Esempio 1: esponenziale $\dot{x} = x$

Si considera una funzione nota $\dot{x} = x$,con x_0 condizione iniziale al tempo $t = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x & \text{equazione differenzioale} \\ x(0) = x_0 & \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione generale di questa equazione differenziale é $x(t) = x_0 e^t$, ma si vuole ora ricavarla utilizzando due metodi matematici differenti:

Metodo di Eulero - schema del primo ordine.
Si approssima la derivata della funzione con il rapporto incrementale $\dot{f} = (f(t + \Delta) - f(t))/\Delta$ cosí che $f(t + \Delta) = f(t) + \dot{f}\Delta$. Qunidi si avrá:

$$f(x, t) = \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta} = \dot{x} + O(\Delta)$$

Quando, come in questo caso, il tempo é discretizzato (cioé $t = n\Delta$),si ottiene un'equazione alle differenze:

$$x(t_n + 1) - x(t_n) = f(x(t_n), t_n)\Delta$$

Poiché compare solo una differenza di primo livello (cioé due livelli temporali successivi n e n+1) questa é un'equazione alle differenze del primo ordine. In generale, l'ordine delle equazioni é pari al numero di livelli meno uno. Ora, applicando il metodo di Eulero all'equazione considerata, si ottiene:

- Equazione differenziale: $x = \dot{x} = (x_{i+1} - x_i)/\Delta$
- Approssimazione discreta: $x_{i+1} - x_i = x_i\Delta$
- Equazione alle differenze: $x_{i+1} = (1 + \Delta)x_i$

Partendo dalla condizione iniziale $x = x_0$, e iterando si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = (1 + \Delta)x_0 \\ x_2 = (1 + \Delta)x_1 = (1 + \Delta)^2 x_0 \\ \ldots \\ x_n = (1 + \Delta)^n x_0 \end{cases}$$

Dove $x_n = x(t_n)$. In questo modo, integrando l'equazione alle differenze, si ricavata la soluzione approssimata $x_n = x_0(1+\Delta)^n$ dopo un numero n di passi (ovvero al tempo $t_n = n\Delta$). Ricordando che lo sviluppo del fattoriale é $e^{\Delta} = 1 + \Delta + \Delta^2/2 + .. + \Delta^n/n!$, la soluzione pu essere riscritta come:

$$x_n = (1 + \Delta)^n = (1 + 1/n)^n \simeq e + O(1/n)^2$$

dove $\Delta = 1/n$.

Metodo centrato - schema del secondo ordine.
Si vuole approssimare meglio la derivata per riuscire ad ottenere una soluzione con degli errori piú piccoli che nel caso precedente. Col metodo di Eulero la derivata veniva approssimata col rapporto incrementale, come segue:

$$\dot{x} = \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta} + O(\Delta) = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta} + O(\Delta)$$

Nel metodo centrato si approssima, invece, la derivata, nella maniera seguente:

$$\dot{x} = \frac{x(t+\Delta) - x(t-\Delta)}{2\Delta} + O(\Delta^2) = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta} + O(\Delta^2)$$

Ovviamente con questa nuova approssimazione discreta si ottiene un'equazione alle differenze del secondo ordine:

$$\dot{x} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta}$$

$$x_{i+1} - x_{i-1} = 2\Delta x_i$$

Con questo schema centrato ho ottenuto una equazione alle differenze del secondo ordine e per poterla risolvere sono necessarie due condizioni iniziali. Questa equazione ha due soluzioni indipendenti di cui una approssima la nostra soluzione mentre l'altra, detta spuria, é una conseguenza dell'aumento dell'ordine e non ha controparte nel problema iniziale. Ora si vogliono calcolare queste soluzioni.

Nota: un'equazione $\ddot{x} + a\dot{x} + bx + c = 0$ si dice a coefficienti costanti se a e b non dipendono dal tempo. Il termine c puó dipendere dal tempo.

Teorema: data un'equazione differenziale di ordine n a coefficienti costanti, le sue soluzioni si possono scrivere come:

$$x(t) = \sum A_n e^{nt\lambda}$$

con $\lambda_n \neq \lambda_m$. Assumendo $x_i = p^i$ si ottiene:

$$p^2 - 2\Delta p - 1 = 0$$

$$p_1 = \Delta + \sqrt{\Delta^2 + 1} \approx \Delta + (1 + \Delta^2/2) = 1 + \Delta + \Delta^2/2$$
$$p_2 = \Delta - \sqrt{\Delta^2 + 1} \approx \Delta - (1 + \Delta^2/2) = -1 + \Delta - \Delta^2/2$$

La soluzione cercata sará data da $x_n = A(p_1)^n + B(p_2)^n$ dove $A(p_1)^n$ é un'approssimazione del secondo ordine mentre $B(p_2)^n$ é errata ed occorrerá eliminarla annullando la costante B. Si osserva inoltre che la soluzione spuria cambia segno ad ogni passo, $(p_2)^n \approx (-1)^n$.
Per far partire questo schema sono necessarie le condizioni iniziali x_0 e x_1, ed é la scelta di x_1 che determina l'ampiezza della soluzione spuria.

$$x_1 \simeq x_0 + \dot{x}_0\Delta + \ddot{x}_0\Delta^2/2 = (1 + \Delta + \Delta^2/2)x_0$$

$$x_0 = A + B \qquad x_1 = Ap_1 + Bp_2$$

$$B = \frac{x_1 - p_1 x_0}{p_2 - p_1} \qquad A = x_0 + \frac{x_1 - p_1 x_0}{p_2 - p_1}$$