice da invertire, quindi A deve avere tutti gli elementi della diagonale diversi da 0 (altrimenti M non è invertibile).

Melodo di Jacobi M=D; N=L+U. La matrice di iterazione è $I=D^*(L+U)$. Durante i passi non possiamo mai perdere le informazioni sul vettore del passo precedente (metodo degli spostamenti simultanei).

Metodo di Gauss-Seidel M=D-L; N=U. La matrice di iterazione è $G=(D-L)^{-1}U$.

Per calcolare il vettore al passo k-esimo, usiamo elemento dello stesso vettore calcolati precedentemente al passo k-esimo stasso. Possiamo usare un sol vettore per implementare il metodo (metodo degli spostamenti successivi). In generale è più veloce di Jacobi, anche se esistono dei controssempi.

in generate più vecce di Jacon, antie se essistano dei connecempi.

Convergenza

Se A è a predominanza diagonale in senso stresso, allora i due metodi sono convergenti. L'elemento sulla diagonale è maggiore della somma degli altri elementi sulla stessa riga/colonna.

Autovalori e autovettori

Autovalori e autovettori Data uma matica $A \in C$ per cui $A = \lambda x (x \neq 0)$. Il vettore $x \in C$ detto autovettore corrispondente a λ . L'insieme dei numeri λ che soddisfa la relazione si dice spettro di λ . L'autovalore massimo in modulo tra tutti gli autovalori e chiamato raggio spettrale di Λ [A[A[A]]. Per trovare gli autovalori di Λ si pone il determinante uguale a zero: $det(A - \lambda I) = 0$. In questo modo si trova il polinomio caratteristico associato ad Λ che, posto uguale a Λ 0, ci da' l'equazione caratteristica: $det(A - \lambda I) = d_0 + a_0 + a$

Per ogni autovalore, si trova l'autovettore corrispondente risolvendo il sistema, sostituendo \(\lambda \) con l'autovalore trovato. Un polinomio qualunque si può vedere come polinomio caratteristico di una certa matrice; matrici diverse possono avere lo stesso polinomio caratteristico, quindi queste matrici devono avere gli stessi autovalori.

*Proprietà degli autovalori**

Data una matrice diagonale o triangolare, gli autovalori sono gli elementi della diagonale. Si può trasformare la matrice data in un'altra matrice con gli stesso autovalori, fino ad arrivare ad una matrice simile alla prima, da cui posso ricavare banalmente el jautovalori i banalmente gli autovalori. Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

Molteplicità algebricaLa molteplicità di un autovalore λ , come radice dell'equazione caratteristica, è indicata con $\sigma(\lambda)$ ed è detta molteplicità algebrica di λ . Il massimo numeri di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti ad un λ , è

detto molteplicità geometrica di λ e si indica con $\tau(\lambda)$. Se c'è una certa molteplicità algebrica, si possono trovare più autovettori per un autovalore (*τ≤σ*). *Matrici simili*

matrice simul Due matrici $A \in B$ si dicono simili se esiste una matrice non singolare S per cui $A = SBS^J$. Due matrici simili hanno gli stessi autovalori, con le stesse molteplicità algebriche o geometriche.

Matrici diagonalizzabili

Una matrice A simile ad una matrice diagonale D si dice diagonalizzabile. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti; la colonna della matrice S per cui S⁷AS è diagonale sono gli autovettori di A.

Forma normale di Schur Sia $A \in C^{n \times n}$ e siano $\lambda_{i \le n}$ i suoi autovalori. Allora esiste una matrice

ortogonali/unitaria Q e una matrice triangolare superiore T tale che $A=QTQ^T$ con λ_i sulla diagonale di T. Se $A=R^{\infty}$ allora Tè triangolare a blocchi. Metodo: ricavare una successione di matrici simili che convergono a una diagonale o ad una triangolare.

o ad una trangolara.
Problema di condizionamento

Quando la matrice entra nella "macchina" viene approssimata, quindi i risultati
possono essere diversi da quelli attesi. Il problema è molto o poco malcondizionato?
Si osserva il numero di condizionamento: se è piccolo bene, se è grande non si sa
per quale autovalore lo sia, in questo caso interverranno i singoli numeri di

condizionamento per ogni autovalore Conditionamento per ogni autovarore.

Norma assoluta

Somma matriciale indotta che verifica $||D|| = m\alpha x |d_{\theta}|$ per ogni matrice diagonale.

Teorema di Bauer-Fike

Sia $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalizzabile, quindi tale che $\mathcal{A} = \mathcal{SDS}^{-1}$, con \mathcal{D} diagonale e \mathcal{S} non singolare. Se $\delta \mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e ξ è un autovalore di $\mathcal{A} + \delta \mathcal{A}$, allora esiste almeno un autovalore λ di A tale che:

 $|\lambda - \xi| \le \mu(S) = ||S|| \cdot ||S^{-1}||$

dove $\mu(S)$ è detta radice di condizionamento

- Se μ è piccolo, il pmublema è malcondizionato
- Se μ è grande, c'è almeno un autovalore la cui ricerca è malcondizionata

Una formula di quadratura risolve un problema di Integrazione numerica

- Integrazione numerica
 La retta di regressione lineare:
 è soluzione di approssimazione dei dati (sperimentali) che hanno andamento lineare
- è sempre passante per il baricentro dei dati che si voglio appros è sempre una retta di approssimazione

Una matrice elementare di Gauss è triangolare bassa porta il vettore (4,7,4) nel vettore (4,0,0)

- ii polinomiali polinomio di Bernstain Funzioni monomiali Polinomi di Lagrange

- A ∈ R^{n*n} è diagonalizzabile
 I suoi vettori sono linearment
 I suoi autovalori sono distinti

- $$\begin{split} A &\in R^{n^*n} \text{ se gli autovalori di } A \text{ sono distinti allora} \\ & \quad \quad \quad \quad \text{Vale } AS = SD \text{ con } S \in R^{n^*n} \text{ invertibile e } D \in R^{n^*n} \text{ diagonale} \end{split}$$
 Il raggio spettrale di A è nullo
 Gli autovettori di A sono linearmente indipendenti

- È diagonalizzabile

 I chagonalizzatione
 Il raggio spettrale di una matrice
 E il modulo dell'autovalore massimo
 Serve per determinare se in un metodo iterativo A è convergente o meno Nella fattorizzazione QR di una matrice A ∈ R^{n*n} Q e R rappresentano

Nend atuni/Zazione QK u una manne A e K Q e K rappieser ispettivamente

Due matrici: la prima ortogonale, la seconda triangolare alta E usata per

Risolvere un sistema lineare

Calcolare gli autovalori di una matrice

COSTO: 2/3 n³

- Sia $A \in R^{n^*n}$ il polinomio caratteristico associato
- Consiste nel determinante di (A * SA) È un polinomio a coefficienti reali di grado n

io caratteristico della matrice A

- È di grado n
- Ha radici eventualmen È a coefficienti reali

 $\begin{array}{ll} L'errore che si commette nell'approssimazione di INTEGRALE\{a,b\} \, f(x) \, con \, la \\ formula dei trapezi semplice è \\ \bullet \quad \cdot \, (b\text{-}a)^3/12^a f^{il}(\epsilon) \end{array}$

ondizionamento di un problema dipende Dai dati del problema e dal problema ste

- Il criterio di arresto del metodo Newton-Rapson è corretto imporlo
- Sui valori di f
- Sul numero di iterazioni

Per costruire i pesi ω di una formula di Newton-Cotes ad n+1 punti (o ascisse) si In numero n

A n+1 punti o nodi sono

Esatte per poli-

- Esatte per polinomi di grado n Esatte per polinomi di grado n+1 se pari
- Avere i punto i nodi equidistanti nell'intervallo

- Avere 1 punto 1 nodi equidistanti nell' intervalio
 Essere formula di quadratura interpolanti
 formula di N-C si contraddistingue per
 Avere punti e nodi equidistanti nell'intervallo di integrazione
 Essere formula di quadratura interpolante
 Utilizzare le differenze divise

- Unità di arrotondamento Uè uguale a
 il limite superiore dell'errore relativo nell'approssimazione di un numero reale con un numero finito
 un limite superiore all'errore relativo sul risultato di una approssimazione aritmetica finita
 il limite inferiore dell'errore relativo nell'approssimazione di un numero

- appartenente ad R il limite inferiore dell'errore relativo nelle operazioni

- il limite inferiore dell'errore relativo nelle operazioni II metodo di bisezione

 È derivabile con segni opposti
 Può essere usato per determinare gli zeri di una funzione
 Può essere usato per calcolare la radice quadrata di una funzione
 Si applica su funzioni continue
 Converge quando la funzione
 continua con segni discorsi degli estremi e c'è uno zero in mezzo al suo dominio
 continua che assume valori di segno discorde estranei al dominio
 continua con uno zero semplice interno al dominio
- continua con uno zero semplice interno al dominio

 continua con uno zero semplice interno al dominio

 derivabile che assume valori di segno discorde estranei al dominio

 Si vuole calcolare la radice f(x)=x³-1 definita in [-1,3] con il metodo di bisezione e partendo da a0=-1, b0=-3, si arriva alla soluzione con

 Un'iterazione

Un'iterazione

Uniterazione
Il metodo di Newton per determinare radici semplici
Converge sotto opportune ipotesi
È una retta a convergenza quadratica
L'iterazione funzionale corrisponde
Al metodo di Newton
Al metodo delle tangenti

Il metodo delle secanti

Il metodo delle secanti
Converge sotto opportune ipotesi
Ha convergenza superlineare
Per valutare un polinomio e la sua derivata (prima) si usa
Ruffini-Horner
Per valutare numericamente un polinomio in un punto

È necessario compiere "n" operazioni di moltiplicazione

Un problema d'interpolazione si risolve mediante

Un sistema lineare

Il sistema delle equazioni normali

Il sistema delle equazioni ...

Newton

Lagrange

isstema delle equazioni normali può risolvere

istema delle equazioni norman pao insorece Un problema di interpolazione Un problema di approssimazione ervengono in un problema Di ricerca di una retta di regressione lineare e interpolazione o approssimazione dei dati Consiste nel

Determinare il polinomio che passa per i dati

Converge

All'aumentare dei punti di interpolazione nel polinomio di Chebishev

All'aumentare dei punti di interpolazione nel polinomio di Chebishev
 Nella soluzione di un sistema lineare con il metodo iterativo
 Gauss-Seidel ha lo stesso costo di Jacobi
 Nel metodo iterativo
 La matrice viene decomposta nella somma di 2 matrici usate per costruire la matrice d'iterazione
 Sia dato un metodo iterativo che genera {x_k} che converge ad una radice di f ∈ C [a, b, l]. Il criterio di arresto del metodo è corretto imporlo
 Sugli x_k, sui valori della f e sul numero di iterazioni

I passi della formula di Simpson (semplice) sono

1/3 4/3 1/3

Simpson composito

Non necessita di ulteriori suddivisioni
Interpolare con Simpson INTEGRALE [a,b] a3x3+a2x2...

Non è necessario suddividere l'intervallo

Data una matrice Anna la fattorizzazione LU di A esiste se

- a una martico A i a tatonizzazione LO di A esiste se I determinanti dei minori principali di A sono non nulli I determinanti dei minori principali di A di ordine da I fino ad n-1 sono non nulli COMPLESSITÀ: 1/3 n³

Una matrice elementare di Householder

- È ortogonale Porta il vettore (4,7,4) nel vettore (9,0,0)
- Complessità del metodo di Householde 2/3 n³

La fattorizzazione di Gauss con pivotaggio parziale si applica per

Risolvere un sistema lineare

Calcolare il rango di una matrice
per calcolare il rango di una matrice

Nella fattorizzazione LU di Gauss il pilotaggio parziale è usato per Evitare overflow in I

Aumentare la stabilità della fattorizzazione
 La stabilità dell'algoritmo per la fattorizzazione LU con scambio delle righe e perno

ssimo È in senso debole NON dipende dagli elementi di L Dipende dagli elementi di U

Nella soluzione di un sistema lineare con il metodo iterativo

La convergenza dipende dal raggio spettrale della matrice d'iterazione

Errori Assoluto: $|\alpha - fl(\alpha)|$ Relativo: $|\alpha - fl(\alpha)|/|\alpha|$

Inerente: [f(x)-f(x-)]/f(x-)

La complessità dell'algoritmo di Horner è

O(n)

Per la valutazione del polinomio di grado m in un punto

m moltiplicazioni

Sia Θ un'operazione in aritmetica finita. Siano x e y due numeri finiti $x \Theta y = f(x \Theta y)$ $x \Theta y = f(x) \Theta f(y)$

La cancellazione numerica

Si ha nell'addizione A volte può essere evitata

La stabilità di un algoritmo ■ Dipende dall'algoritmo stesso Siano A e B ed S ∈ $\mathbb{R}^{n^{*}n}$ con S non singolare, A e B si dicono simili se:

A=S⁻¹BS A=SBS⁻¹ SA=BS

Date A,S con S simmetrica (S=S+) se SA=S+A

AS+=AS

errore di interpolazione polinomiale della funzione (x, f(x)) si ha Dalla derivata n+1 esima della funzione

La funzione di Runge

Evidenzia la non convergenza del polinomio interpolante

L'interpolazione polinomiale di una funzione regolare

E convergente all'aumentare dei punti di interpolazione nel polinomio di
Chebishev Il polinomio di interpolazione nella forma di Newton è Il polinomio di grado minimo che passa per i dati

L'indice di condizionamento di una matrice A

| ||A|| * ||A'||
||A|| * ||A'||| è

Soluzione del sistema Ax=b Soluzione del sistema Ax=b
La convergenza di un metodo literativo per la soluzione di un sistema lineare
 Non dipende dal vettore iniziale x₀
Teorema di convergenza di Newton
 Esiste un intorno di ra cu ci converge
 Converge localmente ad r

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{3*3}$ ammette

• Tre autovettori (e/o) tre autovalori

Assegnati n+1 dati, il polinomio interpolante di grado

Le differenze divise di una funzione

Sono utilizzate nella formula di Newton Il coefficiente della potenza massima del polinomio interpolante la funzione

in coefficiente dena potenza linomio di Lagrange $Li(Xi) \Leftrightarrow 0$ $Li(Xg) = \{1 i=y \mid 0 i \Leftrightarrow y \}$

Il metodo di Gauss-Sheidel ha costo computazionale

Più alto del metodo di Jacobi

Protare una matrice in forma di Hessemberg

Serve per ridurre la complessità del calcolo degli autovalori
Una matrice di Hessmberg

È sparsa ad elementi ⇔ 0 nella triangolare superiore e nella prima sottodiagonale

La complessità computazionale per calcolare la fattorizzazione di $A \in \mathbb{R}^{n^n}$ in termini di sole moltiplicazioni è dell'ordine di I/3 n3 per LU (normale o con pivotaggio parziale)

If 3n 5 per LO (normale of control processes, ZX=YZ con det(Z) > 0

E una similitudine

Ax=b fattorizzo A con Gauss pivot parziale PA=LU

PAx=b e uguale a LUx=b

Ax=b sono uguali a LUx=Pb

VECCHIO

I nodi in una funzione spline sono i punti in cui è partizionato l'intervallo La funzione bspline è detta normalizzata perché gode della proprietà della partizione dell'unità. Per definirla, si fa una partizione estesa. Una curva di Bezier è una curva polinomia di Bernstein L'algoritmo di Casteljau serve a valutare la curva di Bezier