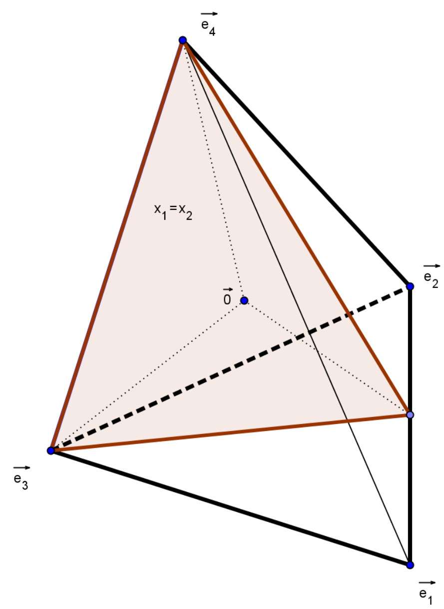
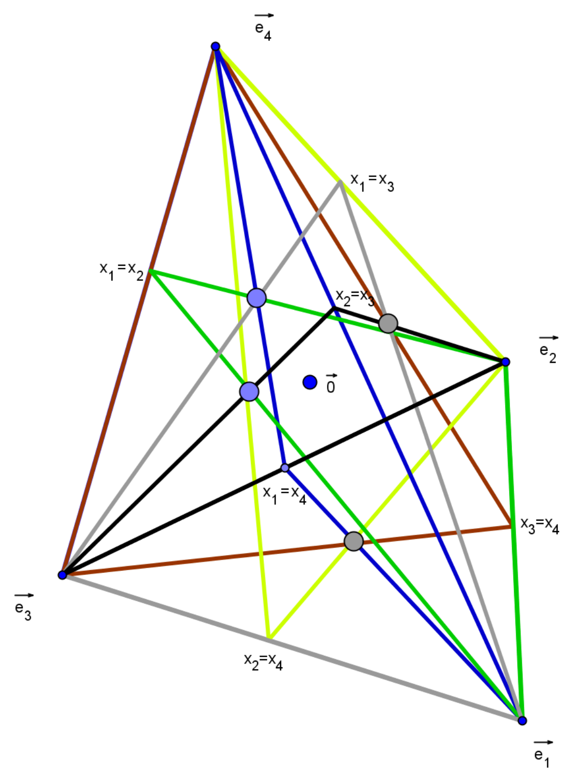
Short Homework 2

Fabian Prada (Uniandes)

1. a) Dado que $\Delta_3 = conv\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es un simplex 3-dimensional , lo podemos representar por medio de un tetrahedro (a pesar que los vectores canónicos pertenezcan a R^4). Por su parte el braid Arrangement A_3 esta compuesto por los planos $x_1 = x_2, x_1 = x_3, x_1 = x_4, x_2 = x_3$ y $x_3 = x_4$. La interseccion entre Δ_3y $x_1 = x_2$ se presenta a continuación :

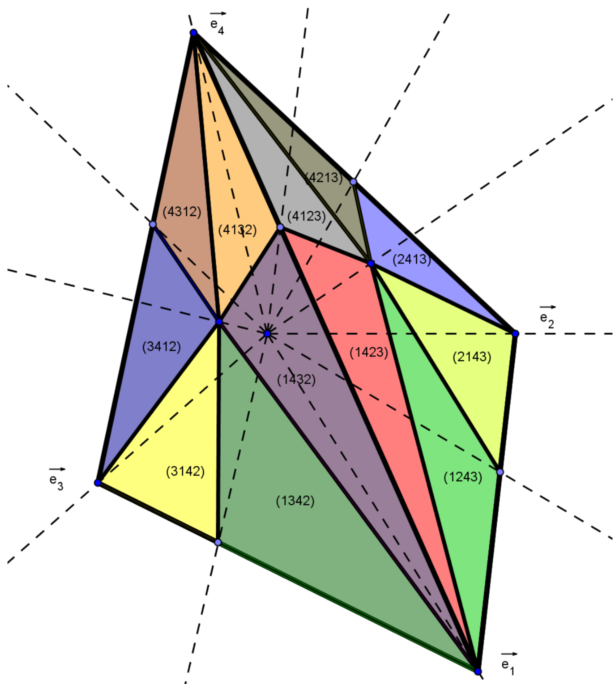


En la grafica la interseccion entre Δ_3 y $x_1 = x_2$ esta representada por la porción del plano que es perpendicular al vector $e_1 - e_2$, pasa por su punto medio y se encuentra dentro del tetrahedro. En particular, la interseccion incluye la mediatriz de $conv\{e_1, e_2, e_3\}$, la mediatriz de $conv\{e_1, e_2, e_4\}$ y el segmento $conv\{e_3, e_4\}$. De forma analoga se obtienen las intersecciones de los demas planos con Δ_3:

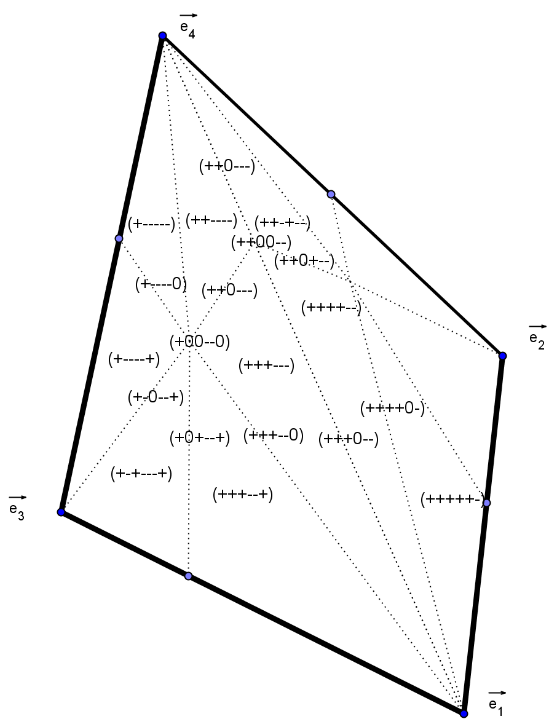


- $x_1 = x_2 \cap \Delta_3 \rightarrow$ triangulo rojo
- $x_1 = x_3 \cap \Delta_3 \rightarrow$ triangulo amarillo
- $x_1 = x_4 \cap \Delta_3 \rightarrow$ triangulo negro
- $x_2 = x_3 \cap \Delta_3 \rightarrow$ triangulo azul
- $x_2 = x_4 \cap \Delta_3 \rightarrow$ triangulo gris
- $x_3 = x_4 \cap \Delta_3 \rightarrow$ triangulo verde

b) A partir de la particion del tetrahedro inducida por el braid Arrangement A_3 podemos identificar las regiones correspondientes a los diferentes ordenamientos de las variables x_1, x_2, x_3, y x_4. A cada uno de ellos le asignammos una permutación , por ejemplo, a la region donde $x_1 > x_4 > x_3 > x_2$, se le asigna la permutación (1432). Haciendo esto a cada región, y teniendo en cuenta la distribuciespacial de e_1, e_2, e_3, e_4 que asumí obtuve la siguiente gráfica:



c) Asumí que la orientacion de los hiperplanos esta dada por los vectores $e_1 - e_2, e_1 - e_3$, $e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_2 - e_4$, y $e_3 - e_4$, respectivamente, de modo que a la región $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ le corresponde el vector de signos $(+ + + + + +)$. Siguiendo esta orientacion obtuve los siguientes vectores de signos para diferentes caras del arrangement: (El tetrahedro se encuentra en la misma posición que en las graficas anteriores)



2. Cada una de las caras del braid arrangements A_{n-1} corresponde (en biyección) a uno de los posibles oredenamientos de las variables $x_1, x_2, ..., x_n$. De igual manera cada uno de los posibles

ordenamientos de las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ esta en biyección con cada una de las posibles particiones ordenadas de $[n]$. Por ejemplo, al ordenamiento $x_2 > x_3 = x_1 > x_4 = x_5$ podemos asignar la particion ordenada $\{2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}$ y al ordenamiento $x_5 = x_2 > x_1 > x_3 > x_4$, le asignamos $\{5, 2\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}$. Por tanto concluimos que las caras braid arrangements A_{n-1} estan en biyección con cada una de las posibles particiones ordenadas de $[n]$.

En clase se mostró la biyección entre las caras $n-k$ dimensionales del arrangement y las caras k dimensionales del zonotope asociado, en este caso es el permutahedro Π_{n-1}. Dado que las caras $n-k$ dimensionales del arrangement son las que satisfacen k igualdades en el ordenamiento (i.e aquellas cuyo vector de signos tiene k ceros), las particiones ordenadas de $[n]$ que estan asociadas a las caras $n-k$ dimensionales del arrangement son las que tienen $n-k$ componentes. Por tanto se concluye tambien, que las caras k dimensionales de Π_{n-1} estan en biyeccion con las particiones ordenadas de $[n]$ con $n-k$ componentes, tal como se probó en la tarea 2.