

La matemática del mundial de fútbol Rusia 2018

Federico Ardila M.

San Francisco State University, San Francisco, California.
Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia.

Universidad Konrad Lorenz
Bogotá, 20 de junio de 2018

El Mundial



FIFA WORLD CUP
RUSSIA 2018

El Álbum



El Álbum



El Álbum



El Álbum



Las Monas



Número de láminas: 670
Precio por cada lámina: \$420

Cómo llenas el álbum en Colombia?



1. Compras 1-2 cajas.
2. Cambias láminas repetidas con amigas/os.
3. Comprar las que te falten en alguna esquina.

Cómo llenas el álbum en Estados Unidos?



1. Compras 1-2 cajas.
2. Te das cuenta que no tienes amigas/os con el álbum.
3. Te das cuenta que no venden láminas en las esquinas.
4. Compras más cajas? Te arruinas? Te rindes?

Si quieres llenar el álbum sólo comprando monas al azar:



La pregunta: En promedio,
cuánto cuesta comprar paquetes hasta llenar el álbum?

La pregunta: En promedio,
cuánto cuesta comprar paquetes hasta llenar el álbum?

Una cuentica rápida:

Número de láminas: 670

Precio por cada lámina: \$420

Entonces me va a costar: $670 \times 420 = 280.000$ pesos.

Están de acuerdo?

La pregunta: En promedio,
cuánto cuesta comprar paquetes hasta llenar el álbum?

Una cuentica rápida:

Número de láminas: 670

Precio por cada lámina: \$420

Entonces me va a costar: $670 \times 420 = 280.000$ pesos.

Están de acuerdo?

NO!!!

Y las repetidas?

La pregunta: En promedio,
cuánto cuesta comprar paquetes hasta llenar el álbum?

La pregunta: En promedio,
cuánto cuesta comprar paquetes hasta llenar el álbum?

Cuando un problema es muy difícil, busca uno más fácil.
Cuando un problema es muy grande, busca uno más chiquito.

La pregunta: En promedio,
cuánto cuesta comprar paquetes hasta llenar el álbum?

Cuando un problema es muy difícil, busca uno más fácil.
Cuando un problema es muy grande, busca uno más chiquito.

Una idea:

Comprar láminas hasta
que te salgan todas



es como

lanzar una moneda hasta que
te salgan cara y sello.



Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Hagamos el experimento!

Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Hagamos el experimento!

A quién le salieron cara y sello en
2 turnos?

Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Hagamos el experimento!

A quién le salieron cara y sello en

2 turnos? 3?

Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Hagamos el experimento!

A quién le salieron cara y sello en

2 turnos? 3? 4?

Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Hagamos el experimento!

A quién le salieron cara y sello en

2 turnos? 3? 4? 5?

Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Hagamos el experimento!

A quién le salieron cara y sello en

2 turnos? 3? 4? 5? 6?

Las Monedas



Cuántas monedas vas a tener que lanzar hasta que te salgan cara y sello? (En promedio)

Hagamos el experimento!

A quién le salieron cara y sello en

2 turnos? 3? 4? 5? 6?

Cada vez es la mitad de la anterior? Por qué?

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

número de monedazos =

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

número de monedazos = 1 (todos nosotros) +

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

número de monedazos = 1 (todos nosotros) +
1 (todos nosotros) +

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

número de monedazos = 1 (todos nosotros) +
1 (todos nosotros) +
1 (la mitad de nosotros) +

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

número de monedazos = 1 (todos nosotros) +
1 (todos nosotros) +
1 (la mitad de nosotros) +
1 (uno de cada cuatro) +

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

$$\begin{aligned} \text{número de monedazos} = & 1 \text{ (todos nosotros)} + \\ & 1 \text{ (todos nosotros)} + \\ & 1 \text{ (la mitad de nosotros)} + \\ & 1 \text{ (uno de cada cuatro)} + \\ & 1 \text{ (uno de cada ocho)} + \dots \end{aligned}$$

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

$$\begin{aligned}\text{número de monedazos} &= 1 \text{ (todos nosotros)} + \\ &1 \text{ (todos nosotros)} + \\ &1 \text{ (la mitad de nosotros)} + \\ &1 \text{ (uno de cada cuatro)} + \\ &1 \text{ (uno de cada ocho)} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\end{aligned}$$

Las Monedas

Cuántas monedas tenemos que lanzar hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

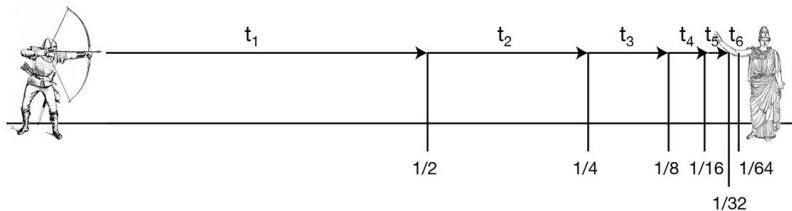
$$\begin{aligned}\text{número de monedazos} &= 1 \text{ (todos nosotros)} + \\ &1 \text{ (todos nosotros)} + \\ &1 \text{ (la mitad de nosotros)} + \\ &1 \text{ (uno de cada cuatro)} + \\ &1 \text{ (uno de cada ocho)} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ &= \text{infinito???}\end{aligned}$$

Y entonces? No vamos a terminar nunca???

Las Monedas

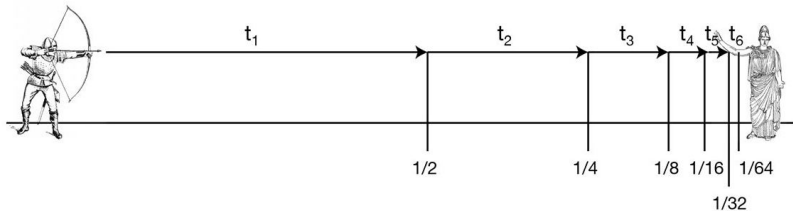
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ???$$

Paradoja de Zenón (490-430 a.C.):



Las Monedas

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



$$\# \text{ de monedazos} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 3$$

Tenemos que lanzar 3 monedas hasta que nos salgan cara y sello? (En promedio)

Volvamos al álbum

A mí me faltan 29 láminas: 20, 40, 45,

Cuántas debo comprar (al azar) hasta que salga una nueva? **L**.

lámina que me sale:	20	40	45	...	1	2	3	...
número de láminas:								

Volvamos al álbum

A mí me faltan 29 láminas: 20, 40, 45,

Cuántas debo comprar (al azar) hasta que salga una nueva? **L**.

lámina que me sale:	20	40	45	...	1	2	3	...
número de láminas:	1	1	1	...				

Volvamos al álbum

A mí me faltan 29 láminas: 20, 40, 45,

Cuántas debo comprar (al azar) hasta que salga una nueva? **L**.

lámina que me sale:	20	40	45	...	1	2	3	...
número de láminas:	1	1	1	...	1+L	1+L	1+L	...

Volvamos al álbum

A mí me faltan 29 láminas: 20, 40, 45,

Cuántas debo comprar (al azar) hasta que salga una nueva? **L**.

lámina que me sale:	20	40	45	...	1	2	3	...
número de láminas:	1	1	1	...	1+L	1+L	1+L	...

$$L = \frac{29}{670} \cdot (1) + \frac{641}{670} \cdot (1 + L)$$

Volvamos al álbum

A mí me faltan 29 láminas: 20, 40, 45,

Cuántas debo comprar (al azar) hasta que salga una nueva? **L**.

lámina que me sale:	20	40	45	...	1	2	3	...
número de láminas:	1	1	1	...	1+L	1+L	1+L	...

$$L = \frac{29}{670} \cdot (1) + \frac{641}{670} \cdot (1+L) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{670}{29} \approx \mathbf{23} \text{ láminas}$$

hasta que salga una nueva.

Volvamos al álbum

A mí me faltan 29 láminas: 20, 40, 45,

Cuántas debo comprar (al azar) hasta que salga una nueva? **L**.

lámina que me sale:	20	40	45	...	1	2	3	...
número de láminas:	1	1	1	...	1+L	1+L	1+L	...

$$L = \frac{29}{670} \cdot (1) + \frac{641}{670} \cdot (1+L) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{670}{29} \approx \mathbf{23} \text{ láminas}$$

hasta que salga una nueva.

Si te faltan F láminas, tienes que comprar por ahí

$\frac{670}{F}$ láminas hasta que te salga una que te falta.

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Si te faltan F , la siguiente se te demora $\frac{670}{F}$ láminas en salir.

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Si te faltan F , la siguiente se te demora $\frac{670}{F}$ láminas en salir.

Llenar el álbum **sólo comprando paquetes** requiere unas

$$\frac{670}{670}$$

primera

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Si te faltan F , la siguiente se te demora $\frac{670}{F}$ láminas en salir.

Llenar el álbum **sólo comprando paquetes** requiere unas

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}}$$

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Si te faltan F , la siguiente se te demora $\frac{670}{F}$ láminas en salir.

Llenar el álbum **sólo comprando paquetes** requiere unas

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \underbrace{\frac{670}{668}}_{\text{tercera}}$$

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Si te faltan F , la siguiente se te demora $\frac{670}{F}$ láminas en salir.

Llenar el álbum **sólo comprando paquetes** requiere unas

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \underbrace{\frac{670}{668}}_{\text{tercera}} + \dots$$

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Si te faltan F , la siguiente se te demora $\frac{670}{F}$ láminas en salir.

Llenar el álbum **sólo comprando paquetes** requiere unas

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \underbrace{\frac{670}{668}}_{\text{tercera}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{2}}_{\text{penúltima}}$$

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Si te faltan F , la siguiente se te demora $\frac{670}{F}$ láminas en salir.

Llenar el álbum **sólo comprando paquetes** requiere unas

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \underbrace{\frac{670}{668}}_{\text{tercera}} + \dots + \underbrace{\frac{670}{2}}_{\text{penúltima}} + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} \quad \text{láminas}$$

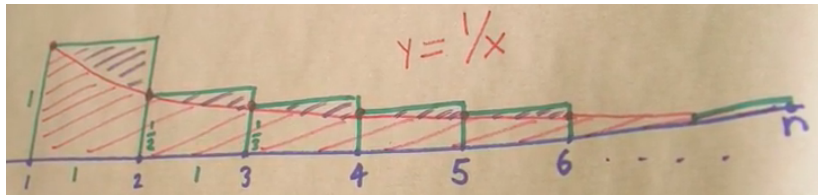
es decir,

$$4747 \text{ láminas} = \$1'990.000 \text{ pesos.}$$

Si no saliera ninguna repetida, te costaría \$280.000.

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

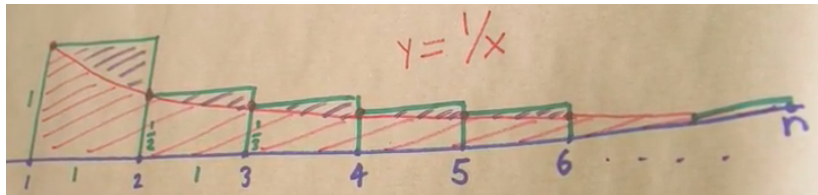
Número de láminas:



$$670 \left(\frac{1}{670} + \frac{1}{669} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \approx 670 \int_0^{670} \frac{1}{x} dx$$

Cuánto cuesta llenar el álbum sólo comprando paquetes?

Número de láminas:



$$\begin{aligned} 670 \left(\frac{1}{670} + \frac{1}{669} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) &\approx 670 \int_0^{670} \frac{1}{x} dx \\ &\approx 670 [\log_e(670) + \gamma] \\ &\approx 4747 \text{ láminas} \end{aligned}$$

donde

$$e = 2.71828, \quad \gamma = 0.57721$$

son el “número de Euler” y la “constante de Euler”.

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 4747 \text{ láminas} = \$1'990.000$$

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \dots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 4747 \text{ láminas} = \$1'990.000$$

2. sólo te falten 100?

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 4747 \text{ láminas} = \$1'990.000$$

2. sólo te falten 100?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{101}}_{\text{faltan 100}} = 1271 \text{ láminas} = \$530.000$$

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \dots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 4747 \text{ láminas} = \$1'990.000$$

2. sólo te falten 100?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \dots + \underbrace{\frac{670}{101}}_{\text{faltan 100}} = 1271 \text{ láminas} = \$530.000$$

3. te salga toda la selección Colombia?

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 4747 \text{ láminas} = \$1'990.000$$

2. sólo te falten 100?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{101}}_{\text{faltan 100}} = 1271 \text{ láminas} = \$530.000$$

3. te salga toda la selección Colombia?

$$\underbrace{\frac{670}{20}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{19}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 2410 \text{ láminas} = \$1'010.000.$$

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 4747 \text{ láminas} = \$1'990.000$$

2. sólo te falten 100?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{101}}_{\text{faltan 100}} = 1271 \text{ láminas} = \$530.000$$

3. te salga toda la selección Colombia?

$$\underbrace{\frac{670}{20}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{19}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 2410 \text{ láminas} = \$1'010.000.$$

4. te salga la última que te falta?

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 4747 \text{ láminas} = \$1'990.000$$

2. sólo te falten 100?

$$\underbrace{\frac{670}{670}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{669}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{101}}_{\text{faltan 100}} = 1271 \text{ láminas} = \$530.000$$

3. te salga toda la selección Colombia?

$$\underbrace{\frac{670}{20}}_{\text{primera}} + \underbrace{\frac{670}{19}}_{\text{segunda}} + \cdots + \underbrace{\frac{670}{1}}_{\text{última}} = 2410 \text{ láminas} = \$1'010.000.$$

4. te salga la última que te falta?

$$\frac{670}{1} = 670 \text{ láminas} = \$280.000.$$

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum? 4747 láminas = \$1'990.000

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. te salga todo el álbum? | 4747 láminas = \$1'990.000 |
| 2. sólo te falten 100? | 1271 láminas = \$530.000 |

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum? 4747 láminas = \$1'990.000
2. sólo te falten 100? 1271 láminas = \$530.000
3. te salga la última? la favorita? 670 láminas = \$280.000.

Cuánto me costó a mi?...

1. me salga todo el álbum?

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 1. te salga todo el álbum? | 4747 láminas = \$1'990.000 |
| 2. sólo te falten 100? | 1271 láminas = \$530.000 |
| 3. te salga la última? la favorita? | 670 láminas = \$280.000. |

Cuánto me costó a mí?...

- | | |
|----------------------------|-------------------|
| 1. me salga todo el álbum? | no lo voy a hacer |
|----------------------------|-------------------|

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 1. te salga todo el álbum? | 4747 láminas = \$1'990.000 |
| 2. sólo te falten 100? | 1271 láminas = \$530.000 |
| 3. te salga la última? la favorita? | 670 láminas = \$280.000. |

Cuánto me costó a mí?...

- | | |
|----------------------------|-------------------|
| 1. me salga todo el álbum? | no lo voy a hacer |
|----------------------------|-------------------|

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 1. te salga todo el álbum? | 4747 láminas = \$1'990.000 |
| 2. sólo te falten 100? | 1271 láminas = \$530.000 |
| 3. te salga la última? la favorita? | 670 láminas = \$280.000. |

Cuánto me costó a mi?...

- | | |
|----------------------------|-------------------|
| 1. me salga todo el álbum? | no lo voy a hacer |
| 2. sólo me falten 100? | |

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum? 4747 láminas = \$1'990.000
2. sólo te falten 100? 1271 láminas = \$530.000
3. te salga la última? la favorita? 670 láminas = \$280.000.

Cuánto me costó a mi?...

1. me salga todo el álbum? no lo voy a hacer
2. sólo me falten 100? 1275 láminas = \$10.000

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum? 4747 láminas = \$1'990.000
2. sólo te falten 100? 1271 láminas = \$530.000
3. te salga la última? la favorita? 670 láminas = \$280.000.

Cuánto me costó a mi?...

1. me salga todo el álbum? no lo voy a hacer
2. sólo me falten 100? 1275 láminas = \$10.000
3. me salga la favorita?

Cuánto cuesta comprar paquetes hasta que...

1. te salga todo el álbum? 4747 láminas = \$1'990.000
2. sólo te falten 100? 1271 láminas = \$530.000
3. te salga la última? la favorita? 670 láminas = \$280.000.

Cuánto me costó a mí?...

1. me salga todo el álbum? no lo voy a hacer
2. sólo me falten 100? 1275 láminas = \$10.000
3. me salga la favorita? 1 lámina = \$0.

Pero la gracia es llenarlo con amigas/os!

Costo de llenar el álbum solo: 4747 láminas = \$1'990.000

Costo de llenar el álbum con A amigas/os muy buena gente:

Pero la gracia es llenarlo con amigas/os!

Costo de llenar el álbum solo: 4747 láminas = \$1'990.000

Costo de llenar el álbum con A amigas/os muy buena gente:

$$\frac{670}{A} \int_0^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^A}{1 \cdot 2 \cdots A}}{e^x} \right)^{670} \right] dx$$

Pero la gracia es llenarlo con amigas/os!

Costo de llenar el álbum solo: **4747 láminas = \$1'990.000**

Costo de llenar el álbum con A amigas/os muy buena gente:

$$\frac{670}{A} \int_0^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^A}{1 \cdot 2 \cdots A}}{e^x} \right)^{670} \right] dx$$

# amigos	# láminas	precio
0	4747	\$1'990.000
1	3219	\$1'350.000
5	2050	\$860.000
10	1563	\$660.000
20	1262	\$530.000
50	1025	\$430.000
∞	670	\$280.000

Muchas gracias!