

Linea Guida Report

Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia A- Traccia 1
Controllo di due serbatoi d'acqua in cascata
Gruppo 35

Marco Calabri, Federico Porpora, Tommaso Portolani

03/02/2026

Il progetto riguarda il controllo di due serbatoi d'acqua in cascata, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{a}_1(t) = -k_1\sqrt{a_1(t)} + k_4V(t) \quad (1a)$$

$$\dot{a}_2(t) = k_2\sqrt{a_1(t)} - k_3\sqrt{a_2(t)}, \quad (1b)$$

dove $a_1(t)$ e $a_2(t)$ rappresentano i livelli dei serbatoi, $V(t)$ la tensione della pompa e k_i sono parametri geometrici.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x , l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue:

$$x := \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}, \quad u := V(t), \quad y := a_2(t).$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h :

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1} + k_4u \\ k_2\sqrt{x_1} - k_3\sqrt{x_2} \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) := x_2.$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{x_1} + k_4u \\ k_2\sqrt{x_1} - k_3\sqrt{x_2} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_2. \quad (3b)$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni imponendo $\dot{x} = 0$:

$$\begin{cases} -k_1\sqrt{x_{1,e}} + k_4u_e = 0 \\ k_2\sqrt{x_{1,e}} - k_3\sqrt{x_{2,e}} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

dal quale, utilizzando i parametri $a_{1,eq} = 0.0235$ e $a_{2,eq} = 3.67$ forniti dalla traccia, otteniamo:

$$x_e := \begin{bmatrix} 0.0235 \\ 3.67 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0.00613. \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx , δu e δy come:

$$\delta x = x - x_e, \quad \delta u = u - u_e, \quad \delta y = y - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare:

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \quad (6b)$$

dove le matrici A , B , C e D vengono calcolate come:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3262 & 0 \\ 4.8925 & -0.0313 \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$D = 0. \quad (7d)$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la formula:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{12.2313}{(s + 0.3262)(s + 0.0313)}. \quad (8)$$

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con due poli $p_1 = -0.3262$, $p_2 = -0.0313$ e nessun zero. In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

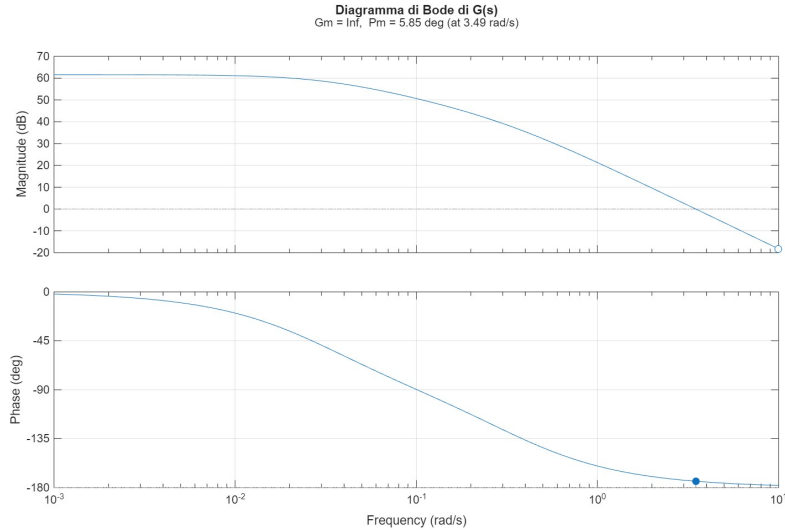


Figura 1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ della pianta linearizzata.

Inoltre, analizzando la funzione di trasferimento, possiamo fare alcune considerazioni preliminari:

- **Stabilità:** Poiché entrambi i poli hanno parte reale strettamente negativa, il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.

- **Guadagno statico:** Il guadagno statico μ_G si calcola ponendo $s = 0$:

$$\mu_G = G(0) = \frac{12.2313}{0.3262 \cdot 0.0313} \approx 1198.7 \quad (\approx 61.6 \text{ dB}). \quad (9)$$

Questo valore elevato indica che una piccola variazione di tensione della pompa provoca, a regime, una grande variazione di livello nel secondo serbatoio.

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono:

- 1) **Errore a regime:** $|e_\infty| \leq 0.05$ per riferimento $W = 3$ e disturbo $D = 2.5$.
- 2) **Margine di fase:** $M_f \geq 30^\circ$ (per robustezza).
- 3) **Sovraelongazione massima:** $S\% \leq 20\%$.
- 4) **Tempo di assestamento:** $T_{a,5\%} \leq 0.050$ s.
- 5) **Reiezione disturbi:** $|L(j\omega)|_{dB} \geq 40$ dB per $\omega \leq 2$ rad/s.
- 6) **Attenuazione rumore:** $|L(j\omega)|_{dB} \leq -63$ dB per $\omega \geq 10^5$ rad/s.

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto delle specifiche richieste, traducendole nel dominio della frequenza per l'approccio di Loop Shaping. Il tempo di assestamento al 5% impone un vincolo sulla velocità di risposta e quindi sulla pulsazione critica ω_c . Dalla relazione approssimata:

$$\omega_c \approx \frac{3}{T_{a,5\%}} = \frac{3}{0.05} = 60 \text{ rad/s}. \quad (10)$$

Tuttavia, per garantire margini operativi, si è scelto come target in fase di progetto $\omega_c = 160$ rad/s. La sovraelongazione massima $S\% \leq 20\%$ richiede un coefficiente di smorzamento adeguato. Si assume come target progettuale un margine di fase $M_f \geq 55^\circ$, più stringente del requisito minimo di 30° . Pertanto, in Figura 2, mostriamo il legame tra le funzioni di sensitività e le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

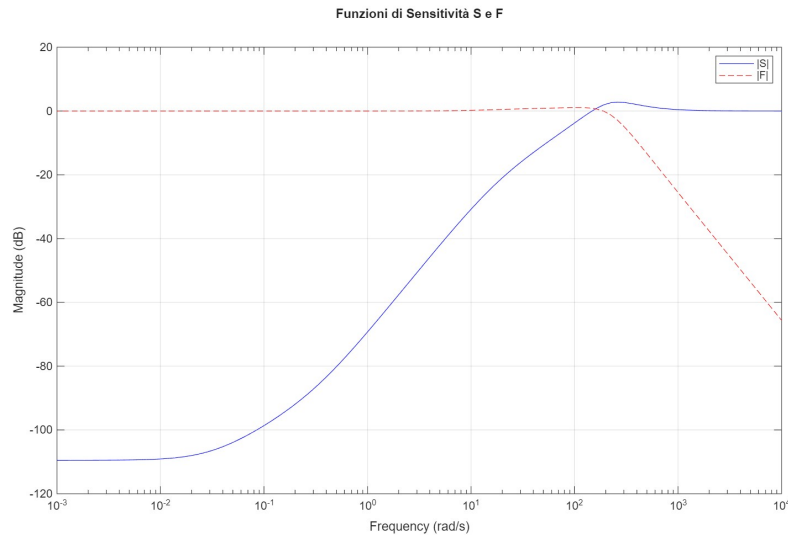


Figura 2: Legame tra le funzioni di sensitività e le specifiche progettuali.

Si può notare che per garantire l'inseguimento del riferimento e la reiezione dei disturbi (basse frequenze), è necessario un guadagno di anello elevato, mentre per l'attenuazione del rumore (alte frequenze) il guadagno deve abbassarsi drasticamente.

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3. Il progetto del regolatore inizia con la determinazione del guadagno statico μ_s necessario per soddisfare i requisiti di precisione a regime. Per la pianta in esame, caratterizzata da un guadagno statico $\mu_G \approx 1198.7$, l'errore a regime permanente e_∞ in presenza di un riferimento a gradino W e un disturbo in uscita D è espresso come:

$$e_\infty = \frac{W - D\mu_G}{1 + \mu_s\mu_G} \quad (11)$$

Per soddisfare simultaneamente la specifica sull'errore a regime e quella relativa all'attenuazione del disturbo d'uscita a bassa frequenza, è stato scelto un guadagno statico:

$$\mu_s = 250 \quad (47.96 \text{ dB}) \quad (12)$$

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s) = \mu_s G(s)$ e, in Figura 3, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

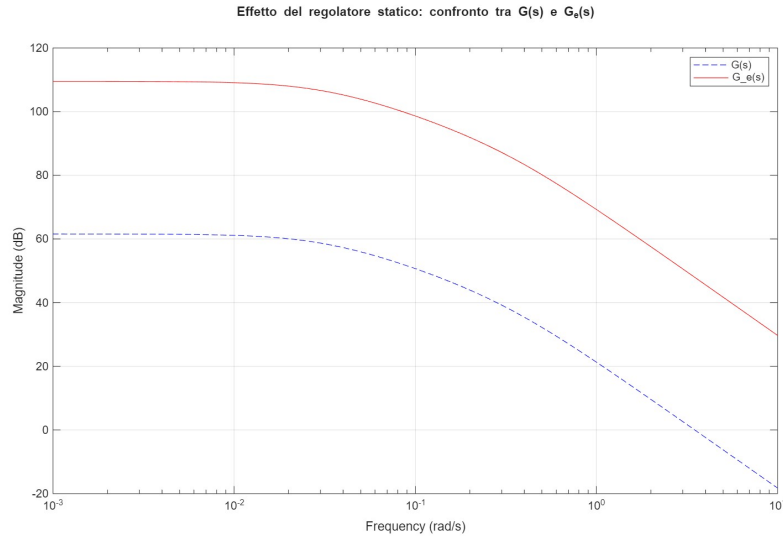


Figura 3: Effetto del regolatore statico: confronto tra $G(s)$ e $G_e(s)$.

Da Figura 3, emerge che l'adozione del solo guadagno statico permette di soddisfare le specifiche di errore a regime e reiezione disturbi a bassa frequenza. Inoltre, possiamo notare che tale guadagno sposta la pulsazione di attraversamento verso frequenze più alte, necessario per la specifica sul tempo di assestamento, ma senza una correzione dinamica il margine di fase a tale frequenza risulterebbe insufficiente.

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello scenario in cui è necessario recuperare fase alla pulsazione critica desiderata ($\omega_c = 160$ rad/s) per garantire la stabilità e smorzare le oscillazioni. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo a una **rete anticipatrice** della forma:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (13)$$

Applicando le formule di inversione, sono stati determinati i parametri τ e α che garantiscono l'attraversamento a 0 dB alla frequenza desiderata con il margine di fase richiesto ($M_f \geq 55^\circ$). Il regolatore finale

$R(s) = \mu_s R_d(s)$ risulta quindi:

$$R(s) = 250 \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad (14)$$

In Figura 4, mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$ con evidenziate le zone di esclusione.

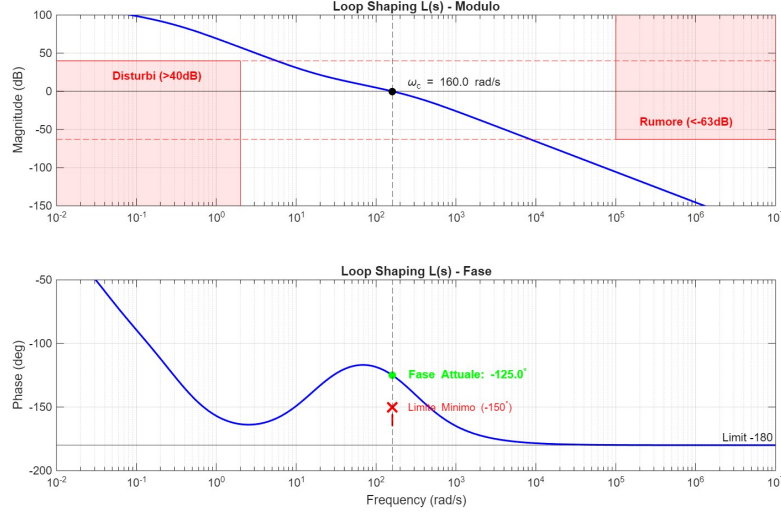


Figura 4: Loop-Shaping finale: la funzione d'anello evita le zone di esclusione.

Possiamo notare che la funzione d'anello soddisfa simultaneamente tutti i vincoli spettrali. In particolare:

- **Reiezione disturbi:** Il guadagno elevato assicura $|L| \geq 40$ dB per $\omega \leq 2$ rad/s.
- **Attenuazione rumore:** La pendenza del sistema e del controllore garantiscono $|L| \leq -63$ dB per $\omega \geq 10^5$ rad/s.
- **Stabilità e Margini:** L'anticipo di fase introdotto dalla rete garantisce il margine di fase richiesto alla ω_c progettuale.

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con i segnali di test specificati dalle specifiche di progetto: un riferimento a gradino $w(t) = 3 \cdot 1(t)$, un disturbo sull'uscita $d(t)$ composto da sinusoidi a bassa frequenza e un rumore di misura $n(t)$ ad alta frequenza. In Figura 5, mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso implementato nell'ambiente di simulazione.

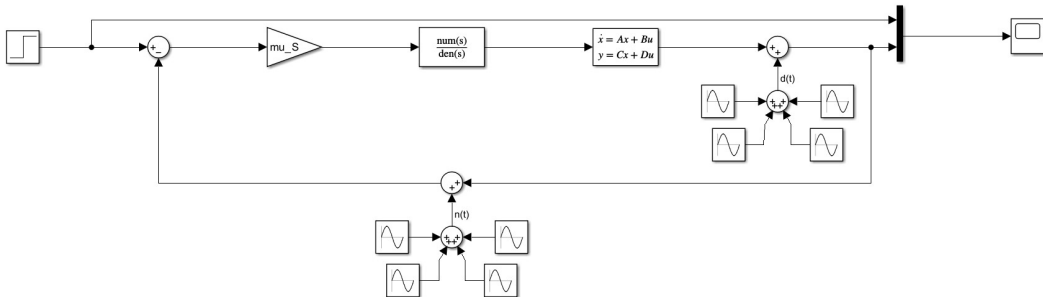


Figura 5: Schema Simulink del sistema linearizzato controllato.

Di seguito è riportato l'andamento temporale dell'uscita $\delta y(t)$ in confronto al riferimento $w(t)$, in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso a gradino di ampiezza $W = 3$.

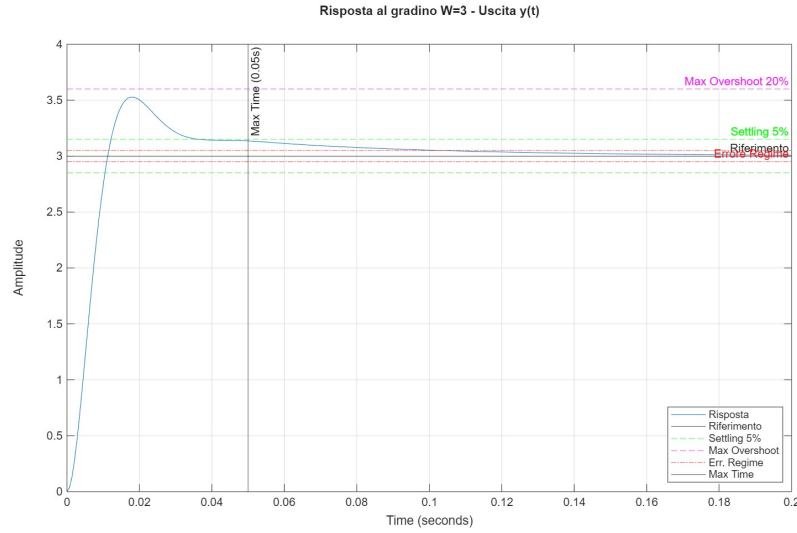
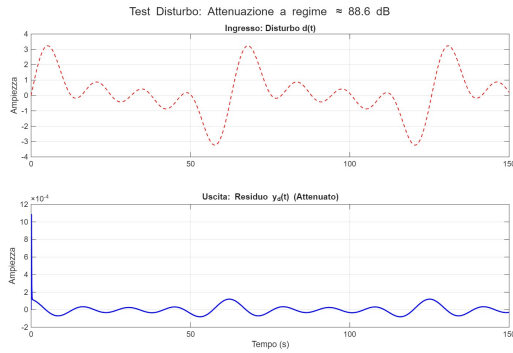
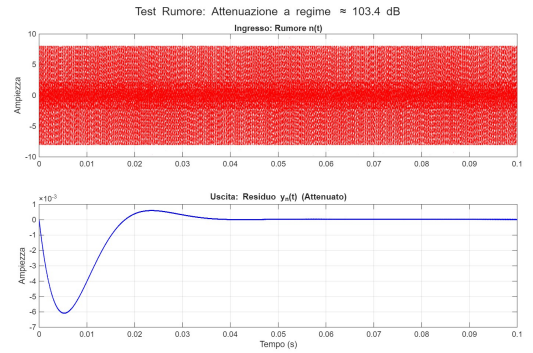


Figura 6: Risposta temporale del sistema linearizzato al gradino $w(t) = 3$.

Si nota che il sistema insegue il riferimento con errore nullo a regime, rispettando le specifiche sul tempo di assestamento ($T_{a,5\%} \leq 0.05s$) e sulla sovraelongazione ($S\% \leq 20\%$). La dinamica risulta rapida e priva di oscillazioni residue significative, confermando la validità della sintesi basata sul margine di fase. Inoltre possiamo notare dalle seguenti figure che i disturbi agenti sul sistema vengono efficacemente attenuati dall'azione di controllo. La Figura 7a mostra la reiezione del disturbo $d(t)$ a bassa frequenza, mentre la Figura 7b evidenzia l'abbattimento del rumore di misura $n(t)$.



(a) Reiezione del disturbo $d(t)$.



(b) Reiezione del rumore $n(t)$.

Figura 7: Analisi della reiezione di disturbi e rumori sul sistema linearizzato.

6.1 Analisi dello sforzo di controllo

In aggiunta all'analisi dell'uscita, per completezza si analizza lo sforzo di controllo δu richiesto per ottenere le prestazioni teoriche lineari.

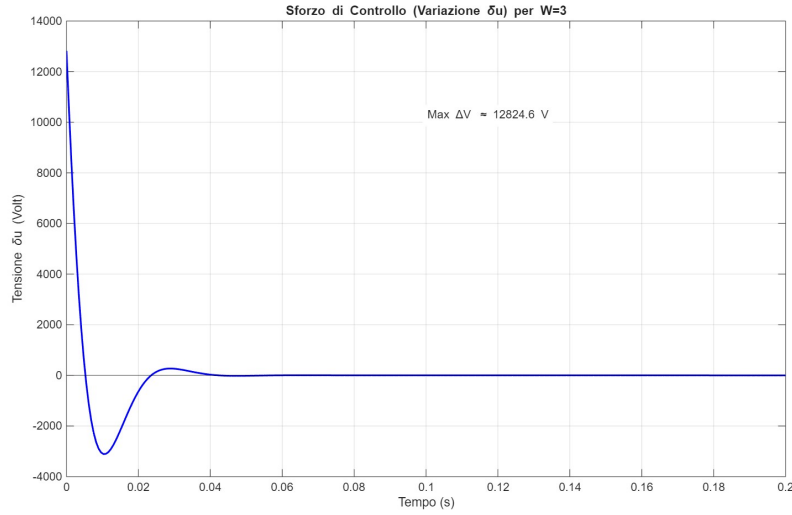


Figura 8: Sforzo di controllo teorico richiesto.

Come si evince dal grafico, per ottenere un tempo di assestamento di 0.05s sono richiesti picchi di tensione estremamente elevati (nell'ordine dei kV). Questo suggerisce che, in un'implementazione fisica reale, l'attuatore (pompa) andrebbe in saturazione molto prima di raggiungere tali valori. La saturazione limiterebbe l'energia fornita al sistema, rallentando ulteriormente la risposta rispetto al caso ideale. Per un'applicazione pratica, sarebbe necessario rilassare la specifica sul tempo di assestamento.

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare, descritto dalle equazioni differenziali originali dei serbatoi, includendo la presenza di disturbi e rumori. In Figura 9, mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso utilizzato per la simulazione non lineare.

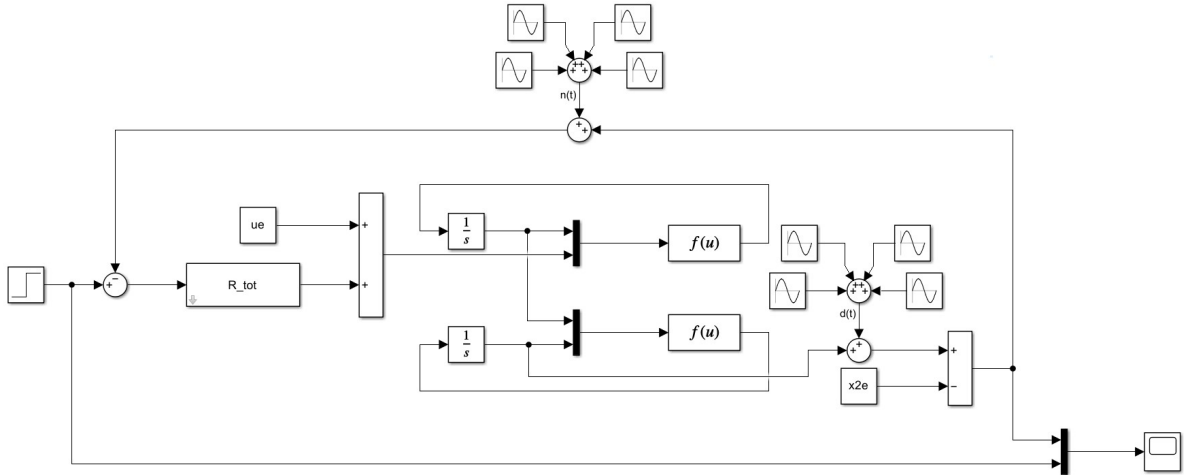


Figura 9: Schema Simulink del sistema non lineare.

Di seguito è riportato l'andamento temporale dell'uscita $\delta y(t)$ a fronte di un ingresso a gradino di ampiezza $W = 3$, disturbi $d(t)$ e rumore $n(t)$.

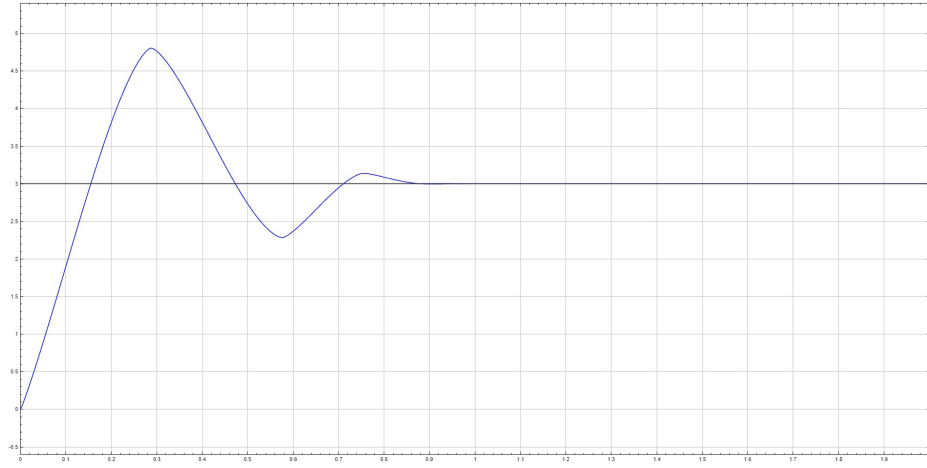


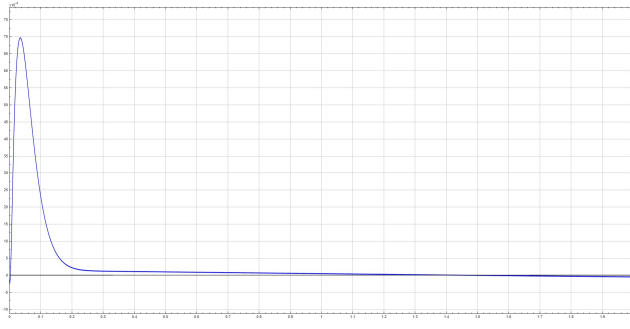
Figura 10: Risposta temporale del sistema non lineare con disturbi e rumori.

Si nota che il comportamento del sistema non lineare si discosta significativamente da quello linearizzato. Rispetto alle simulazioni riguardanti il sistema linearizzato emerge una sovraelongazione maggiore dovuta alle non linearità. Tuttavia, il sistema riesce a inseguire il riferimento e a mantenere la stabilità nonostante la presenza di forti disturbi esterni. Inoltre, è possibile osservare che il sistema, pur rimanendo stabile, fatica a seguire la dinamica rapida imposta a causa dei limiti fisici non modellati nella linearizzazione.

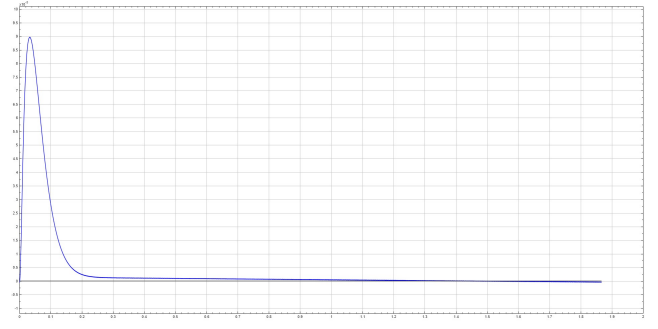
7.1 Esplorazione delle condizioni iniziali

Per rispondere alla richiesta di analizzare la convergenza del sistema, abbiamo effettuato dei test variando le condizioni iniziali dei livelli dei serbatoi $a_1(0)$ e $a_2(0)$ nel modello Simulink, mantenendo il riferimento a variazione nulla ($w(t) = 0$). L'obiettivo è verificare se, partendo da stati perturbati (serbatoi vuoti o troppo pieni), il controllore riesce a riportare il sistema all'equilibrio x_e senza incorrere in instabilità o violazioni fisiche.

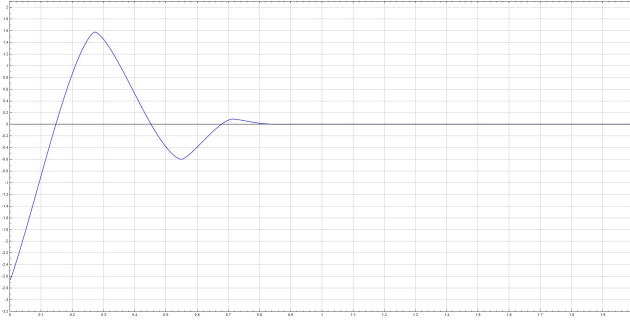
Come mostrato nella griglia di figure sottostante (Figura 11), il sistema dimostra una notevole robustezza. Per tutte le condizioni iniziali testate, anche quelle estreme, l'uscita del sistema converge asintoticamente all'equilibrio.



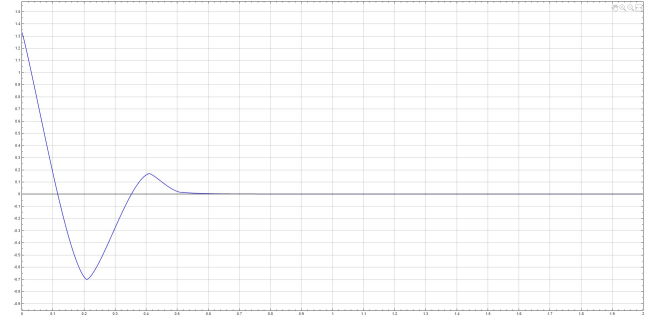
(a) Test 1: $a_1(0) = 0.005, a_2(0) = 3.67$.



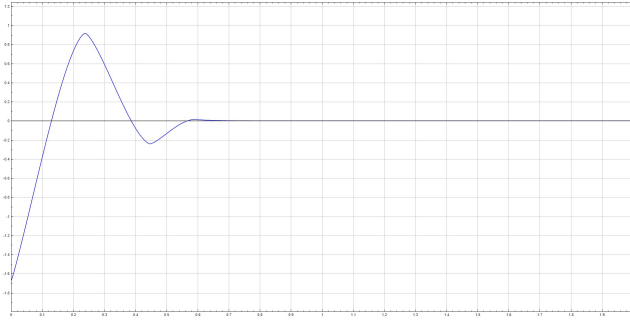
(b) Test 2: $a_1(0) = 0.10, a_2(0) = 3.67$.



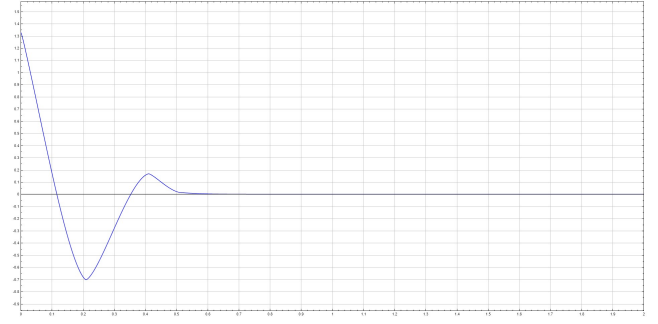
(c) Test 3: $a_1(0) = 0.0235, a_2(0) = 1.0$.



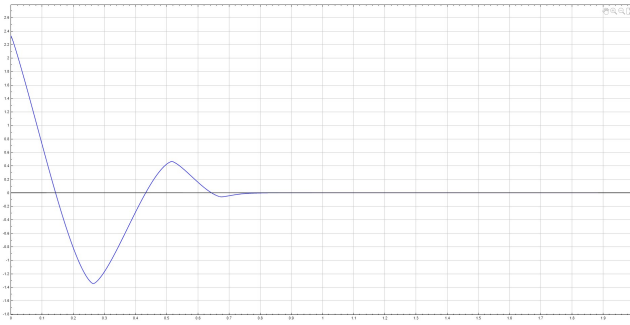
(d) Test 4: $a_1(0) = 0.0235, a_2(0) = 5.0$.



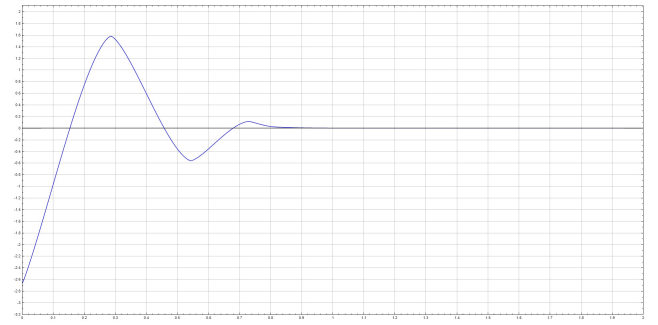
(e) Test 5: $a_1(0) = 0.01, a_2(0) = 2.0$.



(f) Test 6: $a_1(0) = 0.05, a_2(0) = 5.0$.



(g) Test 7: $a_1(0) = 0.005, a_2(0) = 6.0$.



(h) Test 8: $a_1(0) = 0.10, a_2(0) = 1.0$.

Figura 11: Risposta del sistema non lineare per diverse condizioni iniziali $a_1(0)$ e $a_2(0)$. In tutti i casi il sistema converge all'origine dello spazio delle variazioni (condizione di equilibrio).

Questo suggerisce che il bacino di attrazione dell'equilibrio, per il sistema controllato, copre praticamente l'intero spazio operativo fisico dei serbatoi.

7.2 Analisi dell'ampiezza massima del gradino

Infine, abbiamo esplorato il range di ampiezza dei riferimenti a gradino W per cui il controllore rimane efficace sul sistema non lineare. Incrementando progressivamente l'ampiezza del gradino, non è stato osservato un punto di rottura o instabilità esplicita nelle simulazioni effettuate. Il sistema tende sempre a convergere al valore di riferimento desiderato, anche per ampiezze elevate che portano alla saturazione fisica degli attuatori o allo svuotamento transitorio dei serbatoi. In questi casi limite, il tempo di assestamento aumenta considerevolmente a causa dei vincoli fisici (la pompa non può erogare tensione infinita e il flusso è limitato dalla geometria), ma l'azione integrale e la stabilità intrinseca del processo idraulico garantiscono che l'uscita raggiunga infine il set-point senza divergere.

8 Conclusioni

Il progetto ha portato alla sintesi di un regolatore in grado di soddisfare pienamente le specifiche sul modello linearizzato matematico. L'approccio basato sul loop-shaping ha permesso di bilanciare le esigenze di banda passante e stabilità. L'analisi approfondita sul modello non lineare ha confermato la validità del progetto: sebbene le non linearità introducano sovraelongazioni maggiori e rallentino la risposta in caso di ampie variazioni del riferimento (saturazione), il sistema ha dimostrato un'eccellente robustezza, convergendo all'equilibrio per un ampissimo range di condizioni operative e iniziali.