

# Trabajo Práctico n°2 - Resolución de una EDO

Análisis Numérico 1 - Curso 7

4 de noviembre de 2011

## 1. Introducción

En este trabajo práctico se pretende presentar un caso donde se deba resolver una EDO de manera numérica, no pudiendo hacerse de manera analítica. El caso que se presentará será un modelo simplificado del comportamiento temporal de un reactor nuclear, y una situación hipotética donde se necesite resolver el modelo numéricamente para un caso de aplicación práctica.

## 2. Objetivos

Se pretende que luego de realizar el trabajo práctico el alumno esté mejor preparado para:

- Entender y distinguir casos de conveniencia de una resolución numérica frente a una resolución analítica, y viceversa.
- Programar una resolución numérica acorde al problema que se presente.
- Comparar distintos métodos numéricos y explicar las diferencias en las soluciones que producen.
- Comprender el efecto y la utilidad de disminuir el paso en la solución.
- Acotar empíricamente el error y alcanzar una precisión dada por la necesidad del caso.
- Defender que la solución numérica entregada se corresponde con la realidad, sin poseer la solución analítica al problema.

*Estos objetivos deben guiar el desarrollo del trabajo práctico y su consecución debe verse reflejada en las conclusiones.*

## 3. Problema propuesto

### 3.1. Introducción teórica: funcionamiento elemental de un reactor nuclear

El uranio 235 (U-235) es un isótopo del uranio con la característica de que, al incidir un neutrón en su núcleo, se parte (fisiona) en 2 átomos más livianos, liberando neutrones y energía.

Cada fisión libera en promedio 2,4 neutrones. Esta emisión de neutrones permite una reacción en cadena autosostenida: cada átomo que fisiona libera neutrones capaces de fisionar a su vez a otros átomos de U-235.

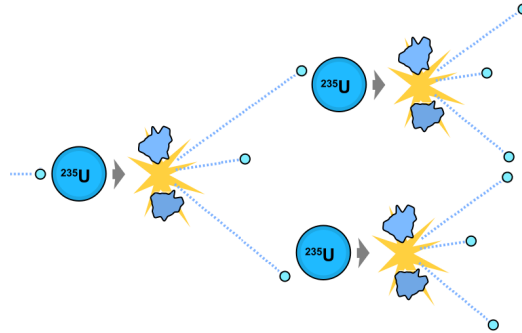


Figura 1: Reacción en cadena

Todo lo que se requiere para mantener la reacción controlada es lograr que de los 2,4 neutrones producidos en cada fisión, sólo 1 llegue a fisionar otro átomo. Esto se logra insertando entre el U-235 un material absorbente de neutrones.

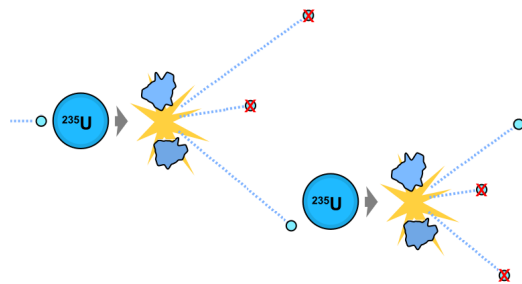


Figura 2: Reacción en cadena controlada

Si se absorben exactamente 1,4 neutrones por cada fisión, la cantidad de fisiones en un intervalo de tiempo se mantiene constante. Si se absorben un poco menos de 1,4 neutrones por cada fisión, la cantidad de fisiones aumenta progresivamente pues la tasa de producción de neutrones ( $P$ ) es mayor que la tasa de destrucción ( $D$ ); si se absorben un poco más de 1,4 neutrones por cada fisión, la cantidad disminuye progresivamente pues la tasa de destrucción es mayor que la de producción. Este efecto se cuantifica mediante la variable  $k$ , que se define como  $k := P/D$  (adimensional). Si  $k = 1$ , la potencia se mantiene constante, si  $k > 1$  aumenta, si  $k < 1$  disminuye.

Un reactor nuclear es básicamente un apilamiento de U-235, llamado “núcleo”, en el que  $D$  se controla insertando y extrayendo barras de un material absorbente de neutrones, llamadas “barras de control”.

Como cada fisión libera neutrones que “viven” un tiempo hasta que son absorbidos, constantemente hay una población de neutrones que depende de la tasa de fisiones y de la tasa de absorción. Además, como los neutrones fisionan átomos y cada fisión libera energía, la potencia del reactor está relacionada con la población de neutrones.

### 3.2. Ecuaciones

La ecuación que rige este comportamiento es<sup>1</sup>:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (k(t) - 1) \cdot \frac{N(t)}{I} \quad (1)$$

donde:

- $N(t)$  es la cantidad de neutrones.
- $k(t)$  es la relación entre neutrones producidos y neutrones destruidos. Depende de  $t$ , porque la cantidad de neutrones absorbida se controla con las barras de control.
- $I = 0,3\text{seg}$  vida media de un neutrón en el núcleo.

Esta ecuación tiene solución analítica (una exponencial creciente o decreciente según el signo de  $k - 1$ ). Sin embargo, se presentará un caso como se presenta en la realidad, donde  $k$  no es constante. Además, deberá ser obtenido de una tabla de valores, lo que obliga a resolver la ecuación de forma numérica. **Esto es una parte importante del entendimiento de la materia:** las soluciones numéricas no suplantán a las soluciones analíticas, sino que las complementan y se prefieren cuando hallar la solución analítica es muy difícil, innecesariamente costoso, o simplemente imposible. También pueden ser deseables cuando sólo se busca analizar cualitativamente el comportamiento de un sistema, por ejemplo la respuesta ante un estímulo de distintas formas o duraciones.

### 3.3. El problema

Un reactor se encuentra inicialmente con  $N_0 = 10^{10}$  neutrones y se lo desea llevar a mayor potencia. El operador, entonces, comienza a extraer una barra de control. Cuando el operador decide parar la extracción, ocurre un fallo en la electrónica que ocasiona que continúe la extracción sin que el operador lo note<sup>2</sup>. Durante todo este tiempo el reactor aumenta su potencia cada vez con mayor “velocidad”, pues la barra de control se extrae cada vez más.

Luego de 60 segundos la tasa de crecimiento es mayor que un umbral de seguridad, lo que es detectado por la electrónica de control, que hace sonar una alarma. En este punto el operador se da cuenta del problema y comienza a introducir la barra (la orden de introducción tiene prioridad sobre la de extracción por lo que no importa el fallo original). Luego de 12 segundos, el operador decide hacer un apagado de emergencia, en el que las barras caen por gravedad dentro del núcleo en un tiempo de 600 ms, que se modelará como una caída instantánea. Esta introducción instantánea de gran cantidad de material absorbente de neutrones anula inmediatamente la reacción en cadena.

Luego del incidente, el Jefe de Ingeniería, que está leyendo este enunciado y lo va a resolver, decide conocer la cantidad de neutrones total que se produjeron durante el incidente, para estimar si hubo algún daño a algún material del núcleo y así decidir si continuar la operación es seguro o no. De los valores registrados por los instrumentos obtiene una tabla de valores de  $k$  con una resolución temporal de 0,03125 segundos. La tabla se encuentra en el archivo k.txt. Entonces, debe resolver la ecuación 1 utilizando los valores del archivo, con lo que obtiene  $N(t)$  durante el incidente. Para esto, se debe considerar que el error de los valores de  $k$  de la tabla es

---

<sup>1</sup>En realidad la ecuación presentada es una sobresimplificación, pero sirve para los fines de este TP.

<sup>2</sup>Por diseño esto no puede suceder, pero créetelo para hacer algo emocionante el TP.

despreciable. Luego, deberá integrar  $N(t)$  durante el tiempo que duró el problema para obtener la cantidad de neutrones total ( $N_{total}$ ).

## 4. Método de resolución

Se deberán realizar los siguientes pasos para resolver el problema:

- Hallar la solución numérica de  $N(t)$  mediante el método de Euler con los pasos de tiempo  $h = 4$  seg, 2 seg, 1 seg, 0,5 seg como mínimo.
- Hallarla nuevamente con Runge Kutta 4 (RK-4) con pasos a su criterio. Garantizar un 1 % de error en el instante de mayor cantidad de neutrones como mínimo.
- Una vez asegurado, con los datos anteriores, cuál es la curva de  $N(t)$  para el problema planteado, debe integrarse ese resultado mediante el método de Romberg, para obtener  $N_{total}$ . Garantizar el menor error posible.
- Suponiendo que se dispusiera de una tabla de valores lo suficientemente larga, explicar cómo se haría para calcular  $\int_0^\infty N(t)dt$ .

Recordar centrarse en los objetivos al momento de resolver el TP y de presentar las conclusiones. Es decir, resolverlo de tal modo que permita comparar métodos, pasos de tiempo, y asegurar que el resultado obtenido es correcto, sin tener disponible la solución analítica.