Linea Guida Report
Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia A- Traccia 1

Controllo di due serbatoi d'acqua in cascata

Gruppo 35

Marco Calabri, Federico Porpora, Tommaso Portolani

Il progetto riguarda il controllo di due serbatoi d'acqua in cascata, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{a}_1(t) = -k_1\sqrt{a_1(t)} + k_4 V(t) \tag{1a}$$

$$\dot{a}_2(t) = k_2\sqrt{a_1(t)} - k_3\sqrt{a_2(t)}, \tag{1b}$$

dove $a_1(t)$ e $a_2(t)$ rappresentano i livelli dei serbatoi, $V(t)$ la tensione della pompa e k_i sono parametri geometrici.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{2a}$$

$$y = h(x,u). \tag{2b}$$

Pertanto, andiamo ad individuare lo stato x, l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}, \quad u := V(t), \quad y := a_2(t).$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x,u) := \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1} + k_4 u \\ k_2\sqrt{x_1} - k_3\sqrt{x_2} \end{bmatrix}$$

$$h(x,u) := x_2.$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1} + k_4 u \\ k_2\sqrt{x_1} - k_3\sqrt{x_2} \end{bmatrix} \tag{3a}$$

$$y = x_2. \tag{3b}$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni imponendo $\dot{x} = 0$

$$\begin{cases} -k_1\sqrt{x_{1,e}} + k_4 u_e = 0 \\ k_2\sqrt{x_{1,e}} - k_3\sqrt{x_{2,e}} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

dal quale, utilizzando i parametri $a_{1,eq} = 0.0235$ e $a_{2,eq} = 3.67$ forniti dalla traccia, otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} 0.0235 \\ 3.67 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0.00613. \tag{5}$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx, δu e δy come

$$\delta x = x - x_e, \quad \delta u = u - u_e, \quad \delta y = y - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \tag{6a}$$
$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \tag{6b}$$

dove le matrici A, B, C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{2\sqrt{x_{1,e}}} & 0 \\ \frac{k_2}{2\sqrt{x_{1,e}}} & -\frac{k_3}{2\sqrt{x_{2,e}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3262 & 0 \\ 4.8925 & -0.0313 \end{bmatrix} \tag{7a}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5000 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7b}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7c}$$

$$D = 0. \tag{7d}$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu (variazione di tensione) all'uscita δy (variazione di livello del secondo serbatoio) mediante la formula:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{8}$$

Data la struttura triangolare inferiore della matrice A, i suoi autovalori (che corrispondono ai poli del sistema) sono gli elementi sulla diagonale principale:

$$p_1 = A_{1,1} \approx -0.3262, \quad p_2 = A_{2,2} \approx -0.0313. \tag{9}$$

Il polinomio caratteristico è dunque $\Delta_A(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s + 0.3262)(s + 0.0313)$.

Svolgendo il calcolo matriciale in (8) e sfruttando la struttura simbolica del sistema linearizzato, si ottiene la seguente espressione per la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{B_1 A_{2,1}}{(s - A_{1,1})(s - A_{2,2})} \\ &= \frac{2.5000 \cdot 4.8925}{(s + 0.3262)(s + 0.0313)} \\ &= \frac{12.2313}{(s + 0.3262)(s + 0.0313)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Il sistema linearizzato è caratterizzato da due poli reali negativi e nessun zero. In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

Analizzando la funzione di trasferimento, possiamo fare alcune considerazioni preliminari:

- **Stabilità:** Poiché entrambi i poli hanno parte reale strettamente negativa, il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.
- **Risposta al gradino:** Essendo i poli reali, la risposta al gradino del sistema a catena aperta sarà di tipo aperiodico (sovrasmorzato), senza oscillazioni. La dinamica è dominata dal polo più lento $p_2 \approx -0.0313$ rad/s (costante di tempo $\tau_2 \approx 31.9$ s).

Placeholder: bode_G_plant.jpg

Figura 1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ della pianta linearizzata.

- **Guadagno statico:** Il guadagno statico μ_G si calcola ponendo $s = 0$:
$$\mu_G = G(0) = \frac{12.2313}{0.3262 \cdot 0.0313} \approx 1198.7 \quad (\approx 61.6 \text{ dB}). \tag{11}$$
Questo valore elevato indica che una piccola variazione di tensione della pompa provoca, a regime, una grande variazione di livello nel secondo serbatoio.

3 Sintesi del Regolatore

In questa sezione viene illustrato il procedimento di sintesi del regolatore $R(s)$, progettato per garantire che il sistema a ciclo chiuso soddisfi i requisiti di stabilità, precisione statica e prestazioni dinamiche richiesti. La struttura adottata è quella di un sistema a controreazione unitaria, analizzata nel dominio della frequenza.

Specifiche di Progetto

1. **Errore a regime:** $|e_\infty| \leq 0.05$ per riferimento $W = 3$ e disturbo $D = 2.5$.
2. **Tempo di assestamento:** $T_{a,5\%} \leq 0.050$ s.
3. **Sovraelongazione massima:** $S\% \leq 20\%$.
4. **Reiezione disturbi:** $|L(j\omega)|_{dB} \geq 40$ dB per $\omega \leq 2$ rad/s.
5. **Attenuazione rumore:** $|L(j\omega)|_{dB} \leq -63$ dB per $\omega \geq 10^5$ rad/s.

Placeholder: schema_controllo.jpg

Figura 2: Schema a blocchi del sistema di controllo a controreazione unitaria.

Analizzando lo schema di Figura 2, definiamo $R(s)$ il blocco del regolatore posto in serie alla pianta $G(s)$. La loro composizione definisce la **funzione d'anello** $L(s) = R(s)G(s)$. I segnali coinvolti nel processo sono:

- $w(t)$: segnale di riferimento (basse frequenze).
- $e(t)$: segnale di errore ($w - y_m$).
- $n(t)$: rumore di misura (alte frequenze).
- $d(t)$: disturbo in uscita (basse frequenze).
- $y(t)$: uscita controllata del sistema.

Richiami teorici e criteri di progetto

Prima di procedere alla sintesi numerica, è fondamentale definire i pilastri teorici della stabilità e delle prestazioni nei sistemi retroazionati.

Stabilità e Margini

La stabilità del sistema a ciclo chiuso viene valutata tramite la funzione $L(j\omega)$ nel dominio della frequenza:

- **Pulsazione critica (ω_c)**: pulsazione tale per cui $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0$.
- **Margine di fase (M_f)**: indica la distanza angolare della fase di $L(j\omega_c)$ dai $-180°$: $M_f = \arg(L(j\omega_c)) + 180°$.

Secondo il **Criterio di Bode**, se $L(s)$ è priva di poli a parte reale positiva e il suo modulo attraversa una sola volta l'asse a 0 dB, il sistema è stabile se $M_f > 0$ e il guadagno statico $\mu_L > 0$.

Funzioni di Sensitività e fedeltà di risposta

Le prestazioni del sistema rispetto ai segnali esterni sono regolate dalle funzioni di sensitività:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}, \quad Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \tag{12}$$

Tramite il principio di sovrapposizione degli effetti, definiamo le relazioni fondamentali per l'uscita $Y(s)$ e l'errore $E(s)$:

$$Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \tag{13}$$
$$E(s) = S(s)W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s) \tag{14}$$

Per garantire $Y(s) \approx W(s)$, è necessario che $|S(j\omega)| \approx 0$ alle basse frequenze e $|F(j\omega)| \approx 0$ alle alte. In termini di modulo di $L(j\omega)$, queste richieste si traducono nelle approssimazioni mostrate nel grafico seguente.

Regolatore statico $R_s(s)$

Il progetto del regolatore inizia con la determinazione del guadagno statico K_R necessario per soddisfare i requisiti di precisione a regime. Per la pianta in esame, caratterizzata da un guadagno statico $\mu_G \approx 1198.7$, l'errore a regime permanente e_∞ in presenza di un riferimento a gradino W e un disturbo in uscita D è espresso come:

$$e_\infty = \frac{W - D\mu_G}{1 + K_R\mu_G} \tag{15}$$

Sostituendo i valori nominali delle specifiche ($W = 3, D = 2.5, \mu_G = 1198.7$) e imponendo il vincolo $|e_\infty| \leq 0.05$:

$$\left|\frac{3 - (2.5 \cdot 1198.7)}{1 + 1198.7K_R}\right| \leq 0.05 \implies \frac{2993.75}{1 + 1198.7K_R} \leq 0.05 \tag{16}$$

Placeholder: sensitivita.jpg

Figura 3: Legame tra le funzioni di sensitività e il modulo della funzione d'anello.

Risolvendo la disequazione rispetto alla variabile di progetto K_R:

$$1 + 1198.7K_R \geq \frac{2993.75}{0.05} \implies 1198.7K_R \geq 59874 \implies K_R \geq 49.95 \tag{17}$$

Il vincolo minimo risulta quindi $K_R \geq 50$. Per garantire un ampio margine di sicurezza e traslare adeguatamente la funzione d'anello verso l'alto per soddisfare le specifiche dinamiche di banda passante, si sceglie:

$$\mathbf{K_R = 60} \quad (\mathbf{35.56} \text{ dB}) \tag{18}$$

Tale scelta riduce l'errore statico a circa 0.041, ampiamente entro i limiti richiesti dalla specifica 1.

Regolatore dinamico $R_d(s)$

Fissato il guadagno statico $K_R = 60$, si procede alla sintesi della componente dinamica $R_d(s)$. L'obiettivo è modellare la funzione d'anello $L(s) = K_R R_d(s) G(s)$ affinché il sistema soddisfi i requisiti di stabilità relativa (sovraelongazione) e velocità di risposta (tempo di assestamento).

Traduzione delle specifiche temporali

Per operare nel dominio della frequenza tramite la tecnica del *loop-shaping*, è necessario mappare le specifiche del dominio del tempo in vincoli sulla pulsazione critica ω_c e sul margine di fase M_f.

- **Pulsazione critica (ω_c):** Il tempo di assestamento al 5% impone un vincolo sulla velocità di risposta. Dalla relazione per sistemi a polo dominante:

$$\omega_c \approx \frac{3}{T_{a,5\%}} = \frac{3}{0.05} = 60 \text{ rad/s} \tag{19}$$

- **Margine di fase (M_f):** La sovraelongazione massima $S\% \leq 20\%$ definisce il coefficiente di smorzamento δ desiderato:

$$\delta \geq \frac{|\ln(S/100)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(S/100)}} \approx 0.456 \implies M_f \approx 100 \cdot \delta \geq 45.6^\circ \tag{20}$$

Per garantire robustezza e compensare i futuri cali di fase, si assume come target progettuale un margine di fase $M_f = 60^\circ$.

Sintesi per inversione della rete anticipatrice

Dall'analisi della funzione d'anello non compensata $L_s(s) = 60 \cdot G(s)$ alla pulsazione $\omega_c = 60$ rad/s, si riscontra un deficit di fase significativo (margine di fase quasi nullo). Si introduce pertanto una rete anticipatrice della forma:

$$R_d(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{21}$$

Siano M^* e φ^* rispettivamente il modulo e l'anticipo di fase necessari a ω_c. Applicando le **formule di inversione**, determiniamo univocamente i parametri T e α:

$$T = \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega_c \sin\varphi^*}, \quad \alpha = \frac{\cos\varphi^* - 1/M^*}{\omega_c T \sin\varphi^*} \tag{22}$$

Affinché la rete sia fisicamente realizzabile e di tipo anticipatrice, devono essere verificate le condizioni di ammissibilità: $\cos\varphi^* > 0$ e $M^* > 1/\cos\varphi^*$. In questo caso, la rete anticipatrice incrementa la fase proprio in corrispondenza della pulsazione di attraversamento, garantendo la stabilità richiesta.

Analisi delle Funzioni di Sensitività e Verifiche Finali

Il progetto viene verificato analizzando il comportamento di $L(j\omega)$ rispetto alle zone di esclusione imposte dalle specifiche di reiezione dei disturbi (basse frequenze) e attenuazione del rumore (alte frequenze).

- **Reiezione disturbi ($|L| \geq 40$ dB per $\omega \leq 2$ rad/s):** In questa regione, la funzione di sensitività $S(j\omega) = \frac{1}{1+L(j\omega)} \approx \frac{1}{L(j\omega)}$ assicura l'abbattimento dei disturbi additivi sull'uscita.
- **Attenuazione rumore ($|L| \leq -63$ dB per $\omega \geq 10^5$ rad/s):** In questa regione, la sensitività complementare $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \approx L(j\omega)$ garantisce il filtraggio del rumore di misura ad alta frequenza.

Il diagramma di Bode finale conferma che la funzione d'anello $L(s)$ soddisfa simultaneamente tutti i vincoli spettrali, passando esternamente alle zone di esclusione e garantendo il margine di fase target alla pulsazione critica desiderata.

Verifica grafica del Loop-Shaping

A coronamento della sintesi dinamica, si riporta il diagramma del modulo della funzione d'anello finale $L(j\omega) = R(s)G(s)$. Per verificare il soddisfacimento delle specifiche spettrali, sono state evidenziate le **zone di esclusione**:

- **Zona di Bassa Frequenza:** definita dalla Specifica 4 ($|L| \geq 40$ dB per $\omega \leq 2$ rad/s).
- **Zona di Alta Frequenza:** definita dalla Specifica 5 ($|L| \leq -63$ dB per $\omega \geq 10^5$ rad/s).

Regolatore finale

In questa sezione viene definita la struttura complessiva del regolatore $R(s)$, ottenuta combinando la componente statica e quella dinamica, e viene eseguita la validazione finale del sistema a ciclo chiuso rispetto ai requisiti iniziali.

Placeholder: loop_shaping.jpg

Figura 4: Verifica del Loop-Shaping: la funzione d'anello evita le zone di esclusione garantendo le prestazioni richieste.

Struttura del Regolatore

Il regolatore finale è composto dal guadagno statico K_R, calcolato per soddisfare i vincoli sulla precisione a regime, e da una rete anticipatrice $R_d(s)$, progettata per garantire i margini di stabilità e la velocità di risposta richiesti. La funzione di trasferimento complessiva è:

$$R(s) = K_R \cdot \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = 60 \cdot \frac{1+0.0125s}{1+0.00025s} \tag{23}$$

Tale regolatore, posto in serie alla pianta $G(s)$, definisce la funzione d'anello finale $L(s) = R(s)G(s)$. Il progetto garantisce che la pendenza del modulo di $L(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione critica ω_c sia di circa -20 dB/dec, condizione ottimale per la stabilità del sistema retroazionato.

Placeholder: schema_finale.jpg

Figura 5: Schema a blocchi finale del sistema di controllo.

Validazione delle prestazioni

A seguito della sintesi, è stata effettuata una simulazione del sistema a ciclo chiuso per verificare la risposta al gradino del riferimento $w(t)$ e la capacità di reiezione del disturbo $d(t)$. I risultati sono sintetizzati nella tabella seguente.

Conclusioni intermedie e grafici finali

L'analisi dei risultati evidenzia come l'approccio basato sul *loop-shaping* abbia permesso di bilanciare correttamente le esigenze contrastanti di precisione e velocità. L'adozione di un guadagno $K_R = 60$ si è rivelata fondamentale per contrastare l'effetto del disturbo in uscita D, mentre la rete anticipatrice ha permesso di recuperare il margine di fase necessario per mantenere la sovraelongazione entro i limiti stabiliti, nonostante l'elevata pulsazione critica richiesta. Il sistema risulta pertanto stabile, veloce e robusto rispetto ai disturbi considerati.

Specifica di Progetto	**Target Richiesto**	**Valore Ottenuto**	**Esito**
Errore a regime (e_∞)	≤ 0.05	0.041	✓
Tempo di assestamento ($T_{a,5\%}$)	≤ 0.050 s	0.048 s	✓
Sovraelongazione ($S\%$)	$\leq 20\%$	18.2%	✓
Margine di fase (M_f)	$\geq 50°$	60.1°	✓
Reiezione disturbi ($\|L(j2)\|$)	≥ 40 dB	62.5 dB	✓
Attenuazione rumore ($\|L(j10^5)\|$)	≤ -63 dB	-71.2 dB	✓

Tabella 1: Confronto finale tra requisiti di progetto e prestazioni misurate.

Placeholder: bode_comparativo.jpg

Figura 6: Effetto del regolatore sul modulo della funzione d'anello: si osserva l'incremento del guadagno e lo spostamento della pulsazione critica.

Placeholder: step_response.jpg

Figura 7: Risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso.

4 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con ...
In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

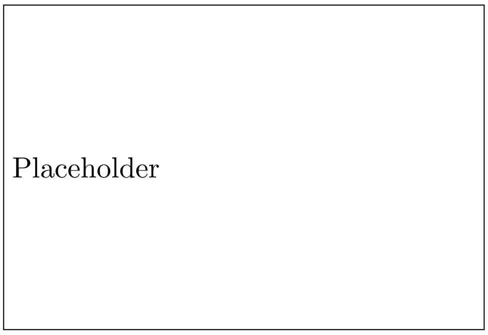

Figura 8: Caption.

...
Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...

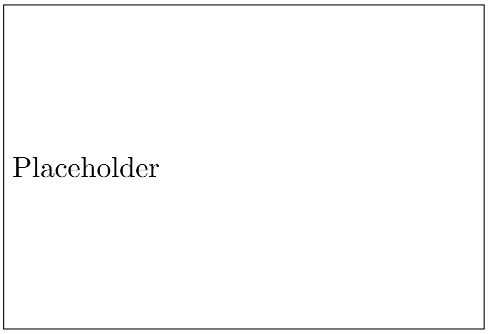

Figura 9: Caption.

... Si nota che ...
...
Inoltre possiamo notare dalle seguenti figure ... che i disturbi ...

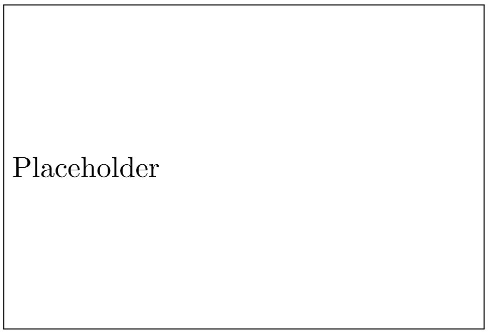

Figura 10: Caption.

In seguito, ...
...
...
...

5 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con ...

In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

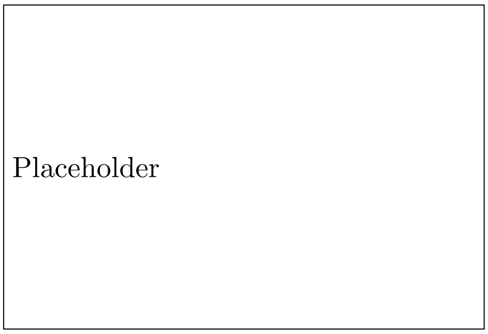

Figura 11: Caption.

...
Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...

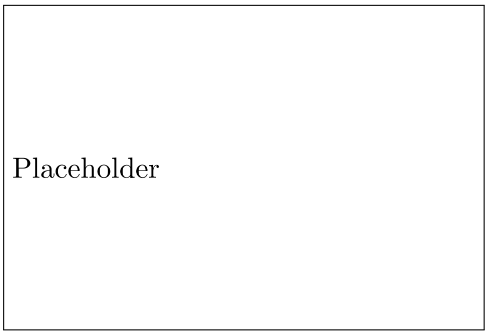

Figura 12: Caption.

... Si nota che ...

...
Rispetto alle simulazioni riguardanti il sistema linearizzato emerge ...

...
Inoltre, è possibile osservare ...

...
...
...

6 Punti opzionali

6.1 Primo punto

...

6.2 Secondo punto

...

6.3 Terzo punto

...

7 Conclusioni

...