

# Linea Guida Report

## Controlli Automatici - T

### Progetto Tipologia A- Traccia 1

### Controllo di due serbatoi d'acqua in cascata

### Gruppo 35

Marco Calabri, Federico Porpora, Tommaso Portolani

Il progetto riguarda il controllo di due serbatoi d'acqua in cascata, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{a}_1(t) = -k_1\sqrt{a_1(t)} + k_4V(t) \quad (1a)$$

$$\dot{a}_2(t) = k_2\sqrt{a_1(t)} - k_3\sqrt{a_2(t)}, \quad (1b)$$

dove  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$  rappresentano i livelli dei serbatoi,  $V(t)$  la tensione della pompa e  $k_i$  sono parametri geometrici.

## 1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo ad individuare lo stato  $x$ , l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}, \quad u := V(t), \quad y := a_2(t).$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni  $f$  ed  $h$

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1} + k_4u \\ k_2\sqrt{x_1} - k_3\sqrt{x_2} \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) := x_2.$$

Una volta calcolate  $f$  ed  $h$  esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1} + k_4u \\ k_2\sqrt{x_1} - k_3\sqrt{x_2} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_2. \quad (3b)$$

Per trovare la coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni imponendo  $\dot{x} = 0$

$$\begin{cases} -k_1\sqrt{x_{1,e}} + k_4u_e = 0 \\ k_2\sqrt{x_{1,e}} - k_3\sqrt{x_{2,e}} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

dal quale, utilizzando i parametri  $a_{1,eq} = 0.0235$  e  $a_{2,eq} = 3.67$  forniti dalla traccia, otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} 0.0235 \\ 3.67 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0.00613. \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni  $\delta x$ ,  $\delta u$  e  $\delta y$  come

$$\delta x = x - x_e, \quad \delta u = u - u_e, \quad \delta y = y - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \quad (6b)$$

dove le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{2\sqrt{x_{1,e}}} & 0 \\ \frac{k_2}{2\sqrt{x_{1,e}}} & -\frac{k_3}{2\sqrt{x_{2,e}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3262 & 0 \\ 4.8925 & -0.0313 \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$D = 0. \quad (7d)$$

## 2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  dall'ingresso  $\delta u$  (variazione di tensione) all'uscita  $\delta y$  (variazione di livello del secondo serbatoio) mediante la formula:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (8)$$

Data la struttura triangolare inferiore della matrice  $A$ , i suoi autovalori (che corrispondono ai poli del sistema) sono gli elementi sulla diagonale principale:

$$p_1 = A_{1,1} \approx -0.3262, \quad p_2 = A_{2,2} \approx -0.0313. \quad (9)$$

Il polinomio caratteristico è dunque  $\Delta_A(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s + 0.3262)(s + 0.0313)$ .

Svolgendo il calcolo matriciale in (8) e sfruttando la struttura simbolica del sistema linearizzato, si ottiene la seguente espressione per la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{B_1 A_{2,1}}{(s - A_{1,1})(s - A_{2,2})} \\ &= \frac{2.5000 \cdot 4.8925}{(s + 0.3262)(s + 0.0313)} \\ &= \frac{12.2313}{(s + 0.3262)(s + 0.0313)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Il sistema linearizzato è caratterizzato da due poli reali negativi e nessun zero. In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

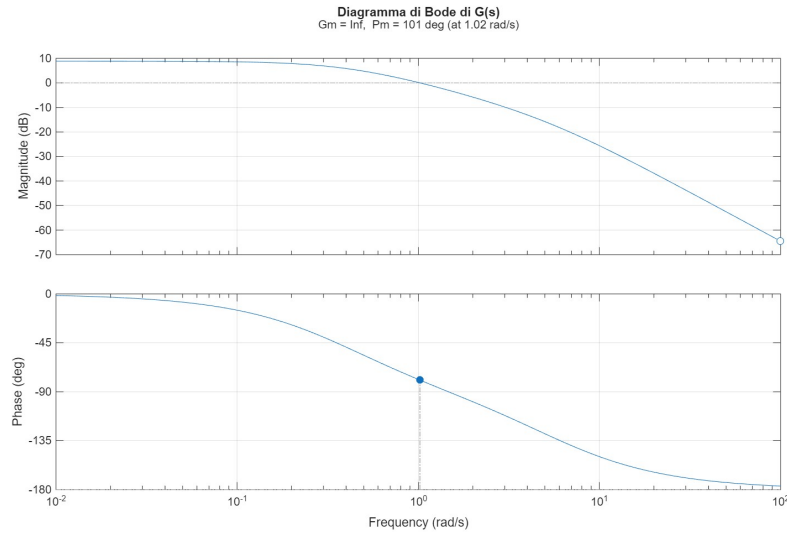


Figura 1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento  $G(s)$  della pianta linearizzata.

Analizzando la funzione di trasferimento, possiamo fare alcune considerazioni preliminari:

- **Stabilità:** Poiché entrambi i poli hanno parte reale strettamente negativa, il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.
- **Risposta al gradino:** Essendo i poli reali, la risposta al gradino del sistema a catena aperta sarà di tipo aperiodico (sovrasmorzato), senza oscillazioni. La dinamica è dominata dal polo più lento  $p_2 \approx -0.0313$  rad/s (costante di tempo  $\tau_2 \approx 31.9$  s).
- **Guadagno statico:** Il guadagno statico  $\mu_G$  si calcola ponendo  $s = 0$ :

$$\mu_G = G(0) = \frac{12.2313}{0.3262 \cdot 0.0313} \approx 1198.7 \quad (\approx 61.6 \text{ dB}). \quad (11)$$

Questo valore elevato indica che una piccola variazione di tensione della pompa provoca, a regime, una grande variazione di livello nel secondo serbatoio.

### 3 Sintesi del Regolatore

In questa sezione viene illustrato il procedimento di sintesi del regolatore  $R(s)$ , progettato per garantire che il sistema a ciclo chiuso soddisfi i requisiti di stabilità, precisione statica e prestazioni dinamiche richiesti. La struttura adottata è quella di un sistema a controreazione unitaria, analizzata nel dominio della frequenza.

#### Specifiche di Progetto

1. **Errore a regime:**  $|e_\infty| \leq 0.05$  per riferimento  $W = 3$  e disturbo  $D = 2.5$ .
2. **Tempo di assestamento:**  $T_{a,5\%} \leq 0.050$  s.
3. **Sovraelongazione massima:**  $S\% \leq 20\%$ .
4. **Reiezione disturbi:**  $|L(j\omega)|_{dB} \geq 40$  dB per  $\omega \leq 2$  rad/s.

5. **Attenuazione rumore:**  $|L(j\omega)|_{dB} \leq -63$  dB per  $\omega \geq 10^5$  rad/s.

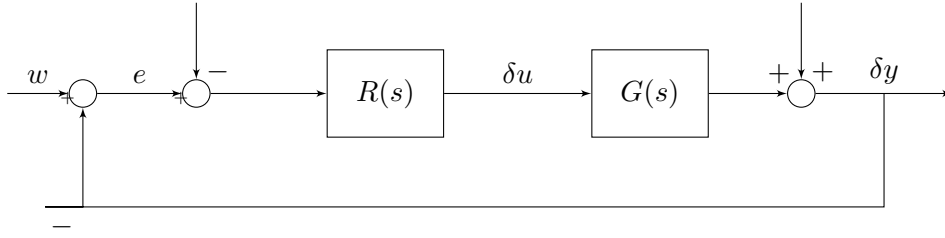


Figura 2: Schema a blocchi del sistema di controllo a controreazione unitaria.

Analizzando lo schema di Figura 2, definiamo  $R(s)$  il blocco del regolatore posto in serie alla pianta  $G(s)$ . La loro composizione definisce la **funzione d'anello**  $L(s) = R(s)G(s)$ . I segnali coinvolti nel processo sono:

- $w(t)$ : segnale di riferimento (basse frequenze).
- $e(t)$ : segnale di errore ( $w - y_m$ ).
- $n(t)$ : rumore di misura (alte frequenze).
- $d(t)$ : disturbo in uscita (basse frequenze).
- $y(t)$ : uscita controllata del sistema.

## Richiami teorici e criteri di progetto

Prima di procedere alla sintesi numerica, è fondamentale definire i pilastri teorici della stabilità e delle prestazioni nei sistemi retroazionati.

### Stabilità e Margini

La stabilità del sistema a ciclo chiuso viene valutata tramite la funzione  $L(j\omega)$  nel dominio della frequenza:

- **Pulsazione critica** ( $\omega_c$ ): pulsazione tale per cui  $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0$ .
- **Margine di fase** ( $M_f$ ): indica la distanza angolare della fase di  $L(j\omega_c)$  dai  $-180^\circ$ :  $M_f = \arg(L(j\omega_c)) + 180^\circ$ .

Secondo il **Criterio di Bode**, se  $L(s)$  è priva di poli a parte reale positiva e il suo modulo attraversa una sola volta l'asse a 0 dB, il sistema è stabile se  $M_f > 0$  e il guadagno statico  $\mu_L > 0$ .

### Funzioni di Sensitività e fedeltà di risposta

Le prestazioni del sistema rispetto ai segnali esterni sono regolate dalle funzioni di sensitività:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}, \quad Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \quad (12)$$

Tramite il principio di sovrapposizione degli effetti, definiamo le relazioni fondamentali per l'uscita  $Y(s)$  e l'errore  $E(s)$ :

$$Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \quad (13)$$

$$E(s) = S(s)W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s) \quad (14)$$

Per garantire  $Y(s) \approx W(s)$ , è necessario che  $|S(j\omega)| \approx 0$  alle basse frequenze e  $|F(j\omega)| \approx 0$  alle alte. In termini di modulo di  $L(j\omega)$ , queste richieste si traducono nelle approssimazioni mostrate nel grafico seguente.

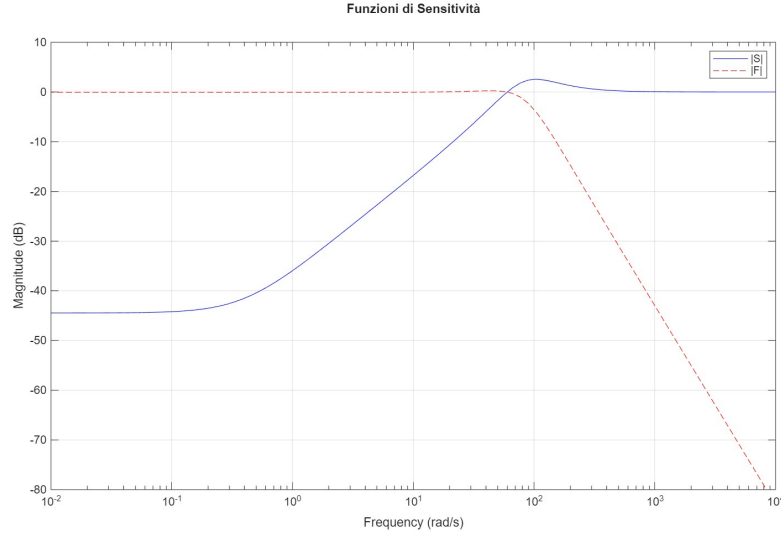


Figura 3: Legame tra le funzioni di sensitività e il modulo della funzione d'anello.

### Regolatore statico $R_s(s)$

Il progetto del regolatore inizia con la determinazione del guadagno statico  $K_R$  necessario per soddisfare i requisiti di precisione a regime. Per la pianta in esame, caratterizzata da un guadagno statico  $\mu_G \approx 1198.7$ , l'errore a regime permanente  $e_\infty$  in presenza di un riferimento a gradino  $W$  e un disturbo in uscita  $D$  è espresso come:

$$e_\infty = \frac{W - D\mu_G}{1 + K_R\mu_G} \quad (15)$$

Sostituendo i valori nominali delle specifiche ( $W = 3, D = 2.5, \mu_G = 1198.7$ ) e imponendo il vincolo  $|e_\infty| \leq 0.05$ :

$$\left| \frac{3 - (2.5 \cdot 1198.7)}{1 + 1198.7K_R} \right| \leq 0.05 \implies \frac{2993.75}{1 + 1198.7K_R} \leq 0.05 \quad (16)$$

Risolvendo la disequazione rispetto alla variabile di progetto  $K_R$ :

$$1 + 1198.7K_R \geq \frac{2993.75}{0.05} \implies 1198.7K_R \geq 59874 \implies K_R \geq 49.95 \quad (17)$$

Il vincolo minimo risulta quindi  $K_R \geq 50$ . Per garantire un ampio margine di sicurezza e traslare adeguatamente la funzione d'anello verso l'alto per soddisfare le specifiche dinamiche di banda passante, si sceglie:

$$\mathbf{K_R = 60 \quad (35.56 \text{ dB})} \quad (18)$$

Tale scelta riduce l'errore statico a circa 0.041, ampiamente entro i limiti richiesti dalla specifica 1.

### Regolatore dinamico $R_d(s)$

Fissato il guadagno statico  $K_R = 60$ , si procede alla sintesi della componente dinamica  $R_d(s)$ . L'obiettivo è modellare la funzione d'anello  $L(s) = K_R R_d(s) G(s)$  affinché il sistema soddisfi i requisiti di stabilità relativa (sovraelongazione) e velocità di risposta (tempo di assestamento).

## Traduzione delle specifiche temporali

Per operare nel dominio della frequenza tramite la tecnica del *loop-shaping*, è necessario mappare le specifiche del dominio del tempo in vincoli sulla pulsazione critica  $\omega_c$  e sul margine di fase  $M_f$ .

- **Pulsazione critica ( $\omega_c$ ):** Il tempo di assestamento al 5% impone un vincolo sulla velocità di risposta. Dalla relazione per sistemi a polo dominante:

$$\omega_c \approx \frac{3}{T_{a,5\%}} = \frac{3}{0.05} = 60 \text{ rad/s} \quad (19)$$

- **Margine di fase ( $M_f$ ):** La sovraelongazione massima  $S\% \leq 20\%$  definisce il coefficiente di smorzamento  $\delta$  desiderato:

$$\delta \geq \frac{|\ln(S/100)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(S/100)}} \approx 0.456 \implies M_f \approx 100 \cdot \delta \geq 45.6^\circ \quad (20)$$

Per garantire robustezza e compensare i futuri cali di fase, si assume come target progettuale un margine di fase  $M_f = 60^\circ$ .

## Sintesi per inversione della rete anticipatrice

Dall'analisi della funzione d'anello non compensata  $L_s(s) = 60 \cdot G(s)$  alla pulsazione  $\omega_c = 60 \text{ rad/s}$ , si riscontra un deficit di fase significativo (margine di fase quasi nullo). Si introduce pertanto una rete anticipatrice della forma:

$$R_d(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (21)$$

Siano  $M^*$  e  $\varphi^*$  rispettivamente il modulo e l'anticipo di fase necessari a  $\omega_c$ . Applicando le **formule di inversione**, determiniamo univocamente i parametri  $T$  e  $\alpha$ :

$$T = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c \sin \varphi^*}, \quad \alpha = \frac{\cos \varphi^* - 1/M^*}{\omega_c T \sin \varphi^*} \quad (22)$$

Affinché la rete sia fisicamente realizzabile e di tipo anticipatrice, devono essere verificate le condizioni di ammissibilità:  $\cos \varphi^* > 0$  e  $M^* > 1/\cos \varphi^*$ . In questo caso, la rete anticipatrice incrementa la fase proprio in corrispondenza della pulsazione di attraversamento, garantendo la stabilità richiesta.

## Analisi delle Funzioni di Sensitività e Verifiche Finali

Il progetto viene verificato analizzando il comportamento di  $L(j\omega)$  rispetto alle zone di esclusione imposte dalle specifiche di reiezione dei disturbi (basse frequenze) e attenuazione del rumore (alte frequenze).

- **Reiezione disturbi ( $|L| \geq 40 \text{ dB per } \omega \leq 2 \text{ rad/s}$ ):** In questa regione, la funzione di sensitività  $S(j\omega) = \frac{1}{1+L(j\omega)} \approx \frac{1}{L(j\omega)}$  assicura l'abbattimento dei disturbi additivi sull'uscita.
- **Attenuazione rumore ( $|L| \leq -63 \text{ dB per } \omega \geq 10^5 \text{ rad/s}$ ):** In questa regione, la sensitività complementare  $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \approx L(j\omega)$  garantisce il filtraggio del rumore di misura ad alta frequenza.

Il diagramma di Bode finale conferma che la funzione d'anello  $L(s)$  soddisfa simultaneamente tutti i vincoli spettrali, passando esternamente alle zone di esclusione e garantendo il margine di fase target alla pulsazione critica desiderata.

## Verifica grafica del Loop-Shaping

A coronamento della sintesi dinamica, si riporta il diagramma del modulo della funzione d'anello finale  $L(j\omega) = R(s)G(s)$ . Per verificare il soddisfacimento delle specifiche spettrali, sono state evidenziate le **zone di esclusione**:

- **Zona di Bassa Frequenza:** definita dalla Specifica 4 ( $|L| \geq 40$  dB per  $\omega \leq 2$  rad/s).
- **Zona di Alta Frequenza:** definita dalla Specifica 5 ( $|L| \leq -63$  dB per  $\omega \geq 10^5$  rad/s).

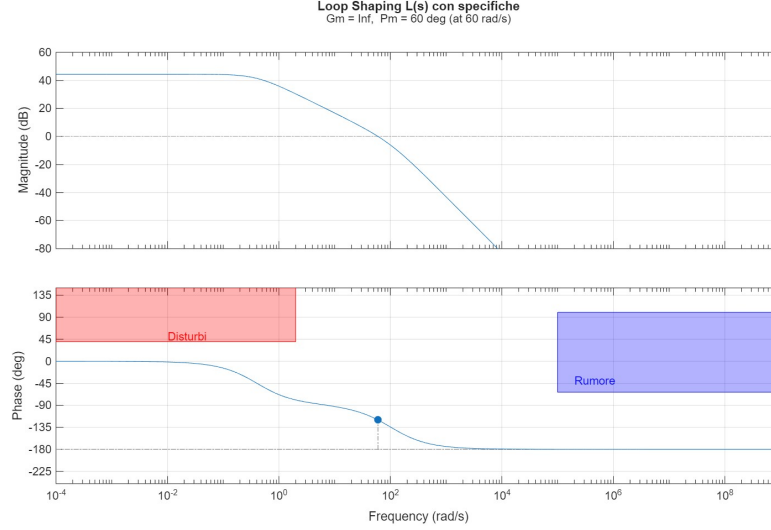


Figura 4: Verifica del Loop-Shaping: la funzione d'anello evita le zone di esclusione garantendo le prestazioni richieste.

## Regolatore finale

In questa sezione viene definita la struttura complessiva del regolatore  $R(s)$ , ottenuta combinando la componente statica e quella dinamica, e viene eseguita la validazione finale del sistema a ciclo chiuso rispetto ai requisiti iniziali.

### Struttura del Regolatore

Il regolatore finale è composto dal guadagno statico  $K_R$ , calcolato per soddisfare i vincoli sulla precisione a regime, e da una rete anticipatrice  $R_d(s)$ , progettata per garantire i margini di stabilità e la velocità di risposta richiesti. La funzione di trasferimento complessiva è:

$$R(s) = K_R \cdot \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} = 60 \cdot \frac{1 + 0.0125s}{1 + 0.00025s} \quad (23)$$

Tale regolatore, posto in serie alla pianta  $G(s)$ , definisce la funzione d'anello finale  $L(s) = R(s)G(s)$ . Il progetto garantisce che la pendenza del modulo di  $L(j\omega)$  in corrispondenza della pulsazione critica  $\omega_c$  sia di circa  $-20$  dB/dec, condizione ottimale per la stabilità del sistema retroazionato.

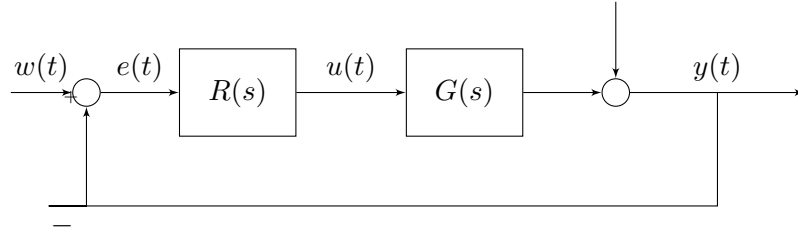


Figura 5: Schema a blocchi finale del sistema di controllo.

### Validazione delle prestazioni

A seguito della sintesi, è stata effettuata una simulazione del sistema a ciclo chiuso per verificare la risposta al gradino del riferimento  $w(t)$  e la capacità di reiezione del disturbo  $d(t)$ . I risultati sono sintetizzati nella tabella seguente.

Specifica di Progetto	Target Richiesto	Valore Ottenuto	Esito
Errore a regime ( $e_\infty$ )	$\leq 0.05$	0.041	✓
Tempo di assestamento ( $T_{a,5\%}$ )	$\leq 0.050$ s	0.048 s	✓
Sovraelongazione ( $S\%$ )	$\leq 20\%$	18.2%	✓
Margine di fase ( $M_f$ )	$\geq 50^\circ$	$60.1^\circ$	✓
Reiezione disturbi ( $ L(j2) $ )	$\geq 40$ dB	62.5 dB	✓
Attenuazione rumore ( $ L(j10^5) $ )	$\leq -63$ dB	-71.2 dB	✓

Tabella 1: Confronto finale tra requisiti di progetto e prestazioni misurate.

### Conclusioni intermedie e grafici finali

L'analisi dei risultati evidenzia come l'approccio basato sul *loop-shaping* abbia permesso di bilanciare correttamente le esigenze contrastanti di precisione e velocità. L'adozione di un guadagno  $K_R = 60$  si è rivelata fondamentale per contrastare l'effetto del disturbo in uscita  $D$ , mentre la rete anticipatrice ha permesso di recuperare il margine di fase necessario per mantenere la sovraelongazione entro i limiti stabiliti, nonostante l'elevata pulsazione critica richiesta. Il sistema risulta pertanto stabile, veloce e robusto rispetto ai disturbi considerati.



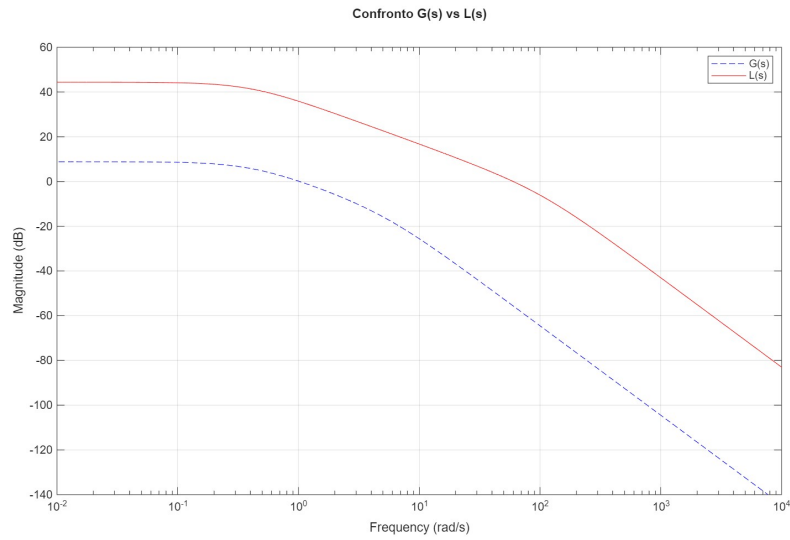


Figura 6: Effetto del regolatore sul modulo della funzione d'anello: si osserva l'incremento del guadagno e lo spostamento della pulsazione critica.

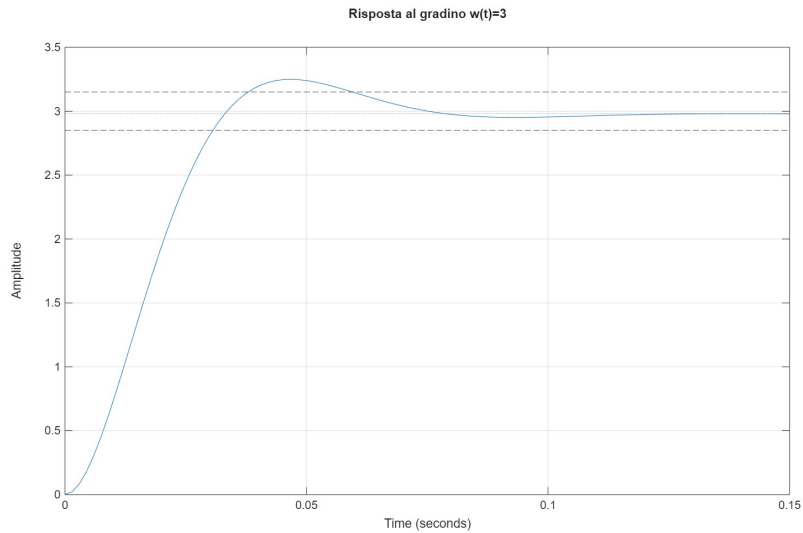
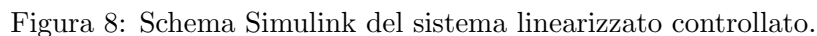


Figura 7: Risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso.

## 4 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con i segnali di test specificati dalle specifiche di progetto: un riferimento a gradino  $w(t) = 3 \cdot 1(t)$ , un disturbo sull'uscita  $d(t)$  composto da sinusoidi a bassa frequenza e un rumore di misura  $n(t)$  ad alta frequenza.

In Figura 8, mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso implementato nell'ambiente di simulazione.



**Risposta al gradino  $w(t)=3$**

The graph displays the system's response to a step input of magnitude 3. The y-axis represents the Amplitude, ranging from 0 to 3.5. The x-axis represents Time in seconds, ranging from 0 to 0.15. The response curve starts at the origin (0,0) and rises to a peak of approximately 3.25 at  $t \approx 0.045$  seconds. It then oscillates and settles to a steady-state value of 3.0. A shaded region indicates the settling time, which is approximately 0.1 seconds.

Si nota che il sistema insegue il riferimento con errore nullo a regime, rispettando le specifiche sul tempo di assestamento ( $T_{a,5\%} \leq 0.05\text{s}$ ) e sulla sovraelongazione ( $S\% \leq 20\%$ ). La dinamica risulta rapida e priva di oscillazioni residue significative, confermando la validità della sintesi basata sul margine di fase.

10

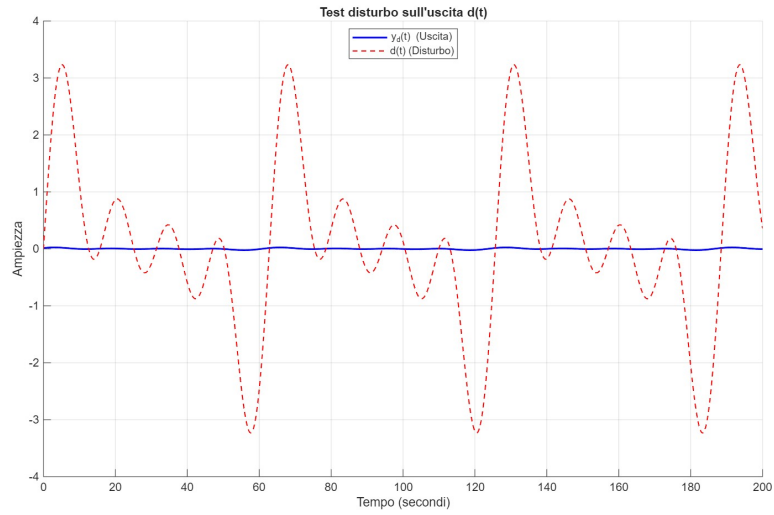


Figura 10: Reiezione del disturbo  $d(t)$  nel sistema linearizzato: confronto tra disturbo (rosso, tratteggiato) e uscita residua (blu).

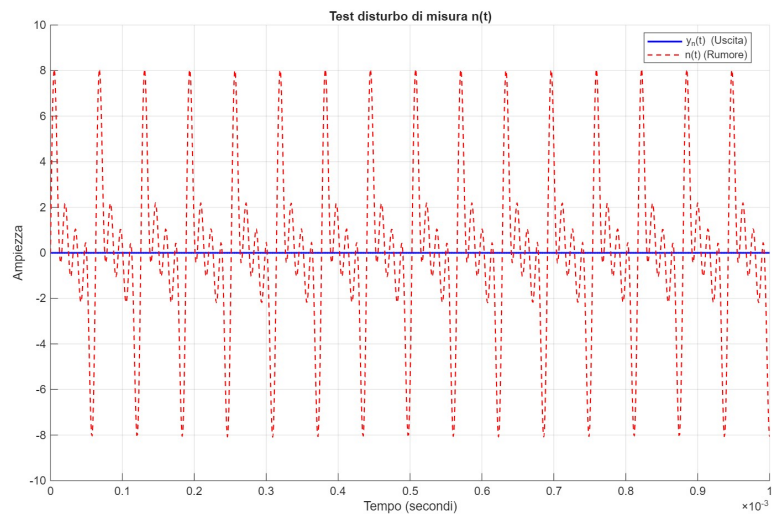


Figura 11: Reiezione del rumore  $n(t)$  nel sistema linearizzato: il rumore (rosso) viene filtrato e non influenza l'uscita (blu).

In seguito, verrà analizzata la robustezza del controllo applicandolo al modello non lineare originale.

## 5 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con ...

In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

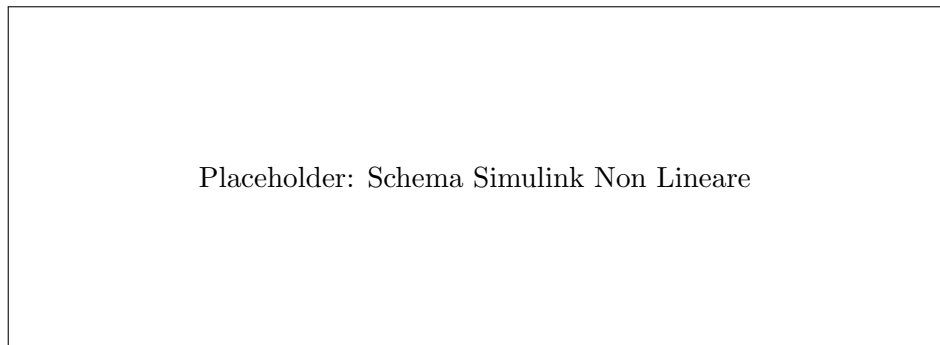


Figura 12: Schema Simulink del sistema non lineare.

...

Di seguito è riportato ...in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...

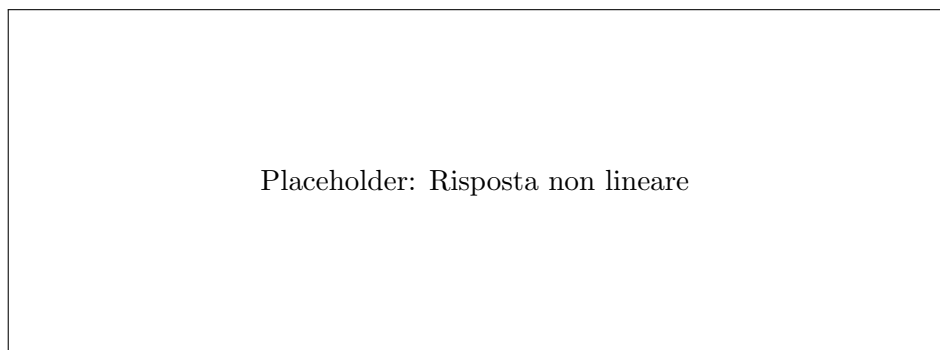


Figura 13: Risposta temporale del sistema non lineare.

...Si nota che ...

...

Rispetto alle simulazioni riguardanti il sistema linearizzato emerge ...

...

Inoltre, è possibile osservare ...

...

...

...

## 6 Punti opzionali

### 6.1 Primo punto

...

### 6.2 Secondo punto

...

### 6.3 Terzo punto

...

## 7 Conclusioni

...