Esempio 2: equazione del moto armonico $\ddot{x} + x = 0$

Metodo 1: Schema centrato del secondo ordine.

L'equazione differenziale é del secondo ordine e puó essere risolta approssimandola con il metodo centrato, come segue:

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} + x_i\Delta^2 = 0$$

Per far partire questo schema é necessario conoscere le due condizioni iniziali x_0 ed x_1. La prima rappresenta il valore della variabile x al tempo $t = 0$, mentre la seconda puó essere cosí calcolata:

$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0\Delta + \ddot{x}_0\Delta^2/2$$

$$x_1 = x(0)(1 - \Delta^2/2) + v(0)\Delta$$

L'equazione differenziale di partenza equivale ora a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_0 = x(0), \\ x_1 = x(0)(1 - \Delta^2/2) + v(0)\Delta, \\ x_{i+2} = 2(1 - \Delta^2/2)x_{i+1} - x_i, \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione alle differenze, si assume $v_i = p^i$

$$p^2 - 2(1 - \Delta^2/2)p + 1 = 0$$

$$p = (1 - \Delta^2/2) \pm i\Delta(1 - \Delta^2/4)^{1/2}$$

$$|p|^2 = (1 - \Delta^2/2)^2 + \Delta^2 - \Delta^4/4 = 1$$

questo assicura che la soluzione non cresce ne decade.

Metodo 2: Schema Runge Kutta del secondo ordine.

In questo caso, l'equazione differenziale di partenza (che era del secondo ordine) viene riscritta come un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = +v, \\ \dot{v} = -x, \end{cases}$$

Un passo temporale Δ é composto di due sotto passi:

$$\hat{x} = x + v\Delta/2$$

$$\hat{v} = v - x\Delta/2$$

$$x = x + \hat{v}\Delta$$

$$v = v - \hat{x}\Delta$$

eliminando le variabili intermedie si ottiene:

$$x_{i+1} = x_i(1-\Delta^2/2) + v_i\Delta$$
$$v_{i+1} = v_i(1-\Delta^2/2) - x_i\Delta$$

$$x_{i+2} - 2(1-\Delta^2/2)x_{i+1} + (1+\Delta^4/4)x_i = 0$$

Per risolvere l'equazione alle differenze, si assume $v_i = p^i$:

$$p^2 - 2(1-\Delta^2/2)p + (1+\Delta^4/4) = 0$$

$$p = (1-\Delta^2/2) \pm i\Delta$$
$$|p|^2 = (1+\Delta^4/4) > 1$$

questo dimostra che la nostra soluzione lentamente cresce.

Metodo 3: Schema simplettico del secondo ordine.

Anche in questo caso la funzione di partenza equivale a:

$$\begin{cases} \dot{x} = +v, \\ \dot{v} = -x, \end{cases}$$

Un passo temporale Δ , peró, questa volta é composto di tre sotto passi:

$$x = x + \dot{x}\Delta/2 = x + v\Delta/2$$
$$v = v + \dot{v}\Delta = v - x\Delta$$
$$x = x + \dot{x}\Delta/2 = x + v\Delta/2$$

$$x_{i+0.5} = x_i + v_i\Delta/2$$
$$v_{i+1} = v_i - x_{i+0.5}\Delta$$
$$x_{i+1} = x_{i+0.5} + v_{i+1}\Delta/2$$

eliminiamo $x_{i+0.5}$

$$v_{i+1} = (1-\Delta^2/2)v_i - x_i\Delta$$
$$x_{i+1} = x_i + (v_i + v_{i+1})\Delta/2$$

eliminiamo x

$$v_{i+2} - v_{i+1} = (1-\Delta^2/2)(v_{i+1} - v_i) - (x_{i+1} - x_i)\Delta$$
$$x_{i+1} - x_i = (v_i + v_{i+1})\Delta/2$$

$$v_{i+2} - v_{i+1} = (1-\Delta^2/2)(v_{i+1} - v_i) - (v_i + v_{i+1})\Delta^2/2$$

$$v_{i+2} - 2(1-\Delta^2/2)v_{i+1} + v_i = 0$$

Quello che alla fine si ottiene é la stessa equazione del primo caso.