Guida al Mondo delle Funzioni Matematiche

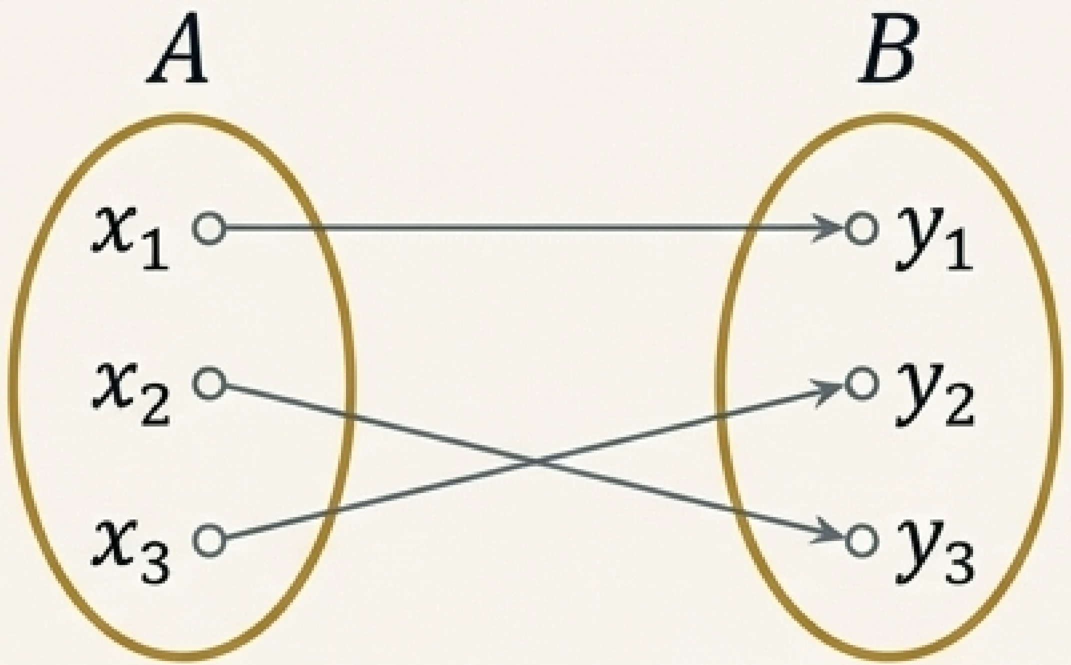
Un'esplorazione dei concetti, delle proprietà e delle classificazioni fondamentali.

Che Cos'è una Funzione?

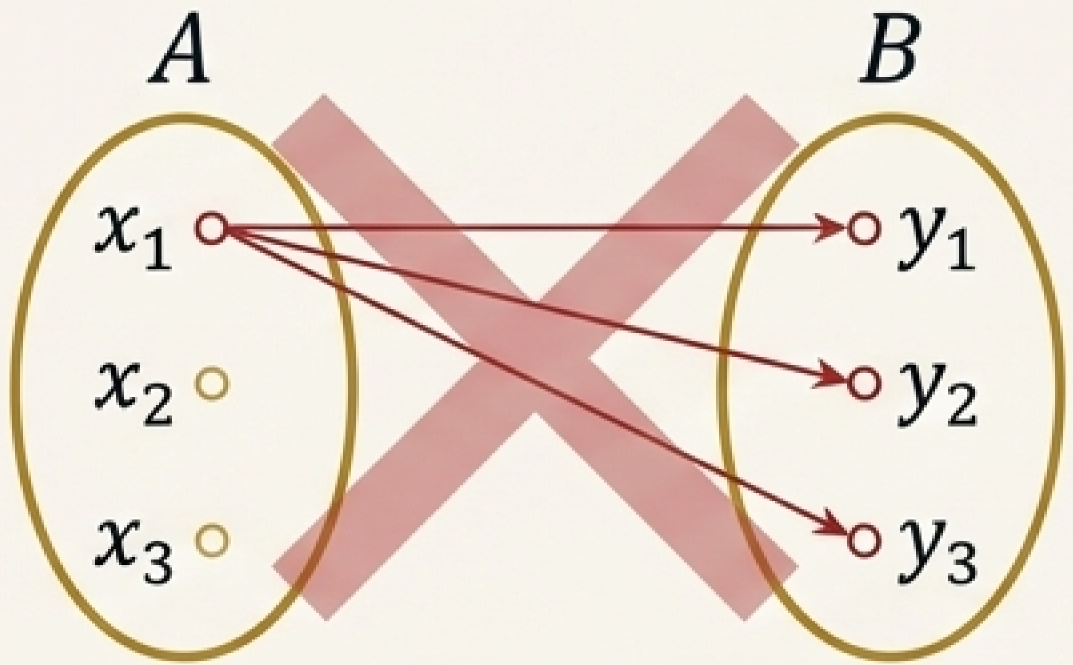
Dati due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, A e B, si chiama **funzione reale di variabile reale** una qualsiasi legge che faccia corrispondere, a ogni elemento $x \in A$, **uno e un solo** elemento $y \in B$.

Si indica con $f\colon A \to B$, che si legge "f è una funzione da A a B".

Esempio Corretto



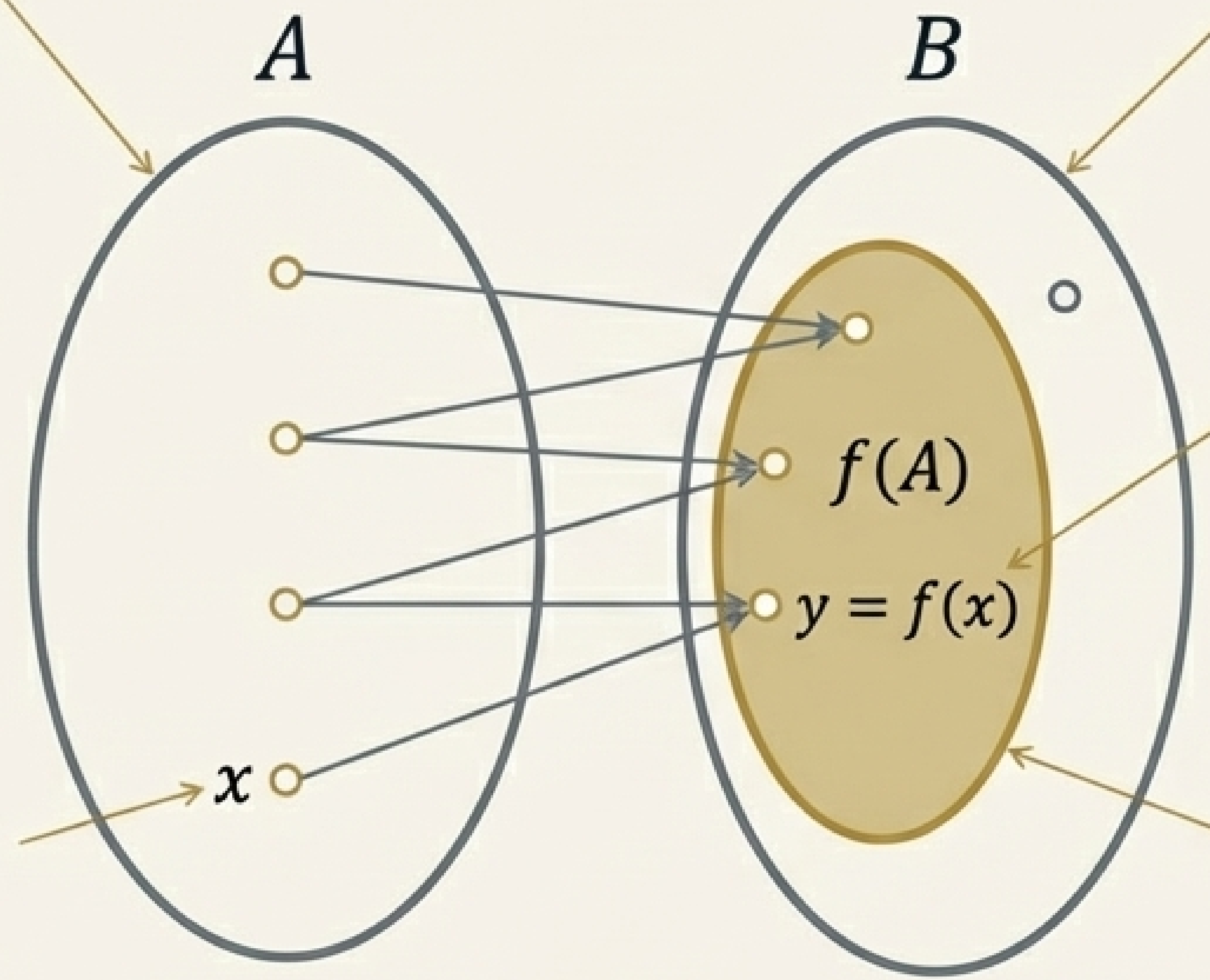
Non-Esempio



L’Anatomia di una Funzione

Dominio (o Insieme di Definizione): L’insieme A, che contiene tutti i possibili valori di input. È anche detto insieme di esistenza della funzione.

Variabile Indipendente (x): La lettera che indica un elemento generico del dominio A.



Codominio: L’insieme B, che contiene tutti i possibili valori di output.

Variabile Dipendente (y): La lettera $y = f(x)$ che rappresenta l’elemento di B associato all’elemento x.

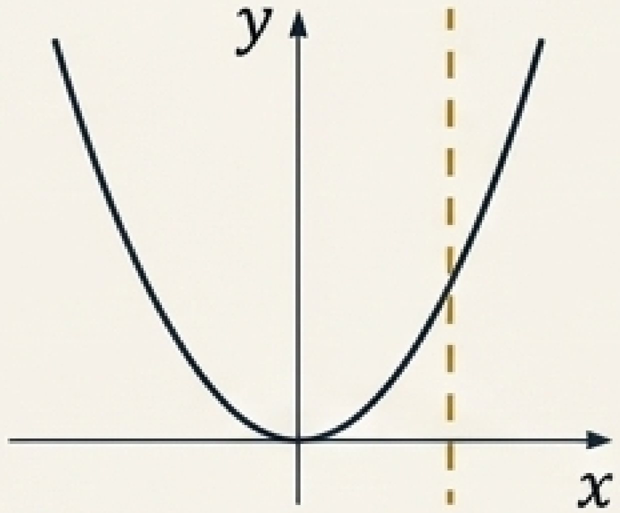
Immagine ($f(A)$): Il sottoinsieme di B costituito da tutti gli elementi che sono immagine di almeno un elemento di A. $f(A) \subseteq B$.

Il Grafico: L'Impronta Visiva di una Funzione

Si chiama **grafico di una funzione f di A in B** l'insieme G di tutte le coppie ordinate (x, y) che si ottengono prendendo un valore di x in A e trovando il corrispondente valore di $y = f(x)$ in B. Un punto $P(x_0, y_0)$ appartiene al grafico se e solo se $y_0 = f(x_0)$.

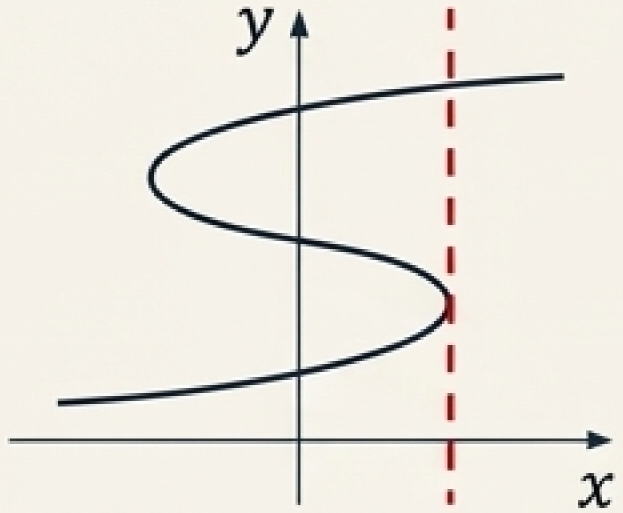
Regola Fondamentale: Per la definizione stessa di funzione, l'immagine di ogni x del dominio deve essere unica.

SÌ



Ogni retta verticale interseca il grafico al massimo in un punto.

NO

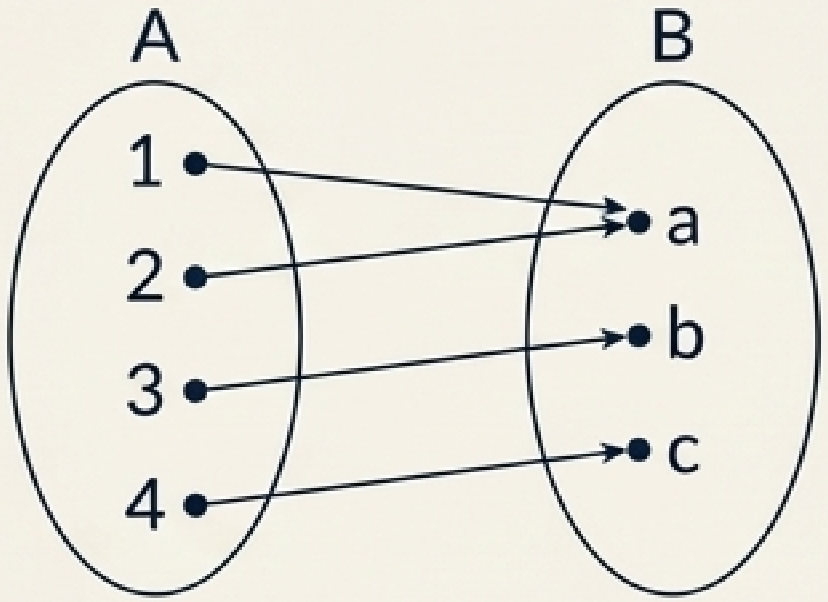


Esiste una retta verticale che interseca il grafico in più punti.

Comportamenti Fondamentali: Iniettività e Suriettività

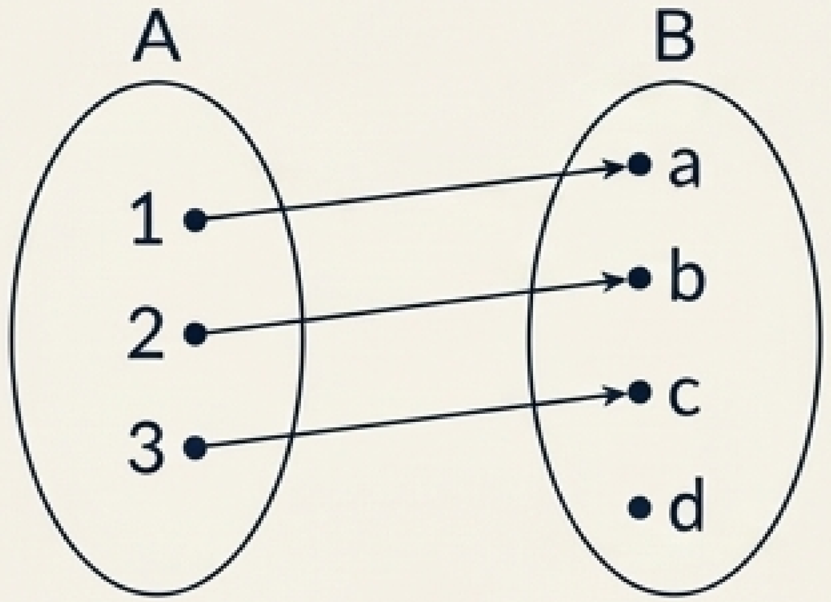
Funzione Suriettiva

Una funzione $f: A \to B$ si dice **suriettiva** quando ogni elemento di B è **immagine** di almeno un elemento di A. In questo caso, l'**immagine** coincide con il codominio: $f(A) = B$.



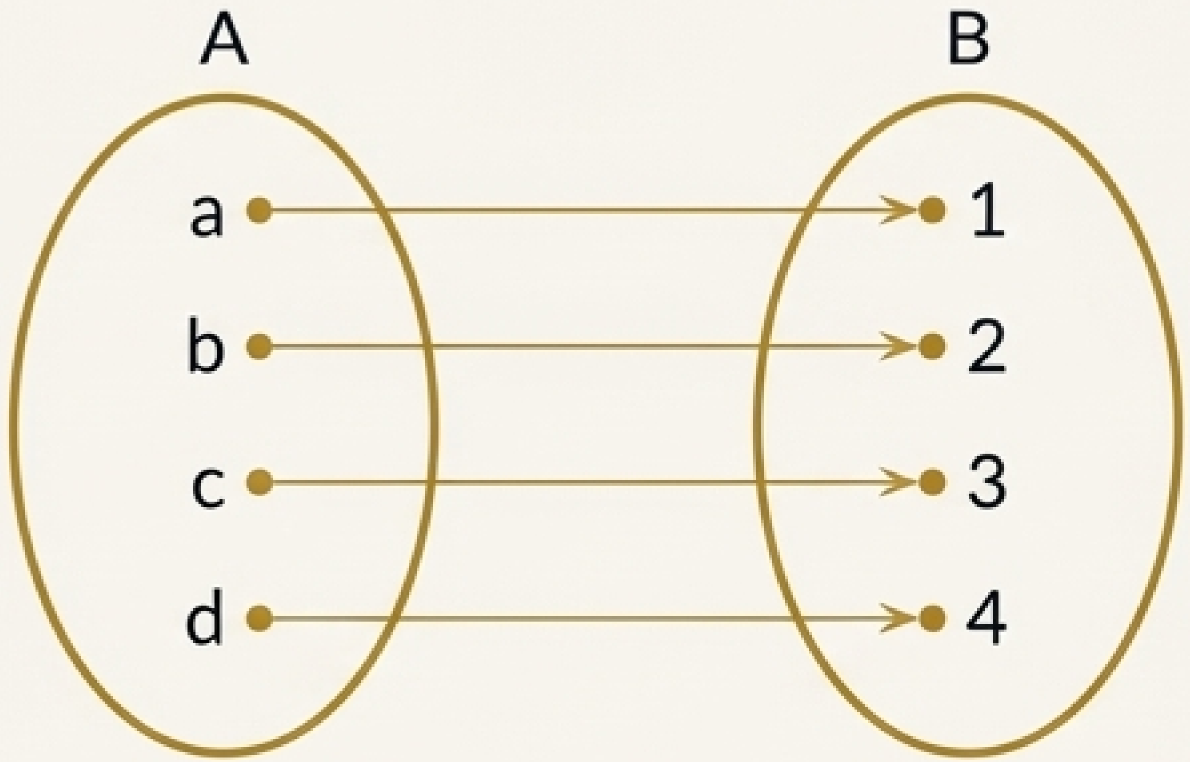
Funzione Iniettiva

Una funzione $f: A \to B$ si dice **iniettiva** se fa corrispondere, a **elementi distinti** di A, **elementi distinti** di B. Formalmente: $\forall\, x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$.



La Corrispondenza Biunivoca: Il Legame Perfetto

Una funzione $f\colon A \to B$ si dice **biiettiva** (o biunivoca) se è, allo stesso tempo, **iniettiva** e **suriettiva**.



In una funzione biiettiva, ogni elemento del codominio B è immagine di **uno e un solo** elemento del dominio A. Si stabilisce una corrispondenza ‘uno a uno’ tra gli elementi dei due insiemi.

Proprietà Chiave: Una funzione ammette una **funzione inversa** se e solo se è biiettiva.

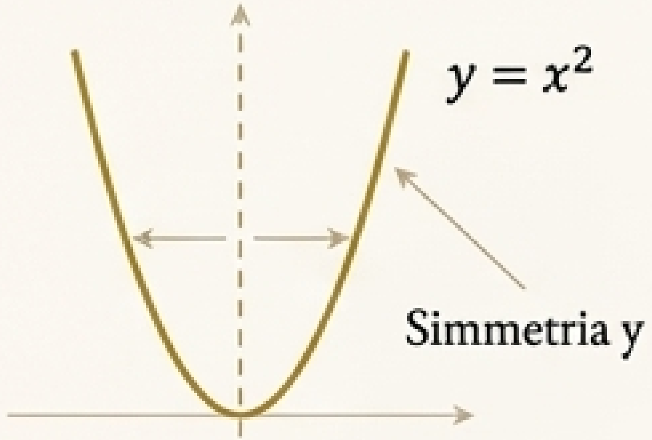
La Geometria delle Funzioni: Parità e Monotonia

Parità (Simmetria)

Funzione Pari

Formula: $f(-x) = f(x)$ per ogni x del dominio.

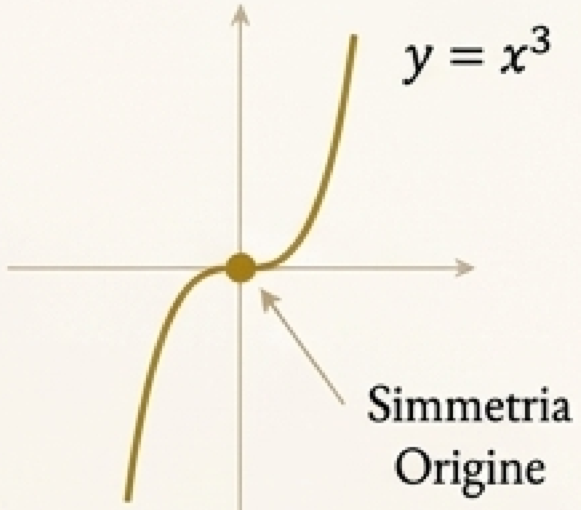
Description: Il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.



Funzione Dispari

Formula: $f(-x) = -f(x)$ per ogni x del dominio.

Description: Il grafico è simmetrico rispetto all'origine.



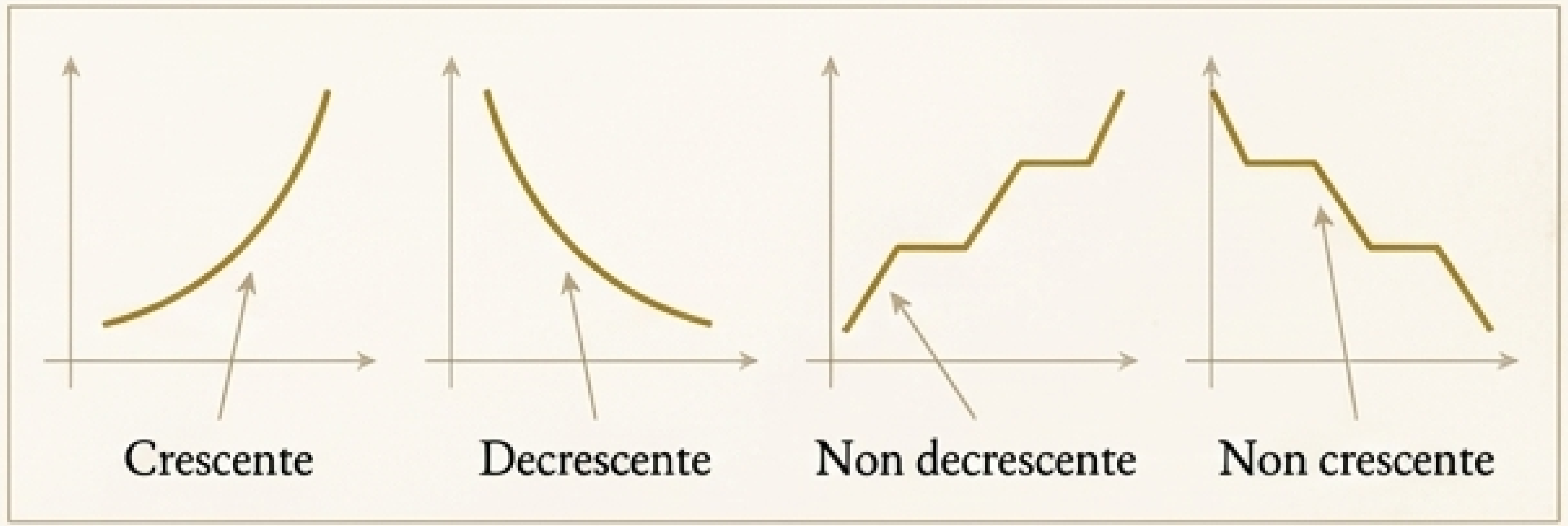
Monotonia (Andamento)

Crescente: Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$.

Decrescente: Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$.

Non decrescente: Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Non crescente: Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Una Mappa dei Regni delle Funzioni Analitiche

Le funzioni la cui legge è esprimibile analiticamente si classificano in base alla natura delle operazioni matematiche che compaiono nella loro espressione.

Funzioni Analitiche

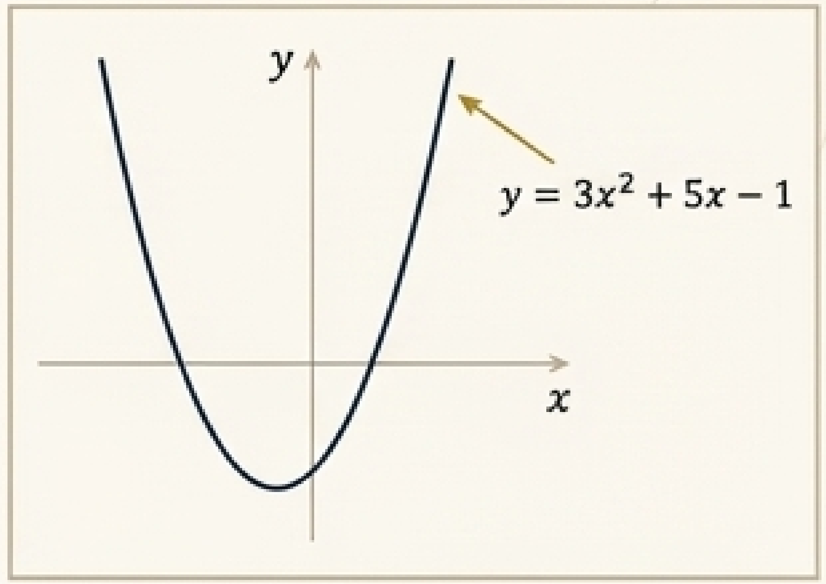
- **Algebriche**
  (le operazioni sono solo addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza, estrazione di radice)
  - **Razionali**
    (la *x* non è sotto radice)
    - Intere (Polinomi)
    - Fratte
  - **Irrazionali**
    (la *x* è sotto radice)
- **Trascendenti**
  (non algebriche)
  - Goniometriche
  - Esponenziali
  - Logaritmiche

Il Regno delle Algebriche: Funzioni Razionali

Razionali Intere (Polinomiali)

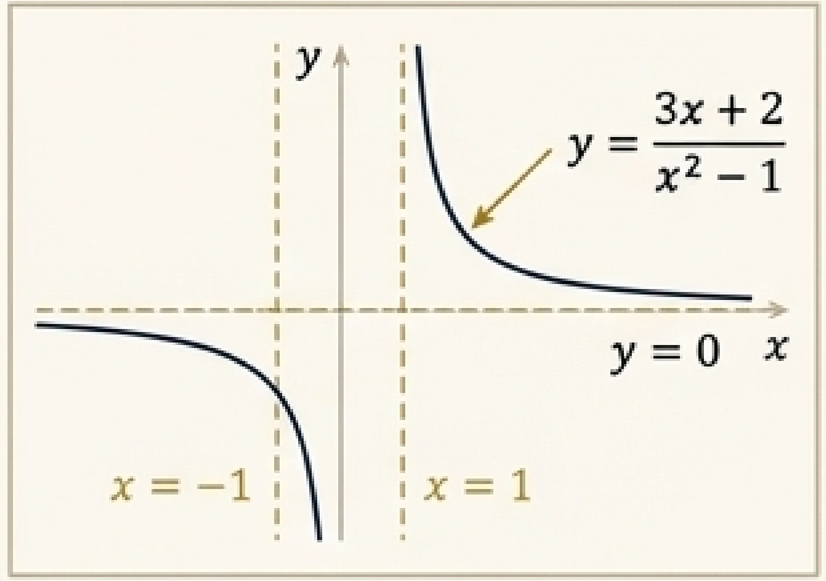
Descrizione: Funzioni espresse tramite un polinomio.
Esempio: $y = 3x^2 + 5x - 1$.

Dominio: Sempre tutto $\mathbb{R}$.



Razionali Fratte

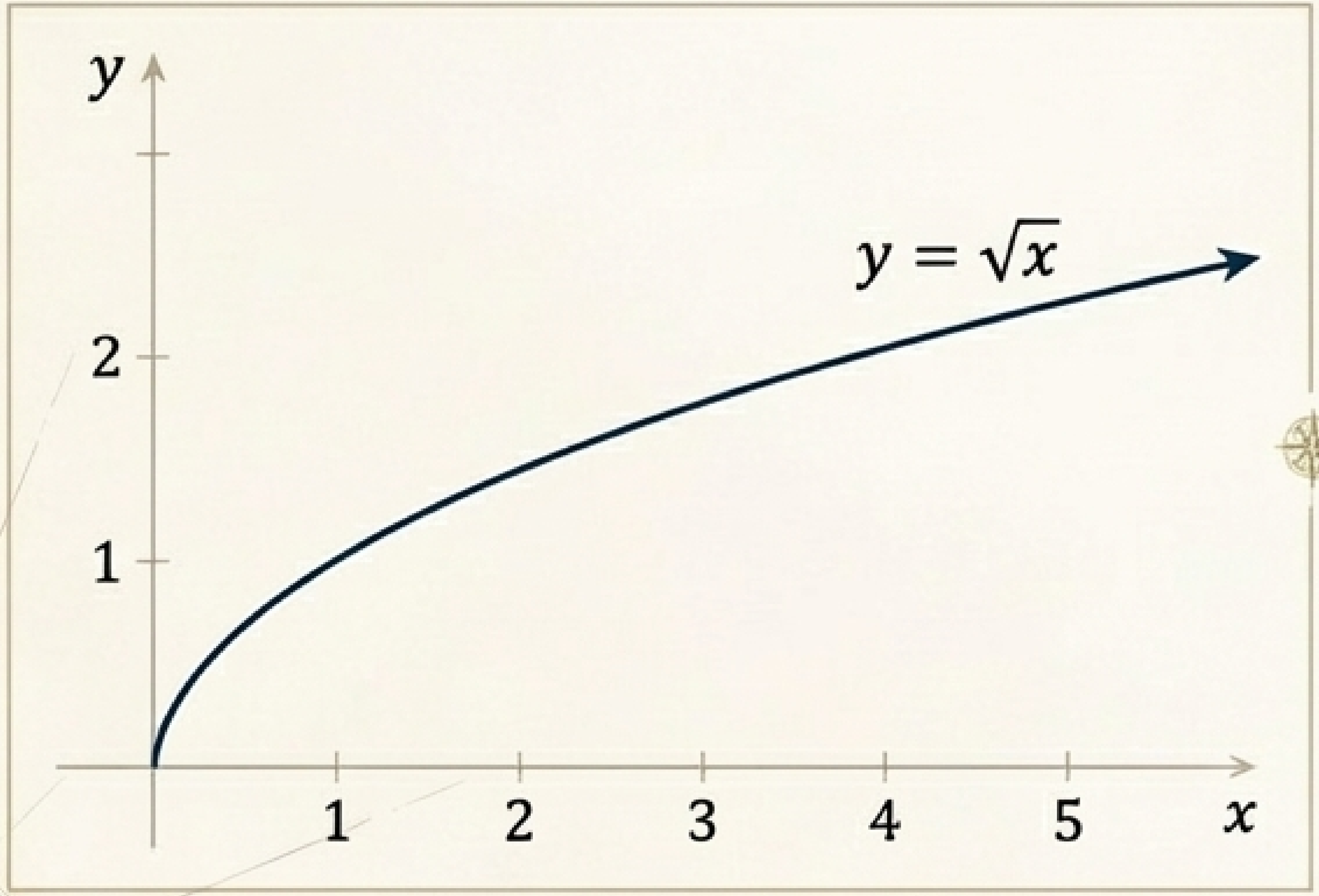
Descrizione: Funzioni espresse come rapporto di due polinomi.
Esempio: $y = \frac{3x + 2}{x^2 - 1}$.
Dominio: Tutto $\mathbb{R}$ tranne i valori che annullano il denominatore.



Il Regno delle Algebriche: Funzioni Irrazionali

Una funzione algebrica si dice irrazionale se la variabile indipendente x compare sotto il segno di radice.

Esempi: $y = \sqrt{(1-x)}$, $y = \sqrt[3]{(x^2+2)}$



Focus sul Dominio

La caratteristica principale è la condizione di esistenza del radicale.

Se l'indice è **pari**, il radicando deve essere ≥ 0.
Se l'indice è **dispari**, il dominio non ha restrizioni aggiuntive.

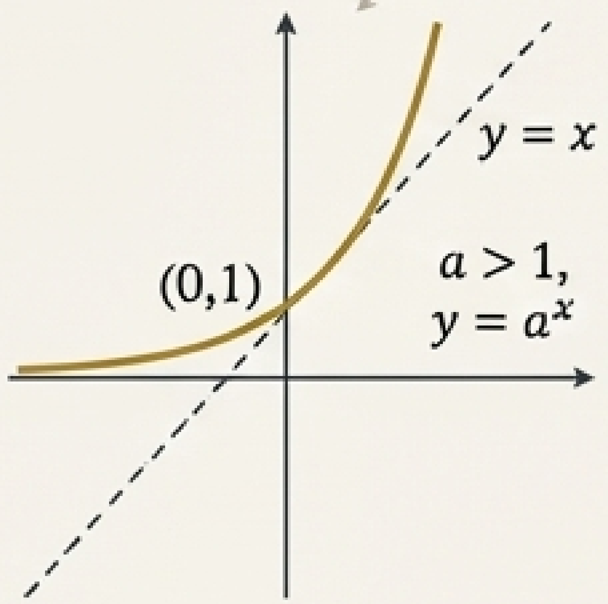
Per $y = \sqrt{f(x)}$, si deve porre $f(x) \geq 0$.

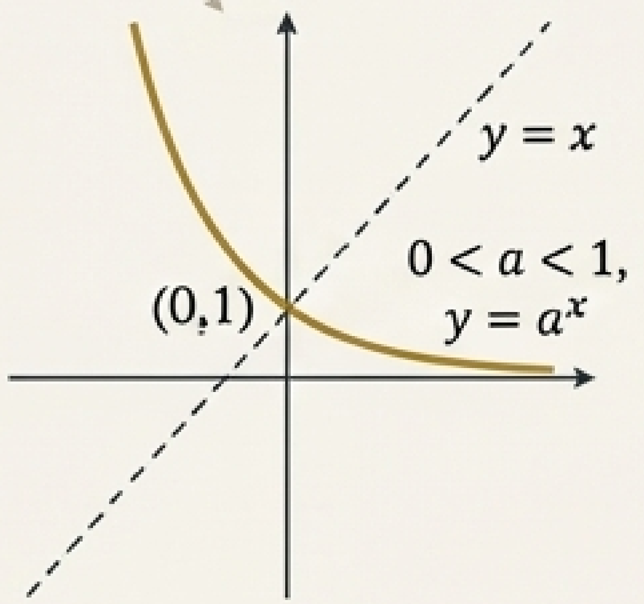
Il Regno delle Trascendenti: Esponenziali e Logaritmiche

Funzione Esponenziale

$$y = a^x \; (a > 0, a \neq 1)$$

Dominio: $\mathbb{R}$
Codominio: $\mathbb{R}^+$
Andamento: Crescente per $a > 1$.
Decrescente per $0 < a < 1$.

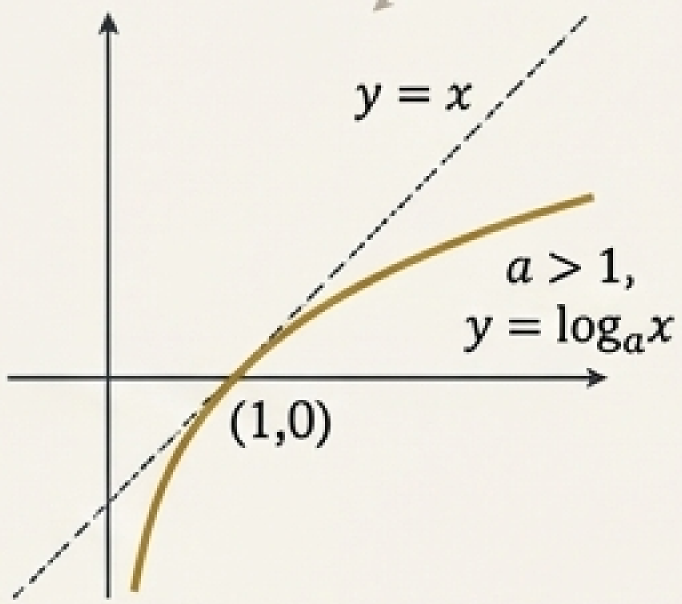


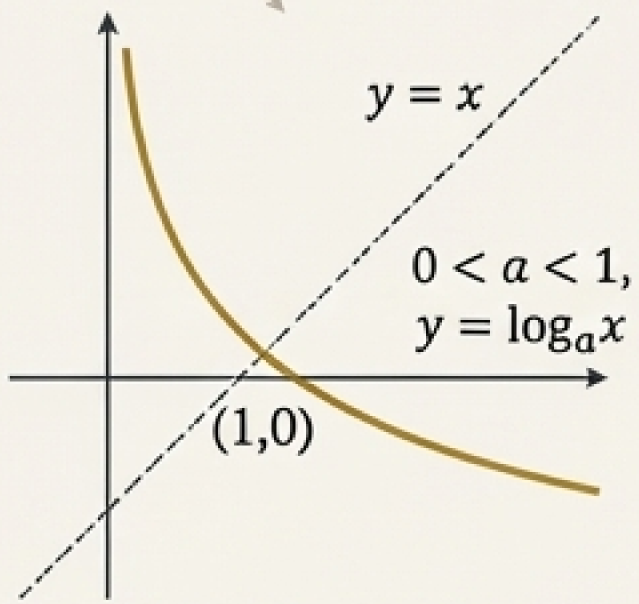


Funzione Logaritmica

$$y = \log_a x \; (a > 0, a \neq 1)$$

Dominio: $\mathbb{R}^+$
Codominio: $\mathbb{R}$
Andamento: Crescente per $a > 1$.
Decrescente per $0 < a < 1$.

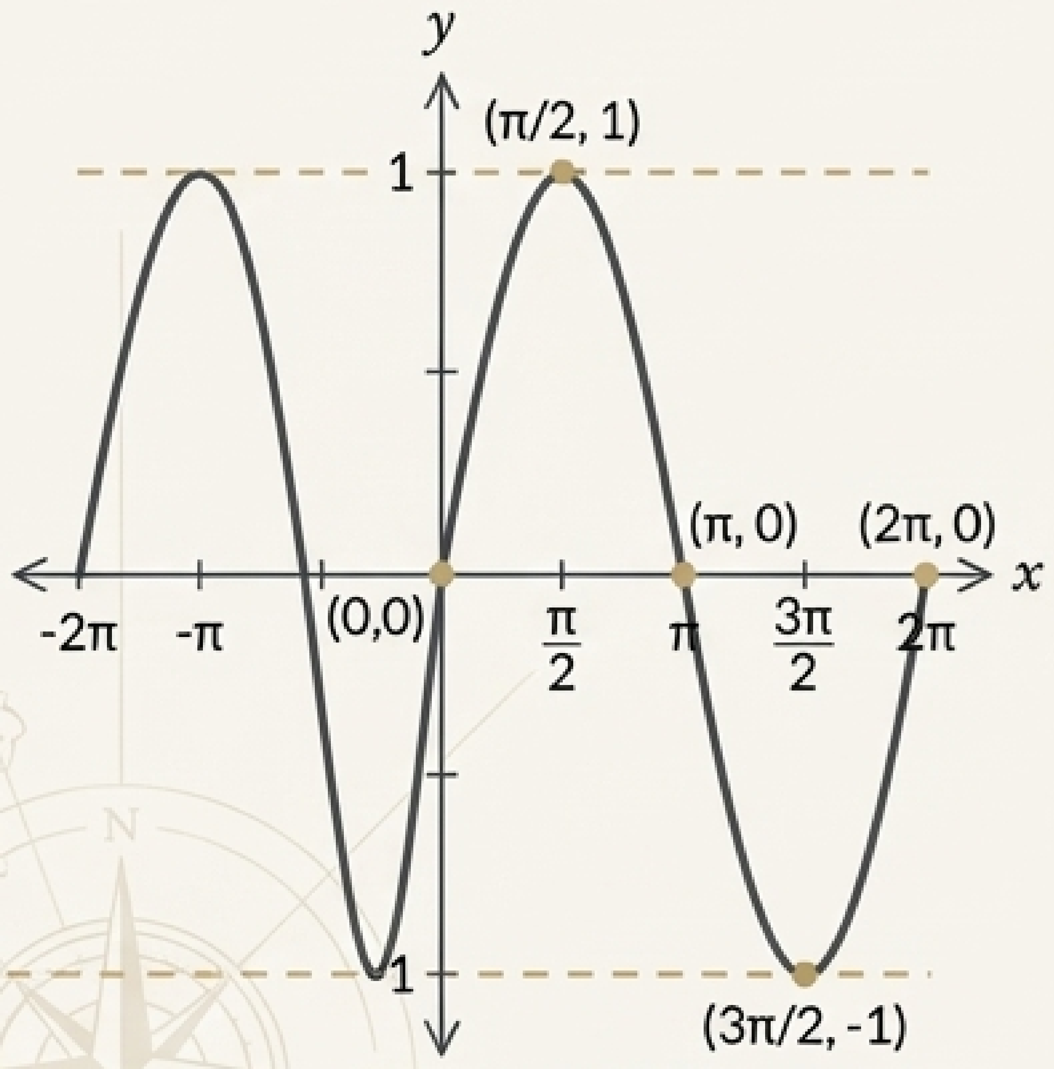




Nota: *La funzione esponenziale e quella logaritmica (con la stessa base) sono una l'inversa dell'altra.*

Il Regno delle Trascendenti: Funzioni Goniometriche

Funzione Seno **y = sin(x)**



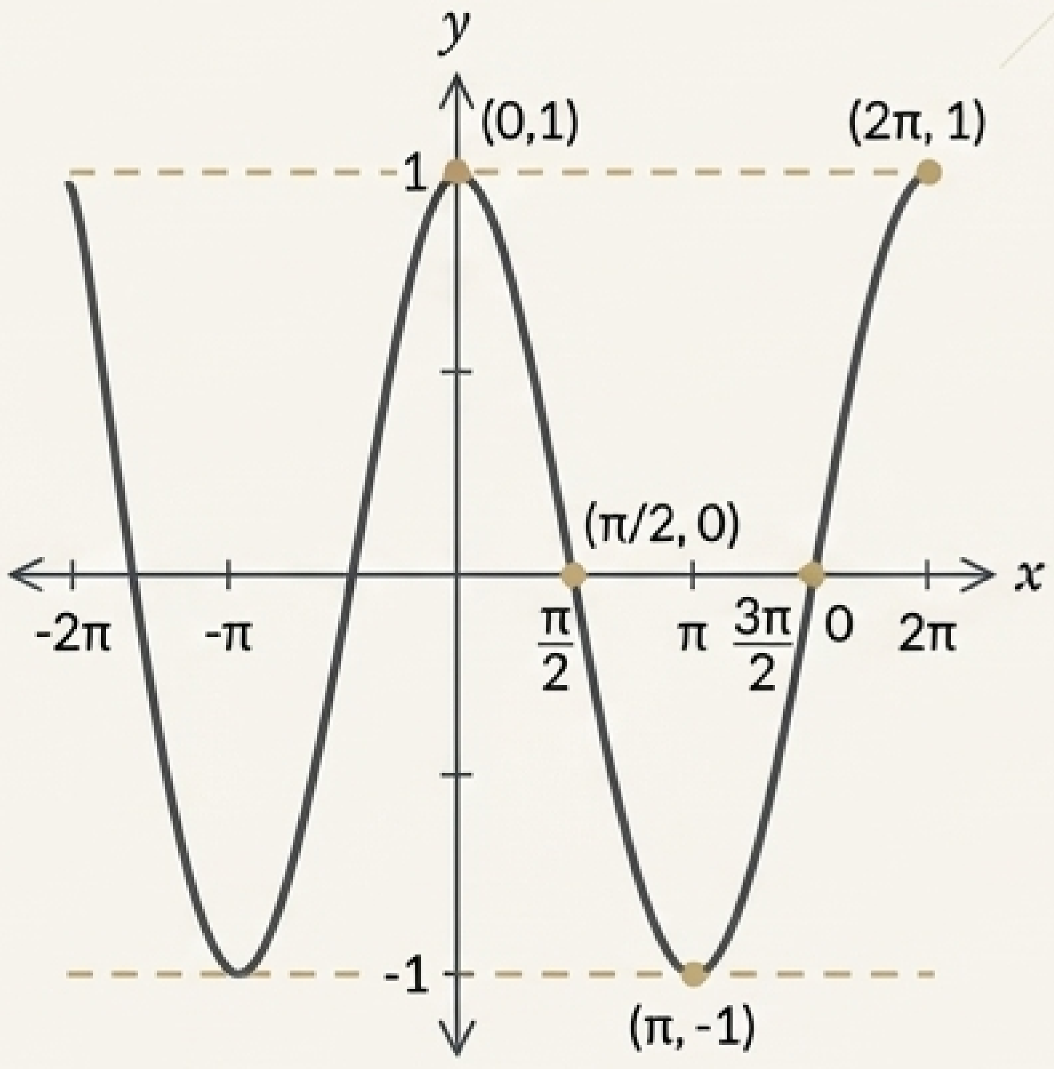
Dominio: $\mathbb{R}$

Codominio: [-1, 1] (Funzione limitata)

Periodicità: 2π

Parità: Dispari (simmetrica rispetto all'origine)

Funzione Coseno **y = cos(x)**



Dominio: $\mathbb{R}$

Codominio: [-1, 1] (Funzione limitata)

Periodicità: 2π

Parità: Pari (simmetrica rispetto all'asse y)

Operazioni tra Funzioni: Composizione e Inversione

Funzione Composta

Concetto: Applicare una funzione al risultato di un'altra.
Date $g: A \to B$ e $f: B \to C$, la funzione composta $h = f \circ g$ associa a ogni x di A l'elemento $h(x) = f(g(x))$.

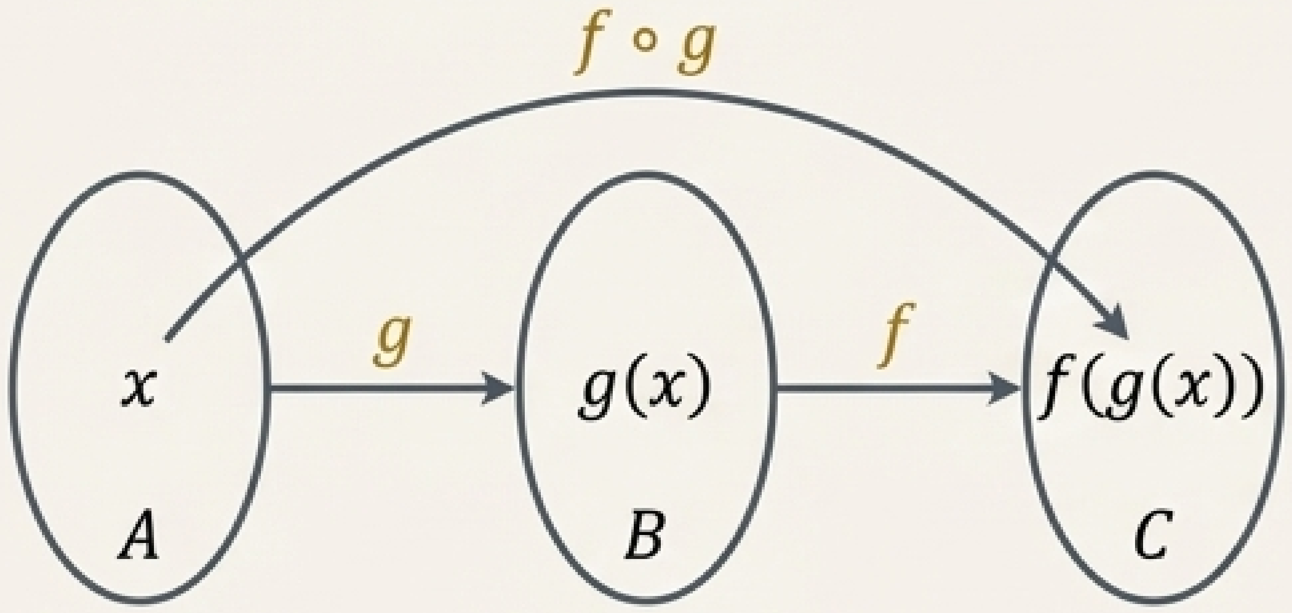


Figura 1.19

Attenzione: L'operazione non è commutativa: $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Funzione Inversa

Concetto: Data una funzione **biiettiva** $f: A \to B$, la sua **funzione inversa** $f^{-1}: B \to A$ è la funzione che associa a ogni y di B l'unico x di A tale che $y = f(x)$.

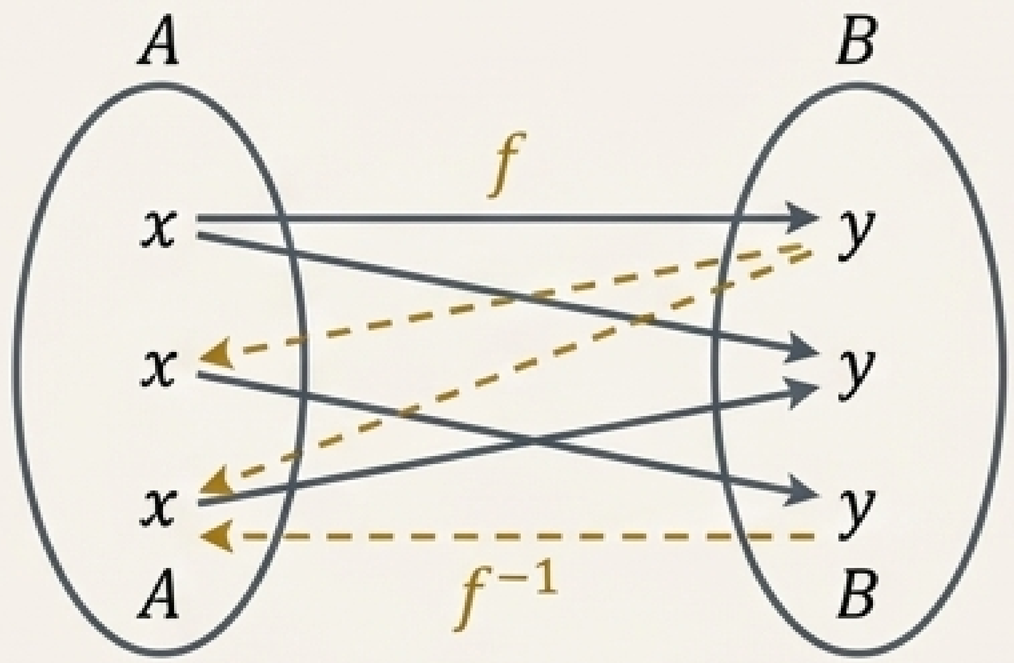


Figura 1.20

NotebookLM

Mappare i Confini: La Determinazione del Dominio

Per determinare l'insieme di esistenza di una funzione, occorre ricordare alcune regole fondamentali in base al tipo di funzione.

- Regole Fondamentali

$\frac{A}{B}$
- **Funzioni** Razionali Fratte
  $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$: Porre il denominatore diverso da zero. $B(x) \neq 0$

$\sqrt[n]{}$
- **Funzioni** Irrazionali
  $f(x) = \sqrt[n]{A(x)}$: Se n è pari, porre il radicando maggiore o uguale a zero. $A(x) \geq 0$. Nessuna condizione se n è dispari.

$\log_a$
- **Funzioni** Logaritmiche
  $f(x) = \log_a(g(x))$: Porre l'argomento strettamente maggiore di zero. $g(x) > 0$.

x^y
- **Funzioni Esponenziali con base** variabile
  $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$: Porre la base maggiore di zero. $g(x) > 0$.

Esempio Pratico

Determinare il dominio di
$y = \ln(x^2-2x-3)$.

Step 1: Impostare la condizione
$x^2 - 2x - 3 > 0$

Step 2: Risolvere la disequazione
$(x-3)(x+1) > 0$

Step 3: Soluzione
$x < -1 \vee x > 3$

Dominio: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Le Funzioni: Il Linguaggio Universale della Relazione

Dalle orbite planetarie ai modelli economici, dalle onde sonore ai circuiti digitali, le funzioni forniscono un linguaggio potente e preciso per descrivere, analizzare e prevedere le relazioni che governano il mondo che ci circonda. Conoscere la loro anatomia, le loro proprietà e la loro classificazione significa possedere una chiave di lettura fondamentale per la scienza e la tecnologia.