

Metriche di performance per la validazione di modelli di ottimizzazione di portafoglio

Introduzione

Questo documento descrive in modo sistematico le principali **metriche statistiche e finanziarie** utilizzate per verificare la bontà di un modello di ottimizzazione di portafoglio. Il contesto di riferimento è una **validazione ex-post** (backtesting): ci si colloca in un punto del passato, si costruisce il portafoglio usando solo informazioni disponibili fino a quel momento, e si confrontano i risultati con i dati di mercato realmente osservati.

L'obiettivo è valutare: - capacità di generare rendimento - controllo del rischio - stabilità e robustezza del modello - significatività statistica dei risultati

1. Metriche di rendimento

Rendimento semplice

$$R_t = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}$$

Rendimento cumulato

$$R_{cum} = \prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1$$

Rendimento medio

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$$

CAGR (Compound Annual Growth Rate)

$$CAGR = \left(\frac{V_T}{V_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Dove: - V_0 : valore iniziale del portafoglio - V_T : valore finale - n : anni di investimento

2. Metriche di rischio

Volatilità

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}$$

Downside volatility (semi-deviazione)

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \min(R_t - R_{target}, 0)^2}$$

Questa misura penalizza solo i rendimenti inferiori a una soglia obiettivo.

3. Metriche rischio/rendimento

Sharpe Ratio

$$Sharpe = \frac{\bar{R} - R_f}{\sigma}$$

Sortino Ratio

$$Sortino = \frac{\bar{R} - R_f}{\sigma_d}$$

Calmar Ratio

$$Calmar = \frac{CAGR}{Max\ Drawdown}$$

4. Drawdown

Drawdown istantaneo

$$DD_t = \frac{V_t - \max(V_{0:t})}{\max(V_{0:t})}$$

Maximum Drawdown

$$MDD = \min_t(DD_t)$$

Average Drawdown

$$ADD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N DD_i$$

5. Confronto con benchmark

Beta

$$\beta = \frac{Cov(R_p, R_m)}{Var(R_m)}$$

Alpha (CAPM)

$$\alpha = \bar{R}_p - [R_f + \beta(\bar{R}_m - R_f)]$$

Information Ratio

$$IR = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_b}{\sigma(R_p - R_b)}$$

6. Metriche di errore (previsioni vs realtà)

Tracking Error

$$TE = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_p - R_b)^2}$$

Mean Absolute Error (MAE)

$$MAE = \frac{1}{T} \sum |R_t^{real} - R_t^{pred}|$$

Mean Squared Error (MSE)

$$MSE = \frac{1}{T} \sum (R_t^{real} - R_t^{pred})^2$$

7. Metriche di stabilità del modello

Turnover

$$Turnover = \sum_{i=1}^N |w_{i,t} - w_{i,t-1}|$$

Varianza dei pesi

$$Var(w_i)$$

Robustezza temporale

Valutazione delle stesse metriche su finestre temporali rolling e sotto-periodi di mercato.

8. Metriche di rischio estremo

Value at Risk (VaR)

$$VaR_{\alpha} = \inf\{l : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}$$

Conditional Value at Risk (CVaR)

$$CVaR_{\alpha} = E[L \mid L \geq VaR_{\alpha}]$$

9. Test statistici

t-test sull'alpha

$$t = \frac{\alpha}{\sigma_{\alpha}}$$

Confronto tra Sharpe Ratio

Test statistici per confrontare la significatività delle differenze tra portafogli.

Data snooping check

Test di robustezza per evitare overfitting su dati storici.

Conclusione

Un modello di ottimizzazione di portafoglio può essere considerato valido se dimostra: - rendimento superiore al benchmark - buon rapporto rischio/rendimento - drawdown contenuti - stabilità dei pesi e dei risultati - significatività statistica - robustezza fuori campione

Questo insieme di metriche costituisce lo **standard di riferimento** per validazioni accademiche e professionali.