

# Entanglement-based Quantum LiDAR

Esame di metà tesi

Federico Collé



**UNIVERSITÀ  
DI TORINO**



Relatore: Prof. Leonardo Castellani

Co-relatori: Dr. Ivano Ruo Berchera  
Dr. Alessio Avella

# Overview

- Tecnologie quantistiche
- LiDAR
- Spontaneous Parametric Down Conversion
- Quantum Target Detection & Ranging
- Misure Phase-Insensitive
- Setup sperimentale & Analisi dati
- Passi successivi

# Tecnologie quantistiche

Tecnologie quantistiche: applicazioni tecnologiche legate a fenomeni prettamente quantistici.

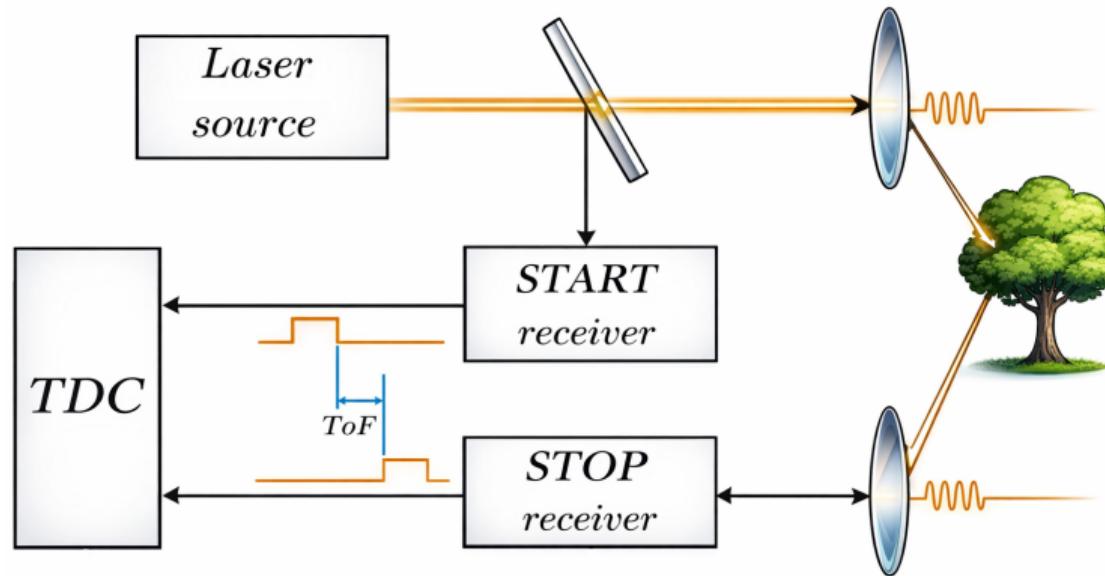
Alcuni esempi:

- Quantum computation
- Quantum communication
- Quantum simulation
- Quantum metrology & sensing  
→ **imaging**



# LiDAR

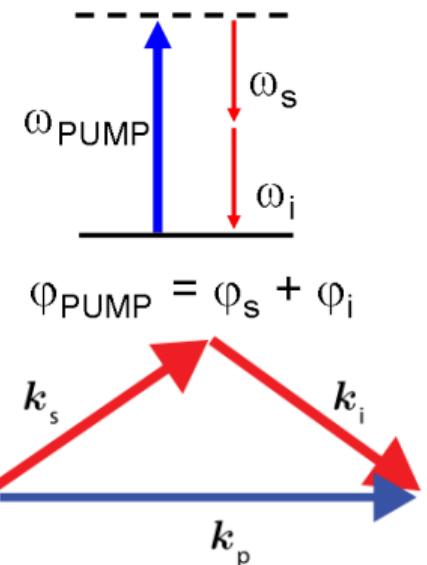
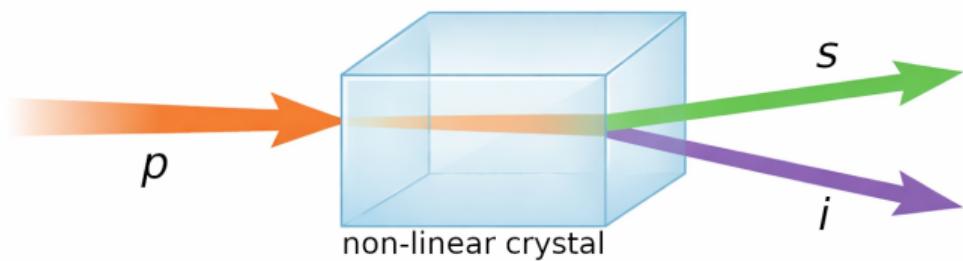
LIDAR = LIght Detection And **Ranging**.



È possibile migliorare il protocollo LiDAR sfruttando correlazioni quantistiche?

# SPDC

Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC):



# SPDC

$[\hat{n}_s - \hat{n}_i, \hat{H}] = 0 \rightarrow$  correlazione fra *signal* e *idler*.

# Quantum Target Detection (QTD)

Protocollo: **Quantum Illumination**

Vantaggio in situazione ostile:

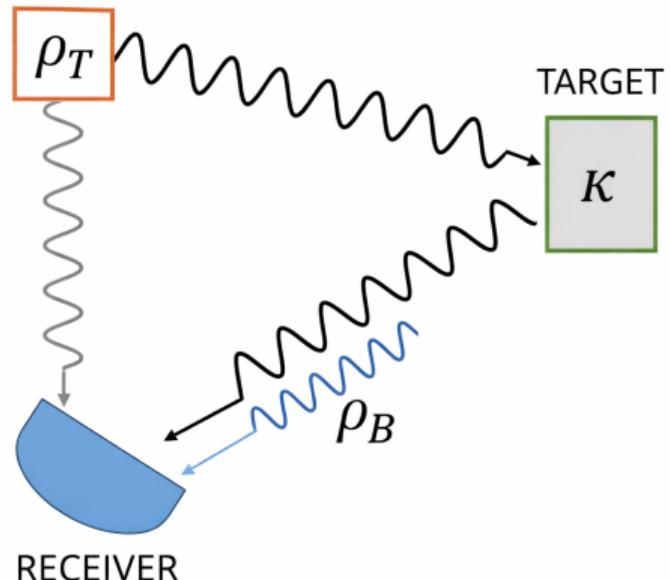
- Probe: stato  $\rho_T$ , numero medio di fotoni  $\mu_0 \ll 1$
- Background: stato  $\rho_B$ , numero medio di fotoni  $\mu_B \gg 1$
- Target: riflettività  $k \ll 1$

Target modellizzato da canale rumoroso e con perdite:  $\rho_k = \mathcal{E}_{k,\mu_B}(\rho_T)$

Binary hypothesis testing:

$$\mathcal{H}_0 : \rho_R = \rho_B$$

$$\mathcal{H}_1 : \rho_R = \rho_k$$



# Quantum Target Detection (QTD)

Misura eseguita con stato a multi-copia  $\rho_T^{\otimes L}$ .  
 $\mathcal{E}_{k,\mu_B}$  agisce indipendentemente su ogni copia.  
Per  $L \rightarrow \infty$  vale il **Quantum Chernoff Bound** (QCB):

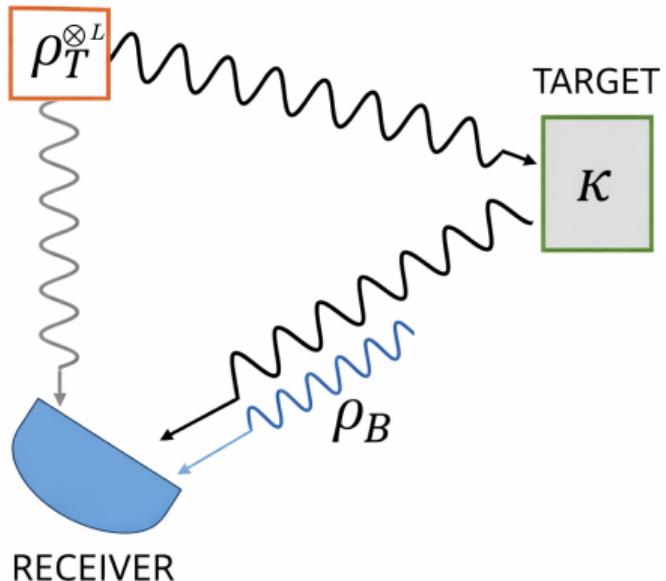
$$p_{err}(\rho_0^{\otimes L}, \rho_1^{\otimes L}) \leq \frac{1}{2} e^{-\xi_{QCB} L}$$

Con:

$$\xi_{QCB}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_0, \rho_1)$$

$$C_\alpha(\rho_0, \rho_1) := -\log(\text{Tr}[\rho_0^\alpha \rho_1^{1-\alpha}])$$

$\xi_{QCB}$  = Chernoff information,  $C_\alpha$  =  $\alpha$ -information.



# Quantum Target Detection (QTD)

Con entangled ancilla mode si raggiunge un quantum advantage di **6 dB**.

Problemi del QTD:

- 6 dB solo per apparati estremamente complessi
- storage dell'idler richiede quantum memories
- c'è vantaggio solo per bassi *SNR*

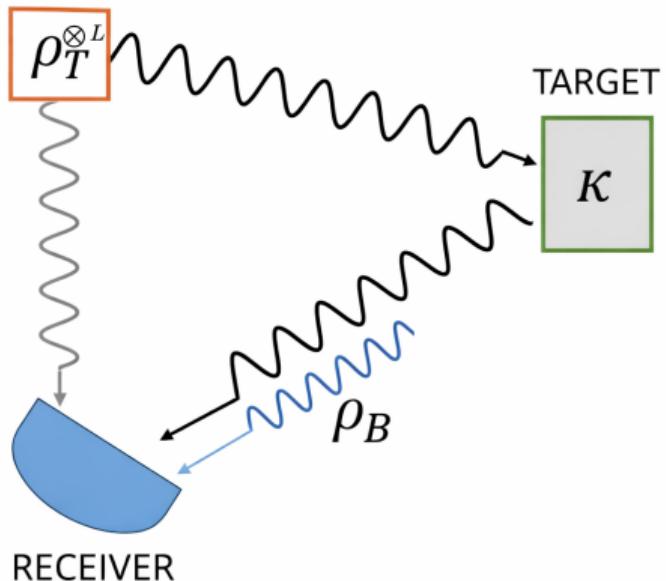
S. Lloyd, Science 321, 1463 (2008)

Tan et al., Phys. Rev. Lett. 101, 253601 (2008)

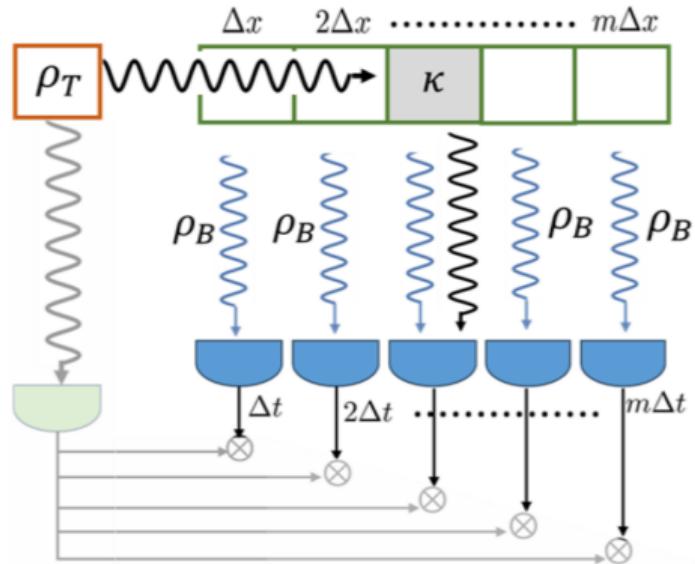
J. Shapiro, IEEE A&E Systems Magazine 35, 8 (2020)

Torromé & Barzanjeh, Prog. Quantum Electron. 93 (2024)

Sorelli et al., IEEE A&E Systems Magazine 37 (2021)



# Quantum Target Ranging (QTR)



$\rho_j$  è lo stato con target + rumore.

Ranging = stima del tempo di volo.  
Asse dei tempi discretizzato in  $m$  slot lunghi  $\Delta t$ :

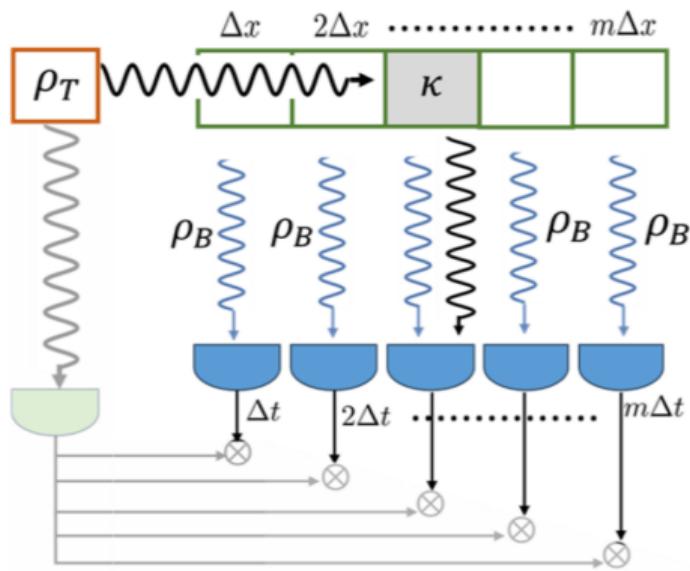
$$\Delta x = c \Delta t / 2 \quad x = j \Delta x$$

il target si trova in uno degli  $m$  slot.

Multi-hypothesis testing:

$$\mathcal{H}_j : \rho_R = \rho_j$$

# Quantum Target Ranging (QTR)



Per  $L \gg 1$  la probabilità di errore decresce esponenzialmente:

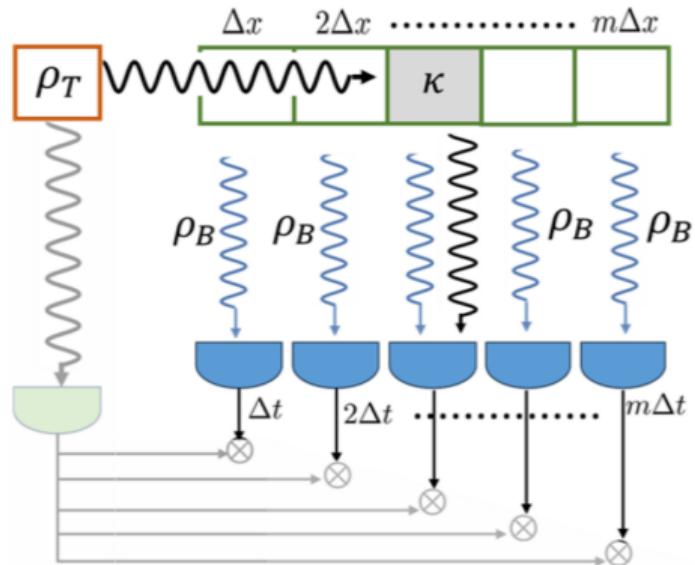
$$p_{\text{err}} \propto e^{-\xi^{(m)} L}$$

**Asintoticamente** vale:

$$\xi_{QCB}^{(m)} = \min_{i,j} \xi_{QCB}^{(2)}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$$

→ errore dominato dalle due ipotesi più difficili da distinguere (time-bin vicini).

# Quantum Target Ranging (QTR)



Siccome  $\rho_j := \rho_k^{(j)} \otimes_{i \neq j}^{m-1} \rho_B^{(i)}$ , è possibile confrontare due ipotesi qualsiasi, ad esempio:

$$\rho_1 = \rho_k \otimes \rho_B \otimes \cdots \quad \rho_2 = \rho_B \otimes \rho_k \otimes \cdots$$

Allora, per la Chernoff information:

$$\xi_{TR} = \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_1, \rho_2) = 2 C_{1/2}(\rho_k, \rho_B)$$

$$\xi_{TD} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_B, \rho_k) \rightarrow \xi_{TR} \geq \xi_{TD} \rightarrow \boxed{p_{err}^{TR} \leq p_{err}^{TD}}$$

## Misure Phase-Insensitive

**Misura phase-insensitive** → si misura solo il **numero di fotoni**

Per lo slot  $j$  ottengo una distribuzione di conteggi:

$$P_j(\vec{n}) = \text{Tr}[\rho_j |\vec{n}\rangle\langle\vec{n}|], \quad |\vec{n}\rangle = \bigotimes_i |n_i\rangle$$

La best ranging performance è proporzionale a un set di distribuzioni di probabilità classiche

$$\{P_1(\vec{n}), \dots, P_m(\vec{n})\}$$

# Misure Phase-Insensitive

**Benchmark classico:** probe è stato coerente

$$\xi_{coh} = 2\mu_B + k\mu_0 - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu_0}$$

**Probe quantistico:**  $\rho_Q = \rho_{TMSV}^{\otimes R}$

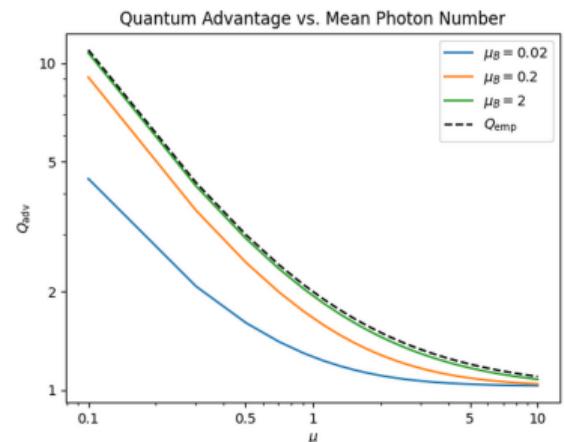
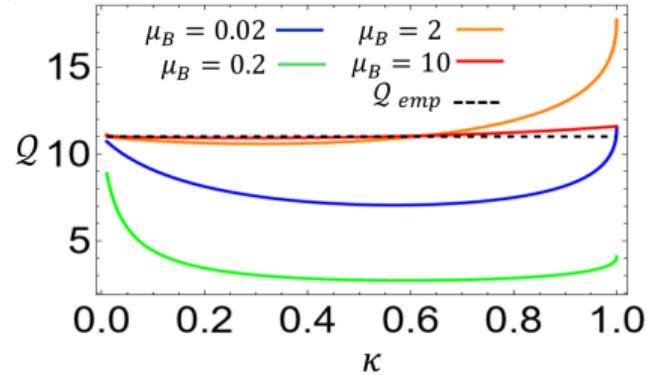
$$\rho_{TMSV} = (|TMSV\rangle\langle TMSV|)$$

$$|TMSV\rangle = \sum_n c_n^{\mu_0} |n, n\rangle_{s.i} \langle n, n|$$

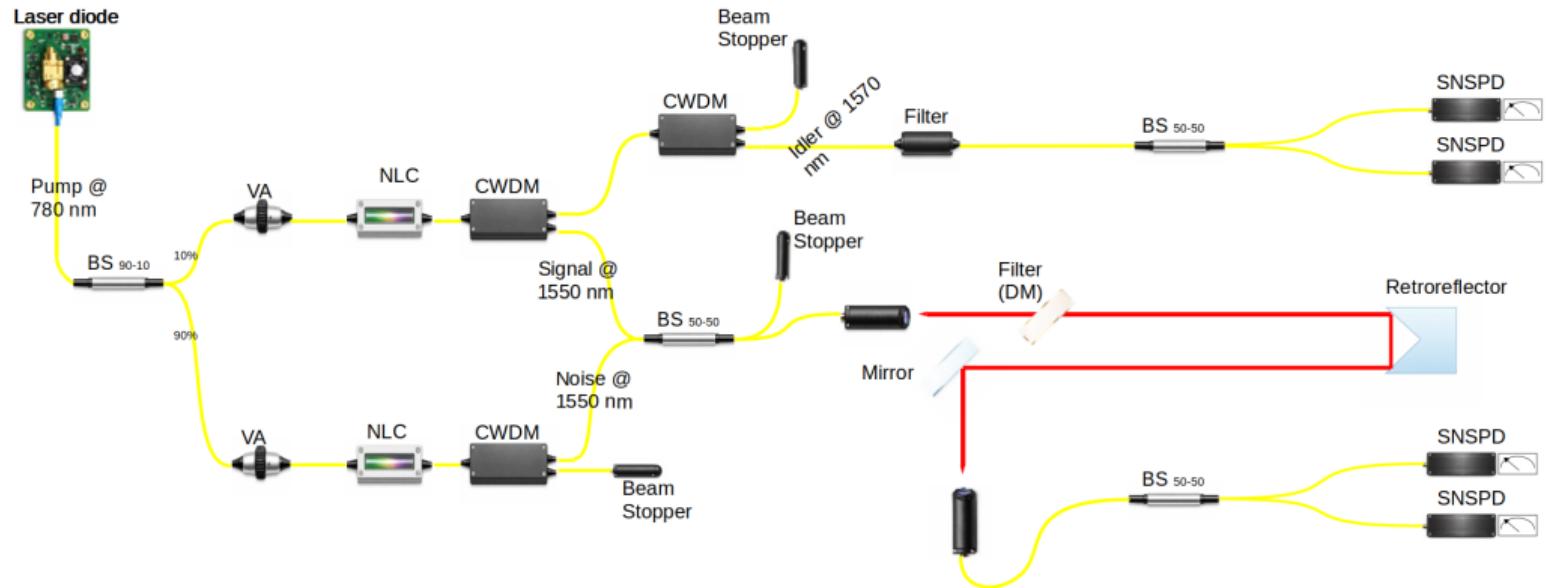
**Quantum advantage:**

$$\mathcal{Q} := \frac{\xi_Q}{\xi_{coh}}$$

Limite empirico:  $\mathcal{Q}_{emp} = 1 + \frac{1}{\mu_0}$  ( $k \ll 1$ ,  $\mu_B \gg 1$ ).



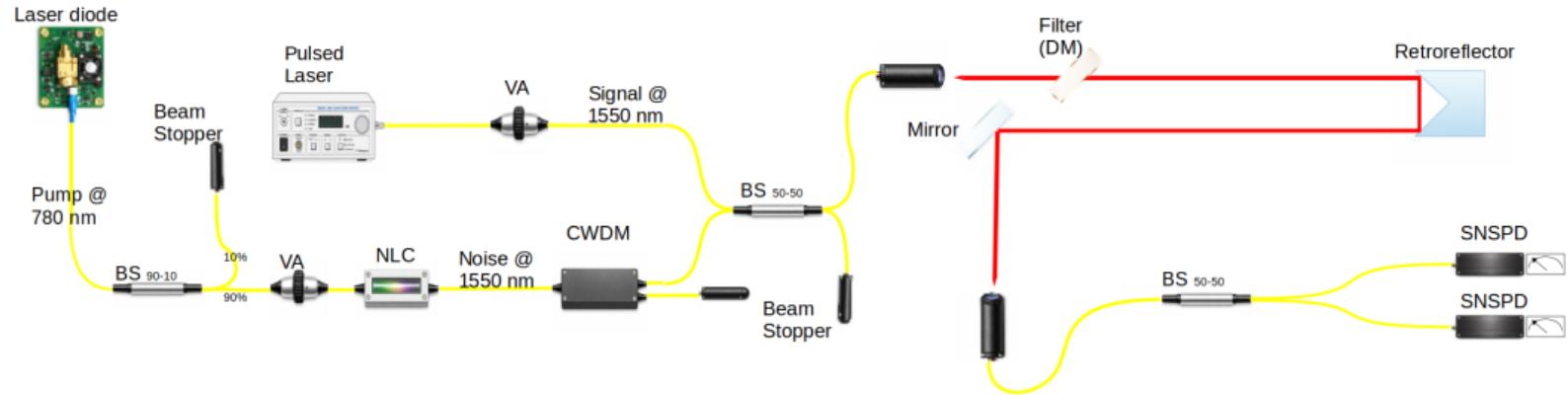
# Setup sperimentale



BS: Beam Splitter VA: Variable Attenuator NLC: Non Linear Crystal CWDM: Coarse Wavelength Division Multiplexing

DM: Dichroic Mirror SNSPD: Superconducting Nanowire Single Photon detector

# Setup sperimentale

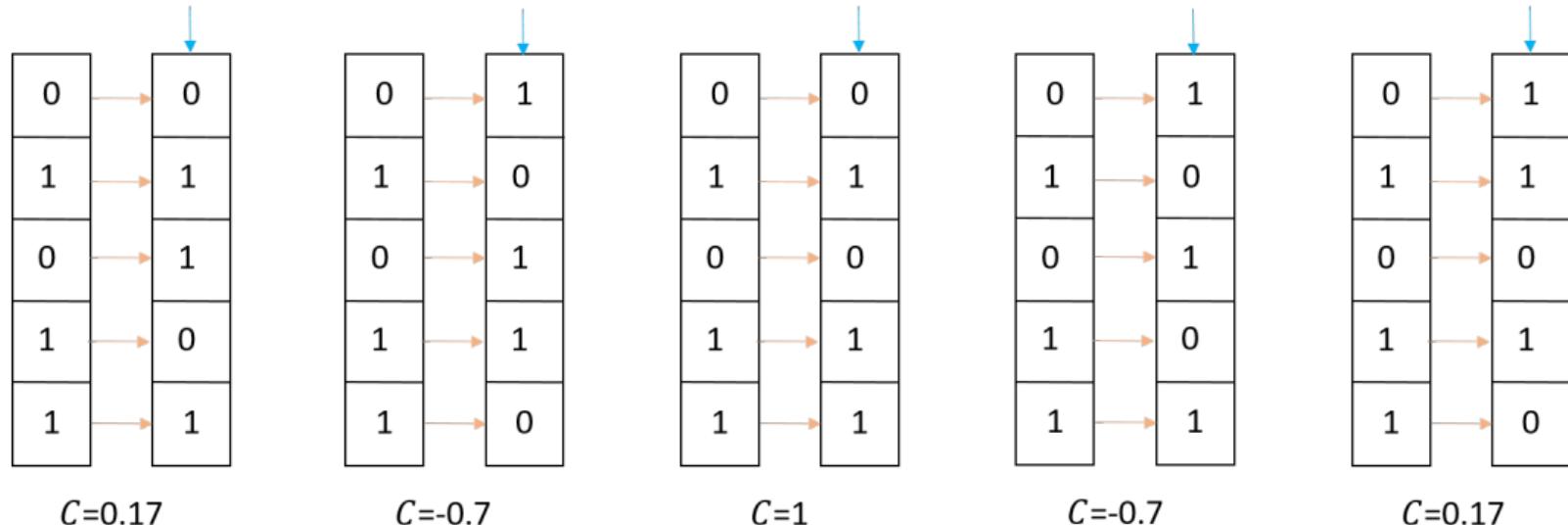


BS: Beam Splitter VA: Variable Attenuator NLC: Non Linear Crystal CWDM: Coarse Wavelength Division Multiplexing

DM: Dichroic Mirror SNSPD: Superconducting Nanowire Single Photon detector

## Analisi dati

I conteggi degli SNSPD vengono salvati in stringhe in base al tempo di arrivo.



Le stringhe vengono shiftate fino a trovare il picco del coefficiente di Pearson,  
 $C = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ .

# Analisi dati

Il picco è inizialmente individuato quando il rumore è assente.  
La posizione individuata è la posizione vera del picco.

$$p_{err, \ exp} = \frac{1 - err}{total}$$

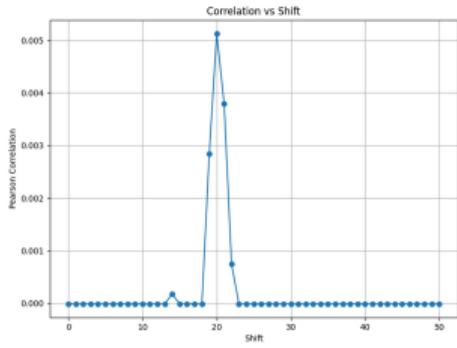


Figure: Picco senza rumore

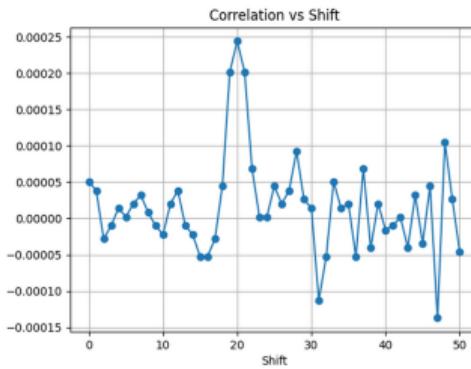


Figure: Picco con rumore

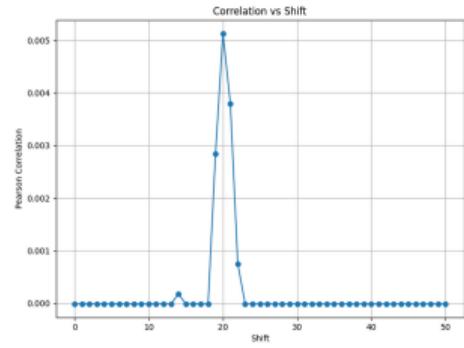
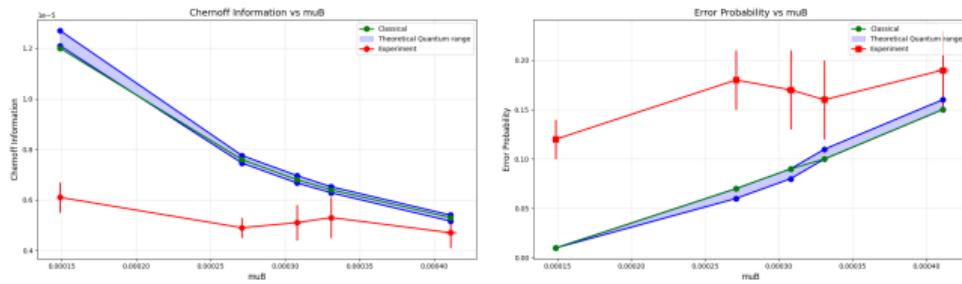


Figure: Picco con tanto rumore

# Risultati



## Passi successivi

DA SCRIVERE

Grazie per l'attenzione

# SPDC

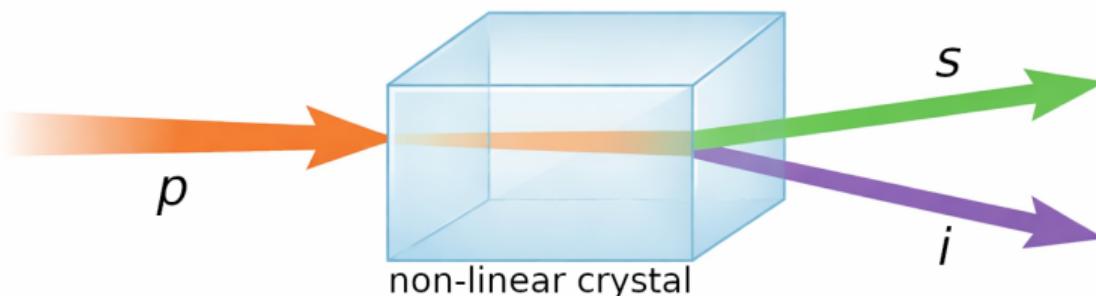
Equazione di Maxwell in un dielettrico:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Dove  $\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL}$  e  $\vec{P}_i^{NL} = \epsilon_0 \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} \cdot E_j E_k$ .

# SPDC

Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC):

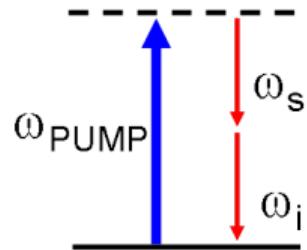


Il fotone di pompa (*p*) entra nel cristallo non lineare, ne escono i fotoni signal (*s*) e idler (*i*).

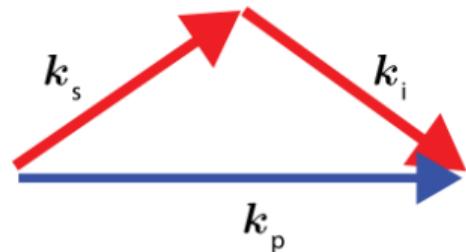
# SPDC

SPDC rispetta la conservazione di energia e impulso:

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i$$



$$\varphi_{\text{PUMP}} = \varphi_s + \varphi_i$$



$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$$

$$\text{Inoltre vale } \Delta\vec{k} = \vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_i = \vec{0}$$

## SPDC

Il processo è descritto dall'Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \sum_{k=p,s,i} \hbar\omega_k(\hat{n}_k + \frac{1}{2}) + \hbar g[\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p + h.c.]$$

Dove  $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  e  $h.c. = \text{hermitiano congiunto}$ .

Si dimostra facilmente che

$$[\hat{n}_s + \hat{n}_i + 2\hat{n}_p, \hat{H}] = 0$$

a mostrare come il fotone  $p$  si trasforma nei due fotoni  $s$  e  $i$ .

## SPDC

L'efficienza della SPDC è molto bassa (0.0004%).

Si può considerare  $p$  come un campo classico, e il numero di fotoni  $s$  e  $i$  trascurabile rispetto a  $p$ :

$$\hat{a}_p \longrightarrow a_p = v_p e^{-i\omega_p t}, \quad \langle \hat{n}_s(t) \rangle, \langle \hat{n}_i(t) \rangle \ll |v_p|^2$$

Allora:

$$\hat{H} = \sum_{k=p,s,i} \hbar\omega_k (\hat{n}_k + \frac{1}{2}) + \hbar g [\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger v_p e^{-i\omega_p t} + h.c.]$$

Da cui segue

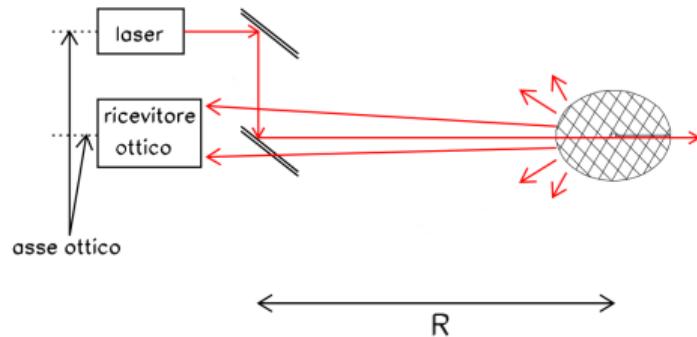
$$[\hat{n}_s - \hat{n}_i, \hat{H}] = 0$$

La differenza  $\hat{n}_s(t) - \hat{n}_i(t) = \hat{n}_s(0) - \hat{n}_i(0)$  è una costante del moto:  $s$  e  $i$  si creano nello stesso momento.

# LiDAR

Idea: sfruttare correlazioni quantistiche per migliorare la performance.

Vantaggio principalmente in situazioni ostili: rumore molto più intenso del segnale, riflettività del *target* bassa.



## Misure Phase-Insensitive

Nel caso classico,

$$\xi_{CB}^{(m)} = \min_{i,j} \xi_{CB}(P_i(\vec{n}), P_j(\vec{n})), \quad \xi_{TR}^{cla} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{cla}(P_B P_k, P_k P_B) = 2\mathcal{B}_{TD}^{cla}$$

Da cui segue

$$\xi_{coh} = 2C_{1/2}(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_B) = 2\mu_B + k\mu - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu}$$

Siamo in regime ottico: il background è monomodale e poissoniano,  
 $P_B(n) = \mathcal{P}_{\mu_B}(n)$ .

Lo slot contenente sia il target sia il noise avrà la convoluzione delle due statistiche.

## Misure Phase-Insensitive

Rimane come definire la *Classic Chernoff Information*. Sarà uno stato coerente.

$$\xi^{CLA}(p_0, p_1) := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{CLA}(p_0, p_1) = \max_{\alpha \in [0,1]} -\log(\sum_{\vec{n}} P_B(\vec{n})^\alpha P_k(\vec{n})^{1-\alpha})$$

E quindi per il TR ottengo

$$\xi_{TR}^{CLA} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{CLA}(P_B P_k, P_k P_B) = 2C_{1/2}^{CLA}(P_k, P_B)$$

E in generale

$$\xi_{coh} = 2C_{1/2}(P_k, P_B) = 2\mu_B + k\mu - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu}$$

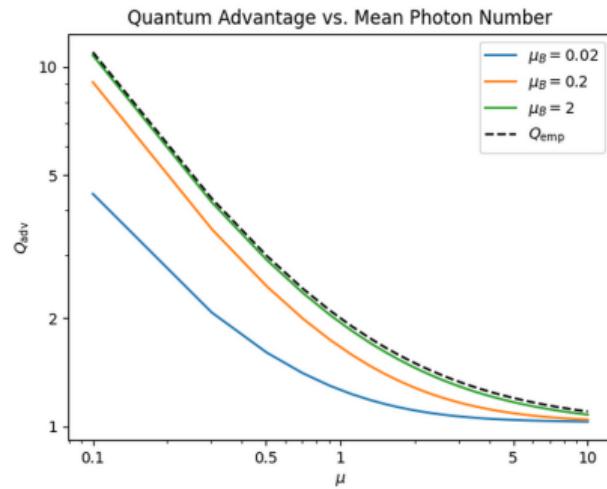
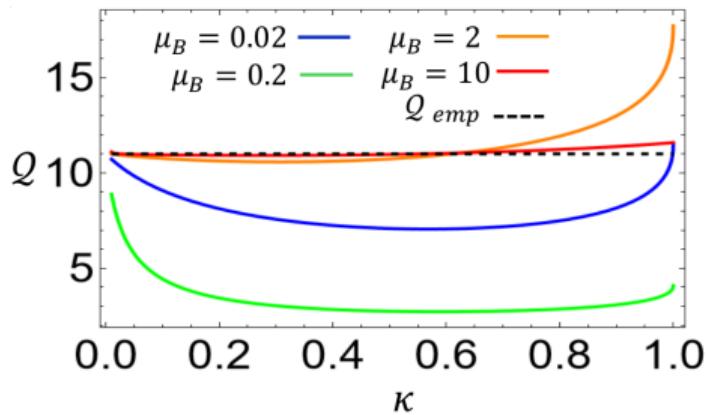
## Misure Phase-Insensitive

Il quantum probe è  $\rho_Q = (|TMSV\rangle\langle TMSV|)^{\otimes R}$ ,  $|TMSV\rangle = \sum_n c_n^{\mu_0} |n, n\rangle_{s.i} \langle n, n|$ .  
C'è correlazione perfetta tra *signal* e *idler*.

Definisco il *Quantum Advantage* come

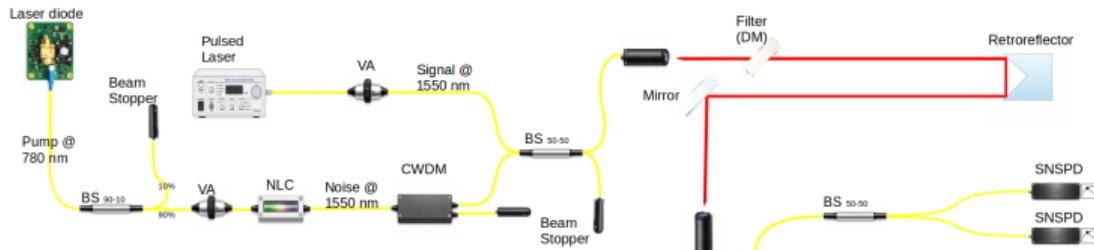
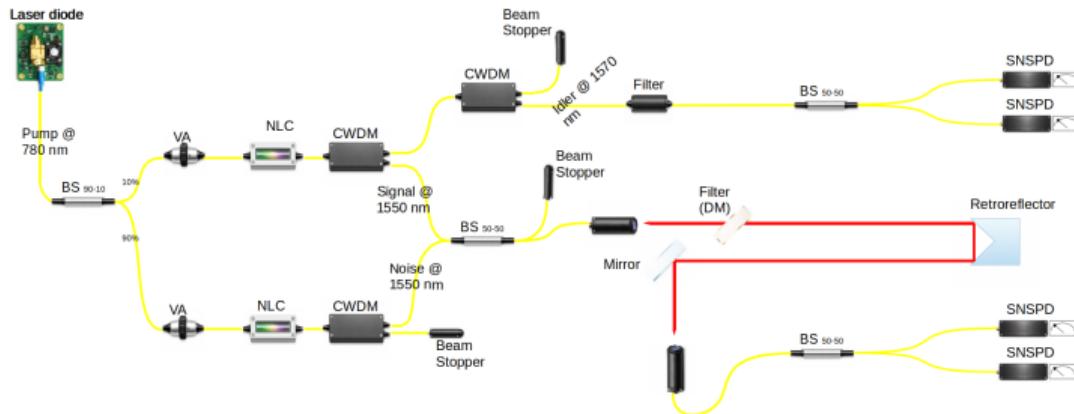
$$\mathcal{Q} := \frac{\xi_Q}{\xi_{coh}}$$

# Misure Phase-Insensitive



Limite empirico,  $\mathcal{Q} = 1 + \frac{1}{\mu}$  raggiunto per  $k \ll 1$  e  $\mu_B \gg 1$ .

# Setup sperimentale



# Quantum LiDAR

Regime sotto studio:

- segnale basso ( $\mu_0 \ll 1$ )
- riflettività del target bassa ( $k \ll 1$ )
- background alto ( $\mu_B \gg 1$ )

→ Situazione ostile

**Obiettivo:** ridurre la probabilità di errore  $p_{err}$  in

- *Detection:* target presente o assente
- *Ranging:* in quale time-bin è arrivato il ritorno