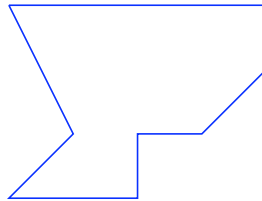


Pflasterungen*

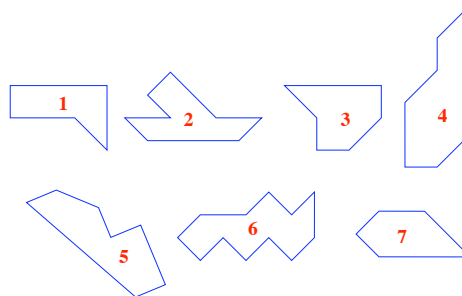
Federico Ardila[†] Richard P. Stanley[‡]

1 Einleitung.

Betrachten wir folgendes Puzzle. Das Ziel ist, das Gebiet

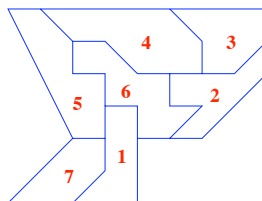


mit den folgenden sieben „Pflastersteinen“ zu überdecken:



Das Gebiet muss vollständig überdeckt werden, ohne Überlappungen. Es ist erlaubt, die sieben Teile beliebig zu verschieben oder zu drehen, aber jedes Teil muss genau einmal verwendet werden.

Um das Problem zu lösen kann man mit der Beobachtung anfangen, dass einige der Teile sehr schön in bestimmte Ecken des Gebiets passen. Die korrekte Lösung — im nächsten Bild dargestellt — kann man aber wirklich nur durch Versuch und Irrtum finden.



*Dieser Aufsatz basiert auf einer “Clay Public Lecture” des zweiten Autors auf dem IAS/Park City Mathematics Institute im Juli 2004. Übersetzung: Günter M. Ziegler, TU Berlin und MATHEON

[†]Supported by the Clay Mathematics Institute.

[‡]Partially supported by NSF grant #DMS-9988459, and by the Clay Mathematics Institute as a Senior Scholar at the IAS/Park City Mathematics Institute.

Aus diesem Grund ist das Puzzle, obwohl es eine nette Herausforderung darstellt, mathematisch nicht wirklich interessant.

Auf jeden Fall ist das Puzzle ein Beispiel eines *Pflasterungsproblems*. Ein Pflasterungsproblem verlangt, dass wir ein gegebenes Gebiet mit einer gegebenen Menge von Pflastersteinen überdecken müssen, vollständig und ohne Überlappungen. Solch eine Überdeckung nennt man eine *Pflasterung*. Natürlich werden wir uns im Folgenden auf bestimmte Gebiete und Pflastersteine konzentrieren, die besonders mathematisch interessante Probleme ergeben.

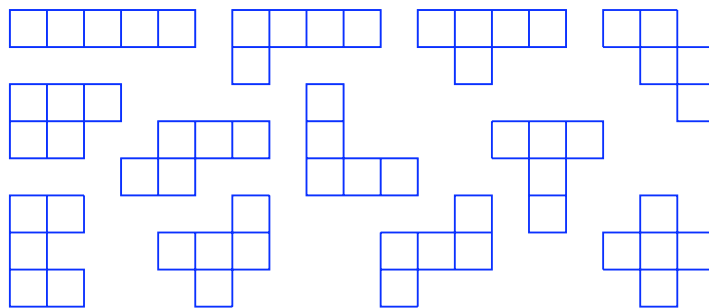
Für jedes Gebiet und eine gegebene Menge von Pflastersteinen kann man viele verschiedene Fragen stellen. Im Folgenden befassen wir uns unter anderem mit den folgenden Fragen:

- Gibt es eine Pflasterung?
- Wie viele Pflasterungen gibt es?
- Wie viele Pflasterungen gibt es ungefähr?
- Ist es einfach, eine Pflasterung zu finden?
- Ist es einfach, zu beweisen, dass es keine Pflasterung gibt?
- Ist es einfach, jemanden zu überzeugen, dass es keine Pflasterung gibt?
- Wie sieht eine „typische“ Pflasterung aus?
- Gibt es Beziehungen zwischen den verschiedenen Pflasterungen?

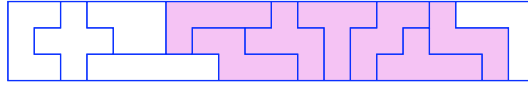
Wir werden auch einige „unendliche Probleme“ betrachten. Bei diesen geht es um die Pflasterung eines endlichen Gebiets mit unendlich vielen Pflastersteinen, oder um die Pflasterung der ganzen Ebene mit endlich vielen verschiedenen Steinen.

2 Gibt es eine Pflasterung?

Nur durch Hinschauen ist es sicher nicht immer leicht zu entscheiden, ob es für ein gegebenes Gebiet und eine Menge von Pflastersteinen eine Pflasterung gibt. Das Puzzle in Abschnitt 1 ist eine solche Situation. Betrachten wir jetzt ein ähnliches Puzzle, in dem die Menge der Pflastersteine mathematisch interessanter ist.

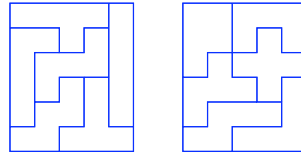


Ein *Pentomino* ist eine Menge von fünf Einheitsquadraten, die Seite-an-Seite aneinander gelegt sind. Pentominos darf man beliebig drehen, spiegeln oder verschieben. Die Abbildung zeigt die zwölf verschiedenen Pentominos. Ihre Gesamtfläche ist 60, und deswegen kann man z.B. fragen: Ist es möglich, ein 3×20 -Rechteck so zu pflastern, dass jedes Pentomino genau einmal verwendet wird?



Dieses Puzzle hat mindestens zwei Lösungen. Eine wird hier gezeigt. Eine andere Lösung erhält man, wenn man den schraffierten Block um 180° dreht. Sehr viel mehr Zeit braucht man, um sich zu überzeugen, dass diese beiden Pflasterungen (bis auf Rotation und Reflektion) die einzigen beiden Lösungen darstellen.

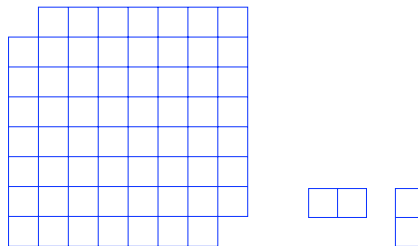
Man kann auch fragen, ob man zwei 6×5 -Rechtecke mit genau einem Exemplar jedes Pentominos überdecken kann. Das geht nur auf eine einzige Art, die unten gezeigt wird. Das Problem ist durch die Eindeutigkeit der Lösung sehr viel interessanter (und schwieriger).



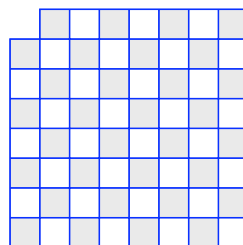
Wegen dieser Lösung kann man sich vorstellen, dass es etliche Pflasterungen eines 6×10 -Rechtecks durch die zwölf Pentominos gibt. Vermutlich kann man die Anzahl dieser Pflasterungen nicht leicht voraussagen. Eine vollständige Computersuche hat herausgefunden, dass es genau 2339 solche Pflasterungen gibt.

Diese Fragen ergeben hübsche Puzzles, aber sie sind nicht die Art interessanter mathematischer Probleme, nach denen wir suchen. Um zu zeigen, was wir damit meinen, betrachten wir ein Problem, das oberflächlich ganz ähnlich aussieht, aber gleichzeitig mathematischen Argumenten sehr viel zugänglicher ist.

Wir entfernen zwei gegenüberliegende Ecken eines 8×8 Schachbretts, und fragen: Ist es möglich, den Rest des Schachbretts mit 31 Dominos zu überdecken?

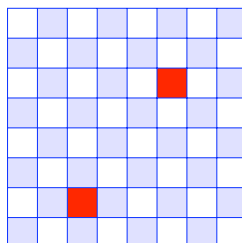


Unser Schachbrett wäre natürlich kein Schachbrett, wenn seine Felder nicht abwechselnd schwarz und weiß eingefärbt wären. Es stellt sich heraus, dass diese Färbung für die Antwort auf unsere Frage entscheidend ist.

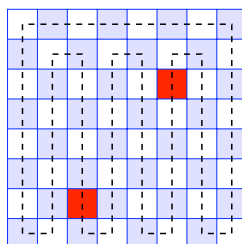


Dafür beobachten wir, dass ein Domino, ganz egal wo wir ihn platzieren, auf jeden Fall ein weißes und ein schwarzes Feld überdeckt. Daher überdecken 31 Dominos genau 31 schwarze und 31 weiße Felder. Unser Brett hat aber insgesamt 32 schwarze und 30 weiße Felder, also gibt es *keine* Pflasterung. Dies ist ein einfaches Beispiel für ein *Färbungsargument*; solche Argumente sind recht häufig in Beweisen, dass bestimmte Pflasterungen unmöglich sind.

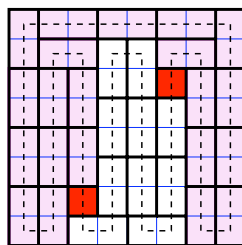
Eine natürliche Variante des Problems ist, dass wir jetzt ein schwarzes und ein weißes Feld von dem Schachbrett entfernen. Unser Brett hat danach die gleiche Anzahl von schwarzen und von weißen Feldern; kann man es mit Dominos überdecken?



Wir wollen zeigen, dass die Antwort *Ja* ist, unabhängig davon, welches schwarze und welches weiße Feld wir entfernen. Dafür betrachten wir einen geschlossenen Pfad, der alle Felder des Schachbretts überdeckt, wie in der nächsten Zeichnung.

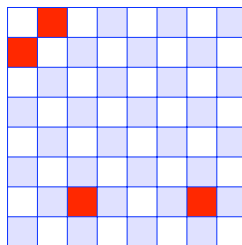


Nun folgen wir diesem Pfad, beginnend mit dem Feld direkt nach dem „schwarzen Loch“ auf dem Schachbrett. Das erste und das zweite Feld auf dem Pfad können wir mit einem Domino überdecken; sie sind weiß bzw. schwarz. Dann bedecken wir das dritte und vierte Feld mit einem Domino; sie sind wieder weiß bzw. schwarz. Dies setzen wir fort, bis der Pfad das zweite Loch auf dem Schachbrett erreicht. Glücklicherweise ist das zweite Loch weiß, so dass es keine Lücke gibt zwischen dem letzten Domino, den wir setzen können, und diesem Loch. Daher können wir das Loch überspringen, und überdecken auch den Rest des Pfades mit aufeinander folgenden Dominos. Wenn der Pfad zum ersten Loch zurückkehrt, dann gibt es wieder keine Lücke zwischen dem letzten Domino und dem Loch. Daher ist das Brett jetzt vollständig mit Dominos überdeckt. Unser Bild illustriert die Prozedur.



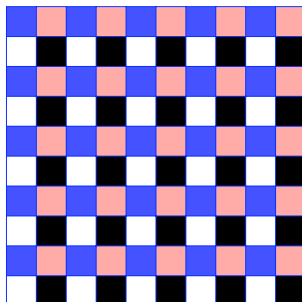
Was passiert, wenn wir *zwei* schwarze Felder und *zwei* weiße Felder entfernen? Wenn wir die vier Felder in einer Ecke des Schachbretts entfernen, dann gibt es offensichtlich eine Lösung.

Andererseits gibt es in dem Beispiel unten keine Lösung, weil offenbar kein Domino das linke obere Quadrat überdecken kann.

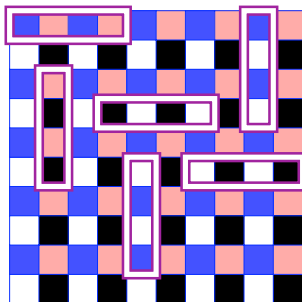


Diese Frage ist offensichtlich komplizierter als die vorherige. Das Problem, die Teilbretter eines Schachbretts zu beschreiben, die man mit Dominos überdecken kann, führt zu vielen hübschen mathematischen Ergebnissen. Wir werden dazu in Abschnitt 5 mehr zu sagen haben.

Betrachten wir jetzt ein komplizierteres Beispiel eines Färbungsarguments, das zeigt, dass ein 10×10 -Brett *nicht* mit 1×4 -Rechtecken gepflastert werden kann.



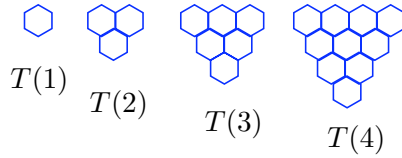
Die übliche Schachbrettfärbung gibt uns keine Information über die Existenz einer solchen Pflasterung. Statt dessen verwenden wir vier Farben, wie in der Zeichnung oben. Jedes 1×4 -Rechteck, das wir auf dem Brett platzieren, wird eine *gerade* Anzahl (möglicherweise Null) von Feldern jeder Farbe überdecken.



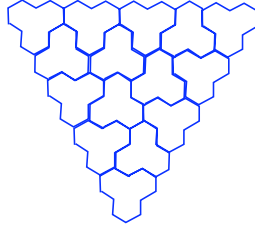
Wenn es nun eine Pflasterung des Brettes gäbe, so müsste die Gesamtzahl der Felder jeder Farbe gerade sein. Es gibt aber 25 Felder jeder Farbe, also ist eine Pflasterung unmöglich.

Mit diesen Beispielen im Kopf können wir viele ähnliche Situationen finden, in denen eine bestimmte Färbung des Spielfelds eine Pflasterung unmöglich macht. Wir besprechen jetzt aber ein Pflasterungsproblem, das man nicht mit einem solchen Färbungsargument lösen kann.

Dazu betrachten wir das Gebiet $T(n)$, das aus einer dreieckigen Anordnung von $n(n+1)/2$ gleichgroßen regulären Sechsecken besteht.



Nennen wir $T(2)$ ein *Dreihex*. Wir wollen wissen, für welche Werte von n man $T(n)$ mit Dreihex-Pflastersteinen pflastern kann. Für $T(9)$ gibt es z. B. eine solche Pflasterung.



Weil jedes Dreihex drei Sechsecke überdeckt, kann es eine solche Pflasterung nur geben, wenn $n(n+1)/2$ ein Vielfaches von 3 ist. Das erklärt aber nicht, warum Gebiete wie $T(3)$ und $T(5)$ keine Pflasterungen haben.

Conway [22] hat gezeigt, dass das Brett $T(n)$ dann und nur dann mit Dreihex-Steinen gepflastert werden kann, wenn $n = 12k, 12k + 2, 12k + 9$ oder $12k + 11$ für ein $k \geq 0$. Die kleinsten Werte von n , für die $T(n)$ gepflastert werden kann, sind 0, 2, 9, 11, 12, 14, 21, 23, 24, 26, 33 und 35. Conways Beweis verwendet eine bestimmte *nichtabelsche* Gruppe. Diese sammelt Information über die Pflasterung, die keine Färbung entdecken kann, wobei Färbungsargumente immer unter Verwendung *abelscher* Gruppen formuliert werden können. Man kann in diesem Fall wirklich beweisen, dass kein Färbungsargument das Conway-Resultat liefern kann [17].

3 Pflasterungen zählen, exakt.

Sobald wir wissen, dass ein bestimmtes Pflasterungsproblem gelöst werden kann, können wir natürlich weitergehen und fragen: Wie viele Lösungen gibt es?

Wie wir schon gesehen haben, gibt es 2339 Möglichkeiten (bis auf Symmetrie) ein 6×10 -Rechteck zu pflastern, wenn man dabei jedes der 12 Pentominos genau einmal verwenden soll. Es ist vielleicht interessant, dass die Anzahl so groß ist, aber die genaue Antwort ist nicht wirklich interessant, insbesondere, weil sie durch Abzählen mit dem Computer gefunden wurde.

Das erste wesentliche Ergebnis über das Abzählen von Pflasterungen wurde 1961 unabhängig von Fisher und Temperley [8] und von Kasteleyn [14] erzielt. Sie fanden heraus, dass die Anzahl der Pflasterungen eines $2m \times 2n$ -Rechtecks mit $2mn$ Dominos genau gleich

$$4^{mn} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

ist.

Dabei bezeichnet \prod ein *Produkt* und π bezeichnet 180° , so dass man die Anzahl erhält als 4^{mn} mal ein Produkt von Summen von zwei Quadraten von Kosinus-Werten, wie etwa

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = 0,3090169938 \dots$$

Das ist eine bemerkenswerte Formel! Die Anzahlen, die wir da multiplizieren, sind keine ganzen Zahlen; in den meisten Fällen sind sie nicht einmal rational. Wenn wir die Zahlen multiplizieren, so erhalten wir wie durch Zauberhand eine ganze Zahl, und diese Anzahl ist genau die Zahl der Dominopfasterungen des $2m \times 2n$ -Rechtecks.

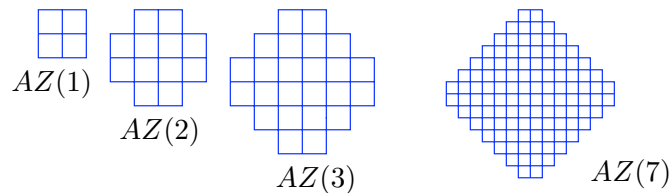
Zum Beispiel erhalten wir für $m = 2$ und $n = 3$:

$$\begin{aligned} & 4^6 (\cos^2 36^\circ + \cos^2 25,71 \dots^\circ) (\cos^2 36^\circ + \cos^2 51,43 \dots^\circ) (\cos^2 36^\circ + \cos^2 77,14 \dots^\circ) \times \\ & (\cos^2 72^\circ + \cos^2 25,71 \dots^\circ) (\cos^2 72^\circ + \cos^2 51,43 \dots^\circ) (\cos^2 72^\circ + \cos^2 77,14 \dots^\circ) \\ & = 4^6 (1,4662 \dots)(1,0432 \dots)(0,7040 \dots)(0,9072 \dots)(0,4842 \dots)(0,1450 \dots) = 281. \end{aligned}$$

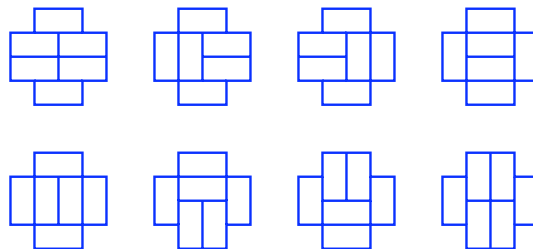
Skeptische Leser mit sehr viel übriger Zeit sind eingeladen, die Dominopfasterungen eines 4×6 -Rechtecks aufzuzählen und zu überprüfen, dass es wirklich genau 281 von ihnen gibt.

Wir sollten wohl zumindest ein paar Worte über die Beweise für dieses Resultat verlieren. Kasteleyn hat die Antwort durch eine bestimmte Pfaff'sche Determinante ausgedrückt, und ihre Berechnung auf die Auswertung einer damit zusammenhängenden Determinante reduziert. Fischer und Temperley haben einen anderen Beweis angegeben, mit Hilfe der Transfermatrix-Methode, einer Technik, die sehr oft in statistischer Mechanik und abzählender Kombinatorik verwendet wird.

Es gibt eine weitere Familie von Gebieten, für die die Anzahl der Dominopfasterungen überraschend einfach ist. Den Aztekendiamanten $AZ(n)$ erhält man, indem man Zeilen der Längen $2, 4, \dots, 2n, 2n, \dots, 4, 2$ symmetrisch übereinander legt, wie hier gezeigt.



Der Aztekendiamant der Ordnung 2, $AZ(2)$, hat die folgenden acht Pflasterungen:



Elkies, Kuperberg, Larsen und Propp [6] haben gezeigt, dass die Anzahl der Dominopfasterungen von $AZ(n)$ genau $2^{n(n+1)/2}$ ist. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Pflasterungen von $AZ(n)$ für die ersten paar Werte von n .

1	2	3	4	5	6
2	8	64	1024	32768	2097152

Wegen $2^{(n+1)(n+2)/2} / 2^{n(n+1)/2} = 2^{n+1}$ könnte man versuchen, jedem Aztekendiamant der Ordnung n genau 2^{n+1} Dominopfasterungen des Aztekendiamanten der Ordnung $n+1$ zuzuordnen, so dass jede Pflasterung der Ordnung $n+1$ genau einmal auftritt. Dies macht einer der

vier ursprünglichen Beweise, die man in [6] findet; inzwischen gibt es ungefähr zwölf Beweise des Resultats. Keiner von ihnen ist wirklich so einfach, wie es die Antwort $2^{n(n+1)/2}$ vielleicht nahelegt.

4 Pflasterungen zählen, ungefähr.

Manchmal interessiert man sich für eine Schätzung für die Anzahl der Pflasterungen eines bestimmten Gebiets. In manchen Fällen fragen wir danach, weil wir keine genaue Formel finden können. In anderen Fällen ziehen wir — etwas paradoxerweise — eine approximative Formel vielleicht sogar einer exakten Formel vor. Ein gutes Beispiel ist die Anzahl der Pflasterungen eines Rechtecks. Wir haben eine exakte Formel für diese Anzahl, aber die Formel gibt uns eigentlich keinen Hinweis darauf, wie groß die Anzahl wirklich ist.

Nachdem die Aztekendiamanten ja „gedrehte“ Quadrate sind, könnten wir z. B. fragen: Wie vergleicht sich die Anzahl der Dominopflasterungen eines Aztekendiamanten mit der eines Quadrats von ungefähr derselben Größe? Bei Experimenten mit solchen Gebieten beobachtet man, dass ein Domino am Rand eines Aztekendiamanten fast immer die Position für mehrere andere Dominos festlegt. So etwas passiert im Quadrat eigentlich fast nie. Deswegen könnte man vermuten, dass das Quadrat mehr Pflasterungen als der entsprechende Aztekendiamant haben sollte.

Um dies zu quantifizieren, machen wir eine Definition. Wenn ein Gebiet mit N Quadraten insgesamt T Pflasterungen hat, so sagen wir, dass es $\sqrt[N]{T}$ *Freiheitsgrade pro Quadrat* hat. Die Motivation dafür ist grob gesagt die Folgende. Wenn sich jedes Quadrat unabhängig entscheiden könnte, wie es gerne überdeckt werden will, und wenn es dafür $\sqrt[N]{T}$ Auswahlmöglichkeiten hätte, so wäre die Gesamtzahl der Auswahlmöglichkeiten T .

Der Aztekendiamant $AZ(n)$ besteht aus $N = 2n(n+1)$ Quadraten und er hat $T = 2^{n(n+1)/2}$ Pflasterungen. Daher ist die Anzahl der Freiheitsgrade pro Quadrat in $AZ(n)$ genau

$$\sqrt[N]{T} = \sqrt[4]{2} = 1,189207115\dots$$

Für das $2n \times 2n$ Quadrat ist die genaue Formel für die Anzahl der Pflasterungen ziemlich unbefriedigend, weil sie uns gar keinen Anhaltspunkt dafür gibt, wie groß die Anzahl wirklich ist. Glücklicherweise kann man, wie Kasteleyn, Fisher und Temperley beobachtet haben, ihre Formel verwenden, um zu zeigen, dass die Anzahl der Dominopflasterungen des $2n \times 2n$ Quadrats ungefähr C^{4n^2} ist, für $C = e^{G/\pi} = 1,338515152\dots$. Hier bezeichnet G die *Catalan'sche Konstante*, die man als

$$G := 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = 0,9159655941\dots$$

definieren kann.

Unsere Intuition war also richtig: Das quadratische Brett ist „einfacher“ zu pflastern als der Aztekendiamant, in dem Sinne, dass es ungefähr 1,3385... Freiheitsgrade pro Quadrat hat, der Aztekendiamant aber nur 1,1892...

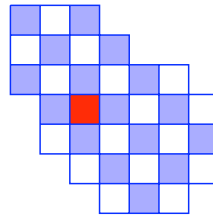
5 Beweisen, dass es keine Pflasterung gibt.

Wie wir in Abschnitt 2 gesehen haben, gibt es viele Pflasterungsprobleme, für die es eine Pflasterung *gibt*, es aber schwer ist, eine zu *finden*. Wenn wir eine gefunden haben, ist es aber sehr leicht, jemanden zu überzeugen, dass es eine gibt: Wir können einfach die Pflasterung herzeigen!

Können wir etwas Ähnliches tun in dem Fall, dass es keine Pflasterung gibt? Wie wir in Abschnitt 2 gesehen haben, kann es schwer sein zu zeigen, dass es keine Pflasterung gibt. Stimmt es, aber, dass es in diesem Fall einen (vielleicht schwer-zu-findenden aber) leicht-herzeigbaren Beweis dafür gibt?

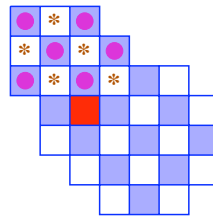
In einem gewissen Sinne, den man formal präzisieren kann, ist die Antwort auf diese Frage im allgemeinen fast sicher *Nein*, sogar für Pflasterungen von Gebieten nur mit Hilfe von 1×3 -Rechtecken [1]. Überraschenderweise ist die Antwort aber *Ja* für Dominopflasterungen!

Bevor wir das Resultat in seiner vollen Allgemeinheit angeben, wollen wir es in einem Beispiel herzeigen. Betrachten Sie das folgende Gebiet, das aus 16 schwarzen und 16 weißen Quadraten besteht. (Die dunkle/rote Zelle ist ein Loch in dem Gebiet.)



Man kann sich durch Fallunterscheidung überzeugen, dass dieses Gebiet nicht durch Dominos überdeckt werden kann. Wenn wir dies nun wissen, gibt es dann eine einfachere, schnellere Möglichkeit, jemanden zu überzeugen, dass dies der Fall ist?

Eine Möglichkeit dafür ist die Folgende: Betrachten wir die sechs schwarzen Quadrate, die mit • markiert sind. Diese sind zu insgesamt fünf weißen Quadraten benachbart, die mit * markiert sind. Wir würden sechs verschiedene Dominos brauchen, um die sechs markierten schwarzen Quadrate zu bedecken, und jedes von diesen müsste eines der fünf markierten weißen Quadrate überdecken. Das macht eine Pflasterung unmöglich.



Philip Hall [12] hat gezeigt, dass es für *jedes* Gebiet, das man nicht mit Dominos überdecken kann, einen solchen Unmöglichkeitbeweis gibt. Genauer kann man dann immer k Zellen einer Farbe finden, die insgesamt weniger als k Nachbarn haben. Um also jemanden zu überzeugen, dass sich ein bestimmtes Brett nicht pflastern lässt, können wir ihm einfach die k Zellen und ihre Nachbarn zeigen!

Das Ergebnis von Hall ist viel allgemeiner; man kennt es als den *Heiratssatz*. Der Name kommt daher, dass man sich die schwarzen Zellen als Männer und die weißen Zellen als Frauen denkt. Diese Männer und Frauen sind nicht sehr abenteuerlustig: Sie wollen immer nur einen

ihrer Nachbarn heiraten. Wir sind die Kuppler; wir versuchen eine Zuordnung zu finden, in der jeder glücklich verheiratet werden kann. Der Heiratssatz sagt uns genau, wann ein solches Arrangement existiert.

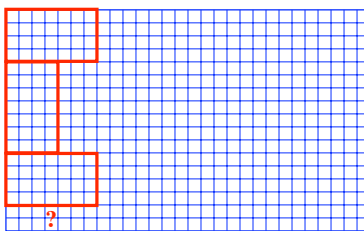
6 Pflasterung von Rechtecken mit Rechtecken.

Eines der naheliegenden Szenarien für Pflasterungen ergibt sich, wenn ein Rechteck mit kleineren Rechtecken gepflastert werden soll. Wir präsentieren jetzt drei schöne Ergebnisse von dieser Form.

Die erste Frage, die wir verfolgen wollen, ist: Wann kann man ein $m \times n$ -Rechteck mit $a \times b$ -Rechtecken (beliebiger Orientierung) pflastern? Es liegt nahe, die Diskussion mit ein paar Beispielen zu beginnen.

Kann ein 7×10 -Rechteck mit 2×3 -Rechtecken überdeckt werden? Das ist natürlich unmöglich, weil jedes 2×3 -Rechteck 6 Quadrate enthält, während die Anzahl der Quadrate in einem 7×10 -Rechteck 70 ist, und das ist kein Vielfaches von 6. Dafür, dass eine Pflasterung möglich ist, muss die Anzahl der Zellen des großen Rechtecks durch die Anzahl der Zellen des kleinen Rechtecks teilbar sein. Reicht diese Bedingung aus?

Probieren wir, ein 17×28 -Rechteck mit 4×7 -Rechtecken zu pflastern. Das Argument des vorigen Absatzes greift hier nicht; es sagt nur, dass man genau 17 Pflastersteine braucht. Versuchen wir erst mal, die linkeste Spalte zu überdecken.



Unser erster Versuch ist fehlgeschlagen. Wir haben die ersten 4 Zellen dieser Spalte mit dem ersten Pflasterstein überdeckt, die folgenden 7 mit dem zweiten, und die folgenden 4 Zellen mit dem dritten Pflasterstein, und danach ist kein Platz mehr da für den vierten Pflasterstein, um die beiden letzten Zellen zu überdecken. In der Tat, wenn wir es schaffen, die 17 Zellen der ersten Spalte mit 4×7 Pflastersteinen zu überdecken, dann haben wir 17 als eine Summe von 4en und 7en geschrieben. Aber man überprüft ganz leicht, dass das nicht möglich ist, also gibt es keine Pflasterung. Also haben wir einen zweiten Grund gefunden, warum eine Pflasterung nicht existieren könnte: Es kann unmöglich sein, die erste Zeile oder Spalte zu überdecken, weil entweder m oder n nicht als Summe von Vielfachen von a und b geschrieben werden kann.

Ist es jetzt möglich, ein 10×15 -Rechteck mit 1×6 -Rechtecken zu überdecken? 150 ist ein Vielfaches von 6, und sowohl 10 als auch 15 kann als Summe von 1en und 6en geschrieben werden. Das Pflasterungsproblem ist aber trotzdem wieder unmöglich!

Die volle Antwort auf unsere Frage wurde von de Bruijn [4] und Klarner [15] gegeben. Sie haben bewiesen, dass man ein $m \times n$ -Rechteck dann und nur dann mit $a \times b$ -Rechtecken pflastern kann, wenn

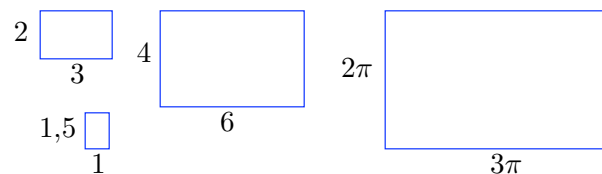
- mn ein Vielfaches von ab ist,

- die erste Zeile und Spalte überdeckt werden können, d.h., sowohl m als auch n kann als Summe von Vielfachen von a und b geschrieben werden, und
- entweder m oder n durch a teilbar ist, und entweder m oder n durch b teilbar ist.

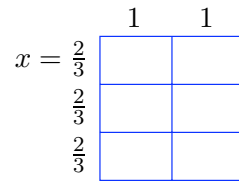
Weil weder 10 noch 15 durch 6 teilbar ist, kann ein 10×15 -Rechteck *nicht* mit 1×6 -Rechtecken gepflastert werden. Inzwischen gibt es viele Beweise für den Satz von de Bruijn und Klarner. Ein besonders eleganter verwendet Eigenschaften der komplexen Einheitswurzeln [4] [15]. Für eine interessante Variante mit vierzehn (!) Beweisen verweisen wir auf [23].

Das zweite Problem, das wir besprechen wollen, ist wie folgt. Sei $x > 0$, z.B. $x = \sqrt{2}$. Kann ein Quadrat mit endlich vielen Rechtecken gepflastert werden, die zu einem $1 \times x$ -Rechteck *ähnlich* sind (aber beliebige Orientierung haben dürfen)? In anderen Worten, kann man ein Quadrat mit endlich vielen Rechtecken der Form $a \times ax$ pflastern (wobei die a unterschiedlich sein dürfen)?

Für $x = \frac{2}{3}$ können wir z.B. die folgenden Pflastersteine verwenden:

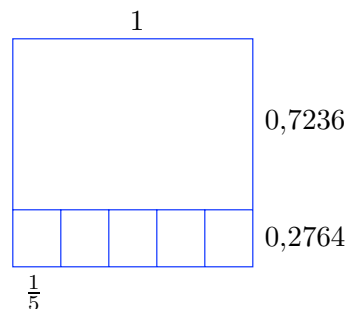


Sie haben alle dieselbe Form, aber unterschiedliche Größe. In diesem Fall brauchen wir jedoch nur eine Größe, weil wir ein 2×2 -Quadrat mit sechs $1 \times \frac{2}{3}$ -Rechtecken pflastern können.



Aus Gründen, die später klar werden, weisen wir darauf hin, dass $x = \frac{2}{3}$ die Gleichung $3x - 2 = 0$ erfüllt. Wir beobachten auch, dass eine ähnliche Konstruktion für jede positive rationale Zahl $x = \frac{r}{s}$ funktionieren wird.

Versuchen wir jetzt, eine Pflasterung eines Quadrats mit ähnlichen Rechtecken zu konstruieren, die mindestens zwei verschiedene Größen haben. Da gibt es die Pflasterung, die näherungsweise durch das folgende Bild beschrieben wird. Die Rechtecke sind ähnlich, weil $0,7236 \dots / 1 = 0,2/0,2764 \dots$.



Wie haben wir diese Lösung gefunden? Nehmen wir an, dass wir ein Quadrat bilden wollen, indem wir fünf Kopien eines Rechtecks in eine Zeile setzen und dann darüber ein größeres

Rechteck derselben Form aber gedreht, wie hier gezeigt. Nehmen wir an, dass wir wissen, dass das Quadrat Seitenlänge 1 hat, aber dass wir die Maße der Rechtecke nicht kennen. Seien die Maße des großen Rechtecks durch $1 \times x$ gegeben. Dann ist die Höhe jedes kleinen Rechtecks genau $1 - x$. Weil die kleinen Rechtecke dem großen ähnlich sind, ist ihre Breite gleich $x(1 - x)$. So, wie sie in der Pflasterung nebeneinander liegen, ist ihre Breite insgesamt $5x(1 - x)$, und dass sollte genau 1 ergeben.

Damit liefert das obige Bild eine Lösung unseres Problems, wenn x die Gleichung $5x(1 - x) = 1$ erfüllt, was wir auch als $5x^2 - 5x + 1 = 0$ schreiben können. Ein Wert von x , der diese Gleichung erfüllt, ist

$$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = 0,7236067977 \dots,$$

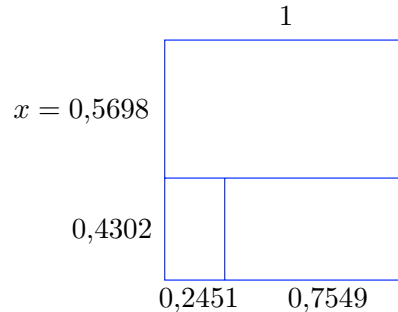
was die Pflasterung ergibt, die oben gezeigt wurde.

Das quadratische Polynom hat aber zwei Wurzeln, die andere ist

$$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} = 0,2763932023 \dots,$$

und sie liefert eine andere Pflasterung, die auch die Bedingungen des Problems erfüllt.

Es kommt vielleicht unerwartet, dass unser Pflasterungsproblem eine Lösung für so komplizierte Werte von x hat. Die Situation kann aber noch sehr viel trickreicher werden. Dafür suchen wir uns eine Pflasterung, die drei ähnliche Rechtecke von unterschiedlicher Größe verwendet.



Nehmen wir an, dass hier das größte Rechteck die Dimension $1 \times x$ hat. Ganz so wie im vorherigen Argument findet wir, dass x hier die Gleichung

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

erfüllt. Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$x = 0,5698402910 \dots$$

Für diesen Wert von x hat das Pflasterungsproblem die oben gezeigte Lösung. Das Polynom selbst hat Grad 3, also noch zwei weitere Lösungen. Diese sind ungefähr $0,215 + 1,307\sqrt{-1}$ und $0,215 - 1,307\sqrt{-1}$. Diese beiden komplexen Zahlen liefern keine reelle Lösung für das Pflasterungsproblem.

Für den allgemeinen Fall haben Laczkovich und Szekeres [16] und Freiling und Rinne [9] unabhängig voneinander die folgende bemerkenswerte Antwort auf das Problem gegeben. Eine Quadrat kann dann und nur dann mit endlich vielen Rechtecken gepflastert werden, die einem $1 \times x$ -Rechteck ähnlich sind, wenn

- x eine Wurzel eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, und
- für das Polynom von kleinstem Grad, das von x erfüllt wird, jede Wurzel $a + b\sqrt{-1}$ der Bedingung $a > 0$ genügt.

Es ist ziemlich überraschend, dass diese komplexen Wurzeln, die gar keine offensichtliche Beziehung zu dem Pflasterungsproblem zu haben scheinen, in der Tat eine fundamentale Rolle für es spielen. In dem obigen Beispiel ist eine Lösung für ein $1 \times 0,5698\dots$ -Rechteck nur deshalb möglich, weil $0,215\dots$ eine positive Zahl ist. Wir illustrieren das mit ein paar weiteren Beispielen.

Der Wert $x = \sqrt{2}$ erfüllt eine polynomiale Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, nämlich $x^2 - 2 = 0$. Die andere Wurzel der Gleichung ist aber $-\sqrt{2} < 0$. Damit kann man ein Quadrat *nicht* mit endlich vielen Rechtecken pflastern, die zu einem $1 \times \sqrt{2}$ -Rechteck ähnlich sind.

Andererseits erfüllt $x = \sqrt{2} + \frac{17}{12}$ die quadratische Gleichung $144x^2 - 408x + 1 = 0$, deren andere Wurzel $-\sqrt{2} + \frac{17}{12} = 0,002453\dots > 0$ ist. Daher *kann* man ein Quadrat mit endlich vielen Rechtecken pflastern, die einem $1 \times (\sqrt{2} + \frac{17}{12})$ -Rechteck ähnlich sind. *Wie* würden wir das tun?

Ganz ähnlich erfüllt $x = \sqrt[3]{2}$ die Gleichung $x^3 - 2 = 0$. Die anderen beiden Wurzeln dieser Gleichung sind $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$. Wegen $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} < 0$ kann ein Quadrat *nicht* mit endlich vielen Rechtecken gepflastert werden, die zu einem $1 \times \sqrt[3]{2}$ -Rechteck ähnlich sind.

Schließlich sei r/s eine rationale Zahl und sei $x = \frac{r}{s} + \sqrt[3]{2}$. Man kann überprüfen, dass dies immer noch die Wurzel eines kubischen Polynoms ist; seine anderen beiden Wurzeln sind

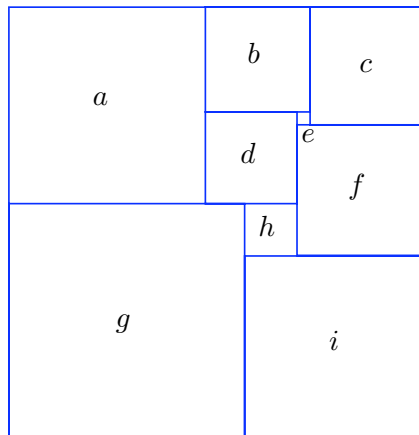
$$\left(\frac{r}{s} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) \pm \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}.$$

Daraus folgt, dass man ein Quadrat dann und nur dann mit endlich vielen Rechtecken pflastern kann, die zu einem $1 \times (\frac{r}{s} + \sqrt[3]{2})$ -Rechteck ähnlich sind, wenn

$$\frac{r}{s} > \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

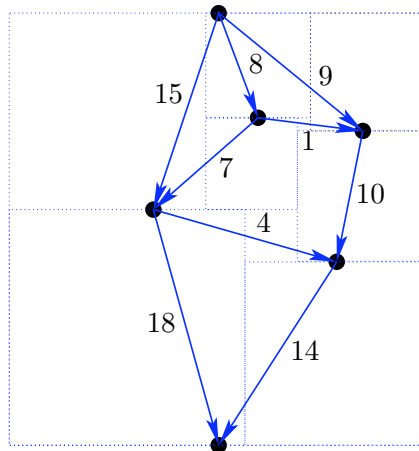
Als nettes Puzzle können Sie sich Ihren Lieblingsbruch $\frac{r}{s}$ auswählen, der größer als $\sqrt[3]{2}/2$ ist, und versuchen, ein Quadrat mit Rechtecken zu pflastern, die einem $1 \times (\frac{r}{s} + \sqrt[3]{2})$ -Rechteck ähnlich sind.

Das dritte Problem, das wir besprechen wollen, ist durch die folgende bemerkenswerte Pflasterung eines Rechtecks durch neun Quadrate angeregt, die alle unterschiedliche Größe haben. (Wir werden sehr bald sehen, wie groß die Quadrate und das Rechteck sein müssen.) Die Lösungen für dieses Problem kennt man auch als *perfekte Pflasterungen*.



Um eine perfekte Pflasterung von Rechtecken zu finden, können wir den Ansatz des vorherigen Problems verwenden. Wir schlagen als erstes eine mögliche Anordnung der Quadrate vor, so wie das Muster oben, ohne zu wissen, welche Größe die Quadrate haben. Wir bezeichnen die Kantenlänge jedes einzelnen Quadrats mit einer Variablen. Für jede horizontale Strecke innerhalb des Rechtecks erstellen wir die folgende Gleichung: Die Gesamtlänge der Quadrate oberhalb der Strecke muss gleich der Gesamtlänge der Quadrate sein, die unten an der Strecke dranhängen. Zum Beispiel ergeben sich für unsere Zeichnung die „horizontalen Gleichungen“ $a + d = g + h$ und $b = d + e$. Genauso ergeben sich „vertikale Gleichungen“ für jede senkrechte Strecke innerhalb des Rechtecks, beispielsweise $a = b + d$ und $d + h = e + f$. Schließlich notieren wir noch Gleichungen, die besagen, dass die obere und die untere Seite des Rechtecks gleich lang sein müssen, und genauso auch die linke und die rechte Seite des Rechtecks. In unserem Fall sind diese Gleichungen $a + b + c = g + i$ und $a + g = c + f + i$. Dann bleibt uns nur noch die Hoffnung, dass das notierte System von linearen Gleichungen eine Lösung hat, und zwar insbesondere eine, für die Werte der Variablen alle positiv und paarweise verschieden sind. Für die oben vorgeschlagene Anordnung hat das Gleichungssystem bis auf Skalierung eine eindeutige Lösung: $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) = (15, 8, 9, 7, 1, 10, 18, 4, 14)$. Das große Rechteck hat dann die Maße 32×33 .

Bemerkenswerterweise hat das Gleichungssystem *immer* eine Lösung, und diese ist bis auf Skalierung eindeutig, für *jede* vorgeschlagene Anordnung der Quadrate. (Leider sind aber die „Seitenlängen“, die sich dabei ergeben, im allgemeinen nicht positiv und verschieden.) Im Jahr 1936 haben Brooks, Smith, Stone und Tutte [2] eine wunderschöne Erklärung für dieses Resultat gegeben. Sie haben einen gerichteten Graphen konstruiert, dessen Ecken den horizontalen Strecken in dem Rechteck entsprechen. Es gibt einen Bogen (eine gerichtete Kante) für jedes kleine Quadrat, die von der oberen horizontalen Kante zur unteren horizontalen Kante führt. Die Zeichnung unten zeigt den entsprechenden Graphen für unsere perfekte Pflasterung des 32×33 -Rechtecks.

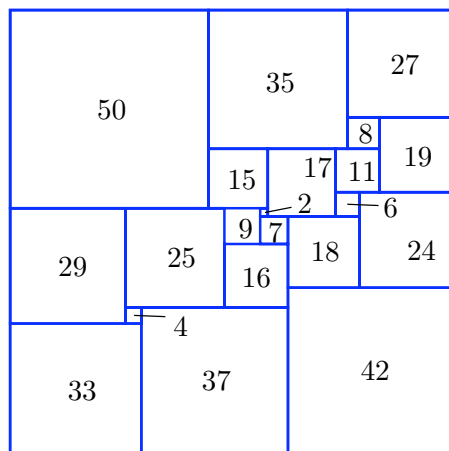


Wir können uns diesen Graphen als elektrisches Netzwerk mit Einheits-Widerständen vorstellen, wobei die Stromstärke in jedem Draht gleich der Seitenlänge des entsprechenden Quadrats in der Pflasterung ist. Die „horizontalen Gleichungen“ für die Kantenlängen des Quadrats entsprechen dann der Stromerhaltung in diesem Netzwerk, und die „vertikalen Gleichungen“ sind äquivalent zum Ohm’schen Gesetz. Damit ist unsere Aussage im Wesentlichen äquivalent zum Kirchhoff’schen Gesetz: Der Fluss in jedem Draht ist eindeutig bestimmt, wenn wir die

Potentialdifferenz zwischen zwei Ecken wissen.

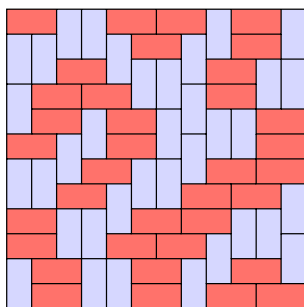
Brooks, Smith, Stone und Tutte waren besonders am Studium von perfekten Pflasterungen von Quadraten interessiert. Dies hat auch eine hübsche Interpretation in der Sprache der Netzwerke: Um eine Pflasterung von Quadraten zu finden, brauchen wir eine zusätzliche lineare Gleichung, die besagt, dass die vertikale und die horizontale Kantenlänge des Rechtecks gleich sind. In der Sprache der elektrischen Netzwerke heißt dies, dass das Netzwerk Gesamtwiderstand 1 hat.

Obwohl die Entsprechung zwischen Pflasterungen und Netzwerken konzeptionell sehr hübsch ist, hilft sie nicht unbedingt dabei, perfekte Pflasterungen von Quadraten, oder auch nur von Rechtecken zu konstruieren. In der Tat hat Stone nach der Entwicklung dieser Theorie eine ganze Zeit lang versucht zu beweisen, dass perfekte Pflasterungen eines Quadrats nicht möglich sind. Roland Sprague hat schließlich 1939 eine konstruiert, wobei ein Quadrat der Kantenlänge 4205 mit 55 verschiedenen Quadraten gepflastert wurde. Seitdem wurde sehr viel Energie und (Computer-)Zeit darauf verwendet, bessere Beispiele zu konstruieren. Duijvestijn und sein Computer [5] haben die eindeutig kleinste perfekte Pflasterung eines Quadrats gefunden, die 21 Quadrate verwendet. Diese Pflasterung wird unten gezeigt. Als Ergebnis einer Computersuche wurde gezeigt, dass jede andere perfekte Pflasterung mehr als 21 Quadrate verwendet.

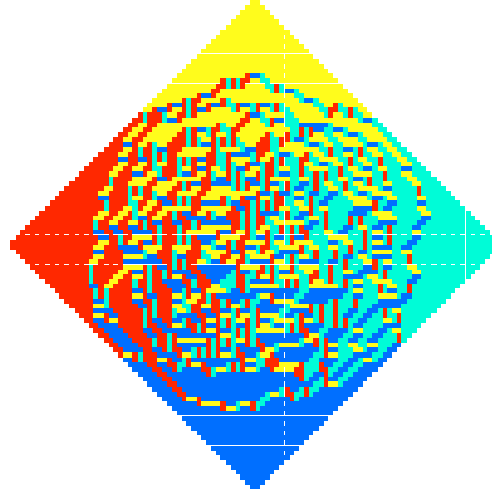


7 Wie sieht eine typische Pflasterung aus?

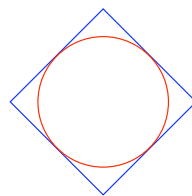
Nehmen wir an, wir zeichnen jede mögliche Lösung für ein Pflasterungsproblem auf ein Blatt Papier, stopfen die Blätter alle in einen Sack und greifen daraus ein Blatt zufällig heraus. Können wir vorhersehen, was wir dann sehen?



Die zufällig Dominopflasterung eines 12×12 -Quadrats, die hier gezeigt wird, mit horizontalen Dominos dunkel und vertikalen Dominos heller, zeigt keine offensichtliche Struktur. Vergleichen Sie dies mit einer zufälligen Pflasterung des Aztekendiamanten der Ordnung 50. Hier sind die horizontalen und die vertikalen Dominos in jeweils zwei unterschiedlichen Schattierungen eingefärbt, nach einer bestimmten Regel, die hier nicht relevant ist. Diese Bilder wurden von Jim Propps Forschungsgruppe über Pflasterungen erstellt.



Dieses sehr hübsche Bild legt es nahe, dass man etwas Interessantes über zufällige Pflasterungen sagen können sollte. Die Pflasterung ist offenbar sehr regelmäßig in den Ecken, und wird immer chaotischer, wenn man sich von den Kanten wegbewegt. Es gibt da ein wohldefiniertes *Gebiet der Regularität*, und wir können seine Form vorhersagen. Jockusch, Propp und Shor [13] haben gezeigt, dass für großes n und für die „meisten“ Dominopflasterungen des Aztekendiamanten $AZ(n)$, das Regularitätsgebiet sich dem Äußeren eines Kreises „annähert“, der die vier Seiten des Quadrats berührt. Ziemlich aufwändige Wahrscheinlichkeitstheorie wird benötigt, um hier die Begriffe „die meisten“ und „annähert“ präzise zu fassen, aber die anschauliche Bedeutung sollte klar sein.



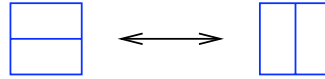
Dieses Resultat ist als der *Polarkreis-Satz* bekannt geworden. Der Tangentialkreis ist der Polarkreis; außerhalb des Kreises ist die Pflasterung „eingefroren“. Viele ähnliche Phänomene sind inzwischen für andere Pflasterungsprobleme beobachtet und (in manchen Fällen) bewiesen worden.

8 Beziehungen zwischen Pflasterungen

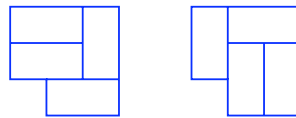
Wenn wir die Menge aller Pflasterungen eines Gebiets studieren, dann ist es oft nützlich, in dieser Menge auf eine gute Art „navigieren“ zu können. Nehmen wir an, wir kennen eine Lösung für ein

Pflasterungsproblem und möchten eine weitere finden. Anstatt neu anzufangen, ist es vermutlich einfacher, eine zweite Lösung zu finden, indem wir die erste leicht abändern. Wir könnten dann versuchen, eine dritte Lösung von der zweiten zu erhalten, dann die vierte Lösung, usw.

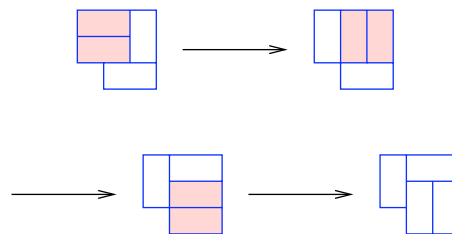
Im Fall von Dominopflasterungen geht das recht einfach. Ein *Flip* in einer Dominopflasterung besteht darin, dass wir die Richtung von zwei Dominos umdrehen, die zusammen ein 2×2 -Quadrat bilden.



Die Flips mag man für eine nur sehr triviale Änderungsmethode für eine Pflasterung halten. Sie ist aber bemerkenswert stark. Betrachten wir die beiden folgenden Pflasterungen eines Gebiets.

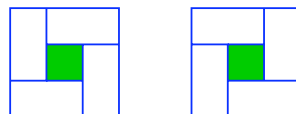


Obwohl sie ganz unterschiedlich aussehen, kann man in der Tat von der einen zur anderen durch eine Folge von einfachen Flips von 2×2 -Blöcken kommen.



Thurston [22] hat gezeigt, dass dies ein allgemeines Phänomen ist. Für *jedes* Gebiet R ohne Löcher kann *jede* Dominopflasterung von R von *jeder* anderen aus durch eine Folge von Flips erreicht werden.

Dieser Dominoflip-Satz hat vielfältige Anwendungen im Studium von Dominopflasterungen. Wir weisen aber darauf hin, dass der Satz für Gebiete mit Löchern falsch sein kann, wie man an dem Beispiel von zwei Pflasterungen eines 3×3 -Quadrats mit einem Loch in der Mitte sieht. Es gibt eine Version des Dominoflip-Satzes für Gebiete mit Löchern von Propp [20], aber die wollen wir hier nicht besprechen.



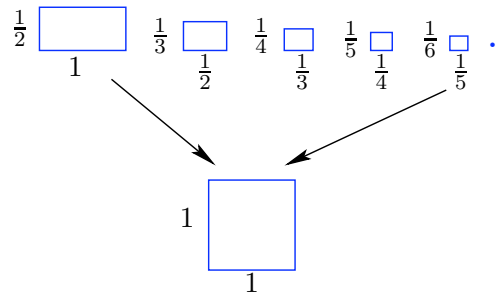
9 Aspekte des Unendlichen.

Wir wenden uns jetzt einigen Pflasterungsfragen zu, in denen beliebig große Gebiete oder beliebig kleine Pflastersteine auftreten.

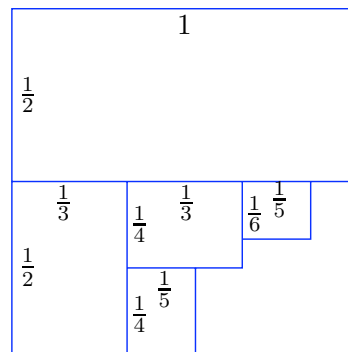
Die erste Frage ist durch die folgende Identität angeregt:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.$$

Betrachten wir die unendlich vielen rechteckigen Pflastersteine der Maße $1 \times \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}, \dots$. Diese Pflastersteine werden kleiner und kleiner, und die obige Gleichung zeigt, dass ihre Gesamtfläche genau 1 ergibt. Können wir ein Einheitsquadrat mit ihnen pflastern, und dabei jeden der Pflastersteine genau einmal verwenden?



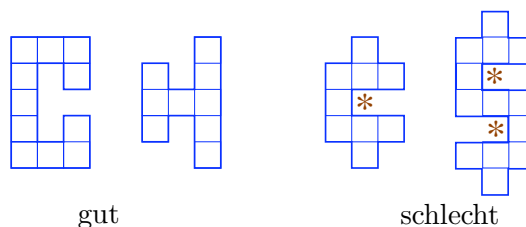
Das scheint ein ziemlich schwieriges Problem zu sein. Ein erster Versuch zeigt, wie die ersten fünf Pflastersteine gut eingefügt werden können. Es ist aber schwierig sich vorzustellen, wie alle Steine in das Quadrat passen sollen, ohne irgendwelche Lücken zu lassen.



Bis heute ist es niemandem gelungen, eine solche Pflasterung zu finden, oder zu beweisen, dass es keine gibt. Paulhus [18] ist dem aber sehr nahe gekommen; er hat einen Weg gefunden, wie man all die Rechtecke in ein Quadrat der Kantenlänge 1,000000001 einpassen kann. Die Packung von Paulhus ist aber keine Pflasterung nach unserer Definition, weil in ihr ja Fläche übrig bleibt.

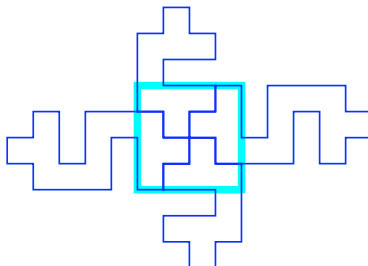
Besprechen wir jetzt ein scheinbar einfaches Pflasterungsproblem, das uns zwingt, unabsehbar große Gebiete zu betrachten. Ein Polyomino ist dabei wieder eine Anordnung von Einheitsquadraten, die Seite-an-Seite aneinander gefügt sind.

Nennen wir dabei eine Menge von Polyominos „gut“ wenn es möglich ist, die ganze Ebene mit dieser Menge von Pflastersteinen zu pflastern, und anderenfalls „schlecht“. Eine gute und eine schlechte Menge von Polyominos sind hier dargestellt:



Es ist leicht zu sehen, warum es unmöglich ist, die ganze Ebene mit der schlechten Menge zu pflastern, die hier gezeigt wird. Wenn wir auch nur einen Pflasterstein fixieren, dann gibt es Einheitsquadrate, die hier mit Sternchen markiert sind, die wir mit keinem weiteren Pflasterstein mehr überdecken können.

Trotzdem können wir immer noch fragen: Wie große quadratische Gebiete kann man mit einer Pflasterung überdecken? Nach ein paar Versuchen finden wir, dass es möglich ist, ein 4×4 -Quadrat zu überdecken.



Es ist aber unmöglich, ein 5×5 -Quadrat zu überdecken: Jeder Versuch, die zentrale Zelle des Quadrats mit einem Pflasterstein zu überdecken, führt auch dazu, dass eines der Sternchen innerhalb des Quadrats landet.

Im Allgemeinen ist die Frage, ob eine gegebene Menge von Polyominos ein gegebenes Quadrat überdecken kann, unglaublich schwer. Ein tiefes Resultat aus der Mathematischen Logik besagt, dass es überhaupt keinen Algorithmus gibt, um diese Frage zu beantworten.¹

Dieses tiefe Resultat hat die folgende unerwartete Konsequenz. Betrachten wir alle schlechten Mengen von Polyominos, die aus insgesamt höchstens n Einheitsquadraten bestehen. Sei $L(n)$ die Kantenlänge des größten Quadrats, das mit einem von ihnen gepflastert werden kann. Die schlechte Menge aus unserem Beispiel, die aus insgesamt 22 Einheitsquadraten besteht, zeigt, dass $L(22) \geq 4$.

Man könnte annehmen, dass $L(22)$ einigermaßen klein ist. Für eine gegebene Menge von Pflastersteinen mit insgesamt 22 Quadraten können wir uns vorstellen, dass wir Pflastersteine so aneinander setzen, dass wir ein möglichst großes Quadrat überdecken. Weil die Menge „schlecht“ ist, wird sich dabei unausweichlich eine Lücke bilden, die wir nicht überdecken können. Es klingt plausibel anzunehmen, dass dies relativ bald passieren wird, weil unsere Pflastersteine ja recht klein sind.

Überraschenderweise sind die Zahlen $L(n)$ aber unglaublich groß! Wenn $f(n)$ irgendeine Funktion ist, die mit einem Computer berechnet werden kann, und sei es einer mit unendlichem Speicherplatz, dann gilt immer noch $L(n) > f(n)$ für alle n , die groß genug sind. Dabei können Computer ja Funktionen berechnen, die *sehr* schnell anwachsen, wie etwa

$$f(n) = n^n, \quad f(n) = n^{n^n}, \quad \text{oder} \quad f(n) = n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^n}}}} \quad (\text{ein Turm der Länge } n).$$

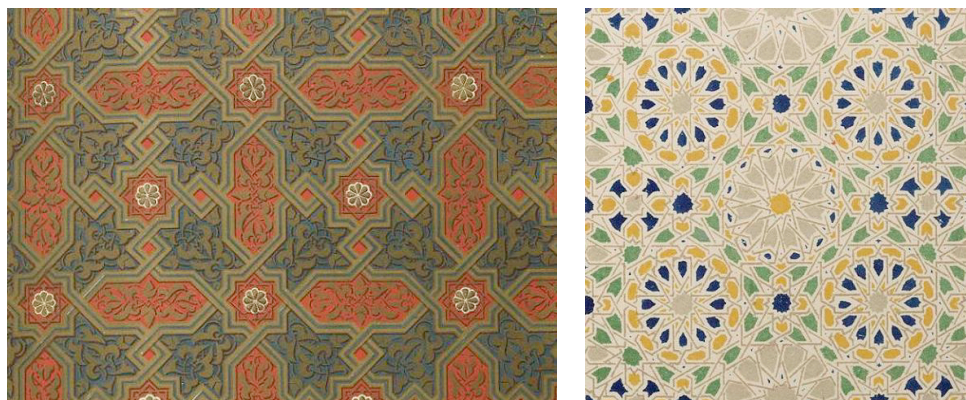
In der Tat sind alle diese Funktionen *winzig* im Vergleich zu bestimmten anderen berechenbaren Funktionen. Es stellt sich aber wiederum heraus, dass jede berechenbare Funktion *winzig* ist im Vergleich mit $L(n)$.

¹Eine damit zusammenhängende Frage ist die Folgende: Für ein gegebenes Polyomino P soll entschieden werden, ob es ein Rechteck gibt, das mit Kopien von P gepflastert werden kann. Trotz vieler gegenteiliger Behauptungen in der Literatur ist es nicht bekannt, ob es einen Algorithmus gibt, um dies zu entscheiden.

Wir können noch eine konkretere Folgerung aus dem Resultat angeben. Es gibt eine Menge von Polyominos mit einer moderaten Anzahl von Einheitsquadraten², vermutlich nicht mehr als 100, mit der folgenden Eigenschaft: Es ist unmöglich, die ganze Ebene mit dieser Menge von Polyominos auszulegen; wir können jedoch Australien³ mit einer Pflasterung vollständig überdecken.

Ein sehr wichtiger Problemtyp beschäftigt sich mit Pflasterungen von unendlichen (unbegrenzten) Gebieten, insbesondere mit Pflasterungen der gesamten Ebene. Dies ist ein riesiges Gebiet: das 700-Seiten Buch [11] von Grünbaum und Shephard beschäftigt sich hauptsächlich mit diesem Thema, während uns hier der begrenzte Platz davon abhält, mehr als nur ein paar Worte dazu zu sagen.

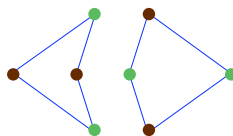
Ein berühmtes Resultat der mathematischen Kristallographie besagt, dass es 17 wesentlich verschiedene Pflasterungsmuster der Ebene gibt, die Symmetrien in zwei unabhängige Richtungen haben [11, Sec. 6.2]. Diese Symmetrietypen nennt man die *ebenen kristallographischen Gruppen*. Die Alhambra in Granada (Spanien), eine Palastanlage aus dem 13. und 14. Jahrhundert, ist besonders berühmt für ihre Darstellungen vieler dieser Pflasterungsmuster. Wir zeigen daraus zwei Beispiele.



Owen Jones, The Grammar of Ornament, Abb. 90 and 93. ©1998 Octavo and the Rochester Institute of Technology. Used with permission. Imaged by Octavo, www.octavo.com.

Eine andere bekannte Quelle für ebene Pflasterungsmuster sind die Zeichnungen, Lithographien und Holzschnitte des holländischen Künstlers Maurits Cornelis Escher (1898–1972). Wir verweisen den interessierten Leser auf die wunderbare Werkschau in [7].

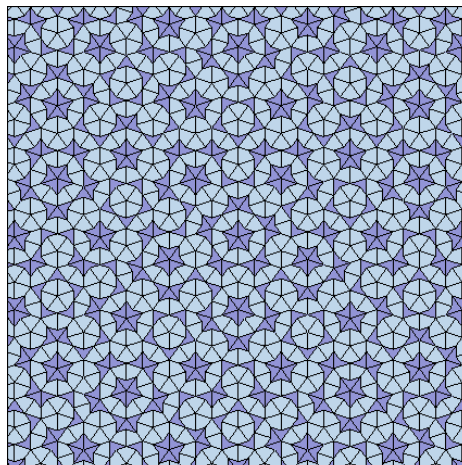
Im Gegensatz zu den ebenen Pflasterungen mit sehr viel Symmetrie stehen die Pflasterungen *ohne* Symmetrie. Die interessantesten davon hat Sir Roger Penrose entdeckt. Die Pfeil- und Drachen-Pflasterungen (“darts and kites”) sind die bekanntesten davon: Wir wollen die Ebene mit den unten gezeigten beiden Pflastersteinen überdecken, mit der zusätzlichen Regel, dass Pflastersteine nur an Ecken mit derselben Farbe zusammengefügt werden dürfen.



²Nehmen wir dabei an, dass die „Einheitsquadrate“ etwa eine Kantenlänge von 1 cm haben.

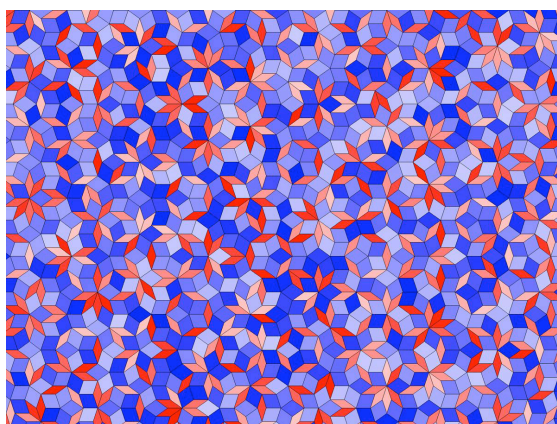
³das sehr groß und sehr flach ist

Die Färbung der Pflastersteine macht es unmöglich, die Ebene unter Wiederholung eines kleinen Musters regulär zu pflastern, wie dies in den vorherigen Beispielen geschehen ist. Es gibt aber trotzdem unendlich viele verschiedene Pfeil- und Drachen-Pflasterungen der Ebene [10] [19]. Unter ist eine Zeichnung einer solchen Pflasterung, die von Franz Gähler erzeugt wurde und die man unter www.itap.physik.uni-stuttgart.de/~gaehler findet; sie hat viele hübsche Aspekte, folgt aber keinem offensichtlichen Muster.



Diese *Penrose-Pflasterungen* haben viele bemerkenswerte Eigenschaften; z. B. wiederholt sich *jedes* endliche Gebiet, das man mit diesen Pflastersteinen bilden kann, in jeder Penrose Pflasterung der Ebene unendlich oft.

Unser letztes Beispiel ist eine andere Art von Penrose-Pflasterung, die man durch Verkleben von zwei verschiedenen Arten von Rhomben unter einer ähnlichen Regel erhalten kann. Diese Abbildung wurde von Russell Towle (Dutch Flat, CA) mit einem *Mathematica* Notebook erzeugt, das man unter library.wolfram.com/infocenter/MathSource/1197/ herunterladen kann.



Wir überlassen es den Lesern, das faszinierende Thema der Pflasterungen der Ebene weiter zu erkunden.

Literatur

- [1] D. Beauquier, M. Nivat, E. Rémy and M. Robson. Tiling figures of the plane with two bars. *Comput. Geom.* **5** (1995), 1-25.

Die Autoren betrachten das Problem, ein Gebiet mit horizontalen $n \times 1$ und vertikalen $1 \times m$ -Rechtecken zu pflastern. Ihr Hauptresultat ist, dass für $n \geq 2$ und $m > 2$ das Entscheidungsproblem, ob eine solche Pflasterung existiert, NP-vollständig ist. Sie studieren auch mehrere Spezialfälle des Problems.

- [2] R. Brooks, C. Smith, A. Stone and W. Tutte. The dissection of rectangles into squares. *Duke Math. J.* **7** (1940), 312-340.

Jeder perfekten Pflasterung eines Rechtecks ordnen die Autoren einen bestimmten gerichteten Graphen und einen (Strom-)Fluss durch diesen Graphen zu. Sie zeigen, wie sich die Eigenschaften der Pflasterung in dem elektrischen Netzwerk widerspiegeln. Sie verwenden diese Interpretation um verschiedene Resultate über perfekte Pflasterungen zu beweisen, und beschreiben neue Methoden für ihre Konstruktion.

- [3] J. Conway and J. Lagarias. Tiling with polyominoes and combinatorial group theory. *J. Combin. Theory Ser. A* **53** (1990), 183-208.

Conway und Lagarias studieren die Existenz einer Pflasterung für ein Gebiet im regelmäßigen Gitter in \mathbb{R}^2 mit einer endlichen Menge von Pflastersteinen. Aus dem Studium der Möglichkeiten, wie sich die Ränder der Pflastersteine zum Rand des vorgegebenen Gebiets zusammenfügen können, erhalten sie notwendige Bedingungen für die Existenz einer Pflasterung, unter Verwendung der Sprache der Kombinatorischen Gruppentheorie.

- [4] N. de Bruijn. Filling boxes with bricks. *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 37-40.

Der Autor studiert das Problem, eine n -dimensionale Schachtel von ganzzahligen Abmessungen $A_1 \times \dots \times A_n$ mit Pflastersteinen der ganzzahligen Maße $a_1 \times \dots \times a_n$ zu pflastern. Er zeigt, dass es für die Existenz einer Pflasterung notwendig ist, dass sich für jedes a_i ein Vielfaches unter den Werten A_1, \dots, A_n findet.

Die Schachtel heißt ein *Vielfaches* des Pflastersteins, wenn sie auf die offensichtliche Art gepflastert werden kann. Es wird gezeigt, dass im Fall $a_1|a_2, a_2|a_3, \dots, a_{n-1}|a_n$ der Pflasterstein nur Schachteln pflastern kann, die ein Vielfaches davon sind. Die Umkehrung wird auch bewiesen.

- [5] A. Duijvestijn. Simple perfect squared square of lowest order. *J. Combin. Theory Ser. B* **25** (1978), 240-243.

Hier wird die eindeutige perfekte Pflasterung eines Quadrats mit der minimalen Anzahl 21 von kleineren Quadraten präsentiert.

- [6] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen and J. Propp. Alternating sign matrices and domino tilings I, II. *J. Algebraic Combin.* **1** (1992), 111-132, 219-234.

Es wird gezeigt, dass der Aztekendiamant der Ordnung n genau $2^{n(n+1)/2}$ Dominopflasterungen hat. Vier Beweise werden angegeben, die Beziehungen zu “alternating sign” Matrizen, monotonen Dreiecken und der Darstellungstheorie von $GL(n)$ ausnutzen. Eine Beziehung zu dem “square ice”-Modell von Lieb wird auch erklärt.

- [7] M. C. Escher. “The Magic of M. C. Escher” (edited and with Introduction by J. L. Locher), Thames & Hudson Ltd., London 2000.

Dieser wunderbare Bildband präsentiert das graphische Werk von M. C. Escher in seiner ganzen Vielfalt — darunter viele berühmte, bekannte und unbekannte Pflasterungen der euklidischen und der hyperbolischen Ebene, fertige Graphiken genauso wie Entwurfszeichnungen und Skizzen.

- [8] M. Fisher and H. Temperley. Dimer problem in statistical mechanics – an exact result. *Philos. Mag.* **6** (1961), 1061-1063.

Die Formel für die Anzahl der Dominopflasterungen eines Rechtecks wird in der Sprache der statistischen Mechanik entwickelt.

- [9] C. Freiling and D. Rinne. Tiling a square with similar rectangles. *Math. Res. Letters* **1** (1994), 547-558.

Die Autoren zeigen, dass ein Quadrat mit ähnlichen Kopien eines $1 \times u$ -Rechtecks dann und dann gepflastert werden können, wenn u eine Wurzel eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, für das *alle* Wurzeln einen positiven Realteil haben.

- [10] M. Gardner. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. *Scientific American* **236** (1977), 110-121.

Dieser Übersichtsaufsatz bespricht die Suche nach einer Menge von Pflastersteinen mit denen man die Ebene pflastern kann, aber nicht periodisch. Nach einem geschichtlichen Abriss konzentriert sich Gardner auf die Eigenschaft des bekanntesten Beispiels, der Pfeil- und Drachen-Pflasterungen von Penrose.

- [11] B. Grünbaum and G. Shephard. *Tilings and patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

Dieses Buch liefert eine umfassende Darstellung von verschiedenen Aspekten von Pflasterungen, wobei die Pflasterungen der Ebene mit endlich vielen Typen von Pflastersteinen im Zentrum stehen. Zum Beispiel klassifizieren die Autoren verschiedene Arten von Pflasterungsmustern in der Ebene. Weitere Themen sind perfekte Pflasterungen von Rechtecken, und aperiodische Pflasterungen der Ebene.

- [12] P. Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 26-30.

Für m Teilmengen T_1, \dots, T_m einer endlichen Menge S definiert Hall ein *vollständiges Repräsentantensystem* als eine Menge von m verschiedenen Elementen a_1, \dots, a_m von S , so dass $a_i \in T_i$ für jedes i gilt. Er beweist, dass ein solches

System genau dann existiert, wenn für jedes $k = 1, \dots, m$, beliebige k der Mengen T_i immer insgesamt mindestens k verschiedene Elemente von S enthalten.

- [13] W. Jockusch, J. Propp and P. Shor. Random domino tilings and the Arctic circle theorem, preprint, 1995, [arXiv:math.CO/9801068](#).

Für Dominopflasterungen eines Aztekendiamanten, wird der Diamant in fünf Gebiete aufgeteilt: Vier äußere Gebiete nahe den Ecken, wo die Pflastersteine ganz regelmäßig angeordnet sind, und ein Gebiet in der Mitte, wo sie keinem vorhersagbaren Muster folgen. Die Autoren beweisen den Polarkreis-Satz: In einer zufälligen Pflasterung eines großen Aztekendiamanten approximiert das Gebiet in der Mitte extrem gut einen perfekten Kreis, der dem Diamanten einbeschrieben ist.

- [14] P. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Phys.* **27** (1961), 1209–1225.

Kasteleyn beweist exakte und asymptotische Formeln für die Anzahl der Dominopflasterungen eines Rechtecks, durch Kanten begrenzt oder mit periodischen Randbedingungen. Er bespricht dann den Zusammenhang zwischen diesem Problem und dem Ising-Modell der statistischen Mechanik.

- [15] D. Klarner. Packing a rectangle with congruent n -ominoes. *J. Combin. Theory* **7** (1969), 107–115.

Klarner studiert das Problem, ein Rechteck mit einer ungeraden Anzahl von Exemplaren eines einzigen Polyominos zu überdecken. Er charakterisiert auch die Rechtecke, die mit Exemplaren eines $a \times b$ -Rechtecks gepflastert werden können, und die Rechtecke die mit Exemplaren eines bestimmten Oktominos gepflastert werden können.

- [16] M. Laczkovich and G. Szekeres. Tilings of the square with similar rectangles. *Discrete Comput. Geom.* **13** (1995), 569–572.

Unabhängig von Freiling und Rinne [9] bewiesen Laczkovich und Szekeres dasselbe Resultat über die Zerlegung eines Quadrats in ähnliche Rechtecke.

- [17] I. Pak. Tile invariants: new horizons. *Theoret. Comput. Sci.* **303** (2003), 303–331.

Für eine endliche Menge von Pflastersteinen T besteht die Invariantengruppe $G(T)$ aus den linearen Beziehungen, die zwischen der Anzahl der Pflastersteine jeder Art in Pflasterungen desselben Gebiets gelten müssen. Der Aufsatz gibt eine Übersicht darüber, was man über $G(T)$ weiß. Es wird gezeigt, dass diese Invarianten sehr viel stärker sind als die klassischen Färbungsargumente.

- [18] M. Paulhus. An algorithm for packing squares. *J. Combin. Theory Ser. A* **82** (1998), 147–157.

Paulhus präsentiert einen Algorithmus für das Packen einer unendlichen Folge von immer kleiner werdenden Rechtecken mit Gesamtfläche A in ein Rechteck mit einer

Fläche, die nur etwas größer ist als A . Er wendet dann diesen Algorithmus auf drei bekannte Probleme dieser Art an, und erhält dabei extrem dichte Packungen.

- [19] R. Penrose. Pentaplexity. *Math. Intelligencer* **2** (1979), 32-37.

Der Autor beschreibt seine Entdeckung der Pfeile und Drachen: Zwei Arten von Vierecken, mit denen man die Ebene pflastern kann, aber nicht periodisch. Er gibt eine kurze Übersicht über Eigenschaften dieser Pflasterungen.

- [20] J. Propp. Lattice structure for orientations of graphs, preprint, 1994.

Es wird gezeigt, dass die Menge der Orientierungen eines Graphen, die dieselbe Flussdifferenz auf allen Kreisen haben, die Struktur eines distributiven Verbands hat. Dies verallgemeinert ähnliche Konstruktionen für “alternating sign”-Matrizen und Matchings.

- [21] S. Stein and S. Szabó. *Algebra and tiling. Homomorphisms in the service of geometry*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1994.

Dieses Buch bespricht die Lösung verschiedener Pflasterungsprobleme mit Hilfsmitteln der modernen Algebra. Zwei Beispiele: Ein Quadrat kann nicht mit 30° - 60° - 90° -Dreiecken gepflastert werden, und ein Quadrat mit ungerader Fläche kann nicht mit Dreiecken der Fläche 1 gepflastert werden.

- [22] W. Thurston. Conway’s tiling groups. *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 757-773.

Der Autor präsentiert eine Technik von Conway für das Studium von Pflasterungsproblemen. Manchmal ist es möglich, die Kanten der Pflastersteine so mit Elementen einer Gruppe zu bezeichnen, dass ein Gebiet dann und nur dann gepflastert werden kann, wenn das Produkt der Gruppenelemente auf dem Rand (in der richtigen Reihenfolge) die Identität ergibt. Er präsentiert auch die Idee einer Höhenfunktion, die die Pflasterung in ein 3-dimensionales Bild anhebt. Diese Techniken werden auf Pflasterungen mit Dominos, Dreihex-Steinen und Lozengen angewendet.

- [23] S. Wagon. Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle. *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), 601-617.

Wagon gibt vierzehn Beweise für den folgenden Satz an: Wenn ein Rechteck mit Rechtecken gepflastert werden kann, von denen jedes mindestens eine ganzzahlige Seite hat, dann hat auch das gepflasterte Rechteck selbst mindestens eine ganzzahlige Seite.

Federico Ardila

Microsoft Theory Group, Redmond, WA, USA, federico@microsoft.com

Richard P. Stanley

Department of Mathematics, MIT, Cambridge, MA, USA, rstan@math.mit.edu