

Entanglement-based Quantum LiDAR

Esame di metà tesi

Federico Collé



UNIVERSITÀ
DI TORINO



Overview

- Tecnologie quantistiche
- Protocollo di ranging
- Spontaneous Parametric Down Conversion
- Setup sperimentale
- Risultati
- Conclusioni e passi successivi

Tecnologie quantistiche

Tecnologie quantistiche: applicazioni tecnologiche legate a fenomeni prettamente quantistici.

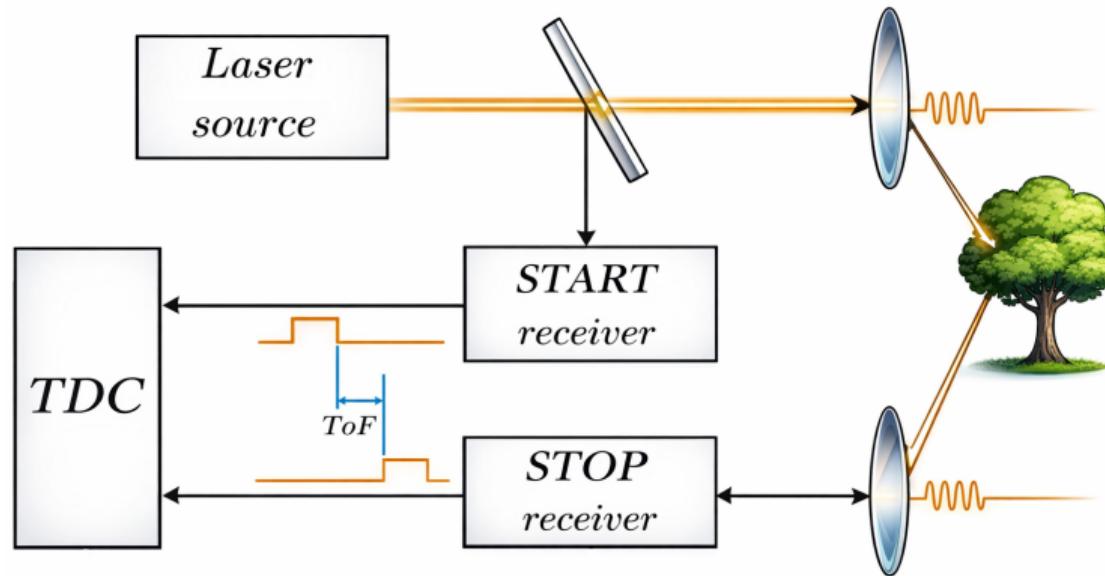
Alcuni esempi:

- Comunicazione quantistica
- Computazione quantistica
- Metrologia quantistica
- Quantum imaging & sensing



LiDAR

LIDAR = LIght Detection And **Ranging**.



È possibile migliorare il protocollo LiDAR sfruttando correlazioni quantistiche?

Quantum LiDAR

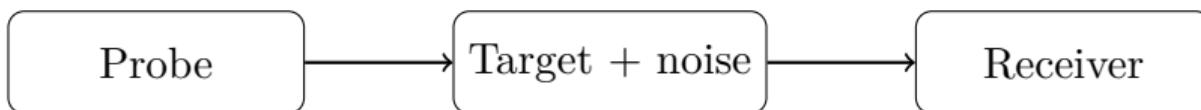
Regime sotto studio:

- segnale basso ($\mu_0 \ll 1$)
- riflettività del target bassa ($k \ll 1$)
- background alto ($\mu_B \gg 1$)

→ Situazione ostile

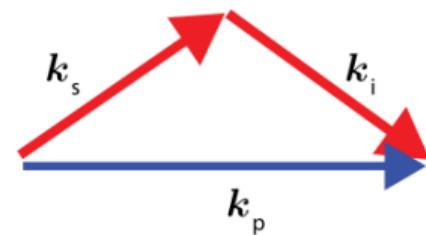
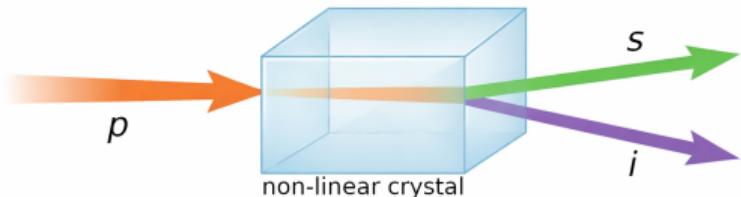
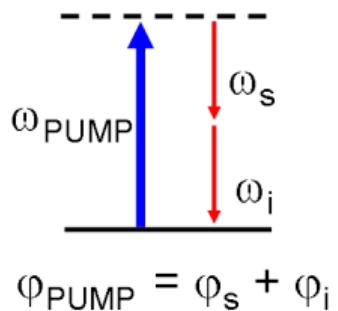
Obiettivo: ridurre la probabilità di errore p_{err} in

- *Detection:* target presente o assente
- *Ranging:* in quale time-bin è arrivato il ritorno



SPDC

Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC):



$[\hat{n}_s - \hat{n}_i, \hat{H}] = 0 \rightarrow$ signal e idler creati nello stesso momento.

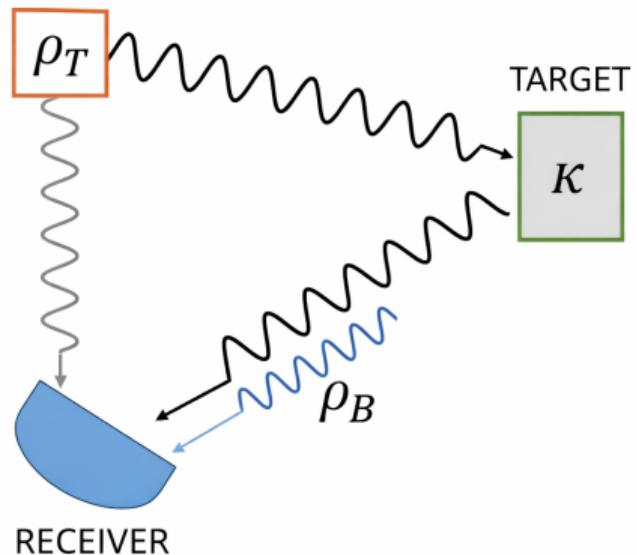
Quantum Target Detection (QTD)

- **Probe:** stato ρ_T con numero medio di fotoni μ_0
- **Background:** stato ρ_B con numero medio μ_B
- **Target:** riflettività $k \ll 1$
- **Canale:** $\rho_k = \mathcal{E}_{k,\mu_B}(\rho_T)$

Binary hypothesis testing:

$$\mathcal{H}_0 : \rho_R = \rho_B$$

$$\mathcal{H}_1 : \rho_R = \rho_k$$



Quantum Target Detection (QTD)

Misura eseguita con stato a multi-copia $\rho_T^{\otimes L}$.

Il canale \mathcal{E}_{k,μ_B} agisce indipendentemente su ogni copia.

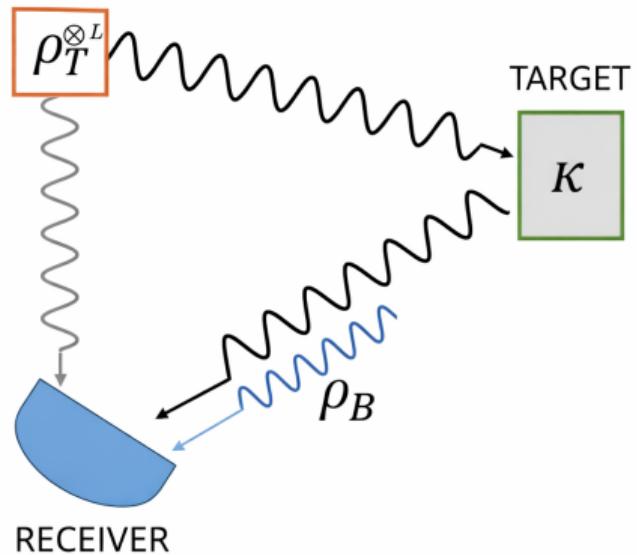
Per $L \rightarrow \infty$ vale il **Quantum Chernoff Bound** (QCB):

$$p_{err}(\rho_0^{\otimes L}, \rho_1^{\otimes L}) \leq \frac{1}{2} e^{-\xi_{QCB} L}$$

Con:

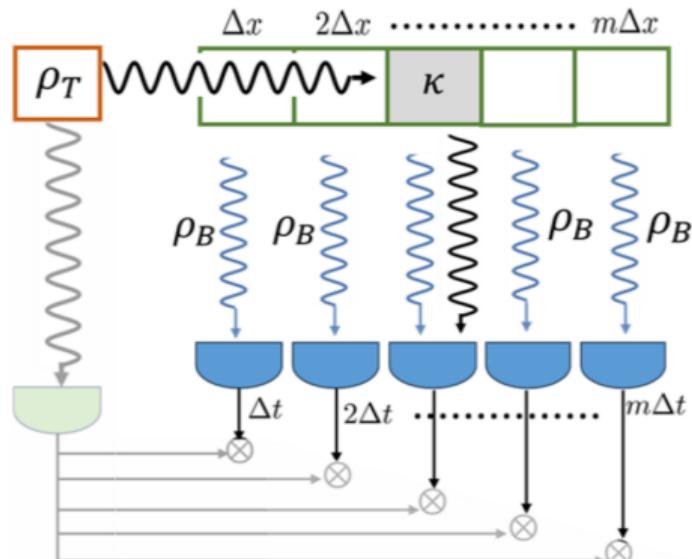
$$\xi_{QCB}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_0, \rho_1)$$

$$C_\alpha(\rho_0, \rho_1) := -\log(\text{Tr}[\rho_0^\alpha \rho_1^{1-\alpha}])$$



ξ_{QCB} = Chernoff information, C_α = α -information.

Quantum Target Ranging (QTR)



Ranging = stima del tempo di volo.
Asse dei tempi discretizzato in m slot:

$$\Delta t \Rightarrow m \text{ time-bin} \quad \Delta x = c \Delta t / 2$$

Problema a m ipotesi:

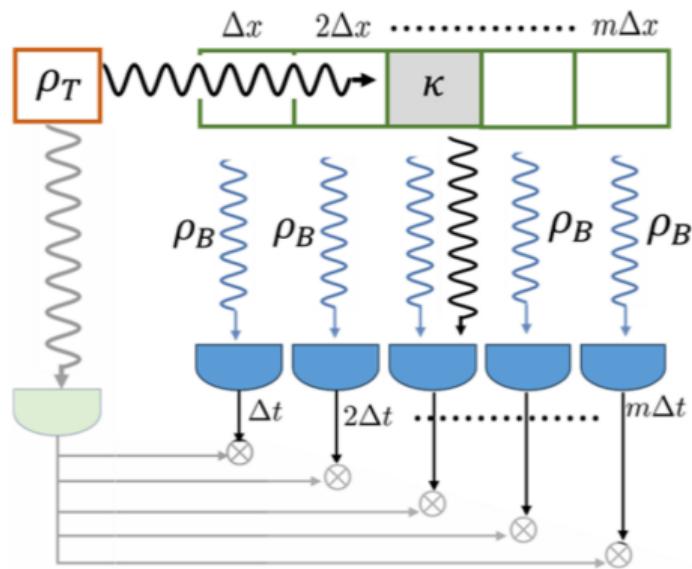
il target può cadere in uno degli m slot.

Problema a multi-hypothesis:

$$\mathcal{H}_j : \rho_R = \rho_j$$

$$\rho_j := \rho_k^{(j)} \bigotimes_{i \neq j}^{m-1} \rho_B^{(i)} \quad (\text{solo nello slot } j \text{ c'è target+rumore})$$

Quantum Target Ranging (QTR)



Per $L \gg 1$ la probabilità di errore decresce esponenzialmente:

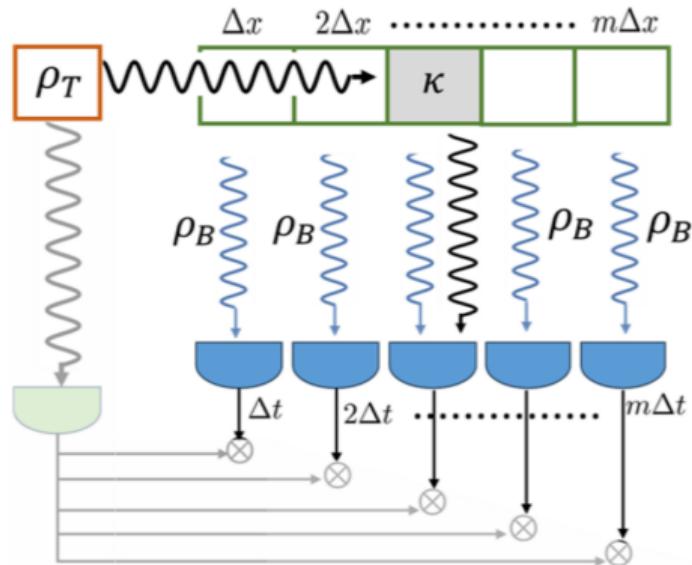
$$p_{\text{err}} \propto e^{-\xi^{(m)} L}$$

Asintoticamente vale:

$$\xi_{QCB}^{(m)} = \min_{i,j} \xi_{QCB}^{(2)}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$$

→ errore dominato dalle due ipotesi più difficili da distinguere (time-bin vicini).

Quantum Target Ranging (QTR)



Siccome $\rho_j := \rho_k^{(j)} \otimes_{i \neq j}^{m-1} \rho_B^{(i)}$, è possibile confrontare due ipotesi qualsiasi, ad esempio:

$$\rho_1 = \rho_k \otimes \rho_B \otimes \cdots \quad \rho_2 = \rho_B \otimes \rho_k \otimes \cdots$$

Allora, per la Chernoff information:

$$\xi_{TR} = \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_1, \rho_2) = 2 C_{1/2}(\rho_k, \rho_B)$$

$$\xi_{TD} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_B, \rho_k) \rightarrow \xi_{TR} \geq \xi_{TD} \rightarrow \boxed{p_{err}^{TR} \leq p_{err}^{TD}}$$

Misure Phase-Insensitive

Misura phase-insensitive → si misura solo il **numero di fotoni**

Per lo slot j ottengo una distribuzione di conteggi:

$$P_j(\vec{n}) = \text{Tr}[\rho_j |\vec{n}\rangle\langle\vec{n}|], \quad |\vec{n}\rangle = \bigotimes_i |n_i\rangle$$

La best ranging performance è proporzionale a un set di distribuzioni di probabilità classiche

$$\{P_1(\vec{n}), \dots, P_m(\vec{n})\}$$

Misure Phase-Insensitive

Benchmark classico: probe è stato coerente

$$\xi_{coh} = 2\mu_B + k\mu_0 - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu_0}$$

Probe quantistico: $\rho_Q = \rho_{TMSV}^{\otimes R}$

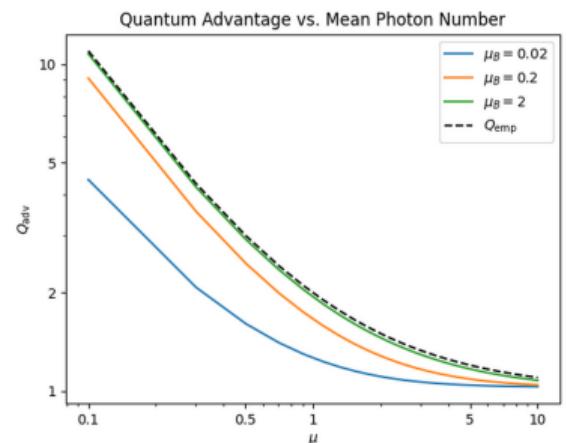
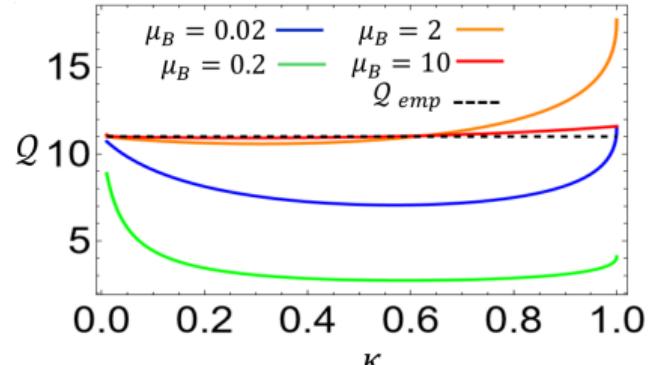
$$\rho_{TMSV} = (|TMSV\rangle\langle TMSV|)$$

$$|TMSV\rangle = \sum_n c_n^{\mu_0} |n, n\rangle_{s.i} \langle n, n|$$

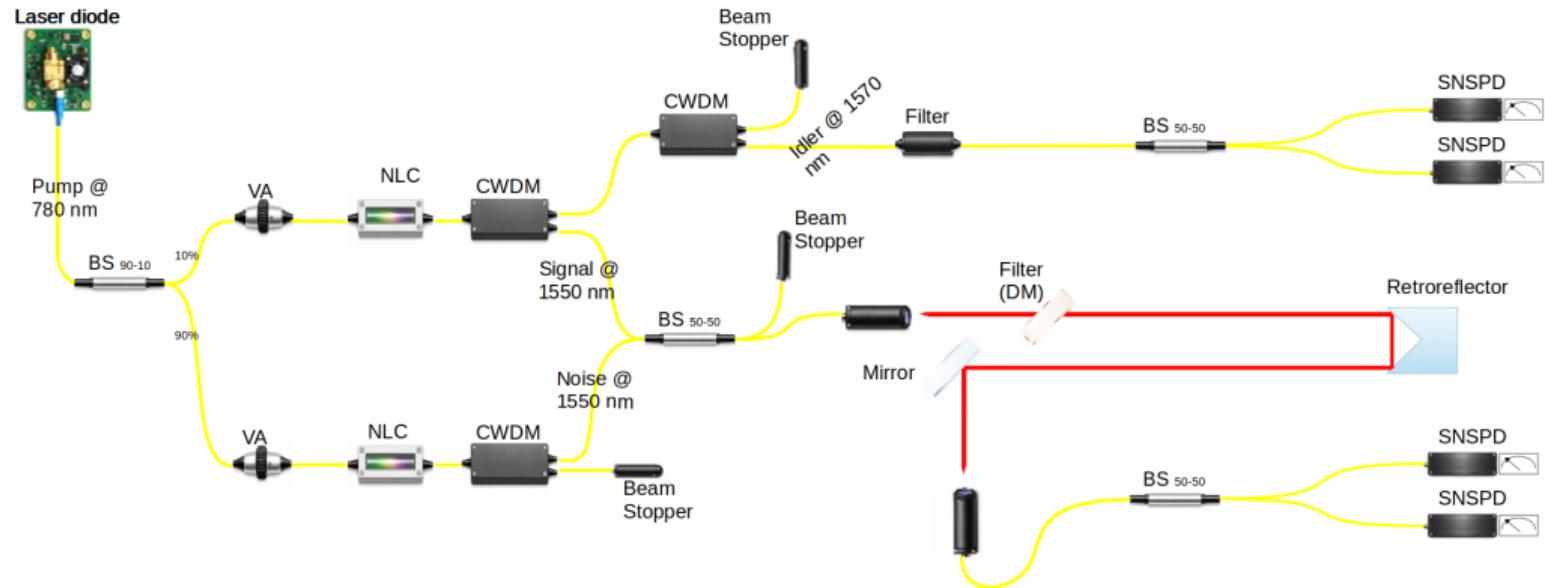
Quantum advantage:

$$\mathcal{Q} := \frac{\xi_Q}{\xi_{coh}}$$

Limite empirico: $\mathcal{Q}_{emp} = 1 + \frac{1}{\mu_0}$ ($k \ll 1$, $\mu_B \gg 1$).



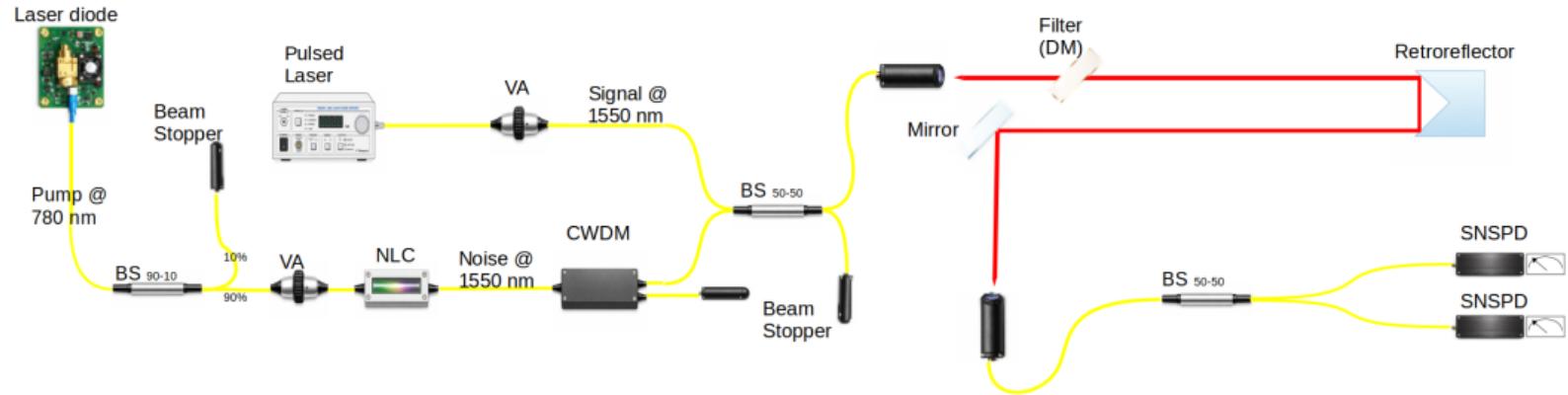
Setup sperimentale



BS: Beam Splitter VA: Variable Attenuator NLC: Non Linear Crystal CWDM: Coarse Wavelength Division Multiplexing

DM: Dichroic Mirror SNSPD: Superconducting Nanowire Single Photon detector

Setup sperimentale

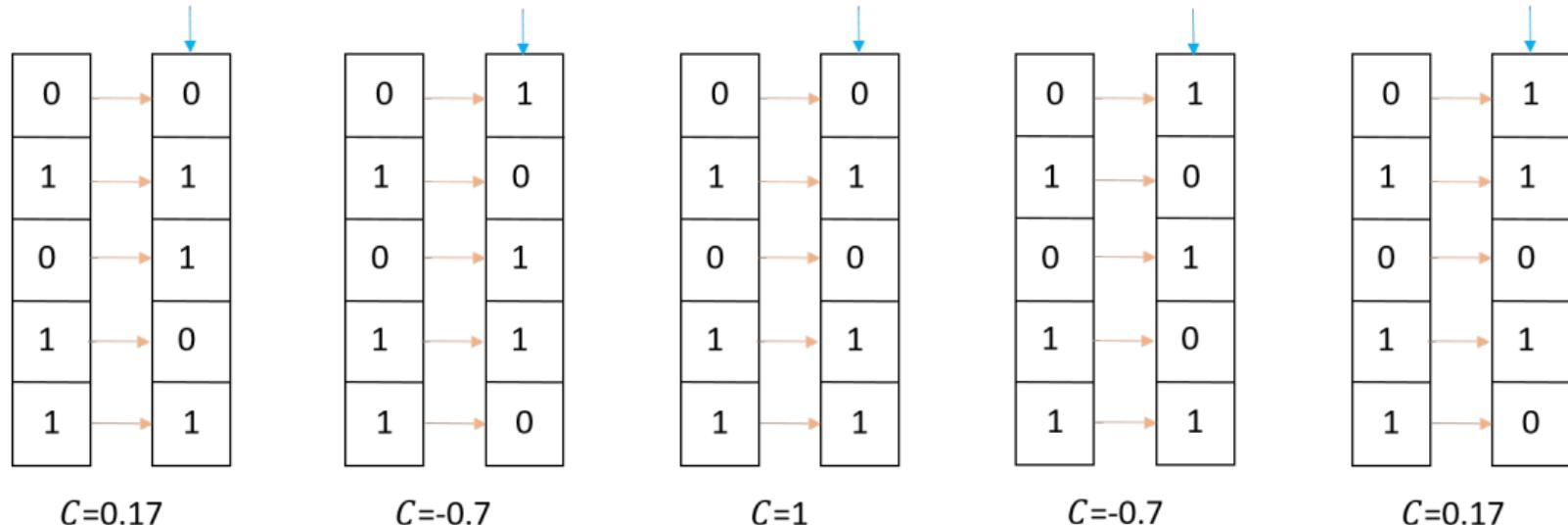


BS: Beam Splitter VA: Variable Attenuator NLC: Non Linear Crystal CWDM: Coarse Wavelength Division Multiplexing

DM: Dichroic Mirror SNSPD: Superconducting Nanowire Single Photon detector

Analisi dei dati

I conteggi dei dati vengono salvati in delle stringhe in base al tempo di arrivo.



Le stringhe vengono shiftate fino a trovare la posizione con il maggior coefficiente di Pearson, $C = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Analisi dei dati

Viene prima individuato il picco senza rumore, poi si aggiunge il rumore dopo.

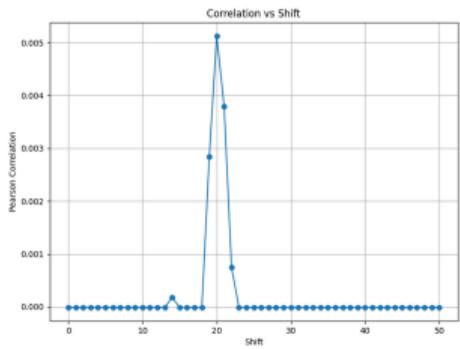


Figure: Picco senza rumore

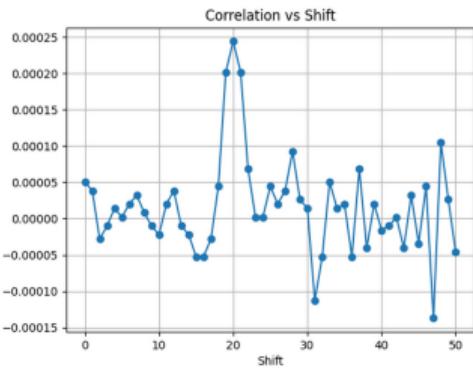


Figure: Picco con rumore

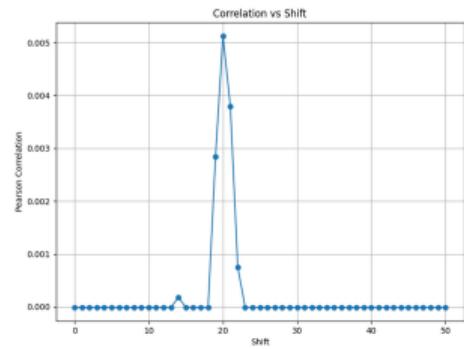


Figure: Picco con tanto rumore

Risultati

Grazie per l'attenzione

SPDC

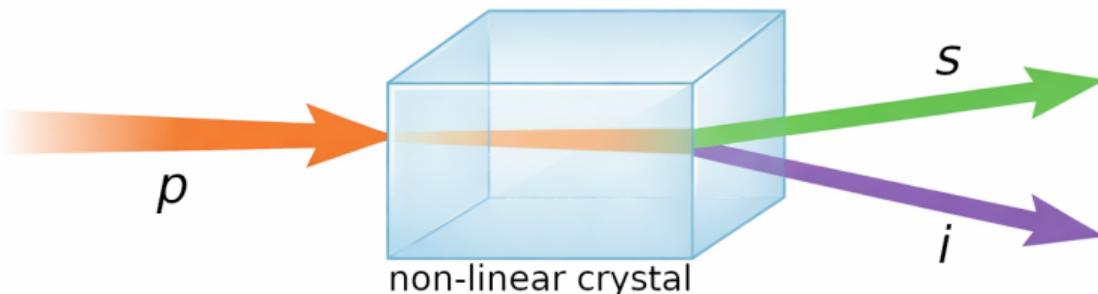
Equazione di Maxwell in un dielettrico:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Dove $\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL}$ e $\vec{P}_i^{NL} = \epsilon_0 \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} \cdot E_j E_k$.

SPDC

Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC):

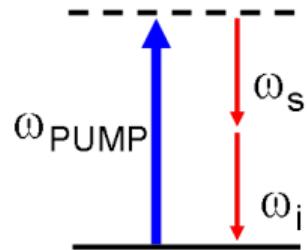


Il fotone di pompa (p) entra nel cristallo non lineare, ne escono i fotoni signal (s) e idler (i).

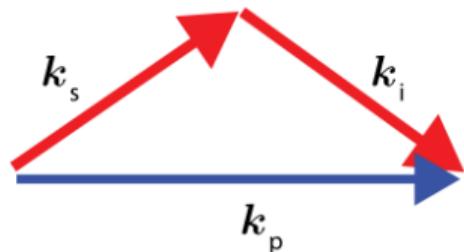
SPDC

SPDC rispetta la conservazione di energia e impulso:

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i$$



$$\varphi_{\text{PUMP}} = \varphi_s + \varphi_i$$



$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$$

$$\text{Inoltre vale } \Delta \vec{k} = \vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_i = \vec{0}$$

SPDC

Il processo è descritto dall'Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \sum_{k=p,s,i} \hbar\omega_k(\hat{n}_k + \frac{1}{2}) + \hbar g[\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p + h.c.]$$

Dove $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ e $h.c. = \text{hermitiano congiunto}$.

Si dimostra facilmente che

$$[\hat{n}_s + \hat{n}_i + 2\hat{n}_p, \hat{H}] = 0$$

a mostrare come il fotone p si trasforma nei due fotoni s e i .

SPDC

L'efficienza della SPDC è molto bassa (0.0004%).

Si può considerare p come un campo classico, e il numero di fotoni s e i trascurabile rispetto a p :

$$\hat{a}_p \longrightarrow a_p = v_p e^{-i\omega_p t}, \quad \langle \hat{n}_s(t) \rangle, \langle \hat{n}_i(t) \rangle \ll |v_p|^2$$

Allora:

$$\hat{H} = \sum_{k=p,s,i} \hbar\omega_k (\hat{n}_k + \frac{1}{2}) + \hbar g [\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger v_p e^{-i\omega_p t} + h.c.]$$

Da cui segue

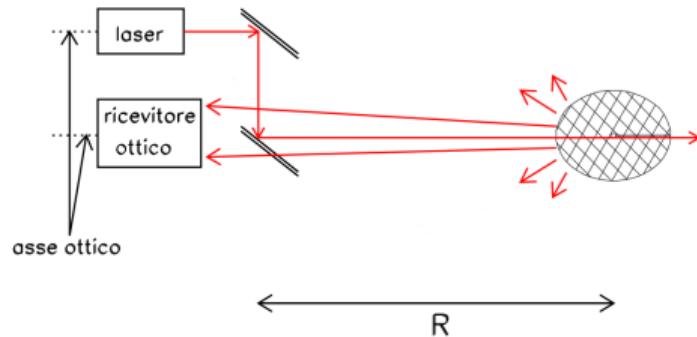
$$[\hat{n}_s - \hat{n}_i, \hat{H}] = 0$$

La differenza $\hat{n}_s(t) - \hat{n}_i(t) = \hat{n}_s(0) - \hat{n}_i(0)$ è una costante del moto: s e i si creano nello stesso momento.

LiDAR

Idea: sfruttare correlazioni quantistiche per migliorare la performance.

Vantaggio principalmente in situazioni ostili: rumore molto più intenso del segnale, riflettività del *target* bassa.



Misure Phase-Insensitive

Nel caso classico,

$$\xi_{CB}^{(m)} = \min_{i,j} \xi_{CB}(P_i(\vec{n}), P_j(\vec{n})), \quad \xi_{TR}^{cla} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{cla}(P_B P_k, P_k P_B) = 2\mathcal{B}_{TD}^{cla}$$

Da cui segue

$$\xi_{coh} = 2C_{1/2}(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_B) = 2\mu_B + k\mu - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu}$$

Siamo in regime ottico: il background è monomodale e poissoniano,
 $P_B(n) = \mathcal{P}_{\mu_B}(n)$.

Lo slot contenente sia il target sia il noise avrà la convoluzione delle due statistiche.

Misure Phase-Insensitive

Rimane come definire la *Classic Chernoff Information*. Sarà uno stato coerente.

$$\xi^{CLA}(p_0, p_1) := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{CLA}(p_0, p_1) = \max_{\alpha \in [0,1]} -\log(\sum_{\vec{n}} P_B(\vec{n})^\alpha P_k(\vec{n})^{1-\alpha})$$

E quindi per il TR ottengo

$$\xi_{TR}^{CLA} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{CLA}(P_B P_k, P_k P_B) = 2C_{1/2}^{CLA}(P_k, P_B)$$

E in generale

$$\xi_{coh} = 2C_{1/2}(P_k, P_B) = 2\mu_B + k\mu - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu}$$

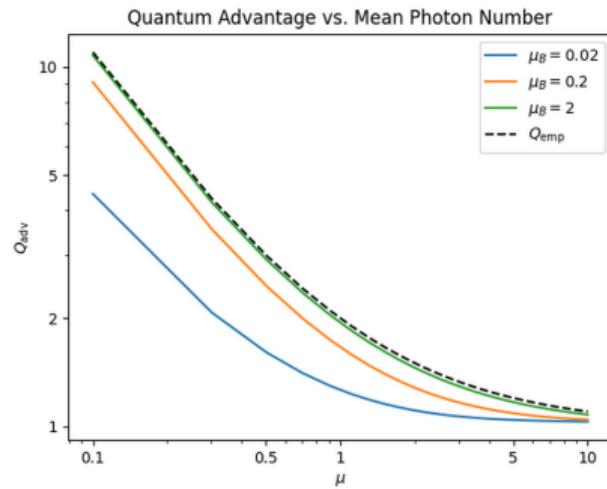
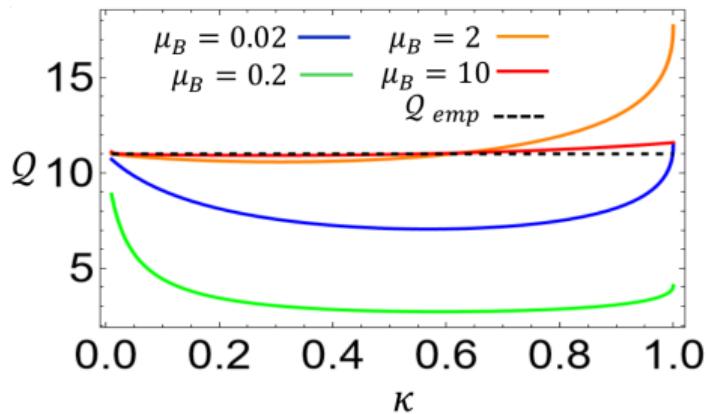
Misure Phase-Insensitive

Il quantum probe è $\rho_Q = (|TMSV\rangle\langle TMSV|)^{\otimes R}$, $|TMSV\rangle = \sum_n c_n^{\mu_0} |n, n\rangle_{s.i} \langle n, n|$.
C'è correlazione perfetta tra *signal* e *idler*.

Definisco il *Quantum Advantage* come

$$\mathcal{Q} := \frac{\xi_Q}{\xi_{coh}}$$

Misure Phase-Insensitive



Limite empirico, $\mathcal{Q} = 1 + \frac{1}{\mu}$ raggiunto per $k \ll 1$ e $\mu_B \gg 1$.

Setup sperimentale

