

Entanglement-based Quantum LiDAR

Esame di metà tesi

Federico Collé



**UNIVERSITÀ
DI TORINO**



Relatore: Prof. Leonardo Castellani

Co-relatori: Dr. Ivano Ruo Berchera
Dr. Alessio Avella

Overview

- Tecnologie quantistiche
- LiDAR
- Spontaneous Parametric Down Conversion
- Quantum Target Detection & Ranging
- Misure Phase-Insensitive
- Setup sperimentale & Analisi dati
- Passi successivi

Tecnologie quantistiche

Tecnologie quantistiche: applicazioni tecnologiche legate a fenomeni prettamente quantistici.

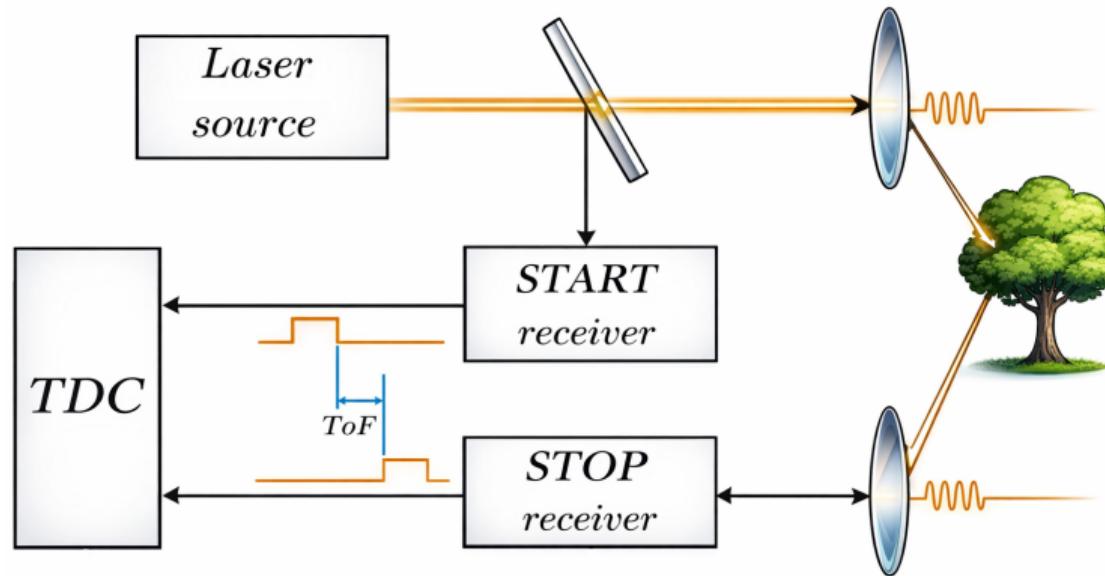
Alcuni esempi:

- Quantum computation
- Quantum communication
- Quantum simulation
- Quantum metrology & sensing
→ **imaging**



LiDAR

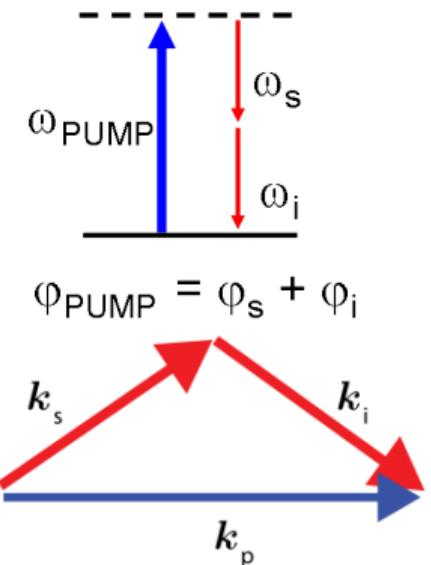
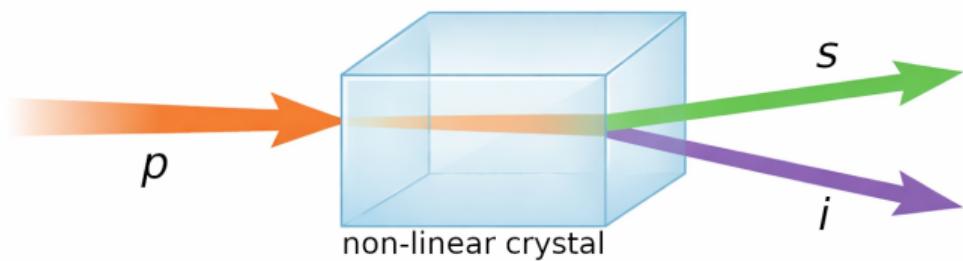
LIDAR = LIght Detection And **Ranging**.



È possibile migliorare il protocollo LiDAR sfruttando correlazioni quantistiche?

SPDC

Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC):



SPDC

$[\hat{n}_s - \hat{n}_i, \hat{H}] = 0 \rightarrow$ correlazione fra *signal* e *idler*.

Quantum Target Detection (QTD)

Protocollo: **Quantum Illumination**

Vantaggio in situazione ostile:

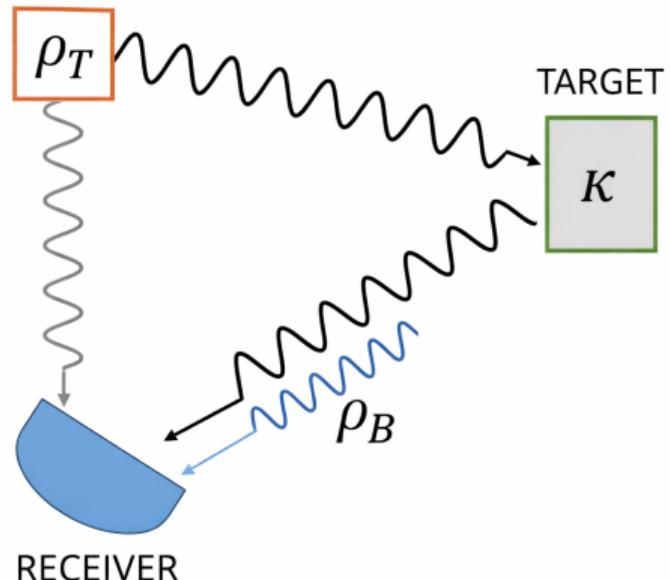
- Probe: stato ρ_T , numero medio di fotoni $\mu_0 \ll 1$
- Background: stato ρ_B , numero medio di fotoni $\mu_B \gg 1$
- Target: riflettività $k \ll 1$

Target modellizzato da canale rumoroso e con perdite: $\rho_k = \mathcal{E}_{k,\mu_B}(\rho_T)$

Binary hypothesis testing:

$$\mathcal{H}_0 : \rho_R = \rho_B$$

$$\mathcal{H}_1 : \rho_R = \rho_k$$



Quantum Target Detection (QTD)

Misura eseguita con stato a multi-copia $\rho_T^{\otimes L}$.

\mathcal{E}_{k,μ_B} agisce indipendentemente su ogni copia.

Per $L \rightarrow \infty$ vale il **Quantum Chernoff Bound** (QCB):

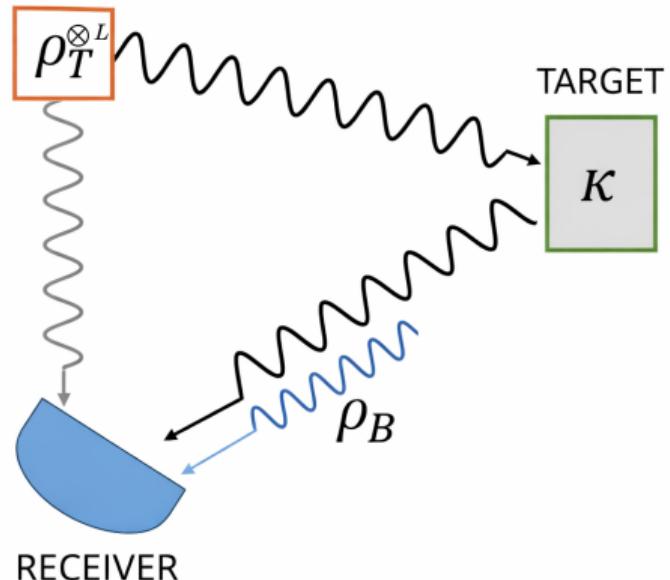
$$p_{err}(\rho_0^{\otimes L}, \rho_1^{\otimes L}) \leq \frac{1}{2} e^{-\xi_{QCB} L}$$

Con:

$$\xi_{QCB}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_0, \rho_1)$$

$$C_\alpha(\rho_0, \rho_1) := -\log(\text{Tr}[\rho_0^\alpha \rho_1^{1-\alpha}])$$

ξ_{QCB} = Chernoff information,
 C_α = α -information.



Quantum Target Detection (QTD)

Con entangled ancilla mode si raggiunge un quantum advantage di **6 dB**.

Problemi del QTD:

- 6 dB solo per apparati estremamente complessi
- storage dell'idler richiede quantum memories
- c'è vantaggio solo per bassi *SNR*

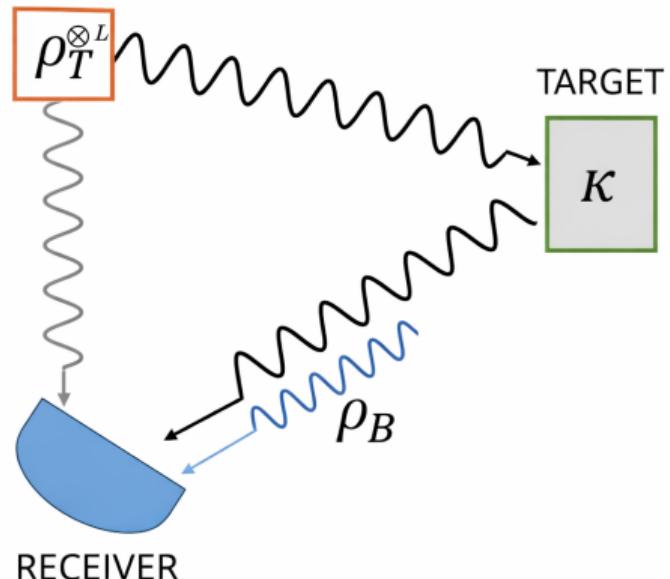
S. Lloyd, Science 321, 1463 (2008)

Tan et al., Phys. Rev. Lett. 101, 253601 (2008)

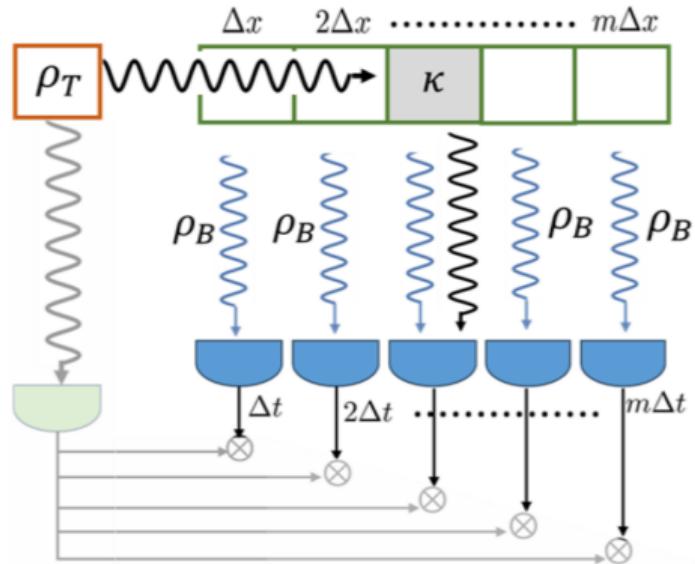
J. Shapiro, IEEE A&E Systems Magazine 35, 8 (2020)

Torromé & Barzanjeh, Prog. Quantum Electron. 93 (2024)

Sorelli et al., IEEE A&E Systems Magazine 37 (2021)



Quantum Target Ranging (QTR)



ρ_j è lo stato con target + rumore.

Ranging = stima del tempo di volo.
Asse dei tempi discretizzato in m slot lunghi Δt :

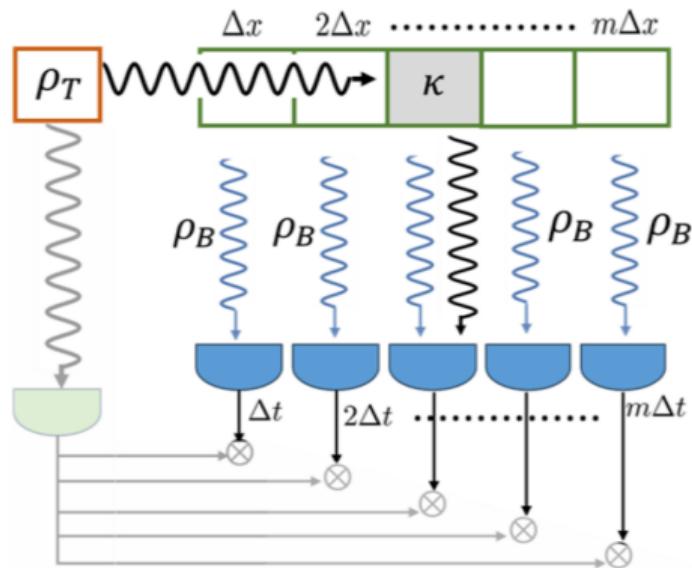
$$\Delta x = c \Delta t / 2 \quad x = j \Delta x$$

il target si trova in uno degli m slot.

Multi-hypothesis testing:

$$\mathcal{H}_j : \rho_R = \rho_j$$

Quantum Target Ranging (QTR)



Per $L \gg 1$, $p_{\text{err}} \propto e^{-\xi^{(m)} L}$

Asintoticamente, QTR diventa problema binario:

$$\xi_{QCB}^{(m)} = \min_{i,j} \xi_{QCB}^{(2)}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$$

Se $\rho_1 = \rho_k \otimes \rho_B \otimes \dots$ e $\rho_2 = \rho_B \otimes \rho_k \otimes \dots$, allora

$$\xi_{TR} = \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_1, \rho_2) = 2 C_{1/2}(\rho_k, \rho_B)$$

$$\xi_{TD} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha(\rho_B, \rho_k) \rightarrow \xi_{TR} \geq \xi_{TD} \rightarrow \boxed{p_{\text{err}}^{\text{TR}} \leq p_{\text{err}}^{\text{TD}}}$$

Misure Phase-Insensitive

In regime ottico è difficile e poco pratico preservare la fase.

→ **Misura phase-insensitive:** si misura solo il numero di fotoni.

Caso **quantistico:** $\rho_Q = \rho_{\text{TMSV}}^{\otimes R}$

$$\rho_{\text{TMSV}} = (|TMSV\rangle\langle TMSV|)$$

$$|TMSV\rangle = \sum_n c_n^{\mu_0} |n, n\rangle_{s.i} \langle n, n|$$

Per lo slot j si ha distribuzione di conteggi:

$$P_j(\vec{n}) = \text{Tr}[\rho_j |\vec{n}\rangle\langle \vec{n}|], \quad |\vec{n}\rangle = \bigotimes_i |n_i\rangle$$

Si ottiene un set di distribuzioni di probabilità classiche:

$$\{P_1(\vec{n}), \dots, P_m(\vec{n})\}$$

Misure Phase-Insensitive

Caso **classico**: probe è stato coerente.

$$\text{Vale } \xi_{\text{coh}} = 2\mu_B + k\mu_0 - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu_0}$$

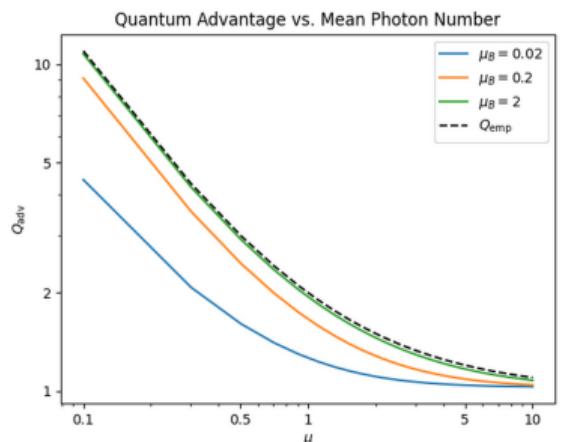
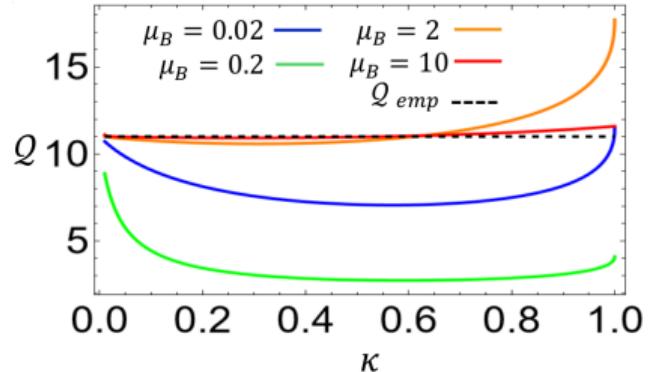
Quantum advantage:

$$Q := \frac{\xi_Q}{\xi_{\text{coh}}}$$

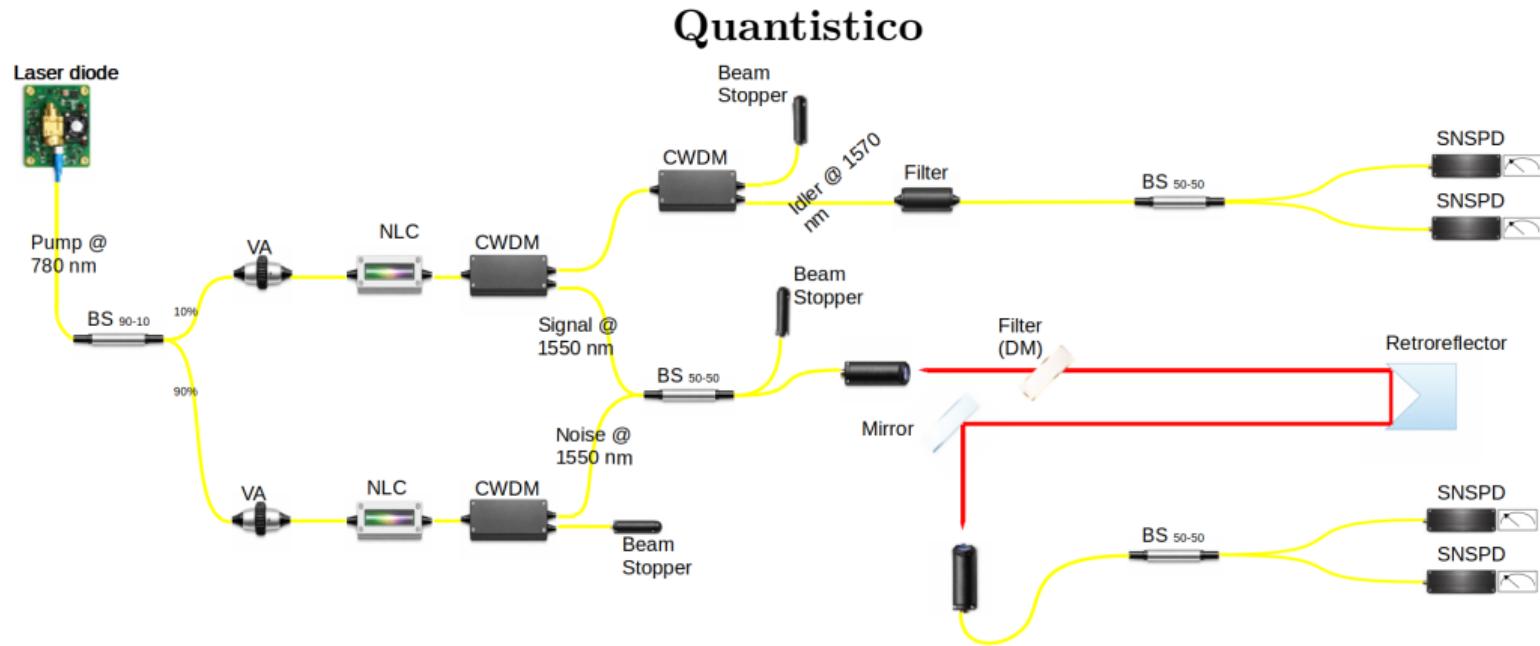
$$\text{Limite empirico: } Q_{\text{emp}} = 1 + \frac{1}{\mu_0}.$$

Lopaeva et al., Phys. Rev. Lett. 110, 153603 (2013)

Ortolano & Ruo Berchera, Phys. Rev. Res. 7, L022059 (2025)



Setup sperimentale

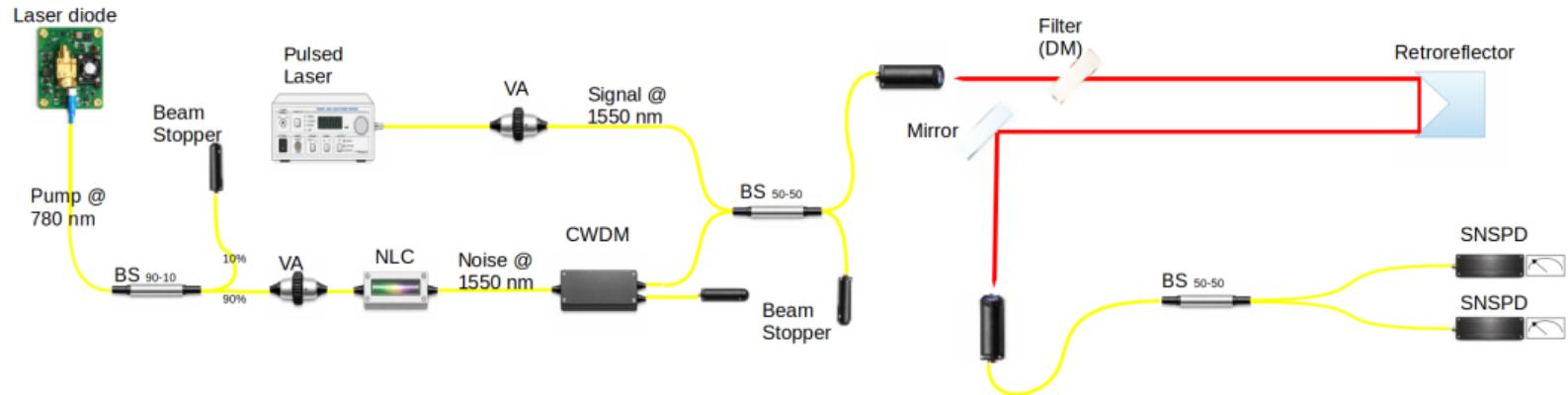


BS: Beam Splitter VA: Variable Attenuator NLC: Non Linear Crystal CWDM: Coarse Wavelength Division Multiplexing

DM: Dichroic Mirror SNSPD: Superconducting Nanowire Single Photon detector

Setup sperimentale

Classico

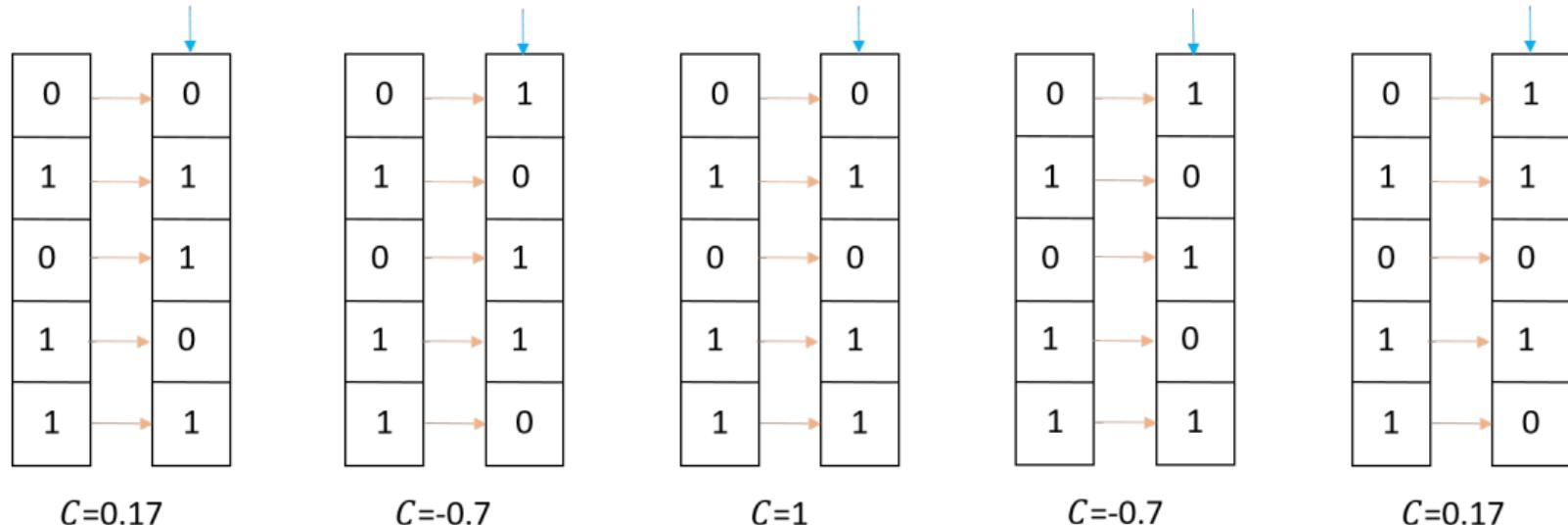


BS: Beam Splitter VA: Variable Attenuator NLC: Non Linear Crystal CWDM: Coarse Wavelength Division Multiplexing

DM: Dichroic Mirror SNSPD: Superconducting Nanowire Single Photon detector

Analisi dati

I conteggi degli SNSPD vengono salvati in stringhe in base al tempo di arrivo.



Le stringhe vengono shiftate fino a trovare il picco del coefficiente di Pearson,
 $C = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Analisi dati

Il picco è inizialmente individuato quando il rumore è assente.
La posizione individuata è la posizione vera del picco.

$$p_{err, \ exp} = \frac{1 - err}{total}$$

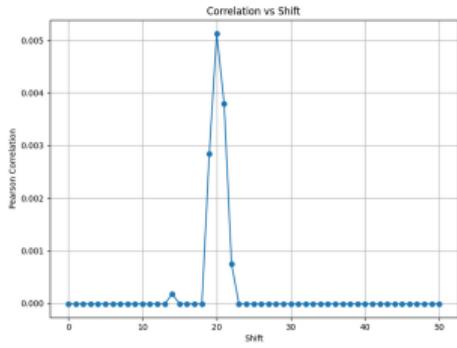


Figure: Picco senza rumore

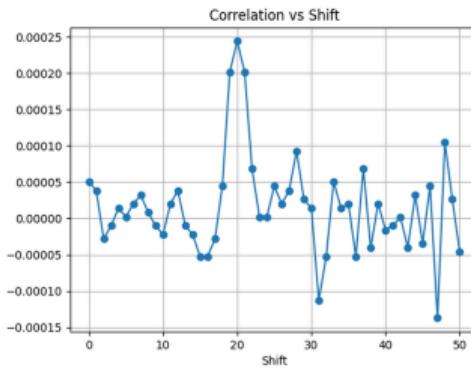


Figure: Picco con rumore

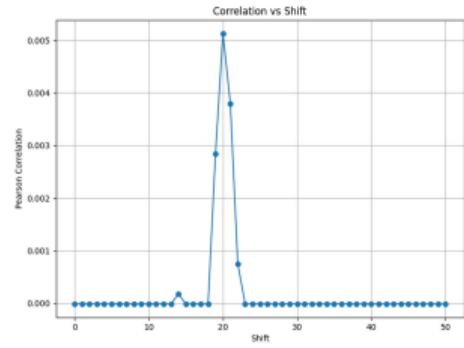
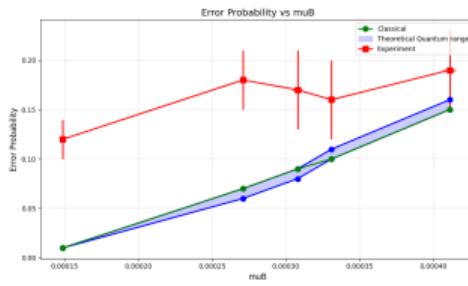
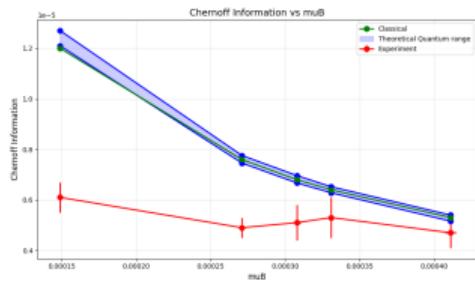


Figure: Picco con tanto rumore

Risultati



Passi successivi

DA SCRIVERE

Grazie per l'attenzione

SPDC

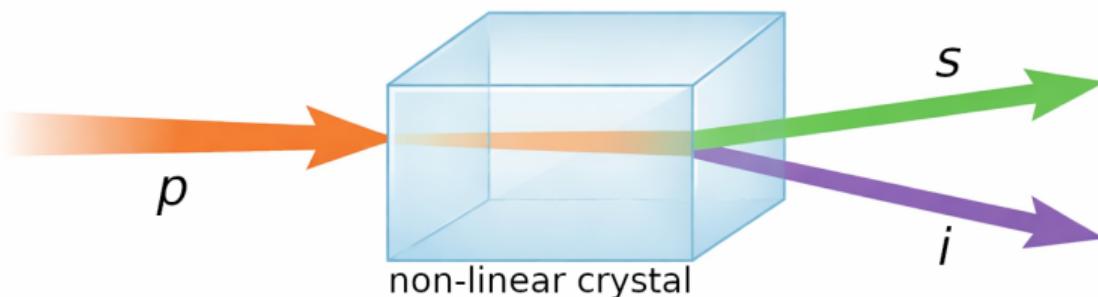
Equazione di Maxwell in un dielettrico:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Dove $\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL}$ e $\vec{P}_i^{NL} = \epsilon_0 \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} \cdot E_j E_k$.

SPDC

Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC):

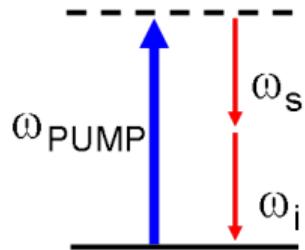


Il fotone di pompa (p) entra nel cristallo non lineare, ne escono i fotoni signal (s) e idler (i).

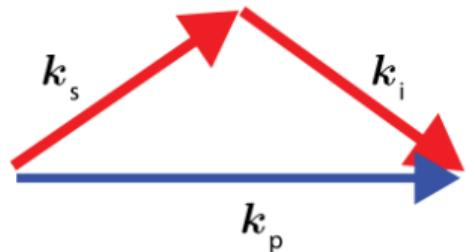
SPDC

SPDC rispetta la conservazione di energia e impulso:

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i$$



$$\varphi_{\text{PUMP}} = \varphi_s + \varphi_i$$



$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$$

$$\text{Inoltre vale } \Delta\vec{k} = \vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_i = \vec{0}$$

SPDC

Il processo è descritto dall'Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \sum_{k=p,s,i} \hbar\omega_k(\hat{n}_k + \frac{1}{2}) + \hbar g[\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p + h.c.]$$

Dove $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ e $h.c. = \text{hermitiano congiunto}$.

Si dimostra facilmente che

$$[\hat{n}_s + \hat{n}_i + 2\hat{n}_p, \hat{H}] = 0$$

a mostrare come il fotone p si trasforma nei due fotoni s e i .

SPDC

L'efficienza della SPDC è molto bassa (0.0004%).

Si può considerare p come un campo classico, e il numero di fotoni s e i trascurabile rispetto a p :

$$\hat{a}_p \longrightarrow a_p = v_p e^{-i\omega_p t}, \quad \langle \hat{n}_s(t) \rangle, \langle \hat{n}_i(t) \rangle \ll |v_p|^2$$

Allora:

$$\hat{H} = \sum_{k=p,s,i} \hbar\omega_k (\hat{n}_k + \frac{1}{2}) + \hbar g [\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger v_p e^{-i\omega_p t} + h.c.]$$

Da cui segue

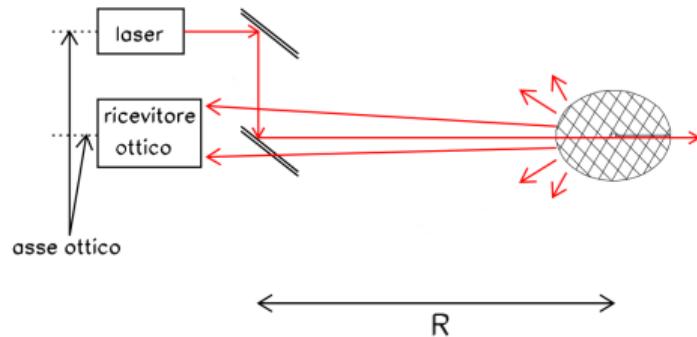
$$[\hat{n}_s - \hat{n}_i, \hat{H}] = 0$$

La differenza $\hat{n}_s(t) - \hat{n}_i(t) = \hat{n}_s(0) - \hat{n}_i(0)$ è una costante del moto: s e i si creano nello stesso momento.

LiDAR

Idea: sfruttare correlazioni quantistiche per migliorare la performance.

Vantaggio principalmente in situazioni ostili: rumore molto più intenso del segnale, riflettività del *target* bassa.



Misure Phase-Insensitive

Nel caso classico,

$$\xi_{CB}^{(m)} = \min_{i,j} \xi_{CB}(P_i(\vec{n}), P_j(\vec{n})), \quad \xi_{TR}^{cla} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{cla}(P_B P_k, P_k P_B) = 2\mathcal{B}_{TD}^{cla}$$

Da cui segue

$$\xi_{coh} = 2C_{1/2}(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_B) = 2\mu_B + k\mu - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu}$$

Siamo in regime ottico: il background è monomodale e poissoniano,
 $P_B(n) = \mathcal{P}_{\mu_B}(n)$.

Lo slot contenente sia il target sia il noise avrà la convoluzione delle due statistiche.

Misure Phase-Insensitive

Rimane come definire la *Classic Chernoff Information*. Sarà uno stato coerente.

$$\xi^{CLA}(p_0, p_1) := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{CLA}(p_0, p_1) = \max_{\alpha \in [0,1]} -\log(\sum_{\vec{n}} P_B(\vec{n})^\alpha P_k(\vec{n})^{1-\alpha})$$

E quindi per il TR ottengo

$$\xi_{TR}^{CLA} := \max_{\alpha \in [0,1]} C_\alpha^{CLA}(P_B P_k, P_k P_B) = 2C_{1/2}^{CLA}(P_k, P_B)$$

E in generale

$$\xi_{coh} = 2C_{1/2}(P_k, P_B) = 2\mu_B + k\mu - 2\sqrt{\mu_B}\sqrt{\mu_B + k\mu}$$

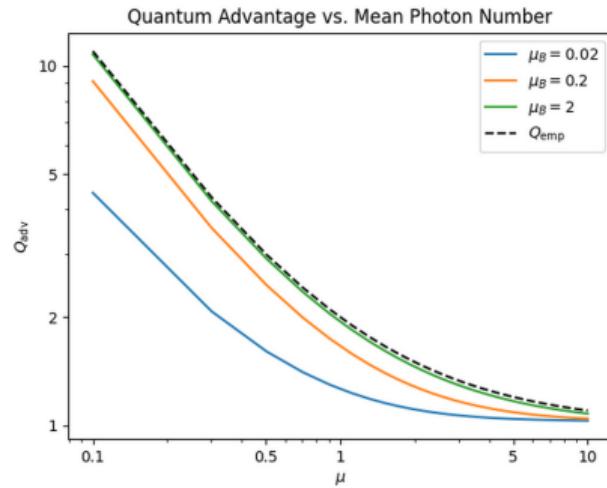
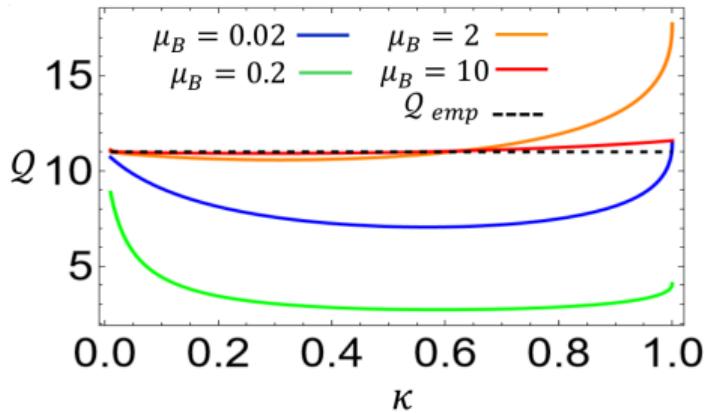
Misure Phase-Insensitive

Il quantum probe è $\rho_Q = (|TMSV\rangle\langle TMSV|)^{\otimes R}$, $|TMSV\rangle = \sum_n c_n^{\mu_0} |n, n\rangle_{s.i} \langle n, n|$.
C'è correlazione perfetta tra *signal* e *idler*.

Definisco il *Quantum Advantage* come

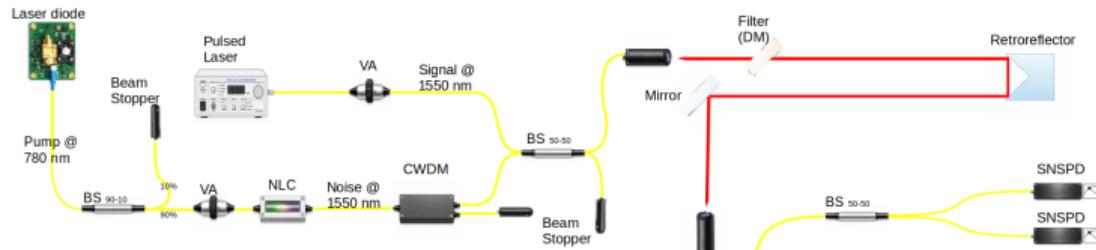
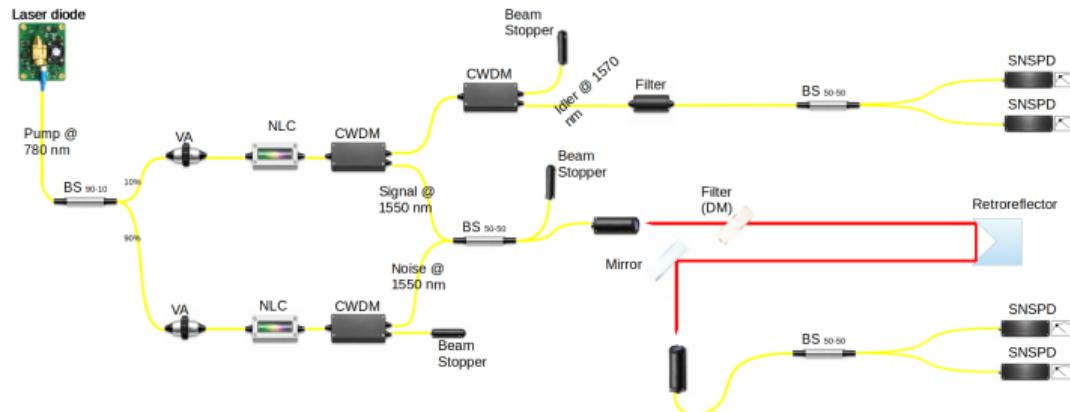
$$\mathcal{Q} := \frac{\xi_Q}{\xi_{coh}}$$

Misure Phase-Insensitive



Limite empirico, $\mathcal{Q} = 1 + \frac{1}{\mu}$ raggiunto per $k \ll 1$ e $\mu_B \gg 1$.

Setup sperimentale



Quantum LiDAR

Regime sotto studio:

- segnale basso ($\mu_0 \ll 1$)
- riflettività del target bassa ($k \ll 1$)
- background alto ($\mu_B \gg 1$)

→ Situazione ostile

Obiettivo: ridurre la probabilità di errore p_{err} in

- *Detection:* target presente o assente
- *Ranging:* in quale time-bin è arrivato il ritorno